

Distribuciones continuas

Distribución Uniforme Continua

1. Una variable aleatoria X se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, 25]$ ¿Cuál es la probabilidad que se encuentre en el intervalo $[12, 20]$?

$$R/ \frac{8}{25}$$

2. Un estudiante del **TEC** entra a clases a las 5pm. De su casa al **TEC** dura entre 40 y 50 minutos ¿A qué hora debe salir el estudiante de su casa para llegar puntualmente con una probabilidad de 0,95?

$$R/ 4 : 10 : 30$$

3. Se sabe que el tiempo de espera de un cliente para ser atendido en la caja de un supermercado, cuando está ubicado en la cuarta posición de la fila, sigue una distribución uniforme, donde los tiempos mínimo y máximo de espera, son de 6 y 18 minutos respectivamente.

- a) Determine la probabilidad que una persona ubicada en la quinta posición de la fila de dicho supermercado deba esperar entre 8 y 11 minutos para ser atendida.

$$R/ \frac{1}{4}$$

- b) Calcule la esperanza y la varianza.

$$R/ E(X) = 12, Var(X) = 12$$

4. La empresa **Save Water** ha manifestado que el gasto diario promedio de agua por persona en Costa Rica es aproximadamente 250 litros, con un máximo de 400 litros. Sea X el gasto diario de agua en litros de una persona en Costa Rica, donde X sigue una distribución uniforme.

- a) ¿Cuál es el gasto diario mínimo de agua en litros presentado por persona en el país de Costa Rica?

$$R/ a = 100$$

- b) ¿Cuál es la probabilidad que, en un día, el gasto diario de agua por persona supere los 320 litros?

$$R/ \frac{4}{15}$$

5. El consumo mensual de agua en un condominio sigue una distribución continua uniforme con media de 40 000 litros. Si se sabe que el consumo mínimo de agua por mes en el condominio es 30 000 litros.

a) Calcule el consumo máximo de agua en el condominio.

$$R/ b = 50\,000$$

b) Calcule la probabilidad que en un mes se consuman entre 40 000 y 44 000 litros de agua en el condominio.

$$R/ \frac{1}{5}$$

6. El ingeniero supervisor del proyecto **Chinecas** sabe que la llegada de cada uno de los trabajadores a su centro de labores se produce independientemente, de acuerdo con la distribución uniforme en el intervalo de 7:00 a 7:25am.

a) Calcule la probabilidad de que un trabajador llegue a su centro de labores después de las 7:17am.

$$R/ \frac{8}{25}$$

b) Calcule la probabilidad de que un trabajador llegue entre las 7:18 y 7:20am.

$$R/ \frac{2}{25}$$

7. La duración en minutos de una clase de matemática general de una universidad sigue una distribución uniforme en el intervalo $[70, 110]$. Una clase tiene una duración apropiada si dura entre 90 y 110 minutos.

a) Determine la probabilidad de que una clase de matemática general tenga una duración apropiada.

$$R/ \frac{1}{4}$$

b) ¿Cuánto tiempo (en minutos) se espera que tenga de duración una clase de matemática general?

$$R/ 90 \text{ minutos}$$

8. La duración en horas de una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones** sigue una distribución uniforme en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$. Una fiesta se considera austera si dura entre 30 minutos y dos horas.

a) Determine la probabilidad de que una fiesta sea austera.

R/ $\frac{1}{3}$

b) ¿Cuánto tiempo (en minutos) se espera que dure una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones**?

R/ 165 minutos

c) El costo de una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones** es de ₡25 000 por decoración del salón más ₡500 por cada minuto que dure la fiesta ¿cuánto dinero se espera pagar por una fiesta de cumpleaños en el **Salón Diversiones**?

R/ ₡107 500

Distribución Exponencial

1. Se sabe que el tiempo de vida útil de un tractor sigue una distribución exponencial con media de 8 años ¿Cuál es la probabilidad de que un tractor de este tipo se tenga que reemplazar antes de 12 años?
R/ 0,7768
2. Se ha determinado que el tiempo, en minutos, que un cliente espera para ser atendido en la soda comedor de la universidad **Futuro Garantizado** sigue una distribución exponencial con media de tres minutos. Para un cliente elegido al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea atendido en menos de cinco minutos?
R/ 0,8111
3. Se sabe que el tiempo de reparación de unas máquinas de escribir tiene una distribución exponencial con media de 22 minutos. Determine la probabilidad de que el tiempo de reparación sea menor a 15 minutos.
R/ 0,4943
4. Se ha determinado que el tiempo en minutos que tarda un cajero de cierto banco atendiendo a una persona, sigue una distribución exponencial con media de cinco minutos. Para un cliente elegido al azar ¿cuál es la probabilidad de que un cajero tarde más de 10 minutos atendiendo a dicho cliente?
R/ 0,1352
5. El tiempo durante el cual cierta marca de batería trabaja en forma efectiva hasta que falle, se distribuye según el modelo exponencial con un tiempo promedio de fallas igual a 360 días. Halle la probabilidad de que el tiempo que la batería trabaja hasta que falle, sea mayor a 400 días.
R/ 0,3291
6. El tiempo en horas de funcionamiento de una cierta batería AA de la marca **Costa Sonic** sigue una distribución exponencial con promedio de 30 horas. Determine la probabilidad de que al seleccionar una batería al azar dure más de 33 horas.
R/ 0,3328
7. Cada día, el tiempo que tarda don Juan en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo sigue una distribución exponencial con un promedio de dos minutos. Determine la probabilidad de que mañana don Juan tarde más de tres minutos en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo.
R/ 0,2231

8. Se ha determinado que el tiempo en minutos que tarda la gasolinera **Fast Station** en llenar un tanque de gasolina de un auto, sigue una distribución exponencial con media desconocida. Se sabe que la probabilidad que **Fast Station** tarde más de 6 minutos en llenar el tanque es de $e^{-\frac{3}{2}}$. ¿Cuál es la varianza del tiempo que tarda **Fast Station** en llenar un tanque de gasolina de un auto?

R/ $Var(X) = 16$

9. Suponga que la vida útil de una pila marca **Duracell** tiene una distribución exponencial con media de 50 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la pila dure menos de 20 horas?

R/ 0,3296

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pila dure al menos 60 horas?

R/ 0,3011

10. En una tienda de suministros electrónicos, el tiempo (en horas) que toma atender una solicitud de cotización sigue una distribución exponencial con media de dos horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para atender una cotización supere las cuatro horas?

R/ 0,1353

b) Carlos envió una solicitud de cotización y lleva cuatro horas esperando ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar al menos seis horas en total?

R/ 0,9144

11. En una tienda de suministros computacionales, el tiempo, en horas, que toma atender una solicitud de cotización sigue una distribución exponencial con media de dos horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para atender una cotización supere las cuatro horas?

R/ 0,1353

b) Si el tiempo de respuesta ha superado las cuatro horas ¿cuál es la probabilidad de que supere las ocho horas?

R/ 0,1353

Distribución Normal

1. Suponga que, en Cartago, la temperatura en el mes de enero sigue una distribución normal con media de $20^{\circ}C$ y una desviación estándar de $6^{\circ}C$. Un día cualquiera de enero, un habitante toma la temperatura. Determine la probabilidad que la temperatura no supere los $24^{\circ}C$ R/ 0,7486
2. Una máquina expendedora de café está confeccionada para descargar una media de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de líquido está distribuida normalmente con media 200 mililitros y desviación típica de 15 mililitros ¿Cuál porcentaje de vasos se llenará con más de 225 mililitros? R/ 0,0475
3. La compañía **XYZ** hace computadoras y garantiza su funcionamiento por 4 años. Si la computadora se mantiene en buen estado, siguiendo una distribución normal con $E(X) = 5$ años y $\sigma = 4$ meses ¿Qué probabilidad hay que una computadora tenga que ser reparada antes de su garantía? R/ 0,0013
4. El precio de una barra de chocolate sigue una distribución normal con $\mu = 100$ gramos y $\sigma = 10$ gramos. La promoción **El Estafado Feliz** premia las barras que pasan cierta cantidad menos de lo indicado en el empaque ¿Cuál debe ser el peso si se desea que el total de barras a premiar sea inferior al 5 %? R/ 83,55
5. La fábrica **TORNIPLUS** hace tornillos, tal que los diámetros están distribuidos normalmente con media de 0,25 y desviación estándar de 0,02. Un tornillo se considera defectuoso si tiene un diámetro d , donde $d \leq 0,20$ o $d \geq 0,28$. Halle el porcentaje de tornillos defectuosos producidos por la fábrica. R/ 0,073

6. Se espera que para el tercer parcial de probabilidades, las notas sigan una distribución normal con media 78 y varianza de 49
- a) ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante que haga examen tenga una nota superior a 82? R/ 0,2843
- b) Si se sabe que la nota es mayor que 82 ¿Cuál es la probabilidad que la nota sea mayor a 90? R/ 0,1533
7. Doña Sonia tiene una pequeña tienda de reparación de ropa, cuya ganancia diaria sigue una distribución normal con un promedio de ₡50 000 y una desviación estándar de ₡5 000.
- a) Determine la probabilidad de que en un día doña Sonia obtenga una ganancia superior a los ₡60 000 R/ 0,0228
- b) Halle la probabilidad de que en un día doña Sonia obtenga una ganancia entre ₡40 000 y ₡57 000 R/ 0,8964
8. Sea T el tiempo que tarda una compañía en resolver un problema de un semáforo, desde el momento que se recibe el reporte de avería. Se sabe que sigue una distribución con $E(T) = 10$ y $Var(T) = 9$
- a) ¿Cuál es la probabilidad que luego de recibir el reporte de avería, el tiempo que tarda la compañía en resolverlo supere las 14,5 horas? R/ 0,0668
- b) Determine el tiempo por encima del cual se ubica el 4,75 % de los trabajos que más tardan en ser atendidos. R/ 15,01

9. El frijol **Llanero** vende bolsas a un peso que sigue una distribución normal de media de 1 000 gramos y desviación estándar de 20 gramos.

a) Determine la probabilidad que una bolsa de frijoles marca **Llanero** pese menos de 980 gramos. R/ 0,1587

b) Determine un peso C , a partir del cual quede el 17 % de las bolsas de frijoles más pesadas. R/ 1 019

c) Un rango $]\mu - c, \mu + c[$ que contenga el 70 % de los pesos R/ $]979,2, 1\ 020,8[$

10. Una población de peces tiene pesos que se distribuyen normalmente, donde no se conoce μ ni σ . Una persona desea conocer el peso C por debajo del cual queda el 80 % de los pesos. Para ello, toma 100 peces aleatoriamente y se da cuenta que 25 de ellos pesan menos de 400 gramos, luego los devuelve y hace otra captura con la misma cantidad de peces y determina que 13 de ellos pesan más de 900 gramos. ¿Cuál es el valor de C ? R/ $\frac{7\ 375}{9}$

Distribución Gamma Incompleta

1. Se sabe que el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad **CET** sigue una distribución Gamma, con $\alpha = 4$. La probabilidad que una persona elegida al azar espere menos de 15 minutos, es de 0,353. Determine el tiempo promedio de esperar al hacer fila para almorzar en esta universidad. R/ $E(X) = 20$
2. Cuando una persona toma un medicamento, el tiempo durante el cual hace efecto en el cuerpo, sigue una distribución Gamma, con un promedio de 5 horas y una varianza de 2,5 horas. Si una persona toma el medicamento a las 6am ¿Cuál es la probabilidad que a la 1pm el medicamento aún esté haciendo efecto en el cuerpo de la persona? R/ 0,891
3. Una piscina pública necesita que le agreguen al agua un cierto químico para que sea apta para el usuario. La distribución del químico del agua sigue una distribución Gamma con una media de 5,383 litros y una varianza de 4,14 litros. Determine la probabilidad de que la cantidad de litros del químico en el agua no sobrepase los 8,5 litros. R/ 0,921
4. En cierta ciudad, el consumo diario de gasolina, en millones de litros, sigue una distribución Gamma como media de seis millones de litros y desviación estándar de $\sqrt{12}$ millones de litros. Científicos han determinado que, si en un día se consumen más de ocho millones de litros en la ciudad, el día se considera altamente contaminante ¿cuál es la probabilidad de que el consumo de gasolina diario exceda los ocho millones de litros? R/ 0,238
5. A un peaje de cierta autopista, la llegada de carros sigue una distribución Gamma con media de 12 carros por minuto y desviación estándar de 4,9 carros por minuto. Los ingenieros de tránsito han determinado que, si pasan más de 20 carros por minuto, se debe abrir otro carril. Calcule la probabilidad que en un tiempo determinado no se tenga que abrir otro carril en la autopista. R/ 0,933

6. En una cierta ciudad el consumo de energía eléctrica, en millones de kilovatios por hora, sigue una distribución Gamma, con promedio de 2 millones de kilovatios y desviación estándar $\sqrt{2}$ millones de kilovatios. Si el consumo de energía es superior a los 4 millones de kilovatios en una hora, esa hora se considera crítica. Determine la probabilidad de que en una determinada hora el consumo de energía eléctrica sea considerada crítica. R/ 0,092
7. Se ha determinado que el tiempo T en horas que semanalmente requiere un sitio web para actualizarse sigue una distribución gamma con media de 12 horas y una desviación estándar de $\sqrt{48}$ horas. Determine la probabilidad de que en alguna semana el tiempo de actualización del sitio sea mayor a 16 horas. R/ 0,238

Distribución Beta

1. Suponga que la probabilidad de acertar una adivinanza es una distribución beta con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 5$. Escriba la expresión integral para calcular la probabilidad de acierto entre 20 % y 30 %.

$$\text{R/ } \int_{0,2}^{0,3} 30x(1-x)^4 dx$$

2. Suponga que la proporción de los componentes de cierto envío que son defectuosos sigue una distribución beta con $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. Calcule la probabilidad de que el envío tenga de 20 % a 30 % de componentes defectuosos.

$$\text{R/ } 0,2351$$

3. Un técnico ofrece garantía de un año para los electrodomésticos que repara. La proporción de electrodomésticos que necesitan ser revisados por esta garantía sigue una distribución beta, con media de 0,6 electrodomésticos y desviación estándar de 0,2 ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 80 % de los electrodomésticos que se repararon en el año requieran revisión por la garantía?

$$\text{R/ } 0,0126$$

4. Muestre que si

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ y } \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

entonces

$$\alpha = \frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \text{ y } \beta = \frac{\mu(1 - \mu)^2}{\sigma^2} + \mu - 1$$

Relación Poisson-Exponencial

1. El número de llamadas que se reciben en una oficina sigue una distribución de Poisson con promedio de 7 llamadas cada dos horas.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre las llamadas realizadas exceda el tiempo esperado? R/ 0,36788
 - b) Determine el intervalo de tiempo tal que la probabilidad de que no se reciban llamadas en dicho intervalo sea de 0,8. R/ 0,03188
2. La empresa **SBE** se dedica a abastecer verduras a los supermercados. Para esto tiene 8 camiones. El tiempo útil de cada camión sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0,001$ (el tiempo medido en meses) Si funcionan bien al menos 6 camiones, la empresa cumple su labor correctamente. Calcule la probabilidad de que la empresa cumpla bien su labor durante más de 5 años, sin tener que adquirir nuevos camiones. R/ 0,8876

Relación Poisson-Gamma

1. La cantidad de reclamos telefónicos que recibe una empresa de servicio postal sigue una distribución de Poisson con una media de dos reclamos por minuto. El gerente está valorando si la cantidad de operadores que trabajan en el departamento de reclamos en este momento es suficiente. Un día visita dicho departamento y propone lo siguiente: si debe esperar menos de tres minutos para obtener los próximos 10 reclamos, entonces se procede a contratar más operadores ¿cuál es la probabilidad de que en este servicio postal contraten más operadores? R/ 0,7408

Desigualdad de Chebyshev

1. Un local comercial se dedica a vender celulares. La demanda para la época navideña es aleatoria y tiene una media de 150 celulares, con desviación estándar de 10 celulares ¿Con cuántos celulares se debe contar en el establecimiento, para satisfacer la demanda con un 90 %?
R/ Entre 118 y 182
2. La empresa fabricante de bolígrafos más reconocida de la ciudad quiere conocer el intervalo de rendimiento en metros en donde sus bolígrafos pueden escribir antes de terminarse. Para una prueba masiva de rendimiento, se obtuvo que el rendimiento medio fue de 1250 metros con una desviación estándar de 200 metros. En dicho intervalo, debe encontrarse el 80 % de bolígrafos producidos.
R/ Entre 803 y 1698
3. Una aerolínea revela que tiene un promedio de 78,7 pasajeros por día, con una desviación estándar de 12,14 ¿Con qué frecuencia los pasajeros están dentro de $k = 2$ desviaciones estándar de la media y cuál es dicho intervalo?
R/ Entre 55 y 103
4. Se sabe que el peso de la población costarricense sigue una distribución, cuya media es 70 kg y desviación estándar de 5 kg. Determine una cota para la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un peso entre 50 y 90 kilogramos.
R/ 0,9375
5. Sea X una variable aleatoria continua, tal que su distribución es simétrica con respecto a su media. Si $E(X) = 15$ y $Var(X) = 9$. Halle una cota inferior para la probabilidad dada por $P(9 \leq X \leq 24)$
R/ $\frac{59}{72}$
6. Sea X una variable aleatoria continua, tal que su distribución es simétrica con respecto a su media. Si $E(X) = 25$ y $Var(X) = 4$. Halle una cota inferior para la probabilidad dada por $P(20 < X < 30)$
R/ 0,84

7. Se ha analizado el comportamiento de una máquina y se acepta que el total de piezas defectuosas, al día, que produce es una variable aleatoria con media 50 piezas y desviación estándar de dos piezas. Determine una cota superior para la probabilidad de que esta máquina produzca entre 50 y 60 piezas defectuosas. R/ 0,96
8. Se sabe que el peso de la población costarricense sigue una distribución, cuya media es 70 kg y desviación estándar de 2 kg. Determine una cota para la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un peso entre 50 y 90 kilogramos. R/ 0,99
9. Una empresa de electrónicos planea fabricar una bombilla de luz de 100 Watts, esta tendrá una vida útil media de 1 200 horas y su desviación estándar es de 100 horas. La empresa desea conocer el porcentaje de bombillas que no logren durar más de 800 horas. R/ $\frac{1}{32}$
10. En una encuesta realizada en la zona norte de Bogotá, se les preguntó a 500 personas por sus gastos diarios en transporte y alimentación. Los datos recopilados mostraron una media de 70 000 pesos y una varianza de 100 millones de pesos. El autor de la encuesta quiere estimar la cantidad de personas que gasta entre 50 000 y 90 000 pesos para sus transportes y alimentación. R/ 375
11. Sea X una variable con media de 70 y desviación estándar desconocida. Al utilizar la desigualdad de Chebyshev, se obtiene que $P(65 \leq X \leq 75) \geq 0,8$. Halle la desviación estándar. R/ $\sqrt{5}$
12. La máquina fabricante de panes de la mejor empresa nacional usa en promedio μ libras de harina por pan. Para garantizar la calidad en sus productos prefabricados, se desea que las libras no excedan 1 libra por encima de la estimada al fabricar el pan, al menos un 90 % del tiempo. Por tal motivo, esta desea saber la desviación estándar máxima que cumpla con los requisitos de fabricación. R/ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Teorema del Límite Central (TLC)

1. El tiempo que el cajero del supermercado **Menos Menos** tarda con cada cliente sigue una distribución normal con un promedio de 7 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Si el cajero atendió a 8 clientes ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo que tardó en atenderlos sea inferior a 72 minutos? **R/ 0,9976**
2. Un paquete de azúcar **Dulce** pesa en promedio 2 kilos con una varianza de $0,01 \text{ kg}^2$. Estos paquetes son empacados en sacos de 30 paquetes cada uno ¿cuál es la probabilidad de que el peso de un saco de azúcar sea inferior a 59 kilos? **R/ 0,0336**
3. El doctor Adrián tiene un consultorio privado y ha estimado que en promedio cobra 15 000 colones por consulta con una desviación estándar de 7 000 colones. Un cliente se quejó que el cobro de 18 000 colones por una consulta fue excesivo. Después de discutir, el doctor establece que si en una muestra de 50 facturas por consulta, se obtiene un ingreso inferior al monto cobrado al cliente, se le devolverá todo el dinero Determine la probabilidad de que se devuelva todo el dinero cobrado. **R/ 0,9987**
4. Una clase de melocotones de cierto huerto tienen un diámetro promedio de 10 centímetros con una desviación estándar de 0,7 centímetros. En una muestra de 40 melocotones del huerto, determine la probabilidad de que el diámetro promedio de los 40 melocotones sea superior a 9,8 centímetros. **R/ 0,9646**
5. Una bolsa de zanahorias tiene un peso promedio de 2 kilogramos y una desviación de 100 gramos. Se empacan cajas que contienen 70 bolsas. Determine la probabilidad de que en una caja el peso promedio por bolsa sea inferior a 1 990 gramos. **R/ 0,2004**
6. El gasto diario de papelería en una fotocopidora sigue una distribución con media de 80 páginas por minuto y desviación estándar de $4\sqrt{5}$ páginas por minuto. Determine la probabilidad que en una hora (60 minutos), se gaste más de 5 000 páginas. **R/ 0,002**

7. Una fábrica de dispositivos médicos empaqueta bolsas de suero, con un peso promedio de 200 gramos y una desviación estándar de 20 gramos. Las bolsas se empaquetan en cajas que contienen 100 bolsas. Al elegir una caja al azar, esta pasa al control de calidad, si el peso promedio de las bolsas que contiene se encuentra entre los 198 y 202 gramos, calcule la probabilidad de que una caja no pase el control de calidad. R/ 0,3174
8. El precio de una barra de chocolate sigue una distribución normal con $\mu = 100$ gramos y $\sigma = 10$ gramos. En una caja se colocan 100 barras de chocolate y se indica que el peso promedio de la caja está entre 99 gramos y 101 gramos ¿cuál es la probabilidad de que esa afirmación sea verdadera? R/ 0,6826
9. Una compañía constructora compra tubos y toma una muestra de 100 tubos, se miden los diámetros y se observa que la media de los diámetros es de 30 pulgadas y la desviación estándar es de 1,20 pulgadas. Calcule la probabilidad que la media se encuentre entre 29,75 y 30,25 pulgadas. R/ 0,9624
10. La empresa **LLAMAX** fabrica celulares. El número de celulares defectuosos sigue una media de 1,5. En un mes (30 días), calcule la probabilidad que el número de celulares defectuosos se encuentre en el intervalo de [50, 60] R/ 0,2142
11. Una empresa dedicada a hacer espejos contabilizó que el número de espejos que se quiebran diariamente en su bodega es una variable aleatoria que sigue una distribución con media 2. Calcule la probabilidad que, en un año, el número de espejos rotos se encuentre en el intervalo [650, 700], suponiendo que el año tiene 365 días. R/ 0,132
12. Un nuevo bombillo fluorescente ha salido al mercado, en el empaque dice que tiene una vida promedio de 8 000 horas, con desviación típica de 75 horas. La oficina de protección al consumidor escoge una muestra aleatoria de 95 bombillos para realizarle varias pruebas.
- a) Calcule la probabilidad que la media sea mayor a 7 975 horas. R/ 0,9994
- b) ¿Cuál es el valor de la media que debería sugerir la compañía fabricante, si quiere tener un 95 % de seguridad de que la media de los bombillos sea mayor al valor sugerido por la compañía? R/ 7 987,3

13. Jorge elaboró un software para resolver integrales no triviales, el cual tarda en promedio 4 segundos resolviendo una integral no trivial, con desviación estándar de 1,5 segundos.
- a) Suponga que el tiempo que tarda el programa en resolver una integral no trivial, sigue una distribución normal. La probabilidad que el programa resuelva una lista de 10 integrales no triviales en menos de un tiempo t en segundos, es superior al 95 %. Determine el menor valor de t . R/ 47,8
- b) ¿Cuál es la probabilidad que en promedio tarde menos de 3,5 segundos en resolver las integrales no triviales? R/ 0,0336
14. Cierta tipo de llantas tienen una duración media de 30 000 kilómetros con una desviación de 2 500 kilómetros. Don Juan tiene una flota de diez taxis que utilizan este tipo de llantas. Don Juan decide cambiarle las llantas a toda su flota.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración promedio de las llantas adquiridas por Don Juan sea inferior a 29 500 kilómetros? R/ 0,2643
- b) Se sabe que la probabilidad de que la duración promedio de las llantas adquiridas por Don Juan es mayor a C es de por lo menos 10 %. Determine el valor máximo de C para la situación dada. R/ 31 011,9288
15. El tiempo que tarda una persona en contestar una encuesta telefónica sobre las próximas elecciones de la empresa **UNI** es en promedio 200 segundos, con una desviación promedio de 20 segundos. La empresa contrató encuestadores para tal fin.
- a) Si un encuestador realiza 55 encuestas ¿cuál es la probabilidad de que tarde más de tres horas en realizarlas? R/ 0,9115
- b) Si se contrata un encuestador que realiza 30 encuestas ¿cuál es la probabilidad que tarde en promedio menos de 190 segundos en cada encuesta? R/ 0,0031

16. La estatura de los estudiantes de un centro educativo sigue una distribución normal con media de 1,70 metros y una desviación típica de 0,42. Si se toman 10 muestras con 49 estudiantes cada una.

- a) Calcule la desviación estándar esperada en la distribución de las medias. $R/ \frac{3}{50}$
- b) ¿En cuántas muestras se espera que la media sea menor o igual a 1,65 metros? $R/ 2$

17. La empresa **Compu Segura** se encarga de reparar computadoras personales y por la revisión de cada una cobra en promedio ₡20 000, con una desviación estándar de ₡3 800.

- a) Don Beto se queja ante el dueño de la empresa de que el cobro de ₡22 600 por la revisión de su computadora es muy elevado. Después de discutir, el dueño accede a rebajarle el costo del servicio si el pago promedio en una muestra de 30 revisiones es inferior al monto cobrado a don Beto. Determine la probabilidad de que se le realice el rebajo. $R/ 0,99991156$
- b) Suponga que todos los días se revisan 100 computadoras. El dueño de la empresa califica un día como productivo si el ingreso de ese día por concepto de revisión está dentro del 10 % de ingresos diarios más elevados. Determine el ingreso diario mínimo para que el día sea productivo. $R/ ₡2 048 640$

18. Un técnico de la empresa **ECI** señala que la duración de las llamadas telefónicas realizadas en cierta localidad sigue una distribución normal con media de 180 segundos y una desviación estándar de 300 segundos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada realizada en la localidad dure más de siete minutos? $R/ 0,2119$
- b) De las llamadas que se encuentran en el 5 % de las más largas ¿cuál es la duración de la llamada más breve? $R/ 673,5$ segundos
- c) En 10 llamadas ¿cuál es la probabilidad de que su duración promedio sea menor que 160 segundos? $R/ 0,4168$
- d) En 10 llamadas ¿cuál es la probabilidad de que su duración total sea mayor a 31 minutos? $R/ 0,4760$

19. El promedio de ingresos semanales de un empleado es de \$150 000, con desviación típica de \$10 000. El dueño de la empresa decide ahorrar la totalidad de los ingresos, hasta superar los \$6 millones. Determine la cantidad de semanas que deberá esperar para superar esa cantidad, con una probabilidad del 80 %.
- R/ 40
20. Una pieza recta se construye conectando tres secciones A , B , C , cada una de las cuales se construye en una máquina diferente. Las tres medidas, dadas en centímetros, siguen una distribución normal con medias 50, 35 y 65; y varianzas 0,25, 0,0625 y 0,305, respectivamente. La pieza se utiliza para construir el ala de un avión, solo si su longitud total se encuentra entre 148,35 centímetros y 149,75 centímetros ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda utilizar la pieza?
- R/ 0,3566
21. Una tienda de tatuajes hace tres tipos de tatuajes: estrellas, dragones y vampiros. Cada estrella vale \$10 000, los dragones \$10 000 y los vampiros \$12 000. Las probabilidades de que los clientes pidan alguno de estos tatuajes son 0,5, 0,3 y 0,2, respectivamente. Si un día particular llegan 50 clientes y ordenan un tatuaje cada uno. Determine la probabilidad de que ese día la tienda adquiriera más de \$510 000.
- R/ 0,9616
22. Una serie de ensayos E_1, E_2, \dots, E_n independientes e idénticamente distribuidos provienen de una distribución de tiempo que es una variable aleatoria con media de un minuto y desviación estándar de dos minutos. Se eligen ensayos de manera que la probabilidad de que el tiempo acumulado entre ellos no supere los 200 minutos sea inferior a 0,9. Determine el total de ensayos a elegir.
- R/ [167, 239]
23. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias continuas tales que $X_i \sim N\left(i, \frac{1}{n}\right)$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Determine el valor de n , de manera que $P(S_n > 10n) = 0,75$.
- Sugerencia:** recuerde que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- R/ $n = 19$

24. Dadas las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n mutuamente independientes tales que

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \text{ con } \mu_i = i \text{ y } \sigma_i^2 = \frac{1}{n}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Considere la variable aleatoria $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Determine el valor de n que satisface que la probabilidad de que $S_n > 10n$ es igual a 0,5

R/ 19

Aproximación a la binomial utilizando la normal

1. La probabilidad de vender un libro es de 0,01. Si se ofertan 5 000 libros en un día, determine la probabilidad de que se logren vender más de 60 libros. R/ 0,0681
2. En una canasta hay solo bolas rojas y blancas. Sea p la probabilidad de extraer una bola blanca de la canasta. De 100 extracciones con reposición, se sabe que la probabilidad de obtener a lo sumo 30 bolas blancas es del 40 %. Utilice la aproximación de la binomial por la normal para determinar el valor aproximado de p . R/ 0,3166
3. En un país C , el año pasado se inauguró la esperada autopista, sin embargo, desde su inauguración, varios vehículos han sufrido accidentes de diferentes tipos, pero la probabilidad p de que un vehículo sufra un accidente se desconoce. Ante esta situación, se ha estimado que de 1 000 vehículos, la probabilidad que al menos 50 sufran algún tipo de accidente es de 20 %. Con base en esta situación, halle aproximadamente la probabilidad p de que el vehículo sufra un accidente en esta autopista. R/ 0,0566
4. Jacó es una de las playas más visitadas de nuestro país, sin embargo, si una persona asiste al **Gran Hotel Jacó**, la probabilidad de que se broncee por más de tres horas es de 0,2.
 - a) De 10 personas que asisten al **Gran Hotel Jacó** ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas se bronceen por más de tres horas? R/ 0,6241
 - b) Aproximadamente ¿cuántas personas deben asistir este sábado al **Gran Hotel Jacó** para tener una probabilidad cercana al 90 % de que este día al menos 100 personas se bronceen por más de tres horas? R/ 558

Ejercicios Combinados

1. El gasto diario de cierta oficina sigue una distribución Gamma con media 20 y desviación estándar de $2\sqrt{10}$ (en miles de colones)
 - a) Determine la probabilidad que en un día se gasten menos de 22 000 colones. R/ 0,659
 - b) Determine la probabilidad de que en un mes (30 días) se gaste más de medio millón de colones. R/ 0,9981
2. Suponga que el peso de las sandías en cierta finca sigue una distribución normal, con media de tres kilogramos y desviación estándar de 0,8 kilogramos.
 - a) Amelia compra 15 sandías para su establecimiento de jugos naturales ¿cuál es la probabilidad de que la suma de sus pesos sea superior a 47 kilogramos? R/ 0,2578
 - b) Si el 30 % de las sandías de mayor peso se consideran gigantes ¿cuál es el peso mínimo que debe tener una sandía para considerarse gigante? R/ 3,416
3. La cantidad de agua en las botellas **Manantial Puro** sigue una distribución normal con media de 1 005 mililitros por botella y desviación estándar de 50 mililitros. Las botellas antes de ser distribuidas a los puntos de venta pasan por una inspección donde son desechadas aquellas que tienen una cantidad inferior a 950 mililitros.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella sea desechada? R/ 0,1357
 - b) Se quiere empacar las botellas en cajas ¿cuántas botellas como mínimo deben ponerse en cada caja para que la cantidad total de agua en la caja sea mayor a 10 000 mililitros, con una probabilidad superior al 95 %? R/ 11

4. El tiempo de vida útil de una tablet **XTEC** sigue una distribución exponencial con media de 3 años. Dada la variedad de marcas de tablet en el mercado, la organización **Evalúa Tablet** se ha dedicado a evaluar estos dispositivos y considera que una tablet es de buena calidad, si tiene una vida útil mayor a cuatro años.
- a) Halle la probabilidad de que una tablet **XTEC** sea de buena calidad. R/ 0,2635
- b) A partir del 2017, la empresa otorgará un certificado de calidad a las empresas que fabrican tablets y que cumplan el test: al elegir 40 tabletas al azar, estas deben ser en promedio de buena calidad. Determine la probabilidad de que **XTEC** obtenga el certificado de buena calidad. R/ 0,242
5. El tiempo de vida útil (en años) de un televisor marca **Nítido** sigue una distribución exponencial con una media de nueve años. Un televisor se considera duradero si tiene una vida útil mayor a 10 años.
- a) Halle la probabilidad de que un televisor marca **Nítido** sea duradero. R/ 0,3291
- b) El **Mall Paseo Feliz** ha adquirido 50 televisores marca **Nítido**. Determine aproximadamente la probabilidad de que, en promedio, los televisores adquiridos sean duraderos. R/ 0,2148

6. El tiempo que tarda un empleado en empacar una caja de bananos sigue una distribución exponencial, con media de 90 segundos. La empresa bananera **Costa Rican Bananas** ha decidido despedir a aquellos que en una inspección sorpresa tarden más de 2 minutos.

a) Halle la probabilidad que un empacador sea despedido.

R/ 0,2635

b) La empresa **Costa Rican Bananas** cuenta con diversas empacadoras en todo el país y cada una cuenta con 35 empleados empacadores. La empresa ha decidido además, cerrar empacadoras en las que el promedio por empacador sea mayor a 100 segundos. Determine la probabilidad de que una empresa sea cerrada.

R/ 0,2546

c) En un control por parte de las autoridades del **Ministerio de Salud** ha decidido multar aquellas empacadoras de empresas frutícolas del país que incumplen con el tiempo eficiente de los empaques de sus productos frutales por al menos el 40 % de sus empleados. Por las regulaciones impuestas hacia las empresas bananeras, se considera tiempo eficiente cuando un empacador tarda a lo sumo dos minutos por empacar cada caja de bananos. Sabiendo que la empresa bananera **Costa Rican Bananas** tiene distribuidas empacadoras por todo el país y cada una cuenta con 35 empleados empacadores ¿cuál es la probabilidad de que una empacadora de la empresa **Costa Rican Bananas** sea multada por parte del **Ministerio de Salud**?

R/ 0,0505

Ejercicios especiales

1. Una batería funciona en tiempo exponencial con promedio de 5 horas.

a) En un lote de 20 baterías, determine la probabilidad que entre 7 y 12 baterías duren más de 6 horas. R/ 0,2260

b) Se van utilizando una a una las baterías, pudiendo probar alguna de ellas en más de una ocasión, hasta obtener dos que duren menos de seis horas. Determine la probabilidad de que deban utilizarse entre 10 y 12 baterías. R/ 0,00009962

2. El tiempo en minutos que tarda cierto componente, sigue una distribución de la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^{11}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Pruebe que $E(X) = \frac{10}{9}$ y $Var(X) = \frac{5}{324}$

b) Si 40 componentes eléctricos se ponen a funcionar ¿cuál es la probabilidad que su duración promedio sea superior a 1,1 minutos? R/ 0,7157

c) Si varios componentes se ponen en funcionamiento en serie ¿cuántos componentes es necesario unir para tener una probabilidad superior al 95 % de que el tiempo total de funcionamiento sea superior a una hora? R/ $n = 56$

3. El ingreso mensual en millones de colones de la empresa **GFM** es una variable aleatoria continua X cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{21} & \text{si } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Demuestre que el ingreso promedio mensual de la empresa es de $\frac{85}{28}$ millones.
- b) Demuestre que la varianza del ingreso mensual es de $\frac{2\,067}{3\,920}$ millones.
- c) El **Ministerio de Economía** calificará de exitosas a aquellas empresas que en los próximos cinco años muestren un ingreso total superior a 200 millones. Determine la probabilidad de que la empresa **GFM** sea calificada de exitosa. R/ 0,0007

Demostraciones

1. Sea X una variable aleatoria continua tal que $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Muestre que:

$$P(X \geq t + h | X \geq t) = P(X \geq h)$$

2. Pruebe que para cualquier valor positivo de a , se cumple que

$$P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$$

donde Z sigue una distribución normal estándar.

3. Sea X una variable aleatoria continua. Usando la definición de esperanza matemática, demuestre que

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

4. Demuestre que

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - [E(X)]^2$$

5. Dada una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2 . Recuerde que por la desigualdad de Chebyshev se tiene que para todo $k > 0$, $P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$, con $t = k\sigma$. Demuestre que

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq \frac{k^2 - 1}{k^2}$$

6. Sea X una variable aleatoria continua con media μ , varianza σ^2 y función generadora de momentos $m_X(t)$. Sea Y otra variable aleatoria continua tal que $Y = aX + b$ y función generadora de momentos $m_Y(t)$.

a) Muestre que $m_X(0) = 1$

b) Muestre que $m_Y(t) = e^{bt} \cdot m_X(at)$

c) Utilice $m_Y(t)$ para encontrar la media de Y .

$$\text{R/ } E(Y) = a\mu + b$$

d) Utilice $m_Y(t)$ para encontrar la varianza de Y .

$$\text{R/ } \text{Var}(Y) = a^2 \cdot \sigma^2$$