Probabilidades – II 2024

Probabilidad Condicional. Independencia. Probabilidad Total. Regla de Bayes

Marcos 10:25

Actividad: **¡¡Me da lo mismo!!**

Considere el experimento de lanzar un dado legal y anotar el número en la cara hacia arriba

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento si en el primero se obtuvo un número impar?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el tercer lanzamiento dado que el primero fue impar y el segundo fue par?

Actividad: ¡¡Bola negra!!

Se tiene una cesta con 4 bolitas **rojas** y 3 bolitas **negras**. Considere el experimento de extraer aleatoriamente, sin reposición, bolitas de la cesta.

a. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolita roja?

b. ¿Cuál es la probabilidad extraer una bolita roja si ya se extrajo una de color negro?

c. Conteste las mismas preguntas, pero ahora considerando que cada bolita que se extraiga se regresa a la cesta.

Probabilidad Condicional

La probabilidad de que un evento A ocurra dado que un evento B ha ocurrido se llamará probabilidad condicional de A dado B, y se denotará por

$$P[A \setminus B]$$

Esta probabilidad se puede calcular recurriendo a la regla:

$$P[A \setminus B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \tag{5}$$

Independencia de Eventos

Dos eventos A y B son independientes si se cumple:

$$P[B \setminus A] = P[B] \text{ y } P[A \setminus B] = P[A].$$

Teorema 4 (Regla del Producto).

Si A y B son eventos independientes entonces se cumple

$$P[(A \cap B)] = P[A]\, P[B].$$

Generalización de la regla del producto

Definición 14 *Se dice que los eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ son mutuamente independientes si y solo si*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$$

Teorema 13 *Sean A y B eventos sobre un espacio muestral Ω, se tiene que*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Teorema 14 *En general se cumple que*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \\ &\quad ... \cdot P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})) \end{aligned}$$

Ejemplos

En una caja hay dos bolas rojas y dos negras. Se extraen aleatoriamente 2 bolas sin reponerlas a la caja. Determine la probabilidad de que las bolas sean de ambos colores.

Una juego consiste en lanzar un dado varias veces. Se gana si se obtienen 2 veces consecutivas un número mayor a 4. Determine:

a) La probabilidad de obtener, en un lanzamiento, un número mayor que 4. 1/3

b) La probabilidad de ganar en dos lanzamientos. 1/9

c) La probabilidad de ganar en tres. 2/27

d) La probabilidad de ganar en cuatro lanzamientos. 2/27

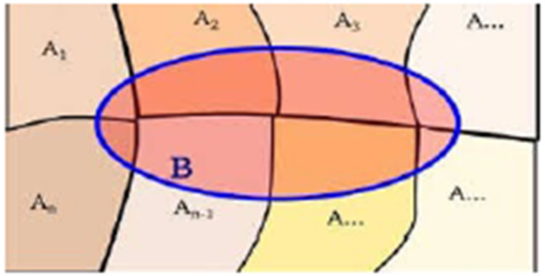
Partición

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos tales que:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.
- $P[A_i] > 0, i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio Ω.

Probabilidad Total



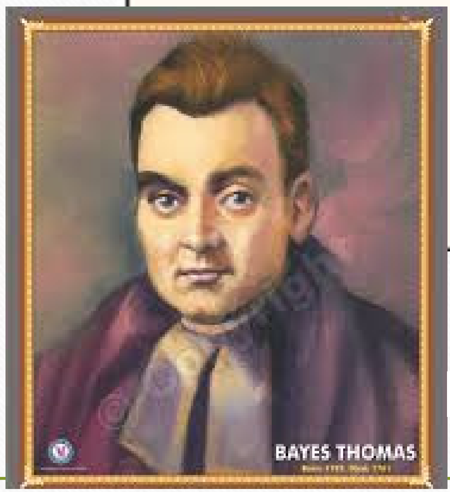
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio Ω y si B es cualquier evento entonces:

$$
\begin{aligned}
P[B] &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)] \\
&= P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] + \cdots + P[B \cap A_n] \\
&= P[A_1]\, P[B \backslash A_1] + P[A_2]\, P[B \backslash A_2] + \cdots + P[A_n]\, P[B \backslash A_n] \\
&= \sum_{i=1}^{n} P[A_i]\, P[B \backslash A_i].
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes

Si un experimento consiste de dos estados tal que la secuencia de eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ forman una partición del espacio muestral del primer evento. Si B es un evento del segundo estado del experimento entonces, la probabilidad de que ocurra cualquiera de los eventos A_k dado que ocurre el evento B es

$$\begin{aligned} P[A_k \backslash B] &= \frac{P[(A_k \cap B)]}{P[B]} \qquad (9) \\ &= \frac{P[A_k]\, P[B \backslash A_k]}{\sum_{i=1}^{n} P[A_i]\, P[B \backslash A_i]}. \end{aligned}$$



T. Bayes.

1701-1761

Ejemplos

Una gran fábrica emplea 500 obreros, 300 hombres y 200 mujeres. Los hombres se incapacitan con una probabilidad del 25% mientras que las mujeres lo hacen con una probabilidad del 20%. Si se toma una incapacidad al azar cuál es la probabilidad de que esa persona sea hombre. R/15/23

Una empresa constructora alquila maquinaria de tres agencias diferentes: 20% de la agencia A, 25% de la agencia B y 55% de la agencia C. Si el 12% de la maquinaria ofrecida por A, 8% de la proveniente de B y 15% de la maquinaria de C presenta problemas de funcionamiento

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa contrate maquinaria con problemas de funcionamiento? R/0.1265
b) Si la gerencia observó una máquina con problemas de funcionamiento, ¿cuál es la probabilidad que haya sido alquilada en la agencia C? R/0.6522

Ejercicio

De los expresidentes de un país C, el 40% proviene del partido L, el 42% del partido S y el resto de partidos minoritarios. El 85% de los expresidentes que provienen de L han sido corruptos, lo mismo el 90% de los expresidentes provenientes de S, mientras el 50% de los expresidentes restantes ha sido corrupto. Se elige un expresidente a azar del país C

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el expresidente elegido haya sido corrupto? $R/$ 0.808

(b) Si el presidente elegido fue corrupto, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga del partido S? $R/$ 0.468

Ejercicio

Si Enrique repara una computadora la probabilidad de que vuelva al taller en el período de garantía de la reparación es de 0.02, mientras que cuando la reparación la hace Luis esta probabilidad aumenta a un 0.2.

a) Si ambos reciben el 50% de los computadores que llegan a reparación, cuál es la probabilidad de que un computador reparado vuelva al taller en garantía.

b) Si el administrador del taller desea que, en promedio, no más del 5% de los computadores vuelvan al taller en periodo de garantía; determine qué porcentaje de las computadoras debe entregar a Enrique para que repare y que porcentaje a Luis.

Gracias por su
amable atención!!