电磁学

AnZrew

癸卯秋冬于清华园

目录

Chapter 1

真空中的静电场

方程

$$\text{微分形式} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \tag{1.0.0.1}$$

$$\text{积分形式} \quad \begin{cases} \displaystyle\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \dfrac{Q_{\text{inside}}}{\varepsilon_0} \\ \displaystyle\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \end{cases} \tag{1.0.0.2}$$

常数

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}} \tag{1.0.0.3}$$

$$k = 8.9880 \times 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \tag{1.0.0.4}$$

无穷大平板电场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{1.0.0.5}$$

1.1 电荷

1.1.1 量子性 (Millikan 实验)

$$m = \frac{Q}{F}\frac{M}{z}$$

1.1.2 理想的点电荷

用 delta 函数描述：

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{1.1.2.1}$$

注. *1. δ 函数的性质*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.1.2.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{1.1.2.3}$$

1.1.3 电荷连续分布概率

物质中电荷密度分布，可以近似为连续分布：

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q_{\text{inside}\Delta V}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \tag{1.1.3.1}$$

1.1.4 对称性

Dirac：正电子

1.1.5 电荷守恒定律

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{1.1.5.1}$$

其中 $\mathbf{J}$ 为流场，$\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$。

证明.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V = -\oint_S \rho\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{J}\mathrm{d}V \tag{1.1.5.2}$$

用物理的视角就是，电荷的变化率等于电荷流出的速率。 □

1.1.6 相对论不变性

1.2 Coulomb 定律

通过扭秤实验，可以得到电荷之间的相互作用力与距离的平方成反比。

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{\mathbf{r_{12}}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{1.2.0.1}$$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k = 8.9880\times 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$ 称为电磁力常数。

1.3 电场与叠加原理

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}}{\|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}\|^3} \tag{1.3.0.1}$$

电场与电场强度 (electric field and electric field intensity) 定义为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q} \tag{1.3.0.2}$$

其中 q 为静止的检验（点）电荷，$\mathbf{F}$ 为检验电荷受的电场力。单位为 $\mathrm{N\,C^{-1}} = \mathrm{V\,m^{-1}}$。

场是一种近距相互作用。

有叠加原理 (Superposition principle)：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \tag{1.3.0.3}$$

1.3.1 常见电场举例

1. 点电荷

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_0}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}\|^3} \tag{1.3.1.1}$$

2. 电偶极子

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{r}\|^3} \tag{1.3.1.2}$$

计算时利用 Taylor 展开，保留到二阶项。

3. 连续体

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1.3.1.3}$$

例如电荷均匀分的环形栅极：

1.4 Gauss 定理

1.4.1 电场线

电场线是电场的一种图像，它的定义为：

1. 电场线的切线方向为电场强度的方向。
2. 电场线的密度与电场强度的大小成正比。
3. 电场线不会相交。

1.4.2 电通量

我们认为电通量是通过该面的电场线的数量：

$$\|\mathbf{E}\| = \alpha\frac{\mathrm{d}N_{条数}}{\mathrm{d}S_{\perp}} \tag{1.4.2.1}$$

电通量定义为：

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1.4.2.2}$$

约定 d**S** 的方向为闭合曲面向外的法向。单位为 $\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}} = \mathrm{V\,m}$。
则有：

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \|\mathbf{E}\| \theta \mathrm{d}S_{\perp} = \iint \alpha \mathrm{d}N = \alpha N \tag{1.4.2.3}$$

1.4.3 Gauss 定理

在真空中的静电场内，通过任意闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围电量的代数和除以真空介电常数。

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{inside}}}{\varepsilon_0} \tag{1.4.3.1}$$

从电力线的角度看是符合直觉的。

证明.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1.4.3.2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathrm{d}V' \tag{1.4.3.3}$$

$$= \frac{Q_{\text{inside}}}{\varepsilon_0} \tag{1.4.3.4}$$

□

注. *1. Gauss 定理是平方反比律的必然结果；*

2. 电通量由 S 面内的电荷量的值决定，与其分布无关；

3. E 是总场强，它由 q 内和 q 外共同决定；

4. 高斯定理也适用于变化电场。

Gauss 定理的微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.4.3.5}$$

证明.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \mathrm{d}V \tag{1.4.3.6}$$

$$= \frac{Q_{\text{inside}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathrm{d}V' \tag{1.4.3.7}$$

□

这是 Maxwell 方程组中的第一个方程。

1.4.4 常见电场举例

除了上面的叠加定理，可以取 Gauss 面分析问题。

1. 均匀球

$$\mathbf{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{1.4.4.1}$$

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{r^3}{R^3} Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{r} \tag{1.4.4.2}$$

2. 无穷大平板

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \tag{1.4.4.3}$$

3. 无穷长直线

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \tag{1.4.4.4}$$

1.5 环路定理

静电场的环量恒等于零，即对任意闭合路径 L 有：

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=0 \tag{1.5.0.1}$$

证明.

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\oint_L \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.5.0.2}$$
$$=\oint_L \frac{\partial\phi}{\partial l}\mathrm{d}l \tag{1.5.0.3}$$
$$=0 \tag{1.5.0.4}$$

□

注. *1.* 电场力做功与路径无关，只与起点与终点的位置有关；

2. 静电场沿任何闭合环路做功为零，是保守场；

3. 静电场是一个无旋场，不会出现任何闭合的电场线；

4. 环路定理是有心力场的必然结果。

环路定理的微分形式：

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{1.5.0.5}$$

这是因为有心力是保守的。
这是 Maxwell 方程组中的第二个方程（在静电场情况下）。

1.5.1 电势

旋度为零在数学上意味着是一个势函数的梯度，即：

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi \tag{1.5.1.1}$$

ϕ 称为电势，单位为伏特（V）。

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.5.1.2}$$

我们定义无穷远处电势为零。

1.6 Coulomb 定律 + 叠加原理与 Gauss 定理 + 环路定理的等价性

1.6.1 立体角

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S_\perp}{r^2} \tag{1.6.1.1}$$

对于一个闭合曲面，有：

$$\oint_S \mathrm{d}\Omega = 4\pi \qquad (\text{if } \mathbf{r} \text{ is inside}) \tag{1.6.1.2}$$

$$= 0 \qquad (\text{if } \mathbf{r} \text{ is outside}) \tag{1.6.1.3}$$

1.6.2 等价性说明

Coulomb 定律 + 叠加原理 ⇒ Gauss 定理 + 环路定理

证明. 对一个点电荷，有：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{r}\|^2} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1.6.2.1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \mathrm{d}\Omega \tag{1.6.2.2}$$

$$= \frac{q_{\text{inside}}}{\varepsilon_0} \tag{1.6.2.3}$$

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L f(r)\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{1.6.2.4}$$
$$= \oint_L f(r) r \mathrm{d}r \tag{1.6.2.5}$$
$$= 0 \tag{1.6.2.6}$$

叠加可得。 □

Gauss 定理 + 环路定理 ⇒ Coulomb 定律 + 叠加原理

证明. 前两个方程可得：

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.6.2.7}$$
$$\nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{1.6.2.8}$$

这意味着 $\mathbf{E}$ 是一个保守场，即存在势函数 ϕ，使得：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \tag{1.6.2.9}$$

从而有 Poisson 方程：

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.6.2.10}$$

对于点源，有 Green 函数：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}\|} \tag{1.6.2.11}$$

从而有：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}\|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}) \tag{1.6.2.12}$$

□

1.7 总结

静电场主要是三个物理量的关系：电荷密度 ρ，电场强度 $\mathbf{E}$，电势 ϕ。由 Maxwell 的静电场方程给出：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.7.0.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.7.0.2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{1.7.0.3}$$

Chapter 2

静电场中的导体与电介质

方程

$$\text{边值关系} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 & \text{Gauss 定理} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{环路定理} \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} & \text{物质方程} \end{cases} \tag{2.0.0.1}$$

$$\text{边值关系} \quad \begin{cases} \mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} \\ \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \\ \phi_1 = \phi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial n} \end{cases} \tag{2.0.0.2}$$

电介质

$$\text{极化电介质} = \text{真空} + \text{极化面电荷 } \sigma' + \text{极化体电荷 } \rho' \tag{2.0.0.3}$$

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{2.0.0.4}$$

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{2.0.0.5}$$

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{2.0.0.6}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{2.0.0.7}$$

电偶极子

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}\|^3} \tag{2.0.0.8}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|^2} \tag{2.0.0.9}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}\times\mathbf{E} \tag{2.0.0.10}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E} \tag{2.0.0.11}$$

2.1 物质的电性质

2.1.1 物质的场

物质中的场是指宏观场。选微观足够大，宏观足够小的体积对微观场（局域场 Local Field）取平均得到宏观场。该宏观场满足 Maxwell 方程组。

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{\text{Local}} \rangle \tag{2.1.1.1}$$

2.1.2 物质的电性质

物质根据电性质分为绝缘体、半导体、导体、超导体，他们的区别在于电阻率 ρ。

2.2 静电场中的导体

2.2.1 静电场中的导体的性质

1. 导体内部的电场为零。

   导体内部有自由载流子，达到静电平衡时，自由载流子不再运动。外部电场和感应电场平衡。

2. 导体表面的电场垂直于表面，表面是等势面。

   导体表面的电场与表面平行，否则会有电场力使得自由载流子运动。

3. 导体表面的电荷分布在表面。

   σ 可不为零，但内部 ρ 必为零。这是因为 Maxwell 方程组的第一式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.2.1.1}$$

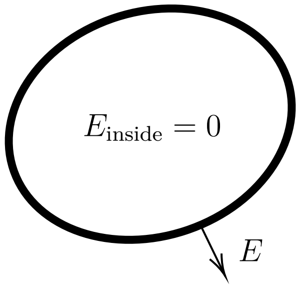

图 2.1: 导体表面的电场

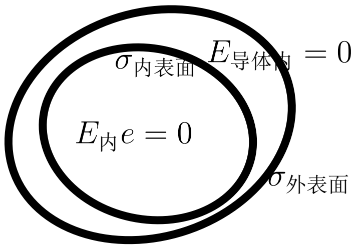

图 2.2: 空腔导体

4. 对于空腔导体：

   在导体内部取 Gauss 面，由于导体内部电场强度恒为 0，可以得到 $\sigma_{\text{内表面}} = 0$。$\sigma_{\text{外表面}}$ 可能不为零。

   又由于电势满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{2.2.1.2}$$

   可以得到 ϕ 在导体内部恒为常数，即 $E_{\text{内}} = 0$。

   如果空腔内部有电荷，则有内表面电荷不为 0，由 Gauss 定理：

$$\oint \sigma_{\text{内表面}} \mathrm{d}S = -Q_{\text{inside}} \tag{2.2.1.3}$$

   外表面电荷为：

$$\oint \sigma_{\text{外表面}} \mathrm{d}S = Q_{\text{inside}} \tag{2.2.1.4}$$

这时空腔内部的电场强度不为零，但是导体内部的电场强度仍然为零（感应电荷和内部电荷电场的共同作用）。

5. 表面场强与面电荷密度的关系

   取一个贴近表面的小 Gauss 面，内部电场强度为 0，有：

$$\mathbf{E}_{\text{表面}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{2.2.1.5}$$

   其中面积微元表面的电荷（无穷大平面）贡献 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，剩余的 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 由面积微元外电荷贡献。

6. 表面电荷分布与曲率的关系

   假设两个导体球相距无限远，导线相连，电荷量、面电荷密度和半径分别为 $Q, q; \Sigma, \sigma; R, r$。二者电势相等则有：

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.2.1.6}$$

   从而：

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{r}{R} \tag{2.2.1.7}$$

   这表示孤立导体表面曲率大处面电荷密度也大，但不存在单一函数关系。

   尖端放电（point discharge）：带电的尖端电场强，使附近的空气电离，因而产生放电。

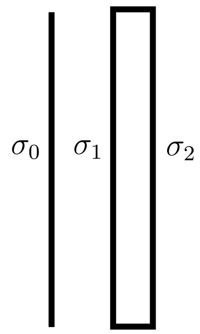

图 2.3: 题图

例. 面电荷密度为 σ_0 的均匀带电大平板旁，平行放置一大的不带电导体平板。求导体板两表面的面电荷密度。

电荷守恒：

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \tag{2.2.1.8}$$

导体内部电场强度为零，有：

$$E_0 + E_1 - E_2 = 0 \tag{2.2.1.9}$$

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = 0 \tag{2.2.1.10}$$

解得：

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{2} \tag{2.2.1.11}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} \tag{2.2.1.12}$$

如果右侧导体棒接地，由于无穷远和导体表面电势都为 *0*，导体板右侧电场强度应为 *0*，故电荷守恒式变为：

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = 0 \tag{2.2.1.13}$$

剩下的导体内部电场强度为零不变。解得：

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \tag{2.2.1.14}$$

$$\sigma_2 = 0 \tag{2.2.1.15}$$

2.2.2 静电唯一性定理

$$\text{唯一性定理}\begin{cases}\text{给定电荷分布}\\ \text{边界条件}\begin{cases}\text{第一类：边界电势分布【Dirichlet】}\\ \text{第二类：边界等电势，并给定电通量/电量【Neuman】}\\ \text{第三类：混合边界条件}\end{cases}\end{cases}$$

满足电荷分布和边界条件的电场是唯一的。

我们从物理和数学两个角度出发：

物理角度

引理 (Lemma1). *在无电荷的空间里电势不可能有极大值或极小值。*

证明. 假设在某点有极大值，则在该点的邻域内取 Gauss 面，得到矛盾。

或者又调和函数的性质，边界不可能取到最值。 □

引理 (Lemma2). *该空间中，若所有导体电势为零，则导体以外空间电势处处为零。*

证明. 电势在无电荷空间连续分布，若空间有电势大于 0（或小于 0）的点，而边界上又处处等于 0，在空间必出现电势的极大（或极小）值，这违背上一条引理。 □

可以得到一条推论：

引理 (推论). *若在完全由导体所包围的空间里各导体电势都相等（设为 U_0），则空间电势等于常量 U_0。*

引理 (Lemma3). 若所有导体都不带电，则各导体的电势都相等。

证明. 如果存在最大的电势 U_0，则在该点的邻域内取 Gauss 面，得到矛盾。 □

如果在给定电荷分布和边界条件的情况下，电势不唯一，电势设为 $\phi_1(\mathbf{r}),\phi_2(\mathbf{r})$。记 $\phi(\mathbf{r})=\phi_1(\mathbf{r})-\phi_2(\mathbf{r})$。

两类边界条件是：

第一类【Dirichlet】：边界 S 上 ϕ_i 确定

$$\phi(\mathbf{r})|_S=0 \tag{2.2.2.1}$$

根据引理 2，有：

$$\phi(\mathbf{r})=0 \tag{2.2.2.2}$$

这意味着唯一性：$\phi_1(\mathbf{r})=\phi_2(\mathbf{r})$。

第二类【Neuman】：边界上 $\frac{\partial\phi}{\partial n_i}$ 确定

$$\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\oint -\nabla\phi \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{2.2.2.3}$$

$$=\oint -\frac{\partial\phi}{\partial n_i}\mathrm{d}S_i=0 \tag{2.2.2.4}$$

其中：

$$\frac{\partial\phi}{\partial n_i}|_S=q(\mathbf{r}) \tag{2.2.2.5}$$

表示的是边界上的电荷分布。从而做差后的 ϕ 满足边界不带电。根据引理 3：

$$\nabla\phi(\mathbf{r})=0 \tag{2.2.2.6}$$

这意味着唯一性：$\phi_1(\mathbf{r})=\phi_2(\mathbf{r})+C$，其中 C 为常数。

数学角度

我们考察这样一个式子：

$$\nabla(\phi\nabla\phi) = \nabla\phi\cdot\nabla\phi + \phi\nabla^2\phi \tag{2.2.2.7}$$

在无电荷的空间里，$\nabla^2\phi = 0$，则：

$$\nabla(\phi\nabla\phi) = |\nabla\phi|^2 \tag{2.2.2.8}$$

从而：

$$\int \nabla(\phi\nabla\phi)\mathrm{d}V = \oint \phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{2.2.2.9}$$

$$= \int |\nabla\phi|^2\mathrm{d}V \geqslant 0 \tag{2.2.2.10}$$

注. 该式的物理含义：电荷系中的能量（电势 $\times$ 电量）$\oint\phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$= 无电荷空间中的能量 $\int|\nabla\phi|^2\mathrm{d}V$。

根据这个式子，结合边界条件：

$$\oint \phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int |\nabla\phi|^2\mathrm{d}V = 0 \tag{2.2.2.11}$$

可知：

$$\nabla\phi = 0 \tag{2.2.2.12}$$

这就是唯一性。

2.2.3 静电屏蔽

壳内域

若 $q_{内}$ 给定，则有方程：

$$q_{S_{内}} = -q_{内} \tag{2.2.3.1}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q_{内}}{\varepsilon_0} \tag{2.2.3.2}$$

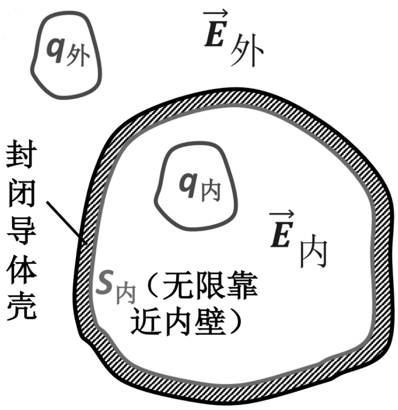

图 2.4: 静电屏蔽

这符合唯一性定理的第二类边界条件。从而无论 $q_{外}$ 如何变化，$\mathbf{E}_{内}$ 不变。

封闭导体壳屏蔽了壳外电荷对壳内的影响。

壳外域

若 $q_{外}$ 给定，则有方程：

$$q_{S_{外}} = q_{外} \tag{2.2.3.3}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q_{内}}{\varepsilon_0} \tag{2.2.3.4}$$

$$\phi_{\infty} = 0 \tag{2.2.3.5}$$

这符合唯一性定理的第三类边界条件。只要 $q_{内}$ 不变化，位置不固定，$\mathbf{E}_{外}$ 不唯一确定。

封闭导体壳部分屏蔽了壳内电荷对壳外的影响。

导体壳接地

域内有方程：

$$q_{内} \text{ 分布给定} \tag{2.2.3.6}$$
$$\phi_{S_{内}} = 0 \tag{2.2.3.7}$$

从而 $\mathbf{E}_{内}$ 与 $q_{外}$ 无关。

域外有方程：

$$q_{外} \text{ 分布给定} \tag{2.2.3.8}$$
$$\phi_{S_{外}} = 0 \qquad \phi_{\infty} = 0 \tag{2.2.3.9}$$

从而 $\mathbf{E}_{外}$ 与 $q_{内}$ 无关。

封闭导体壳完全屏蔽了内外场。

2.2.4 电像法

根据静电唯一性定理，我们可以通过构造电像来求解静电场问题。

例. 无限大均匀带电平面，距离为 d 处有一点电荷 q。

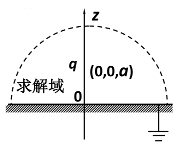

图 2.5: 题图

在对称处找一个电荷相反的点电荷，使得电势在无穷远处为零。等效成电偶极子。

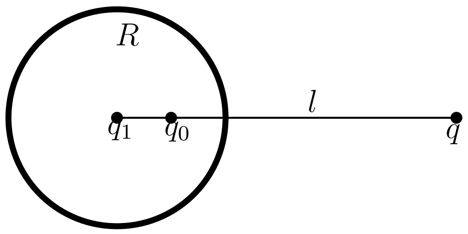

图 2.6: 题图

例. 一个半径为 R 的金属球，距离球心为 d 处有一点电荷 q。

根据等势面将球等效成 q_0，由 *Apollonius* 圆可知：

$$q_0 = -\frac{qR}{l} \tag{2.2.4.1}$$

$$d = \frac{R^2}{l} \tag{2.2.4.2}$$

为了平衡电荷，球上有电荷 q_1，有：

$$q_1 = \frac{qR}{l} \tag{2.2.4.3}$$

$$\tag{2.2.4.4}$$

2.3 静电场对物质的作用

静电场对物质的作用本质上是电场对物质内部电荷的作用：

导体是电场对自由电荷的作用，可简化为点电荷；绝缘体是电场对极化电荷的作用，可简化为偶极子。

电偶极子在电场内会受到力矩：

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_+) + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_-) \tag{2.3.0.1}$$

$$= q\mathbf{l} \times \frac{1}{2}(\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)) \tag{2.3.0.2}$$

$$= \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{2.3.0.3}$$

电偶极子在电场内会受到梯度力：

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{F}(\mathbf{r}_-) && (2.3.0.4)\\ &= q(\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)) && (2.3.0.5)\\ &= q\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) && (2.3.0.6)\\ &= \mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) && (2.3.0.7)\end{aligned}$$

用到了全微分和梯度的关系：

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \nabla\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2.3.0.8}$$

2.4 电容

对一个半径为 R 的孤立导体球，带电量为 Q，电势为 U：

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{2.4.0.1}$$

可知 Q 与 U 成正比，比例系数为 C，称为电容，反应出导体球储存电荷的能力。单位是 $F = CV$。

$$C = \frac{Q}{U} \tag{2.4.0.2}$$

静电唯一性定理保证任意形状孤立导体电势与电量成正的线性关系。对任意形状的一对带等量异号电荷的导体，线性关系仍然成立。

2.4.1 一些常见的电容

1. 平行板电容器（自屏蔽电容器）

   两板面积为 S，距离为 d，板上电荷量为 Q，则：

$$U = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \tag{2.4.1.1}$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{2.4.1.2}$$

2. 球形电容器（自屏蔽电容器）

   内外半径分别为 R_1, R_2，内外球面电荷量分别为 $+Q, -Q$，则：

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \tag{2.4.1.3}$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{2.4.1.4}$$

3. 圆柱形电容器（自屏蔽电容器）

   内外半径分别为 R_1, R_2，高度为 h，内外柱面电荷量分别为 $+Q, -Q$，则：

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\frac{R_2}{R_1} \tag{2.4.1.5}$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \tag{2.4.1.6}$$

2.4.2 电容的串并联

1. 串联

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} = \frac{Q}{Q/C_1 + Q/C_2} \tag{2.4.2.1}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \tag{2.4.2.2}$$

2. 并联

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1} = \frac{Q}{U_2} \tag{2.4.2.3}$$
$$= C_1 + C_2 \tag{2.4.2.4}$$

2.5 静电场中的电介质

2.5.1 多级展开与电介质的偶极子模型

将势能函数在 $\mathbf{r}_0$ 处展开：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{2.5.1.1}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}_0}}{|\mathbf{r}_0|^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}_0}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{r}_0}}{|\mathbf{r}_0|^3} + \cdots \tag{2.5.1.2}$$

其中：

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\mathrm{d}V' \tag{2.5.1.3}$$
$$\mathbf{Q} = \int \rho(\mathbf{r}')(3\mathbf{r}'\mathbf{r}' - \mathbf{I}r'^2)\mathrm{d}V' \tag{2.5.1.4}$$

是电荷分布的一阶和二阶矩，分别称为电偶极矩和电四极矩，是矢量和二阶张量。

我们认为电介质被外电场极化后可以等效为电偶极子，即：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}_0}}{|\mathbf{r}_0|^2} \tag{2.5.1.5}$$

2.5.2 极化强度矢量

电介质在电场中是下图的图景：

在宏观足够小，微观足够大定义。（宏观场）

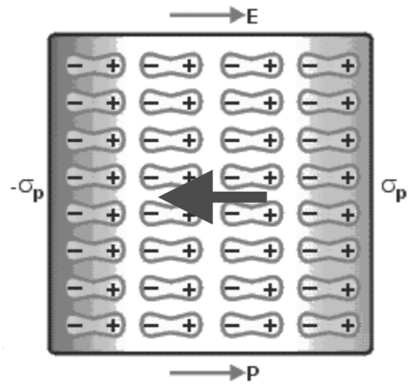

图 2.7: 电介质在电场中的图景

$$\mathbf{P} = \lim_{\mathrm{d}V \to 0} \frac{\sum \mathbf{p}_{\text{分子}}}{\mathrm{d}V} \tag{2.5.2.1}$$

电极化矢量的量纲与面电荷密度相同，单位是 C/m^2。

$$\text{极化电介质} = \text{真空} + \text{极化面电荷}\ \sigma' + \text{极化体电荷}\ \rho' \tag{2.5.2.2}$$

极化面电荷

$$Q_{\text{极化}} = qn\Delta V \tag{2.5.2.3}$$
$$= n\Delta Slq \tag{2.5.2.4}$$
$$= np\Delta S \tag{2.5.2.5}$$
$$= \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{S} \tag{2.5.2.6}$$

其中 n 是单位体积内的分子数。

从而极化面电荷密度：

$$\sigma' = \frac{Q_{\text{极化}}}{\Delta S} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{2.5.2.7}$$

极化体电荷

在非均匀极化的情况下，极化体电荷密度：

$$\rho' = \frac{Q_{\text{极化}}}{\Delta V} \tag{2.5.2.8}$$
$$= -\frac{1}{\Delta V}\oint \mathbf{P}\mathrm{d}S \tag{2.5.2.9}$$
$$= -\frac{1}{\Delta V}\int \nabla\cdot\mathbf{P}\mathrm{d}V \tag{2.5.2.10}$$
$$= -\nabla\cdot\mathbf{P} \tag{2.5.2.11}$$

电介质被外电场极化后可等效为偶极子，偶极子的场可影响外场。电介质极化后可产生极化面电荷和体电荷，极化面电荷和体电荷，产生退极化场从而影响外场。

$$\sigma' = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{2.5.2.12}$$
$$\rho' = -\nabla\cdot\mathbf{P} \tag{2.5.2.13}$$

例. 均匀极化球形介质中的电场强度。

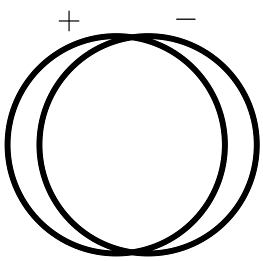

图 2.8: 题图

球内部使用 *Gauss* 定理：

$$\mathbf{E}\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\hat{\mathbf{r}} \tag{2.5.2.14}$$
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} \tag{2.5.2.15}$$

从而内部一点的电场：

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{2.5.2.16}$$
$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{P} \tag{2.5.2.17}$$

2.5.3 电介质中场的方程

我们对静电场的方程做一个修正：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 + \rho'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{2.5.3.1}$$
$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_0 \tag{2.5.3.2}$$

我们定义电位移矢量：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{2.5.3.3}$$

则有：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \tag{2.5.3.4}$$

这是电介质中的 Gauss 定理，其中 ρ_0 是自由电荷密度，ρ 是总电荷密度。

现在 Maxwell 方程组变为：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \tag{2.5.3.5}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{2.5.3.6}$$

对各向同性介质：

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{2.5.3.7}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{2.5.3.8}$$

其中 ε_r 是相对介电常数，ε 是介电常数，χ_e 是电极化率。

故对于各向同性介质：

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.5.3.9}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{2.5.3.10}$$

2.5.4 电介质中的边值关系

无自由面电荷，在电介质表面取 Gauss 面，有：

$$\mathbf{D_1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} - \mathbf{D_2}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_0 = 0 \tag{2.5.4.1}$$

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} \tag{2.5.4.2}$$

在电介质表面取回路，有：

$$\mathbf{E_1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} - \mathbf{E_2}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \tag{2.5.4.3}$$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \tag{2.5.4.4}$$

沿着法线方向 **D** 连续，沿着切线方向 **E** 连续。

也可以写成电势形式：

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \tag{2.5.4.5}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} = 0 \tag{2.5.4.6}$$

例. 对于带电物体外面的两种电介质的边界沿着原来的等势面，或者沿着原来的电场线，都可以用唯一性定理和边界条件，得到和原来形状相同的等势面和电场线。

Chapter 3

静电能

静电能

$$W_{互} = \sum_{i\neq j} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{3.0.0.1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V = \frac{1}{2}QU \tag{3.0.0.2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\mathrm{d}V \tag{3.0.0.3}$$

总静电能 = 自由电荷系能 = 总电荷 − 极化电荷系能 = 宏观电场能 + 微观电场能：

$$W = \frac{1}{2}\int \rho_0\phi \mathrm{d}V \tag{3.0.0.4}$$

$$W = \frac{1}{2}\int (\rho - \rho')\phi \mathrm{d}V \tag{3.0.0.5}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.0.0.6}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.0.0.7}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.0.0.8}$$

静电力：

$$\mathbf{F} = \nabla W|_{U\ 不变} \tag{3.0.0.9}$$

$$= -\nabla W|_{Q\ 不变} \tag{3.0.0.10}$$

能量是一个标量，利用虚功可以计算力：克服体系中的内力做的功等于体系能量的增加。

3.1 点电荷系的静电能

下面我们计算点电荷系的静电互能：

n 个点电荷，先把 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 依次移走，有：

$$W = q_1\phi(2, \cdots, n) + q_2\phi(3, \cdots, n) + \cdots + q_{n-1}\phi(n) \tag{3.1.0.1}$$

再把 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 依次移回，有：

$$W = q_1\phi(1) + q_2\phi(1,2) + \cdots + q_{n-1}\phi(1, 2, \cdots, n-2) + q_n\phi(1, 2, \cdots, n-1) \tag{3.1.0.2}$$

两式相加（即对电势能算两次），得到：

$$\begin{aligned} W_{\text{互}} &= \frac{1}{2}\sum q_i\phi(j = 1, \cdots, n; j \neq i) && (3.1.0.3)\\ &= \sum_{i\neq j} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} && (3.1.0.4)\\ &= \frac{1}{2}\sum q_i\phi_i && (3.1.0.5) \end{aligned}$$

3.2 连续电荷分布的静电能

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V && (3.2.0.1)\\ &= \frac{1}{2}\int \sigma\phi \mathrm{d}S && (3.2.0.2)\\ &\neq \frac{1}{2}\int \lambda\phi \mathrm{d}l && (3.2.0.3) \end{aligned}$$

3.2.1 体电荷

计算一个均匀带电球的静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \int \phi \mathrm{d}q && (3.2.1.1)\\
&= \int_0^R \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0} \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r && (3.2.1.2)\\
&= \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} && (3.2.1.3)
\end{aligned}
$$

注. *1.* 当 ρ 固定时，$R \to 0$，$W \to 0$。这说明无限小体积元 $\rho\mathrm{d}V$ 的静电自能等于零。所以在公式中的 ϕ 是可以为所有电荷产生的电势的（不必除去体积微元）。

2. 当 Q 固定时，$R \to 0$，$W \to \infty$。对应点电荷模型，其静电自能发散。（电子自能发散）

3. 根据公式也可以计算出静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V && (3.2.1.4)\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\rho^2}{6\pi\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)\mathrm{d}V && (3.2.1.5)\\
&= \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} && (3.2.1.6)
\end{aligned}
$$

3.2.2 面电荷

计算一个均匀带电圆盘的静电能：

考虑其轴线上一点的电势：

$$
\begin{aligned}
\phi(z) &= \int \frac{\sigma r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} && (3.2.2.1)\\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{r^2+z^2} - |z|) && (3.2.2.2)
\end{aligned}
$$

注. *1.* 当 $z \to 0$ 时，$U = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$。

2. 当 σ 固定时，$z \to 0$，$\phi \to 0$。这说明无限小面积元 $\sigma \mathrm{d}S$ 的静电自能为 0。所以在公式中的 ϕ 是可以为所有电荷产生的电势的（不必除去面积微元）。

3.2.3 线电荷

计算一个均匀带电线长度为 $2L$ 的静电能：
考虑垂直导线中垂线上一点的电势：

$$\phi(z) = \int \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{L^2+z^2}} \tag{3.2.3.1}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{L^2+z^2}+L}{r} \tag{3.2.3.2}$$

当 $z \to 0$ 时，$U \to \infty$。不包含自身贡献时，静电能已经发散，自身贡献也发散。不能够正确定义线电荷的静电能。

3.3 两种等价的观点

真空（或者是把电介质看成真空 + 极化电荷）中有下面的结论：
能量储存在电荷系中：

$$W = \frac{1}{2}\sum Q_i U_i \tag{3.3.0.1}$$

能量储存在电场中：

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.3.0.2}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V \tag{3.3.0.3}$$

$$= \frac{1}{2}\int -\varepsilon_0\phi\nabla^2\phi \mathrm{d}V \tag{3.3.0.4}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\oint \phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int |\nabla\phi|^2\mathrm{d}V \tag{3.3.0.5}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.3.0.6}$$

上面用到了 Possion 方程。并且对于有界的区域,无穷远处的 $\phi \sim \frac{1}{r}$,$\nabla\phi \sim \frac{1}{r^2}$,$S \sim r^2$，从而第一个积分为 0。

这意味着电荷系中总电荷能量等于宏观电场能量。

如果加上电介质，有总能:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho_0\phi \mathrm{d}V \tag{3.3.0.7}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.3.0.8}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.3.0.9}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V \tag{3.3.0.10}$$

对于有电介质的静电场，总静电能是自由电荷（总电荷-极化电荷）的能量，同样也是静电场的能量（自由电荷的能量，宏观电场能）+ 极化能（极化电荷（偶极子）的能量，微观电场能）。

3.3.1 自能与互能

$$W = \frac{1}{2}\sum Q_iU_i + \frac{1}{2}\sum Q_iU_j \tag{3.3.1.1}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum \mathbf{E}_i\cdot\mathbf{D}_i + \frac{1}{2}\sum \mathbf{E}_i\cdot\mathbf{D}_j \tag{3.3.1.2}$$

例. 考虑一个平行板电容器，极板间填充介电常数为 ϵ 的电介质。

当外接电源给其充电时，电源做的功为：

$$W = \int_0^Q U\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU \tag{3.3.1.3}$$

当电容器充满电荷后，电容器的能量为：

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}Q^2\frac{1}{C} = \frac{1}{2}Q^2\frac{\varepsilon S}{d} \tag{3.3.1.4}$$

而

$$Q = PS \tag{3.3.1.5}$$

$$U = Ed \tag{3.3.1.6}$$

则：

$$W = \frac{1}{2}EDV \tag{3.3.1.7}$$

3.4 静电能到静电力

利用虚功求力本质上是能量守恒定律：
克服体系中的内力做的功等于体系能量的增加。

$$-\nabla W = \mathbf{F} \tag{3.4.0.1}$$

如果还有其他能量输入，对体系做功 δA，则表达式为：

$$\delta A - \nabla W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{3.4.0.2}$$

例. 两个带电导体之间的力（电容器）。

Q 不变，则有：

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial W}{\partial x} && (3.4.0.3) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial Q^2}{\partial x}\frac{1}{C} && (3.4.0.4) \\ &= -\frac{Q^2}{2\varepsilon S} && (3.4.0.5) \end{aligned}$$

若按照 U 不变计算，则有电源做功 $\delta A = U\mathrm{d}Q$。

详细地：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla W|_{U\text{ 不变}} && (3.4.0.6) \\ &= -\nabla W|_{Q\text{ 不变}} && (3.4.0.7) \end{aligned}$$

Chapter 4

稳恒电流

方程

$$
\text{基本方程} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{j} = \rho_0 & \text{Gauss 定理} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{环路定理} \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} & \text{Ohm 定律} \end{cases} \tag{4.0.0.1}
$$

$$
\text{边值关系} \quad \begin{cases} \mathbf{j}_{1n} = \mathbf{j}_{2n} \\ \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \\ \phi_1 = \phi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial n} \end{cases} \tag{4.0.0.2}
$$

Kirchhoff 定律

$$
\sum I_i = 0 \tag{4.0.0.3}
$$

$$
\sum \mathcal{E} = \sum I_i R_i \tag{4.0.0.4}
$$

电流：自由电荷宏观定向运动形成电流。

导体脱离静电平衡状态，导体不再是等势体，导体内部有电场。

稳恒电流：电流分布不随时间变化，此时对应电场分布为一稳恒电场。

4.1 电流连续性方程与稳恒条件

4.1.1 电流强度、电流密度、电荷密度

电流密度矢量：

$$\mathbf{j} = j\hat{\mathbf{n}} \tag{4.1.1.1}$$

$$= \rho\mathbf{v} \tag{4.1.1.2}$$

$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta S} \tag{4.1.1.3}$$

电流强度：

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{4.1.1.4}$$

$$= \int \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{4.1.1.5}$$

是一个通量。

面电流密度：

$$\mathbf{i} = \sigma\mathbf{u} \tag{4.1.1.6}$$

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta l} \tag{4.1.1.7}$$

$$= nI \tag{4.1.1.8}$$

4.1.2 电流连续性方程

电荷守恒方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{4.1.2.1}$$

稳恒意味着：空间电荷分布不再改变，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，从而有：

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=0 \tag{4.1.2.2}$$

物理意义是：电流场线闭合且同一电流管内各截面上 $\mathbf{j}$ 的通量 I 相同。

4.1.3 产生稳恒电流

电源：电容器 + 用非静电力搬运电荷的小妖。
电源电动势：

$$\mathcal{E}=\int\mathbf{E}_k\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{4.1.3.1}$$

非静电力做功：

$$W_k=\int\mathbf{F}_k\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int\mathcal{E}\mathrm{d}Q \tag{4.1.3.2}$$

4.2 稳恒电流与电场

根据稳恒条件可以得到：

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=0 \tag{4.2.0.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{4.2.0.2}$$

4.2.1 Ohm 定律

还差一个方程，可以用 Ohm 定律得到：

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E} \tag{4.2.1.1}$$

其中 σ 是电导率。

注. 补齐方程后就有相同的边值条件和唯一性定理。

$$\frac{U}{I}=\frac{El}{jS} \tag{4.2.1.2}$$

$$=\frac{1}{\sigma}\frac{L}{S} \tag{4.2.1.3}$$

注. 电阻的经典电子论

自由电子受电场加速获得速度，然后与晶格碰撞向各个方向散射，宏观平均速度变为零。

电子从加速后的平均速度表达式为：

$$\bar{u}_1 = \vec{a} \cdot \tau = -\frac{e\tau\vec{E}}{m} \tag{4.2.1.4}$$

其中平均功率散失在之间平均时间 $\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}}$，而 λ 为平均自由路径，$\vec{v}$ 为平均热速度。

电子漂移速度表达式为：

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\bar{u}_0 + \bar{u}_1) \tag{4.2.1.5}$$

$$= -\frac{e\bar{\lambda}\vec{E}}{2m\bar{v}} \tag{4.2.1.6}$$

电流密度：

$$\vec{j} = -ne\bar{u} = -\frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\vec{E} \tag{4.2.1.7}$$

从而电导率：

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \tag{4.2.1.8}$$

其中 $\vec{v} \propto \sqrt{T}$，因此 $\rho \propto \frac{\bar{v}}{n\lambda}$，从而电阻率 $\rho \propto \sqrt{T}$。

4.2.2 Joule 定律

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2R \tag{4.2.2.1}$$

$$= \frac{j^2}{\sigma} \tag{4.2.2.2}$$

4.2.3 稳恒电流的方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{j} = \rho_0 & \text{Gauss 定理} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{环路定理} \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} & \text{Ohm 定律} \end{cases} \tag{4.2.3.1}$$

$$\text{边值关系} \quad \begin{cases} \mathbf{j}_{1n} = \mathbf{j}_{2n} \\ \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \\ \phi_1 = \phi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial n} \end{cases} \tag{4.2.3.2}$$

4.2.4 导体内部和表面电场

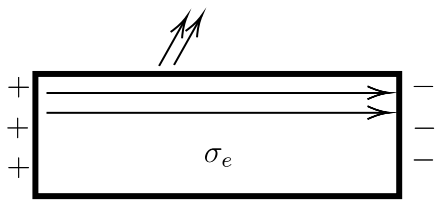

图 4.1: 导体内部和表面电场

$$\mathbf{j}_{\text{n 外}} = 0 \tag{4.2.4.1}$$

$$\mathbf{j}_{\text{n 内}} = 0 \tag{4.2.4.2}$$

$$\mathbf{E}_{\text{n 内}} = 0 \tag{4.2.4.3}$$

$$\mathbf{E}_{\text{t 外}} = \mathbf{E}_{\text{t 内}} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma_e} \tag{4.2.4.4}$$

$$\mathbf{E}_{\text{n 外}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{4.2.4.5}$$

导体表面是有电荷的，这样才能约束内部电场线平行于导体表面。

4.3 Kirchhoff 定律

4.3.1 电流定律

$$\sum I_{\mathrm{in}} = \sum I_{\mathrm{out}} \tag{4.3.1.1}$$

证明. 利用第一个方程的 Gauss 定律：

$$\int \mathbf{j}_{\mathrm{in}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \tag{4.3.1.2}$$

$$\sum I_{\mathrm{in}} = \sum \int \mathbf{j}_{\mathrm{in}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{4.3.1.3}$$
$$= \sum \int \mathbf{j}_{\mathrm{out}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{4.3.1.4}$$
$$= \sum I_{\mathrm{out}} \tag{4.3.1.5}$$

□

4.3.2 电动势定律

$$\sum \mathcal{E} = \sum I_i R_i \tag{4.3.2.1}$$

证明. 利用第二个方程的环路定理：

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \tag{4.3.2.2}$$

且电流密度有：

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_k) \tag{4.3.2.3}$$

$$
\begin{aligned}
\sum \mathcal{E} &= \oint \mathbf{E}_k \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} && (4.3.2.4)\\
&= \oint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} && (4.3.2.5)\\
&= \oint \frac{\mathbf{j}\mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}{\sigma \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}} && (4.3.2.6)\\
&= \sum I_i R_i && (4.3.2.7)
\end{aligned}
$$

□

Chapter 5

真空中的静磁场

方程

$$
\text{基本方程} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases} \tag{5.0.0.1}
$$

$$
\text{积分形式} \quad \begin{cases} \oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \\ \oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I \end{cases} \tag{5.0.0.2}
$$

磁矢量势

$$
\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{5.0.0.3}
$$

$$
\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{5.0.0.4}
$$

$$
\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{5.0.0.5}
$$

螺线管

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{r^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{r^2+z_1^2}}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{5.0.0.6}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{t}\,内} = \mu_0 n I \tag{5.0.0.7}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{t}\,外} = 0 \tag{5.0.0.8}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{n}\,内} = 0 \tag{5.0.0.9}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{n}\,外} = \mu_0 I \tag{5.0.0.10}$$

Lorentz 力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{5.0.0.11}$$

常数

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2} \tag{5.0.0.12}$$

5.1 Oersted 实验

电流的磁效应

5.2 Biot-Savart-Laplace 定律

电流元产生的磁场：

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{5.2.0.1}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V \tag{5.2.0.2}$$

从而：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V \tag{5.2.0.3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{i}\times\mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}S \tag{5.2.0.4}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{5.2.0.5}$$

5.2.1 常见磁场举例

1. 有限长直流导线

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\hat{\mathbf{y}} \quad = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+a^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+a^2}})\hat{\mathbf{y}} \tag{5.2.1.1}$$

2. 电流环轴线

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}} \tag{5.2.1.2}$$

3. 有限长螺线管

相当于多个电流环叠加，有：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 nI}{2}(\frac{z_2}{\sqrt{r^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{r^2+z_1^2}})\hat{\mathbf{z}} \tag{5.2.1.3}$$

其中 n 为单位长度的匝数。

5.3 Ampere 定律

两个电流元之间的相互作用力沿他们的连线：

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2 \mathrm{d}\mathbf{l}_1 \times (\mathrm{d}\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r})}{r^3} \tag{5.3.0.1}$$

5.4 静磁场的基本定理

5.4.1 静磁场的基本方程

从 Biot-Savart-Laplace 定律和叠加原理出发，可以得到静磁场的基本方程：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V && (5.4.1.1)\\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \cdot \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V && (5.4.1.2)\\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{j} \cdot \nabla \times (\frac{\mathbf{r}}{r^3})\mathrm{d}V && (5.4.1.3)\\
&= 0 && (5.4.1.4)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V && (5.4.1.5)\\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\mathrm{d}V && (5.4.1.6)\\
&= \cdots && (5.4.1.7)\\
&= \mu_0 \mathbf{j} && (5.4.1.8)
\end{aligned}$$

5.4.2 方程的积分形式

他们的积分形式为：

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \tag{5.4.2.1}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I \tag{5.4.2.2}$$

5.4.3 磁矢量势

如同静电场可以定义电势，静磁场也可以定义磁矢量势 $\mathbf{A}$，满足：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.4.3.1}$$

如同电势一样，我们可以写出磁矢量势的 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{5.4.3.2}$$

注. 磁矢量势不唯一。

我们遵循 Coloumb 规范：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{5.4.3.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{5.4.3.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{5.4.3.5}$$

这两个式子给出了磁矢量势的唯一性。磁矢量势的表达式可以写成：

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{r} \mathrm{d}V \tag{5.4.3.6}$$

是一个极矢量。

可以得到其积分形式：

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{5.4.3.7}$$

我们通常利用这个式子来计算磁矢量势。

例. 无限长螺线管的矢量势。

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{5.4.3.8}$$

从而：

$$A = \frac{BS_0}{2\pi r} \tag{5.4.3.9}$$

5.5 对称性原理及应用

5.5.1 对称与反对称的定义

一个物理场经过某种对称操作 S 后，形成新物理场

- 对称：变换后的场与变换前的场完全相同，则称该场具有对称性。
- 反对称：变换后的场与变换前的场相差一个负号，则称该场具有反对称性。

5.5.2 极矢量与轴矢量

- 极矢量：可以通过 $\mathbf{r}$ 表示的，例如：$\mathbf{r}, \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ 等。
- 轴矢量：两个极矢量的叉积，例如：$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 等。

5.5.3 对称性法则

源的对称性带来场的对称性。
源具有标量的对称性，则场具有极矢量、轴矢量的对称性。
例如对于 y-z 平面对称：

$$E_{\parallel}(-x, y, z) = E_{\parallel}(x, y, z) \tag{5.5.3.1}$$
$$E_{\perp}(-x, y, z) = -E_{\perp}(x, y, z) \tag{5.5.3.2}$$

$$B_{\parallel}(-x, y, z) = -B_{\parallel}(x, y, z) \tag{5.5.3.3}$$
$$B_{\perp}(-x, y, z) = B_{\perp}(x, y, z) \tag{5.5.3.4}$$

而关于 y-z 平面反对称：

$$E_{\parallel}(-x, y, z) = -E_{\parallel}(x, y, z) \tag{5.5.3.5}$$
$$E_{\perp}(-x, y, z) = E_{\perp}(x, y, z) \tag{5.5.3.6}$$

$$B_{\parallel}(-x, y, z) = B_{\parallel}(x, y, z) \tag{5.5.3.7}$$
$$B_{\perp}(-x, y, z) = -B_{\perp}(x, y, z) \tag{5.5.3.8}$$

5.5.4 对称性法则的应用

如下面三个图：

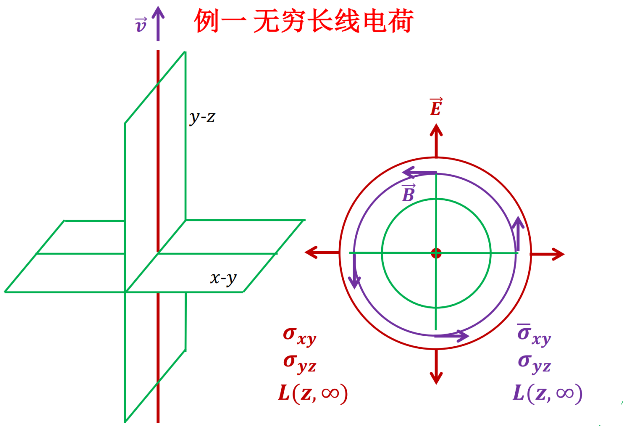

图 5.1: 对称性法则的应用

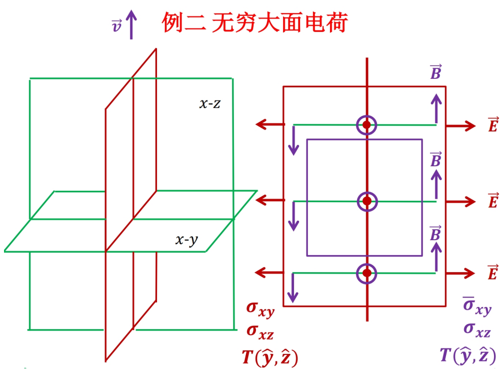

图 5.2: 对称性法则的应用

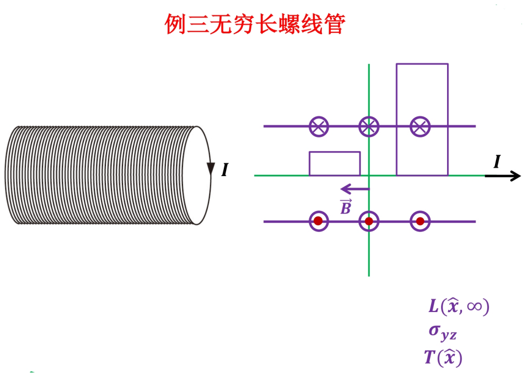

图 5.3: 对称性法则的应用

例. 无限长通电螺线管的磁场。

先计算轴向磁场：用前面的结论，可以得到，轴线上的磁场为：

$$B_0 = \mu_0 n I \tag{5.5.4.1}$$

取上图的那两个回路，可以得到：

$$B_0 \Delta l - B_{外} \Delta l = \mu_0 n I \Delta l \tag{5.5.4.2}$$

$$B_0 \Delta l - B_{内} \Delta l = 0 \tag{5.5.4.3}$$

从而内部是匀强磁场，外部是无磁场。

再计算垂直于轴的磁场：

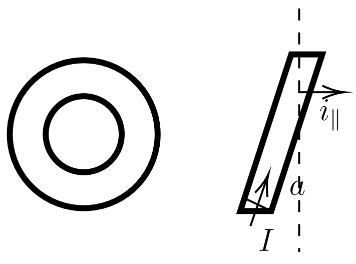

图 5.4: 无限长通电螺线管的磁场

对于螺线管的横截面，面电流密度：

$$i = \frac{I}{a} \tag{5.5.4.4}$$

其中 a 为导线的直径。

从而，平行和垂直截面的电流密度是：

$$i_\perp = i\cos\theta = nI \tag{5.5.4.5}$$

$$i_\parallel = i\sin\theta \tag{5.5.4.6}$$

$i_\perp$ 乘长度可以得到过轴线平面剖开的一定长度通过的电流，$i_\perp$ 乘 $\frac{a}{\sin\theta}$ 就是垂直轴线剖开的截面通过的电流即 I。

取环路：

$$B_{内}2\pi r = \mu_0 i_\parallel = 0 \tag{5.5.4.7}$$

$$B_{外}2\pi r = \mu_0 i_\perp = \mu_0 I\Delta l \tag{5.5.4.8}$$

从而内部无磁场，外部垂直方向的磁场为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{5.5.4.9}$$

5.6 带电粒子在磁场中的运动

5.6.1 Lorentz 力

带电粒子在磁场中的运动方程为：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{5.6.1.1}$$

洛仑兹力不做功：

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}t = 0 \tag{5.6.1.2}$$

公式中的 $\mathbf{v}$ 是相对观测者的速度。在导线静止的参照系，电荷受到 Lorentz 力；而在电荷静止的参照系，电荷受到电场力。磁场和电场是在不同参照系下相互转换。

5.6.2 Ampere 力

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I_1\mathrm{d}\mathbf{l}_1\times\mathbf{B}_2 \tag{5.6.2.1}$$

5.6.3 带电粒子在磁场中的运动

由 Newton 第二定律和 Lorentz 力，可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{5.6.3.1}$$

解得：

$$v_x = v_0\cos\omega t \tag{5.6.3.2}$$

$$v_y = -\frac{q}{|q|}v_0\sin\omega t \tag{5.6.3.3}$$

$$v_z = v_{z0} \tag{5.6.3.4}$$

其中 $\omega = \frac{qB}{m}$。

5.6.4 回旋磁矩

$$\mu = I\mathbf{S} = \frac{v_0^2}{2B} \tag{5.6.4.1}$$

其中 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{r}$。

磁矩在匀强磁场，或者缓慢变化的磁场中，回旋磁矩守恒。

5.6.5 Hall 效应

在电流 I 通过的导体上，有磁场 $\mathbf{B}$，则会有 Hall 电场：

$$\mathbf{E}_H = \frac{1}{nq}\mathbf{j}\times\mathbf{B} \tag{5.6.5.1}$$

$$\mathbf{U}_H = \frac{IB}{nbq} \tag{5.6.5.2}$$

$$K_H = \frac{1}{nq} \tag{5.6.5.3}$$

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{nbq} \tag{5.6.5.4}$$

利用带电微粒的平衡条件即可：

$$q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0 \tag{5.6.5.5}$$

Chapter 6

静磁场中的磁介质

方程

$$\text{基本方程}\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \tag{6.0.0.1}$$

$$\text{边值关系}\quad\begin{cases} \mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} \\ \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \end{cases} \tag{6.0.0.2}$$

Ampere 力

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \times \mathbf{B} \tag{6.0.0.3}$$

磁介质

$$\text{磁化磁介质} = \text{真空} + \text{磁化面电流 } \mathbf{i}' + \text{磁化体电流 } \mathbf{j}' \tag{6.0.0.4}$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \tag{6.0.0.5}$$

$$\mathbf{j}' = \nabla \times \mathbf{M} \tag{6.0.0.6}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{6.0.0.7}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \tag{6.0.0.8}$$

6.1 磁场对电流的作用

6.1.1 Ampere 力

电流元的 Ampere 力

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{F} &= \mathrm{d}Nq\mathbf{v}\times\mathbf{B} && (6.1.1.1)\\
&= nq\mathbf{v}\times\mathbf{B}\mathrm{d}V && (6.1.1.2)\\
&= \rho\mathbf{v}\times\mathbf{B}\mathrm{d}V && (6.1.1.3)\\
&= \mathbf{j}\times\mathbf{B}\mathrm{d}V && (6.1.1.4)\\
&= (\mathbf{j}\times\mathbf{B})(\mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}) && (6.1.1.5)\\
&= (\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B})(\mathbf{S}\cdot\mathbf{j}) && (6.1.1.6)\\
&= \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}\cdot I && (6.1.1.7)\\
&= I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B} && (6.1.1.8)
\end{aligned}
$$

其中用到了电流密度 $\mathbf{j}$ 和电流 $\mathbf{v}$ 是平行的。

面电流元的 Ampere 力

$$
\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{i}\times\mathbf{B}\mathrm{d}S \tag{6.1.1.9}
$$

6.1.2 Ampere 力与力矩

$$
\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{6.1.2.1}
$$

$$
\mathbf{F} = \oint_L I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B} \tag{6.1.2.2}
$$

$$
\mathbf{F} = \int_S \mathbf{i}\times\mathbf{B}\mathrm{d}S \tag{6.1.2.3}
$$

$$
\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j}\times\mathbf{B}\mathrm{d}V \tag{6.1.2.4}
$$

$$\tau = \int \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F} \tag{6.1.2.5}$$

$$\tau = \oint_L \mathbf{r} \times (I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{6.1.2.6}$$

$$\tau = \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{B})\mathrm{d}S \tag{6.1.2.7}$$

$$\tau = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\mathrm{d}V \tag{6.1.2.8}$$

例. 两根无限长平行直载流导线，电流强度 $I_1 I_2$，相距 r，求其中一根单位长度受的力。

I_1 在 I_2 处产生的磁感应强度：

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \tag{6.1.2.9}$$

单位长度导线受到的力：

$$F = I_2 \times B \tag{6.1.2.10}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \tag{6.1.2.11}$$

例. 求电流强度为 I，单位长度匝数为 n 的无穷长载流螺线管单位表面受的力。

该无穷长载流螺线管可简化为面电流密度 $\mathbf{i} = nI$ 的面电流分布管。

总磁感应强度为：

$$B_{t\text{内}} = \mu_0 nI \tag{6.1.2.12}$$

$$B_{t\text{外}} = 0 \tag{6.1.2.13}$$

面元产生的磁感应强度：

$$B_{0\text{内}} = \frac{\mu_0 nI}{2} \tag{6.1.2.14}$$

$$B_{0\text{外}} = -\frac{\mu_0 nI}{2} \tag{6.1.2.15}$$

面元所处的外场：

$$B = B_T - B_0 = \frac{\mu_0 nI}{2} \tag{6.1.2.16}$$

面元受到的力：

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{i} \times \mathbf{B}\mathrm{d}S \tag{6.1.2.17}$$

$$\tag{6.1.2.18}$$

从而单位面积受到的力（垂直于面元指向管外）为：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}\mathbf{S}} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \tag{6.1.2.19}$$

正如上一章节分析其磁感应强度。进一步考虑轴向电流的作用，等效成面电流密度 $\mathbf{i} = \frac{I}{2\pi R}$ 的面电流分布管。

总磁感应强度为：

$$B_{t\,内} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{6.1.2.20}$$

$$B_{t\,外} = 0 \tag{6.1.2.21}$$

面元产生的磁感应强度：

$$B_{0\,内} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \tag{6.1.2.22}$$

$$B_{0\,外} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \tag{6.1.2.23}$$

面元所处的外场：

$$B = B_T - B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \tag{6.1.2.24}$$

面元受到的力：

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{i} \times \mathbf{B}\mathrm{d}S \tag{6.1.2.25}$$

$$\tag{6.1.2.26}$$

从而单位面积受到的力（垂直于面元指向轴线）为：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}\mathbf{S}} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \tag{6.1.2.27}$$

例. 求一电流强度为 I 的载流线圈在均匀磁场中受到的力和力矩。

受力：

$$\mathbf{F} = \oint I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{6.1.2.28}$$

$$= I(\oint \mathrm{d}\mathbf{l}) \times \mathbf{B} \tag{6.1.2.29}$$

$$= 0 \tag{6.1.2.30}$$

受力矩：

$$\tau = \oint I\mathbf{r} \times (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{6.1.2.31}$$

$$= \frac{I}{2}(\oint (\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}) \times \mathbf{B} + \oint \mathrm{d}\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - 2\oint \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r})) \tag{6.1.2.32}$$

$$= \frac{I}{2}\oint (\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}) \times \mathbf{B} \tag{6.1.2.33}$$

$$= \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{6.1.2.34}$$

其中 $\mathbf{m} = \frac{I}{2}\oint \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = I\mathbf{S}$ 为磁矩。第二个积分是全微分的回路积分，第三个积分 $\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}(\frac{r^2}{2})$，故两项均为 *0*。

6.2 磁介质及其磁化强度

6.2.1 磁偶极子

我们仿照研究电介质时候使用多级展开的方法：

$$\frac{1}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|} = \frac{1}{|\mathbf{X}|} + \frac{\hat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}'}{|\mathbf{X}|^2} + \frac{3(\hat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\mathbf{X}'|^2}{2|\mathbf{X}|^3} + \cdots \tag{6.2.1.1}$$

二者展开是一致的：

$$\phi(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{X}')\mathrm{d}^3\mathbf{X}'}{|\mathbf{X}-\mathbf{X}'|} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{X}')\mathrm{d}^3\mathbf{X}'}{|\mathbf{X}-\mathbf{X}'|} \tag{6.2.1.2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = -\nabla\phi(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{B}(\mathbf{X}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{X}) \tag{6.2.1.3}$$

$$\phi_m(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{X}')\mathrm{d}^3\mathbf{X}'}{|\mathbf{X}|} \qquad \mathbf{A}_m(\mathbf{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{X}')\mathrm{d}^3\mathbf{X}'}{|\mathbf{X}|} = 0 \tag{6.2.1.4}$$

$$\phi_d(\mathbf{X}) = \frac{\widehat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{X}|^2} \qquad \mathbf{A}_d(\mathbf{X}) = \frac{\mu_0\mathbf{m}\times\widehat{\mathbf{x}}}{4\pi|\mathbf{X}|^2} \tag{6.2.1.5}$$

$$\mathbf{p} = \int\rho(\mathbf{X}')\mathbf{X}'\mathrm{d}^3\mathbf{X}' = q\mathbf{d} \qquad \mathbf{m} = \frac{1}{2}\int\mathbf{X}'\times\mathbf{j}(\mathbf{X}')\mathrm{d}^3\mathbf{X}' = I\mathbf{S} \tag{6.2.1.6}$$

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\widehat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{p})\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{p}}{|\mathbf{X}|^3} \qquad \mathbf{B}_d(\mathbf{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\widehat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{m})\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{m}}{|\mathbf{X}|^3} \tag{6.2.1.7}$$

下面的表格总结了偶极矩的性质：

电偶极子	磁偶极子
$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\int\rho\mathbf{r}\mathrm{d}V$	$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int\mathbf{r}\times\mathbf{j}\mathrm{d}V$
$\mathbf{p}_d = q\mathbf{r}$	$\mathbf{m}_d = I\mathbf{S}$
$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}\mathrm{d}V$	$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}\mathrm{d}V$
$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$	$A_d(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$
$W = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$	$W = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}$
$\mathbf{F} = \mathbf{p}\nabla\mathbf{B}$	$\mathbf{F} = \mathbf{m}\nabla\mathbf{B}$
$\tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$	$\tau = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$

6.2.2 磁偶极矩与角动量

Einstein de Haas 效应：磁矩和角动量耦合。

$$\mathbf{m} = \gamma\mathbf{L} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L} \tag{6.2.2.1}$$

Bohr 磁子：

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \tag{6.2.2.2}$$

量子力学中磁矩有最小变化的量。

磁偶极矩和电偶极矩的区别在于：电偶极子在电场中受到力矩 $\tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$ 可以将电偶极子扭转到电场方向，而磁偶极子在磁场中受到力矩 $\tau = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$，不能将磁偶极子扭转到磁场方向。

磁矩将在磁场中进动。

加上 damping term 的 Landau-lifshits-Gilbert 方程最终解释了磁化过程：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mathbf{m}\times\mathbf{B} + \frac{\alpha}{m}\mathbf{m}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t} \tag{6.2.2.3}$$

6.2.3 磁化与磁介质

磁化：使物体具有磁性的物理过程叫做磁化。

磁介质：能够磁化的物质称作叫磁介质；在磁场中发生变化并影响磁体的物质。

基本物理图像：传导电流 $\rightarrow$ 产生磁场 $B_0\rightarrow$ 磁化: 使磁偶极子有序排列 $\rightarrow$ 共同产生磁场。

磁介质的物理模型：有序排列的磁偶极子阵列。

6.2.4 磁化强度

在宏观足够小，微观足够大定义。

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum\langle\mathbf{m}_i\rangle}{\Delta V} = n\langle\mathbf{m}\rangle \tag{6.2.4.1}$$

其中 $\langle\mathbf{m}\rangle = I\mathbf{S}$ 是平均偶极矩。

这样的磁化电流存在于一切磁介质（包括绝缘体导体）局域在分子原子周围，不具有热效应。

同电介质，我们认为磁介质也可以这样理解：

$$\text{磁介质} = \text{真空} + \text{磁化面电流}\mathbf{i}' + \text{磁化体电流}\mathbf{j}' \tag{6.2.4.2}$$

下面我们计算这两个电流。

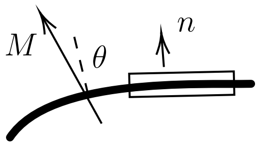

图 6.1: 磁化面电流

磁化面电流

$$I' - \mathbf{M} \times \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{6.2.4.3}$$

磁化电流向里：

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= -\frac{\mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}l} && (6.2.4.4) \\ &= -M \sin\theta && (6.2.4.5) \\ &= \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} && (6.2.4.6) \end{aligned}$$

磁化体电流

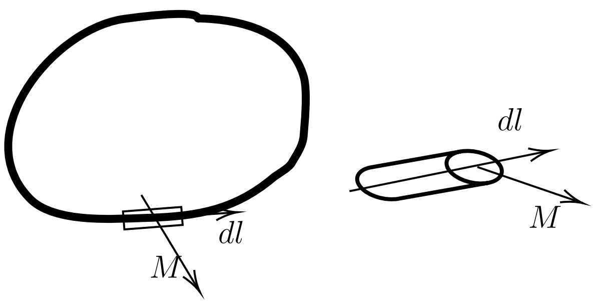

图 6.2: 磁化体电流

考虑任一回路 L，在 $\mathrm{d}\mathbf{l}$ 处回路 L 套住的分子电流数目 = 单位体积分

子电流数目 × 小体积元体积。

$$\int \mathbf{j}'\mathrm{d}\mathbf{S} = I' \tag{6.2.4.7}$$

$$= \oint In\mathbf{S}\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{6.2.4.8}$$

$$= \oint \mathbf{M} \times \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{6.2.4.9}$$

$$= \int \nabla \times \mathbf{M}\mathrm{d}S \tag{6.2.4.10}$$

从而：

$$\mathbf{j}' = \nabla \times \mathbf{M} \tag{6.2.4.11}$$

综上，磁介质会产生磁化面电流和磁化体电流：

$$\mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \tag{6.2.4.12}$$

$$\mathbf{j}' = \nabla \times \mathbf{M} \tag{6.2.4.13}$$

6.3 磁介质中静磁场的基本定理

仿照电介质的基本方程，我们可以得到磁介质的基本方程。

6.3.1 磁介质的基本方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.3.1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_{\text{free}} + \mathbf{j}') \tag{6.3.1.2}$$

第二个式子可以变形：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}_{\text{free}} + \mu_0\nabla \times \mathbf{M} \tag{6.3.1.3}$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{j}_{\text{free}} \tag{6.3.1.4}$$

记磁场强度 $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}$，则：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0\mathbf{j}_{\text{free}} \tag{6.3.1.5}$$

它们的积分形式是 Gauss 定理和环路定理：

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \tag{6.3.1.6}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathbf{j}_{\mathrm{free}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{6.3.1.7}$$

6.3.2 物质方程

对线性介质，有：

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{6.3.2.1}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \tag{6.3.2.2}$$

其中 $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ 为磁导率，χ_m 为磁化率。

对于线性介质，当 $\chi_m > 0$ 时，磁介质为顺磁质；当 $\chi_m < 0$ 时，磁介质为抗磁质。

非线性介质，磁化率 χ_m 随磁场强度 $\mathbf{H}$ 变化，磁导率大，有磁滞回线。例如铁磁质。自发磁化：原因是相邻原子之间电子的强的交换相互作用。

Curie 定律：顺磁质的磁化率 χ_m 随温度 T 的变化关系：

$$\chi_m = \frac{N\mu_0 m_0^2}{3kT} = \frac{C}{T} \tag{6.3.2.3}$$

其中 C 为与材料有关的常数。

6.3.3 边值条件

同样的，在无传导电流的情况下，有：

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{6.3.3.1}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{6.3.3.2}$$

6.3.4 唯一性定理

同样的，我们也可以证明磁场有唯一性定理。

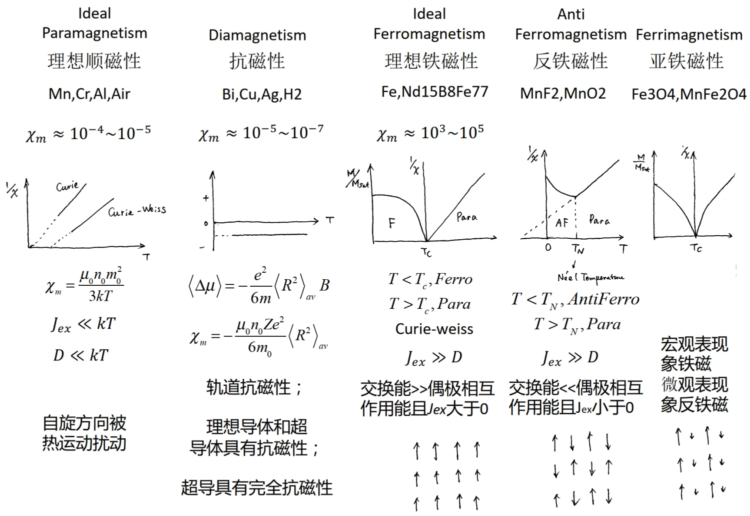

图 6.3: 磁介质的分类

例. (介质面与磁感应线重合)一圆环状磁介质与一无穷长直导线共轴，设磁介质磁导率 μ，直导线电流强度为 I，求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化面电流密度。

由电流 I 和介质环的圆周对称，故知场 H 具有圆周对称，由电流 I 和介质环的平面对称性知 H 沿圆周方向 B 也沿圆周方向，因此介质面与磁感应线平行。

介质内有：

$$B_i = \mu H = \mu \frac{I}{2\pi r} \tag{6.3.4.1}$$

介质外有：

$$B_0 = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.3.4.2}$$

两个介质都在此处产生磁化面电流：

$$i' = (\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_0) \times \hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.3}$$
$$= \frac{B_i}{\mu_0} - \frac{B_0}{\mu_0} \tag{6.3.4.4}$$
$$= \frac{I}{2\pi\mu_0 r}(\mu - \mu_0) \tag{6.3.4.5}$$

例. （介质界面与磁感应线垂直）在一同轴电缆 *(*内半径 r_1，外导体内半径 r_2*)* 中填满 μ_1 和 μ_2 两种介质各占一半空间且介质界面为通过电缆轴的平面。设通过电缆的电流强度 I_0 求介质中的磁场分布以及个质与导体毗连面上的面电流分布。

观察垂直轴线的截面，计算感应面电流。

传导电流 I_0 产生磁场 B_0，$\mathbf{B}$ 垂直介质面，从而产生的 $\mathbf{H}$ 垂直介质面。从而两个介质交界面无面电流密度。

而在导体与介质交界面产生面电流与 I_0 沿一个方向，所以不改变磁感应强度的方向。在介质中：介质 *1* 和 *2* 界面处边界要求 $B_{1n} = B_{2n}$，所以 $B_1 = B_2 = B$。

则有环路定理：

$$\frac{B}{\mu_1}\pi r + \frac{B}{\mu_2}\pi r = I_0 \tag{6.3.4.6}$$

$$B = \frac{\mu_1\mu_2 I_0}{\pi r(\mu_1+\mu_2)} \tag{6.3.4.7}$$

则介质 *1* 和介质 *2* 中磁场强度：

$$H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{\mu_2 I_0}{\pi r(\mu_1+\mu_2)} \tag{6.3.4.8}$$

$$H_2 = \frac{B}{\mu_2} = \frac{\mu_1 I_0}{\pi r(\mu_1+\mu_2)} \tag{6.3.4.9}$$

介质 *1* 和 *2* 中的磁化强度：

$$M_1 = \frac{B}{\mu_0} - H_1 = \frac{\mu_2(\frac{\mu_1}{\mu_0}-1)I_0}{\pi r(\mu_1+\mu_2)} \tag{6.3.4.10}$$

$$M_2 = \frac{B}{\mu_0} - H_2 = \frac{\mu_1(\frac{\mu_2}{\mu_0}-1)I_0}{\pi r(\mu_1+\mu_2)} \tag{6.3.4.11}$$

假设导体是理想导体，则 $r < r_1$ 和 $r > r_2$ 时 $H = B = M = 0$（就像理想导体内部的电场强度为 *0* 一样，可以用边值条件推出）。

在 $r = r_1$ 处感应面电流方向指向纸外与 $\mathbf{I}$ 同向，在 $r = r_2$ 处感应面电流方向指向纸外与 $\mathbf{I}$ 反向。

$$\mathbf{i'}_1|_{r=r_1} = \frac{\mu_2(\frac{\mu_1}{\mu_0}-1)I_0}{\pi r_1(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.12}$$

$$\mathbf{i'}_1|_{r=r_2} = -\frac{\mu_2(\frac{\mu_1}{\mu_0}-1)I_0}{\pi r_2(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.13}$$

$$\mathbf{i'}_2|_{r=r_1} = \frac{\mu_1(\frac{\mu_2}{\mu_0}-1)I_0}{\pi r_1(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.14}$$

$$\mathbf{i'}_2|_{r=r_2} = -\frac{\mu_1(\frac{\mu_2}{\mu_0}-1)I_0}{\pi r_2(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.15}$$

我们现在再看沿着轴线的方向的自由面电流。

取一个回路，导体中的磁场强度为 *0*，有环路定理：

$$H_i l = i_0 l \tag{6.3.4.16}$$

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{H}_i \times \hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.17}$$

在 $r=r_1$ 处 $\mathbf{i}_0$ 与 I 同向，$r=r_2$ 处反向。

$$\mathbf{i}_0 1|_{r=r_1} = \frac{\mu_2 I_0}{\pi r_1(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.18}$$

$$\mathbf{i}_0 1|_{r=r_2} = -\frac{\mu_2 I_0}{\pi r_2(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.19}$$

$$\mathbf{i}_0 2|_{r=r_1} = \frac{\mu_1 I_0}{\pi r_1(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.20}$$

$$\mathbf{i}_0 2|_{r=r_2} = -\frac{\mu_1 I_0}{\pi r_2(\mu_1+\mu_2)}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.3.4.21}$$

注意到：

$$\mathbf{i'}_1|_{r=r_1}\pi r_1 + \mathbf{i'}_2|_{r=r_1}\pi r_1 = I_0 \tag{6.3.4.22}$$

从而电流只完全分布在表面，完全抗磁性。

6.4 磁路定理

6.4.1 电路定理与磁路定理

完全类比电路定理，电流对应磁通，电压对应磁势差，电阻对应磁阻。见下表：

电路	ξ	I	R	σ
磁路	$\xi_m = NI$	$\psi = BS$	$R_m = \frac{\phi d}{\mu S}$	μ

表 6.4.1.1: 电路与磁路的对应

电路	磁路
稳恒条件 $\oint \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$	Gauss 定理 $\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ohm 定律 $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{k}) = \sigma\mathbf{E}'$	物质方程 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
电动势 $\oint \mathbf{k} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot \mathrm{d}d\mathbf{l} = \xi$	$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \sum I_0 = \xi_m$
电导率 σ 的电流管	磁导率 μ 的磁力线管
电流管电流强度 $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = \mathrm{const}$	磁力线管磁通量 $\psi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \mathrm{const}$
电阻 $R = \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\sigma \mathbf{S}}$	磁阻 $R_m = \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mu \mathbf{S}}$

表 6.4.1.2: 磁路定理

6.4.2 磁阻的串并联

和电阻一致。

6.4.3 磁路的方程

我们可以写出磁路的方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.4.3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{6.4.3.2}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{6.4.3.3}$$

$$\psi_m = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{6.4.3.4}$$

6.4.4 Kirchhoff 定律

$$\oint \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \mathrm{dl} = \sum \psi_i \oint \frac{\mathrm{d}l}{\mu S} \tag{6.4.4.1}$$

$$= \sum \psi_i R_i \tag{6.4.4.2}$$

$$= \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{dl} \tag{6.4.4.3}$$

$$= nI = \sum \mathcal{E} \tag{6.4.4.4}$$

6.5 磁荷法

无电荷的场有方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{6.5.0.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{6.5.0.2}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{6.5.0.3}$$

从而得到：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \tag{6.5.0.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{6.5.0.5}$$

$$\sigma_e' = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{6.5.0.6}$$

计算电容两极板的力：

$$\frac{\mathbf{F}}{\Delta S}=\frac{\sigma_1'\sigma_2'}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.5.0.7}$$

类比地，无传导电流的场有方程：

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{6.5.0.8}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=0 \tag{6.5.0.9}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) \tag{6.5.0.10}$$

从而得到：

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=-\nabla\cdot\mathbf{M}=-\rho_m' \tag{6.5.0.11}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=0 \tag{6.5.0.12}$$

$$\sigma_m'=\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} \tag{6.5.0.13}$$

可以计算两个磁荷之间的力：

$$\frac{\mathbf{F}}{\Delta S}=\frac{\mu_0\sigma_m 1'\sigma_m 2'}{2\mu_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{6.5.0.14}$$

例. 求两个均匀磁化，磁化强度为 M 的磁铁之间的引力

$$\mathbf{F}=-\nabla W=-(\nabla w)V \tag{6.5.0.15}$$

其中 W 为能量密度，V 为体积。

磁场的能量密度：

$$w=\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{\mu_0}{2}H^2 \tag{6.5.0.16}$$

$$\mathbf{H}_{q_m}=\mathbf{H}_{\rho_m}V=\mathbf{H}(\nabla\cdot\vec{M})V \tag{6.5.0.17}$$

对比上面力的量纲，磁场感应力大小为:

$$\mathbf{F}=\mu_0\mathbf{H}_{q_m} \tag{6.5.0.18}$$

两个磁铁等效于两个平行板电容器极板间的力

$$\mathbf{F}_e = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\sigma_e S = \frac{\sigma_e^2}{2\varepsilon_0}S \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F}_m = \frac{\mu_0\sigma_m}{2}\sigma_m S = \frac{\mu_0\sigma_m^2}{2}S \tag{6.5.0.19}$$

$$\sigma_m = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}} = M \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_m = \frac{\mu_0\sigma_m^2}{2}S = \frac{\mu_0 M^2}{2}S \tag{6.5.0.20}$$

Chapter 7

电磁感应与磁能

Faraday 电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{7.0.0.1}$$

感应电场

$$\mathbf{E}_k = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{7.0.0.2}$$

似稳电路

$$\sum \mathcal{E} = \sum IR + \sum L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\int I(t)\mathrm{d}t}{C} \tag{7.0.0.3}$$

电感

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.0.0.4}$$

$$\psi = LI \tag{7.0.0.5}$$

磁能

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\mathrm{d}V \tag{7.0.0.6}$$
$$= \frac{1}{2}\int \mathbf{j}_0\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V \tag{7.0.0.7}$$
$$= \frac{1}{2}\sum \psi_i I_i \tag{7.0.0.8}$$
$$= \frac{1}{2}\sum LI^2 \tag{7.0.0.9}$$

7.1 Faraday 电磁感应定律

Faraday 电磁感应定律又称“通量定律”：

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{7.1.0.1}$$

感应电动势的方向由 Lenz 定律给出。

7.1.1 感应电动势

感应电动势可以分为动生电动势和感生电动势：

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{\mathrm{d}\int \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t} && (7.1.1.1)\\
&= -\frac{\mathrm{d}\int \mathbf{B}\cdot (\mathrm{d}\mathbf{l}\times \mathbf{v}\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} && (7.1.1.2)\\
&= -\int \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \oint \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} && (7.1.1.3)\\
&= -\int \nabla\times\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \oint \mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} && (7.1.1.4)\\
&= -\oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \oint \mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} && (7.1.1.5)
\end{aligned}$$

上式前面一项是感生电动势，后面一项是动生电动势。

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{E}_k\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathcal{E} && (7.1.1.6)\\
= -\oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \oint \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{l} && (7.1.1.7)
\end{aligned}$$

7.1.2 涡旋电场

产生的感应电场：

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_k &= \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_s && (7.1.2.1)\\
&= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} && (7.1.2.2)
\end{aligned}$$

静电场满足的方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.1.2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = 0 \tag{7.1.2.4}$$

涡旋电场满足的方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_v = 0 \tag{7.1.2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_v = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.1.2.6}$$

积分形式有：

$$\oint \mathbf{E}_v \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{7.1.2.7}$$

这两者合起来就得到了 Maxwell 方程组中电场最终的式子：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.1.2.8}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.1.2.9}$$

在电场中的电荷受到的力为：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_s + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{7.1.2.10}$$

注. 电源电动势来自于非静电力做功，将非静电能转换为电能，而 *Lorentz* 力不做功，怎么能转变为电能？

但其分量 f_1 克服外力做负功，f_2 非静电力做功转变为电能，因此总的物理过程是外力做功，通过 *Lorentz* 力转变为电能，*Lorentz* 力并没有做功。

7.2 互感和自感

7.2.1 互感

考虑两个线圈，线圈 2 中有电流 I_2，线圈 2 中的电流产生磁场，线圈 1 中的电流受到磁场力，从而产生感应电动势，这就是互感。

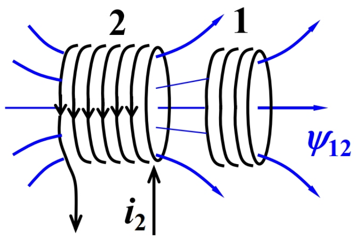

图 7.1: 互感

$$\psi_{12} = \int \mathbf{B}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 \tag{7.2.1.1}$$

$$= \int \nabla \times \mathbf{A}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 \tag{7.2.1.2}$$

$$= \oint \mathbf{A}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1 \tag{7.2.1.3}$$

$$= \oint \oint \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1}{r^2} \tag{7.2.1.4}$$

$$= L_{12} I_2 \tag{7.2.1.5}$$

其中 $M = L_{21} = L_{12} = \oint \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1}{r^2}$ 为互感系数。单位是 $H = Wb/A$。

7.2.2 自感

对于一个线圈的情况，线圈中有电流 I，线圈中的电流产生磁场，线圈中的电流受到磁场力，从而产生感应电动势，这就是自感。

$$\psi_{11} = \int \mathbf{B}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 \tag{7.2.2.1}$$

$$= \int \nabla \times \mathbf{A}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 \tag{7.2.2.2}$$

$$= \oint \mathbf{A}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1 \tag{7.2.2.3}$$

$$= \oint \oint \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_1' \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1}{r^2} \tag{7.2.2.4}$$

$$= L_{11} I_1 \tag{7.2.2.5}$$

其中 $L = L_{11} = \oint\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_1'\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}_1}{r^2}$ 为自感系数。

7.2.3 电感

自感线圈可以作为电路元件。电感的电压电流关系为：

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.3.1}$$

似稳电路中有 Kirchhoff 定律：

$$\sum \mathcal{E} = \sum IR + \sum L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\int I(t)\mathrm{d}t}{C} \tag{7.2.3.2}$$

有下面 LR、CR、LC 电路：

LR 电路

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{7.2.3.3}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{7.2.3.4}$$

CR 电路

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7.2.3.5}$$

$$\tau = RC \tag{7.2.3.6}$$

LC 电路

根据 Kirchhoff 定律：

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{7.2.3.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \tag{7.2.3.8}$$

这是一个振荡电路，解为：

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t \tag{7.2.3.9}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{7.2.3.10}$$

7.2.4 电感的串并联

串联

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\psi_{11} + \psi_{12})}{\mathrm{d}t} = -(L_{11} + L_{12})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.4.1}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\psi_{21} + \psi_{22})}{\mathrm{d}t} = -(L_{21} + L_{22})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.4.2}$$

而：

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.4.3}$$

从而：

$$L = L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22} \tag{7.2.4.4}$$

若 $L_{11} = L_{22}$。正接：如果完全耦合，则 $L = 4L$；若完全不耦合，则 $L = 2L$。反接：如果完全耦合，则 $L = 0$；若完全不耦合，则 $L = 2L$。

并联

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\psi_{11} + \psi_{12})}{\mathrm{d}t} = -L_{11}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.4.5}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\psi_{21} + \psi_{22})}{\mathrm{d}t} = -L_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_{22}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.4.6}$$

而：

$$I = I_1 + I_2 \tag{7.2.4.7}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.2.4.8}$$

从而：

$$L = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{L_{11} + L_{22} - 2L_{12}} \tag{7.2.4.9}$$

7.3 磁能

7.3.1 N 个载流线圈的磁能

考虑 N 个载流线圈由电流 $I_i = 0$ 逐渐增大到 I_i，计算该过程中电源对载流线圈所做的功，也就是载流线圈获得的磁能。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= -\mathcal{E}_i \mathrm{d}q_i && (7.3.1.1) \\ &= -\mathcal{E}_i I_i \mathrm{d}t && (7.3.1.2) \\ &= -\frac{\mathrm{d}\sum_j L_{ij} I_j}{\mathrm{d}t} I_i \mathrm{d}t && (7.3.1.3) \\ &= -\sum_j L_{ij} I_i \mathrm{d}I_j && (7.3.1.4) \end{aligned}$$

从而，总的磁能为：

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij} \mathrm{d}(I_i I_j) \tag{7.3.1.5}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j && (7.3.1.6) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i I_i \psi_i && (7.3.1.7) \end{aligned}$$

7.3.2 自能和互能

对两个线圈：

$$W = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2 \tag{7.3.2.1}$$

自能是：

$$W_1 = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 \tag{7.3.2.2}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \tag{7.3.2.3}$$

互能，载流线圈在外场中的磁能：

$$W_{12} = L_{12}I_1I_2 == \psi_{12}I_1 = \mathbf{B}_2 \cdot I_1\mathbf{S}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{m}_1 \tag{7.3.2.4}$$

7.3.3 磁能和电能

$$W_e = \int \frac{1}{2}\rho_0\phi \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\mathrm{d}V \tag{7.3.3.1}$$

$$W_m = \int \frac{1}{2}\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\mathrm{d}V \tag{7.3.3.2}$$

其中：

$$\frac{1}{2}(\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A})(\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l})(\mathbf{j}_0\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}) \tag{7.3.3.3}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{d}I\cdot\mathrm{d}\psi \tag{7.3.3.4}$$

而：

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{nBS}{I} = \mu_0 n^2 Sl = \mu_0 n^2 V \tag{7.3.3.5}$$

则有：

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{7.3.3.6}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V \tag{7.3.3.7}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}V \tag{7.3.3.8}$$

总结起来：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\mathrm{d}V \tag{7.3.3.9}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathbf{j}_0\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V \tag{7.3.3.10}$$

$$= \frac{1}{2}\sum \psi_i I_i \tag{7.3.3.11}$$

$$= \frac{1}{2}\sum LI^2 \tag{7.3.3.12}$$

Chapter 8

电磁波

Maxwell 方程

$$\text{Maxwell 方程} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{8.0.0.1}$$

$$\text{物质方程} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{cases} \tag{8.0.0.2}$$

$$\text{边界条件} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_0 \end{cases} \tag{8.0.0.3}$$

电磁波

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0 \tag{8.0.0.4}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{D}=0 \tag{8.0.0.5}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B} \tag{8.0.0.6}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}=-\omega\mathbf{D} \tag{8.0.0.7}$$

$$\frac{\omega}{k}=v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{8.0.0.8}$$

能量

能量密度 $$U=\frac{1}{2}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})=\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}=\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} \tag{8.0.0.9}$$

能流密度 $$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=U\mathbf{v} \tag{8.0.0.10}$$

动量密度 $$\mathbf{g}=\frac{1}{v^2}\mathbf{S}=\mathbf{D}\times\mathbf{B} \tag{8.0.0.11}$$

角动量密度 $$\mathbf{m}=\mathbf{r}\times\mathbf{g} \tag{8.0.0.12}$$

8.1 Pre Maxwell

在前面的章节，我们得到了在静电场、静磁场、电磁感应的方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \tag{8.1.0.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{8.1.0.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8.1.0.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 \tag{8.1.0.4}$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \tag{8.1.0.5}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{8.1.0.6}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{8.1.0.7}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{8.1.0.8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{8.1.0.9}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \tag{8.1.0.10}$$

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E} \tag{8.1.0.11}$$

$$\mathbf{E}_k = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{8.1.0.12}$$

现在我们把这些方程统一起来，得到 Maxwell 方程组。

8.2 Maxwell 方程组

8.2.1 两个推广

Maxwell 给了两个推广：
认为静电场中的：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8.2.1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \tag{8.2.1.2}$$

与

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \tag{8.2.1.3}$$

是普适的，这给出两个方程。

8.2.2 两个假设

Maxwell 给了两个假设：

涡旋电场

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{8.2.2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.2.2.2}$$

我们认为电场分为静电场和涡旋电场：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_v \tag{8.2.2.3}$$

则有两个方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8.2.2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.2.2.5}$$

位移电流

根据电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \tag{8.2.2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \tag{8.2.2.7}$$

有：

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_0 + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \tag{8.2.2.8}$$

我们认为位移电流是：

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.2.2.9}$$

我们认为电流分为传导电流和位移电流：

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.2.2.10}$$

$$\int \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{dl} = \int \mathbf{j}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{8.2.2.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.2.2.12}$$

我们观察位移电流：

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} \qquad = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}_p \tag{8.2.2.13}$$

其中 $\mathbf{j}_p$ 为极化电流。

修正后的方程是：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.2.2.14}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{j}_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}) \tag{8.2.2.15}$$

8.2.3 Maxwell 方程组

现在我们得到了完整的 Maxwell 方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \tag{8.2.3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.2.3.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8.2.3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.2.3.4}$$

物质方程：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{8.2.3.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{8.2.3.6}$$

边界条件：

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_0 \tag{8.2.3.7}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \tag{8.2.3.8}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \tag{8.2.3.9}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_0 \tag{8.2.3.10}$$

8.3 电磁波

8.3.1 电磁波的方程

根据 Maxwell 方程组，在真空中：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{8.3.1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.3.1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8.3.1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{8.3.1.4}$$

有：

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \tag{8.3.1.5}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{8.3.1.6}$$

$$= -\nabla^2 \mathbf{E} \tag{8.3.1.7}$$

得到：

$$(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{E} = 0 \tag{8.3.1.8}$$

是典型的波动方程。

可以得到真空中的光速：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{8.3.1.9}$$

8.3.2 波动方程的解

可以解出一维波动方程的解：

$$\mathbf{E} = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{8.3.2.1}$$

和平面波的解：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{8.3.2.2}$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

带入有：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \partial_j (E_j e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}) && (8.3.2.3)\\
&= ik_j E_j e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} && (8.3.2.4)\\
&= i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} && (8.3.2.5)\\
&= 0 && (8.3.2.6)
\end{aligned}$$

从而 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$，$\mathbf{E}$ 是一个横波。

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

同理：

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{8.3.2.7}$$

$\mathbf{B}$ 是一个横波。

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

带入有：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}) && (8.3.2.8)\\
&= i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} && (8.3.2.9)\\
&= i\mathbf{k} \times \mathbf{E} && (8.3.2.10)\\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (8.3.2.11)\\
&= -i\omega\mathbf{B} && (8.3.2.12)
\end{aligned}$$

从而有：

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \tag{8.3.2.13}$$

同相位，**E** 和 **B** 垂直。

$$kE = \omega B \tag{8.3.2.14}$$

$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

同理有：

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \tag{8.3.2.15}$$

有：

$$k\frac{B}{\mu} = \omega \varepsilon E \tag{8.3.2.16}$$

$$\frac{\omega}{k} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \tag{8.3.2.17}$$

折射率：

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \sim \sqrt{\varepsilon_r} \tag{8.3.2.18}$$

8.4 能流

8.4.1 电荷守恒

由 Maxwell 方程组直接推出：

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \tag{8.4.1.1}$$

8.4.2 能量守恒

同样有能量守恒：

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E} \tag{8.4.2.1}$$

$$\text{能量密度的减少} = \text{能量流出} + \text{对介质做功} \tag{8.4.2.2}$$

做功的表达式为：

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \tag{8.4.2.3}$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.4.2.4}$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{8.4.2.5}$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \tag{8.4.2.6}$$

与上面的能量守恒式对比，得到：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{8.4.2.7}$$

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \tag{8.4.2.8}$$

其中 $\mathbf{S}$ 为能流密度（Poynting 矢量），U 为能量密度。

8.4.3 能流密度

能流密度：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = U \mathbf{v} \tag{8.4.3.1}$$

能量密度：

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \tag{8.4.3.2}$$

动量密度：

$$\mathbf{g} = \frac{1}{v^2} \mathbf{S} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \tag{8.4.3.3}$$

角动量密度：

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} \tag{8.4.3.4}$$