Instituto Tecnológico de Costa Rica | Tiempo: 2 horas, 30 minutos
Escuela de Matemática | Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Tercer examen parcial
I semestre - 2023

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados, salvo las tablas de distribuciones aprobadas por la Cátedra de Probabilidades. Estas tablas no pueden tener ningún tipo de alteración. No puede intercambiar ningún material durante la aplicación de la prueba.

1. [**3 puntos**] En una ciudad, el consumo de energía eléctrica, en millones de kilovatios por día, sigue una distribución gamma, con media 90 millones de kilovatios por día y varianza 1620 millones de kilovatios por día^2. Determine la probabilidad de que en un día cualquiera dicho consumo sea inferior a 81 millones de kilovatios.

   Solución.

   Tomando X como el consumo de energía eléctrica, en millones de kilovatios por día, se sabe que $X \sim Gamma\left(\alpha,\beta\right)$, con $\alpha\beta = 90$ y $\alpha\beta^2 = 1620$. Por lo tanto, $X \sim Gamma\left(5, 18\right)$.

   Como se solicita $P\left[X < 81\right]$, se utiliza la tabla de gamma incompleta. Así, como $P\left[X < 81\right] = F\left(4.5, 5\right) = 0.468$, entonces se concluye que la probabilidad de que en un día cualquiera dicho consumo sea inferior a 81 millones de kilovatios es de, aproximadamente, 46.8 %.

2. [**3 puntos**] En cierta región del país están quitando el servicio de agua potable con mucha frecuencia. La cantidad de reclamos formales que reciben al correo electrónico de la empresa encargada de suministrar este líquido sigue una distribución de Poisson, con media 5 reclamos por hora. La Defensoría ha concluido que si debe esperar menos de 90 minutos para obtener los próximos 10 reclamos, entonces harán un proceso judicial. ¿Cuál es la probabilidad de que inicien dicho proceso?

   Solución.

   Considere Y como la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de reclamos formales, por hora, que se reciben en el correo electrónico de la empresa encargada de suministrar el servicio de agua potable. Se sabe que $Y \sim Poisson\left(5\right)$. La variable aleatoria continua T correspondiente al tiempo que se debe esperar para obtener los próximos 10 reclamos cumple $T \sim Gamma\left(10, \dfrac{1}{5}\right)$.

   Como se solicita $P\left[T < 1.5\right]$, se utiliza la tabla de gamma incompleta. Así, como $P\left[T < 1.5\right] = F\left(7.5, 10\right) = 0.224$, entonces se concluye que la probabilidad de que inicien el proceso judicial es de, aproximadamente, 22.4 %.

3. **[3 puntos]** Se lanza una moneda 100 veces. Considere la variable X correspondiente a la cantidad de veces en la que se obtiene escudo. Utilizando la desigualdad de Chebyshev, acote inferiormente la probabilidad de obtener de 40 a 60 escudos. Luego, determine la probabilidad de obtener de 40 a 60 escudos y compárela con la cota encontrada.

   Solución.

   Considere Z como la cantidad de veces que sale escudo, de los 100 lanzamientos. Se sabe que $Z \sim Bin\,(100, 0.5)$, con $\mu_Z = 50$ y $\sigma_Z^2 = 25$.

   Utilizando la desigualdad de Chebyshev, se tiene que $P\,[40 \leq Z \leq 60] = P\,[|Z - 50| \leq 10]$, y con esto se obtiene que $1 - \dfrac{25}{10^2} = 0.75$ es la cota inferior.

   Note que $P\,[40 \leq Z \leq 60] = 0.964799$, por lo que la cota no es tan útil.

4. Cierto dispositivo electrónico, cuando está completamente cargado, presenta una duración de descarga completa, en horas, que sigue una distribución normal, cuya media es de 2.4 horas y desviación estándar desconocida.

   a) **[3 puntos]** Suponiendo que la probabilidad de que el tiempo de descarga mencionado sea superior a las 3 horas es de 20 %, determine el valor la varianza para dicho tiempo de descarga.

   b) **[3 puntos]** Suponiendo que la desviación estándar es de 0.8 horas, ¿cuál es la probabilidad que un dispositivo electrónico tenga una duración de descarga entre 1.3 y 2.7 horas?

   Solución.

   Considere W la variable aleatoria correspondiente a la duración de descarga completa del dispositivo completamente cargado, en horas. Se sabe que $W \sim N\,(2.4, \sigma_W^2)$.

   a) Si se sabe que $P\,[W > 3] = 0.2$, entonces se tiene que $\Phi\left(\dfrac{3 - 2.4}{\sigma_W}\right) = 0.8$. Por lo tanto, se sabe que $\dfrac{3 - 2.4}{\sigma_W} = 0.845$, lo que significa que $\sigma_W = 0.710059$.

   Así, el valor la varianza para dicho tiempo de descarga es de, aproximadamente, 0.5041.

   b) Tomando $\sigma_W = 0.8$, como se solicita $P\,[1.3 < W < 2.7]$, entonces se calcula el valor numérico de $\Phi\left(\dfrac{2.7 - 2.4}{0.8}\right) - \Phi\left(\dfrac{1.3 - 2.4}{0.8}\right)$, y como $\Phi\,(0.375) - \Phi\,(-1.375) = 0.64615 - 0.08455$, se tiene que la probabilidad que un dispositivo electrónico tenga una duración de descarga entre 1.3 y 2.7 horas es de, aproximadamente, 56.16 %.

5. Un servicio de entrega de comida rápida cumple los pedidos con una media de 35 minutos y una desviación estándar de 8 minutos.

   a) **[3 puntos]** Si esta semana se entregaron 200 pedidos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de entrega promedio esté entre 32 y 36 minutos?

   b) **[3 puntos]** A un repartidor le dan un bono la primera vez que supera las 120 horas en los servicios de entregas. ¿Cuál es la probabilidad de que le den dicho bono la semana que entregó los 200 pedidos?

   Solución.

   Considere la variable aleatoria X correspondiente al tiempo de entrega del servicio de comida rápida, en minutos. Se sabe que $\mu_X = 35$ y $\sigma_X^2 = 8^2$.

   a) Considere las variables X_1, X_2, ..., X_{200} correspondientes a los pedidos de cada uno de los 200 pedidos, donde $\mu_{X_i} = 35$ y $\sigma_{X_i}^2 = 8^2$, para cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, 200\}$.

   Se solicita $P\left[32 < \overline{X} < 36\right]$, con $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_{200}}{200}$, por lo que si se utiliza el Teorema del Límite Central, se tiene que dicha probabilidad se puede aproximar mediante $\Phi\left(\dfrac{36-35}{8/\sqrt{200}}\right) - \Phi\left(\dfrac{32-35}{8/\sqrt{200}}\right)$.

   Como $\Phi(1.77) - \Phi(-5.30) = 0.9616$, entonces la probabilidad de que el tiempo de entrega promedio esté entre 32 y 36 minutos es de, aproximadamente, 96.16 %.

   b) Tomando $S_{200} = X_1 + \ldots + X_{200}$, se solicita $P[S_{200} > 120 \cdot 60]$, lo cual se puede aproximar con el Teorema del Límite Central mediante $1 - \Phi\left(\dfrac{120 \cdot 60 - 200 \cdot 35}{8 \cdot \sqrt{200}}\right)$.

   Como $1 - \Phi(1.77) = 1 - 0.9616$, entonces la probabilidad de que a una persona le den el bono la semana que entregó los 200 pedidos es de, aproximadamente, 3.84 %.

6. **[4 puntos]** El tiempo X, en semanas, entre la ocurrencia y la notificación de un accidente ante una aseguradora tiene una distribución de probabilidad dada por:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{8t - t^2}{72} & \text{, para } \quad 0 < t < 6 \\ \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

   El tiempo Y, en semanas, entre la notificación de un accidente y el pago del seguro cumple que $Y = \dfrac{X + 12}{3}$. Determine la probabilidad de que el tiempo entre la notificación de un accidente y el pago del seguro sea menor a 5 semanas.

   Solución.

   Se solicita $P[Y < 5]$, lo que es igual a $P\left[\dfrac{X+12}{3} < 5\right]$.

   Se reduce a determinar $P[X < 3] = \displaystyle\int_0^3 \frac{8t - t^2}{72}\, dt = 0.375$.

   Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo entre la notificación de un accidente y el pago del seguro sea menor a 5 semanas es de 37.5 %.

7. [**5 puntos**] Se sabe que en la autopista El Platino la probabilidad de sufrir un accidente es de 7 %. El director, en su informe anual, escribió lo siguiente:

"De # conductores que han transitado, la probabilidad de que al menos 20 tengan un accidente en nuestra autopista es del 25 %",

donde # es un número borroso. Determine dicho número borroso.

Sugerencia: utilice la aproximación de la binomial por medio de la normal.

Solución.

Considere la variable aleatoria discreta Y correspondiente a la cantidad de accidentes en la autopista El Platino, de los n. Este n es el número borroso solicitado.

Se sabe que $Y \sim Bin\,(n, 0.07)$, y también se sabe que $P\,[Y \geq 20] = 0.25$.

Utilizando la aproximación de la binomial por medio de la normal, la probabilidad solicitada se aproxima con:

$$1 - \Phi\left(\frac{20 - n \cdot 0.07 - \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot 0.07 \cdot 0.93}}\right) = 0.25 \;\Rightarrow\; \frac{20 - n \cdot 0.07 - \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot 0.07 \cdot 0.93}} = 0.675$$

$\Rightarrow 19.5 - n \cdot 0.07 = 0.675 \cdot \sqrt{n \cdot 0.0651}$

$\Rightarrow 19.5 - 0.07 \cdot u^2 = 0.172224 \cdot u$, tomando $u = \sqrt{n}$

$\Rightarrow -0.07 \cdot u^2 - 0.172224 \cdot u + 19.5 = 0$

$\Rightarrow u = 15.5$ ó $u = -17.97$

Solo se deja la primera solución, para lo que $n \approx 240.25$. Con esto, el número borroso es 241.

No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute.

Carl Friedrich Gauss.