Probabilidades – II 2024

Ley de grandes números. TLC.
Aproximación normal a la binomial.
Desigualdades

Números 26:54

Ley de los grandes números

Sea Υ un evento y $\Upsilon(n)$ en número de ocurrencias del evento en n repeticiones del experimento. Entonces para todo $\varepsilon \geq 0$ se tiene

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left[\left|\frac{\Upsilon(n)}{n} - P[\Upsilon]\right| \geq \varepsilon\right] = 0. \tag{4}$$

Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes y todas siguiendo la misma distribución. Si existe la esperanza $\mu = E[X_k]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu]\right| \geq \varepsilon\right] = 0. \tag{5}$$

Teorema del Límite Central (TLC)

Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes y todas siguiendo la misma distribución. Si existen la esperanza $\mu = E[X_k]$ y la varianza $\sigma^2 = Var[X_k]$. Entonces para $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ y $x < y$ se tiene

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left[x \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq y\right] = \Phi(y) - \Phi(x). \tag{6}$$

Donde $\Phi(z)$ es la distribución normal estándar.

Teorema del Límite Central (TLC)

Sean $X_1, X_2, X_3,.. X_n$ una v.a. mutuamente independientes con una misma distribución, tales que

$$E(X_i) = \mu \text{ y } Var(X_i) = \sigma^2 \text{ para } i = 1,2,..,n$$

Se tiene que

$E\ (S_n) = n\mu$ y $E\ (\bar{X}) = \mu$

$Var\ (S_n) = n\sigma^2\ \ y\ \ \ Var(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Además, para valores grandes de n $(n \to \infty)$, se sigue

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad y \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Ejemplos

En una pequeña industria de fábrica de cajetas de leche, por las estadísticas de años, se sabe que éstas pesan en promedio un kilo con una desviación estándar de 70 gramos. Si estas cajetas se empacan en cajas de 50, ¿cuál es la probabilidad de que una de estas cajas pese más de 51 kilos? 0.021676

Una distribuidora de artículos de oficina tiene una media 35 minutos en la entrega de sus compras a domicilio, con desviación estándar de 8 minutos.

- Si hoy se entregaron 200 paquetes, ¿cuál es la probabilidad que la media del tiempo de entrega estuviese entre 32 y 36 minutos inclusive?
- Como mecanismo de control de calidad, la empresa lleva un registro de los tiempos de entrega de los paquetes despachados. Para hacer más manejable la información, se registra como dato la suma de los tiempos de despacho de los paquetes de 200 en 200. Calcule la probabilidad de que los tiempos de entrega de todos los paquetes despachados el día de hoy haya superado las 115 horas.

R/ 0.96145, 0.81162

Ejercicios

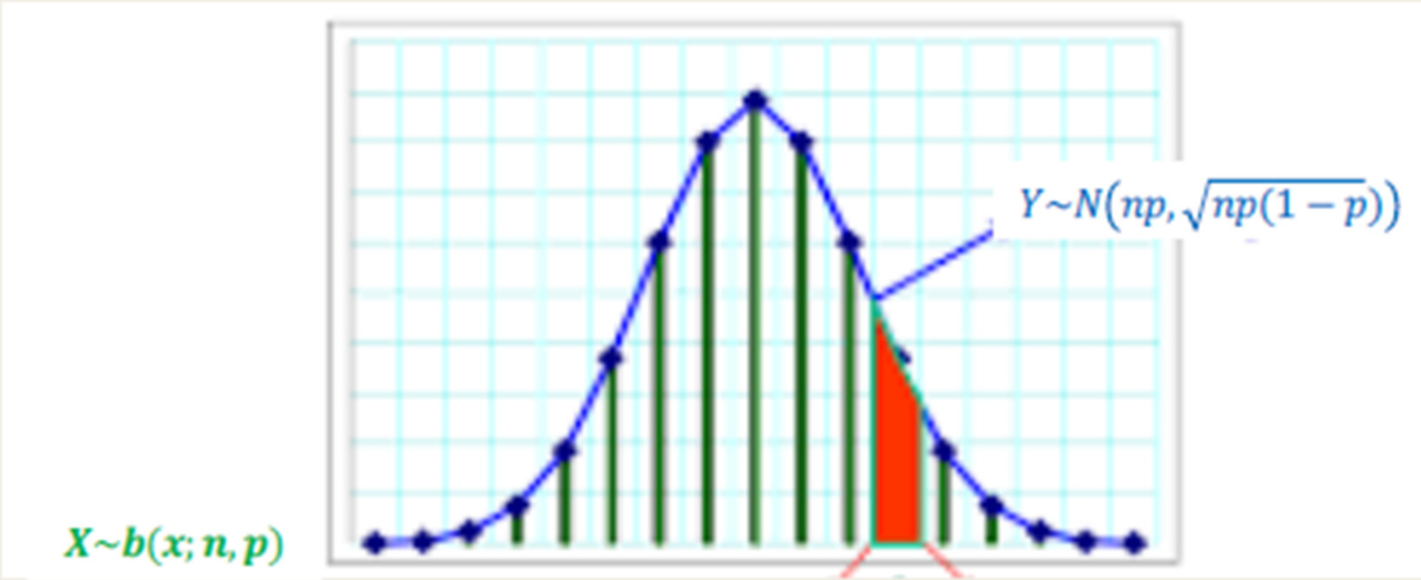
Un cierto componente presenta una duración en horas de distribución desconocida cuya media 2.4 horas con varianza 4 horas al cuadrado. Una política de empresa requiere que compren lotes de componentes que permitan un funcionamiento por 100 horas. Se requiere comprar la menor cantidad posible de manera que la probabilidad de que los componentes cubran el periodo sea superior al 95 %. ¿Cuántos componentes como mínimo se deben comprar?

52

Una empresa garantiza que sus queques de helado tienen un peso promedio de 125 gramos con un desviación estándar de 5 gramos. Asumiendo que esta información es verdadera determine la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 100 de estos queques el peso promedio esté entre 124 y 126 gramos.

0,9545

Aproximación Normal a la Binomial

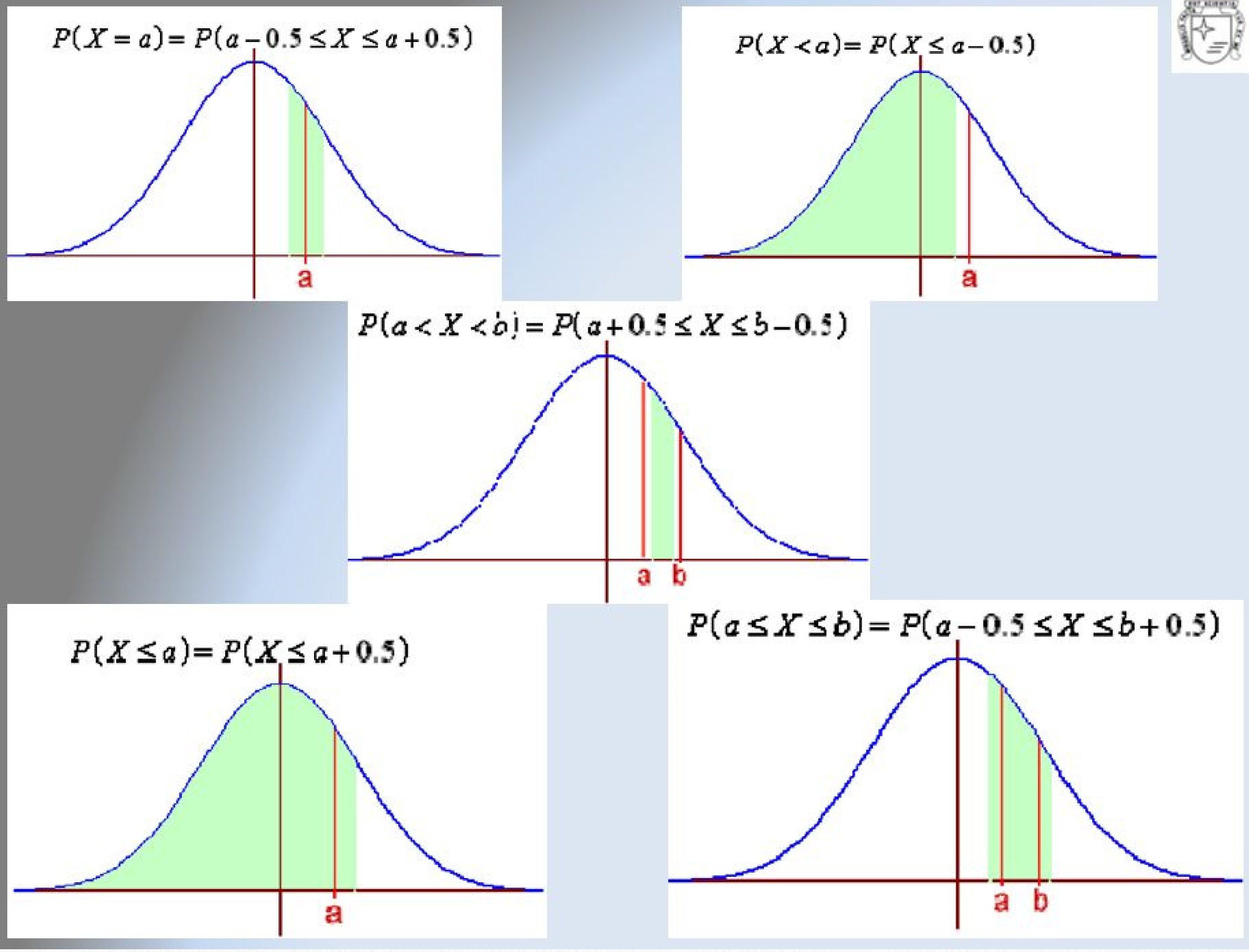


Wikipedia

Corrección de Yates (por continuidad)

Binomial	Normal	
$B(n,p))$	$N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$	
$P(X<k)$	$P(X'<k-0{,}5)$	no k
$P(X\leq k)$	$P(X'\leq k+0{,}5)$	sí k
$P(X=k)$	$P(k-0{,}5<X'<k+0{,}5)$	entorno k
$P(X\geq k)$	$P(X'>k-0{,}5)$	sí k
$P(X>k)$	$P(X'>k+0{,}5)$	no k
$P(k<X<l)$	$P(k+0{,}5<X'<l-0{,}5)$	no k y no l
$P(k<X\leq l)$	$P(k+0{,}5<X'<l+0{,}5)$	no k y sí l
$P(k\leq X<l)$	$P(k-0{,}5<X'<l-0{,}5)$	sí k y no l
$P(k\leq X\leq l)$	$P(k-0{,}5<X'<l+0{,}5)$	sí k y sí l

Corrección de Yates (por continuidad)



Ejemplos

En una gran empresa el 60 % de las personas tiene problemas de tensión. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 1000, 615 o más presenten este problema?

0.174714

La probabilidad de que una persona que asista a la Expo CAR, compre un automovil es de 0.4. ¿Cuántas personas deben asistir a este evento, para tener una probabilidad superior al 90% de que hayan al menos 500 personas que compren un auto?

$n \approx 1306$

Ejercicios

La probabilidad de que una persona haya tenido un padecimiento simple es de 0.03. Para una muestra de 1000 personas, y tomando X: la cantidad de personas, en la muestra, que han tenido el padecimiento, calcule:

- el valor para $P[25 \leq X \leq 35]$ usando la distribución binomial. 0.69272
- una aproximación para el valor para $P[25 \leq X \leq 35]$ usando aproximaciones. 0.68922

Se tira un dado común al aire 100 veces y se anota el número de la cara que queda hacia arriba. Calcule la probabilidad de que:

- la suma de las caras sea mayor o igual a 350. Hágalo de manera directa usando la distribución apropiada y luego hágalo usando una aproximación normal. ≈ 0.6141
- la suma de la caras sea exactamente 400. 0.0003

Desigualdades

Desigualdad de Markov

Si X es una variable aleatoria, cuya esperanza es $E(X)$, para la cual $P[X < 0] = 0$ se cumple la desigualdad

$$P[X \geq t] \leq \frac{E(X)}{t} \tag{1}$$

$$t = n\mu_X \longrightarrow P[X \geq n\mu_X] \leq \frac{1}{n}$$

Si X es una variable aleatoria con media μ_X y varianza σ_X^2. Entonces para cualquier valor $t > 0$ se tiene

$$P[|X - \mu_X)| \geq t] \leq \frac{\sigma_X^2}{t^2} \tag{2}$$

Desigualdad de Chebyshev

Ejercicios

Sea X una aleatoria con media μ y varianza σ^2

a) Sea $k > 0$, verifique que $P(|X-\mu| < k\sigma) \geq \frac{k^2-1}{k^2}$.

b) Si X es una variable aleatoria continua tal que $E(X) = 25$ y $Var(X) = 4$. Acote inferiormente $P(20 < X < 30)$.

I. [4 puntos] Una plaza de ferias recibe en promedio 1000 personas en sus eventos, con una desviación estándar de 20 personas. **Utilice la desigualdad de Chebyschev** para aproximar la cantidad de sillas que deben estar disponibles en el evento, si se desea tener un 89% de certeza de que todas las personas asistentes puedan sentarse.

Ejercicios

La variable aleatoria X se distribuye normalmente con media 2 y desviación estándar desconocida. Calcule una cota mínima para $P(X < 6)$.

Si la media de vida útil que nos garantiza el fabricante de un ordenador es de 4 años y además garantiza que con probabilidad superior a 0.75 su vida útil estará comprendida entre 2 y 6 años, calcule la varianza de Vida útil con la que se ofrecen estos ordenadores desde la fábrica.

Si una variable aleatoria X es tal que su media es 20 y su desviación estándar es 0.5. Use desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota para la probabilidad de que X esté entre 15 y 30.

Gracias por su amable atención!!