I. Selección única. (total de la sección: 7 puntos)

A continuación, se presentan 7 ítems de selección única, para cada uno de ellos seleccione, entre las 4 opciones, aquella que a su juicio responda correctamente a la pregunta o situación planteada. Debe reportar las opciones marcada en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

1. [1 punto] Sean $A = \{12, 14, 16, 19, 22, 25, 27\}$ y $B = \{7, 10, 11, 14, 16, 18, 21\}$. Considere la relación $\mathcal{R}$ de A en B definida por:

$$G_{\mathcal{R}} = \{(12, 11), (12, 16), (14, 10), (14, 21), (16, 7), (22, 11), (27, 10), (27, 21)\}$$

El dominio y el ámbito de $\mathcal{R}$ están dados por:

A) $D_{\mathcal{R}} = \{12, 14, 16, 22, 27\}$ y $\mathcal{R}[A] = \{7, 10, 11, 16, 21\}$

B) $D_{\mathcal{R}} = \{12, 14, 16, 19, 22, 25, 27\}$ y $\mathcal{R}[A] = \{7, 10, 11, 14, 16, 18, 21\}$

C) $D_{\mathcal{R}} = \{12, 14, 16, 19, 22, 25, 27\}$ y $\mathcal{R}[A] = \{7, 10, 11, 16, 21\}$

D) $D_{\mathcal{R}} = \{12, 14, 16, 22, 27\}$ y $\mathcal{R}[A] = \{7, 10, 14, 16, 21\}$

2. [1 punto] Sean los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 1\}$. Considere la relación $\mathcal{S}$ de A en B tal que su matriz asociada cumple con:

$$M_{\mathcal{S}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 2 \vee i = 1 \vee i + j = 5 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces, con certeza se cumple que:

A) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 0 & \end{pmatrix} \end{array}$$

B) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. [1 punto] Sobre el conjunto $A = \{a, b, c, \{a\}, \{c\}\}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (a, \{a\}), (\{a\}, a), (\{a\}, \{a\}), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (\{c\}, \{c\})\}$$

Si se sabe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, entonces el conjunto $A/\mathcal{R}$ está dado por:

A) $\{\{a, b\}, \{\{a\}, c\}, \{\{c\}\}\}$

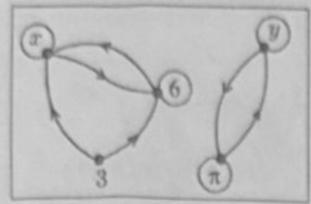
B) $\{\{a, \{a\}\}, \{b, c\}, \{c\}\}$

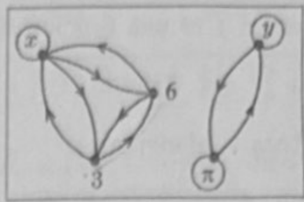
C) $\{\{a, \{a\}\}, \{b, c\}, \{\{c\}\}\}$

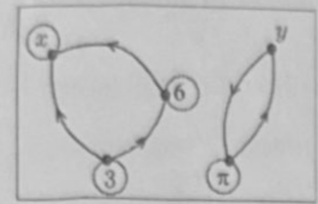
D) $\{\{a, \{a\}\}, \{b, c\}, c\}$

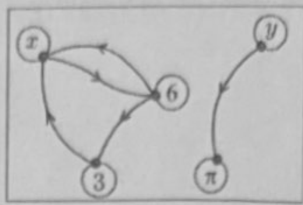
4. **[1 punto]** Considere el conjunto $D = \{x, y, \pi, 3, 6\}$. ¿Cuál de los siguientes grafos representa una relación transitiva sobre D?

$3R6 \wedge 6Rx \Rightarrow 3Rx$

A) 

C) 

B) 

D) 

5. **[1 punto]** Sean $A = \{1, e, 5\}$ y $B = \{0, 2, 7, 11\}$. Considere las relaciones $\mathcal{R}$ de A en B y $\mathcal{S}$ de B en A tales que:

$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz asociada a la relación $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ corresponde a:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 1 0
1 0 0
0 1 1

C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. **[1 punto]** Sobre el conjunto $D = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11\}$ se define la relación $\mathcal{S}$ por:

$$aSb \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ t.q. \ b = a + 3k$$

Si se sabe que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia sobre D, entonces la clase de equivalencia del 1 corresponde a:

A) $\{1, 4, 11\}$

B) $\{1, 4, 10\}$

C) $\{1, 5, 8, 11\}$ x

D) $\{4, 10\}$

$1 + 3 \cdot 1 = 4$

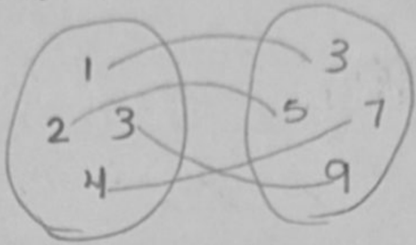
$1 + 3 \cdot 0 = 1$

$1 + 3 \cdot 3 = 10$

7. **[1 punto]** Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ y $C = \{4, 7, 9, 10, 15\}$. Sean $f : A \to B$ y $g : A \to C$. Analice las siguientes afirmaciones:

I. Si f es inyectiva, entonces f es una función sobreyectiva.

II. g **no** es sobreyectiva. ✓



inyectiva y sobreyectiva.

¿Cuál o cuáles son con certeza verdaderas?

A) Solo la I.

B) Solo la II.

C) Ninguna.

X D) Ambas.

II. Respuesta corta. (total de la sección: 3 puntos)

A continuación, se presentan 2 ítems de respuesta corta. Resuelva cada uno de ellos y anote el resultado en la línea indicada. Debe reportar su respueta en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

---

8. **[2 puntos]** Considere los conjuntos $A = \{3, 6\}$, $B = \{5, 7, 11\}$ y $C = \{1, 4, 5, 7, 13, -5, -1\}$. Sean $f : A \times B \to C$ definida por:

$$f((a, b)) = 2 \cdot a - b$$

a) La imagen directa del conjunto $\{(6, 7), (6, 5), (3, 11)\}$ por f se expresa por extensión como: $\{(5), (7), (-5)\}$

5, 7, -5

b) La imagen inversa del conjunto $\{1, -1, 4\}$ por f se expresa por extensión como: $\{-1/1, 1, -1/4\}$

$A \times B = \{(3,5), (3,7), (3,11), (6,5), (6,7), (6,11)\}$

1 -1 4

9. **[1 punto]** Considere la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por: $f(x) = 5x + 3k$, donde k es una constante real. Si se sabe que la imagen de 3 es 28, entonces la o las preimágenes de 20 corresponden a: $x = 1,4$

preimagen

$f(3) = 5(3) + 3 \cdot K = 28$ $\quad = 5x + 3 \cdot 4,33 = 20$

$K = 4,33$ $\quad x = 1,4$

III. Desarrollo. (total de la sección: 18 puntos)

A continuación, se presentan 4 ítems de desarrollo. Para cada una de ellos resuelva en el espacio en blanco lo solicitado. Justifique cada uno de los pasos que lo llevaron a obtener su respuesta.

$A \times A = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,1\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,1\},\{3,2\},\{3,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\},\{4,4\}\}$

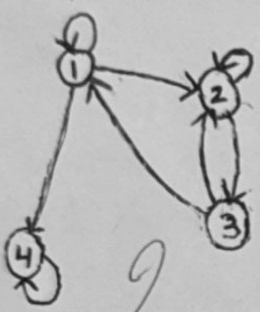
10. **[5 puntos]** Sea $A = \{1,2,3,4\}$ y sea $\mathcal{S}$ una relación definida sobre A, cuyo gráfico $G_{\mathcal{S}}$ viene dado por:

$$G_{\mathcal{S}} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(2,3),(4,4),(3,2),(1,4)\}$$

a) (2 pts de 5pts) Construya el grafo dirigido de la relación $\mathcal{S}$.

b) (3 pts de 5pts) Determine la matriz asociada a la relación $\overline{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}}$.

a)



2

b)

$G_{S^{-1}} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(1,3),(3,2),(4,4),(2,3),(4,1)\}$

$G_{S \cup S^{-1}} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1),(4,1),(4,4)\}$

$G_{\overline{S \cup S^{-1}}} = \{(1,4),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3)\}$

3

$$M_{\overline{S \cup S^{-1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. **[3 puntos]** Sean f y g funciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ y definidas por:

- $g(x) = 3x + 1$
- $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x \leq 5 \\ 2 - 3x & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$

Determine el criterio de $g \circ f$.

Si $x \leq 5$

$\Rightarrow 3 \cdot (4x-1)+1$

$\Rightarrow 3 \cdot (4x-3+1$

$\Rightarrow 12 \cdot x - 2$

$g \circ f = 12x - 2$ sii $x \leq 5$

Si $x > 5$

$3 \cdot (2-3x)+1$

$\Rightarrow 6 - 9x + 1$

$\Rightarrow -9x + 7$

$g \circ f = -9x + 7$ sii $x > 5$

2

12. [5 puntos] Sea $f : \mathbb{Q} - \{2\} \to \mathbb{Q} - \{7\}$ definida por $f(x) = \dfrac{7x-10}{x-2}$.

a) (3 pts de 5pts) Demuestre que f es una función inyectiva.

b) (2 pts de 5pts) Suponga que f es sobreyectiva. Determine $f^{-1}(x)$.

$f(a) = f(b)$
$a = b$

a) ~~Sea $y \in f(x) \wedge z \in f(x)$~~ $\forall\, y, z \in \mathbb{Q} - \{2\}$, Hqd $f(y) = f(z) \Rightarrow y = z$

$$\Rightarrow \frac{7y-10}{y-2} = \frac{7z-10}{z-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = z}$$? procedimiento

0-3

$\therefore$ La función es inyectiva.

b) $y = \dfrac{7x-10}{x-2}$

$\Rightarrow y(x-2) = 7x - 10$

$\Rightarrow xy - 2y = 7x - 10$

$\Rightarrow xy - 7x = -10 + 2y$

$\Rightarrow x(y-7) = -10 + 2y$

$x = \dfrac{-10+2y}{y-7}$

2

La función inversa es:

$f^{-1} : \mathbb{Q} - \{7\} \to \mathbb{Q} - \{2\}$ tq $f^{-1}(x) = \dfrac{-10+2x}{x-7}$

Scanned with CamScanner

Reflexiva.
Simétrica.
Transitiva.

13. **[5 puntos]** Sobre $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$(a,b)\mathcal{R}(m,n) \iff an = bm$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

1) Reflexiva:

Sea $(a,b) \in N^* \times N^*$

$(a,b) R (a,b) \Rightarrow ab = ab$

$\therefore$ La ~~función~~ relación R es reflexiva.

2) Simétrica

Sea $(a,b), (m,n) \in N^* \times N^*$

Se sabe que $(a,b) R (m,n) \Leftrightarrow an = bm$

Hqd $(m,n) R (a,b)$

$\Leftrightarrow mb = na$ (por conmutatividad de la multiplicación)

$\Leftrightarrow bm = an$

$\Leftrightarrow an = bm$ (por conmutatividad del =)

$\therefore$ La función R es simétrica.

3) Transitiva

Sea $(a,b), (m,n), (x,y) \in N^* \times N^*$

Se sabe que:

$(a,b) R (m,n) \Leftrightarrow an = bm$ $(*)$

y:

$(m,n) R (x,y) \Leftrightarrow my = nx$ $(**)$

Hqd

$(a,b) R (x,y) \Rightarrow ay = bx$

$ay = bx$

$ay + my = bx + my$ (como es una igualdad se puede sumar cualquier valor, mientras sea a ambos lados).

$y(a+m) = bx + nx$ (por $**$)

$y(am) = x(b+n)$

$(am)y = (bn)x$ (tomando $(am) = a \wedge (bn) = b$)

$ay = bx$ $\therefore$ La función R es transitiva.