Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

I Semestre, 2024
Tiempo: 2 horas y 20 minutos
Puntaje total: 27 pts

Segundo Examen Parcial Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **8** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva.
3. Tiene dos horas y veinte minutos para contestar las preguntas del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Considere la igualdad $N: \quad \dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k, \ \forall x \in \,]0,2[$.

   a) **[2pts]** Verifique que $\ln(x^2+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{k+1}$. (**Sugerencia**: aplique la propiedad de integración en series de potencias en la igualdad N).

   b) **[1pt]** Determine el intervalo de convergencia de la serie asociada a $\ln(x^2+1)$ sin analizar los extremos del intervalo.

2. **[3pts]** Si se sabe que $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, determine la serie de Maclaurin que corresponde con la función f, donde $f(x) = e^{-3x} - 1$.

3. **[3pts]** Determine el o los números complejos z que satisfagan simultáneamente las condiciones siguientes:

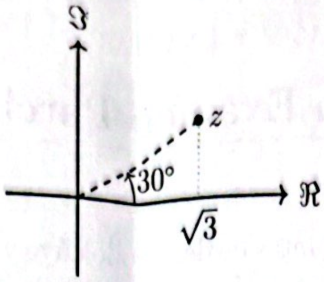
   - $\mid z - i \mid = 1$.
   - $Arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$

4. **[4pts]** Calcule y represente en forma rectangular el resultado de $(1-i)^{4i}$

.

Continúa en la página siguiente

5. **[3pts]** Considere la siguiente gráfica donde se representan el número complejo z.



Determine el valor de z^6 en su forma polar.

6. **[3pts]** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule $A \cdot B^T - 5C$.

7. **[4pts]** Use el método de Gauss-Jordan para resolver y determinar el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4 + y = 2x \\ 3x = 6 + 2y. \end{cases}$$

8. **[4pts]** Considere las matrices A, B, C y X de tamaño $n \times n$ con entradas reales y la igualdad:

$$2(XA)^T = B + A^T A X^T$$

Si se sabe que las matrices A y $(2I - A^T)$ son invertibles, utilice únicamente propiedades de las operaciones entre matrices para despejar la matriz X.