

Cálculo diferencial e integral

M. Sc. Luis Alejandro Acuña P.

2016

Contenido

0	Cálculo proposicional	1
0.1	Proposiciones	1
0.2	“Y”, “o”, “no” y DeMorgan	3
0.3	Proposiciones condicionales	7
0.4	Tablas de verdad	9
0.5	Demostraciones	11
1	Límites y continuidad	15
1.1	Límites a partir de gráficos o tablas	15
1.2	Límites de polinomios y de funciones radicales	18
1.3	Límites con funciones trigonométricas	21
1.4	Límites infinitos y límites al infinito a partir de gráficos o tablas	23
1.5	Cálculo de límites infinitos y límites al infinito	26
1.6	El teorema del encaje	31
1.7	Continuidad	33
2	Derivación	37
2.1	Derivadas por definición	37
2.2	Reglas de derivación	39
2.3	Derivada como razón de cambio	41
2.4	Reglas del producto y del cociente	42
2.5	Regla de la cadena	46
2.6	Funciones exponenciales y logarítmicas	48
2.7	Derivación implícita	51
2.8	Derivación logarítmica	54
2.9	Derivadas de orden superior	55
3	Optimización	59
3.1	Extremos locales	59
3.2	Concavidad	60
3.3	Criterio de la segunda derivada	62
3.4	Extremos absolutos	63

3.5	Optimización	64
3.5.1	Problemas generales	64
3.5.2	Problemas de aumento/reducción	67
3.5.3	Problemas que involucran áreas o volúmenes	69
3.5.4	Problemas en el plano cartesiano	72
4	Otras aplicaciones de las derivadas	75
4.1	La regla de L'Hôpital	75
4.2	Asíntotas	80
4.3	Trazo de curvas	82
4.4	Tasas de cambio relacionadas	86
5	Integración	91
5.1	La integral indefinida	91
5.2	La integral definida	95
5.3	Integración por sustitución	102
5.4	Fracciones parciales	108
5.5	Funciones trigonométricas	115
5.6	Sustitución trigonométrica	118
5.7	Integración por partes	121
5.8	Integrales impropias	125
6	Temas adicionales sobre integración	129
6.1	Fracciones parciales con factores cuadráticos repetidos	129
6.2	La sustitución $u = \tan(x/2)$	131
6.3	Sumas de Riemann	132
6.4	Longitud de arco	138
6.5	Trabajo realizado por una fuerza	140
6.6	Valor promedio	142
A	Repaso de técnicas de integración	145
A.1	Integración inmediata	145
A.2	Integración por sustitución	145
A.3	Fracciones parciales	147
A.4	Sustitución trigonométrica	149
A.5	Partes	150
A.6	Repaso general	151
B	Sugerencias	153
C	Soluciones	175

Cálculo proposicional

0.1 Proposiciones

Una *proposición* es una oración que puede ser verdadera o falsa. Se acostumbra usar letras como p , q , r para denotar proposiciones. El *valor lógico* de una proposición es *verdadero* o *falso* (que denotaremos con la letra V o la letra F, respectivamente).

Ejemplo 1

- Sea q la oración “La altura del volcán Irazú sobre el nivel del mar es mayor que tres mil metros”. Esta oración puede ser verdadera o falsa, de modo que es una proposición. Su valor lógico resulta (por razones geográficas) ser *verdadero*.
- La oración q : “El jugo de naranja se extrae de las vacas” también es una proposición. Su valor lógico es *falso*.
- La oración $s(x)$: “ $x^2 = 9$ ” es una proposición cuyo valor lógico es indeterminado mientras no se conozca el valor de x .
La notación $s(x)$ indica que la afirmación depende de x (como la notación $f(x)$ para funciones). La oración $s(1)$ dice “ $1^2 = 9$ ” y es falsa. La oración $s(-3)$ dice “ $(-3)^2 = 9$ ” y es verdadera.
- Oraciones como “qué calor hace”, “¿dónde está el baño?” o “pásenme la sal” no son proposiciones.

Una *proposición universal* es una de la forma “Para todo x en S , $p(x)$ ”, donde S es algún conjunto y $p(x)$ es alguna proposición acerca de x . Se simboliza así: “ $\forall x \in S, p(x)$ ”. Puede decirse “cada x ” o “cualquier x ” en vez de “todo x ”.

Ejemplo 2

- La proposición universal “ $\forall k \in \mathbb{Z}, 2k$ es par” dice que para cualquier número entero k , $2k$ es par, y es cierta (\mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros, y si k es un entero entonces $2k$ es un número par). Aquí $p(k)$ es la proposición “ $2k$ es par”, que por sí sola no es verdadera ni falsa. Pero si k es un entero, $p(k)$ es verdadera.
- En contraste con la anterior, la proposición “ $\forall t \in \mathbb{R}, 2t$ es par” (que $2t$ es par para cualquier número real t) es falsa. Es cierto que $2t$ es par para *algunos* valores de $t \in \mathbb{R}$, pero no para todos (por ejemplo, si $t = 1.5$ entonces $2t = 3$, que no es par).

- ¿Es cierta la proposición q : “ $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq y$ ”? En otras palabras, ¿la desigualdad $y^2 \geq y$ se cumple para todo $y \in \mathbb{R}$?

No bastan muchos ejemplos para comprobar la veracidad. Denotando $p(y)$: “ $y^2 \geq y$ ”, es cierto que $p(3)$: $3^2 \geq 3$, $p(0)$: $0^2 \geq 0$, y $p(-5)$: $(-5)^2 \geq -5$ son verdaderas. Pero hay excepciones.

Una excepción a una proposición universal se llama *contraejemplo*, y en este caso un contraejemplo se da con $y = 0.5$: la proposición $p(0.5)$ dice que $0.5^2 \geq 0.5$, lo cual es falso. Entonces la proposición universal q es falsa: la desigualdad $q(y)$ no se cumple para *todo* $y \in \mathbb{R}$.

- La proposición “ $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ ” es una proposición universal verdadera. Aquí hay dos variables, a y b , y una proposición $p(a, b)$: $a + b = b + a$. La proposición $p(a, b)$ es verdadera para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $b \in \mathbb{R}$.

Una *proposición existencial* es una de la forma “Existe algún $x \in S$ para el cual $p(x)$ ”, o equivalentemente, “Para algún $x \in S, p(x)$ ”, donde S es algún conjunto y $p(x)$ es alguna proposición acerca de x . Se simboliza así: “ $\exists x \in S, p(x)$ ” (que se puede leer “existe un x en S tal que $p(x)$ ”).

Ejemplo 3

- “ $\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = 5$ ” dice que existe algún n , en el conjunto de los enteros, tal que $n^2 = 5$. Eso es, que algún número entero elevado al cuadrado da 5. Esta es una proposición existencial falsa (no existe tal número entero).
- Sea A_{2009} el conjunto de días en el año 2009, y sea $t(d)$: “Se registró un temblor en Costa Rica en el día d ”. Entonces la proposición existencial “ $\exists d \in A_{2009}, t(d)$ ” es verdadera: existió algún día en el año 2009 en que se registró un temblor en Costa Rica. De hecho, hubo varios días en que se registraron temblores, pero una proposición existencial es cierta con solo que algún elemento del conjunto satisfaga la condición. Sigue siendo cierta si varios elementos la satisfacen.
- “ $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + z = x$ ” dice que existe algún $z \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}, x + z = x$. Es cierto: sí existe tal z , y es igual a cero. El número $z = 0$ cumple que $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x$.
- “ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ ” es realmente una proposición universal. Afirma que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe algún $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. En efecto, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ existe el número $y = -x$ tal que $x + (-x) = 0$.

Determine si la oración es una proposición

1. Marte es más grande que Venus.
2. Todos los cuadrados son rectángulos.
3. Sálganse ya.
4. El agua se evapora a 0°C .
5. ¿A qué hora sale el sol mañana?
6. $\sqrt[3]{64} = 8$

7. Estudiar lógica.
8. Algunos números racionales son enteros.
9. Bajo el límpido azul de tu cielo.
10. Blanca y pura descansa la paz.
11. En el principio creó Dios el cielo y la tierra.
12. Si estas paredes hablaran...
13. Todos los números racionales son enteros.
14. Dime con quién andas, y si tiene plata me lo mandas.

Simbolice la proposición existencial o universal

15. Una de mis primas estudió medicina.
16. Algunas aves no pueden volar.
17. Un día en 1998 cayó nieve en el Irazú.
18. Hay una canción de los Beatles que no lleva batería.
19. Todas las canciones de los Beatles son cantadas.
20. Todos sus compañeros le dicen apodos.
21. Cada computadora portátil es un riesgo de robo.
22. En todos los triángulos la suma de los ángulos es 180° .
23. Ningún humano puede vencer a Superman.
24. Hubo un día el mes pasado en que todos los alumnos de este grupo llegaron temprano.
25. Para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = y$.
26. Para cada número real x existe un número real y mayor que x .
27. Existe un número real y mayor que todos los números reales x .

0.2 “Y”, “o”, “no” y DeMorgan

Si p y q son proposiciones, su *conjunción* es $p \wedge q$, que se lee “ p y q ” o a veces “ p pero q ”. Es cierta solamente si p y q son ciertas, como indica esta tabla:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 4

La proposición r : “Roberto lleva saco y corbata” puede descomponerse como la conjunción de s : “Roberto lleva saco” con c : “Roberto lleva corbata”; es decir, $r = s \wedge c$ (r es igual a “ s y c ”). La proposición r es cierta solamente si Roberto lleva saco y Roberto lleva también corbata.

Si, por ejemplo, Roberto lleva saco pero no corbata, entonces $s = V$ y $c = F$, y entonces $r = F$ (porque Roberto no lleva saco y corbata; solamente saco). En símbolos,

$$r = s \wedge c = V \wedge F = F.$$

La *disyunción* de p y q es $p \vee q$, que se lee “ p o q ”, y es cierta cuando al menos una de las dos proposiciones p y q (o ambas) es cierta. La tabla es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 5

Sea q : “Las tijeras están en la gaveta o sobre la mesa”. Esta proposición puede descomponerse como la disyunción de g : “Las tijeras están en la gaveta” con m : “Las tijeras están sobre la mesa”. En símbolos, $q = g \vee m$ (q es igual a “ g o m ”).

La proposición q es cierta si alguna de las dos proposiciones g o m es cierta. Basta con que una sea verdadera para que su disyunción $q = g \vee m$ sea cierta. Si $g = V$ (las tijeras están en la gaveta), entonces q será cierta independientemente del valor de m . Simétricamente, si $m = V$ (las tijeras están sobre la mesa) entonces q será cierta sin importar g . Y si tanto g como m son ciertas (las tijeras están en la gaveta y también están sobre la mesa, tal vez porque la gaveta está sobre la mesa), entonces q también es cierta.

La única forma de que q sea falsa es que tanto g como m sean falsas: si $g = F$ (las tijeras no están en la gaveta) y $m = F$ (tampoco están sobre la mesa) entonces $q = F$. _____

Si p es una proposición, su *negación* es $\neg p$ (también se acostumbra denotarla $\sim p$, pero aquí usaremos la notación $\neg p$).

La negación de una proposición p es la afirmación de que p es falsa. Si el valor lógico de p es verdadero entonces $\neg p$ es falso, y si el valor de p es falso entonces $\neg p$ es verdadero. En otros símbolos, $\neg V = F$ y $\neg F = V$. Eso es lo que indica esta tabla:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Es claro que $\neg(\neg p) = p$ para cualquier proposición p .

Ejemplo 6

- Si p : “Hoy es lunes” entonces $\neg p$: “Hoy no es lunes”. En un día lunes, p será verdadera y $\neg p$ será falsa. En cualquier otro día de la semana, p será falsa y $\neg p$ será verdadera.
- Si q : “Todas las vacas tienen cuatro patas” entonces $\neg q$: “No todas las vacas tienen cuatro patas” o, en otras palabras, $\neg q$: “Hay alguna vaca que no tiene cuatro patas”. Si q fuera cierto, que todas las vacas tienen cuatro patas, entonces $\neg q$ sería falso (no habría vacas que no tengan cuatro patas). Pero si q fuera falso, $\neg q$ será verdadero.

- Sea r : “Todos los estudiantes de universidades públicas se graduaron de colegios públicos”. La proposición r es falsa, así que debe ser verdadera su negación $\neg r$: “Hay estudiantes de universidades públicas que no se graduaron de colegios públicos”.

En símbolos, usando $UP = \{\text{estudiantes de universidades públicas}\}$ y $cp(x)$: “ x se graduó de un colegio público”, podemos escribir

$$r: “\forall x \in UP, cp(x)”$$

que es falsa, y

$$\neg r: “\exists x \in UP, \neg cp(x)”$$

(existe algún estudiante de universidad pública que no se graduó de un colegio público), que es verdadera. De hecho, la negación $\neg cp(x)$ es cierta para muchos estudiantes $x \in UP$.

- Sea $C = \{\text{conejes en el mundo}\}$, y para un conejo $x \in C$ sea $h(x)$: “ x puede hablar español”.

Ahora sea s : “ $\exists x \in C, h(x)$ ”; es decir, existe algún conejo que habla español. La proposición s es falsa, y su negación es verdadera: $\neg s$: “No existe un conejo que hable español”; en otras palabras, “Ningún conejo habla español”, o bien “Todos los conejos no hablan español”. Así vemos que la negación de

$$s: “\exists x \in C, h(x)”$$

es

$$\neg s: “\forall x \in C, \neg h(x)”$$

En este ejemplo, note la diferencia entre la proposición

$$“\text{todos los conejos no hablan español}”: \quad \forall x \in C, \neg h(x),$$

y la proposición

$$“\text{no todos los conejos hablan español}”: \quad \neg[\forall x \in C, h(x)].$$

En este caso particular ambas son ciertas, pero note la diferencia entre “todas las vacas no tienen cuatro patas” (falso, porque algunas vacas sí tienen cuatro patas) y “no todas las vacas tienen cuatro patas” (cierto: algunas nacen con más o menos, o pierden alguna).

La siguiente tabla indica cómo se simbolizan la negación de una proposición universal y la de una proposición existencial.

q	$\neg q$
$\forall x \in S, p(x)$	$\exists x \in S, \neg p(x)$
$\exists x \in S, p(x)$	$\forall x \in S, \neg p(x)$

Leyes de DeMorgan

En el Ejemplo 4, note que la negación de r : “Roberto lleva saco y corbata” es $\neg r$: “Roberto no lleva saco o no lleva corbata”. En símbolos,

$$\neg r = \neg(s \wedge c) = (\neg s) \vee (\neg c)$$

Y en el Ejemplo 5, la negación de q : “Las tijeras están en la gaveta o sobre la mesa” es $\neg q$: “Las tijeras no están en la gaveta ni tampoco sobre la mesa”. En símbolos,

$$\neg q = \neg(g \vee m) = (\neg g) \wedge (\neg m)$$

Las *leyes de DeMorgan* dicen que si p y q son proposiciones entonces

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q) \quad \text{y} \quad \neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

Simbolice la proposición y su negación, y enuncie (en palabras) la negación

- | | |
|---|---|
| 28. Ayer llovió e hizo frío. | 35. El sujeto no estaba armado, pero llevaba gorra o capucha. |
| 29. Ese carro es blanco y no está muy limpio. | 36. Es nuevo, pero está descompuesto o se le gastó la batería. |
| 30. No le gustó, y estaba caro. | 37. n es entero o bien racional y positivo. |
| 31. Sandra viene mañana o el viernes. | 38. La modelo será alta y delgada, o no será elegida. |
| 32. x es entero o positivo. | 39. Todas las vacas pueden subir gradas pero ninguna puede bajarlas. |
| 33. No voy en tren; voy en avión. | |
| 34. Esa obra es clásica o no es de este siglo. | |

Enuncie (en palabras) la negación

- | | |
|---|--|
| 40. Una de mis primas estudió medicina. | 46. Cada computadora portátil es un riesgo de robo. |
| 41. Algunas aves no pueden volar. | 47. Ningún humano puede vencer a Superman. |
| 42. Un día en 1998 cayó nieve en el Irazú. | 48. Hubo un día el mes pasado en que todos los alumnos de este grupo llegaron temprano. |
| 43. Hay una canción de los Beatles que no lleva batería. | 49. Cada día del mes pasado hubo algún alumno de este grupo que faltó a clase. |
| 44. Todas las canciones de los Beatles son cantadas. | 50. Para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = y$. |
| 45. Todos sus compañeros le dicen apodos. | |

0.3 Proposiciones condicionales

Una proposición *condicional*, o implicación, es una proposición de la forma “Si p entonces q ” o, equivalentemente, “ p implica q ”. Se simboliza $p \rightarrow q$. La proposición p se llama antecedente o hipótesis, y q se llama consecuente o conclusión.

Ejemplo 7

En la proposición r : “Si llueve me voy a mojar” tenemos la implicación $p \rightarrow q$, donde la hipótesis es p : “Llueve”, y la conclusión es q : “Me mojo”.

En el caso de que llueve y me mojo, r es verdadera. Cuando no llueve y me mojo, también es verdadera. Pero note que si no llueve y no me mojo, también en ese caso r es verdadera.

La única forma de que r sea falsa es que llueva y no me moje.

La tabla de valores para $p \rightarrow q$ es así:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El único caso en que $p \rightarrow q$ es falso es cuando $p = V$ y $q = F$, de modo que la negación de $p \rightarrow q$ es

$$\neg(p \rightarrow q) = p \wedge (\neg q)$$

Tomando la negación de ambos lados de la igualdad anterior vemos que

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &= p \wedge (\neg q) \\ \neg[\neg(p \rightarrow q)] &= \neg[p \wedge (\neg q)] \\ (p \rightarrow q) &= (\neg p) \vee (\neg \neg q) \\ &= (\neg p) \vee q\end{aligned}$$

En resumen, $p \rightarrow q$ es equivalente a $(\neg p) \vee q$.

Ejemplo 8

La proposición r : “Perro que ladra, no muerde” puede simbolizarse así:

$$\forall x \in P, \ell(x) \rightarrow [\neg m(x)]$$

donde $P = \{\text{perros}\}$, $\ell(x)$: “ x ladra” y $m(x)$: “ x muerde”.

Su negación es

$$\begin{aligned}\neg r &= \neg[\forall x \in P, \ell(x) \rightarrow \neg m(x)] \\ &= \exists x \in P, \neg[\ell(x) \rightarrow \neg m(x)] \\ &= \exists x \in P, [\ell(x) \wedge \neg(\neg m(x))] \\ &= \exists x \in P, [\ell(x) \wedge m(x)] \\ &= \text{“Existe algún perro que ladra y muerde.”}\end{aligned}$$

El *contrapositivo* de la proposición condicional $p \rightarrow q$ es $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$. Las dos son equivalentes.

El *recíproco* de $p \rightarrow q$ es $q \rightarrow p$. Estas dos proposiciones no son equivalentes. Por ejemplo, aunque la proposición “si está lloviendo, hay nubes en el cielo” sea cierta, su recíproco “si hay nubes en el cielo, está lloviendo” puede ser falsa.

Ejemplo 9

Sea q : “Para ver esta película es necesario ser mayor de edad o venir acompañado por un adulto”. Denotando v : “ver esta película”, m : “ser mayor de edad” y a : “venir acompañado por un adulto”, podemos simbolizar

$$q = v \rightarrow (m \vee a)$$

El recíproco de q es $(m \vee a) \rightarrow v$, que claramente no es equivalente: enuncia que si alguien es mayor de edad o viene acompañado por un adulto, entonces ve la película (falso aunque q sea cierto; tal vez la persona ni siquiera entre al cine).

El contrapositivo de q es

$$\neg(m \vee a) \rightarrow (\neg v) = (\neg m \wedge \neg a) \rightarrow (\neg v)$$

que dice que si alguien no es mayor y no viene acompañado por un adulto, entonces no ve la película. Esto sí es equivalente a q . └

Determine si la implicación es verdadera o falsa, enuncie su recíproco y determine si es verdadero o falso

51. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces $x^2 > 0$.
52. Para que exista $1/n$ se necesita que $n \neq 0$.
53. Si $n = 5$ entonces $n^3 = 25$.
54. Si $t^2 = 9$ entonces $t = 3$ (donde t es un número real).
55. Si $t = 3$ o $t = -3$, entonces $t^2 = 9$ (donde t es un número real).
56. Si hoy es lunes entonces los bancos abren normalmente hoy.
57. Cada vez que cae nieve, hace frío.
58. Si el hielo es sólido, el vapor es gaseoso.
59. Si los perros vuelan, los caballos también vuelan.
60. Cuando un carro de gasolina se apaga, no tiene gasolina.
61. Si algún triángulo es equilátero entonces todos los triángulos son equiláteros.
62. Si todos los cuadrados son rectángulos, todos los triángulos son redondos.
63. Si la Tierra es plana, hay vida en la Tierra.

Simbolice la proposición y enuncie el contrapositivo

64. Si lo detienen le van a poner una multa. llevarlo de viaje.
65. Si no le gusta, lo devuelve. 69. Si se apura, llegará de primera o de segunda.
66. Puede llevárselo si trae efectivo o tarjeta de crédito. 70. Cada vez que trasnocho estudiando, me va bien en el siguiente quiz.
67. Si llego tarde y no traigo excusa, no podré hacer el quiz. 71. Todos los días que hay rayos, se va la luz.
68. Si se gradúa, van a comprarle un carro y 72. Las personas menores de edad no pagan.

0.4 Tablas de verdad

Una *tabla de verdad* es una tabla (como las que ya hemos visto) que enumera cada combinación posible de valores lógicos de una o varias proposiciones básicas, junto con los valores de algunas combinaciones de ellas.

Ejemplo 10

Construir una tabla de verdad para $(p \rightarrow q) \wedge q$, donde p y q son dos proposiciones.

Como hay dos proposiciones básicas (p y q), cada una con dos valores posibles, entonces hay cuatro combinaciones de valores. La tabla tendrá una fila para cada combinación. Vamos a incluir una columna para p y una para q , luego una para el resultado intermedio $(p \rightarrow q)$ y una para el resultado final $(p \rightarrow q) \wedge q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Una *tautología* es una proposición que siempre es verdadera. Por ejemplo, $p \rightarrow p$ es una tautología, porque es verdadera independientemente del valor lógico de p ($V \rightarrow V$ y también $F \rightarrow F$).

Se pueden usar tablas de verdad para demostrar tautologías, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

Demostrar que $\neg p \vee (q \rightarrow p)$ es una tautología.

Una tabla de verdad para esa proposición es

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow p$	$\neg p \vee (q \rightarrow p)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Todos los valores en la última columna son V, lo cual indica que $\neg p \vee (q \rightarrow p)$ es verdadero para cualquier combinación posible de valores de p y q . Es decir, es una tautología. _____

También se puede usar una tabla de verdad para demostrar la equivalencia entre dos proposiciones (dos proposiciones son equivalentes si siempre tienen el mismo valor de verdad).

Ejemplo 12

Demostrar que $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ es equivalente a $p \rightarrow (q \wedge r)$.

Esta tabla tendrá ocho líneas, porque para tres proposiciones básicas (p , q y r) hay ocho combinaciones de valores¹. Vamos a incluir una columna para cada resultado intermedio, $(p \rightarrow q)$, $(p \rightarrow r)$ y $(q \wedge r)$, y una para cada resultado final, $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ y $p \rightarrow (q \wedge r)$.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$(q \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Comparando los valores en las últimas dos columnas, concluimos que las dos proposiciones dadas son equivalentes. _____

Haga una tabla de verdad

73. $(\neg x) \wedge y$

76. $(\neg x) \wedge (x \rightarrow y)$

74. $p \rightarrow (\neg q)$

77. $x \wedge [y \vee (\neg z)]$

75. $\neg[p \vee (\neg q)]$

78. $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$

Use una tabla de verdad para determinar si es una tautología

79. $a \rightarrow (a \vee b)$

83. $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)$

80. $y \vee (z \rightarrow y)$

84. $[a \rightarrow (\neg b)] \vee (a \wedge b)$

81. $z \vee (z \rightarrow y)$

85. $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (r \rightarrow q)$

82. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

86. $[(x \rightarrow y) \vee z] \vee [x \wedge \neg(y \vee z)]$

¹En general, para n proposiciones habrá 2^n combinaciones de valores.

Use una tabla de verdad para determinar si son equivalentes

$$87. \neg(a \wedge b) \quad y \quad (\neg a) \vee (\neg b)$$

$$88. \neg(p \vee q) \quad y \quad (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$89. a \rightarrow b \quad y \quad (\neg a) \vee b$$

$$90. (\neg x) \rightarrow y \quad y \quad x \vee y$$

$$91. (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \quad y \quad (p \vee q) \rightarrow r$$

$$92. x \wedge (y \vee z) \quad y \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$93. x \vee (y \wedge z) \quad y \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$94. \neg[p \wedge (q \rightarrow r)] \quad y \quad (p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (\neg r)]$$

0.5 Demostraciones

Una *demostración* es un razonamiento que lleva de una serie de premisas (o hipótesis) a una conclusión. Se puede considerar que una demostración es una sucesión de *inferencias*, en la que cada inferencia es un paso básico en el razonamiento.

Hay muchas reglas de inferencia. Veamos seis de las más importantes. En la notación de la columna derecha, en cada renglón se enumera una premisa o hipótesis, y debajo de una línea horizontal se enuncia la conclusión.

Modus ponens (MP — modo afirmativo): si se supone una implicación y se supone su antecedente, entonces se concluye el consecuente.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \rightarrow q \\ 2. \quad p \\ \hline q \end{array}$$

Modus tollens (MT — modo negativo): si se supone una implicación y se supone que la conclusión es falsa, se deduce que el antecedente es falso.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \rightarrow q \\ 2. \quad \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Silogismo disyuntivo (SD): si se supone la disyunción de dos proposiciones y la negación de una de ellas, se deduce la otra.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \vee q \\ 2. \quad \neg p \\ \hline q \end{array}$$

Silogismo hipotético (SH): en pocas palabras, dos implicaciones se pueden concatenar (unir en una cadena).

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \rightarrow q \\ 2. \quad q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Simplificación (S): si se supone la conjunción de dos premisas, se concluye cualquiera de ellas.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \wedge q \\ \hline p \end{array}$$

Amplificación (A): si se supone una premisa, se concluye la disyunción de esa premisa con cualquiera otra proposición.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \\ \hline p \vee q \end{array}$$

Adjunción (Ad): si se suponen dos premisas, se concluye la conjunción de ambas.

$$\begin{array}{l} 1. \quad p \\ 2. \quad q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Ejemplo 13

A partir de las tres premisas

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s), \quad (r \rightarrow t) \quad \text{y} \quad (\neg t)$$

demostrar la conclusión q .

En palabras, las premisas dicen que si p o q es falsa entonces r y s son verdaderas, que r implica t , y que t es falsa. Podemos razonar así: como r implica t , pero t es falsa, entonces r debe ser falsa. Entonces r y s no pueden ser ambas verdaderas, y por la primera premisa, ni p ni q pueden ser falsas. Entonces q es verdadera (y p también, pero no lo necesitamos).

Vamos a la demostración formal. Si numeramos las premisas como 1, 2 y 3, vemos que se puede aplicar MT a 2 y 3 para concluir $\neg r$.

La premisa 1 habla de $(r \wedge s)$. Es claro que si r es falso, $(r \wedge s)$ también es falso, aunque no tenemos una regla que lo diga. De todos modos podemos usar DeMorgan: $\neg(r \wedge s) = (\neg r) \vee (\neg s)$. Como ya tenemos $(\neg r)$ por el párrafo anterior, aplicando A llegamos a $(\neg r) \vee (\neg s)$, que acabamos de decir que es equivalente a $\neg(r \wedge s)$.

Ahora, combinando esto con la premisa 1, la regla MT concluye $\neg(\neg p \vee \neg q)$.

El siguiente esquema sintetiza lo que acabamos de decir y el resto de la demostración (note que después de la lista de premisas continuamos numerando cada inferencia):

1.	$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$	
2.	$r \rightarrow t$	
3.	$\neg t$	
<hr/>		
4.	$\neg r$	MT 2, 3
5.	$(\neg r) \vee (\neg s)$	A 4
6.	$\neg(r \wedge s)$	DeMorgan 5
7.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	MT 1, 6
8.	$p \wedge q$	DeMorgan 7
9.	q	S 8

con lo cual está demostrada la conclusión q .

Demuestre

$$\begin{array}{l} \mathbf{95.} \quad 1. \quad a \wedge b \\ \quad \quad 2. \quad c \rightarrow (\neg b) \\ \hline \quad \quad \neg c \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{96.} \quad 1. \quad x \wedge z \\ \quad \quad 2. \quad (\neg x) \vee y \\ \hline \quad \quad y \vee (\neg z) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{97.} \quad 1. \quad p \vee q \\ \quad \quad 2. \quad q \rightarrow r \\ \quad \quad 3. \quad \neg r \\ \hline \quad \quad p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{98.} \quad 1. \quad z \\ \quad \quad 2. \quad x \rightarrow (\neg y) \\ \quad \quad 3. \quad z \rightarrow y \\ \hline \quad \quad \neg x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{99.} \quad 1. \quad p \vee (\neg q) \\ \quad \quad 2. \quad r \wedge q \\ \hline \quad \quad p \wedge r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{100.} \quad 1. \quad (a \vee d) \rightarrow (\neg c) \\ \quad \quad 2. \quad c \wedge b \\ \hline \quad \quad \neg d \end{array}$$

Simbolice cada premisa, simbolice la conclusión, y demuestre

101. En setiembre y en octubre siempre llueve. Cada vez que llueve, las calles se mojan. Entonces en octubre las calles se mojan.
102. Si nadie ha usado las tijeras, están en la gaveta. Si alguien usó las tijeras, tuvo que ser Carla o Fabio. Cuando Fabio usa las tijeras, las deja en la gaveta. Las tijeras no están en la gaveta. Entonces Carla usó las tijeras.
103. Víctor estudia Administración, Biotecnología o Computación. Si estudia Administración, se gradúa en cinco años o menos. Si estudia Biotecnología, debe tener una beca. Si estudia Computación, va a graduarse con hijos. Víctor lleva más de cinco años estudiando sin graduarse. No tiene beca. Entonces Víctor estudia Computación y va a graduarse con hijos.
104. Sergio no puede ir al estadio y al minigolf una misma noche. Pamela y Sergio, cuando van al minigolf, van juntos. Esta noche Pamela va a ir al minigolf o adonde su tío. Cuando Pamela va adonde su tío, siempre lleva puesta la bufanda que él le regaló. La tía de Pamela nunca va al minigolf. Pamela nunca se pone bufanda cuando hace calor. Esta noche Sergio va al estadio. Conclusión: esta noche no está haciendo calor.

CAPÍTULO 1

Límites y continuidad

1.1 Límites a partir de gráficos o tablas

A veces sucede que, aunque una función f no esté definida en un punto $x = a$, los valores de $y = f(x)$ se acercan a un valor límite L conforme x se acerca a a . En ese caso se dice que L es el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a a , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

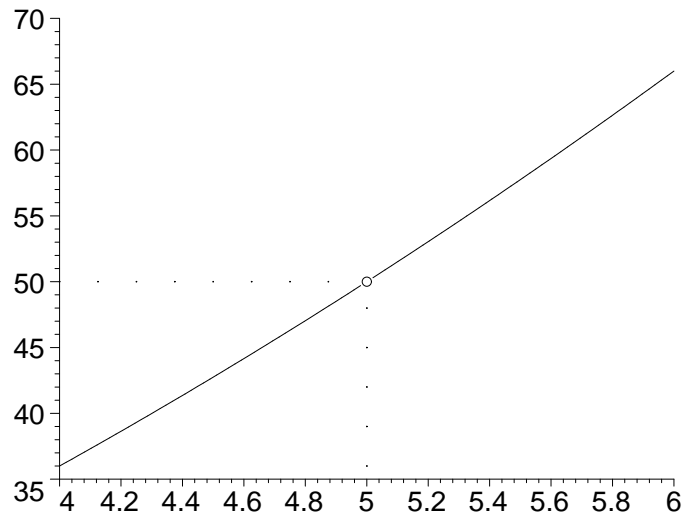
Otra forma de expresar lo mismo es diciendo que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a , o en símbolos, que $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$.

Ejemplo 1

La función $f(x) = \frac{x^3 - 25x}{x - 5}$ no está definida en $x = 5$, pero para x cercano a 5 podemos observar los siguientes valores de la función:

x	4	4.5	4.9	4.999	5	5.001	5.1	5.5	6
$f(x)$	36	42.75	48.51	49.985	\nexists	50.015	51.51	57.75	66

Gráficamente,



Es claro, tanto en la tabla de valores como en el gráfico, que entre más se acerca x a 5, más se acerca $f(x)$ a 50, aunque $f(5)$ no es 50. En símbolos, escribimos que $f(x) \rightarrow 50$ cuando $x \rightarrow 5$, o bien que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 50$.

Para hablar del límite de una función en un punto no es necesario que la función esté indefinida allí. Si la función f está definida en $x = a$, es usual que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, aunque hay excepciones. Vea los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 2

La función $h(t) = t + 5$ está definida en $t = 3$ y, como vemos en la siguiente tabla, su límite allí es $\lim_{t \rightarrow 3} h(t) = 8 = h(3)$:

t	2.5	2.9	2.999	3	3.001	3.1	3.5
$h(t)$	7.5	7.9	7.999	8	8.001	8.1	8.5

Ocasionalmente, una función f puede tener límites distintos en los dos lados (izquierdo y derecho) del punto $x = a$. En ese caso se habla de *límites laterales*, que se denotan

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

y se llaman *límite por la izquierda* y *límite por la derecha* (o límite cuando x tiende a a por la izquierda y por la derecha), respectivamente. Que $x \rightarrow a^-$ implica que $x < a$, y que $x \rightarrow a^+$ implica que $x > a$.

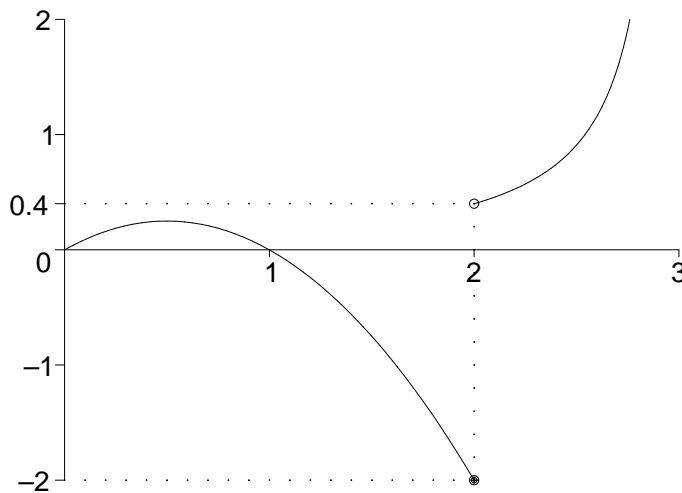
El límite general de la función (también llamado *límite bilateral*) existe solamente si ambos límites laterales existen y son iguales.

Ejemplo 3

La función

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{9 - x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

está definida en dos trozos alrededor de $x = 2$. Calculemos los límites laterales de f cuando $x \rightarrow 2$.



Para el límite por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, necesitamos usar la fórmula $f(x) = x - x^2$, que se aplica cuando x es menor que 2. No necesitamos una tabla de valores para evaluar el límite: es claro que si x se acerca a 2 entonces $x - x^2$ se acercará a $2 - 2^2$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 2^2 = -2$.

Por la derecha, para calcular $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, vamos a usar la fórmula $f(x) = x/(9 - x^2)$, para x mayor que 2. También ahora podemos evaluar el límite sustituyendo: si $x \rightarrow 2^+$, entonces $x/(9 - x^2)$ tiende a $2/(9 - 2^2) = 2/5 = 0.4$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0.4$.

En resumen, los límites cuando $x \rightarrow 2$ son -2 por la izquierda y 0.4 por la derecha. Como son distintos, no existe el límite bilateral cuando $x \rightarrow 2$. └

El ejemplo anterior ilustra que, aunque una función esté definida en un punto, su límite en ese punto puede no ser igual al valor de la función. En efecto, en el ejemplo se tiene $f(2) = -2$, pero $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no es -2 (de hecho, el límite no existe). Vea la definición de continuidad en la página 33.

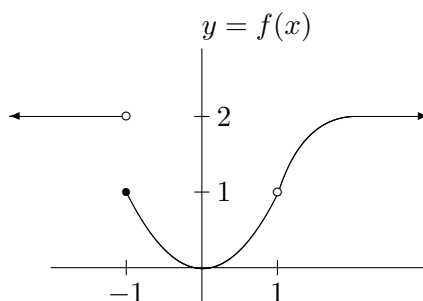
Estime a partir del gráfico

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$



5. $\lim_{t \rightarrow -3^+} g(t)$

6. $\lim_{t \rightarrow -1^-} g(t)$

7. $\lim_{t \rightarrow -1^+} g(t)$

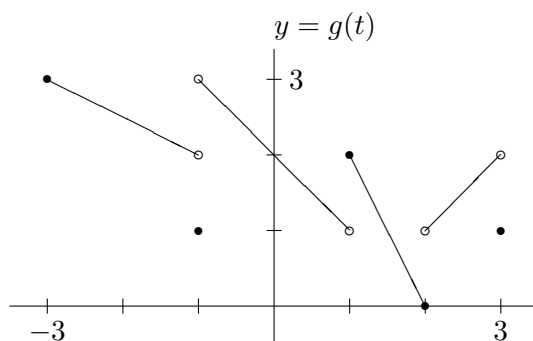
8. $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t)$

9. $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t)$

10. $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$

11. $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$

12. $\lim_{t \rightarrow 3^-} g(t)$



Complete la tabla de valores para estimar el límite

13.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{4 - x^2}$	<table><tr><td>x</td><td>1.9</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td> </td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.1</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>-0.4962</td><td></td><td> </td><td>-0.5004</td><td></td><td>-0.5366</td></tr></table>	x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1	$f(x)$		-0.4962			-0.5004		-0.5366
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1											
$f(x)$		-0.4962			-0.5004		-0.5366											
14.	$\lim_{t \rightarrow -5} \frac{t^2 - 25}{t + 5}$	<table><tr><td>t</td><td>-5.1</td><td>-5.01</td><td>-5.001</td><td> </td><td>-4.999</td><td>-4.99</td><td>-4.9</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td></td><td>-10.01</td><td></td><td> </td><td></td><td></td><td>-9.9</td></tr></table>	t	-5.1	-5.01	-5.001		-4.999	-4.99	-4.9	$f(t)$		-10.01					-9.9
t	-5.1	-5.01	-5.001		-4.999	-4.99	-4.9											
$f(t)$		-10.01					-9.9											
15.	$\lim_{w \rightarrow 3} \frac{\sqrt{w - 2} - 1}{w - 3}$	<table><tr><td>w</td><td>2.9</td><td>2.99</td><td>2.999</td><td> </td><td>3.001</td><td>3.01</td><td>3.1</td></tr><tr><td>$f(w)$</td><td>0.5132</td><td></td><td>0.5001</td><td> </td><td></td><td></td><td>0.4881</td></tr></table>	w	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1	$f(w)$	0.5132		0.5001				0.4881
w	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1											
$f(w)$	0.5132		0.5001				0.4881											
16.	$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{5 + y}}{1 + y}$	<table><tr><td>y</td><td>-1.1</td><td>-1.01</td><td>-1.001</td><td> </td><td>-0.999</td><td>-0.99</td><td>-0.9</td></tr><tr><td>$f(y)$</td><td></td><td>-0.2502</td><td></td><td> </td><td></td><td>-0.2498</td><td></td></tr></table>	y	-1.1	-1.01	-1.001		-0.999	-0.99	-0.9	$f(y)$		-0.2502				-0.2498	
y	-1.1	-1.01	-1.001		-0.999	-0.99	-0.9											
$f(y)$		-0.2502				-0.2498												
17.	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t}$ (con t en radianes)	<table><tr><td>t</td><td>-0.1</td><td>-0.01</td><td>-0.001</td><td> </td><td>0.001</td><td>0.01</td><td>0.1</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td></td><td></td><td></td><td> </td><td></td><td></td><td>0.9983</td></tr></table>	t	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1	$f(t)$							0.9983
t	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1											
$f(t)$							0.9983											
18.	$\lim_{y \rightarrow 4^-} \frac{1 - e^{4-y}}{4y - y^2}$	<table><tr><td>y</td><td>3.9</td><td>3.99</td><td>3.999</td><td>3.9999</td><td> </td></tr><tr><td>$f(y)$</td><td></td><td>-0.2519</td><td></td><td></td><td> </td></tr></table>	y	3.9	3.99	3.999	3.9999		$f(y)$		-0.2519							
y	3.9	3.99	3.999	3.9999														
$f(y)$		-0.2519																
19.	$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t$	<table><tr><td>t</td><td> </td><td>0.0001</td><td>0.001</td><td>0.01</td><td>0.1</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td> </td><td></td><td>-0.0069</td><td></td><td></td></tr></table>	t		0.0001	0.001	0.01	0.1	$f(t)$			-0.0069						
t		0.0001	0.001	0.01	0.1													
$f(t)$			-0.0069															

Haga una tabla de valores para estimar el límite

20.	$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{1 - y}$	23.	$\lim_{t \rightarrow e} \frac{e - t}{1 - \ln t}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^x}$	24.	$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{2/t}$
22.	$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x}$	25.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

1.2 Límites de polinomios y de funciones radicales

En general, los límites tienen las siguientes propiedades. Si f y g son funciones, y a , b y c son números, entonces

- $\lim_{x \rightarrow c} [(f(x) \pm g(x))] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

Además, si $f(x)$ es una combinación (suma, resta, producto, cociente o composición) de funciones polinomiales, radicales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ siempre que $f(c)$ esté definido.

En el caso de un cociente, si el límite del denominador es cero, puede ser que el límite exista, pero no se puede evaluar directamente con la tercera de estas propiedades. Vea los tres ejemplos siguientes.

Ejemplo 4

Para calcular $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 4t}{\sqrt{4t + 1}}$ notamos que la expresión $\frac{t^2 - 4t}{\sqrt{4t + 1}}$ es una combinación de polinomios y raíces, y que está definida en $t = 3$. Entonces el límite es

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 4t}{\sqrt{4t + 1}} = \frac{(3)^2 - 4(3)}{\sqrt{4(3) + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

Si $f(x)$ es una combinación de funciones polinomiales, radicales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, pero $f(c)$ no está definido, entonces para calcular $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a veces es posible simplificar $f(x)$ de modo que la forma simplificada se pueda evaluar en c , como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5

Para calcular $\lim_{w \rightarrow -1} \frac{w^2 - 1}{w + 1}$, notemos que la expresión $\frac{w^2 - 1}{w + 1}$ no está definida en $w = -1$. Pero podemos factorizar y simplificar para aplicar el principio del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow -1} \frac{w^2 - 1}{w + 1} &= \lim_{w \rightarrow -1} \frac{(w + 1)(w - 1)}{w + 1} \\ &= \lim_{w \rightarrow -1} w - 1 = (-1) - 1 = -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Para $\lim_{y \rightarrow 9} \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9}$, como no es posible evaluar en $y = 9$, necesitamos racionalizar el numerador antes de simplificar:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 9} \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9} &= \lim_{y \rightarrow 9} \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9} \cdot \frac{\sqrt{y} + 3}{\sqrt{y} + 3} = \lim_{y \rightarrow 9} \frac{y - 9}{(y - 9)(\sqrt{y} + 3)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{y} + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Calcule

26. $\lim_{t \rightarrow -2} t^2 + 3t$

28. $\lim_{y \rightarrow 5} 2y\sqrt{2y^3 + 6}$

30. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, donde

27. $\lim_{z \rightarrow 3} \sqrt{1 + z^3}$

29. $\lim_{h \rightarrow 4} \frac{h^2}{h^2 - 9}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 3 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Calcule para $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

31. $g(-1)$

35. $g(1)$

39. $g(0)$

32. $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$

36. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

40. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

33. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$

37. $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

41. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

34. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

38. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

42. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Simplifique la expresión y calcule su límite

43. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{2t^2 - t - 3}{t + 1}$

52. $\lim_{t \rightarrow 5/2} \frac{4 - \sqrt{2t + 11}}{2t - 5}$

44. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + x^2}{2 + x}$

53. $\lim_{y \rightarrow -2} \frac{\sqrt{y + 6} + y}{y + 2}$

45. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + 3y - 4}{y - 1}$

54. $\lim_{u \rightarrow a} \frac{2\sqrt{u} + \sqrt{a}}{4u - a}$

46. $\lim_{w \rightarrow 3c} \frac{cw^2 - 3c^2w}{w^2 - 9c^2}$

55. $\lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^3 + p^2 - 2}{2 - \sqrt{p + 3}}$

47. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 5x - 3x^2 - 15}$

56. $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v - 2}{\sqrt[3]{4v} - 2}$

48. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - 5h}{4h}$

57. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + t}{\sqrt[3]{2t + 1} + \sqrt[3]{t + 2}}$

49. $\lim_{y \rightarrow 4} \frac{y - 4}{\sqrt{y} - 2}$

58. $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{3u + 6}{1 - \sqrt[6]{u + 3}}$

50. $\lim_{y \rightarrow k^2} \frac{y - k^2}{\sqrt{y} - k}$, con $k > 0$

59. $\lim_{w \rightarrow 3} \frac{w - 3}{\sqrt[5]{9w + 5} - w + 1}$

51. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - x^2}{1 + \sqrt{1 + x}}$

60. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5z + 1} - \sqrt[4]{5z + 1}}{z}$

1.3 Límites con funciones trigonométricas

Como vimos en la sección anterior, si $f(x)$ es una combinación de funciones trigonométricas, entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ siempre que $f(c)$ esté definido. También, si $f(c)$ está indefinido, a veces es posible simplificar $f(x)$ para que la forma simplificada se pueda evaluar en c .

En los límites con funciones trigonométricas, las variables siempre están en radianes.

Ejemplo 7

Para calcular $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(\theta - \pi/6)}{2 - \sin \theta}$ basta con evaluar inmediatamente en $\theta = \pi/2$:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(\theta - \pi/6)}{2 - \sin \theta} = \frac{\cos(\pi/2 - \pi/6)}{2 - \sin(\pi/2)} = \frac{\cos(\pi/3)}{2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 8

Al calcular $\lim_{y \rightarrow \pi} \frac{\cos y + 1}{\tan y}$ no es posible sustituir $y = \pi$ porque el resultado sería $0/0$. Debemos simplificar primero, y para eso podemos usar la idea de racionalizar que vimos en la sección anterior. Como $(\cos + 1)(\cos - 1) = \cos^2 - 1 = -\sin^2$, empecemos por multiplicar numerador y denominador por $(\cos y - 1)$:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{\cos y + 1}{\tan y} &= \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{(\cos y + 1)(\cos y - 1)}{\tan y (\cos y - 1)} = \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 y - 1}{\tan y (\cos y - 1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{-\sin^2 y}{\frac{\sin y}{\cos y} (\cos y - 1)} = \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{-\sin^2 y \cos y}{\sin y (\cos y - 1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{-\sin y \cos y}{1 - \cos y} = \frac{-\sin \pi \cos \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

En otros casos habrá que basarse en alguno de los siguientes límites.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 9

Calcular $\lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{6z - 3}{\sin(1 - 2z)}$.

Notemos primero que no es posible sustituir $z = 1/2$ porque eso nos llevaría al resultado $0/0$, y tampoco hay nada que se pueda simplificar. Pero notando que el numerador es igual

a $-3(1 - 2z)$, hacemos el cambio de variable $w = 1 - 2z$, que tiende a 0 cuando $z \rightarrow 1/2$ (porque $w = 1 - 2z \rightarrow 1 - 2(1/2) = 0$). Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{6z - 3}{\operatorname{sen}(1 - 2z)} &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{-3(1 - 2z)}{\operatorname{sen}(1 - 2z)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{-3w}{\operatorname{sen} w} = -3 \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{\operatorname{sen} w} \\ &= -3 \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} w}{w} \right)^{-1} = -3(1)^{-1} = -3\end{aligned}$$

Ejemplo 10

Calcular $L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \tan t}{1 - \cos t}$.

De nuevo, no es posible evaluar sustituyendo $t = 0$. Sí sería útil multiplicar numerador y denominador por $(1 + \cos t)$, siguiendo la idea del Ejemplo 8 (hágalo usted como ejercicio), pero investiguemos aquí otra opción.

Al escribir $\tan = \operatorname{sen} / \cos$ en el numerador, y multiplicar extremos y medios, llegamos a

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \tan t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \operatorname{sen} t}{(1 - \cos t) \cos t}$$

Esta fracción sigue siendo de la forma $0/0$ al sustituir $t = 0$, pero note que el $\cos t$ en el denominador y el 2 en el numerador no son parte de este problema. Podemos separarlos y escribir

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\cos t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \operatorname{sen} t}{1 - \cos t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$$

Ahora multiplicamos numerador y denominador por t , y separamos en dos fracciones:

$$\begin{aligned}L &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \operatorname{sen} t}{(1 - \cos t)t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos t}{t^2} \right)^{-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{-1} \cdot 1 = -4\end{aligned}$$

Calcule

61. $\lim_{y \rightarrow \pi/4} y - 2 \operatorname{sen} y$

62. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sec 2x$

63. $\lim_{\beta \rightarrow 5\pi/6} 3 \operatorname{sen} \beta - 2 \cos \beta$

64. $\lim_{t \rightarrow -4\pi/3} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

65. $\lim_{w \rightarrow -\pi/4} \frac{\tan w}{4w}$

66. $\lim_{w \rightarrow \pi/2} \frac{\cos w}{\cot w}$

67. $\lim_{w \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} w - \cos w}{1 - \tan w}$

68. $\lim_{\beta \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{1 + \cos \beta}$
69. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cot x \cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$
70. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta}$
71. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cot t}{\cos t}$
72. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r}{\operatorname{sen} r}$
73. $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5\beta}{\beta}$
74. $\lim_{v \rightarrow 1} \frac{v - 1}{\operatorname{sen}(1 - v)}$
75. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{sen}^2(3z)}{2z^2}$
76. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \csc(\pi\alpha)$
77. $\lim_{v \rightarrow \pi/2} \operatorname{sen}(\cos v) \sec v$
78. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$
79. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 - 1}{\operatorname{sen}(\pi y)}$
80. $\lim_{r \rightarrow 1} (1 - r) \tan(\pi r/2)$
81. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - \cos^2 y}{y}$
82. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{8u^2}{1 - \cos 2u}$
83. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sec \theta - 1}{\theta}$
84. $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\alpha/2)}{\pi - \alpha}$
85. $\lim_{x \rightarrow -\pi/6} \frac{\tan(x + \pi/6)}{6x + \pi}$
86. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{\operatorname{sen} z}$
87. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6\alpha}{\tan 5\alpha}$
88. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \operatorname{sen} r}{\cos r - 1}$
89. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 - \cos \alpha) \cot \alpha$
90. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$ con x constante
91. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$ con x constante
92. $\lim_{u \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} a}{u - a}$ con a constante
93. $\lim_{u \rightarrow a} \frac{\cos u - \cos a}{u - a}$ con a constante

1.4 Límites infinitos y límites al infinito a partir de gráficos o tablas

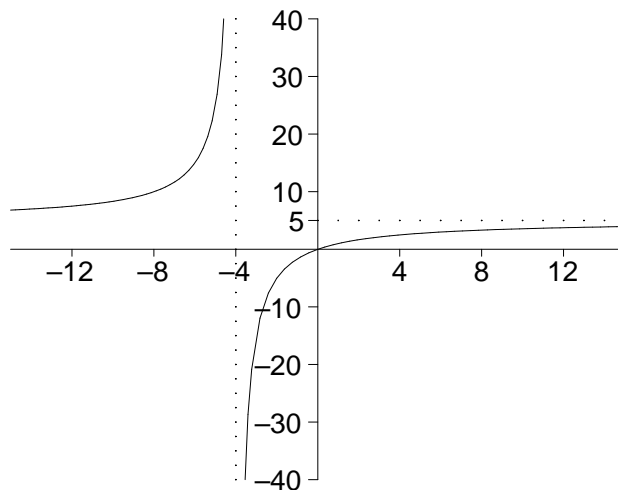
Si $f(x)$ crece sin cota cuando $x \rightarrow a$, se dice que $f(x)$ tiende a infinito: $f(x) \rightarrow \infty$, o en otros símbolos, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Si $f(x)$ decrece sin cota, entonces $f(x) \rightarrow -\infty$, o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. En cualquiera de los dos casos, esto es lo que se considera un *límite infinito*.

Ejemplo 11

Calcular $\lim_{r \rightarrow -4} \frac{5r}{r + 4}$.

La tabla de valores y el gráfico son así:

r	-4.5	-4.1	-4.001	-4.00001		(por la izquierda)
$f(r)$	45	205	20005	2000005		
r	-3.99999	-3.999	-3.9	-3.5		(por la derecha)
$f(r)$	-1999995	-19995	-195	-35		



En ellos vemos, de distintas maneras, que cuando $r \rightarrow -4$ por la izquierda, $f(r)$ crece sin cota, hacia ∞ , y que cuando $r \rightarrow -4$ por la derecha, $f(r)$ decrece sin cota, hacia $-\infty$. Entonces

$$\lim_{r \rightarrow -4^-} f(r) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow -4^+} f(r) = -\infty$$

Cuando es x el que crece o decrece sin cota (en símbolos, $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$), entonces se habla de un *límite al infinito*.

Ejemplo 12

Con la misma función del ejemplo anterior, $f(r) = \frac{5r}{r+4}$, veamos qué sucede cuando $r \rightarrow \infty$.

r	10	10000	1000000
$f(r)$	4.8077	4.9980	4.99998

La tabla confirma lo que muestra también el gráfico del ejemplo anterior: $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{5r}{r+4} = 5$.

Estime a partir del gráfico

94. $\lim_{v \rightarrow -\infty} f(v)$

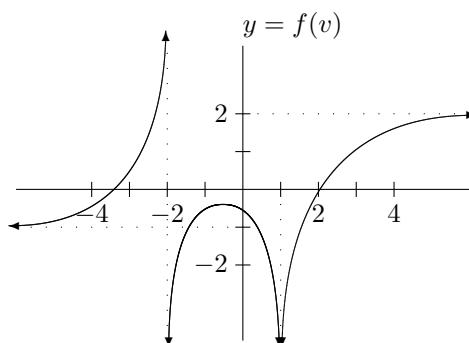
95. $\lim_{v \rightarrow \infty} f(v)$

96. $\lim_{v \rightarrow -2^-} f(v)$

97. $\lim_{v \rightarrow -2^+} f(v)$

98. $\lim_{v \rightarrow 1^-} f(v)$

99. $\lim_{v \rightarrow 1^+} f(v)$



100. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

101. $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$

102. $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$

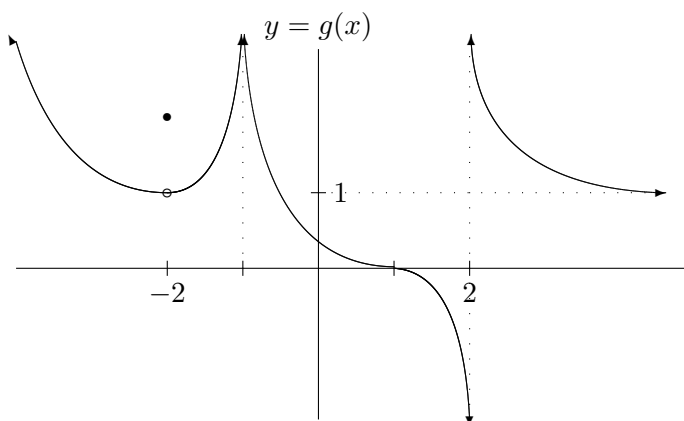
103. $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$

104. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$

105. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

106. $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

107. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$



Haga una tabla de valores para estimar el límite

108. $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{1 - y}$

112. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t}$

109. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\cos \theta - 1}$ (con θ en radianes)

113. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{1 + u - e^u}$

110. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.2}{k}\right)^k$

114. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^x$

111. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$

115. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

Dibuje el gráfico de alguna función con las características dadas

$$116. \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}, \quad f(-2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

$$117. \quad \text{dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

$$118. \quad \text{dom}(h) =]-\infty, 0] \cup]5, \infty[, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} h(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1.$$

1.5 Cálculo de límites infinitos y límites al infinito

Si en el límite de un cociente, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$, el numerador $f(x)$ tiende a algún número y el denominador $g(x)$ tiende a infinito (positivo o negativo), entonces el límite es cero. En símbolos, escribimos

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \text{para cualquier } a \in \mathbb{R}.$$

Si el denominador $g(x)$ tiende a cero y el numerador $f(x)$ tiende a otro número (distinto de cero), entonces el límite es infinito positivo o infinito negativo. En ese caso basta con encontrar los signos de $f(x)$ y $g(x)$ para determinar el signo del resultado. Escribimos

$$\frac{a}{0} = \pm\infty \quad \text{para cualquier } a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Otras propiedades útiles acerca de límites al infinito son

$$\infty^n = \begin{cases} \infty & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad b^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq b < 1 \end{cases} \\ \log_b \infty = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 1 \\ -\infty & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \log_b 0 = \begin{cases} -\infty & \text{si } b > 1 \\ \infty & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ejemplo 13

En $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{1-y}{2-y}$ el denominador tiende a cero pero el numerador no: el límite es de la forma $\frac{-1}{0}$. Entonces el límite será infinito, pero no sabemos si $+\infty$ o $-\infty$. Para eso necesitamos conocer los signos del numerador y del denominador.

El numerador, $1 - y$, es claramente negativo cuando $y \rightarrow 2$ (porque tiende a -1), pero el denominador, $2 - y$, puede ser positivo o negativo dependiendo de si $y \rightarrow 2$ por la izquierda o por la derecha (porque $2 - y \rightarrow 0$). Entonces calculamos los límites laterales por separado:

$$\lim_{y \rightarrow 2^-} \frac{1-y}{2-y} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(donde 0^+ denota una cantidad que tiende a cero pero es positiva), y

$$\lim_{y \rightarrow 2^+} \frac{1-y}{2-y} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Ejemplo 14

En el límite $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{|1-z|}$, de la forma $\frac{1}{0}$, tenemos también un denominador que tiende a cero y un numerador que tiende a otro número. El límite será $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo de los signos. El numerador es positivo cuando $z \rightarrow 1$, y el denominador, aunque tiende a cero, no tiene ambigüedad de signo por el valor absoluto: el denominador es también positivo siempre. Por eso el límite es $\frac{1}{0^+} = +\infty$ por ambos lados.

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots$ son dos polinomios de grados n y m respectivamente, entonces el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ puede calcularse tomando solo los términos principales (con grado más alto) de cada polinomio:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Ejemplo 15

Los límites $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5-2t^2}{6t^3+t+1}$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1-4y+3y^2}{6y-5y^2}$ y $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{2u^5+u^2}{u^2-4}$ se calculan así:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5-2t^2}{6t^3+t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t^2}{6t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{3t} = \frac{-1}{\infty} = 0$
- $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1-4y+3y^2}{6y-5y^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{3y^2}{-5y^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$
- $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{2u^5+u^2}{u^2-4} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{2u^5}{u^2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} 2u^3 = 2(-\infty)^3 = 2(-\infty) = -\infty$

Para calcular otros límites al infinito que involucran potencias de la variable, puede ser útil factorizar la potencia más alta de la variable en cada parte de la expresión.

Ejemplo 16

Para calcular $\lim_{v \rightarrow \infty} v - \sqrt{3v^2 - 2}$, que tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$, puede sacarse v^2 como factor común de la raíz, y luego v como factor común de la diferencia:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} v - \sqrt{3v^2 - 2} &= \lim_{v \rightarrow \infty} v - \sqrt{v^2(3 - 2v^{-2})} = \lim_{v \rightarrow \infty} v - v\sqrt{3 - 2v^{-2}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} v(1 - \sqrt{3 - 2v^{-2}}) = \infty(1 - \sqrt{3 - 0}) = -\infty \end{aligned}$$

(el cero dentro de la raíz se debe a que $2v^{-2} = 2/v^2 \rightarrow 2/\infty^2 = 0$, y el signo final se debe a que $1 - \sqrt{3} \approx -0.732$ es negativo).

Es importante recordar que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. En el ejemplo anterior, como $v \rightarrow \infty$ entonces $v > 0$ y $\sqrt{v^2} = v$. Pero en el siguiente, donde $x \rightarrow -\infty$, tendremos $\sqrt{x^2} = -x$.

Ejemplo 17

Para $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + x}}{2x + 3}$ se puede sacar x^2 como factor común de la raíz, y x como factor común del denominador (note que ahora $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ porque x es negativo):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + x}}{2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(5 + x^{-1})}}{x(2 + 3x^{-1})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{5 + x^{-1}}}{x(2 + 3x^{-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{5 + x^{-1}}}{2 + 3x^{-1}} = \frac{-\sqrt{5 + 0}}{2 + 0} = \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 18

Para calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3 + 0.7^t}{4 + 2^{-t}}$, encontremos primero los límites de 0.7^t y de 2^{-t} .

El primero es inmediato: $\lim_{t \rightarrow \infty} 0.7^t = 0.7^\infty = 0$ (forma b^∞ con $0 \leq b < 1$). Para el segundo tenemos dos opciones. Podemos decir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0 \quad (\text{de nuevo } b^\infty \text{ con } 0 \leq b < 1)$$

o que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2^{-t} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} \quad (\text{porque } 2^\infty = b^\infty \text{ con } b > 1)$$

que también es igual a 0.

Estos cálculos nos llevan a que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3 + 0.7^t}{4 + 2^{-t}} = \frac{3 + 0}{4 + 0} = \frac{3}{4}$.

Calcule

119. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$

120. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - h}{h}$

121. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 + x + x^2}{6 + x - x^2}$

122. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - 1}{t^2 - t^4}$

123. $\lim_{h \rightarrow -3} \frac{1}{h^2 - 9}$

124. $\lim_{y \rightarrow 5} \frac{1}{y} - \frac{2 - y}{(5 - y)^2}$

125. $\lim_{p \rightarrow -1} \frac{p + 2}{\ln(p + 2)}$

126. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$

127. $\lim_{c \rightarrow 4^+} \sqrt{\frac{4c}{c-4}}$
128. $\lim_{r \rightarrow -1} \frac{r^2 - r}{\sqrt[3]{2r+1} + \sqrt[3]{r+2}}$
129. $\lim_{p \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{p+3}}{(p+2)^2}$
130. $\lim_{t \rightarrow 5} \left| \frac{t-6}{t-5} \right|$
131. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-2| - 3}{1 - |4-x|}$
132. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t-1}{|t+2|}$
133. $\lim_{u \rightarrow 3} \frac{1-u}{|6-2u|}$
134. $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1 - \cos w}{w^3}$
135. $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{u}}{\sin u}$
136. $\lim_{\beta \rightarrow \pi/2} \sin(\cos \beta) \sec^2 \beta$
137. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 3t}}{\tan 2t}$
138. $\lim_{y \rightarrow 1} (1 - y^2) \csc^2(\pi y)$
139. $\lim_{z \rightarrow 1^-} \log_8(1 - z)$
140. $\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln z}{z}$
141. $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(r^2 + r)}$
142. $\lim_{t \rightarrow 0} e^{1/t}$
143. $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{2^{1/v}}$
144. $\lim_{x \rightarrow -2} 2.1^{(|x|-2)/(x+2)}$
145. $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} 0.9^{\sec \theta}$
146. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{3-u}{2u-1}$
147. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+8}{x^2-5x+1}$
148. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$
149. $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2w^3-5w+6}{4-w^3}$
150. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2t^3+1}{7t^3+2t+8}$
151. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z+z^2-z^3}{5+2z^2}$
152. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2-1}{3y+6y^3}$
153. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4t^2-6t+3}{2t^2+1} + \frac{3t+5}{5t-3}$
154. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^3-2y+1}{y-5} + \frac{y^2+6}{y^2-y}$
155. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1-r^2}{2+r} - \frac{4r^3+r}{2r^2-5r+3}$
156. $\lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{w^3}{2+w^2} - \frac{1-6w^2}{3w+4}$
157. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+9} - x$
158. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1-u}{|6-2u|}$
159. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{|3y-5y^2|}{2y-9}$
160. $\lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{3r+2}{\sqrt{4r^2-r+1}}$
161. $\lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{h^2-1}{\sqrt{3h+5h^4}}$
162. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
163. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2u-5}+1}{1+\sqrt[3]{2u}}$

164. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4t^2 - 5}{t + 9t^2}}$
165. $\lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{2w - 3}{w - \sqrt{1 - w}}$
166. $\lim_{y \rightarrow -\infty} y^3 + \sqrt{1 + y^3 + y^6}$
167. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2 - u}{2 + \sqrt{u}}$
168. $\lim_{p \rightarrow \infty} 2p - \sqrt{p^2 + 1}$
169. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r - \sqrt{r^2 + 1}}{r + 6}$
170. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v + 1}{\sqrt{v^2 + 4}} - \frac{\sqrt{v^2 + 4}}{2v - 1}$
171. $\lim_{h \rightarrow \infty} (2 + 1/h)^h$
172. $\lim_{x \rightarrow 0} 5^{1/x}$
173. $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{e^q - e^{-q}}{2}$
174. $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t^2 - 4) - \ln(4t^2 + 1)$
175. $\lim_{u \rightarrow \infty} u(1 - \sec(1/u))$
176. $\lim_{v \rightarrow \infty} \ln(2v + 5)$
177. $\lim_{u \rightarrow \infty} \log_{1/2} \frac{u^2 - 5u}{u + 1}$
178. $\lim_{w \rightarrow \infty} \log_{0.1} \frac{6w}{w^2 + 1}$
179. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(y^2 + y)}$
180. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x + 1) - \ln x}$
181. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x - \ln(x + 1)}$
182. $\lim_{u \rightarrow \infty} 0.6^u$
183. $\lim_{r \rightarrow -\infty} 0.6^r$

Resuelva

184. Cuando el precio unitario de un artículo es x , el proveedor ofrece una cantidad $S(x) = \frac{105x^2}{5x^2 + 48}$ de unidades por semana. ¿A cuánto se aproxima la oferta del proveedor cuando el precio tiende a infinito?
185. Una escalera de 8 m de longitud está apoyada sobre una pared. La base de la escalera se aleja de la pared a 1 m por segundo. Cuando la base está a x metros de la pared, el extremo superior de la escalera se desliza hacia abajo por la pared a una velocidad $v = \frac{x}{\sqrt{64 - x^2}}$ m/s. Calcule la velocidad a la que baja el extremo cuando la distancia de la base a la pared es 7 m, a 7.9 m, 7.99 m. ¿A cuánto tiende la velocidad del extremo cuando este está a punto de tocar el piso?
186. Si el costo de producir q unidades de un producto es $C(q) = 800 + 6q$, y el costo promedio por unidad es $\bar{C}(q) = C(q)/q$, ¿a cuánto tiende el costo promedio por unidad conforme el número de unidades tiende a infinito?
187. La velocidad de un avión t minutos después del despegue es $v = 300 \frac{3t + 2}{t + 2}$ en km/h. ¿Cuál es la velocidad en el momento del despegue? ¿Cuál es la velocidad 10 min después? ¿A cuánto tiende la velocidad conforme pasa el tiempo?

- 188.** Para una cierta película, el ingreso total por taquilla n meses después del lanzamiento está dado por la función $I(n) = \frac{95n^2}{n^2 + 3}$, en millones de dólares. ¿Cuánto es el ingreso total después de dos meses? ¿Después de seis meses? ¿A cuánto tiende el ingreso total al largo plazo?
- 189.** Se estima que el tiempo necesario para completar la construcción de un edificio es $T(n) = 6/(1 - 0.95^n)$ en meses, donde n es el número de trabajadores en el sitio. ¿A cuánto tiende el tiempo de construcción conforme el número de trabajadores aumenta sin cota?
- 190.** La suma de los ángulos internos de un polígono con n lados es $(n - 2)180^\circ$. En un polígono regular todos los ángulos internos miden igual. ¿A cuánto tiende la medida de cada ángulo interno cuando el número de lados tiende a infinito?

1.6 El teorema del encaje

Hay algunos límites que no pueden calcularse evaluando, simplificando ni usando ningún método directo. Existe una herramienta más para calcular estos límites indirectamente, comparando con otros. Específicamente, el Teorema del encaje dice que si f , g y h son tres funciones tales que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{para todo } x$$

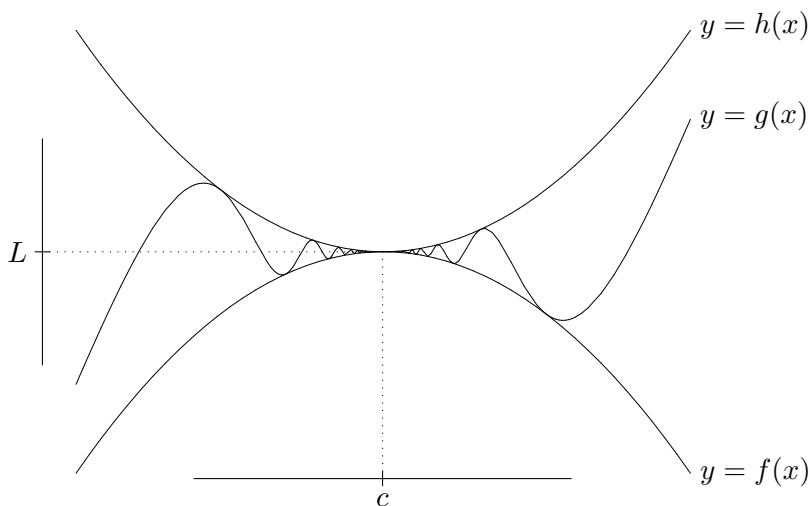
y también

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L \quad \text{para algún } c \text{ y algún } L$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

En palabras, si entre tres funciones una siempre es menor y otra siempre es mayor, y los límites de estas dos en algún punto c son iguales, entonces el límite de la tercera función en el mismo punto también es igual. El “punto” c también podría ser infinito.



Ejemplo 19

Encontrar $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos r}{r}$.

Aquí no funciona sustituir $r = \infty$ porque $\cos(\infty)$, o más formalmente $\lim_{r \rightarrow \infty} \cos r$, no existe (ni siquiera es infinito). Pero note que $\cos r$, aunque no tiene límite cuando $r \rightarrow \infty$, al menos está con toda seguridad entre -1 y 1 porque los resultados de la función coseno siempre oscilan en ese intervalo. Entonces (sumando 2 y después dividiendo por r)

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos r \leq 1 \\ 2 + (-1) = 1 &\leq 2 + \cos r \leq 2 + 1 = 3 \\ \frac{1}{r} &\leq \frac{2 + \cos r}{r} \leq \frac{3}{r} \end{aligned}$$

para todo $r > 0$ (pero si fuera $r < 0$, la desigualdad se habría invertido al dividir por r en la tercera línea).

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{3}{r} = 0$, por el Teorema del encaje se concluye que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos r}{r} = 0$. ┐

En el ejemplo anterior, note que la desigualdad $1/r \leq (2 + \cos r)/r \leq 3/r$ se cumple para $r > 0$, no para todo $r \in \mathbb{R}$. Pero esto es suficiente, porque como el límite que buscamos es cuando $r \rightarrow \infty$, no importa qué sucede para $r \leq 0$.

Ejemplo 20

Encontrar $\lim_{x \rightarrow 3} 2 + (x - 3)^2 \sin\left(\frac{5}{x-3}\right)$.

Al sustituir $x = 3$ obtenemos la forma $2 + 0 \sin(\infty)$, pero $\sin(\infty)$ no existe del todo. De ahí la dificultad para calcular este límite en forma directa. Pero podemos comparar¹:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin\left(\frac{5}{x-3}\right) \leq 1 \\ -(x-3)^2 &\leq (x-3)^2 \sin\left(\frac{5}{x-3}\right) \leq (x-3)^2 \\ 2 - (x-3)^2 &\leq 2 + (x-3)^2 \sin\left(\frac{5}{x-3}\right) \leq 2 + (x-3)^2 \end{aligned}$$

para todo x (de hecho, las funciones en el gráfico anterior son precisamente $f(x) = 2 - (x-3)^2$, $g(x) = 2 + (x-3)^2 \sin\left(\frac{5}{x-3}\right)$ y $h(x) = 2 + (x-3)^2$).

Entonces, como

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2 - (x-3)^2 = \lim_{x \rightarrow 3} 2 + (x-3)^2 = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2 + (x-3)^2 \sin\left(\frac{5}{x-3}\right) = 2$$
┐

¹El paso de la primera a la segunda línea se justifica multiplicando todo por $(x-3)^2$, que por ser positivo conserva las desigualdades. De la segunda a la tercera línea, se suma 2.

Calcule

$$191. \lim_{z \rightarrow 0} z \operatorname{sen}(1/z)$$

$$192. \lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 + \cos(\alpha - \pi/2) \cos(3/\alpha)$$

$$193. \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \sqrt{6\theta - 3\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\pi - 2\theta}\right)$$

$$194. \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} 4r}{r}$$

$$195. \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{2 + \cos v}{v}$$

$$196. \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w + 2 \operatorname{sen} w}{w}$$

$$197. \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{3}{\alpha + \cos \alpha}$$

$$198. \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z - 5 \cos z}{\sqrt{z}}$$

1.7 Continuidad

Una función f es *continua* en un punto $a \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Note que esta igualdad implica varias cosas: que existe el límite por la derecha, que existe el límite por la izquierda, que la función está definida en a , y que los tres valores son iguales. Los polinomios, las raíces, las funciones exponenciales, las logarítmicas y las trigonométricas son continuas en todo su dominio.

Si f y g son continuas en a , entonces también $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son continuas en a ; y si además $g(a) \neq 0$ entonces f/g es continua en a .

Ejemplo 21

La función $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 4x}$ es un cociente de polinomios. Su numerador y su denominador son continuos en todo \mathbb{R} , por lo que su cociente es continuo siempre que el denominador sea distinto de 0. Los únicos puntos de discontinuidad de f son entonces los puntos en que el denominador es 0:

$$x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2)(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, 2, -2$$

Entonces f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$. _____

Si f está definida en trozos entonces sus puntos de discontinuidad son los puntos de discontinuidad de cada trozo, y posiblemente los puntos donde se unen los trozos.

Ejemplo 22

La función $h(t) = \begin{cases} 3t + 5 & \text{si } t > 2 \\ 2t^2 - 2t + 3 & \text{si } t \leq 2 \end{cases}$ está definida en dos trozos, cada uno de los cuales es continuo en su dominio. El único punto de posible discontinuidad es $t = 2$, donde los trozos se unen. Como

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} h(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} 2t^2 - 2t + 3 = 7$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} 3t + 5 = 11$$

son distintos, entonces $\lim_{t \rightarrow 2} h(t)$ no existe, y h es discontinua en 2. ┌

Determine si la función es continua en el valor dado de c

199. $f(x) = \frac{4x - 8}{x^2 - 4}$ en $c = 2$

202. $p(r) = \begin{cases} 4 - r & \text{si } r < -1 \\ 4 & \text{si } r = -1 \\ 2r + 7 & \text{si } r > -1 \end{cases}$ en $c = -1$

200. $h(t) = \frac{6t^2 - 5t + 1}{3t^2 - 18}$ en $c = 3$

201. $g(x) = \begin{cases} 8x - 5 & \text{si } x < -1 \\ 10x - 2x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $c = -1$ **203.** $y(x) = \begin{cases} |4 - x| & \text{si } x > -5 \\ |3x + 6| & \text{si } x < -5 \end{cases}$ en $c = -5$

Determine el conjunto de valores de la variable donde la función es continua

204. $h(t) = \frac{t - 3}{t^2 - 9}$

209. $r(t) = \begin{cases} 6 - t & \text{si } t < -2 \\ 10 + t & \text{si } -2 \leq t < 1 \\ 5 + 6t & \text{si } t > 1 \end{cases}$

205. $g(y) = \frac{y - 1}{\sqrt{y} - 1}$

210. $q(t) = \begin{cases} \frac{t}{t - 1} & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{t + 1} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

206. $f(u) = \begin{cases} \frac{1 - u}{1 - u^2} & \text{si } u \neq \pm 1 \\ 1/2 & \text{si } u = \pm 1 \end{cases}$

211. $g(x) = \begin{cases} \frac{x + 5}{x^2 + 2x} & \text{si } x < -1 \\ x - 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

207. $p(u) = \begin{cases} \frac{3u - 5}{u + 5} & \text{si } u \neq -5 \\ 4 & \text{si } u = -5 \end{cases}$

212. $h(y) = \begin{cases} \frac{y^2 - 1}{y - 1} & \text{si } y < -1 \\ \frac{1}{y^2 - 4} & \text{si } -1 < y < 3 \\ \frac{2y^2 - 9y + 4}{y^2 - 3y - 4} & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$

208. $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ 7 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que la función sea continua en \mathbb{R}

213. $f(p) = \begin{cases} p^4 & \text{si } p \leq 3 \\ ap^2 & \text{si } p > 3 \end{cases}$

214. $q(v) = \begin{cases} v^2 + 4v - 2b & \text{si } v < -1 \\ v^2 & \text{si } v \geq -1 \end{cases}$

$$\mathbf{215.} \quad p(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < a \\ x + 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$\mathbf{216.} \quad g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \leq -1 \\ at + b & \text{si } -1 < t \leq 3 \\ -2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{217.} \quad r(u) = \begin{cases} u + 1 & \text{si } u \leq 0 \\ u^2 + a & \text{si } 0 < u \leq b \\ 7 - u & \text{si } u > b \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Derivación

2.1 Derivadas por definición

Si f es una función definida en un intervalo alrededor de a , entonces su *derivada* en a , denotada $f'(a)$, es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en a . Dos fórmulas para calcular $f'(a)$ son

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si los límites existen. En tal caso se dice que f es *derivable* en a .

La primera fórmula es preferible si se conoce el valor de a . La segunda puede usarse para valores indeterminados de a . Vea los ejemplos que siguen.

Si $y = f(x)$, la derivada puede denotarse y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}f(x)$.

Ejemplo 1

Si $g(t) = \sqrt{5-t}$ entonces su derivada en $a = 1$ es (usando la primera fórmula porque conocemos el valor de a)

$$\begin{aligned} g'(1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{g(t) - g(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-t} - \sqrt{5-1}}{t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-t} - 2}{t - 1} \cdot \frac{\sqrt{5-t} + 2}{\sqrt{5-t} + 2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(5-t) - 4}{(t-1)(\sqrt{5-t} + 2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1-t)}{(t-1)(\sqrt{5-t} + 2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{5-t} + 2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = x^2 - 3x$, entonces su derivada en cualquier valor de x es (usando la segunda fórmula)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - [x^2 - 3x]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h] - x^2 + 3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h - 3 = 2x - 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Para calcular la derivada de $\sin x$, usamos el resultado del Ejercicio 90 del Capítulo 1 (página 23):

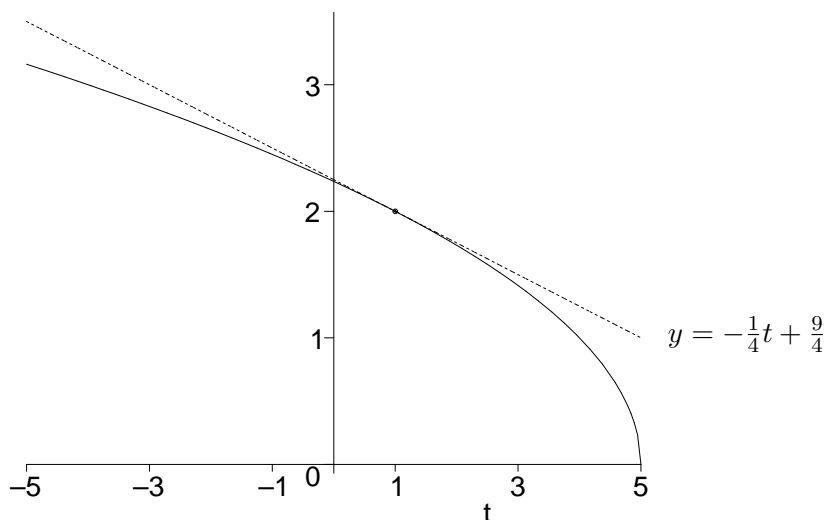
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Entonces concluimos de inmediato que $(\sin x)' = \cos x$. └

Recuerde que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y que tiene pendiente m es $y - y_0 = m(x - x_0)$. La forma pendiente-intersección ($y = mx + b$) puede conseguirse despejando y en la ecuación punto-pendiente.

Ejemplo 4

En referencia al Ejemplo 1, la recta tangente al gráfico de g en $t = 1$ pasa por el punto $(1, g(1)) = (1, 2)$ y tiene pendiente $m = g'(1) = -\frac{1}{4}$. Entonces su ecuación es $y - 2 = -\frac{1}{4}(t - 1)$ en la forma punto-pendiente. La forma pendiente-intersección es $y = -\frac{1}{4}t + \frac{9}{4}$.



Use la definición para calcular la derivada

1. $3r - 8$ en $r = -2$

2. $2 - 6(t + 1)$ en $t = 3$

3. $u^2 - 4u$ en $u = 5$

4. $1 - 3x + x^2$ en $x = -6$

5. $2y^3 - y$ en $y = 1$

6. $\frac{1}{1-z}$ en $z = 2$

7. $\frac{3}{2w+5}$ en $w = -2$

8. $\frac{2}{y} - 1$ en $y = -2$

$$9. \frac{2v+3}{v-4} \quad \text{en } v=3$$

$$10. \frac{4-3x}{2+x} \quad \text{en } x=-1$$

$$11. \frac{2t^2-5t}{t+3} \quad \text{en } t=0$$

$$12. \sqrt{v+3} \quad \text{en } v=1$$

$$13. 2-3\sqrt{x} \quad \text{en } x=25$$

$$14. t+\sqrt{1-t} \quad \text{en } t=-2$$

$$15. \sqrt{2y^2-5} \quad \text{en } y=2$$

$$16. 1-\sqrt{1-2u} \quad \text{en } u=0$$

$$17. \frac{1}{1+\sqrt{r}} \quad \text{en } r=1$$

$$18. \sin(3u) \quad \text{en } u=0$$

$$19. 2\cos(2\alpha+\pi/2) \quad \text{en } \alpha=0$$

$$20. 5\cos(v-\pi) \quad \text{en } v=\pi$$

$$21. \sin r - 3\cos r \quad \text{en } r=\pi/3$$

$$22. 2\cos(y/2) - \sin(y+\pi/2) \quad \text{en } y=0$$

23. Use la definición para calcular la derivada de cada función en los ejercicios 1–21 impares, como función de la variable (no en el punto dado).

24. Use la definición para calcular la derivada de cada función en los ejercicios 2–22 pares, como función de la variable (no en el punto dado).

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado

$$25. y=5x-x^2 \quad \text{en } x=1$$

$$26. q=1/p \quad \text{en } p=-1$$

$$27. y=\frac{2t}{t+4} \quad \text{en } t=-3$$

$$28. y=\frac{1-r}{4-r} \quad \text{en } r=2$$

$$29. z=\sqrt{3+w} \quad \text{en } w=6$$

$$30. w=\frac{1}{\sqrt{2u+5}} \quad \text{en } u=-2$$

2.2 Reglas de derivación

En la práctica, no es común calcular derivadas por definición. Existen reglas para derivar sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones, así como para funciones particulares como potencias, logaritmos y otras. Empecemos por tres reglas básicas de derivación:

- Si f es una función derivable y $c \in \mathbb{R}$, entonces $(cf)' = cf'$
- Si f y g son funciones derivables, entonces $(f+g)' = f' + g'$
- Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

También tenemos, por los Ejercicios 90 y 91 del capítulo anterior, que

- $(\sin)' = \cos$
- $(\cos)' = -\sin$

Ejemplo 5

Usando las reglas anteriores, así calculamos estas derivadas:

- $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$
- $(2t^2 - 3t + \sqrt{t})' = 2 \cdot 2t^1 - 3 \cdot 1t^0 + \frac{1}{2}t^{-1/2} = 4t - 3 + \frac{1}{2\sqrt{t}}$
- $\left(\frac{2u^3 + u}{3u^2}\right)' = \left(\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u^{-1}\right)' = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}u^{-2}$
- $(6 \cos y + 2 \operatorname{sen} y)' = -6 \operatorname{sen} y + 2 \cos y$

Derive

31. x^9

32. $5t^3$

33. $\frac{7}{4}u^4$

34. $12y^{-3}$

35. $6r^{1/3}$

36. $13t^4 - 5t^2 + 6t$

37. $12y^{3/2} - 6y^{1/2} - 3y^{-1}$

38. $-5x^2 + 3x - 6$

39. $\frac{11q}{4} + \frac{9}{5}$

40. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}u + 0.5u^2$

41. $3y^5 + \cos y$

42. $\sqrt{5v} - 6 \cos v + 2 \operatorname{sen} v$

43. $\frac{5(y^4 - 3)}{2}$

44. $\frac{2 \operatorname{sen} \beta + 5 \cos \beta}{4}$

45. $\frac{\sqrt{8}}{x^5}$

46. $\frac{5t^2 - 3t + 1}{t^2}$

47. $\frac{5w + 1}{w} - \frac{6w - 2}{w^2}$

48. $r\sqrt{r} + \frac{1}{r^2\sqrt{r}}$

49. $(2u + 3)(3u^2 - 1)$

50. $x(3x^2 - 7x + 7)$

51. $3t \left(t^2 - \frac{2}{t} \right)$

52. $(s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

53. $2\sqrt{y} \left(y^2 - \frac{1}{y} \right)$

54. $(v^2 + 2v)(v + 1) - 6v^2 + 5$

55. $(6w - 4)^2$

56. $\sqrt{x} (x^3 - \sqrt{x} + 1)$

57. $\frac{6\sqrt{y^5} - 9\sqrt{y}}{3\sqrt{y^3}}$

58. $\frac{40t^5 - t^3\sqrt{t}}{5t^2\sqrt{t}}$

59. $9 \operatorname{sen} \theta (1 - \csc \theta)$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado

60. $z = -6t^2 + t^3$ en $t = 0$

63. $w = \sqrt{u} - 2$ en $u = 0$

61. $y = 2r^5 - 3r^2$ en $r = -1$

64. $y = \sin x + 2 \cos x$ en $x = \pi/2$

62. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ en $x = 8$

65. $y = 3 \cos w - w^2$ en $w = \pi/3$

Encuentre los puntos donde la recta tangente a...

66. ... $y = x^3 - 12x$ es horizontal

recta con ecuación $y = 7u - 2$

67. ... $y = w + \cos w$ es horizontal

69. ... $y = 1 + t^{1/3}$ es vertical

68. ... $y = 4u^2 - 5u + 6$ es paralela a la

70. $y = 7 \sin \alpha - \frac{1}{\alpha}$ es vertical

2.3 Derivada como razón de cambio

Si $f(t)$ da la posición de un objeto en el momento t , entonces $f'(t)$ es la *velocidad* del objeto en el momento t .

En general, si $y = f(x)$, la derivada y' es la tasa de cambio de y con respecto a x : la velocidad a la cual cambia y , específicamente el número de unidades en que se incrementa y por cada unidad que se incrementa x .

Ejemplo 6

Si la distancia recorrida por un objeto t horas después de empezar a moverse es $d(t) = 20t - 0.1t^2$, en kilómetros, entonces su velocidad a las t horas es $d'(t) = 20 - 0.2t$, en kilómetros por hora. A las 2.5 horas desde el inicio, su velocidad es $d'(2.5) = 20 - 0.2(2.5) = 19.5$ km/h.

Resuelva

71. Un objeto se lanza hacia arriba desde cierta altura, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = 40 + 6t - 4.9t^2$.

- Calcule su velocidad promedio durante el primer segundo.
- Calcule su velocidad promedio durante el intervalo $[1, 2]$.
- Calcule su velocidad promedio durante el intervalo $[1, 1.01]$.
- ¿Cuál es su velocidad instantánea 1 s después de ser lanzado?
- ¿Con qué velocidad golpea el suelo?

- 72.** Una piedra se deja caer desde un puente de 150 m de altura, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = 150 - 4.9t^2$.
- Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 4$.
 - Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 3.1$.
 - Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 3.001$.
 - ¿Cuál es su velocidad instantánea a los tres segundos?
 - ¿Con qué velocidad golpea el suelo?
- 73.** Un objeto se deja caer desde cierta altura h_0 , en metros sobre el suelo, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = h_0 - 4.9t^2$. Al caer al suelo su velocidad es de -15 m/s. ¿Desde qué altura se dejó caer?
- 74.** Un automóvil se dirige hacia una pared. El conductor aplica los frenos y t segundos después la distancia entre el automóvil y la pared es $d(t) = 40 - 18t + 2t^2$.
- ¿Cuál es la velocidad del automóvil t segundos después de aplicar los frenos?
 - ¿Cuánto tiempo tardaría en detenerse si no choca antes?
 - ¿Cuánto tiempo tardaría en chocar con la pared si no se detiene antes?
 - ¿Chocará con la pared?
- 75.** Un globo esférico se infla de modo que su volumen es $V(t) = 50t \text{ dm}^3$ a los t segundos de estar inflándose. ¿A qué velocidad está aumentando su radio luego de tres segundos?

2.4 Reglas del producto y del cociente

Al derivar productos o cocientes de funciones pueden usarse las siguientes reglas, para dos funciones derivables p y q :

- La *Regla del producto* dice que $(p \cdot q)' = p' \cdot q + q \cdot p'$
- La *Regla del cociente* dice que $\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p' \cdot q - q \cdot p'}{q^2}$

Ejemplo 7

La derivada del producto $t^{1/3}(t^2 - 3t)$ es

$$\begin{aligned} \left[t^{1/3}(t^2 - 3t)\right]' &= (t^{1/3})' \cdot (t^2 - 3t) + t^{1/3} \cdot (t^2 - 3t)' \\ &= \frac{1}{3}t^{-2/3} \cdot (t^2 - 3t) + t^{1/3} \cdot (2t - 3) \end{aligned}$$

Derive

76. $(x^2 - 3x + 5)(4x^3 + x - 7)$

77. $(s^3 + s - 1)(s^2 - 4)$

78. $y^2(1 + \sqrt{y})$

79. $\sqrt[3]{t}(\sqrt{t} + 3)$

80. $(5w^2 - 2)(2\sqrt{w} - 1/w)$

81. $(\theta + 1)\operatorname{sen} \theta$

82. $\operatorname{sen}(2x)$

83. $(7t^4 - 4t^2)(2\operatorname{sen} t + \cos t)$

84. $(1 + \tan u)(1 - \cot u)$

85. $\frac{z^4 + 5}{3 + z}$

86. $\frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 3}$

87. $\frac{t + 1}{t^2 + 2t + 2}$

88. $\frac{u^2 + 2}{u^2 + u + 1}$

89. $\sec v$

90. $\csc \beta$

91. $\cot \alpha$

92. $\frac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$

93. $\frac{ax + b}{cx + d}$ con respecto a x

94. $t^2 - \sqrt{3} + \frac{1}{3 - t}$

95. $\frac{y}{y + 1} - \frac{y - 1}{y + 3}$

96. $\frac{\operatorname{sen} r}{1 + r} - \frac{\cos r}{1 - r}$

97. $\frac{2x - 1}{2x + 1}(3x + 1)$

98. $(2u - 5)\frac{u + 1}{u + 2}$

99. $\frac{(s + 1)(s^2 + 1)}{s - 2}$

100. $\frac{(1 - \operatorname{sen} v)\csc v}{\tan v}$

101. $y^2 \sec y \cot y$

102. $(1 - 2p)(3p + 2)(p^2 + 1)$

103. $6\sqrt{u}(u^4 + u + 1)(2u - 3)$

104. $w^4 \left(1 - \frac{2}{w + 1}\right)$

105. $\frac{2}{x + 1} \left(1 - \frac{3}{x + 1}\right)$

106. $\frac{4 - \frac{1}{1 - t}}{t - 2}$

107. $\frac{u + 1}{u - 1} \cdot \frac{u^2 + 2}{5 + u}$

108. $\frac{(4r + 6)(2 + 3r)}{r(1 - 2r)}$

Calcule el valor numérico

109. $(fg)'(2)$, dado que $f(2) = -1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$

110. $h'(-1)$, dado que $h(x) = x^2 p(x)$, $p(-1) = 4$ y $p'(-1) = 2$

111. $(f/g)'(5)$, dado que $f(5) = -2$, $g(5) = -1/2$, $f'(5) = 4$ y $g'(5) = 2$

112. $q'(4)$, dado que $q(x) = f(x)/\sqrt{x}$, $f(4) = -3$ y $f'(4) = 0$

Encuentre la ecuación de la recta...

113. ... tangente a $q = (p^3 + 4)(p^2 - 5)$ en $p = -2$
114. ... tangente a $w = \theta \sin \theta$ en $\theta = 2$
115. ... tangente a $v = (\sin \beta - 1)(1 - \sec \beta)$ en $\beta = \pi/3$
116. ... tangente a $w = \frac{5}{4 - u}$ en $u = 9$
117. ... tangente a $r = \frac{t}{t^2 + 1}$ en $t = 0$
118. ... normal a $y = \sqrt{w}(6w - 3)$ en $w = 1/4$
119. ... normal a $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ en $x = 4$
120. ... normal a $t = \frac{\tan \alpha}{\alpha}$ en $\alpha = \pi/6$

Resuelva

121. La velocidad de un avión t segundos después del despegue es $v = 83 \frac{180t + 2}{60t + 2}$ m/s. ¿Cuánto es la aceleración (la tasa de cambio de la velocidad) 10 s después del despegue?
122. Para una cierta película, el ingreso total por taquilla n meses después del lanzamiento está dado por la función $I(n) = \frac{95n^2}{n^2 + 3}$, en millones de dólares. Calcule $I'(12)$ e interprete el resultado.
123. Se estima que el costo, en miles de dólares, de eliminar $x\%$ de los contaminantes en un pozo de agua es $C(x) = \frac{0.8x}{100 - x}$. Calcule $C'(50)$ y $C'(90)$, e interprete los resultados.
124. Una persona observa el despegue de un cohete desde una distancia de 600 m del punto de lanzamiento. El cohete se eleva verticalmente. Determine la tasa a la que aumenta la altura del cohete con respecto al ángulo de elevación del observador al cohete, en metros por grado, cuando el ángulo es de 20° .
125. La utilidad mensual de una pastelería es $U(x) = \frac{400x}{x + 2} - 2x - 300$ en millones de colones, donde x es el número de toneladas de pastel que producen. Sabiendo que el punto más alto en el gráfico de U es el punto donde la tangente es horizontal, encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad. ¿Cuál es la utilidad máxima?

2.5 Regla de la cadena

La regla que sigue se usa para derivar composiciones de funciones.

Si f y g son funciones derivables en \mathbb{R} , entonces la *Regla de la cadena* dice que

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

(donde $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$).

Ejemplo 11

La derivada de $\sqrt{x^2 + 1}$ es

$$\begin{aligned} \left[(x^2 + 1)^{1/2} \right]' &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot (x^2 + 1)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Ejemplo 12

La función $u(t) = \left(\frac{t}{t+1} \right)^3$ tiene un cociente dentro de una composición, por lo que deben usarse las reglas de la cadena y del cociente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{t+1} \right)^3 &= 3 \left(\frac{t}{t+1} \right)^2 \left(\frac{t}{t+1} \right)' \\ &= 3 \left(\frac{t}{t+1} \right)^2 \frac{(t)'(t+1) - t(t+1)'}{(t+1)^2} \\ &= 3 \left(\frac{t}{t+1} \right)^2 \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{3t^2}{(t+1)^4} \end{aligned}$$

Derive

126. $3(5 - 6x)^5$

127. $\sqrt[3]{9t^2 + 5}$

128. $\frac{1}{(16u + 1)^3}$

129. $20\sqrt[5]{(y^3 + 4y)^2}$

130. $105(4w^2 - 7)^3 - \sqrt{1 - 5w}$

131. $\sin(1 - v^2)$

132. $-2 \tan^3 t$

133. $1 - \csc(\pi r)$

134. $(5u + \sqrt{1 - 3u})^2$

135. $\sqrt{v + \sqrt{v}}$

136. $\sin^2[\pi(z - 1)]$

137. $\sqrt{1 + \sec^2 \alpha}$

138. $\left((y^2 + 3)^5 + 1\right)^3 - 2\right)^4$

139. $y\sqrt{1-y^2}$

140. $(p^2 - 5p)^3(2p + 1)^5$

141. $u^2 \cos(6u - 5)$

142. $(2w - 1) \cot^2 w$

143. $\sqrt[3]{3q+1} \cdot \sqrt[5]{5q-1}$

144. $\sqrt{3w(4w+2)^3}$

145. $\sin(5\theta) \sec^2(5\theta)$

146. $\left(\frac{x-7}{x+2}\right)^3$

147. $\sqrt{\frac{3x}{5-x}}$

148. $\frac{2t-5}{(t^3-4)^2}$

149. $\frac{3t^4}{\sqrt{t^2-5t}}$

150. $\frac{y+1}{1+\cos^2 y}$

151. $\frac{\tan^2 x - 1}{\csc^2 x + 2}$

152. $\frac{(6r-5)^3}{(7r+2)^4}$

153. $\frac{\sqrt{v^3-v}}{(2v+1)^4}$

Calcule el valor numérico

154. $(p \circ q)'(6)$, dado que $q(6) = 2$, $p'(2) = -1$ y $q'(6) = 4$

155. $g'(-1)$, dado que $g(x) = r(x^2)$ donde r es alguna función con $r'(1) = 5$

156. $h'(2)$, dado que $h(t) = \frac{f(3-t)}{t}$ donde f es alguna función con $f(1) = 3$ y $f'(1) = -1$

157. $q'(\pi/6)$, dado que $q(\theta) = p(\cos 2\theta)$, donde p es alguna función con $p'(1/2) = \sqrt{3}$

Encuentre la ecuación de la recta...

158. ... tangente a $y = (x^2 - 3x)^2$ en $x = 1$

159. ... tangente a $y = \sin^2(2w)$ en $w = \pi/4$

160. ... tangente a $u = t^2 \sqrt{2+t}$ en $t = -1$

161. ... tangente a $z = 2u^3 - \left(\frac{u}{u+1}\right)^2$ en $u = 0$

162. ... normal a $w = 2(v^2 - 1)^2$ en $v = 2$

163. ... normal a $y = 3(r^2 + 3r)^4$ en $r = -1$

164. ... normal a $y = \sin^2(2w)$ en $w = \pi/4$

165. ... normal a $y = \frac{\sqrt{7x+2}}{x-1}$ en $x = 2$

Encuentre los puntos donde la recta tangente a...

166. ... $y = (6t - 1)^4$ es horizontal

167. ... $y = \sqrt[3]{p^2 - p}$ es vertical

168. ... $y = \frac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta $10x - y = 5$

169. ... $y = \sqrt{5+2x}$ es perpendicular a la recta $x + 2y = 1$

Resuelva

170. Si un tanque de agua contiene 5000 litros y tarda 30 minutos en vaciarse por el fondo, entonces el volumen de agua aún en el tanque a los t minutos es $V = 5000 \left(1 - \frac{1}{30}t\right)^2$ (para $0 \leq t \leq 30$). Calcule $V'(12)$ e interprete. ¿Cuándo es mayor el flujo de agua?

171. Si el precio unitario p de un producto y la cantidad vendida q están relacionados por $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$, encuentre la derivada del ingreso como función de la cantidad (el ingreso es $I = pq$).

172. En un grupo de mil personas, el número de ellas que viven por lo menos x años es $N(x) = 100\sqrt{100-x}$ (para $0 \leq x \leq 100$). Calcule $N'(75)$ e interprete.

173. Un poste de 7 m de altura proyecta sobre la calle una sombra de longitud $y = 7 \cot \alpha$ en metros, donde α es el ángulo de elevación del sol y está dado por la fórmula $\alpha = (6-t)\pi/12$, donde t es el número de horas después del mediodía. A las 4:30 pm, ¿a cuántos milímetros por segundo está creciendo la sombra?

2.6 Funciones exponenciales y logarítmicas

Las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica naturales son

$$(e^x)' = e^x \quad \text{y} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Para funciones exponenciales y logarítmicas en otras bases, las derivadas son

$$(b^x)' = b^x \ln b \quad \text{y} \quad (\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$$

Ejemplo 13

La derivada de 2^{3x^2-5x} es, por la regla de la cadena,

$$\left(2^{3x^2-5x}\right)' = 2^{3x^2-5x} \ln 2 \cdot (3x^2 - 5x)' = 2^{3x^2-5x} (6x - 5) \ln 2$$

Ejemplo 14

La derivada de $y = \ln \left(\frac{2x+3}{4-3x} \right)$ es, por las reglas de la cadena y del cociente,

$$\begin{aligned} \left[\ln \left(\frac{2x+3}{4-3x} \right) \right]' &= \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{4-3x} \right)} \left(\frac{2x+3}{4-3x} \right)' \\ &= \frac{4-3x}{2x+3} \cdot \frac{(2)(4-3x) - (2x+3)(-3)}{(4-3x)^2} \\ &= \frac{4-3x}{2x+3} \cdot \frac{17}{(4-3x)^2} = \frac{17}{(2x+3)(4-3x)} \end{aligned}$$

Pero una manera mucho más sencilla de calcular y' es empezar por descomponer y según las propiedades de logaritmos, y luego derivar:

$$\begin{aligned} y &= \ln \left(\frac{2x+3}{4-3x} \right) = \ln(2x+3) - \ln(4-3x) \\ y' &= \frac{1}{2x+3}(2x+3)' - \frac{1}{4-3x}(4-3x)' = \frac{2}{2x+3} + \frac{3}{4-3x} \end{aligned}$$

En general, cuando una función contiene logaritmos de productos, cocientes o potencias, es mucho mejor descomponer los logaritmos en partes más sencillas antes de derivar. A esto regresaremos en la Sección 2.8.

Derive

174. $2t + e^t$

175. $e^u - e^{-u}$

176. $3 \cdot 5^r - re^r$

177. $(1/2)^x + 2^x$

178. $\frac{1}{2}(e^{2y} - 3e^{4y})$

179. $3 \ln \sqrt{t}$

180. $\ln x^5 - 3 \ln x^2$

181. $\ln \left(\frac{3u}{u^2 - 1} \right)$

182. $8 \log y$

183. $\log_2 \sqrt[5]{x}$

184. $(w^2 + 1)e^{3w}$

185. e^{2x^2-5x+3}

186. $\sqrt{u}e^u + u$

187. $(q - 3e^{q/3})^5$

188. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

189. $y 10^{2-5y}$

190. $\ln(t \sqrt{t^2 + 1})$

191. $\ln \left[\frac{(p^3 - 1)e^{-p^2}}{\sqrt{1 - 5p}} \right]$

192. $\log(3r^2 - 5r)$

193. $\ln(s - \sqrt{s^2 - 1})$

194. $\sqrt{1 + \ln z} + \ln(1 + \sqrt{z})$

195. $\ln^2(2y + 6)$

196. $(q^2 + q) \ln(5q^2 + 1)$

198. $\ln^2 [\ln(2z^3 - 8z)]$

197. w^{w+1}

199. $e^{3x} g(\ln^2 x)$, donde g es una función derivable

Calcule el valor numérico

200. $q'(1)$, dado que $q(t) = f(\ln t)$ y $f'(0) = -3$

201. $h'(0)$, dado que $h(x) = \sqrt{f(e^{x^2-x})}$, $f(1) = 4$ y $f'(1) = 6$

202. $g'(0)$, dado que $g(y) = \ln f(2^y)$, $f(1) = \ln 2$ y $f'(1) = -3$

Encuentre la ecuación de la recta...

203. ... tangente a $q = 5e^{2-2p}$ en $p = 1$

204. ... tangente a $z = t^2 10^{t+3}$ en $t = -2$

205. ... perpendicular a $y = 3e^{x^2} + x^2$ en $x = 0$

206. ... perpendicular a $w = \frac{\ln(2u+7)}{u+6}$ en $u = -3$

Encuentre los puntos donde la recta tangente a...

207. ... $y = e^{u^2+2u}$ es horizontal

208. ... $y = t 2^{t-1}$ es paralela al eje T

209. ... $y = 2e^{4-6q} + 3e^{3+4q}$ es perpendicular al eje Y

210. ... $y = x \ln x$ es paralela a $y = 2x + 1$

211. ... $y = (r+4)[1 - \ln(2r+8)]$ es perpendicular a $y + r = 6$

Resuelva

212. Un recipiente contiene agua caliente cuya temperatura, a los t segundos, es $T(t) = 24 + 60 \cdot 0.997^t$ grados centígrados. ¿A qué velocidad se está enfriando luego de un minuto?

213. Se sabe que si una cantidad P de dinero se invierte a una tasa de interés anual r compuesta continuamente, entonces a los t años el valor de la inversión será $A = Pe^{rt}$. Compruebe que la tasa de cambio relativa del valor con respecto al tiempo es r . (La *tasa de cambio relativa* de y es y'/y .)

- 214.** Según C. F. Richter, el número de terremotos de magnitud M o mayor, por unidad de tiempo, es $N = 10^{a-bM}$, donde a y b son constantes. ¿A qué tasa cambia el número N de terremotos con respecto a la magnitud M ?
- 215.** La demanda mensual de cierto artículo es $q = 375\,000 - 2500 \ln(0.01p)$, donde p es el precio unitario en dólares. ¿A qué tasa disminuye la demanda por cada dólar de aumento en el precio, cuando el precio es \$40?
- 216.** En cierto país se estima que la cantidad de petróleo necesaria para aumentar la productividad, en número de barriles por \$1000 de producción, es $f(t) = 1.5 + 0.18te^{-0.12t}$, donde t es el número de años transcurridos desde 1965. Calcule $f'(25)$ e interprete.
- 217.** Si $\bar{C} = \frac{4000e^{q/400}}{q}$ es el costo promedio de producir q unidades de un producto, calcule la derivada del costo, C' , y úsela para aproximar el costo de la unidad número 344.

2.7 Derivación implícita

Si la relación entre las variables x y y se da como una ecuación en forma implícita (donde y no está despejado), todavía es posible calcular dy/dx derivando ambos lados de la ecuación con respecto a x . En ese caso, si la variable y aparece dentro de una expresión (como $5y^3$, o e^y) se debe recordar que y es una función y usar la regla de la cadena (por ejemplo, $(5y^3)' = 15y^2 \cdot y'$, o $(e^y)' = e^y \cdot y'$). Luego de derivar se pueden sustituir los valores de x y y , si se conocen, y finalmente despejar la incógnita y' .

Ejemplo 15

Dada la ecuación $t^2 + z^2 = 5$, queremos calcular dz/dt en el punto $(3, 4)$. Empezamos por notar que la expresión dz/dt indica que t es la variable independiente y z la dependiente (z es función de t). Entonces el punto $(3, 4)$ se refiere a $t = 3$ y $z = 4$. Además, $(t)' = 1$ y $(z)' = z'$. Al derivar ambos lados de la ecuación con respecto a t obtenemos

$$(t^2 + z^2)' = (5)' \Rightarrow 2t + 2z \cdot z' = 0$$

Sustituyendo los valores $t = 3$ y $z = 4$, y despejando z' , llegamos a

$$2(3) + 2(4)z' = 0 \Rightarrow z' = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Ejemplo 16

Calcular dp/dx dado $3px - 5e^p = x$. Notemos que x es la variable y p es la función, así que $(x)' = 1$ y $(p)' = p'$.

$$\begin{aligned} (3px - 5e^p)' &= (x)' \\ (3p)'x + 3p(x)' - 5e^p p' &= 1 \\ 3xp' + 3p - 5e^p p' &= 1 \\ p'(3x - 5e^p) &= 1 - 3p \\ p' &= \frac{1 - 3p}{3x - 5e^p} \end{aligned}$$

Algunas derivadas de funciones inversas pueden calcularse usando derivación implícita. Vea el siguiente ejemplo y los Ejercicios 218–222.

Ejemplo 17

Calcular la derivada de $y = \arcsen x$.

Por la definición de arcsen como función inversa de sen, la ecuación $y = \arcsen x$ implica que $\sen y = x$. Al derivar implícitamente esta segunda ecuación, considerando a y como función de x , obtenemos

$$\begin{aligned}\sen y &= x \\ (\cos y) y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{\cos y}\end{aligned}$$

Con eso ya tenemos y' , pero podemos ir más allá y escribirlo en términos de x si recordamos que

$$\cos^2 y = 1 - \sen^2 y \Rightarrow \cos y = \pm \sqrt{1 - \sen^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

¿Cuál es el signo correcto? Como el rango de la función arcsen es $[-\pi/2, \pi/2]$, y como y está en ese rango, entonces $\cos y \geq 0$ (recuerde que la función cos es positiva entre $-90^\circ = -\pi/2$ y $90^\circ = \pi/2$). Con esto resolvemos la incertidumbre del signo y averiguamos que

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

Finalmente, entonces, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. _____

Las funciones trigonométricas inversas tienen las siguientes derivadas (vea el ejemplo anterior y los Ejercicios 218–222):

$$\begin{array}{ll}(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} & (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1 + x^2} \\ (\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} & (\operatorname{arccsc} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}\end{array}$$

Derive, usando las ideas del Ejemplo 17

218. $\arccos \alpha$

219. $\arctan r$

220. $\operatorname{arcsec} u$

221. $\operatorname{arccsc} v$

222. $\operatorname{arccot} w$

Calcule la derivada que se indica

- 223.** dp/dt en $(2, -1)$, dado $t^3 + p^3 = pt + 9$
- 224.** dz/dx en $(-3, 0)$, dado $x^2z + xz^2 = 3x + 9$
- 225.** dy/du en $(1, 4)$, dado $\sqrt{u} + \sqrt{y} = 3$
- 226.** dx/dt en $(4, -4)$, dado $x + t + e^{x+t} = 1$
- 227.** dz/dx en $(1, e)$, dado $x \ln z - z \ln x = 1$
- 228.** dy/dx en $(5, 3)$, dado $y = f^{-1}(x)$ donde f es una función invertible con $f'(3) = 2/7$
- 229.** dy/dx , dado $12x^2 + 5y^2 = 13$
- 230.** dv/dt , dado $2t^3 + 3tv + v^3 = 0$
- 231.** $d\alpha/d\beta$, dado $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$
- 232.** dz/dw , dado $z^2 = \ln(w + z)$
- 233.** dy/dt , dado $2ye^y + t = 2$
- 234.** dx/dy , dado $4x \ln(2x + y) = 4$

Encuentre la ecuación de la recta...

- 235.** ... tangente a $3x^2 + 5y^2 = 48$ en $(-1, 3)$
- 236.** ... tangente a $ye^{xy} + x = 1$ en $(0, 1)$
- 237.** ... perpendicular a $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $(2, -3)$
- 238.** ... perpendicular a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6} = 0$ en $(3, -2)$
- 239.** ... tangente a $x \ln(x + y) = 5x + y^2 - 1$ en $(0, 1)$
- 240.** ... tangente a $x \sin y - y \cos x^2 = 2xy$ en $(0, 0)$
- 241.** ... perpendicular a $x^2 = \frac{\sec y}{2x + y - 1}$ en $(1, 0)$
- 242.** ... perpendicular a $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ en $(0, 0)$

Resuelva

- 243.** Un globo esférico se infla con agua a razón de $2 \text{ dm}^3/\text{s}$, de modo que su volumen en dm^3 es $V = 2t$ a los t segundos de empezar a inflarse. ¿A qué velocidad está aumentando su radio luego de tres segundos?
- 244.** Un objeto cae verticalmente hacia el suelo, y su altura en metros es $h(t) = 19.6 - 4.9t^2$ donde t es el número de segundos desde que empezó a caer. La caída es registrada por una cámara que está a nivel del suelo y a cinco metros del punto donde el objeto caerá. ¿A qué velocidad está cambiando el ángulo de elevación del objeto con respecto a la cámara en el momento en que el objeto golpea el suelo?

2.8 Derivación logarítmica

Algunas funciones, sobre todo las que tienen muchos productos, cocientes, potencias o raíces, pueden derivarse más sencillamente si primero se toma el logaritmo de la función, luego se simplifica el logaritmo, entonces se deriva y por último se despeja la derivada. Este método se conoce como *derivación logarítmica*. El siguiente ejemplo ilustra las ideas generales.

Ejemplo 18

La función $y = \frac{(x+1)^2}{(2x+1)^5 e^{3x}}$ podría derivarse directamente usando las reglas del cociente, del producto y de la cadena. Pero en vez de eso podemos tomar el logaritmo y simplificarlo antes de derivar:

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x+1)^2}{(2x+1)^5 e^{3x}} \\ &= \ln(x+1)^2 - \ln(2x+1)^5 - \ln e^{3x} \\ &= 2 \ln(x+1) - 5 \ln(2x+1) - 3x\end{aligned}$$

Ahora derivamos ambos lados, usando la regla de la cadena en el lado izquierdo. Luego despejamos y' .

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} y' &= 2 \frac{1}{x+1} - 5 \frac{2}{2x+1} - 3 \\ y' &= y \left(\frac{2}{x+1} - \frac{10}{2x+1} - 3 \right) \\ &= \frac{(x+1)^2}{(2x+1)^5 e^{3x}} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{10}{2x+1} - 3 \right)\end{aligned}$$

Derive

245. $(z+1)^4(z^2+3)\sqrt[3]{2z+1}$

246. $\frac{(1+y)(2-y)}{(1-y)(2+y)^2}$

247. $\frac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2}$

248. $\sqrt[3]{\frac{z^2+1}{z^2-1}}$

249. $\sqrt{\frac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}}$

250. $t^{\ln t}$

251. $(3y+1)^{2y}$

252. $(2/y)^y$

253. $(u+1)^{1/u}$

254. $e^w w^{1-w}$

2.9 Derivadas de orden superior

Si $y = f(x)$, la *segunda derivada* (o *derivada de segundo orden*) de y es la derivada de $y' = f'(x)$, y se denota $y'' = f''(x)$. En símbolos,

$$y'' = (y')' \quad \text{o bien} \quad f''(x) = (f'(x))'$$

Similarmente se definen la tercera y la cuarta derivada como

$$y''' = (y'')' \quad \text{y} \quad y'''' = (y''')'$$

y así sucesivamente la quinta derivada y las de órdenes superiores.

Para simplificar la notación se puede escribir también $y^{(2)}$ en vez de y'' , $y^{(3)}$ en vez de y''' , etc (en esta notación, $y^{(1)}$ significa y' , y $y^{(0)}$ es simplemente y).

Otra notación usual es $\frac{d^2y}{dx^2}$ para y'' , y en general $\frac{d^k y}{dx^k}$ para $y^{(k)}$.

Ejemplo 19

Las tres primeras derivadas de $w = 2t^3 - 5t - 6t^{-1}$ son

$$w' = 6t^2 - 5 + 6t^{-2}$$

$$w'' = 12t - 12t^{-3}$$

$$w''' = 12 + 36t^{-4}$$

Ejemplo 20

Para calcular d^2y/dx^2 en la ecuación implícita $\ln x + \ln y = x + y - 2$, empezamos por la primera derivada:

$$\begin{aligned}(\ln x + \ln y)' &= (x + y - 2)' \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' &= 1 + y' \\ y' \left(\frac{1}{y} - 1 \right) &= 1 - \frac{1}{x} \\ y' &= \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - 1}\end{aligned}$$

Lo siguiente será derivar y' , pero antes de eso conviene simplificarla:

$$y' = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - 1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1-y}{y}} = \frac{xy - y}{x - xy}$$

Entonces

$$\begin{aligned}y'' &= \left(\frac{xy - y}{x - xy} \right)' = \frac{(y + xy' - y')(x - xy) - (xy - y)(1 - y - xy')}{(x - xy)^2} \\ &= \dots = \frac{(x^2 - x)y' + y - y^2}{(x - xy)^2} = \frac{(x^2 - x)\left[\frac{xy - y}{x - xy}\right] + y - y^2}{(x - xy)^2} \\ &= \frac{x^2y - 2xy + 2y - 2y^2 + y^3}{x^2(1 - y)^3}\end{aligned}$$

Calcule la derivada que se indica

255. $(t^2 - 5e^{3t})''$

256. $(\sqrt{x^2 + 1})''$

257. $\left(\frac{r}{1 - r} \right)'''$

258. $(u^2 - 5u + \sqrt{u} + u^{-1})^{(4)}$

259. $(\ln p)^{(6)}$

260. $\left(\frac{4}{\sqrt{1 - s}} \right)^{(2)}$

261. $(9 \sin \beta - 7 \cos \beta)^{(97)}$

262. $(\tan w)'''$

263. $(v \csc v)''$

264. d^2y/dx^2 si $y = 3x^5 - 4x^2 + 3x + 1$

265. d^3z/dq^3 si $z = e^{1-4q}$

266. d^5q/dw^5 si $q = 4w^2 - 6w - 9$

267. d^2x/ds^2 si $x = \frac{1 - 2s}{1 + 2s}$

268. $d^{40}r/d\theta^{40}$ si $r = \sin 2\theta$

269. d^2y/dx^2 en $(-1, 4)$ si $x^2 - xy = 5$

270. d^2q/dp^2 en $(0, 2)$ si $q + p \ln q = 2$

271. d^2r/dt^2 si $r^3 + t^3 = 1$

272. d^4x/dt^4 si $x + t + e^{x+t} = 1$

273. d^2z/dw^2 si $z^2 = e^{w+z}$

274. $d^2\beta/d\alpha^2$ si $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 1$

275. d^2x/dy^2 en $(0, \pi/6)$ si $(x + 2) \operatorname{sen} y = \cos x$

CAPÍTULO 3

Optimización

3.1 Extremos locales

Recuerde que una recta con pendiente positiva es creciente, y una con pendiente negativa es decreciente. Como la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función, se tienen las siguientes relaciones:

- Si $f'(x) \geq 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f es creciente en I .
- Si $f'(x) \leq 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f es decreciente en I .

Los *puntos críticos* de una función f son los valores de x en el dominio de f donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. Si f está definida en un intervalo abierto, y alcanza un extremo (máximo o mínimo) local¹ en $x = c$, entonces c debe ser un punto crítico de f .

El *Criterio de la primera derivada* dice que si c es un punto crítico de f , entonces:

- Si f' cambia de signo positivo a negativo en c , $f(c)$ es un máximo local.
- Si f' cambia de negativo a positivo en c , $f(c)$ es un mínimo local.
- Si f' no cambia de signo en c , f no alcanza un extremo en c .

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x - 1 + x^2 - x^3$. Su derivada es $f'(x) = 1 + 2x - 3x^2 = (3x + 1)(1 - x)$, con los siguientes signos:

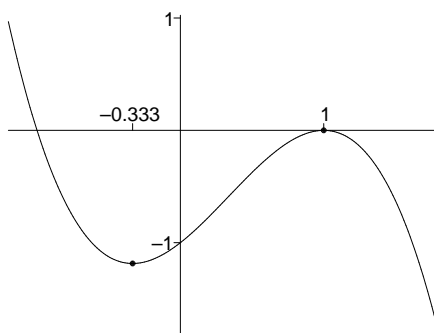
$$f': \quad \begin{array}{ccccccc} & - & 0 & + & 0 & - & \\ & & | & & | & & \\ & & -1/3 & & 1 & & \end{array}$$

Entonces f es creciente en $[-1/3, 1]$, y es decreciente en $]-\infty, -1/3]$ y en $[1, \infty[$. Alcanza un mínimo local en $x = -1/3$ y un máximo local en $x = 1$. El valor mínimo local es $f(-1/3) = -32/27$ y el valor máximo es $f(1) = 0$. El punto mínimo es $(-1/3, -32/27)$ y el punto máximo es $(1, 0)$. └

Parte de la importancia del análisis de los signos de y' está en que no es necesario conocer el gráfico de la función para averiguar dónde es creciente/decreciente ni dónde alcanza sus extremos locales.

¹Un punto (x, y) es un extremo local si es el punto más alto o más bajo entre los que están cerca. Por ejemplo, en el gráfico del Ejemplo 1, $(-0.3, -1)$ es un mínimo local, aunque no es el punto más bajo de todo el gráfico (hay otros más bajos a la derecha).

Solo por referencia, veamos el gráfico de la función f del ejemplo anterior:



En el ejemplo anterior dijimos que f decrece en $]-\infty, -1/3]$ y en $[1, \infty[$, no que decrece en la *unión* de esos intervalos. Aunque $f'(x) \leq 0$ en $]-\infty, -1/3] \cup [1, \infty[$, no podemos decir que f sea decreciente allí, porque ese conjunto no es un intervalo. Las propiedades “ $f'(x) \geq 0$ en $I \Rightarrow f$ crece en I ” y “ $f'(x) \leq 0$ en $I \Rightarrow f$ decrece en I ” son válidas solamente si I es un intervalo.

Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente, y los extremos locales

1. $1 - 4u - u^2$

2. $y^3 - 3y - 2$

3. $r^2(3 - r)$

4. $s^4 + 4s^3 + 4s^2$

5. $4w^2 - 2 - 3w^4$

6. $8u^3 - 18u^2 - u^4$

7. $5z^{2/3} + z^{5/3}$

8. $\sin \alpha - \alpha$

9. $\arctan x$

10. $\frac{w^2 - 5w}{\sqrt[3]{w}}$

11. $\sqrt[5]{r}$

12. $u\sqrt{u+1}$

13. $\frac{v+1}{v^2+v+1}$

14. $\frac{1}{3t-4}$

15. $\frac{y}{y^2+1}$

16. xe^x

17. z^3e^z

18. $6e^{4s-s^2}$

19. $e^y + e^{-y}$

20. $x^2 + xe^{-x} + e^{-x}$

21. $5y^2 - 2e^y(y-1)$

22. $2q^2 - 2\ln q$

23. $t^2 \ln t$

24. $(3r^3 - 81r) \ln r + 81r - r^3$

3.2 Concavidad

Si $f''(x) \geq 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f es cóncava hacia arriba en I . Si $f''(x) \leq 0$ para todo x en I , entonces f es cóncava hacia abajo en I . Un *punto de inflexión* es un punto donde cambia la concavidad del gráfico. En los puntos de inflexión, $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ está indefinida.

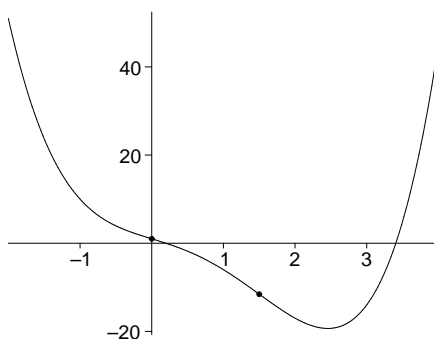
Ejemplo 2

Sea $g(t) = t^4 - 3t^3 - 5t + 1$. Sus dos primeras derivadas son $g'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 5$ y $g''(t) = 12t^2 - 18t = 12t(t - 3/2)$. El mapa de signos de g'' es

$$g'': \quad \begin{array}{ccccccc} & + & 0 & - & 0 & + & \\ & & | & & | & & \\ & & 0 & & 3/2 & & \end{array}$$

Entonces g es cóncava hacia arriba en $]-\infty, 0]$ y en $[3/2, \infty[$, y cóncava hacia abajo en $[0, 3/2]$. Hay dos puntos de inflexión: $(0, 1)$ y $(3/2, -185/16)$.

Compare los resultados del ejemplo anterior con el gráfico de la función g :



Encuentre los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, y los puntos de inflexión

25. $6y^2 - y^3 - 9y - 1$

26. $z^4 - 6z^2$

27. $(v + 1)^4$

28. $3 - 11p - p^2 - 2p^4$

29. $\frac{q}{q - 2}$

30. $\frac{s^2}{s^2 + 3}$

31. $\frac{t^3}{t^2 - 4}$

32. $w^{1/3}$

33. $y\sqrt{y + 3}$

34. $\frac{v^3}{\sqrt{4 + v}}$

35. $x \ln x - x^2$

36. $(y^2 + 1)e^y$

37. $\ln(r^2 + 1)$

38. $q^2 \ln q$

39. $u^2 - \cos u$

40. $\alpha^2 - 5\alpha + 3 \cos \alpha$ para $\alpha \in [-\pi, \pi]$

41. $2 \cos y - \sin y$ para $y \in [0, 2\pi]$

3.3 Criterio de la segunda derivada

El criterio de la primera derivada nos dio una forma de averiguar si en un punto crítico se alcanza un máximo o un mínimo, o si no hay un extremo. Una alternativa es el *Criterio de la segunda derivada*, que dice que si c es un punto crítico de f , entonces:

- Si $f''(c) > 0$, f alcanza un mínimo local en c .
- Si $f''(c) < 0$, f alcanza un máximo local en c .

Ejemplo 3

Si $g(t) = 2t^3 - 17t^2 + 40t - 3$, entonces $g'(t) = 2(3t - 5)(t - 4)$ y $g''(t) = 12t - 34$. Los puntos críticos de g son $t = 5/3$ y $t = 4$.

En $t = 5/3$, $g''(t) = -14 < 0$, así que $g(5/3)$ es un máximo local.

En $t = 4$, $g''(t) = 14 > 0$, por lo que $g(4)$ es un mínimo local.

Ejemplo 4

Para $h(x) = x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x$ se tiene $h'(x) = 5(x + 3)(x - 1)^3$ y $h''(x) = 20(x - 1)^2(x + 2)$. Los puntos críticos son $x = -3$ y $x = 1$.

En $x = -3$, $h''(x) = -320 < 0$, de modo que h alcanza un máximo en -3 .

En $x = 1$, $h''(x) = 0$, así que el criterio de la segunda derivada no se aplica. Pero como h' cambia de signo negativo a positivo en 1, por el criterio de la primera derivada se concluye que h alcanza un mínimo en 1.

Encuentre los extremos locales

42. $2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

43. $3u^4 - 4u^3 + 1$

44. $4z^5 - 5z^4 + 2$

45. $r - 3\sqrt[3]{r}$

46. $\frac{u^2}{u - 1}$

47. $\frac{p^2 - 2p + 2}{p - 1}$

48. $\frac{v^2}{v^2 + 1}$

49. $\sqrt{s^2 + 1}$

50. $2r\sqrt{r + 3}$

51. $v^2 e^v$

52. $x^2 + e^{4-x^2}$

53. $z - \ln z$

54. $\ln(t^2 + 5)$

55. $y - \arctan 5y$

56. $3r + 7 \sin r - 4$ para $r \in [0, 2\pi]$

57. $1 - 2x + 5 \cos x$ para $x \in [-\pi, \pi]$

3.4 Extremos absolutos

Si una función f es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. Esos extremos absolutos se alcanzan en algún punto crítico, en a o en b .

Ejemplo 5

Encontrar los extremos absolutos de $h(v) = v^3 - 3v^2 - 9v$ en $[1, 5]$.

Los puntos críticos se encuentran resolviendo

$$0 = h'(v) = 3v^2 - 6v - 9 = 3(v + 1)(v - 3)$$

Las soluciones son $v = -1$ y $v = 3$, pero $v = -1$ está fuera del intervalo de interés.

Los extremos absolutos se pueden alcanzar entonces en $v = 3$ (punto crítico), $v = 1$ (punto inicial del intervalo) o $v = 5$ (punto final del intervalo). Sabiendo eso, es suficiente comparar los valores de h en esos tres puntos:

v	1	3	5
$h(v)$	-11	-27	5

En la tabla es claro que el máximo es $h(5) = 5$ y que el mínimo es $h(3) = -27$. _____

Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo dado

58. $2z^2 + 6z - 3$ en $[-2, 3]$

68. t^2/e^t en $[-1/2, 1]$

59. $2p^3 + 3p^2 - 12p + 1$ en $[-1, 5]$

69. $y \ln y - 2y$ en $[1, 4]$

60. $2p^3 + 3p^2 - 12p + 1$ en $[-10, 12]$

70. $t^2(2 \ln t - 3)$ en $[1, 4]$

61. $-3r^4 + 4r^3 + 72r^2$ en $[-3, 2]$

71. $\frac{\ln(r+1)}{r+1}$ en $[0, 5]$

62. $\frac{t}{t^2+1}$ en $[0, 2]$

72. $\cos 4\theta$ en $[-\pi/2, \pi/2]$

63. $\frac{7x}{x-2}$ en $[3, 5]$

73. $2 \sin 3w + 3w$ en $[0, \pi]$

64. $\sqrt{9-w^2}$ en $[-1, 2]$

74. $2 \sin \beta - 3 \cos \beta$ en $[-\pi, \pi]$

65. $\frac{q+1}{\sqrt{q^2+5}}$ en $[-2, 2]$

75. $2 \ln u - u$ en $[1, \infty[$

76. $\frac{r}{e^r}$ en $[0, \infty[$

66. $p^{4/5}$ en $[-32, 1]$

77. $q^4 - 2q^3 - 2q^2$ en \mathbb{R}

67. $x e^{-x}$ en $[0, 1]$

78. $z e^{-3z}$ en \mathbb{R}

3.5 Optimización

La *optimización*, en nuestro contexto, es el proceso de búsqueda del valor óptimo de una función, que puede ser el máximo o el mínimo según el caso. Se acostumbra llamar *función objetivo* a la función por optimizar (maximizar o minimizar).

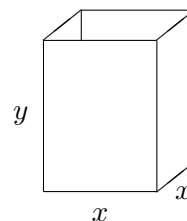
Para resolver problemas aplicados de optimización pueden darse los siguientes pasos:

1. Identificar las variables.
2. Plantear la función objetivo.
3. Plantear una o varias ecuaciones que relacionen las variables.
4. Escribir la función objetivo en términos de una sola variable.
5. Optimizar la función objetivo.
6. Responder la pregunta que se planteó.

3.5.1 Problemas generales

Ejemplo 6

Se dispone de 500 cm^2 de material para construir una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada. ¿Con cuáles dimensiones se obtiene el volumen máximo, aprovechando todo el material disponible?



1. Las variables son x = el lado de la base, que es cuadrada, y y = la altura de la caja, ambas en cm.
2. El objetivo es maximizar el volumen, $V = x^2y$.
3. La superficie debe ser 500 cm^2 . Como la base mide x^2 y cada uno de los cuatro lados verticales mide xy , entonces la superficie es $x^2 + 4xy = 500$.
4. De la ecuación en el paso anterior podemos despejar x o y . Se ve más fácil despejar y :

$$x^2 + 4xy = 500 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{500 - x^2}{4x} = 125x^{-1} - \frac{1}{4}x$$

Entonces la función objetivo es

$$V = x^2(125x^{-1} - \frac{1}{4}x) = 125x - \frac{1}{4}x^3$$

5. Puntos críticos: $V' = 125 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{500/3}$, pero como x es una longitud, debe ser positiva: $x = \sqrt{500/3} \approx 12.910$.
Confirmamos que hay un máximo calculando $V'' = -\frac{3}{2}x$ y evaluando $V''(\sqrt{500/3}) \approx -19.4 < 0$: en efecto hay un máximo en $x = \sqrt{500/3}$.
6. Dimensiones de la caja: $x = \sqrt{500/3} \Rightarrow y = \sqrt{125/3} \approx 6.455$, así que el lado de la base debe medir 12.910 cm y la altura 6.455 cm.

En el paso 5, optimizar, hay dos posibles variaciones:

- En el ejemplo anterior usamos el criterio de la segunda derivada para confirmar que lo que teníamos era un máximo. A veces se puede plantear la función objetivo dentro de un dominio cerrado y finito, y buscar su máximo absoluto allí como en la Sección 3.4. Vea el Ejemplo 7 en esta sección.
- A veces es posible, pero *solamente si la función objetivo es cuadrática*, usar lo que sabemos sobre parábolas: que su valor extremo se encuentra en el vértice y que es un máximo o un mínimo dependiendo de la concavidad. Vea el Ejemplo 8 (página 67), pero ya puede usar esa idea en algunos de los ejercicios de esta sección.

Ejemplo 7

En el ejemplo anterior, es claro que $0 \leq x \leq \sqrt{500}$ (la primera desigualdad se debe a que x es una longitud; la segunda a que el material disponible es 500 cm^2 , lo que no permite una base mayor que $\sqrt{500} \times \sqrt{500}$). Entonces el dominio es $[0, \sqrt{500}]$, y buscamos el máximo absoluto entre los puntos críticos y los bordes del dominio.

Pero de los dos puntos críticos, $x = \pm 12.91$, solamente $x = 12.91$ pertenece al dominio $[0, \sqrt{500}] \approx [0, 22.36]$. Entonces el máximo absoluto se encuentra a partir de la siguiente tabla:

x	0	12.91	$\sqrt{500}$
$V(x)$	0	1075.83	0

Así confirmamos, por otro método, que el máximo se alcanza en $x = 12.91$.

Resuelva

- Encuentre dos números cuya suma sea 200 y cuyo producto sea máximo.
- Encuentre dos números cuya diferencia sea 50 y su producto sea mínimo.
- Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 192 y su suma sea mínima.
- Encuentre dos números en $[1, 10]$ cuyo producto sea 10 y su diferencia sea máxima.
- Encuentre dos números en $[-10, 10]$ cuya suma sea 0 y su producto sea mínimo.
- El dueño de un automóvil determina que el costo en colones por kilómetro al conducir su vehículo a una velocidad de v km/h es $C = 0.015v^2 - 2.5v + 120$. Encuentre la velocidad más económica.
- Un objeto es arrojado al aire de manera que su altura h (en metros) sobre el terreno, t segundos después de lanzado, es $h = 14t - 5t^2$. Encuentre la altura máxima alcanzada.
- El dueño de una fábrica de refrescos sabe que su ganancia (en miles de colones semanales), como función del número x de cajas de refrescos vendidas, está dada por la ecuación $G = -0.01x^2 + 9x - 1296$. ¿Cuántas cajas debe vender semanalmente para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima?

87. La tasa de crecimiento de una población es $C(t) = 2t^3 - 11t^2 + 12t + 5$, donde t es el número de meses desde el 10 de abril del 2000. ¿Aproximadamente en qué fechas se alcanzaron las tasas de crecimiento máxima y mínima durante los primeros dos meses ($0 \leq t \leq 2$)?
88. La función de costo promedio de un fabricante está dada por $\bar{C} = 0.25q + 3 + 400q^{-1}$, donde q es el número de unidades producidas. ¿A qué nivel de producción es mínimo el costo promedio? ¿Cuál es ese costo promedio mínimo?
89. El costo administrativo de un pedido de n unidades de un producto es

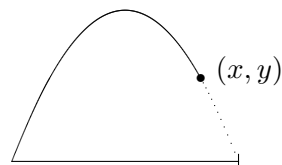
$$C = \frac{2}{n^2} + \frac{10n}{10n + 3}$$

en miles de dólares. ¿Cuál es el tamaño del pedido que minimiza el costo administrativo?

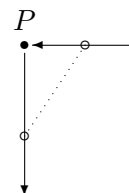
90. Demuestre que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
91. Demuestre que $\sin x \leq x$ para todo $x \geq 0$.
92. Demuestre que $\cos x \geq 1 - x^2/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
93. Un grupo de personas quiere alquilar un autobús para un viaje. Si viajan hasta 40 personas, la cuota de cada una será \$3000. Por cada pasajero adicional a los primeros 40, la cuota por pasajero se rebaja en \$50 para cada uno (por ejemplo, si viajan 42 personas, la cuota será \$2900 para cada una de las 42 personas). La capacidad del autobús es de 60 pasajeros. ¿Cuál número de pasajeros minimiza la cuota por persona?
94. La ecuación de demanda² para cierto producto es $3q + 100p - 1800 = 0$, donde p es el precio unitario y q el número de unidades vendidas. Determine el nivel de producción que maximiza el ingreso del fabricante para este producto (el ingreso es $I = pq$).
95. La ecuación de demanda² para cierto producto es $p = \frac{3}{5}(650 - q)$, donde p es el precio unitario en dólares y q el número de unidades vendidas por semana. La capacidad máxima de producción es de 300 unidades semanales, y el costo de producción es de \$24 por unidad. ¿Qué cantidad debe producirse por semana para maximizar la utilidad? ¿Cuánto es la utilidad semanal máxima? (La utilidad es el ingreso menos el costo, y el ingreso es pq .)
96. Un camión consume $0.002x$ litros de gasolina por kilómetro cuando viaja a x km/h, para $70 \leq x \leq 100$. Suponga que la gasolina cuesta \$1.20 por litro, y que el salario del conductor es \$6 por hora. ¿Cuál velocidad, entre 70 y 100 km/h, minimiza el costo total (gasolina más salario) de un viaje de 700 km?
97. Cuando un foco ilumina un objeto, la iluminación es directamente proporcional a la intensidad (potencia) del foco e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el foco y el objeto (iluminación = $k \cdot \text{intensidad}/\text{distancia}^2$, donde k es alguna constante). Si se colocan dos focos, uno de ellos con el doble de intensidad del otro y a 2 m entre ellos, ¿en qué punto entre ellos debe colocarse un objeto para que reciba la menor iluminación posible?

²Una ecuación de demanda relaciona el precio p de venta de un producto con el número q de unidades que se espera vender a ese precio.

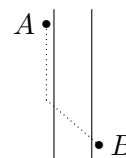
98. Se lanza un proyectil desde el suelo a 20 m/s y con un ángulo de elevación θ (en radianes). Luego de t segundos su posición, en metros, está dada por las coordenadas (x, y) , donde $x = 20t \cos \theta$ y $y = 20t \sin \theta - 4.9t^2$. ¿Cuál ángulo de elevación maximiza el alcance (es decir, el valor de x cuando el objeto cae al suelo)? ¿Cuál es el alcance máximo?



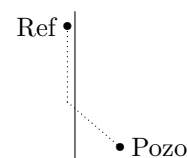
99. Un avión pasa sobre un punto P a las 8 am y se dirige hacia el sur a 600 km/h. Otro avión vuela de este a oeste a 450 km/h y pasa sobre el punto P a las 9 am. ¿A qué hora están más cerca los dos aviones?



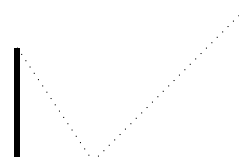
100. Una persona está en el punto A en la orilla de un río recto de 50 m de ancho, y quiere llegar al punto B , en la orilla opuesta y 75 m río abajo. Puede correr a 250 m/min por su lado del río para luego nadar a 30 m/min en línea recta hasta llegar a B . Desestimando la corriente del río, ¿qué distancia debe correr antes de entrar al agua, y qué distancia nadar, de modo que minimice el tiempo total? ¿Cuánto es el tiempo mínimo?



101. Un pozo petrolero marítimo está bajo el mar, a 1500 m de la costa. La refinería está sobre la costa, a 3 km del punto más cercano al pozo. Instalar la tubería cuesta en el mar el doble de lo que cuesta en tierra. ¿Qué ruta debe seguir el oleoducto del pozo a la refinería para minimizar el costo total?



102. Un poste vertical de 8 m y otro de 12 m de altura están a 40 m de distancia entre ellos. Un cable está atado al extremo superior de cada poste y a un punto en el suelo entre los dos postes. ¿En qué punto del suelo debe atarse para minimizar la cantidad de cable? ¿Cuál es la cantidad mínima de cable?



103. Encuentre los valores de b y c para que $f(x) = x^2 + bx + c$ alcance un mínimo en $(1, 3)$.

104. Encuentre los valores de a y b para que $(-0.6, 3.6)$ sea un punto crítico de $g(t) = a \cos t + b \sin t$.

3.5.2 Problemas de aumento/reducción

En algunos problemas se tiene que una cantidad aumenta mientras otra disminuye, y se desea encontrar el equilibrio óptimo entre ambas. Un caso típico puede ser que conforme un precio aumenta la cantidad vendida disminuye, o viceversa, y se quiere maximizar el ingreso. En problemas así, ayuda plantear ambas cantidades en términos de una tercera variable y definir la función objetivo también en términos de ella.

Es común en estos problemas que la función objetivo resulte ser cuadrática, en cuyo caso podemos encontrar su máximo o mínimo en el vértice, sin necesidad de derivar.

Ejemplo 8

Un agricultor estima que si cosecha papas ahora obtendrá 180 kg con valor de \$300 el kilo. Si espera, la cosecha se incrementará en 30 kg por semana, pero el precio disminuirá en

₡20 por semana. ¿Cuándo debe cosechar para obtener el máximo ingreso? ¿Cuánto es ese máximo ingreso?

1. Las dos variables principales son el número de kilos cosechados y el precio en colones por kilo; llamémoslas q y p respectivamente. Pero el problema se simplifica grandemente al añadir la variable n = el número de semanas por esperar.
2. El objetivo es maximizar el ingreso: $I = pq$.
3. La cosecha aumenta: $q = 180 + 30n$; el precio disminuye: $p = 300 - 20n$.
4. En términos de n , la función objetivo es

$$I = pq = (300 - 20n)(180 + 30n) = -600n^2 + 5400n + 54000$$

5. Como I es cuadrática y cóncava hacia abajo (porque $a = -600$, negativo), su máximo se alcanza en el vértice: $n_v = -b/(2a) = -5400/(-1200) = 4.5$.
6. Debe esperar 4.5 semanas. El ingreso será $I(4.5) = 66\,150$ colones.

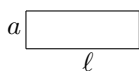
Resuelva

105. Entre más bombillos se conectan en un mismo circuito eléctrico, menor es la luminosidad de cada uno, según la fórmula $L = 1500 - 18n$ donde L es la luminosidad, en lúmenes, y n el número de bombillos conectados. ¿Cuántos bombillos deberán conectarse para maximizar la luminosidad total?
106. Una revista vende 10 000 ejemplares a ₡1500 cada uno. Puede vender 100 más por cada ₡10 que disminuya el precio (por ejemplo, a ₡1480 venderán 200 más). Determine a qué precio se maximizará el ingreso.
107. Una compañía de televisión por cable da servicio actualmente a 5000 usuarios y cobra ₡16 000 mensuales a cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada disminución de ₡100 en la tarifa mensual se suscribirán 40 nuevos clientes (por ejemplo, si rebajan ₡300 se suscribirán 120 nuevos clientes). Determine la cuota mensual que resulta en un ingreso mensual máximo.
108. Una fábrica de computadoras ha estado vendiendo 1000 unidades de cierto modelo por semana, a \$600 cada una. Un estudio de mercado indica que podrían vender 80 unidades más por semana por cada \$10 de descuento en el precio.
 - (a) ¿Qué precio deben fijar para maximizar sus ingresos?
 - (b) Si el costo de producir x unidades por semana es $C(x) = 65000 + 200x$, ¿qué precio maximizará las utilidades? (La utilidad es el ingreso menos el costo.)
109. Un fabricante vende su producto a ₡900 la unidad, mientras que el costo unitario de producción es de ₡600. Para favorecer los pedidos de más de 100 unidades, por cada unidad adicional a 100 el precio unitario se reduce en ₡2 para todas las unidades. ¿Cuál tamaño de pedido maximiza la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima? (La utilidad es el ingreso menos el costo.)

- 110.** La edición dominical de un periódico vende 150 000 ejemplares a ₡500 cada uno. Se ha determinado que por cada rebaja de ₡10 en el precio, las ventas aumentarán en 5000 ejemplares. Sin embargo, la capacidad de producción es de 180 000 ejemplares como máximo. ¿Qué precio deben fijar para maximizar el ingreso? ¿Cuánto es el ingreso máximo?
- 111.** Una tienda de alquiler de videos cobra ₡1500 por película si el cliente alquila cinco videos o menos. Pero si el cliente alquila más de cinco, el precio de cada película disminuye en ₡150 por cada video adicional. ¿Cuánto es el máximo ingreso que puede tener la empresa en un alquiler?
- 112.** Un agricultor calcula que si siembra 120 árboles por hectárea, entonces cada árbol adulto dará 600 naranjas al año. Por cada árbol más que plante por hectárea, la producción de cada árbol adulto disminuye en tres naranjas al año. ¿Cuántos árboles debe plantar por hectárea para obtener el mayor número posible de naranjas al año, por hectárea?
- 113.** Si el número de turistas que hace un recorrido en autobús a una ciudad es treinta o menos, la empresa de transportes cobra \$10 por persona. Por cada persona adicional a las primeras treinta se reduce el cobro en \$0.40 por persona. ¿Cuál número de turistas maximiza el ingreso de la empresa por viaje, si la capacidad del bus es de sesenta pasajeros?
- 114.** Una agencia de viajes está negociando con una aerolínea el alquiler de un avión. El avión tiene capacidad para 320 pasajeros, y la aerolínea pide a la agencia vender un mínimo de 200 tiquetes. La aerolínea cobra a la agencia \$250 por persona si la agencia vende 200 tiquetes, pero por cada persona adicional rebajan en \$1 el costo de cada tiquete. ¿Cuántos tiquetes debe vender la agencia para minimizar su costo total?
- 115.** En una ciudad, el tren subterráneo tiene una tarifa de \$1.80 y es usado por 5000 personas diariamente. Se está considerando un incremento en la tarifa, y se ha determinado que por cada \$0.20 de incremento habrá 1000 pasajeros menos al día. ¿Qué tarifa debe fijarse para maximizar los ingresos diarios?
- 116.** Un capataz de construcción sabe que si paga el salario mínimo podrá contratar a diez peones para la obra que está dirigiendo, y que cada uno rendirá un 100% de su capacidad. Por cada 5% adicional que pague sobre el salario mínimo podrá contratar a un peón más. Sin embargo, por cada peón adicional a los diez primeros, el rendimiento de cada uno se reducirá en un 2% (porque se distraen, conversan y se estorban entre ellos). ¿Qué porcentaje del salario mínimo deberá pagar para maximizar el rendimiento total?

3.5.3 Problemas que involucran áreas o volúmenes

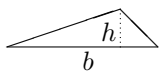
Para los problemas que involucran figuras geométricas, recuerde las siguientes fórmulas:



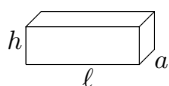
En un rectángulo con largo ℓ y ancho a , el área es $A = \ell \cdot a$ y el perímetro es $P = 2\ell + 2a$.



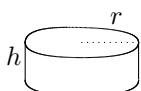
En un círculo con radio r , el área es $A = \pi r^2$ y el perímetro (circunferencia) es $C = 2\pi r$.



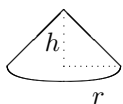
En un triángulo con base b y altura h el área es $A = \frac{1}{2}bh$.



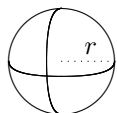
El volumen de un prisma con lados ℓ , a y h es $V = \ell \cdot a \cdot h$.



El volumen de un cilindro con radio basal r y altura h es $V = \pi r^2 h$. El área lateral es $A = 2\pi r h$.



El volumen de un cono circular recto con radio basal r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. El área lateral es $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.



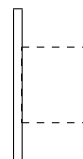
El volumen de una esfera con radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Su superficie es $S = 4\pi r^2$.

Resuelva

- 117.** Se desea cercar una superficie de 60 000 m² en forma rectangular, para después dividirla en dos mitades con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo y en qué dirección debe ir la división para minimizar el costo de la cerca?

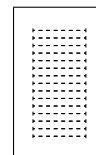


- 118.** Se dispone de 120 m de cerca para rodear un terreno rectangular. Se usará un muro existente en uno de los lados del terreno, y se cercarán los otros tres lados. Calcule las dimensiones que encierran una área máxima.



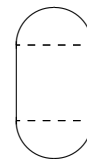
- 119.** Se dispone de \$300 para cercar una área rectangular contigua a una pared existente. El costo de la cerca paralela a la pared es \$15/m, y el de los otros dos lados es \$10/m. Encuentre las dimensiones del rectángulo que maximizan el área encerrada.

- 120.** El diseñador gráfico en una imprenta decide que las páginas de un libro tendrán márgenes superior e inferior de 3 cm, y derecho e izquierdo de 2.5 cm, y que la hoja tendrá una superficie de 600 cm². ¿Qué dimensiones de la hoja maximizan el área impresa?

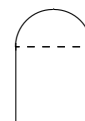


- 121.** El diseñador gráfico en una imprenta decide que las páginas de un libro tendrán márgenes superior e inferior de 3 cm, y derecho e izquierdo de 2.5 cm, y que el área impresa debe medir 360 cm². ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel?

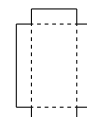
- 122.** El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (en la figura, la pista es el perímetro). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.



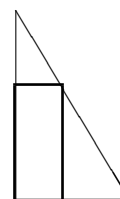
- 123.** Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo arriba. Si el perímetro debe medir 6 m, ¿cuáles dimensiones maximizan la superficie total de la ventana?



- 124.** Una caja se construye a partir de un cartón de $10\text{ cm} \times 16\text{ cm}$, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas. ¿Qué tamaño de cuadrado da el máximo volumen?



- 125.** Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa del triángulo.



- 126.** Una cuerda de 40 cm se corta en dos partes para formar un círculo con la primera parte y un cuadrado con la segunda. ¿Cuántos centímetros deben usarse para el círculo y cuántos para el cuadrado de modo que la suma de las áreas sea máxima? ¿Cuántos para que la suma de las áreas sea mínima?

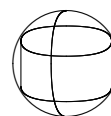
- 127.** ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con área 20 y con la diagonal más corta posible?

- 128.** ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con diagonal 10 y el área máxima posible?

- 129.** Una lata cilíndrica con tapa debe contener 225 cm^3 de líquido. El costo por cm^2 de material es de 15 céntimos para el fondo y la tapa, y 10 céntimos para la pared lateral. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan el costo de los materiales? ¿Cuál es el costo mínimo?

- 130.** Una caja sin tapa y con base cuadrada debe tener un volumen de 32 dm^3 (vea la figura del Ejemplo 6, página 64). Encuentre las dimensiones que minimizan la cantidad de material.

- 131.** ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio 5?



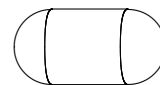
- 132.** ¿Cuáles son las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio 5?



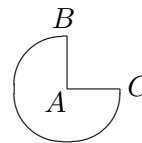
- 133.** Un envase circular se construye poniendo una semiesfera en un extremo de un cilindro circular recto. El envase, incluyendo la semiesfera, debe tener una capacidad de 1.8 litros. ¿Cuáles dimensiones minimizan la cantidad de material requerido?



- 134.** Un tanque se construye poniendo una semiesfera en cada extremo de un cilindro circular recto. El tanque debe tener un volumen de 4.2 m^3 . El costo del material para los extremos semiesféricos es el triple del costo del material para el tubo cilíndrico. ¿Cuáles dimensiones minimizan el costo total?



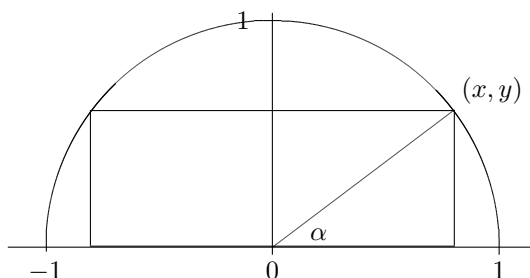
- 135.** Un cono para beber se fabrica a partir de una pieza circular de papel de radio 10 cm, recortando un sector circular y uniendo los segmentos AB y AC en el dibujo. ¿Cuál es la capacidad máxima del cono?



3.5.4 Problemas en el plano cartesiano

Ejemplo 9

La ecuación $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geq 0$, describe en el plano cartesiano una semicircunferencia con radio 1 y centro en el origen. ¿Cuál es el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en esa circunferencia?



Hay al menos dos opciones para plantear este problema. En la primera, la variable principal es x , la coordenada del lado derecho del rectángulo.

1. Sean b y h la base y la altura, respectivamente, y (x, y) las coordenadas de la esquina superior derecha del rectángulo.
2. El objetivo es maximizar el área, $A = bh$.
3. Tenemos $b = 2x$, $h = y$, y $x^2 + y^2 = 1$, de donde despejamos $y = \sqrt{1 - x^2}$.
4. Entonces $A = (2x)(y) = 2x\sqrt{1 - x^2}$, en la que podemos restringir x al intervalo $[0, 1]$.
5. La derivada de la función objetivo es $A' = (2 - 4x^2)/\sqrt{1 - x^2}$ y sus ceros son $x = \pm 1$ y $x = \pm\sqrt{0.5}$. Solo los positivos están en el intervalo $[0, 1]$, y ahí se alcanzan los valores

x	0	$\sqrt{0.5}$	1
A	0	1	0

6. Entonces el área máxima es $A = 1$.

Otra opción es tomar como variable el ángulo α entre el eje X positivo y el segmento desde el origen hasta la esquina superior derecha.

1. Sean b y h la base y la altura, (x, y) las coordenadas de la esquina superior derecha y α el ángulo mencionado, como se indica en la figura.

2. El objetivo es maximizar $A = bh$.
3. Ahora $x = \cos \alpha$ y $y = \sin \alpha$, y como antes, $b = 2x$ y $h = y$, de modo que la función objetivo es $A = (2x)(y) = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$, con α en $[0, \pi/2]$.
4. La derivada de A es ahora $A' = 2 \cos 2\alpha$ y el único punto crítico en $[0, \pi/2]$ es $\alpha = \pi/4$. Entonces tenemos

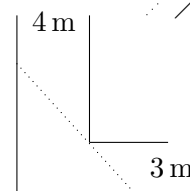
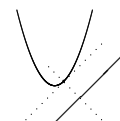
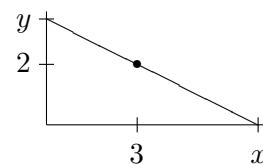
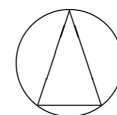
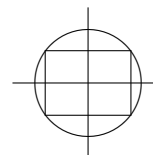
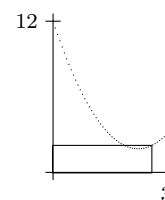
α	0	$\pi/4$	$\pi/2$
A	0	1	0

5. De nuevo, el área máxima es $A = 1$.



Resuelva

136. ¿Cuál es el punto de la recta $y = 3x + 2$ que está más cerca del origen?
137. ¿Cuál es el punto de la parábola $y = x^2 + 1$ más cercano al punto $(1, 0)$?
138. ¿Cuál es el punto en el gráfico de $y = \sqrt{x}$ más cercano al punto $(4, 0)$?
139. Un rectángulo tiene un vértice en $(0, 0)$, un lado sobre el eje X y otro lado sobre el eje Y. El vértice opuesto a $(0, 0)$ está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo?
140. La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ describe en el plano cartesiano una circunferencia de radio 3 con centro en el origen. ¿Cuál es el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en esa circunferencia?
141. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio 5?
142. Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene sus catetos sobre los ejes X y Y, y su hipotenusa pasa por el punto $(3, 2)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices que maximizan su área?
143. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 2)$ y forma con los ejes cartesianos un triángulo en el primer cuadrante de área mínima?
144. ¿Cuál es la distancia mínima entre la parábola P con ecuación $y = x^2$ y la recta R con ecuación $y = x - 1$?
145. Un pasillo tiene un segmento de 3 m de ancho que se une con otro segmento de 4 m de ancho formando un ángulo recto. ¿Cuánto mide la barra recta más larga que puede pasar de un segmento al otro sin atascarse?



Otras aplicaciones de las derivadas

4.1 La regla de L'Hôpital

Algunos límites en formas indeterminadas no pueden resolverse simplificando, factorizando, racionalizando ni usando ninguna de las técnicas que vimos en el Capítulo 1. Considere, por ejemplo, los límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{z} + \ln z \right)$$

en los que ningún procedimiento algebraico resuelve el problema.

Muchos de esos límites algebraicamente indeterminados pueden calcularse usando la regla de L'Hôpital, que involucra las derivadas de las funciones que aparecen en el límite.

La *regla de L'Hôpital* dice que si el límite $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$ o la forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (sin importar a cuánto tiende x); esto es, si $f(x) \rightarrow 0$ y $g(x) \rightarrow 0$ o bien $f(x) \rightarrow \pm\infty$ y $g(x) \rightarrow \pm\infty$, entonces

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 1

El límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t}$ es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, así que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)'}{(t)'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1/t}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Para límites de la forma $0 \cdot \infty$ el producto puede convertirse en un cociente de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Específicamente, un producto $u \cdot v$ se reescribe como $\frac{u}{v^{-1}}$ o como $\frac{v}{u^{-1}}$ para usar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2

El límite $\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y$ tiene la forma $0 \cdot \infty$ (en realidad $\ln y \rightarrow -\infty$, pero el signo no afecta la forma). Entonces el producto $y \ln y$ puede escribirse como $\frac{\ln y}{y^{-1}}$ para calcular el límite de esta manera¹:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{y^{-1}} \quad \left(= \frac{-\infty}{\infty} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(\ln y)'}{(y^{-1})'} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1/y}{-y^{-2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} -y = 0 \end{aligned}$$

¹También se puede escribir $y \ln y = \frac{y}{(\ln y)^{-1}}$, pero así es más complicado derivar.

En este ejemplo note, después de derivar, que la fracción $\frac{1/y}{y^{-2}}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $y \rightarrow 0^+$. Pero en vez de usar L'Hôpital otra vez, es mejor simplificar algebraicamente (restando exponentes). En algunos casos sí será necesario usar L'Hôpital varias veces.

Para la forma $\infty - \infty$ se puede separar uno de los términos como factor común para conseguir una fracción de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. En general, la expresión $u - v$ puede escribirse como $u(1 - \frac{v}{u})$ o como $v(\frac{u}{v} - 1)$.

Ejemplo 3

Sea $\lim_{x \rightarrow \infty} x - e^x$ es de la forma $\infty - \infty$. Sacando x como factor común se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x} \right)$$

Por aparte, la fracción $\frac{e^x}{x}$ tiende a $\frac{\infty}{\infty}$, así que su límite es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

Regresando al límite original, tenemos entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x} \right) = \infty(1 - \infty) = -\infty$$

Ejemplo 4

Sea $L = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1}{1 - \sin \theta} + \tan \theta$.

Como $1 - \sin(\pi/2) = 0$ y $\tan \pi/2 = \pm\infty$, necesitamos investigar el límite por los dos lados.

Por la izquierda tenemos

$$L^- = \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^+} = \infty$$

sin más trabajo. Pero por la derecha,

$$L^+ = \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-} = \infty - \infty$$

que es indeterminado.

Podemos tomar denominador común y convertir el límite en uno de la forma $0/0$:

$$L^+ = \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{\cos \theta + \sin \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} = \frac{0}{0}$$

Usando L'Hôpital,

$$L^+ = \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{-\sin \theta + \cos \theta(1 - \sin \theta) - \sin \theta \cos \theta}{-\cos \theta \cos \theta - (1 - \sin \theta) \sin \theta} = \frac{-1 + 0 + 0}{0 - 0} = \pm \infty$$

El signo depende de si el denominador es positivo o negativo. Evaluándolo en un valor de θ un poco a la derecha de $\pi/2$, digamos $\theta = 1.58$, obtenemos aproximadamente -0.000127 , negativo. Entonces $L^+ = +\infty$.

Resulta entonces que el límite es igual por la izquierda y por la derecha: $L = \infty$. _____

Para las formas exponenciales indeterminadas ∞^0 , 1^∞ y 0^0 se puede calcular primero el logaritmo del límite, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

El límite $M = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ es de la forma 1^∞ . Calculemos primero su logaritmo natural:

$$\begin{aligned} \ln M &= \ln \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \end{aligned}$$

Ahora este es de la forma $\frac{0}{0}$, y entonces aplicamos L'Hôpital:

$$\ln M = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+h)]'}{(h)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/(1+h)}{1} = 1$$

Así es que $\ln M = 1$, por lo que, finalmente, $M = e^1 = e$. _____

Este método tiene cierta analogía con la diferenciación logarítmica, en la que primero se toma logaritmo de la función, luego se simplifica el logaritmo, después se deriva el logaritmo y por último se despeja la derivada de la función original. Básicamente ese es el procedimiento aquí: tomar logaritmo del límite, simplificar el logaritmo, calcular el límite del logaritmo y despejar el límite original.

En resumen:

Para la(s) forma(s)...	Intente...
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	Usar la regla de L'Hôpital
$0 \cdot \infty$	Escribir $u \cdot v$ como $\frac{u}{v^{-1}}$ o $\frac{v}{u^{-1}}$
$\infty - \infty$	Escribir $u - v$ como $u(1 - \frac{v}{u})$ o $v(\frac{u}{v} - 1)$
$\infty^0, 0^0, 1^\infty$	Calcular el límite del logaritmo

Calcule

1. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 2y^2 - y + 2}{y^3 - 7y + 6}$

2. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v + 1}{4v^2 + v}$

3. $\lim_{p \rightarrow 3} \frac{\sqrt{p+1} - 2}{p - 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

5. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{2t}}{t}$

6. $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^w - w - 1}{w^2}$

7. $\lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{r^2}{e^{-r}}$

8. $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{e^w}{w^5}$

9. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 2^t}{t}$

10. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln z}{\sqrt[3]{z}}$

11. $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\ln q}{q}$

12. $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u^2 - 1}$

13. $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{(\ln w)^3}{w^2}$

14. $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^s}{\ln s}$

15. $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/r}}{\ln r}$

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$

17. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\ln(1 + 2e^t)}$

18. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{\sin z}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2}}{x}$

20. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sec y - 1}{y \sec y}$

21. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^3}$

22. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2u}{1 - \cos u}$

23. $\lim_{w \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{\tan w}{\ln(2w - \pi)}$

24. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \csc(\pi\alpha)$

25. $\lim_{v \rightarrow \pi/2} \sin(\cos v) \sec v$

26. $\lim_{r \rightarrow 1} (1 - r) \tan(\pi r/2)$

27. $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u \ln(u - 1)$

28. $\lim_{y \rightarrow \infty} y e^{-y^2}$

29. $\lim_{r \rightarrow 0} r^4 e^{-1/r}$

30. $\lim_{v \rightarrow 0^+} v^2 \ln v$

31. $\lim_{z \rightarrow -\infty} z e^z$

32. $\lim_{v \rightarrow \infty} e^{-v} \ln v$

33. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

34. $\lim_{y \rightarrow \infty} y \ln \left(\frac{y}{1 + y} \right)$

35. $\lim_{r \rightarrow 0^+} (e^r - 1) \ln r$

36. $\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left(e^{1/t} - \frac{5}{t} \right)$

37. $\lim_{p \rightarrow \infty} p - \ln p$

38. $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{1/t} - t$

39. $\lim_{y \rightarrow \infty} 3^y - 2^y$

$$40. \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z} + \ln z$$

$$41. \lim_{s \rightarrow -\infty} s + e^{-s}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6}$$

$$43. \lim_{p \rightarrow 1} \frac{1}{2(1 - \sqrt{p})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{p})}$$

$$44. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t-1} - \frac{1}{\ln t}$$

$$45. \lim_{s \rightarrow 1} \frac{3}{\ln s} - \frac{2}{s-1}$$

$$46. \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} - \frac{1}{e^q - 1}$$

$$47. \lim_{t \rightarrow 0^+} \csc t - \ln t$$

$$48. \lim_{\beta \rightarrow 0} \csc \beta - \cot \beta$$

$$49. \lim_{r \rightarrow \pi/2} r \tan r - \frac{\pi}{2} \sec r$$

$$50. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \csc \alpha - \alpha^{-1}$$

$$51. \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1/y}$$

$$52. \lim_{r \rightarrow 1} r^{1/(1-r)}$$

$$53. \lim_{q \rightarrow 0} q^{3/(4+\ln q)}$$

$$54. \lim_{t \rightarrow 0} (1-t)^{1/t}$$

$$55. \lim_{w \rightarrow 0} (1-2w)^{1/w}$$

$$56. \lim_{u \rightarrow 0} (1+u^2)^{1/u}$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)^x$$

$$58. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\sqrt{x-1}}$$

$$59. \lim_{z \rightarrow 0} z^{\ln(1+z)}$$

$$60. \lim_{q \rightarrow \infty} (10^q + q)^{1/q}$$

$$61. \lim_{y \rightarrow \infty} (e^y + y)^{3/y}$$

$$62. \lim_{r \rightarrow 1} (\ln r)^{1-r}$$

$$63. \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

$$64. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$$

$$65. \lim_{s \rightarrow \infty} (s^{-2} + 3s^{-1} + 1)^s$$

$$66. \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan t)^{2t-\pi}$$

$$67. \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\cot \alpha)^{\sec \alpha}$$

$$68. \lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r)^{\cos(r\pi/2)}$$

$$69. \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec \theta)^{\sec \theta}$$

$$70. \lim_{u \rightarrow 0^+} (u+1)^{\ln u}$$

$$71. \lim_{v \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-v}{v}\right)^{\ln v}$$

$$72. \lim_{t \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{t+1}$$

$$73. \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y-1}$$

$$74. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

con r y t constantes, $t > 0$

4.2 Asíntotas

Una recta asíntota al gráfico de $y = f(x)$ es una recta a la cual la curva se aproxima conforme $x \rightarrow \pm\infty$ o bien conforme $y \rightarrow \pm\infty$ (o ambos). Hay tres tipos de rectas asíntotas.

- Horizontal: Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ entonces la recta $y = b$ es una asíntota horizontal.
- Vertical: Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical².
- Oblicua: Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = b$ entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua.

El gráfico en el Ejemplo 9 (que empieza en la página 83) muestra una asíntota vertical y una oblicua, y el del Ejemplo 10 (empezando en la página 84) muestra una vertical y dos horizontales.

Las asíntotas horizontales y las oblicuas son excluyentes: si un gráfico tiene una asíntota horizontal en ∞ o en $-\infty$, no puede tener una oblicua ahí mismo (pero sí es posible tener una horizontal en ∞ y una oblicua en $-\infty$, o viceversa; vea el Ejercicio 100).

Ejemplo 6

El gráfico de $h(u) = \frac{3u-1}{u+2}$ tiene:

- ¿Asíntotas horizontales?
 $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} h(u) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{3u}{u} = 3$, por lo que la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.
- ¿Asíntotas verticales? Por el denominador, el límite podría ser infinito en -2 :
 $\lim_{u \rightarrow -2} h(u) = \frac{-7}{0} = \pm\infty$ (el signo depende de si $u \rightarrow -2^+$ o $u \rightarrow -2^-$, pero en cualquier caso el límite es infinito), así que la recta $u = -2$ es una asíntota vertical.
- ¿Asíntotas oblicuas?
 Como hay asíntotas horizontales en $\pm\infty$, el gráfico no tiene asíntotas oblicuas. _____

Ejemplo 7

Para $p(t) = \frac{5t^2 + \ln(1-t)}{t}$ empezamos por notar que su dominio es $]-\infty, 1[- \{0\}$.

- ¿Horizontales? Por el dominio, no puede haber asíntota en $+\infty$. Por otro lado,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{5t^2 + \ln(1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{10t - \frac{1}{1-t}}{1} = -\infty$$

(usando L'Hôpital) por lo que tampoco hay asíntota horizontal en $-\infty$.

²La notación $x \rightarrow a^\pm$ indica que $x \rightarrow a$ por la izquierda o por la derecha, así como $\lim = \pm\infty$ significa que el límite puede ser infinito positivo o negativo. En cualquiera de los cuatro casos hay una asíntota vertical.

- ¿Verticales? Hay dos puntos donde el límite podría ser infinito: en $t = 0$ por el denominador, y en $t = 1$ por el logaritmo. Veamos cada uno.

a. $\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = \frac{5 \cdot 0^2 + \ln 1}{0}$, con la forma $0/0$, pero usando L'Hôpital llegamos a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + \ln(1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{10t - \frac{1}{1-t}}{1} = -1$$

Como el límite no es infinito, no hay asíntota vertical en $t = 0$.

b. $\lim_{t \rightarrow 1} p(t) = \frac{5 \cdot 1^2 + \ln 0}{1} = -\infty$, así que la recta $t = 1$ sí es asíntota vertical.

- ¿Oblicuas? Por el dominio, no puede haber una en $+\infty$. Pero en $-\infty$, como no hay asíntota horizontal entonces sí podría haber una oblicua. Primero calculamos

$$m = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{p(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{5t^2 + \ln(1-t)}{t^2} = \dots = 5$$

Si no existiera m ya podríamos estar seguros de que no hay asíntota oblicua. Como sí existe, sigue viva la posibilidad de asíntota, pero depende de que también exista b , que calculamos así:

$$b = \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) - mt = \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) - 5t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{5t^2 + \ln(1-t) - 5t^2}{t} = \dots = 0$$

Ya que sí existen $m = 5$ y $b = 0$, concluimos que la recta $y = 5t$ (de la fórmula $y = mt + b$) es asíntota oblicua en $-\infty$. └

Encuentre las ecuaciones de todas las rectas asíntotas

75. $\frac{4}{w}$

82. $\frac{2z + 3 - z^2}{2z^2 - 3z - 9}$

90. $w + \frac{32}{w^2}$

76. $\frac{t}{t^2 - 4}$

83. $\frac{v}{\sqrt{v^2 + 3}}$

91. $\frac{r^2 - 3r - 1}{r - 2}$

77. $\frac{p}{p^2 + 1}$

84. $\sqrt{\frac{x}{x-3}}$

92. $\frac{u^3 - 1}{u^2 - 1}$

78. $\frac{6 - 2v}{v - 3}$

85. $\frac{e^w + 1}{e^w - 1}$

93. $\frac{t^3}{4 - t^2}$

79. $\frac{2 - r^2}{r^2 + r}$

86. $\frac{1 - \cos x}{x^2}$

94. $\frac{p-1}{p^2+1} - p$

80. $\frac{3s}{s^2 - s - 6}$

87. $\cot t$

95. $u - 2 + \frac{u^2}{u+2}$

81. $\frac{1 - q^3}{1 + q^3}$

89. $\frac{1}{\cos \alpha - 1}$

96. $v - \frac{v^2 - 1}{v^3 + 1}$

$$97. \frac{s^2}{\sqrt{s^2 - 9}}$$

$$100. \frac{x e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$102. \frac{2r^2 + \operatorname{sen} r}{r}$$

$$98. 2q + e^{1-q}$$

$$99. \frac{3t^2 - t - 1 - \ln t^2}{t - 2}$$

$$101. \frac{2z^2 - 2 + \ln(1 - z)}{1 + z}$$

$$103. \frac{w^2 - 1 + \cos 3w}{w + 1}$$

4.3 Trazo de curvas

Para trazar con detalle el gráfico de una función f pueden darse los siguientes pasos:

1. Determinar el dominio.
2. Determinar las intersecciones con los ejes.
3. Encontrar todas las asíntotas al gráfico.
4. Calcular f' y hacer su mapa de signos; indicar los extremos relativos.
5. Calcular f'' y hacer su mapa de signos; indicar los puntos de inflexión.
6. Hacer el cuadro de variación de f .
7. Trazar el gráfico.

Ejemplo 8

Trazar el gráfico de $h(v) = v^3 - 3v^2 - 9v + 27$.

1. El dominio de h es todo \mathbb{R} .
2. Las intersecciones con los ejes son:
 - Con el eje Y : $v = 0 \Rightarrow y = 27$, así que el punto es $(0, 27)$.
 - Con el eje V : $y = 0 \Rightarrow 0 = v^3 - 3v^2 - 9v + 27 = (v + 3)(v - 3)^2 \Rightarrow v = 3$ o $v = -3$, por lo que los puntos son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.
3. El gráfico no tiene asíntotas.
4. $h'(v) = 3v^2 - 6v - 9 = 3(v + 1)(v - 3)$, y sus signos son

$$h': \quad \begin{array}{cccccc} & + & 0 & - & 0 & + \\ & & | & & | & \\ & & -1 & & 3 & \end{array}$$

Hay un máximo en $(-1, 32)$ y un mínimo en $(3, 0)$.





5. $h''(v) = 6v - 6$, con signos

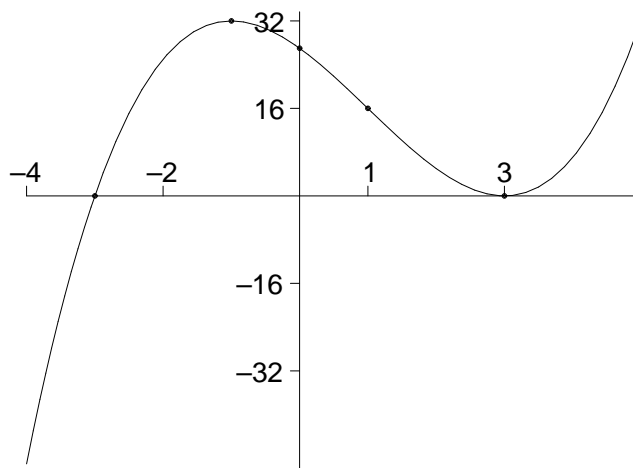
$$h'': \quad \begin{array}{ccc} & - & 0 & + \\ & & | & \\ & & 1 & \end{array}$$

Hay un punto de inflexión en $(1, 16)$.

6. El cuadro de variación es

7. El gráfico es

	$-\infty$	-1	1	3	∞	
h'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
h''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
						



Ejemplo 9

Graficar $y = \frac{1-t^3}{1-t^2}$.

1. El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
2. Las intersecciones con los ejes son
 - Con el eje Y : $t = 0 \Rightarrow y = 1$, de modo que el punto es $(0, 1)$.
 - Con el eje T : $y = 0 \Rightarrow 0 = 1 - t^3 \Rightarrow t = 1$, pero 1 no está en el dominio, así que no hay intersecciones con el eje T .
3. Las asíntotas son $t = -1$ y $y = t$.
4. $y' = t(t+2)/(t+1)^2$, con signos

$$y': \quad \begin{array}{ccccccc} & + & 0 & - & & - & 0 & + \\ & & | & & * & & | & \\ & & -2 & & -1 & & 0 & \end{array}$$

Hay un máximo en $(-2, -3)$ y un mínimo en $(0, 1)$.








5. $y'' = 2/(t+1)^3$, con signos

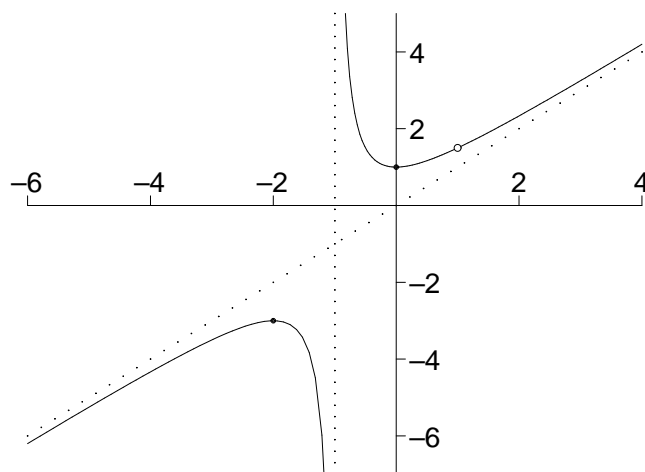
$$y'': \quad \begin{array}{ccc} & - & + \\ & & * \\ & & -1 \end{array}$$

No hay puntos de inflexión.

6. El cuadro de variación de y es

7. El gráfico es

	$-\infty$	-2	-1	0	∞		
y'	$+$	0	$-$	\times	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	\times	$+$	$+$	$+$	$+$
							



Ejemplo 10

Trazar el gráfico de una función g con dominio $\mathbb{R} - \{-3\}$ y con las siguientes condiciones:

- $g(-5) = g(0) = g(6) = 0$ y $g(2) = -2$;
- $g'(2) = 0$, $g'(x) > 0$ si $x < -3$ o $x > 2$, $g'(x) < 0$ si $-3 < x < 2$;
- $g''(5) = 0$, $g''(x) > 0$ si $x < -3$ o $-3 < x < 5$, y $g''(x) < 0$ si $x > 5$;
- $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$.

Toda esa información, aunque aparentemente confusa, simplemente describe algunos puntos del gráfico, su cuadro de variación y sus asíntotas. Veamos.

- Puntos: como $g(-5) = g(0) = g(6) = 0$ y $g(2) = -2$, se deduce que el gráfico pasa por los puntos $(-5, 0)$, $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(2, -2)$.
- Cuadro de variación: g' es positiva en $]-\infty, -3[$ y en $]2, \infty[$, es negativa en $]-3, 2[$ y es cero en $x = 2$:

$$g': \quad \begin{array}{ccccccc} & + & & - & & 0 & + \\ & \text{---} & * & \text{---} & & | & \text{---} \\ & & -3 & & & 2 & \end{array}$$

Luego, g'' es positiva en $]-\infty, -3[$ y en $]-3, 5[$, es negativa en $]5, \infty[$ y es cero en $x = 5$:

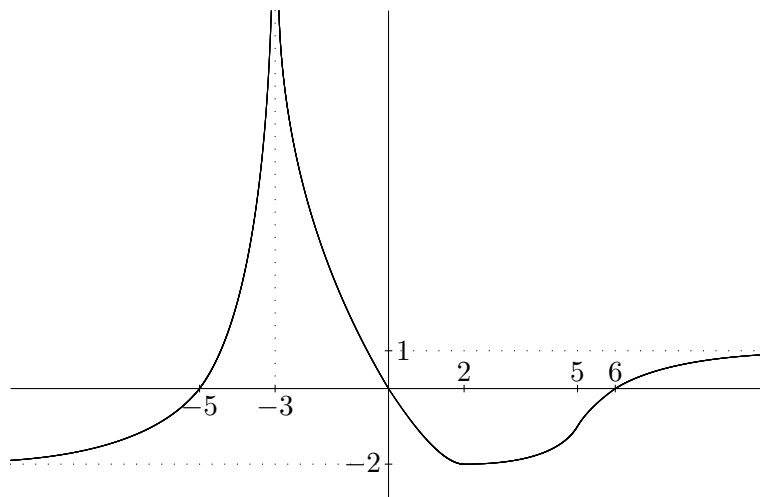
$$g'': \quad \begin{array}{ccccccc} & + & & + & & 0 & - \\ & \text{---} & * & \text{---} & & | & \text{---} \\ & & -3 & & & 5 & \end{array}$$

El cuadro es así:

	$-\infty$	-3	2	5	∞
g'	$+$	\times	$-$	0	$+$
g''	$+$	\times	$+$	$+$	0
	\cup	\cap	\cup	\cup	\cup

- Asíntotas: $x = -3$, $y = -2$ hacia $-\infty$ y $y = 1$ hacia $+\infty$.

Entonces un gráfico posible es



Trace el gráfico de una función que cumpla las condiciones dadas

104. $f(1) = 2$, $f(3) = -1$, $f'(1) = f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$, $f'(x) < 0$ si $1 < x < 3$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
105. $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 2$, $f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$,
 $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$ si $-3 < x < -1$ o $x > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
106. $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) < 0$ si $|x| > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$
107. $f(-2) = 2$, $f(0) = 1$, $f'(-2)$ no existe, $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x < -2$ o $x > 0$, $f'(x) < 0$ si
 $-2 < x < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
108. $\text{dom } f =]0, \infty[- \{2\}$, $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $f'(x) > 0$ si $0 < x < 1$ o
 $x > 2$, $f'(x) < 0$ si $1 < x < 2$
109. $f(0) = f(2) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x < 1$, $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x > 1$, $f''(x) < 0$ para
 todo x
110. $f(2) = -1$, $f'(2) = 1$, $f''(x) > 0$ para $x < 2$, $f''(x) < 0$ para $x > 2$

111. $f(-3) = 4$, $f(3) = 0$, $f'(-3) = f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ para $|x| < 3$, $f'(x) > 0$ para $|x| > 3$,
 $f''(x) < 0$ para $x < 1$, $f''(x) > 0$ para $x > 1$
112. $f(0) = 0$, $f'(0)$ no existe, $f''(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
113. $f(-2) = f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) < 0$ si
 $|x| > 1$, $f''(0) = f''(2) = 0$, $f''(x) > 0$ si $x < 0$ o $x > 2$, $f''(x) < 0$ si $0 < x < 2$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Haga el análisis completo y trace el gráfico

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 114. $r^3 - 12r + 16$ | 127. $\frac{v^2}{\sqrt{v+1}}$ |
| 115. $q^3 - 3q^2$ | 128. $\frac{s}{\sqrt{s^2+2}}$ |
| 116. $7 + 12p + 3p^2 - 2p^3$ | 129. $t - 12\sqrt[3]{t}$ |
| 117. $3x^4 + 4x^3$ | 130. $\frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$ |
| 118. $v^4 - 12v^3 + 48v^2 - 64v + 27$ | 131. $\sqrt{8+w} + 2\sqrt{8-w}$ |
| 119. $\frac{q+2}{q+3}$ | 132. $\sqrt{\frac{x}{x-3}}$ |
| 120. $\frac{t^2}{t-1}$ | 133. $e^p + e^{-p}$ |
| 121. $\frac{w}{w^2-4}$ | 134. $\ln(w+2) - w - 1$ |
| 122. $\frac{2-2v+v^2}{1-v}$ | 135. e^{4x-x^2} |
| 123. $\frac{2p^2+3p}{p+2}$ | 136. $\ln(p^2+1)$ |
| 124. $\frac{x^2-9}{4-x^2}$ | 137. $\frac{3}{1+e^{-q}}$ |
| 125. $\frac{r^2-2r}{(r+1)^2}$ | 138. $\cos \beta$ para $\beta \in [-\pi, \pi]$ |
| 126. $\frac{u^3-4}{u^2}$ | 139. $t - 2 \operatorname{sen} t$ para $t \in [0, 2\pi]$ |
| | 140. $2u - \tan u$ para $u \in]-\pi/2, \pi/2[$ |

4.4 Tasas de cambio relacionadas

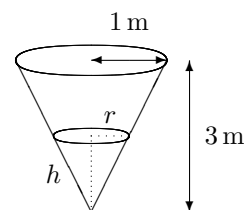
En algunas situaciones se tienen dos cantidades que varían con el tiempo, y sus tasas de cambio están relacionadas por alguna ecuación. Si se conoce la tasa de cambio de una de las variables, generalmente es posible calcular la tasa de cambio de la otra.

Para resolver estos problemas pueden darse los siguientes pasos.

- Planteo:
 1. Identificar las variables.
 2. Identificar las derivadas. ¿Cuál se conoce y cuál se pide?
 3. Encontrar una ecuación que relacione las variables.
- Procedimiento:
 4. Derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo.
 5. Sustituir los valores conocidos y despejar la derivada que se busca.
 6. Responder la pregunta.

Ejemplo 11

Un tanque tiene forma de cono con su vértice en el fondo. Su altura es 3 m y su radio en la tapa es 1 m. El tanque se está llenando con agua a razón de ocho litros por segundo. ¿A qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando alcanza los 2 m?



1. Las dos variables son V , el volumen de agua dentro del tanque, y h , el nivel del agua. Midamos V en dm^3 (que equivalen a litros), h en dm y el tiempo en segundos.
2. Se sabe que $V' = 8$ (ocho litros por segundo equivalen a $8 \text{ dm}^3/\text{s}$), y se pide averiguar h' en el momento en que $h = 20 \text{ dm}$.
3. Definamos r como el radio de la superficie del agua, como en la figura. Entonces

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(recuerde las fórmulas en la página 69). Por semejanza de triángulos notamos que

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$$

así que

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{27}$$

4. Usamos derivación implícita (porque V y h son funciones de t , el tiempo):

$$V' = \frac{3\pi h^2 h'}{27} = \frac{\pi h^2 h'}{9}$$

5. Sabemos que $V' = 8$ y que $h = 20$ en el momento que nos interesa. Entonces

$$8 = \frac{\pi 20^2 h'}{9}$$

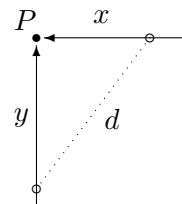
de donde despejamos $h' = (8)(9)/(400\pi) \approx 0.0572958$, en dm/s.

6. El nivel del agua está subiendo aproximadamente 5.73 mm/s.

Algunos problemas pueden involucrar más de dos variables. En ese caso, para encontrar la razón de cambio de una de ellas puede ser necesario conocer todas las demás.

Ejemplo 12

Una línea de tren y una carretera, ambas rectas, forman ángulo recto en el punto P donde se intersecan. Un tren viaja hacia el punto P a 50 km/h y un automóvil viaja hacia el mismo punto a 60 km/h. Los dos llegarán al punto P al mismo tiempo. ¿A qué velocidad disminuye la distancia entre ellos 5 segundos antes del choque?



1. En este caso tenemos tres variables: x la distancia del tren a P , y la distancia del automóvil a P y d la distancia entre ellos.
2. Si medimos las distancias en metros y el tiempo en segundos, entonces conocemos $x' = -13.\bar{8}$ y $y' = -16.\bar{6}$, ambas en m/s, y negativas porque las dos distancias están disminuyendo (13. $\bar{8}$ m/s y 16. $\bar{6}$ m/s equivalen a 50 km/h y 60 km/h, respectivamente). El problema pide calcular d' .
3. Por el teorema de Pitágoras es claro que $d^2 = x^2 + y^2$.
4. Derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$2dd' = 2xx' + 2yy'$$

5. Conocemos x' y y' , y sabemos que d' es la incógnita. Pero todavía necesitamos determinar x , y y d para terminar de sustituir.

Como faltan 5 s para el choque, $x = 5(13.\bar{8}) = 69.\bar{4}$ y $y = 5(16.\bar{6}) = 83.\bar{3}$, ambos en metros. Además, $d = \sqrt{x^2 + y^2} \approx 108.476$, también en metros.

Entonces

$$2(108.476)d' = 2(69.\bar{4})(-13.\bar{8}) + 2(83.\bar{3})(-16.\bar{6}) = -4706.79$$

y de allí despejamos $d' = -21.6951$.

6. En ese momento la velocidad entre ellos disminuye a 21.6951 m/s.

Resuelva

141. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada en una pared vertical. Su extremo inferior resbala, alejándose de la pared a 25 cm/s. ¿A qué velocidad se desliza por la pared el extremo superior de la escalera cuando le faltan 2 m para llegar al suelo?
142. Un hombre está parado en el borde de un muelle, remolcando hacia sí con una cuerda una lancha. Él recoge la cuerda a 40 cm/s, y sus manos se mantienen 2 m más altas que el punto en que la cuerda está atada a la lancha. ¿A qué velocidad se acerca la lancha al muelle cuando le faltan 3 m para llegar?

- 143.** Un poste vertical de 6 m de altura ilumina una calle horizontal. Una persona de 1.7 m de estatura camina hacia el poste a 100 m/min. ¿Cuál es la velocidad, en m/s, del extremo de la sombra cuando la persona está a 4 m del poste?
- 144.** Una piedra cae en una laguna, creando una onda circular que crece centrada en el punto de contacto. El radio de la onda aumenta a 30 cm/s. ¿A qué velocidad crece el área del círculo encerrado por la onda cuando su radio es 1 m?
- 145.** Un globo esférico se llena con agua a razón de 100 cm^3 por segundo. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el volumen es 1000 cm^3 ?
- 146.** Una esfera de hielo se derrite de manera tal que su superficie decrece a 2 cm^2 por minuto. ¿A qué velocidad disminuye el radio de la esfera cuando es 15 cm?
- 147.** Conforme una gota esférica de lluvia cae, se evapora a una tasa proporcional a su superficie. Muestre que el radio decrece con una velocidad constante.
- 148.** Un tanque cónico tiene su vértice abajo, y mide 2 m de altura y 2 m de radio en la parte superior. Por su extremo inferior está saliendo agua a razón de 25 litros por segundo. Al mismo tiempo, al tanque le entra agua por su parte superior a una tasa constante de litros por segundo. Si el nivel de agua desciende a 5 mm/s cuando es igual a un metro, ¿a qué tasa le está entrando agua al tanque?
- 149.** Se está depositando arena en una pila cónica creciente cuyo diámetro en la base se mantiene igual a su altura. Si la arena se deposita a 0.8 m^3 por minuto, ¿a qué velocidad, en cm/s, está aumentando la altura de la pila cuando llega a un metro?
- 150.** Una canoa de desagüe mide tres metros de largo, y sus extremos son triángulos isósceles de 10 cm de altura y 10 cm de base, con su vértice hacia abajo. Si la canoa está recibiendo agua a $50 \text{ cm}^3/\text{s}$ y esta agua no sale, ¿a qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando ha alcanzado los 8 cm?
- 151.** Una piscina mide 12 m de largo y 6 m de ancho. Su profundidad es 1.2 m en un extremo y 2.7 m en el otro extremo, aumentando en línea recta de un extremo al otro. Si se bombea agua en la piscina a 3 m^3 por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando es 1 m en el extremo más profundo?
- 152.** Una escalera de 4 m de longitud está apoyada en una pared vertical. Su extremo inferior resbala, alejándose de la pared a 25 cm/s. ¿A qué velocidad aumenta el ángulo entre la pared y la escalera cuando el extremo superior está 2 m sobre el suelo?
- 153.** Un poste vertical de 5 m de altura arroja una sombra cuya longitud varía conforme el sol se mueve alrededor de la Tierra³. Suponiendo que el sol se dirige hacia el cenit (el punto más alto en la esfera celeste, directamente sobre el poste), ¿qué tan rápido disminuye la longitud de la sombra cuando es igual a un metro?

³Claro que es la Tierra la que se mueve alrededor del Sol, pero podemos tomar como referencia un punto fijo en la Tierra y suponer que es el Sol el que gira.

- 154.** Una ambulancia está detenida a 13 m de una larga pared recta. La luz en el techo de la ambulancia gira a 40 revoluciones por minuto, y su proyección se mueve a lo largo de la pared. ¿Con qué velocidad se mueve la proyección cuando el rayo de luz forma un ángulo de 30° con la pared?
- 155.** Un avión vuela a una altura constante de 10 000 m sobre terreno horizontal, en línea recta y a velocidad constante. Un radar en tierra, delante del avión, percibe un ángulo de elevación que aumenta a 0.5° por segundo cuando el avión está a 14 km de distancia del radar. ¿Cuál es la velocidad del avión?
- 156.** Un avión vuela a 400 km/h elevándose con un ángulo de 20° . Cuando alcanza una altura de 2500 m, ¿a qué velocidad está cambiando la distancia entre el avión y el punto P en la tierra directamente debajo de él? (Suponga que ese punto es fijo y que no se mueve con el avión.)

5.1 La integral indefinida

Si f es una función, una *antiderivada* de f es una función F cuya derivada es f ; es decir, una función F tal que $F' = f$. Por ejemplo, una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, y una antiderivada de $g(t) = 1 + t^3$ es $G(t) = t + \frac{1}{4}t^4$. Pero las antiderivadas no son únicas. Otras antiderivadas de $f(x) = 2x$ son $x^2 + 1$, $x^2 - 3$ y en general $x^2 + C$ para cualquier constante C .

La *integral indefinida* de $f(x)$, denotada $\int f(x) dx$, es la familia de todas las antiderivadas de $f(x)$. En los ejemplos recién mencionados,

$$\int f(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

y

$$\int g(t) dt = \int (1 + t^3) dt = t + \frac{1}{4}t^4 + C$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es cualquier constante, llamada la *constante de integración*.

Algunas fórmulas importantes:

- $\int k dx = kx + C$ si k es constante
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$ para $b > 0$, $b \neq 1$
- $\int [af(x) + bg(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$ para $a, b \in \mathbb{R}$

También, de las fórmulas de derivadas de funciones trigonométricas y trigonométricas inversas obtenemos, omitiendo la constante de integración en cada caso:

$$\begin{array}{lll}
 \bullet \int \cos x \, dx = \sin x & \bullet \int \sec x \tan x \, dx = \sec x & \bullet \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \\
 \bullet \int \sin x \, dx = -\cos x & \bullet \int \csc^2 x \, dx = -\cot x & \bullet \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x \\
 \bullet \int \sec^2 x \, dx = \tan x & \bullet \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x & \bullet \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \pm \operatorname{arcsec} x
 \end{array}$$

(en esta última, el signo es $+$ si $x > 0$ o $-$ si $x < 0$).

Ejemplo 1

La integral de $2\sqrt{u} - 5^u + \frac{3}{u}$ es

$$\begin{aligned}
 \int (2\sqrt{u} - 5^u + 3u^{-1}) du &= 2 \int u^{1/2} du - \int 5^u du + 3 \int u^{-1} du \\
 &= 2 \frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{5^u}{\ln 5} + 3 \ln |u| + C \\
 &= \frac{4}{3} u^{3/2} - \frac{1}{\ln 5} 5^u + 3 \ln |u| + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encontrar una función h tal que $h'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$ y que $h(2) = -1$.

Sabemos que h es una antiderivada de h' , así que

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \int \frac{x^2 - 4}{2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2} - 2x^{-2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2}x - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2}x + 2x^{-1} + C
 \end{aligned}$$

donde C es alguna constante que falta determinar. Para eso usamos el dato $h(2) = -1$:

$$-1 = h(2) = \frac{1}{2}(2) + 2(2)^{-1} + C = 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -3$$

Entonces la solución es $h(x) = \frac{1}{2}x + 2x^{-1} - 3$.

Calcule

1. $\int 5 \, du$

2. $\int 6y \, dy$

3. $\int (2t + \sqrt{3}) \, dt$

4. $\int (3w^2 + 8w - 4) \, dw$

5. $\int (2x^3 - 5x + 1) \, dx$

6. $\int (6q^3 - q^{2/3} + 5q^{-2}) \, dq$

7. $\int (3 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta) \, d\theta$

8. $\int (\cos z + 3 \sec^2 z) \, dz$

9. $\int \left(\frac{2}{t} - 5 + \sec t \tan t \right) \, dt$

10. $\int (5r^4 + \csc r \cot r) \, dr$

11. $\int (\sqrt{r} + 1)(3r + 4r^{-1}) \, dr$

12. $\int p^2(5p - \sqrt[3]{p}) \, dp$

13. $\int \left(\sqrt{u} + \frac{3}{\sqrt{u}} \right) \, du$

14. $\int \frac{5s^2 - 3s + 1}{2\sqrt{s}} \, ds$

15. $\int \frac{(2v - 1)^2}{3\sqrt{v^3}} \, dv$

16. $\int \left(\frac{2}{t^2} + \frac{1}{3t^5} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \, dt$

17. $\int \left(\frac{4}{t^2} + \frac{3}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \, dt$

18. $\int \frac{13s^{14} - 5s^6 + 2s}{4s^2} \, ds$

19. $\int \left(\frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + 2 \right) \frac{5}{z} \, dz$

20. $\int \frac{(w^2 - 2)(w^2 + 2)}{4w^3} \, dw$

21. $\int \frac{(w^2 - 3)(w^2 + 6)}{3w^3} \, dw$

22. $\int (3x^2 - e^x) \, dx$

23. $\int \frac{e^r - 2r}{5} \, dr$

24. $\int (e^v + v^e) \, dv$

25. $\int (t^3 - 3^t) \, dt$

26. $\int (2^z - (1/2)^z) \, dz$

27. $\int (10^w - 1)^2 \, dw$

28. $\int 4e^{2u} \, du$

29. $\int \frac{e^t + e^{-t}}{2} \, dt$

30. $\int \frac{6^x - 4 \cdot 15^x}{3^{2x}} \, dx$

31. $\int (e^v - 2)^3 \, dv$

32. $\int \frac{(e^q - 1)(e^q + 1)}{e^q} \, dq$

33. $\int \frac{2}{3y^2 + 3} \, dy$

34. $\int \frac{12}{\sqrt{9 - (3u)^2}} \, du$

Encuentre la función que cumple las condiciones dadas

35. $y' = 6s - 7$, $y(2) = 1$
36. $p' = 2\sqrt{w} + 1$, $p(1) = 4$
37. $r' = 5z^4 + \frac{2}{z}$, $r(-1) = 0$
38. $w' = 2q - 6e^q$, $w(1) = 1$
39. $u' = 2 + 5 \cos \beta$, $u(\pi/2) = \pi$
40. $w' = x - 1/(x^2 + 1)$, $w(1) = \pi/4$
41. $z'' = 6r^2 + 2 + r^{-2}$, $z'(-1) = -1$, $z(1) = 1/2$
42. $d^2y/dv^2 = 0$, $y'(0) = -3$, $y(-4) = 13$
43. $u'' = -18z$, $u(-1) = 10$, $u(1) = -6$
44. $q'' = 12t^2 - 12t - e^t$, $q'(1) = -1 - e$, $q(1) = 0$
45. $v''' = 2p^{-5/3}$, $v''(1) = 0$, $v'(1) = v(0) = -2$
46. $z''' = 30 - \cos \theta$, $z'(0) = 1$, $z'(\pi/2) = 4\pi^2$, $z(0) = -1$

Resuelva

47. El conductor de un automóvil aplica los frenos y su velocidad, t segundos después, es $v(t) = 16 - 3t$ en m/s. ¿Qué distancia recorre durante los siguientes 4 s?
48. Un objeto se deja caer desde una altura de 40 m, y su velocidad t segundos después será $v(t) = -9.8t$ m/s. Encuentre una fórmula para $h(t)$, la altura a los t segundos. ¿Cuánto tarda el objeto en caer al suelo? ¿Con qué velocidad golpea el suelo?
49. Un objeto se mueve acelerando y desacelerando de modo que su velocidad a los t segundos es $v(t) = t - 0.8 \sin t$. ¿Qué distancia recorre durante los primeros 10 s?
50. Conforme un globo esférico se infla, su radio crece a una tasa de $8/(1 + t^2)$ cm/s, donde t es el número de segundos desde que empezó a inflarse. Si el radio inicial es 0 cm, ¿qué volumen alcanza luego de dos segundos?
51. Se estima que el número de afiliados a cierto servicio aumenta a razón de $100 + 210t^{3/4}$ por mes, a los t meses de iniciarse el servicio (por ejemplo, con $t = 1$, el primer mes se afilian $100 + 210(1)^{3/4} = 310$ nuevos clientes; con $t = 2$, el segundo mes se afilian $100 + 210(2)^{3/4} \approx 453$ clientes más). Si ya 3500 personas se habían afiliado en el momento en que se inició el servicio, encuentre una función que dé el número de afiliados a los t meses. ¿Cuántos afiliados habrá al final del primer año?
52. Sea $P(t)$ la población de Costa Rica t años después de 1900. La tasa de crecimiento de la población durante ese siglo fue $P'(t) = 6037 \cdot 1.02973^t$. Suponiendo que $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = 0$, encuentre una fórmula para $P(t)$. ¿Cuánto fue la población estimada en el año 1984?

5.2 La integral definida

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la *integral definida* de f desde a hasta b , denotada $\int_a^b f(x) dx$, representa el área entre el eje X y el gráfico de f desde a hasta b .

El *Primer teorema fundamental del Cálculo* establece que si F es cualquier antiderivada de f entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Las integrales definidas cumplen estas propiedades:

- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ para cualquier $c \in [a, b]$
- $\int_c^c f(x) dx = 0$ para cualquier $c \in [a, b]$

Ejemplo 3

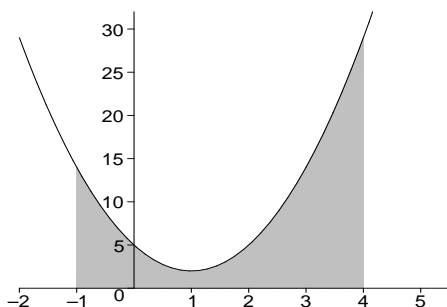
Para calcular la integral definida de $g(t) = 3t^2 - 6t + 5$ en el intervalo $[-1, 4]$ se necesita encontrar una antiderivada de g , como

$$G(t) = \int (3t^2 - 6t + 5) dt = t^3 - 3t^2 + 5t$$

No hace falta escribir el tradicional $+ C$ en la fórmula de $G(t)$, porque para la integral definida se usa cualquier antiderivada de g . La función $G(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$ es una de muchas antiderivadas, la más sencilla, y con ella basta. Entonces

$$\int_{-1}^4 (3t^2 - 6t + 5) dt = G(4) - G(-1) = (36) - (-9) = 45$$

El valor de la integral del ejemplo anterior es el área entre el eje X y el gráfico de la función sobre el intervalo $[-1, 4]$, como en la siguiente figura.



En la práctica, el procedimiento puede escribirse en forma continua, sin necesidad de encontrar por separado la integral indefinida:

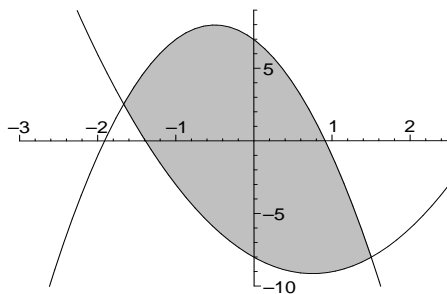
$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (3t^2 - 6t + 5) dt &= (t^3 - 3t^2 + 5t) \Big|_{-1}^4 \\ &= (4^3 - 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4) - ((-1)^3 - 3(-1)^2 + 5(-1)) \\ &= (36) - (-9) = 45\end{aligned}$$

donde la notación $G(t) \Big|_a^b$ representa $G(b) - G(a)$.

Para calcular el área entre dos curvas se integra la diferencia entre las dos funciones: la superior menos la inferior (y si por error se restara la inferior menos la superior, la consecuencia será que el valor de la integral tendrá signo negativo; tomar el valor absoluto del resultado corregirá el error).

Ejemplo 4

Calcular el área encerrada entre las parábolas dadas por $y_1 = 2x^2 - 3x - 8$ y $y_2 = -4x^2 - 4x + 7$, como muestra la figura:



Notamos que el gráfico superior es el de y_2 (porque es cóncavo hacia abajo) y el inferior el de y_1 . Entonces el área será la integral de $y_2 - y_1$ sobre el intervalo entre las dos intersecciones. Los puntos de intersección se encuentran resolviendo $y_1 = y_2$:

$$2x^2 - 3x - 8 = -4x^2 - 4x + 7 \Rightarrow 6x^2 + x - 15 = 0$$

cuyas soluciones son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$, así que el área es

$$A = \int_{-5/3}^{3/2} (y_2 - y_1) dx = \int_{-5/3}^{3/2} (-6x^2 - x + 15) dx = \dots = \frac{6859}{216} \approx 31.755$$

Ejemplo 5

Calcular el área encerrada entre el gráfico de $y_1 = 6x^3 - 9x$ y el de $y_2 = 13x^2 - 10$.

Esta vez no disponemos del gráfico, pero eso no nos detendrá. Los puntos de intersección se encuentran resolviendo $y_1 = y_2$, que lleva a $6x^3 - 13x^2 - 9x + 10 = 0$. Las soluciones, de izquierda a derecha, son $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = \frac{5}{2}$.

Como son más de dos puntos de intersección, necesitamos separar el área en dos partes: A_1 el área desde -1 hasta $\frac{2}{3}$, y A_2 desde $\frac{2}{3}$ hasta $\frac{5}{2}$ (compare con los gráficos de los ejercicios 74 y 75, en la página 100). Lo que resta por averiguar es si en cada parte debe integrarse $y_1 - y_2$ o $y_2 - y_1$.

Para A_1 , en $[-1, \frac{2}{3}]$, podemos tomar un punto de prueba en el intervalo, digamos $x = 0$, y evaluar y_1 y y_2 allí. Como $y_1(0) = 0$ y $y_2(0) = -10$, vemos que $y_1 > y_2$ en $[-1, \frac{2}{3}]$ y que entonces debe integrarse $y_1 - y_2$ (la mayor menos la menor):

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{2/3} (y_1 - y_2) dx = \int_{-1}^{2/3} (6x^3 - 13x^2 - 9x + 10) dx \\ &= \frac{1000}{81} \approx 12.3457 \end{aligned}$$

Para A_2 , en $[\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$, tomemos el punto de prueba $x = 1$. Que $y_1(1) = -3$ y $y_2(1) = 3$ indica que $y_1 < y_2$ en ese intervalo. Entonces integramos $y_2 - y_1$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{2/3}^{5/2} (y_2 - y_1) dx = \int_{2/3}^{5/2} (-6x^3 + 13x^2 + 9x - 10) dx \\ &= \frac{41261}{2592} \approx 15.9186 \end{aligned}$$

Finalmente, el área total es $A_1 + A_2 \approx 28.2643$. └───┘

Una integral definida también puede interpretarse como el incremento en una función a lo largo de un intervalo. Específicamente, si g es una función con derivada g' continua en $[a, b]$, entonces g es una antiderivada de g' , de modo que $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$. Esta última diferencia mide el incremento en g a lo largo del intervalo $[a, b]$: cuánto aumenta el valor de g cuando x varía desde a hasta b . En resumen,

$$\int_a^b g'(x) dx = \text{incremento en } g \text{ a lo largo de } [a, b]$$

(note con cuidado que no es $\int_a^b g$ sino $\int_a^b g'$). Vea el siguiente ejemplo, y use esta idea para resolver los ejercicios 91 y siguientes.

Ejemplo 6

El valor V de un inmueble, en millones de colones, se ha estado incrementando a una tasa $V'(t) = 0.7 \cdot 1.085^t$ por año, donde t es el número de años desde que se compró en el año 2008. ¿En cuánto se incrementó el valor del inmueble entre los años 2012 y 2015?

En el 2012 era $t = 4$, y en el 2015, $t = 7$. Entonces el incremento que buscamos es la diferencia entre $V(4)$ y $V(7)$, los valores del inmueble en los años 2012 y 2015 respectivamente:

$$\begin{aligned} V(7) - V(4) &= \int_4^7 V'(t) dt = \int_4^7 0.7 \cdot 1.085^t dt \\ &= 0.7 \frac{1.085^t}{\ln 1.085} \Big|_4^7 = 15.188769 - 11.891410 \\ &= 3.297359 \end{aligned}$$

en millones de colones: el valor de inmueble se incrementó en ₡3 297 359 durante ese período.

El *Segundo teorema fundamental del Cálculo* dice que si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ para $x \in [a, b]$, entonces $F'(x) = f(x)$. En otros símbolos¹,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Ejemplo 7

a. Si se define $A(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1+u^3} du$ entonces, aunque no podamos calcular $A(x)$, sabemos por el segundo teorema fundamental del Cálculo que $A'(x) = \sqrt{1+x^3}$.

b. Para calcular la derivada de $B(y) = \int_y^5 e^{-t^2} dt$ usamos el hecho de que $\int_a^b = -\int_b^a$:

$$B'(y) = \left(- \int_5^y e^{-t^2} dt \right)' = -e^{-y^2}$$

c. La derivada de $C(u) = \int_2^{u^7} \cos x^2 dx$ se calcula usando la regla de la cadena:

$$C'(u) = \cos((u^7)^2) \cdot 7u^6$$

d. Para derivar la función $D(t) = \int_{4t^2}^{2t^3} \sin(\ln x) dx$ tomamos un c entre $4t^2$ y $2t^3$, constante, y escribimos

$$\begin{aligned} D'(t) &= \left(\int_{4t^2}^{2t^3} \sin(\ln x) dx \right)' = \left(\int_{4t^2}^c \sin(\ln x) dx + \int_c^{2t^3} \sin(\ln x) dx \right)' \\ &= -\sin[\ln(4t^2)] 8t + \sin[\ln(2t^3)] 6t^2 \end{aligned}$$

La cuarta integral en el ejemplo anterior ilustra la *regla de la integral de Leibniz*, que dice que

$$\frac{d}{dx} \int_{p(x)}^{q(x)} f(t) dt = f(q(x)) q'(x) - f(p(x)) p'(x)$$

¹Note que como consecuencia del primer teorema fundamental del Cálculo vimos que $\int_a^b g' = g(b) - g(a)$, que puede interpretarse como que la integral de una derivada es la función original. El segundo teorema fundamental del Cálculo dice ahora que la derivada de una integral es también la función original.

Para finalizar, una advertencia sobre la fórmula $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \pm \operatorname{arcsec} x + C$: si ella se usa en una integral definida, el signo será positivo si $x > 1$ o negativo si $x < -1$ (note que no puede ser $-1 \leq x \leq 1$ por el dominio de la función). Por ejemplo,

$$\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x \Big|_4^6 \quad \text{y} \quad \int_{-10}^{-3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arcsec} x \Big|_{-10}^{-3}$$

Calcule

53. $\int_0^2 (3x^2 - 8x + 6) dx$

54. $\int_{-2}^3 p^3(p - 4p^{-2}) dp$

55. $\int_1^4 (6\sqrt{q} - 2q^{-4}) dq$

56. $\int_4^{12} (4 - 5s\sqrt{s}) ds$

57. $\int_{-8}^8 (u^{1/3} + u^{-1/3}) du$

58. $\int_2^5 \left[r^2 + \frac{1}{(3r)^2} \right] dr$

59. $\int_1^2 \frac{t^2 + 1}{t^3} dt$

60. $\int_{-1}^1 2^v dv$

61. $\int_{-\pi/2}^{\pi} \left[4 \cos r + \operatorname{sen}\left(r - \frac{\pi}{2}\right) \right] dr$

62. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$

63. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$

64. $\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$

65. $\int_3^8 h(t) dt$, donde $h(t) = \begin{cases} 2t-7 & \text{si } t < 5 \\ 8-t & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$

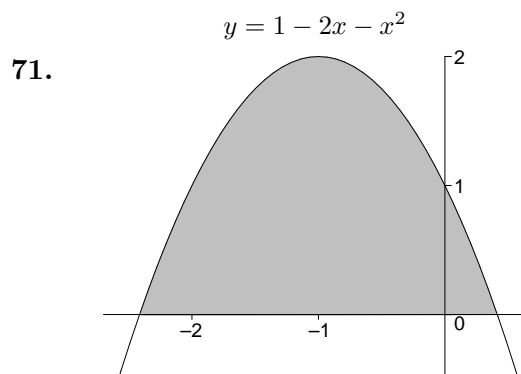
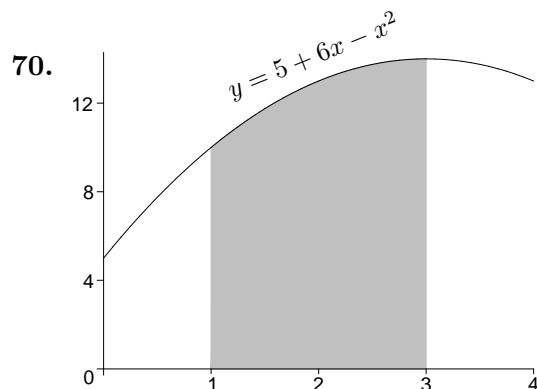
66. $\int_{-2}^3 |y| dy$

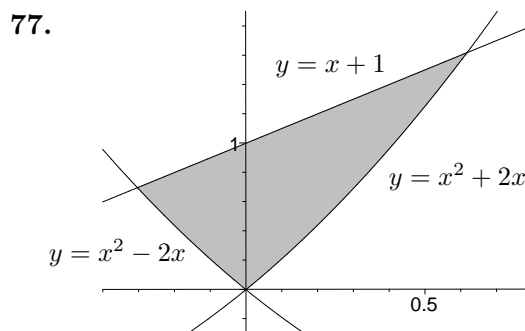
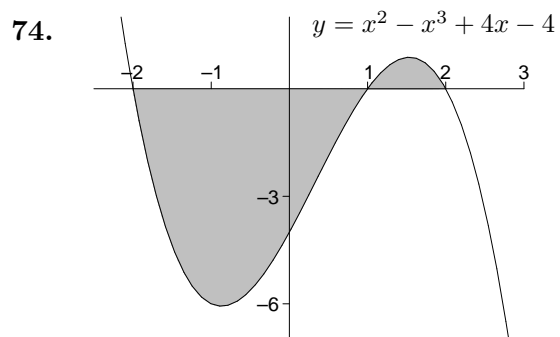
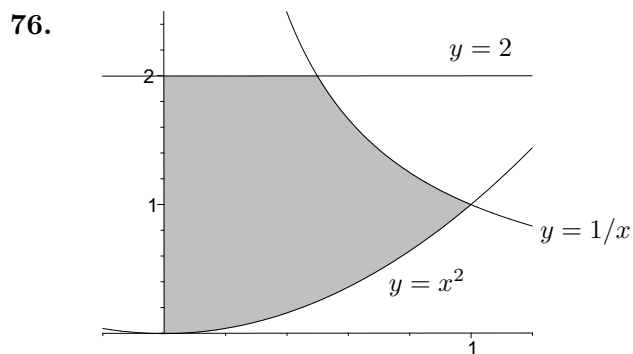
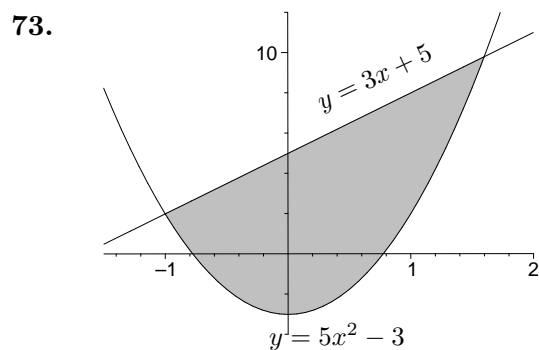
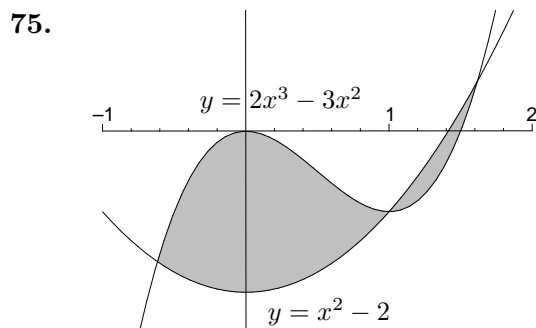
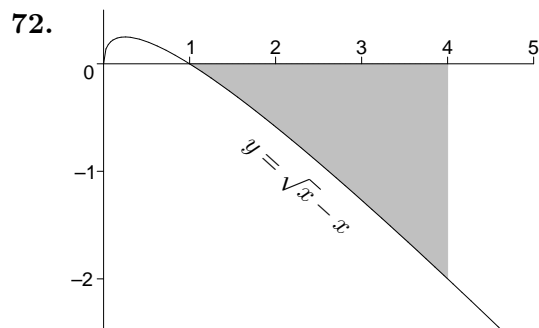
67. $\int_1^5 |6-4u| du$

68. $\int_{-1}^3 (mx+b) dx$

69. $\int_a^{2a} \frac{1}{z} dz$ con $a \neq 0$

Calcule el área sombreada





Calcule el área encerrada entre los gráficos de ...

78. $y = 0$, $y = 1 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$

79. $y = 0$, $y = x^{-2}$, $x = 3$, $x = 5$

80. $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$, $\theta = -3\pi/4$,
 $\theta = \pi/4$

81. $y = \sec t \tan t$, $y = 0$, $t = 0$, $t = 1$

82. $y = 0$, $y = 2 - |x|$, $x = -2$, $x = 2$

83. $y = 0$, $y = 3 - 2x - x^2$

84. $y = 0, \quad y = 1/x^2, \quad x = 1, \quad x = 5$

85. $y = x^2, \quad y = x^3$

86. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 + 2x - x^2$

87. $y = 1, \quad 1/(1 + x^2)$

88. $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

89. $y = t(t - 2), \quad y = t$

90. $y = x^3, \quad y = 3x - 2$

Resuelva

91. Un globo esférico se infla de modo que a los t minutos su radio r en dm crece a la tasa $r' = 2.4\sqrt[3]{t}$. ¿En cuánto aumenta el radio durante el tercer minuto?

92. El número de unidades de un artículo que produce una fábrica depende de la cantidad de mano de obra disponible. Se ha determinado que la producción P (en unidades producidas) aumenta con la mano de obra x (en unidades de mano de obra disponibles) a una tasa $P'(x) = \frac{1}{15}x^2 - 4x + 70$. Calcule el aumento en la producción cuando la mano de obra aumenta de 30 a 36 unidades.

93. Se estima que en cierta ciudad el costo habitacional mensual, en dólares, estará aumentando dentro de t años a la tasa $C'(t) = 56e^{-0.16t}$. ¿En cuánto aumentará el costo habitacional mensual durante los próximos tres años?

94. En el Ejercicio 52, suponiendo que se mantiene la tasa de crecimiento, estime el aumento en la población entre los años 2010 y 2020.

95. El flujo de caja de un nuevo restaurante durante los primeros tres meses de operación es $f(x) = 0.15x^2 - 0.001x^3$ miles de colones por día, donde x es el número de días desde la inauguración. ¿Cuánto es el ingreso durante los primeros 30 días? ¿Durante los siguientes 30 días?

96. Un objeto se mueve acelerando y desacelerando de modo que su velocidad a los t segundos es $v(t) = t - 0.8 \sin t$. ¿Qué distancia recorre entre los 5 s y los 15 s?

Derive

97. $\int_{-1/2}^x \sqrt{1 - u^4} \, du$

101. $\int_{-3y^2}^1 \cos(t^3) \, dt$

98. $\int_t^5 \ln(6 + y^2) \, dy$

102. $\int_{-1}^{\sin(r\pi)} \sqrt[5]{w^2 + 1} \, dw$

99. $\int_0^{3x} e^{r^3} \, dr$

103. $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} 2\sqrt[3]{y} \cos(y^2) \, dy$

100. $\int_4^{e^t} \ln u \, du$

104. $\int_{e^y}^{y^{3/2}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \, d\alpha$

5.3 Integración por sustitución

Si $u = f(x)$, entonces su derivada puede denotarse $\frac{du}{dx} = f'(x)$. De aquí se puede despejar $du = f'(x) dx$ (du es el *diferencial* de u , y dx el de x). Entonces se tiene la igualdad

$$\int g(u) du = \int g(f(x)) f'(x) dx$$

que puede simplificar el cálculo de algunas integrales.

Ejemplo 8

Para calcular $I = \int 2x(x^2 + 4)^6 dx$ podemos tomar $u = x^2 + 4$ y notar que $du = u' dx = 2x dx$. De aquí que

$$I = \int 2x(x^2 + 4)^6 dx = \int (x^2 + 4)^6 \cdot 2x dx$$

y como $(x^2 + 4)^6$ es igual a u^6 , y $2x dx$ es precisamente du , entonces

$$I = \int u^6 du = \frac{1}{7}u^7 + A = \frac{1}{7}(x^2 + 4)^7 + A$$

Comprobemos: la derivada de $\frac{1}{7}(x^2 + 4)^7 + A$ es

$$\left[\frac{1}{7}(x^2 + 4)^7 + A\right]' = \frac{1}{7} \cdot 7(x^2 + 4)^6 \cdot 2x = 2x(x^2 + 4)^6$$

así que $\frac{1}{7}(x^2 + 4)^7 + A$ es la integral de $2x(x^2 + 4)^6$, como debía ser. _____

En general, el método de sustitución (o cambio de variable) se recomienda cuando se necesita integrar una composición de funciones. En tal caso, la selección más natural para la nueva variable es la función que está dentro de la composición; en el ejemplo anterior, $u = x^2 + 4$ era la parte dentro del paréntesis.

Note que este método consta de tres pasos:

1. Definir una nueva variable que simplifique la expresión por integrar.
2. Calcular la integral en términos de la nueva variable.
3. Escribir el resultado en términos de la variable original.

Ejemplo 9

Calcular $J = \int \cot t dt$.

Tenemos

$$J = \int \frac{\cos t dt}{\sen t}$$

y notando que el numerador es precisamente el diferencial del denominador, hacemos la sustitución $z = \operatorname{sen} t$ de modo que $dz = \cos t \, dt$ y entonces

$$J = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + B = \ln |\operatorname{sen} t| + B$$

Ejemplo 10

Calcular $K = \int y \sqrt{1 - 2y} \, dy$.

Empezamos por tomar $u = 1 - 2y$, de donde calculamos $du = -2dy$. Es obvio que la parte $\sqrt{1 - 2y}$ es igual a \sqrt{u} , pero el resto, $y \, dy$, no se ajusta a du tan bien como en los ejemplos anteriores. Necesitamos averiguar, por separado, qué son y y dy en términos de u , para lo cual los despejamos en las fórmulas de u y du respectivamente:

$$\begin{aligned} u = 1 - 2y &\Rightarrow y = \frac{1}{2}(1 - u) \\ du = -2dy &\Rightarrow dy = -\frac{1}{2}du \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{1}{2}(1 - u)\sqrt{u}(-\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{4} \int (1 - u)u^{1/2}du = -\frac{1}{4} \int (u^{1/2} - u^{3/2})du \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} \right) + C = -\frac{1}{6}(1 - 2y)^{3/2} + \frac{1}{10}(1 - 2y)^{5/2} + C \end{aligned}$$

En algunos casos puede ser necesario hacer más de un cambio de variable.

Ejemplo 11

Calcular $L = \int \frac{(q + 2)^3 dq}{\sqrt{1 + (3q + 6)^4}}$.

Podemos definir $x = 3q + 6$ (la parte más interna en la composición), con $dx = 3 \, dq$. Entonces

$$L = \int \frac{(q + 2)^3 dq}{\sqrt{1 + x^4}}$$

Ahora necesitamos notar que

$$\begin{aligned} x = 3q + 6 = 3(q + 2) &\Rightarrow q + 2 = \frac{1}{3}x \\ dx = 3 \, dq &\Rightarrow dq = \frac{1}{3}dx \end{aligned}$$

De ahí obtenemos que

$$L = \int \frac{(\frac{1}{3}x)^3 \frac{1}{3}dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{81} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{81} \int (1 + x^4)^{-1/2} x^3 dx$$

Esta integral todavía no es inmediata, pero podemos hacer una segunda sustitución. Tomando ahora la parte dentro del paréntesis, $r = 1 + x^4$, tendremos $dr = 4x^3 dx$, de donde $x^3 dx = \frac{1}{4} dr$. Seguimos así:

$$L = \frac{1}{81} \int r^{-1/2} \frac{1}{4} dr = \frac{1}{324} \int r^{-1/2} dr = \frac{1}{324} \cdot \frac{r^{1/2}}{1/2} + D = \frac{1}{162} r^{1/2} + D$$

Lo último es devolver las sustituciones. Recordando que $r = 1 + x^4$ y $x = 3q + 6$, tenemos

$$L = \frac{1}{162} \sqrt{1 + x^4} + D = \frac{1}{162} \sqrt{1 + (3q + 6)^4} + D$$

Con algo de práctica puede verse la posibilidad de resolver la integral del ejemplo anterior haciendo una sola sustitución,

$$t = 1 + (3q + 6)^4$$

(el subradical completo), con

$$dt = 12(3q + 6)^3 dq = 12(3)^3 (q + 2)^3 dq = 324(q + 2)^3 dq$$

De aquí el numerador, $(q + 2)^3 dq$, resulta ser $\frac{1}{324} dt$, y entonces

$$\begin{aligned} L &= \int \frac{\frac{1}{324} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{324} \int t^{-1/2} dt = \frac{1}{324} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} \\ &= \frac{1}{162} \sqrt{t} + D = \frac{1}{162} \sqrt{1 + (3q + 6)^4} + D \end{aligned}$$

Si la integral es definida, para hacer una sustitución se pueden cambiar los límites de integración de acuerdo con el cambio de variable, y calcular la nueva integral definida sin necesidad de regresar a la variable original.

Ejemplo 12

Para calcular $M = \int_{-1}^2 \frac{dw}{9w^2 - 6w + 2}$ podríamos intentar la sustitución $x = 9w^2 - 6w + 2$, pero su diferencial, $dx = (18w - 6)dw$, no se ajusta al numerador presente.

En vez de eso, completamos un cuadrado en el denominador:

$$9w^2 - 6w + 2 = 9w^2 - 6w + 1 + 1 = (3w - 1)^2 + 1$$

lo que sugiere que tomemos $x = 3w - 1$, con $dx = 3 dw$. Entonces el numerador se convierte en $\frac{1}{3} dx$ y el denominador en $x^2 + 1$. Pero también los límites de integración se transforman:

$$\begin{aligned} w = -1 &\Rightarrow x = 3(-1) - 1 = -4 \\ w = 2 &\Rightarrow x = 3(2) - 1 = 5 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$M = \int_{-4}^5 \frac{\frac{1}{3} dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan x \Big|_{-4}^5 = \frac{1}{3} (\arctan 5 - \arctan(-4)) \approx 0.899739$$

Calcule

$$105. \int 12y^2(6y^3 - 7)^4 dy$$

$$106. \int 6w(5w^2 + 4)^{2/3} dw$$

$$107. \int_{-1}^1 4y\sqrt{5y^2 + 4} dy$$

$$108. \int \frac{dq}{\sqrt{6q - 5}}$$

$$109. \int \frac{v dv}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$110. \int \frac{5t + 4}{\sqrt[3]{1 + 8t + 5t^2}} dt$$

$$111. \int \frac{x^2 dx}{(5x^3 - 4)^7}$$

$$112. \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2 - x^3)^2} dx$$

$$113. \int \frac{u du}{\sqrt{2u + 1}}$$

$$114. \int_2^7 q\sqrt{q + 2} dq$$

$$115. \int p^3 \sqrt[5]{4 - p^2} dp$$

$$116. \int r^2 \sqrt{1 - r} dr$$

$$117. \int (s^3 + 4s)\sqrt{s^2 + 4} ds$$

$$118. \int \frac{5}{2 - x} dx$$

$$119. \int \frac{24q}{4q^2 + 7} dq$$

$$120. \int_{-2}^1 \frac{p}{5 - p^2} dp$$

$$121. \int_1^2 \frac{v^2 + 3}{2v^3 + 18v - 5} dv$$

$$122. \int \frac{3t + 2}{3t^2 + 4t} dt$$

$$123. \int \frac{(z + 1)(z - 4)}{z + 5} dz$$

$$124. \int \frac{2y - 1}{3y - 1} dy$$

$$125. \int_0^{-1} \frac{x + 1}{x + 2} dx$$

$$126. \int \left(\frac{3}{z^2} - \frac{3z}{z^2 + 1} \right) dz$$

$$127. \int \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} dr$$

$$128. \int \frac{e^v - 2}{3e^v + 5 - 6v} dv$$

$$129. \int_0^1 \frac{dp}{1 + \sqrt{p}}$$

$$130. \int \frac{du}{(1 + \sqrt{u})^2}$$

$$131. \int \frac{2^t - 1}{5 + t \ln 2 - 2^t} dt$$

$$132. \int \frac{dx}{(ax + b)^k}$$

$$133. \int e^{3p-1} dp$$

$$134. \int 5w e^{1-w^2} dw$$

$$135. \int \left(e^{u/2} + e^{-u/2} \right)^2 du$$

$$136. \int \frac{e^{1/z}}{z^2} dz$$

$$137. \int_{-0.1}^{0.3} z e^{z^2-4} dz$$

$$138. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$$

$$139. \int_{\ln 3}^{\ln 8} e^r \sqrt{1 + e^r} dr$$

140. $\int \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$
141. $\int 3y 10^{1-y^2} dy$
142. $\int \frac{dv}{v 5^{\ln v}}$
143. $\int \tan \theta d\theta$
144. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 6 \cos 2y dy$
145. $\int 3 \cos^2(\pi w) \operatorname{sen}(\pi w) dw$
146. $\int \csc^2(7\alpha) d\alpha$
147. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} 3 \sec^2 u (\tan u + 5) du$
148. $\int \frac{\tan \theta}{\sqrt{\sec \theta}} d\theta$
149. $\int_{-2}^{-1} \frac{\cos(1/r)}{r^2} dr$
150. $\int \frac{9}{1+9v^2} dv$
151. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt$
152. $\int \frac{\arctan z}{1+z^2} dz$
153. $\int \frac{9 dx}{26+x^2-10x}$
154. $\int \frac{6 dw}{5-12w+9w^2}$
155. $\int \frac{du}{\sqrt{6u-u^2-8}}$
156. $\int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{4y^2+4y}}$
157. $\int \frac{e^r dr}{1+e^{2r}}$
158. $\int \operatorname{sen} x e^{\cos x} dx$
159. $\int \frac{e^r dr}{1+2e^r}$
160. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+e^{-t}}$
161. $\int \frac{\ln(p+1)}{p+1} dp$
162. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^u du}{\sqrt{e^u-1}}$
163. $\int_{0.2}^{0.5} \frac{dq}{q \ln q}$
164. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx$
165. $\int \frac{dw}{(w-1) \ln^2(1-w)}$
166. $\int \frac{dr}{r\sqrt{\ln r}}$
167. $\int \frac{5t \ln(t^2+1)}{t^2+1} dt$
168. $\int \frac{\ln^2(y+1)}{y+1} dy$
169. $\int \frac{2s^2+1}{s\sqrt{s^2+\ln s}} ds$
170. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{v}}}{\sqrt{v}} dv$
171. $\int \frac{u du}{(u^2+1)\sqrt{1+\ln(u^2+1)}}$
172. $\int \frac{\ln(p+1) dp}{(p+1)\sqrt{1+\ln^2(p+1)}}$
173. $\int x e^{x^2} \sqrt{e^{x^2}+1} dx$
174. $\int \frac{z 10^{4z^2+1}}{1-10^{4z^2+1}} dz$
175. $\int_1^x 4y^2 \sqrt{1+y^3} dy$

Calcule el área encerrada entre los gráficos de ...

176. $y = 0$, $y = \sqrt{x+9}$, $x = -5$, $x = 0$

179. $y = 4/(2-x)$, $y = 4$, $x = 0$

177. $y = 0$, $y = e^{3x}$, $x = -1$, $x = 0$

180. $y = \cot 2x$, $x = 2$, $x = 3$

178. $y = 0$, $y = x/\sqrt{16-x^2}$, $x = 3$

181. $y = \sin x / \cos^3 x$, $x = 0$, $x = 1$

Resuelva

182. Encuentre la fórmula para $f(t)$, dado que $f'(t) = t\sqrt{1-t^2}$ y que $f(1) = 0$.

183. Encuentre la fórmula para $g(u)$, dado que $g(0) = 1$ y que

$$g'(u) = \frac{1-u}{\sqrt{4-u^2}}$$

184. Una maquinaria que vale \$63 000 nueva se deprecia a razón de $1500\sqrt{t+1}$ dólares por año, t años después de comprada. Escriba una función que dé el valor de la máquina a los t años. ¿Cuánto tarda la máquina en depreciarse completamente (cuando su valor es cero)?

185. La velocidad de un avión, t minutos después de despegar, es $v = 300\frac{3t+2}{t+2}$ en km/h. Determine la distancia recorrida durante los primeros tres minutos.

186. Un avión se prepara para despegar y su aceleración, t segundos después de empezar a moverse, es $a(t) = 3000/(t^2 + 225)$ en m/s^2 . ¿Cuál es su velocidad después de 20 segundos?

187. Una población tiene inicialmente 35 individuos. Luego de t horas, su tasa de crecimiento es $P'(t) = te^{0.01t^2}$. Encuentre la fórmula para $P(t)$, el número de individuos t horas después del inicio, y calcule el número de individuos a las 12 horas.

188. Un derrame de petróleo de un buque tanque forma una mancha circular, cuyo radio r aumenta a una velocidad $r'(t) = 9/\sqrt{2t+4}$ metros por minuto a los t minutos de iniciarse el derrame. ¿Cuál es el área de la mancha a los 30 min?

189. Se estima que el flujo de inversión de una empresa recién fundada será $100t\sqrt{1+0.5t^2}$ miles de dólares por año durante el año t . Calcule el capital acumulado por la empresa durante su segundo año.

190. Se espera que un nuevo yacimiento de petróleo produzca petróleo a una tasa

$$P'(t) = \frac{600t^2}{t^3 + 32} + 5$$

de miles de barriles por año, a los t años de haberse iniciado la producción. ¿Cuántos barriles se espera producir durante los primeros tres años? ¿Durante el décimo año?

- 191.** La cantidad de café recolectada en una finca aumenta con el número de recolectores según la fórmula $C'(n) = 1/\sqrt{1+0.3n}$, donde n es el número de recolectores y C la cantidad de café recolectada en kilogramos por hora. ¿Cuántos kg/h se obtendrán con 30 recolectores? ¿En cuánto aumentará la recolección si el número de recolectores aumenta de 15 a 20?
- 192.** En el Ejercicio 188, ¿en cuánto aumenta el radio de la mancha durante la segunda media hora?
- 193.** Las utilidades al vender un artículo aumentan con el monto invertido en publicidad, a una tasa $U' = (2x+3)/(2x^2+6x)$, donde x es la inversión mensual en publicidad, en cientos de dólares, y U es la utilidad mensual, en miles de dólares. Calcule el aumento en utilidades en un mes en que la inversión en publicidad aumenta de \$500 a \$600.

5.4 Fracciones parciales

Si en un cociente de polinomios $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ el grado de $p(x)$ es estrictamente menor que el de $q(x)$, se dice que la fracción es *propia*.

Si la fracción es propia y además $q(x)$ se factoriza completamente como producto de factores lineales con ceros distintos,

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

entonces existen constantes A_1, A_2, \dots, A_n tales que

$$f(x) = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

En general es mucho más fácil integrar cada fracción parcial $A_i/(a_ix + b_i)$, usualmente por sustitución, que integrar la fracción completa $p(x)/q(x)$.

Ejemplo 13

Para calcular $I = \int \frac{11y - 15}{6y^3 + 13y^2 - 5y} dy$ se empieza por factorizar el denominador²:

$$6y^3 + 13y^2 - 5y = y(3y - 1)(2y + 5)$$

que es un producto de factores lineales con ceros distintos (0, 1/3 y -2/5). Entonces existen tres constantes A , B y C tales que

$$\frac{11y - 15}{6y^3 + 13y^2 - 5y} = \frac{11y - 15}{y(3y - 1)(2y + 5)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{3y - 1} + \frac{C}{2y + 5}$$

Para encontrar A , B y C , se multiplica la igualdad anterior por el denominador de la expresión en el centro:

$$11y - 15 = A(3y - 1)(2y + 5) + By(2y + 5) + Cy(3y - 1)$$

²En realidad el primer paso debería ser intentar la sustitución $u = 6y^3 - 13y^2 - 5y$, porque si por suerte du se adaptara al numerador $(11y - 15) dy$, el método de sustitución sería mucho mejor (vea por ejemplo los ejercicios 118–122 de la página 105). Ese no es el caso en este ejemplo: $du = (18y^2 - 26y - 5)dy$, que no se parece a $(11y - 15)dy$.

Luego se le asignan a y los ceros de los factores del denominador:

$$\begin{array}{llll} y = 0 & \Rightarrow & -15 = A(-1)(5) + 0 + 0 = -5A & \Rightarrow & A = 3 \\ y = \frac{1}{3} & \Rightarrow & -\frac{34}{3} = 0 + B(\frac{1}{3})(\frac{17}{3}) + 0 = \frac{17}{9}B & \Rightarrow & B = -6 \\ y = -\frac{5}{2} & \Rightarrow & -\frac{85}{2} = 0 + 0 + C(-\frac{5}{2})(-\frac{17}{2}) = \frac{85}{4}C & \Rightarrow & C = -2 \end{array}$$

Ahora la integral I se descompone como

$$I = \int \frac{11y - 15}{6y^3 + 13y^2 - 5y} dy = \int \frac{3}{y} dy + \int \frac{-6}{3y - 1} dy + \int \frac{-2}{2y + 5} dy$$

y cada una de las tres integrales se calcula por separado (tomando $u = 3y - 1$, $du = 3dy$ en la segunda, y $v = 2y + 5$, $dv = 2dy$ en la tercera, o bien recordando el resultado del Ejercicio 132).

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{y} dy &= 3 \ln |y| \\ \int \frac{-6}{3y - 1} dy &= -6 \int \frac{dy}{3y - 1} = -6 \cdot \frac{1}{3} \ln |3y - 1| = -2 \ln |3y - 1| \\ \int \frac{-2}{2y + 5} dy &= -2 \int \frac{dy}{2y + 5} = -2 \cdot \frac{1}{2} \ln |2y + 5| = -\ln |2y + 5| \end{aligned}$$

Finalmente,

$$I = 3 \ln |y| - 2 \ln |3y - 1| - \ln |2y + 5| + K$$

donde $K \in \mathbb{R}$ es cualquier constante (sería incorrecto terminar la integral indefinida con $+ C$, porque habíamos dicho que $C = -2$).

Por propiedades de \ln , el resultado también puede escribirse como

$$I = \ln \left| \frac{y^3}{(2y + 5)(3y - 1)^2} \right| + K$$

donde K es alguna constante. _____

Cuando la fracción no es propia, es necesario dividir los polinomios primero.

Ejemplo 14

En $J = \int \frac{3t^3 - 2t^2 - 9}{3t^2 - 5t - 2} dt$ el grado del numerador no es menor que el del denominador, así que primero se hace la división de polinomios: $(3t^3 - 2t^2 - 9) \div (3t^2 - 5t - 2)$ da un cociente $t + 1$ y un residuo $7t - 7$, de modo que

$$\frac{3t^3 - 2t^2 - 9}{3t^2 - 5t - 2} = t + 1 + \frac{7t - 7}{3t^2 - 5t - 2}$$

El denominador se factoriza $3t^2 - 5t - 2 = (3t + 1)(t - 2)$, con ceros distintos, así que ahora se descompone $\frac{7t - 7}{3t^2 - 5t - 2}$ en fracciones parciales:

$$\frac{7t - 7}{3t^2 - 5t - 2} = \frac{7t - 7}{(3t + 1)(t - 2)} = \frac{A}{3t + 1} + \frac{B}{t - 2}$$

Dando a t los valores 2 y $-1/3$ sucesivamente, encontramos que $A = 4$ y $B = 1$. Entonces la integral completa es

$$\begin{aligned} J &= \int \left(t + 1 + \frac{7t - 7}{3t^2 - 5t - 2} \right) dt \\ &= \int \left(t + 1 + \frac{4}{3t + 1} + \frac{1}{t - 2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 + t + 4 \cdot \frac{1}{3} \ln |3t + 1| + \ln |t - 2| + C \\ &= \frac{1}{2}t^2 + t + \ln \left| (t - 2)(3t + 1)^{4/3} \right| + C \end{aligned}$$

Cuando el grado del numerador es menor que el del denominador pero algunos de los factores lineales del denominador tienen el mismo cero o, en otras palabras, la factorización incluye $(ax + b)^k$ para algún $k > 1$, entonces la descomposición en fracciones parciales incluirá los términos

$$\frac{C_1}{ax + b} + \frac{C_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{C_k}{(ax + b)^k}$$

para ese factor $(ax + b)^k$, además de todos los términos necesarios para los otros factores.

Ejemplo 15

En la integral $K = \int \frac{r^4 + 2r - 1}{r^3(r - 1)^2} dr$, el grado del numerador es 4 y el del denominador es 5, por lo que no es necesario empezar por dividir los polinomios. Como la factorización del denominador,

$$r^3(r - 1)^2 = r \cdot r \cdot r \cdot (r - 1) \cdot (r - 1)$$

contiene al factor r tres veces y a $(r - 1)$ dos veces, la descomposición tendrá tres fracciones para r y dos para $(r - 1)$:

$$\frac{r^4 + 2r - 1}{r^3(r - 1)^2} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^3} + \frac{D}{r - 1} + \frac{E}{(r - 1)^2}$$

Al multiplicar ambos lados por el denominador de la izquierda tendremos

$$r^4 + 2r - 1 = Ar^2(r - 1)^2 + Br(r - 1)^2 + C(r - 1)^2 + Dr^3(r - 1) + Er^3$$

Evaluando con $r = 0$ encontramos que $C = -1$, y con $r = 1$, que $E = 2$. Al no haber más ceros de factores del denominador, podemos pasar a igualar coeficientes (esto es, comparar el coeficiente de cada potencia de r en el polinomio a la izquierda de la igualdad con su coeficiente a la derecha). Generalmente las potencias más altas o más bajas dan las ecuaciones más sencillas.

- Para r^4 , el coeficiente al lado izquierdo es 1, y al lado derecho es A . Escribimos

$$r^4: \quad 1 = A$$

y vemos que $A = 1$.

- Para r^3 , el coeficiente de la izquierda es 0 y el de la derecha es $-2A + B - D + E$. Igualándolos (y sustituyendo los valores ya conocidos de A , C y E) tenemos

$$r^3: \quad 0 = -2A + B - D + E = -2 + B - D + 2 = B - D$$

de donde averiguamos que $B = D$.

Para encontrar los valores de B y D , podemos escoger entre seguir igualando coeficientes o darle a r un tercer valor (diferente de 0 y 1, que ya usamos)³. Igualar los coeficientes de r^0 siempre es equivalente a sustituir $r = 0$, cosa que ya hicimos. Igualar los de r^1 da

$$r^1: \quad 2 = B - 2C \quad \Rightarrow \quad B = 2 + 2C = 2 + 2(-1) = 0$$

y concluimos por último que también $D = 0$.

También pudimos sustituir $r = -1$:

$$\begin{aligned} r = -1 \quad &\Rightarrow \quad -2 = 4A - 4B + 4C + 2D - E = 4 - 4B - 4 + 2D - 2 \\ &\Rightarrow \quad 4B = 2D \end{aligned}$$

que, combinado con $B = D$, nos lleva a que $B = D = 0$.

La integral K resulta ser

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{r^4 + 2r - 1}{r^3(r-1)^2} dr \\ &= \int \left(\frac{1}{r} + \frac{0}{r^2} + \frac{-1}{r^3} + \frac{0}{r-1} + \frac{2}{(r-1)^2} \right) dr \\ &= \int (r^{-1} - r^{-3} + 2(r-1)^{-2}) dr \\ &= \ln|r| + \frac{1}{2}r^{-2} - 2(r-1)^{-1} + M \end{aligned}$$

donde M es la constante de integración. └──────────┘

Debe tenerse cuidado de identificar los ceros repetidos de factores lineales, aunque los factores sean distintos. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16

Al descomponer $\frac{2 + 5u - 4u^2}{4u^3 + 8u^2 - 11u + 3}$ en fracciones parciales, se puede factorizar el denominador notando que uno de los ceros es $u = 1/2$, y haciendo división sintética para llegar a

$$4u^3 + 8u^2 - 11u + 3 = (u - \frac{1}{2})(4u^2 + 10u - 6)$$

³Por lo general, después de haber sustituido los ceros de los polinomios, igualar coeficientes lleva a ecuaciones más sencillas que sustituir valores adicionales de la variable.

El segundo paréntesis puede factorizarse por tanteo, y llegamos a esta factorización del denominador en tres factores lineales:

$$4u^3 + 8u^2 - 11u + 3 = (u - \frac{1}{2})(4u - 2)(u + 3)$$

Sería un error decir en este momento que

$$\frac{2 + 5u - 4u^2}{4u^3 + 8u^2 - 11u + 3} = \frac{A}{u - 1/2} + \frac{B}{4u - 2} + \frac{C}{u + 3}$$

porque los dos primeros factores, aunque distintos, tienen ceros repetidos: $u = 1/2$ es un cero de cada uno. Lo mejor es “uniformizar” esos dos factores, sea como

$$4u^3 + 8u^2 - 11u + 3 = (u - \frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})(4u + 12)$$

bien como

$$4u^3 + 8u^2 - 11u + 3 = (2u - 1)(2u - 1)(u + 3)$$

o de alguna manera equivalente. Adoptando la segunda, tendremos

$$\frac{2 + 5u - 4u^2}{4u^3 + 8u^2 - 11u + 3} = \frac{A}{2u - 1} + \frac{B}{(2u - 1)^2} + \frac{C}{u + 3}$$

El resto del procedimiento es semejante al del ejemplo anterior. _____

Si la fracción es propia y la factorización del denominador incluye algún factor $ax^2 + bx + c$, cuadrático irreducible (con discriminante negativo) pero no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales incluye el término

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

para ese factor $(ax^2 + bx + c)$, además de todos los términos necesarios para los otros factores. Para integrar una fracción así puede ser necesario completar un cuadrado en el denominador y usar la fórmula

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Ejemplo 17

Calcular $L = \int \frac{3t^2 + 7}{(t - 1)(t^2 + 2t + 2)} dt$.

La fracción es propia y el denominador ya está factorizado al máximo, así que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{3t^2 + 7}{(t - 1)(t^2 + 2t + 2)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 2t + 2}$$

Multiplicando,

$$3t^2 + 7 = A(t^2 + 2t + 2) + (Bt + C)(t - 1)$$

y sustituyendo obtenemos

$$\begin{array}{llll} t = 1 & \Rightarrow & 10 = 5A & \Rightarrow & A = 2 \\ t = 0 & \Rightarrow & 7 = 2A - C & \Rightarrow & C = -3 \end{array}$$

Igualando coeficientes de t^2 tenemos

$$3 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

así que la descomposición es

$$\frac{3t^2 + 7}{(t-1)(t^2 + 2t + 2)} = \frac{2}{t-1} + \frac{t-3}{t^2 + 2t + 2}$$

Es claro que $\int \frac{2dt}{t-1} = 2 \ln |t-1|$. Para la segunda fracción primero completemos un cuadrado en el denominador:

$$t^2 + 2t + 2 = t^2 + 2t + 1 + 1 = (t+1)^2 + 1$$

Ahora tomemos $u = t + 1$, de modo que $du = dt$ y $t = u - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{t-3}{t^2 + 2t + 2} dt &= \int \frac{(u-1)-3}{u^2 + 1} du = \int \frac{u}{u^2 + 1} du - \int \frac{4}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) - 4 \arctan u \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 2) - 4 \arctan(t+1) \end{aligned}$$

Al final,

$$L = 2 \ln |t-1| + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 2) - 4 \arctan(t+1) + K$$

donde K es alguna constante. └

Para el caso de factores cuadráticos no factorizables y además repetidos, vea la Sección 6.1.

En algunos casos puede ser necesario hacer una sustitución antes de usar fracciones parciales. Por ejemplo, para $L = \int \frac{dx}{1 - e^{2x}}$ puede usarse la sustitución $u = e^x$, que lleva a $du = e^x dx$. Entonces $e^{2x} = u^2$ y $dx = du/e^x = du/u$, de manera que $L = \int \frac{du}{(1 - u^2)u}$, que se resuelve usando fracciones parciales. Vea los ejercicios 223 y siguientes en esta sección.

Calcule

194. $\int \frac{p-7}{p^2 - 8p + 15} dp$

196. $\int \frac{u-8}{u^2 - 2u - 8} du$

195. $\int \frac{3}{v^2 + v - 2} dv$

197. $\int \frac{5t - 2t^2 + 4}{t^2 - t - 2} dt$

- 198.** $\int \frac{2x+1}{4x^2+10x+6} dx$
199. $\int \frac{5}{1-r-6r^2} dr$
200. $\int \frac{u}{27-3u^2} du$
201. $\int \frac{2}{q^3-q} dq$
202. $\int \frac{8-10w^2-w^3}{8w+2w^2-w^3} dw$
203. $\int \frac{9z+19}{4z^3+18z^2+8z-30} dz$
204. $\int \frac{2-8y}{y^4-y^3-4y^2+4y} dy$
205. $\int \frac{87-43s-77s^2-15s^3}{(s^2+s-2)(s^2-9)} ds$
206. $\int \frac{3-7s+s^3}{s^3-3s^2} ds$
207. $\int \frac{18v^4-59v^2-31v}{3v^3+7v^2+5v+1} dv$
208. $\int \frac{14x^2+3x}{8x^3+12x^2-18x-27} dx$
209. $\int \frac{p^3+14p^2+2}{4p^4+4p^3-7p^2+2p} dp$
210. $\int \frac{r^3+4r^2+4}{r^4+4r^3+4r^2} dr$
211. $\int \frac{532-182q}{(3q^2-10q-8)^2} dq$
212. $\int \frac{5z^3-z^2+4z+4}{(z^2+z)(z^3-z)} dz$
213. $\int \frac{2t^2+3t-2}{3t^4-2t^3} dt$
214. $\int \frac{w^3-12w^2+112w}{(1+w)(4-w)^3} dw$
215. $\int \frac{2y^5-60y^2+150y-125}{(4-y^2)(2y-5)^3} dy$
216. $\int \frac{26u-34+2u^4}{(u-2)^3(2u+1)^2} du$
217. $\int \frac{42x^4+8x^2+x-1}{9x^5-x^3} dx$
218. $\int \frac{7z^2+5-z}{z+z^3} dz$
219. $\int \frac{q-1}{q^2+2q+2} dq$
220. $\int \frac{7w^2+6}{4w^3+w-5} dw$
221. $\int \frac{r^3+5}{r^4+5r^2} dr$
222. $\int \frac{8t^3+10}{4t^2-4t+5} dt$
223. $\int \frac{e^y dy}{(2e^y+3)(e^y+2)}$
224. $\int \frac{e^s-2}{e^s+1} ds$
225. $\int \frac{dx}{1-e^{2x}}$
226. $\int \frac{9^r+3^r+6}{9^r-3^r-2} dr$
227. $\int \frac{4^t+5 \cdot 2^t+4}{4^t+2^{t+1}+2} dt$
228. $\int \frac{1+\ln^2 q}{q(1-\ln^2 q)} dq$
229. $\int \frac{dv}{v^{3/2}+9v^{1/2}}$

5.5 Funciones trigonométricas

Existen algunos procedimientos estandarizados para calcular integrales de productos y cocientes de funciones trigonométricas.

Para integrar un producto de...	cuando el exponente de...	se recomienda tomar...
senos y cosenos	seno es impar	$u = \cos x$
senos y cosenos	coseno es impar	$u = \sen x$
secantes y tangentes	secante es par	$u = \tan x$
secantes y tangentes	tangente es impar	$u = \sec x$
cosecantes y cotangentes	cosecante es par	$u = \cot x$
cosecantes y cotangentes	cotangente es impar	$u = \csc x$

Para un producto de senos y cosenos donde ambos exponentes son pares, pueden usarse las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

En otros casos, puede ser útil convertir la función a senos y cosenos.

Ejemplo 18

Calcular $I = \int 15 \sen^3 r \cos^2 r \, dr$.

Como el exponente de seno es impar, tomamos $u = \cos r$, con $du = -\sen r \, dr$, y así

$$\begin{aligned} I &= \int 15 \sen^2 r \cos^2 r (\sen r \, dr) = \int 15(1 - \cos^2 r) \cos^2 r (\sen r \, dr) \\ &= \int 15(1 - u^2)u^2 (-du) = -15 \int (u^2 - u^4) du + C = -5u^3 + 3u^5 + C \\ &= -5 \cos^3 r + 3 \cos^5 r + C \end{aligned}$$

Ejemplo 19

Calcular $J = \int \tan^3 y \sec^4 y \, dy$.

El exponente de secante es par, así que tomamos $v = \tan y$, con $dv = \sec^2 y \, dy$. Entonces

$$\begin{aligned} J &= \int \tan^3 y \sec^2 y (\sec^2 y \, dy) = \int \tan^3 y (\tan^2 y + 1)(\sec^2 y \, dy) \\ &= \int v^3(v^2 + 1) dv = \int (v^5 + v^3) dv = \frac{1}{6}v^6 + \frac{1}{4}v^4 + C \\ &= \frac{1}{6} \tan^6 y + \frac{1}{4} \tan^4 y + C \end{aligned}$$

Al mismo tiempo, el exponente de tangente es impar, así que también era posible usar desde el principio la sustitución $w = \sec y$, con $dw = \sec y \tan y \, dy$, de esta manera:

$$\begin{aligned} J &= \int \tan^2 y \sec^3 y (\sec y \tan y \, dy) = \int (\sec^2 y - 1) \sec^3 y (\sec y \tan y \, dy) \\ &= \int (w^2 - 1) w^3 \, dw = \int (w^5 - w^3) \, dw = \frac{1}{6} w^6 - \frac{1}{4} w^4 + D \\ &= \frac{1}{6} \sec^6 y - \frac{1}{4} \sec^4 y + D \end{aligned}$$

Ejemplo 20

Calcular $K = \int \cos^4 \alpha \, d\alpha$.

Usando la identidad para \cos^2 , escribimos

$$\begin{aligned} K &= \int (\cos^2 \alpha)^2 \, d\alpha = \int \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2 \, d\alpha = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) \, d\alpha \\ &= \frac{1}{4} (\alpha + \sin 2\alpha + L) \end{aligned}$$

donde (usando la misma identidad)

$$\begin{aligned} L &= \int \cos^2 2\alpha \, d\alpha = \int \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} \, d\alpha = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{8} \sin 4\alpha \end{aligned}$$

Finalmente,

$$K = \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{8} \sin 4\alpha \right) + C = \frac{3}{8} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{32} \sin 4\alpha + C$$

Ejemplo 21

Para calcular $M = \int \csc v \, dv$, como no estamos en ninguno de los casos estandarizados, convertimos la función a senos y cosenos:

$$M = \int \frac{dv}{\sin v}$$

Ahora estamos en el caso de senos y cosenos cuando el exponente de seno es impar, ya que el exponente de coseno es 0 y el de seno es -1 . Entonces tomamos

$$t = \cos v \quad \Rightarrow \quad dt = -\sin v \, dv \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{dt}{\sin v}$$

y pasamos a

$$M = \int \frac{-dt/\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} v} = \int \frac{-dt}{\operatorname{sen}^2 v} = \int \frac{-dt}{1 - \cos^2 v} = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

que descomponemos en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} M &= \int \left(\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} [\ln |t-1| - \ln |t+1|] + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln |\cos v - 1| - \ln |\cos v + 1|) + C \end{aligned}$$

Note que ese resultado se puede simplificar como

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos v + 1}{\cos v - 1} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\cos v + 1)(\cos v + 1)}{(\cos v - 1)(\cos v + 1)} \right| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\cos v + 1)^2}{-\operatorname{sen}^2 v} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{\cos v + 1}{\operatorname{sen} v} \right)^2 \right| + C \end{aligned}$$

(el signo menos en el denominador puede omitirse por el valor absoluto)

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{\cos v}{\operatorname{sen} v} + \frac{1}{\operatorname{sen} v} \right| + C = -\ln |\cot v + \csc v| + C$$

En el ejemplo anterior obtenemos una fórmula para $\int \csc$ que, junto con la de $\int \sec$, vale la pena de memorizar, dado lo complejo de su cálculo. Las dos fórmulas son (omitiendo el $+ C$)

$$\int \sec = \ln |\sec + \tan| \quad \text{y} \quad \int \csc = -\ln |\csc + \cot|$$

Vea el Ejercicio 253.

Calcule

230. $\int \cos \theta \operatorname{sen}^6 \theta \, d\theta$

235. $\int \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \beta \, d\beta$

231. $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$

236. $\int \operatorname{sen}^4 3u \, du$

232. $\int \cos^3(2w+1) \operatorname{sen}^6(2w+1) \, dw$

237. $\int 8 \cos^6(t/2) \, dt$

233. $\int \operatorname{sen}^{-9} y \cos^3 y \, dy$

238. $\int \sec^4 y \tan^2 y \, dy$

234. $\int \frac{\operatorname{sen}^5(\pi v/2)}{\cos^4(\pi v/2)} \, dv$

239. $\int (\sec^2 \alpha) \sqrt{5 + 2 \tan \alpha} \, d\alpha$

240. $\int \sec^3 z \tan^3 z \, dz$ 247. $\int \tan^2 \alpha \sec^2 \alpha \sec \alpha \, d\alpha$
241. $\int 48 \sec^4(2\beta) \tan^5(2\beta) \, d\beta$ 248. $\int 10 \cot^6 y \sec^5 y \, dy$
242. $\int (\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha) \tan \alpha \, d\alpha$ 249. $\int \frac{\tan v}{1 + \sec^2 v} \, dv$
243. $\int \frac{\sec^2 x}{4 + \tan x} \, dx$ 250. $\int \frac{1 - \sin r}{\cos r} \, dr$
244. $\int \tan^4 \theta \, d\theta$ 251. $\int \frac{1}{1 - \sin z} \, dz$
245. $\int 9 \csc^2 v \cot^2 v \, dv$ 252. $\int \tan^2 t \sec t \, dt$
246. $\int \csc x \cot^3 x \, dx$ 253. $\int \sec x \, dx$

5.6 Sustitución trigonométrica

Para integrar funciones que incluyan $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, o $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde $a > 0$ es una constante, puede intentarse uno de los siguientes cambios de variable:

Para integrar una función con...	intente la sustitución...	que resulta en...
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$\sqrt{x^2 - a^2} = \pm a \tan t$ (+ si $x > 0$, o - si $x < 0$)

Ejemplo 22

Calcular $I = \int \frac{dw}{w^2 \sqrt{w^2 + 9}}$.

Aquí tenemos la segunda forma en la tabla, con $a = 3$. Entonces tomamos

$$w = 3 \tan t, \quad dw = 3 \sec^2 t \, dt, \quad \sqrt{w^2 + 9} = 3 \sec t$$

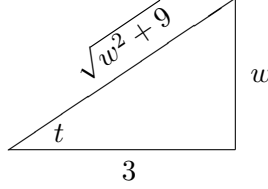
y la integral se convierte en

$$I = \int \frac{3 \sec^2 t \, dt}{(3 \tan t)^2 \cdot 3 \sec t} = \frac{1}{9} \int \frac{\sec t \, dt}{\tan^2 t} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t}$$

Ahora hacemos la sustitución $y = \sin t$, con $dy = \cos t \, dt$, y entonces

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{9}(-y^{-1}) + C = -\frac{1}{9} \csc t + C$$

Para regresar de t a w podemos dibujar un triángulo que refleje la relación $\tan t = w/3$ (a partir de la definición de w) así: en un triángulo rectángulo tomamos t como uno de los ángulos agudos, w como el cateto opuesto y 3 como el cateto adyacente, y calculamos la hipotenusa como $\sqrt{w^2 + 9}$.



En este triángulo vemos que $\csc t = \sqrt{w^2 + 9}/w$, de modo que, finalmente,

$$I = \frac{-\sqrt{w^2 + 9}}{9w} + C$$

En general, antes de usar una de las sustituciones trigonométricas en la tabla, intente una sustitución algebraica. Por ejemplo, para calcular

$$J = \int \frac{w \, dw}{\sqrt{w^2 + 9}}$$

en vez de tomar $w = 3 \tan t$ como en el ejemplo anterior, es mucho más sencillo tomar $x = w^2 + 9$. Entonces $dx = 2w \, dw$, y

$$J = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{x} + C = \sqrt{w^2 + 9} + C$$

Ejemplo 23

Para calcular $K = \int_{-4}^{-2} \frac{\sqrt{9x^2 + 12x - 3}}{(3x + 2)^4} dx$, primero completamos el cuadrado dentro de la raíz. Como el integrando empieza con $9x^2 + 12x$, que es el inicio de $(3x + 2)^2$, escribimos

$$9x^2 + 12x - 3 = 9x^2 + 12x + 4 - 7 = (3x + 2)^2 - 7$$

Ahora tomamos $y = 3x + 2$, $dy = 3dx$, y entonces

$$K = \int_{-10}^{-4} \frac{\sqrt{y^2 - 7}}{y^4} \frac{dy}{3}$$

En $y^2 - 7$ reconocemos la forma $y^2 - a^2$ con $a = \sqrt{7}$, y notando que $y < 0$ en el intervalo de integración, hacemos el cambio

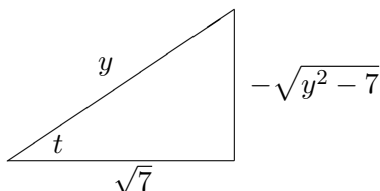
$$y = \sqrt{7} \sec t, \quad dy = \sqrt{7} \sec t \tan t \, dt, \quad \sqrt{y^2 - 7} = -\sqrt{7} \tan t$$

En vez de cambiar los límites de integración (que no es tan sencillo al usar una sustitución inversa, esto es una en la que la variable original se define en términos de una nueva), podemos concentrarnos en calcular la integral indefinida y luego evaluar en los límites actuales de integración para y . Dejemos también la fracción $\frac{1}{3}$ para después. Por ahora, sea

$$\begin{aligned} L &= \int \frac{\sqrt{y^2 - 7}}{y^4} dy = \int \frac{-\sqrt{7} \tan t}{(\sqrt{7} \sec t)^4} \sqrt{7} \sec t \tan t dt = \frac{-1}{7} \int \frac{\tan^2 t \sec t}{\sec^4 t} dt \\ &= \frac{-1}{7} \int \frac{\sin^2 t \cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{-1}{7} \int \sin^2 t \cos t dt \\ &= \frac{-1}{7} \int u^2 du = \frac{-1}{21} u^3 = \frac{-1}{21} \sin^3 t \end{aligned}$$

(donde $u = \sin t$, $du = \cos t dt$ en la última línea). Note que no añadimos $+ C$ al final porque estamos en medio de calcular una integral definida.

Para regresar de t a y usamos un triángulo que ilustre las relaciones $y = \sqrt{7} \sec t$ y $\sqrt{y^2 - 7} = -\sqrt{7} \tan t$:



Aquí vemos que $\sin t = -\sqrt{y^2 - 7}/y$, así que el valor de la integral indefinida es

$$L = \frac{-1}{21} \left(\frac{-\sqrt{y^2 - 7}}{y} \right)^3 = \frac{1}{21} \frac{\sqrt{y^2 - 7}^3}{y^3}$$

Por último,

$$K = \frac{1}{3} \frac{1}{21} \frac{\sqrt{y^2 - 7}^3}{y^3} \Big|_{-10}^{-4} = \frac{1}{63} \frac{\sqrt{(-4)^2 - 7}^3}{(-4)^3} - \frac{1}{63} \frac{\sqrt{(-10)^2 - 7}^3}{(-10)^3} \approx 0.00753944$$

Calcule

254. $\int \sqrt{4 - p^2} dp$

257. $\int \frac{dr}{r^2 \sqrt{9r^2 + 1}}$

255. $\int 2y^3 \sqrt{9 - y^2} dy$

258. $\int \frac{dq}{q^2(q^2 + 8)^{3/2}}$

256. $\int t^2 \sqrt{1 - t^2} dt$

259. $\int \frac{6v dv}{\sqrt{4v^2 + 1}^5}$

$$260. \int \frac{\sqrt{4t^2 - 9}}{t} dt$$

$$261. \int \frac{du}{u^4 \sqrt{u^2 - 5}}$$

$$262. \int (q^2 - 100)^{-3/2} dq$$

$$263. \int \frac{z + 2}{\sqrt{3 - 2z - z^2}} dz$$

$$264. \int \frac{dx}{(4x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$265. \int \frac{dm}{(m + 1)\sqrt{m^2 + 2m}}$$

$$266. \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$$

$$267. \int_{-4}^1 2\sqrt{v^2 + 48} dv$$

$$268. \int_{-4}^{-5} \frac{\sqrt{t^2 - 16}}{t} dt$$

$$269. \int \frac{\sqrt{4 - \ln^2 y}}{y} dy$$

$$270. \int \frac{\sqrt{w - 9}}{\sqrt{w}^5} dw$$

$$271. \int \frac{du}{e^u \sqrt{1 + e^{2u}}}$$

5.7 Integración por partes

La fórmula de *integración por partes* dice que si u y v son funciones de alguna variable entonces

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para usar esta fórmula deben escogerse las partes u y dv de manera que su producto $u dv$ sea igual a la función por integrar. Entonces se encuentran du y v para calcular la integral en el lado derecho.

Ejemplo 24

Para calcular $I = \int x \ln x dx$ definimos $u = \ln x$ y $dv = x dx$, de modo que $u dv = x \ln x dx$.

Entonces

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = dx/x \\ dv = x dx &\Rightarrow v = x^2/2 \end{aligned}$$

(no habría sido útil tomar $u = x$ y $dv = \ln x dx$, porque no sabríamos cuánto es v). Así, por la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned} I = \int x \ln x dx &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

Para calcular por partes la integral de un cociente, como $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, sería un error grave tomar $u = f(x)$ y $dv = g(x) dx$. Eso serviría solo para calcular $\int f(x)g(x) dx$, que no es el objetivo. En vez

de eso, generalmente es mejor escribir la integral como $\int f(x)g(x)^{-1}dx$ y entonces tomar $u = f(x)$ con $dv = g(x)^{-1}dx$, o bien $u = g(x)^{-1}$ con $dv = f(x)dx$, como más convenga.

En general, al escoger cuál factor será u y cuál será dv , tenga en cuenta que u deberá ser derivado y dv deberá ser integrado, y que el objetivo es que la integral de $v du$ sea más sencilla que la de $u dv$.

A veces será necesario usar partes más de una vez, o combinar el método de partes con el de sustitución. Los siguientes ejemplos ilustran lo dicho en este párrafo y en los dos anteriores.

Ejemplo 25

Calcular $J = \int \frac{r^2}{e^r} dr$.

El método de integración por partes es para integrar productos, no cocientes, así que lo primero aquí será transformar la integral en $J = \int r^2 e^{-r} dr$. Entonces tomamos

$$\begin{aligned} u = r^2 & \Rightarrow du = 2r dr \\ dv = e^{-r} dr & \Rightarrow v = -e^{-r} \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} J &= \int r^2 e^{-r} dr = r^2(-e^{-r}) - \int (-e^{-r}) \cdot 2r dr \\ &= -r^2 e^{-r} + 2 \int r e^{-r} dr = -r^2 e^{-r} + 2K \end{aligned}$$

donde $K = \int r e^{-r} dr$. Ahora, para calcular K tomamos⁴

$$\begin{aligned} u = r & \Rightarrow du = dr \\ dv = e^{-r} dr & \Rightarrow v = -e^{-r} \end{aligned}$$

de donde

$$K = \int r e^{-r} dr = -r e^{-r} + \int e^{-r} dr = -r e^{-r} - e^{-r}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} J &= -r^2 e^{-r} + 2K = -r^2 e^{-r} + 2(-r e^{-r} - e^{-r}) \\ &= -e^{-r}(r^2 + 2r + 2) + C \end{aligned}$$

Note que no incluimos $+C$ en la fórmula de K . En realidad nos concentramos en encontrar una antiderivada cualquiera de $r^2 e^{-r}$, y solo al final, cuando hubimos encontrado $-e^{-r}(r^2 + 2r + 2)$, añadimos la constante C .

Para integrales definidas, la fórmula de integración por partes se interpreta como

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

⁴No es problema reusar las letras u y v esta vez con distintos significados. Cuando las definimos hace un momento fue solo temporalmente, y una vez que usamos la fórmula de integración por partes las desocupamos al regresar a r .

Ejemplo 26

Calcular $L = \int_1^4 \ln v \, dv$.

Como la letra v ya está tomada, usemos x y y para la integración por partes, así:

$$\begin{aligned} x = \ln v &\Rightarrow dx = dv/v \\ dy = dv &\Rightarrow y = v \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \ln v \, dv = \ln v \cdot v \Big|_1^4 - \int_1^4 v \frac{dv}{v} \\ &= (\ln 4 \cdot 4) - (\ln 1 \cdot 1) - \int_1^4 dv = 4 \ln 4 - 0 - v \Big|_1^4 \\ &= 4 \ln 4 - (4 - 1) = 4 \ln 4 - 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 27

Calcular $M = \int e^z \cos z \, dz$.

Ambas funciones, e^z y $\cos z$ son igualmente fáciles de integrar o derivar, así que escogemos aleatoriamente

$$\begin{aligned} u = e^z &\Rightarrow du = e^z \, dz \\ dv = \cos z \, dz &\Rightarrow v = \sin z \end{aligned}$$

con lo que

$$M = e^z \sin z - \int \sin z \, e^z \, dz$$

Ahora trabajemos en $N = \int \sin z \, e^z \, dz$. Pruebe usted tomar $u = \sin z$ y $dv = e^z \, dz$, y verá que no funciona. Pero haciendo

$$\begin{aligned} u = e^z &\Rightarrow du = e^z \, dz \\ dv = \sin z \, dz &\Rightarrow v = -\cos z \end{aligned}$$

llegaremos a $N = -e^z \cos z + \int e^z \cos z \, dz$.

Esta última integral es igual a M , con la que empezamos. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} M &= e^z \sin z - \int \sin z \, e^z \, dz = e^z \sin z - N \\ &= e^z \sin z - (-e^z \cos z + M) \\ &= e^z \sin z + e^z \cos z - M \end{aligned}$$

Sumando M llegamos a $2M = e^z \sin z + e^z \cos z$, de donde despejamos

$$M = \frac{1}{2} e^z (\sin z + \cos z) + C$$

(sin olvidar el $+C$ al final).

Calcule

$$272. \int_0^{1/3} z e^{3z} dz$$

$$273. \int_2^4 p^3 \ln p dp$$

$$274. \int_1^9 \sqrt{s} \ln s ds$$

$$275. \int_1^{e^3} 2 \ln \sqrt{x} dx$$

$$276. \int \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$$

$$277. \int \frac{t}{2^t} dt$$

$$278. \int \frac{w+1}{e^w} dw$$

$$279. \int x^2 10^x dx$$

$$280. \int_0^\pi \beta \operatorname{sen} \beta d\beta$$

$$281. \int_{-\pi/6}^{\pi/6} z \cos 2z dz$$

$$282. \int_0^1 p \arctan p dp$$

$$283. \int q^2 e^{3q-1} dq$$

$$284. \int (r + e^{2r})^2 dr$$

$$285. \int (9u^2 + 4u + 1) \log_5 u du$$

$$286. \int \theta^2 \cos 2\theta d\theta$$

$$287. \int_0^{1/2} \ln(2w+1) dw$$

$$288. \int_{-4}^2 p \ln(p+5) dp$$

$$289. \int \log(5y^2 - 4y) dy$$

$$290. \int \arctan u du$$

$$291. \int \operatorname{arcsen} 2y dy$$

$$292. \int_3^4 \ln(v^3 - 2v^2) dv$$

$$293. \int_{-1}^0 w^3 8^{w^2+1} dw$$

$$294. \int (p-1)^3 e^{p^2-2p} dp$$

$$295. \int e^{\sqrt{u}} du$$

$$296. \int_{-1}^{15} \frac{t}{\sqrt{4+3t}} dt$$

$$297. \int_3^0 \frac{v^3}{\sqrt{9-v^2}} dv$$

$$298. \int_1^e (1 + \ln u)^2 du$$

$$299. \int_{-3}^0 \frac{\ln(4-7x)}{\sqrt{4-7x}^3} dx$$

$$300. \int 18y(y^2+1)^2 \ln(y^2+1) dy$$

$$301. \int \frac{t e^t}{(t+1)^2} dt$$

$$302. \int \ln(p + \sqrt{1+p^2}) dp$$

$$303. \int 2^q \cos q dq$$

$$304. \int e^{-w} \operatorname{sen} 2w dw$$

$$305. \int \sec^3 \alpha d\alpha$$

$$306. \int \tan^2 t \sec t dt$$

$$307. \int \cos(\ln r) \, dr$$

$$309. \int \frac{\ln z}{(z+1)^2} dz$$

$$308. \int_0^{\pi^2/4} \sin \sqrt{t} \, dt$$

$$310. \int (3y^2 + 1) \ln(y^2 - 1) \, dy$$

5.8 Integrales impropias

En la Sección 5.2 vimos que si f es continua en $[a, b]$, y F es una antiderivada de f , entonces $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

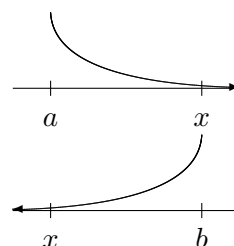
Una integral impropia es una en la que el intervalo de integración es infinito, o bien una en la que f tiene una asíntota vertical o discontinuidad en algún punto del intervalo. Los dos casos básicos son:

Primer tipo: Si f está definida en $[a, \infty[$ entonces

$$\int_a^\infty f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) \, dt$$

o bien, si f está definida en $]-\infty, b]$ entonces

$$\int_{-\infty}^b f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) \, dt$$

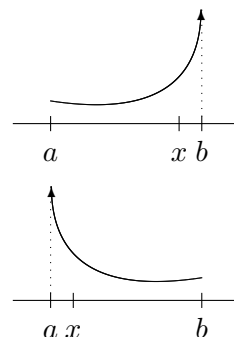


Segundo tipo: Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ entonces

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) \, dt$$

o bien, si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ entonces

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) \, dt$$



En cualquier caso, se dice que la integral *converge* si el límite existe, o que *diverge* si no. Otros tipos de integrales impropias son combinaciones de estos.

Ejemplo 28

Calcular $I = \int_1^5 \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$.

Note que el integrando tiende a infinito cuando $v \rightarrow 1^+$, así que esta integral es impropia del segundo tipo. Empecemos por hacer la sustitución $w = v - 1$. La nueva integral sigue siendo impropia, así que usamos la fórmula dada arriba:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \frac{dw}{\sqrt{w}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^4 w^{-1/2} \, dw = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2w^{1/2} \Big|_x^4 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [2(4)^{1/2} - 2x^{1/2}] = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{0} = 4 \end{aligned}$$

Entonces se dice que la integral converge a 4.

Ejemplo 29

Calcular $J = \int_{-\infty}^0 x^{-2} e^{1/x} dx$.

Esta integral es impropia por dos razones: por un lado, uno de los límites de integración es infinito, y por otro, el límite de la función es infinito en el otro límite de integración. Para calcularla necesitamos dividir el intervalo de integración en dos partes, en cualquier punto entre $-\infty$ y 0. Por ejemplo, haciéndolo en -1 tendremos

$$J = \int_{-\infty}^{-1} x^{-2} e^{1/x} dx + \int_{-1}^0 x^{-2} e^{1/x} dx = J_1 + J_2$$

Ahora tenemos dos integrales, J_1 impropia del primer tipo y J_2 impropia del segundo. Las calcularemos por separado, pero primero encontremos una antiderivada para usar en ambas. Con $u = 1/x$ y $du = -x^{-2} dx$ tenemos (sin incluir $+C$ porque estamos en medio de una integral definida)

$$\int x^{-2} e^{1/x} dx = \int -e^u du = -e^u = -e^{1/x}$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_1 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} x^{-2} e^{1/x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} -e^{1/x} \Big|_a^{-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -e^{-1} + e^{1/a} = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} J_2 &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b x^{-2} e^{1/x} dx = \lim_{b \rightarrow 0^-} -e^{1/x} \Big|_{-1}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^-} -e^{1/b} + e^{-1} = -e^{-\infty} + e^{-1} = e^{-1} \end{aligned}$$

de modo que $J = J_1 + J_2 = 1 - e^{-1} + e^{-1} = 1$. └

Ejemplo 30

La integral $K = \int_3^5 \frac{dr}{r-4}$ no es impropia de ninguno de los dos tipos básicos, pero el integrando tiene una asíntota vertical en $r = 4$, dentro del intervalo de integración. Para calcular la integral debemos separarla:

$$K = \int_3^4 \frac{dr}{r-4} + \int_4^5 \frac{dr}{r-4} = K_1 + K_2$$

donde K_1 y K_2 son impropias del segundo tipo.

Es claro que $\int dr/(r-4) = \ln|r-4| + C$, así que

$$K_1 = \lim_{b \rightarrow 4^-} \int_3^b \frac{dr}{r-4} = \lim_{b \rightarrow 4^-} \ln|r-4| \Big|_3^b = \lim_{b \rightarrow 4^-} \ln|b-4| - \ln 1 = -\infty$$

Entonces K_1 diverge, y no es necesario calcular K_2 : ya podemos concluir que la integral K también es divergente⁵. └

Como vimos en el ejemplo anterior, si una integral impropia se divide en varios intervalos, la integral entera converge solamente si cada una de sus partes converge.

Calcule o indique si es divergente

311. $\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$

319. $\int_0^1 v \ln v \, dv$

312. $\int_1^\infty \frac{dp}{p^2+8}$

320. $\int_0^\infty e^{-q} \cos q \, dq$

313. $\int_e^\infty \frac{\ln u}{u} \, du$

321. $\int_{-1}^1 \csc^2 \beta \, d\beta$

314. $\int_2^{10} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}}$

322. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dr}{1+r^2}$

315. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ con $p > 0$, constante

323. $\int_1^\infty \frac{dy}{y \ln y}$

316. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \tan^2 \alpha \, d\alpha$

324. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dw}{e^w + e^{-w}}$

317. $\int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta$

325. $\int_{-3}^3 \frac{dz}{z^2-9}$

318. $\int_{-\infty}^0 p e^p \, dp$

⁵De hecho, $K_2 = \lim_{a \rightarrow 4^+} \ln|r-4| \Big|_a^5 = \infty$, por lo que también diverge.

Temas adicionales sobre integración

6.1 Fracciones parciales con factores cuadráticos repetidos

En la Sección 5.4 vimos cómo descomponer fracciones racionales en fracciones parciales, para los casos en que el denominador se factoriza como producto de factores lineales simples o repetidos, o factores cuadráticos simples. Veamos qué hacer cuando hay factores cuadráticos repetidos en el denominador. En esencia, al descomponer se usa una fracción para cada potencia del factor cuadrático, desde 1 hasta el número de veces que se repita, como en el caso de factores lineales con ceros repetidos. Y luego se usa una sustitución trigonométrica para integrarlas.

Ejemplo 1

Calcular $M = \int \frac{2 + r^3}{r(r^2 + 1)^2} dr$.

Vamos a empezar por descomponer en fracciones parciales, notando que en el denominador hay un factor cuadrático sin ceros reales y además repetido.

$$\begin{aligned} \frac{2 + r^3}{r(r^2 + 1)^2} &= \frac{A}{r} + \frac{Br + C}{r^2 + 1} + \frac{Dr + E}{(r^2 + 1)^2} \\ 2 + r^3 &= A(r^2 + 1)^2 + (Br + C)r(r^2 + 1) + (Dr + E)r \end{aligned}$$

- Con $r = 0$ tenemos $2 = A(1) + 0$, así que $A = 2$.
- Los coeficientes de r^4 son 0 a la izquierda y $A + B$ a la derecha, así que $0 = A + B$ y entonces $B = -A = -2$.
- Los coeficientes de r^1 son $0 = C + E$.
- Sustituyendo $r = 1$ obtenemos $3 = 4A + 2B + 2C + D + E$, o bien $-1 = 2C + D + E$.
- Y con $r = -1$ vemos que $1 = 4A + 2B - 2C + D - E$, o simplemente $-3 = -2C + D - E$.

Ahora tenemos, además de $A = 2$ y $B = -2$, el sistema

$$\begin{cases} C + E = 0 \\ 2C + D + E = -1 \\ -2C + D - E = -3 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $C = 1$, $D = -2$ y $E = -1$. Entonces

$$\frac{2 + r^3}{r(r^2 + 1)^2} = \frac{2}{r} + \frac{1 - 2r}{r^2 + 1} - \frac{2r + 1}{(r^2 + 1)^2}$$

Ya podemos empezar a integrar. Para eso, descompongamos la integral M como resta de dos integrales, $M = P - Q$ donde

$$P = \int \left(\frac{2}{r} + \frac{1-2r}{r^2+1} \right) dr \quad \text{y} \quad Q = \int \frac{2r+1}{(r^2+1)^2} dr$$

La integral P no presenta novedades, y su valor, dejando la constante de integración para el final, es $P = 2 \ln|r| + \arctan r - \ln(r^2+1)$ (repase el Ejemplo 17 del capítulo anterior, en la página 112).

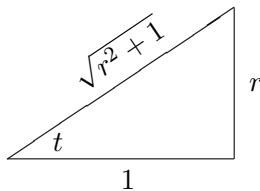
Para calcular Q hacemos la sustitución¹ $r = \tan t$. Entonces $dr = \sec^2 t dt$, $r^2 + 1 = \sec^2 t$ y

$$Q = \int \frac{2 \tan t + 1}{(\sec^2 t)^2} \sec^2 t dt = \int (2 \tan t + 1) \cos^2 t dt = \int (2 \sin t \cos t + \cos^2 t) dt$$

El primer sumando puede integrarse haciendo $u = \sin t$, y resulta en $\sin^2 t$. Para el segundo se usa $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, y su integral es $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)$. Entonces

$$Q = \sin^2 t + \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)$$

Para regresar a r nos guiamos con el triángulo abajo, basado en que habíamos definido $r = \tan t$.



Aquí vemos que $\sin t = r/\sqrt{r^2+1}$ y $\cos t = 1/\sqrt{r^2+1}$, y concluimos que

$$Q = \frac{r^2}{r^2+1} + \frac{1}{2} \left(\arctan r + \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \right) = \frac{1}{2} \arctan r + \frac{1}{2} \cdot \frac{2r^2+r}{r^2+1}$$

Finalmente, la integral M era igual a $P - Q$:

$$\begin{aligned} M &= 2 \ln|r| + \arctan r - \ln(r^2+1) - \frac{1}{2} \arctan r - \frac{2r^2+r}{2(r^2+1)} + K \\ &= 2 \ln|r| + \frac{1}{2} \arctan r - \ln(r^2+1) - \frac{2r^2+r}{2(r^2+1)} + K \end{aligned}$$

En la integral M del ejemplo anterior también es posible empezar tomando $r = \tan t$ desde el inicio. Entonces $dr = \sec^2 t dt$ y $r^2 + 1 = \sec^2 t$, y la integral se convierte en

$$M = \int \frac{2 + \tan^3 t}{\tan t \sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt = \dots = 2 \int \frac{\cos^3 t}{\sin t} dt + \int \sin^2 t dt$$

(vea el Ejercicio 5).

Recuerde que para un factor cuadrático no factorizable de la forma $ax^2 + bx + c$ con $b \neq 0$ primero se debe completar un cuadrado, como en el Ejemplo 17 en la página 112.

¹La idea viene de las sustituciones trigonométricas estudiadas en la Sección 5.6. Aunque aquí no hay explícitamente una raíz de $r^2 + 1$, podemos pensar en $(r^2 + 1)^2 = \sqrt{r^2 + 1}^4$.

Calcule

1. $\int \frac{5t}{(2t^2 + 3)^2} dt$

2. $\int \frac{6}{(1 + q^2)^2} dq$

3. $\int \frac{r^3}{(r^2 + 5)^3} dr$

4. $\int \frac{z^3 - 2z^2}{(z^2 + 4)^2} dz$

5. $\int \frac{2 + r^3}{r(r^2 + 1)^2} dr$ tomando $r = \tan t$

6. $\int \frac{w^4 + 9w^3 + 108}{(w + 1)(w^2 + 9)^2} dw$

7. $\int \frac{4u^2 + 4u + 1}{(4u^2 + 4u + 2)^2} du$

8. $\int \frac{x^2 - x + 5}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx$

6.2 La sustitución $u = \tan(x/2)$

Algunas fracciones racionales de senos y cosenos (es decir, cocientes de sumas, restas y productos de $\sin x$ y $\cos x$) pueden integrarse con el cambio de variable $u = \tan(x/2)$, con las siguientes propiedades:

Al tomar $u = \tan(x/2)$, o equivalentemente $u = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ o bien $u = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

resulta $1 + u^2 = \frac{2}{1 + \cos x}$, $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$, $dx = \frac{2 du}{1 + u^2}$

Ejemplo 2

Para calcular $N = \int \frac{\sin \beta + 1}{\cos \beta - 1} d\beta$ tomamos $u = \tan(\beta/2)$, y así

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2} + 1}{\frac{1-u^2}{1+u^2} - 1} \cdot \frac{2 du}{1 + u^2} = \int \frac{\frac{2u+1+u^2}{1+u^2}}{\frac{1-u^2-(1+u^2)}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1 + u^2} du \\ &= \int \frac{2u + 1 + u^2}{-2u^2} \frac{2}{1 + u^2} du = \int \frac{2u + 1 + u^2}{-u^2 (1 + u^2)} du \end{aligned}$$

Al descomponer el integrando en fracciones parciales obtenemos

$$\frac{2u + 1 + u^2}{-u^2 (1 + u^2)} = \frac{-2}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{2u}{1 + u^2}$$

que se integra fácilmente, resultando en

$$N = -2 \ln |u| + u^{-1} + \ln(1 + u^2) + K$$

Por último, devolviendo la sustitución llegamos a

$$N = -2 \ln \left| \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \right| + \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} + \ln \left| \frac{2}{1 + \cos \beta} \right| + K$$

Calcule

$$9. \int \frac{1}{1 - \operatorname{sen} z} dz$$

$$10. \int \frac{8 \operatorname{sen} t}{(\cos t - 1)^3} dt$$

$$11. \int \frac{13}{5 \cos q - 12 \operatorname{sen} q} dq$$

$$12. \int \sec x \, dx$$

$$13. \int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} dx$$

$$14. \int \frac{2}{1 - \cos v - 2 \operatorname{sen} v} dv$$

$$15. \int \frac{3 \operatorname{sen} w}{\cos w + \cos^2 w} dw$$

$$16. \int \frac{1 - \operatorname{sen} r}{\cos r} dr$$

$$17. \int \frac{1}{\cos r + \cos^2 r} dr$$

$$18. \int \frac{dz}{(1 - \operatorname{sen} z)(1 + \cos z)}$$

$$19. \int \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \operatorname{sen} \beta} d\beta$$

$$20. \int \frac{\operatorname{sen} p - \cos p}{1 + 2 \cos 2p} dp$$

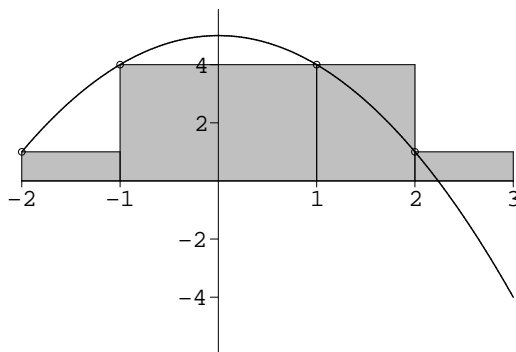
6.3 Sumas de Riemann

Una forma de aproximar una integral definida usando principios geométricos es dividir el intervalo de integración en varios subintervalos y para cada uno calcular el área de un rectángulo que aproxime el área entre la curva y el eje horizontal.

Ejemplo 3

Sea $h(x) = 5 - x^2$ y sea $I = \int_{-2}^3 (5 - x^2) dx$. Podemos dividir el intervalo $[-2, 3]$ en los cuatro subintervalos $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$ y $[2, 3]$; esta partición se describe con el conjunto de puntos extremos de los subintervalos, $P = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$, que llamaremos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 3$ (cinco puntos, cuatro subintervalos).

Diremos que el intervalo i -ésimo es $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, 3, 4$ (por ejemplo, el primer intervalo es $[x_0, x_1]$, el segundo es $[x_1, x_2]$ y el cuarto es $[x_3, x_4]$). Si en cada subintervalo tomamos un rectángulo cuya base es la longitud $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ y la altura es el valor de la función en el extremo izquierdo, $h(x_{i-1})$, tendremos la siguiente figura.



Sumando las áreas de los rectángulos obtenemos una aproximación del valor de la integral:

$$\begin{aligned}
 I &\approx \sum_{i=1}^4 h(x_{i-1})\Delta_i = \sum_{i=1}^4 (5 - x_{i-1}^2)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= (5 - x_0^2)(x_1 - x_0) + (5 - x_1^2)(x_2 - x_1) + (5 - x_2^2)(x_3 - x_2) + (5 - x_3^2)(x_4 - x_3) \\
 &= (1)(1) + (4)(2) + (4)(1) + (1)(1) = 14
 \end{aligned}$$

En general, una partición de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Dada una función f definida en $[a, b]$, una *suma de Riemann* para la integral $\int_a^b f(x) dx$ es

$$\sum_{j=1}^n f(t_j)\Delta_j$$

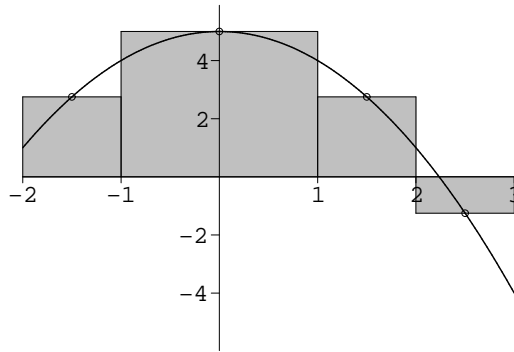
donde t_j es algún punto en $[x_{j-1}, x_j]$ y $\Delta_j = x_j - x_{j-1}$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

La suma también puede denotarse $\sum_{j=0}^{n-1} f(t_{j+1})\Delta_{j+1}$, donde $t_{j+1} \in [x_j, x_{j+1}]$ y $\Delta_{j+1} = x_{j+1} - x_j$.

Aunque hay muchas otras posibilidades, es usual tomar los puntos t_j como los extremos izquierdos (x_{j-1}) , los extremos derechos (x_j) o los puntos medios $(\frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j))$ del intervalo $[x_{j-1}, x_j]$.

Ejemplo 4

En el ejemplo anterior calculamos la suma de Riemann para $\int_{-2}^3 h(x) dx$ usando la partición $P = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ y tomando los puntos izquierdos de cada subintervalo. Tomando los puntos medios, $t_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, obtenemos la figura



en la que el área sombreada mide

$$\begin{aligned}
 I &\approx \sum_{i=1}^4 h(t_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^4 h\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= h(-1.5)(1) + h(0)(2) + h(1.5)(1) + h(2.5)(1) = 14.25
 \end{aligned}$$

Una *partición regular* de un intervalo $[a, b]$ es una en la que todos los subintervalos tienen igual longitud (la partición en los dos ejemplos anteriores no es regular). Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de igual longitud, entonces cada longitud será $\Delta = (b - a)/n$, y los puntos en la partición serán

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta, \quad x_2 = a + 2\Delta, \quad x_3 = a + 3\Delta, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta = b$$

Como vemos, se cumple la fórmula

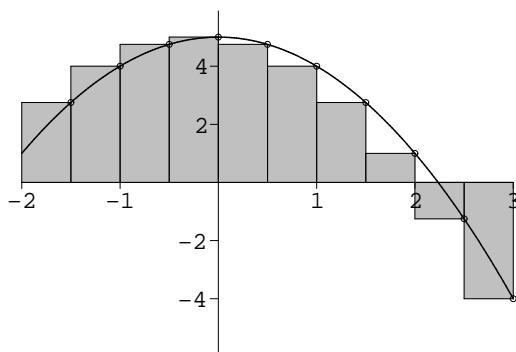
$$x_j = a + j\Delta \quad \text{para cada } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Otras fórmulas útiles en lo que sigue son, para cualquier entero positivo n ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n 1 &= n & \sum_{j=1}^n j &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{j=1}^n j^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \sum_{j=1}^n j^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcular la suma de Riemann para $I = \int_{-2}^3 (5 - x^2) dx$ usando una partición regular con $n = 10$ subintervalos y tomando los extremos derechos de cada subintervalo, como en la figura.



El ancho de cada subintervalo será $\Delta = \frac{b-a}{n} = \frac{3-(-2)}{10} = 0.5$, y la partición será $P = \{x_j \mid j = 0, 1, \dots, 10\}$ con $x_j = a + j\Delta = -2 + 0.5j$.

Tomando los extremos derechos, la suma es

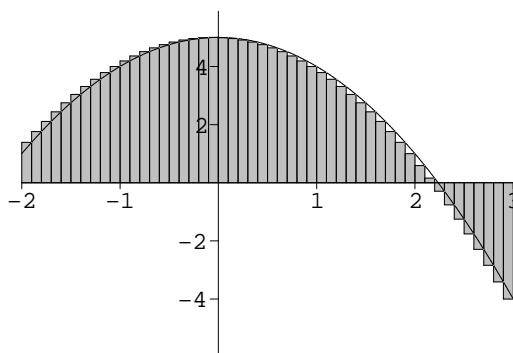
$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{10} h(x_j) \Delta &= \sum_{j=1}^n [5 - (-2 + 0.5j)^2] 0.5 \\
 &= 0.5 \sum_{j=1}^{10} [5 - (4 - 2j + 0.25j^2)] = 0.5 \sum_{j=1}^{10} (1 + 2j - 0.25j^2) \\
 &= 0.5 \left(\sum_{j=1}^{10} 1 + 2 \sum_{j=1}^{10} j - 0.25 \sum_{j=1}^{10} j^2 \right) \\
 &= 0.5 \left(10 + 2 \frac{(10)(11)}{2} - 0.25 \frac{(10)(11)(21)}{6} \right) \\
 &= 11.875
 \end{aligned}$$

Un teorema importante en el cálculo integral dice que si f es continua en $[a, b]$ entonces el límite de las sumas de Riemann sobre particiones regulares de n subintervalos, cuando $n \rightarrow \infty$, es igual al valor de la integral $\int_a^b f(x) dx$, sin importar cuál punto se tome en cada subintervalo. En símbolos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Muy informalmente², podría decirse que $\sum \rightarrow \int$ y que $\Delta \rightarrow d$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Por ejemplo, la siguiente figura representa la suma de Riemann de $\int_{-2}^3 (5 - x^2) dx$ para una partición regular con 50 subintervalos, usando los extremos derechos.



Ejemplo 6

Evaluar la integral $I = \int_{-2}^3 (5 - x^2) dx$ como límite de sumas de Riemann.

²Aunque la idea es informal, resulta que el símbolo \int fue adoptado a partir de la letra S, de suma. Las letras griegas Σ y Δ equivalen a las letras S y D respectivamente, y por eso se usan para denotar las palabras *suma* y *diferencia*. Una integral es un límite de sumas, y un diferencial puede concebirse como una diferencia infinitesimal. Tiene su lógica, entonces, que $\sum \rightarrow \int$ y que $\Delta \rightarrow d$ conforme los intervalos se hacen infinitamente pequeños.

Para un entero positivo n , la partición regular $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ tendrá

$$\Delta = \frac{b-a}{n} = \frac{5}{n} \quad \text{y} \quad x_j = a + j\Delta = -2 + \frac{5j}{n}.$$

Tomando extremos derechos (como una posibilidad entre muchas) tendremos la suma

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n h(x_j)\Delta &= \sum_{j=1}^n \left[5 - \left(-2 + \frac{5j}{n} \right)^2 \right] \frac{5}{n} \\ &= \frac{5}{n} \sum_{j=1}^n \left[5 - \left(4 - \frac{20j}{n} + \frac{25j^2}{n^2} \right) \right] \\ &= \frac{5}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{20j}{n} - \frac{25j^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{5}{n} \left(\sum_{j=1}^n 1 + \frac{20}{n} \sum_{j=1}^n j - \frac{25}{n^2} \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{5}{n} \left(n + \frac{20}{n} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{25}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{5}{n} \cdot \frac{16n^2 - 15n - 25}{6n} = \frac{40}{3} - \frac{25}{2n} - \frac{125}{6n^2} \end{aligned}$$

Finalmente, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ llegamos al valor $I = 40/3$. _____

Dadas la función y la partición, calcule la suma de Riemann para los puntos izquierdos, la suma para los puntos medios y la suma para los puntos derechos

21. $\sqrt{2u+4}$, $\{-2, -1.8, -1.6, -1.3, -1\}$

22. $3 \ln t$, $\{1, 1.1, 1.5, 1.8, 2\}$

23. $2 \cos(x-1)$, $\{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$

24. $r^2 \sqrt{1-r^2}$, $\{-1, -0.7, -0.4, -0.1, 0.3, 0.7, 1\}$

25. $\tan \theta$, $\{-\pi/4, -0.6, -0.2, 0, 0.3, 0.7, \pi/4\}$

26. $h(z)$, $\{2, 2.5, 3, 3.02, 4, 5\}$ donde $h(z) = \begin{cases} 4 - z^2 & \text{si } z \leq 3 \\ 5 - z & \text{si } z > 3 \end{cases}$

Dadas la función, el intervalo y el valor de n , calcule la suma de Riemann de la función en el intervalo usando n subintervalos regulares para los puntos izquierdos, para los puntos derechos y para los puntos medios

27. $\sqrt{2u+4}$, $[-2, -1]$, $n = 5$

28. $3 \ln t$, $[1, 2]$, $n = 6$

29. $2 \cos(x - 1), [0, \pi], n = 8$

30. $r^2 \sqrt{1 - r^2}, [-1, 1], n = 8$

31. $\tan \theta, [-\pi/4, \pi/4], n = 10$

32. $h(z), [2, 5], n = 12$

donde $h(z) = \begin{cases} 4 - z^2 & \text{si } z \leq 3 \\ 5 - z & \text{si } z > 3 \end{cases}$

Calcule cada integral como límite de sumas de Riemann

33. $\int_{-2}^2 6 \, du$

38. $\int_{-1}^{0.5} x^2 \, dx$

34. $\int_0^1 5x \, dx$

39. $\int_3^7 u(2u - 5) \, du$

35. $\int_1^6 4y \, dy$

40. $\int_{-5}^{-1} (1 - 2y - y^2) \, dy$

36. $\int_0^3 (1 - 4v) \, dv$

41. $\int_3^8 (1 - 2r)^2 \, dr$

37. $\int_2^5 (3t - 1) \, dt$

42. $\int_{-1}^1 (2t - t^3) \, dt$

Resuelva

43. Sea $I = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$.

(a) Para n natural, tome una partición

$$P = \{0, 1/n^2, 4/n^2, \dots, (n-1)^2/n^2, 1\} = \{i^2/n^2 \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

y calcule la suma de Riemann para I usando los puntos izquierdos de P .

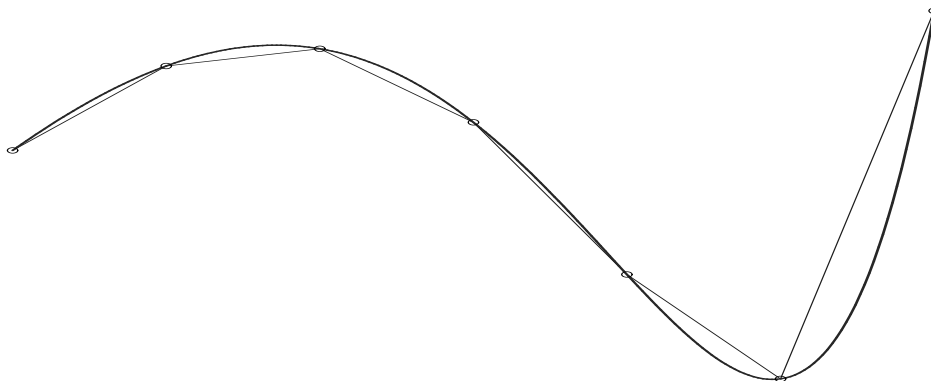
(b) Encuentre el valor de I como el límite de la suma calculada en (a), conforme $n \rightarrow \infty$.

44. Escriba el límite $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{M-1} j \frac{5}{M} \sqrt{\left(j \frac{5}{M}\right)^2 + 1} \cdot \frac{5}{M}$ como una integral definida.

45. Escriba el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(3 + 2\left(1 + \frac{3k}{n}\right)\right) \cdot \frac{3}{n}$ como una integral definida.

6.4 Longitud de arco

Dada una ecuación $y = f(x)$, la longitud del arco de su gráfico sobre un intervalo $[a, b]$ se puede aproximar con una suma de longitudes de segmentos rectos (secantes) como en esta figura:



La idea es semejante a la de sumas de Riemann, donde el área bajo una curva se aproxima con una suma de áreas de rectángulos. En el caso actual, si se toma una partición $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, entonces en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ el segmento secante conecta los puntos (x_{k-1}, y_{k-1}) y (x_k, y_k) , por lo que su longitud es

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (\Delta y_k / \Delta x_k)^2}$$

La longitud de todo el arco desde a hasta b se aproxima entonces con

$$\sum_{k=0}^n \Delta x_k \sqrt{1 + (\Delta y_k / \Delta x_k)^2}$$

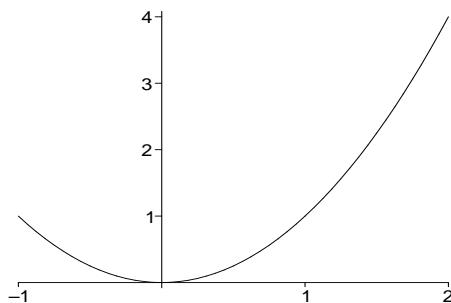
Usando la idea³ de la sección anterior, de que $\sum \rightarrow \int$ y $\Delta \rightarrow d$ conforme $n \rightarrow \infty$, y recordando que $dy/dx = f'(x)$, llegamos a la fórmula para la longitud del arco del gráfico de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ejemplo 7

Calcular la longitud del arco de $y = x^2$ para x desde -1 hasta 2 , como en la figura.

³La idea era muy informal, y no la usamos aquí como “demostración” de la fórmula sino solo como una ayuda para recordarla.



Según la fórmula, como $y' = 2x$,

$$s = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2 \int_{-1}^2 \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} dx$$

(lo último es por sacar 4 de factor común dentro de la raíz).

Ahora hacemos la sustitución trigonométrica $x = \frac{1}{2} \tan t$, con $dx = \frac{1}{2} \sec^2 t dt$ y $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} \sec t$. Entonces, dejando de lado los límites de integración por un momento,

$$\begin{aligned} 2 \int \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} dx &= 2 \int \frac{1}{2} \sec t \cdot \frac{1}{2} \sec^2 t dt = \frac{1}{2} \int \sec^3 t dt \\ &= \frac{1}{4} \sec t \tan t + \frac{1}{4} \ln |\sec t + \tan t| \end{aligned}$$

(la integral de \sec^3 no es fácil de calcular, pero vea el Ejercicio 305 en la página 124). Por último, como $\tan t = 2x$ y $\sec t = 2\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$, llegamos a

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{1}{4} \sqrt{1 + 4x^2} \cdot 2x + \frac{1}{4} \ln |\sqrt{1 + 4x^2} + 2x| \right) \Big|_{-1}^2 \\ &\approx (4.64678) - (-1.47894) \approx 6.12573 \end{aligned}$$

Esa es la longitud del arco, en unidades lineales.

Calcule la longitud de la curva en el intervalo dado

46. $3q + 5$ en $[-2, 3]$

47. $3x^{3/2} - 1$ en $[1, 4]$

48. $\frac{w^2}{2} - \frac{\ln w}{4}$ en $[1, 2]$

49. $\frac{r^3}{6} + \frac{r^{-1}}{2}$ en $[\frac{1}{2}, 2]$

50. $\frac{p^4}{4} + \frac{p^{-2}}{8}$ en $[-5, -3]$

51. $\frac{z^5}{10} + \frac{z^{-3}}{6}$ en $[1, 2]$

52. $\ln(\cos \theta)$ en $[0, \pi/4]$

53. $2t^2 + 5$ en $[0, 1]$

54. $\ln(1 - y^2)$ en $[0, \frac{1}{2}]$

55. $\ln v$ en $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

56. $2\sqrt{u}$ en $[\frac{1}{9}, 1]$

6.5 Trabajo realizado por una fuerza

En física, el *trabajo* realizado por una fuerza constante F a lo largo de una distancia d (por ejemplo, al alzar 15 kg a una altura de 2 m, o al tirar de un remolque por 2 km) se define como

$$W = Fd$$

Si la fuerza no es constante sino que depende de la distancia recorrida x , de modo que la fuerza es una función $F(x)$, entonces el trabajo realizado por esa fuerza desde el punto $x = a$ hasta el punto $x = b$ es

$$W = \int_a^b F(x) \, dx$$

- Para una aceleración constante a , la fuerza es $F = ma$, donde m es la masa del objeto acelerado.
- La aceleración debida a la gravedad es aproximadamente 9.8 m/s^2 .
- Un *newton* es una unidad de fuerza: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.
- Un *julio* es una unidad de trabajo: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Ejemplo 8

Calcular el trabajo necesario para alzar un peso de 15 kg a una altura de 2 m.

La fuerza es $F = ma = (15)(9.8) = 147 \text{ N}$, constante. Entonces el trabajo realizado es

$$W = \int_0^2 147 \, dx = 147x \Big|_0^2 = 294 \text{ J}$$

(o más simplemente, como la fuerza es constante, $W = Fd = (147)(2) = 294$ julios).

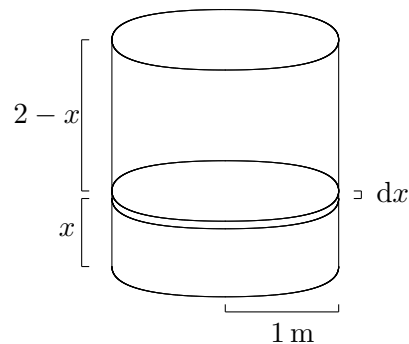
Ejemplo 9

Un tanque de agua subterráneo tiene forma cilíndrica con un metro de radio en la base y una profundidad de dos metros. Para vaciarlo, el agua debe bombearse hasta el desagüe, que está a la altura de la tapa. ¿Cuánto trabajo se realiza al vaciar el tanque cuando está lleno?

Sea x la profundidad del agua en el tanque, en metros. Para cada valor de x entre 0 y 2, imagine la superficie del agua como un disco cilíndrico de radio $r = 1$ y altura $h = dx$, como en la figura. Este disco tiene un volumen $V = \pi r^2 h = \pi dx$ en m^3 , y una masa

$$m = (\pi dx) \text{ m}^3 \cdot \frac{1000 \text{ dm}^3}{1 \text{ m}^3} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1 \text{ dm}^3} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ L}} \approx 3141.59 dx$$

en kilogramos, porque 1 dm^3 equivale a 1 L y un litro de agua tiene una masa de 1 kg.



La fuerza necesaria para elevar el disco es $F = ma \approx (3141.59 \, dx)(9.8) \approx 30\,787.6 \, dx$ newtons, y para sacarlo del tanque hay que elevarlo una altura $2 - x$ metros (lo que le falta para llegar al desagüe). Entonces el trabajo necesario para sacar toda el agua del tanque es

$$W = \int_0^2 30\,787.6 (2 - x) \, dx = 30\,787.6 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 = 61\,575.2 \, \text{J}$$

La *ley de Hooke* establece que la fuerza necesaria para mantener estirado un resorte una distancia de x unidades más allá de su longitud de equilibrio (longitud natural, o longitud de reposo) es proporcional a x : $F(x) = kx$, donde k es alguna constante que depende del resorte.

Ejemplo 10

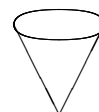
Si se necesita una fuerza de 15 N para estirar un resorte a 5 cm de su longitud natural, ¿cuánto trabajo se realiza al estirarlo desde su longitud natural hasta 10 cm de esa longitud?

Empecemos por determinar la constante k . Sabemos que para un estiramiento de $x = 0.05$ (metros) la fuerza es $F = 15$ (newtons), así que $15 = k(0.05)$, de donde $k = 300$. Entonces la fuerza necesaria para estirarlo x metros es $F = 300x$ newtons, y el trabajo realizado al estirarlo desde $x = 0$ hasta $x = 0.10$ (10 cm = 0.10 m) es

$$W = \int_0^{0.10} 300x \, dx = 150x^2 \Big|_0^{0.10} = 1.5 \, \text{J}$$

Resuelva

57. Calcule el trabajo necesario para alzar una caja de 3 kg a una altura de 80 cm.
58. ¿Cuánto trabajo se necesita para alzar un automóvil de 1500 kg a una altura de 1.5 m?
59. Calcule el trabajo necesario para tirar de un remolque una distancia de 600 m, ejerciendo una fuerza constante de 750 N.
60. Un ciclista sube por una rampa cuya inclinación aumenta conforme él avanza. Así, la fuerza con que debe pedalear es $F(x) = 800 \sin(0.01x)$ en newtons, donde x es la distancia recorrida, en metros. ¿Cuánto trabajo realiza para avanzar los primeros 10 m? ¿Los siguientes 10 m?
61. ¿Cuánto trabajo es necesario para vaciar el tanque del Ejemplo 9 cuando está medio lleno (el nivel del agua es 1 m)?
62. Un tanque tiene forma de cono con el vértice abajo, y mide 1 m de alto y 1 m de diámetro en la parte superior. Calcule el trabajo necesario para vaciar el tanque por su extremo superior cuando está lleno de agua.
63. Un recipiente tiene forma semiesférica con el vértice abajo, y mide 20 cm de radio. Calcule el trabajo necesario para vaciar el tanque por su extremo superior cuando está lleno de agua.



64. Una fuerza de 1 N estira un resorte a 10 cm de su longitud de equilibrio. Calcule el trabajo realizado al estirar el resorte desde el reposo hasta 15 cm de su longitud de equilibrio.
65. Se requiere una fuerza de 40 N para mantener un resorte estirado a 5 cm de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirarlo desde allí hasta 3 cm más (es decir, desde 5 cm hasta 8 cm de su longitud natural)?
66. Si se requiere un trabajo de 0.5 J para estirar un resorte a 20 cm de su longitud de equilibrio, ¿qué fuerza es necesaria para estirarlo 25 cm?
67. Se realizan 2 J de trabajo al estirar un resorte 12 cm desde su longitud de reposo. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirarlo desde allí 5 cm más (es decir, desde 12 cm hasta 17 cm de su longitud de reposo)?
68. Un cable mide 20 m de longitud y tiene una masa de 25 kg. Si el cable cuelga verticalmente desde una azotea, ¿cuánto trabajo se requiere para subirlo a la azotea? Suponga que la masa del cable se distribuye uniformemente en toda su longitud.

6.6 Valor promedio

Si f es una función definida en el intervalo $[a, b]$, entonces el *valor promedio* de f en $[a, b]$ es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Ejemplo 11

Si la velocidad de un avión t minutos después del despegue es $v = 300 \frac{3t+2}{t+2}$ kilómetros por hora, entonces su velocidad promedio durante los primeros cinco minutos de vuelo (esto es, durante el intervalo $[0, 5]$) es

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{5-0} \int_0^5 300 \frac{3t+2}{t+2} dt = \frac{1}{5} 300 \int_0^5 \left(3 - \frac{4}{t+2} \right) dt \\ &= 60(3t - 4 \ln |t+2|) \Big|_0^5 = 60(15 - 4 \ln 7) - 60(-4 \ln 2) \\ &\approx 599.34 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Encuentre el valor promedio de la función en el intervalo

69. $3p^2 - 4p$ en $[1, 3]$

72. $12y\sqrt{4y^2+1}$ en $[-3, 3]$

70. $3e^w + 1$ en $[-2, 0]$

73. $\frac{2u-1}{u^2-u+1}$ en $[2, 5]$

71. $\sin \theta$ en $[0, \pi]$

$$74. \frac{\ln^2 x - 3 \ln x}{x} \quad \text{en } [1, e]$$

$$75. z^2 e^{3z} \quad \text{en } [0, 2]$$

$$76. \tan^2 \alpha \quad \text{en } [-\pi/4, \pi/4]$$

$$77. \frac{\ln t}{t^2} \quad \text{en } [e^{-2}, e^{-1}]$$

$$78. v \ln(v + 4) \quad \text{en } [-3, 1]$$

$$79. \frac{3}{1 - 4s^2} \quad \text{en } [1, 2]$$

$$80. \frac{r}{r^2 - r^3} \quad \text{en } [0.1, 0.9]$$

Resuelva

81. ¿Cuál es la fuerza promedio que ejerce el ciclista del Ejercicio 60 durante los primeros 10 m?
¿Durante los siguientes 10 m?
82. Si un objeto se deja caer desde cierta altura, su velocidad de caída a los t segundos es $v = 9.8t$ m/s.
¿Cuál es la velocidad promedio entre los 5 y los 8 segundos?
83. Una varilla de metal que mide 5 m de longitud tiene una temperatura $T = 21 + 1.6^{8-x}$ grados C a los x m de distancia de uno de los extremos (en un extremo $x = 0$, y en el otro extremo $x = 5$).
¿Cuál es la temperatura promedio de la varilla?
84. La cantidad de cierto medicamento en el cuerpo de una paciente t días después de ser administrado es $C(t) = 5e^{-0.2t}$ unidades. ¿Cuál es la cantidad promedio presente en el cuerpo de la paciente durante los primeros cuatro días desde la administración del medicamento? ¿Durante el quinto día? ¿Durante el primer día?
85. Para cierta película, el ingreso por taquilla durante el n -ésimo mes desde el lanzamiento está dado por la función $f(n) = \frac{570n}{(n^2 + 3)^2}$, en millones de dólares. Encuentre el ingreso promedio mensual durante el segundo año.
86. Las ventas semanales de una pequeña tienda han sido $V(n) = 2.6 \cdot 1.03^n + 1 - 0.001n^2$, en millones de colones, donde n es el número de semanas desde que abrió sus puertas.
- (a) ¿Cuánto fue el promedio semanal de ventas durante las tres primeras semanas?
(b) ¿Cuánto fue el promedio durante los siguientes dos semanas?
(c) ¿Cuánto fue el promedio durante los primeros seis meses? (Use 6 meses = 26 semanas.)
87. Si ₡5 000 000 se invierten al 15% compuesto continuamente, el valor de la inversión luego de t años es $5e^{0.15t}$ en millones de colones. ¿Cuál es el valor promedio de la inversión durante los primeros dos años?

Repaso de técnicas de integración

Las técnicas para calcular una integral indefinida se pueden resumir en cinco. Cuando usted integre una función, se recomienda que recorra estos cinco casos en el orden en que aquí se presentan.

A.1 Integración inmediata

Algunas integrales pueden convertirse en una forma que permita su integración inmediata.

Ejemplo 1

La integral $\int \frac{(2t+1)^2}{3t} dt$ no es inmediata, pero desarrollando el cuadrado y dividiendo se obtiene

$$\frac{4t^2 + 4t + 1}{3t} = \frac{4}{3}t + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}t^{-1}$$

que se integra inmediatamente:

$$\int \left(\frac{4}{3}t + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}t^{-1} \right) dt = \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} \ln |t| + C$$

Calcule

1. $\int (5r^4 + \csc r \cot r) dr$

4. $\int (t^3 - 3^t) dt$

2. $\int \frac{(2v-1)^2}{3\sqrt{v^3}} dv$

5. $\int \frac{6^x - 4 \cdot 15^x}{3^{2x}} dx$

3. $\int \frac{(w^2-2)(w^2+2)}{4w^3} dw$

6. $\int \frac{12}{\sqrt{9-(3u)^2}} du$

A.2 Integración por sustitución

Recuerde que si u es una función de x entonces el diferencial de u es $du = u' dx$.

Generalmente se recomienda el método de sustitución cuando se necesita integrar una función compuesta, tomando u igual a la parte interna de la composición.

Luego de integrar, recuerde regresar a la variable original¹.

¹Esto puede no ser necesario en las integrales definidas, pero aquí estamos interesados solamente en las integrales indefinidas.

Ejemplo 2

Para calcular $I = \int x^2 \sqrt{5 - x^3} dx$ se puede intentar la sustitución $u = 5 - x^3$ (la parte interna de la función compuesta $\sqrt{5 - x^3}$). Así tenemos

$$u = 5 - x^3 \quad \Rightarrow \quad du = -3x^2 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = -\frac{1}{3} du$$

por lo que la integral es

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{5 - x^3} x^2 dx = \int \sqrt{u} \left(-\frac{1}{3} du\right) = -\frac{1}{3} \int u^{1/2} du = -\frac{1}{3} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (5 - x^3)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3

En la integral $J = \int \cos^4 u \sin u du$ está la función compuesta $\cos^4 u$, lo que sugiere tomar $y = \cos u$, con $dy = -\sin u du$. Entonces

$$J = \int \cos^4 u \sin u du = \int y^4 (-dy) = -\frac{y^5}{5} + D = -\frac{1}{5} \cos^5 u + D$$

Ejemplo 4

Para $K = \int \frac{y}{\sqrt{y+4}} dy$ tomamos $z = y + 4$, con $dz = dy$, así que $K = \int \frac{y}{\sqrt{z}} dz$.

El numerador, y , se despeja de la definición $z = y + 4$ y resulta ser $y = z - 4$. Entonces

$$K = \int \frac{z - 4}{\sqrt{z}} dz$$

que, aunque no es inmediata, se descompone como la integral del Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} K &= \int \left(\frac{z}{\sqrt{z}} - \frac{4}{\sqrt{z}} \right) dz = \int \left(z^{1/2} - 4z^{-1/2} \right) dz = \frac{z^{3/2}}{3/2} - 4 \frac{z^{1/2}}{1/2} + E \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{y+4}^3 - 8\sqrt{y+4} + E \end{aligned}$$

Calcule

7. $\int 12y^2(6y^3 - 7)^4 dy$

8. $\int \frac{x^2}{(2 - x^3)^2} dx$

9. $\int \frac{24q}{4q^2 + 7} dq$

10. $\int \left(\frac{3}{z^2} - \frac{3z}{z^2 + 1} \right) dz$

11. $\int e^{3p-1} dp$

12. $\int \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

13. $\int 3 \sec^2 u (\tan u + 5) du$

14. $\int \frac{6 dw}{5 - 12w + 9w^2}$

15. $\int \frac{\ln(p+1)}{p+1} dp$

16. $\int \sin^5 x dx$

17. $\int \sin^2 \beta \cos^2 \beta d\beta$

18. $\int (\sec^2 \alpha) \sqrt{5 + 2 \tan \alpha} d\alpha$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{4 + \tan x} dx$

20. $\int \tan^2 \alpha \sec^2 \alpha \sin \alpha d\alpha$

21. $\int \frac{1}{1 - \sin z} dz$

A.3 Fracciones parciales

Para integrar una fracción racional propia (un cociente de polinomios donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador), se puede intentar factorizar al máximo el denominador. Entonces la fracción total se descompone como suma de fracciones parciales, una para cada factor del denominador, así:

- Para un factor lineal no repetido², $(ax + b)$, corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{ax + b}$.
- Para un factor lineal repetido k veces, $(ax + b)^k$, corresponden k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

- Para un factor cuadrático irreducible no repetido, $ax^2 + bx + c$, corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$.

En los tres casos, las letras A y B representan constantes por determinar.

Si una fracción racional es impropia (el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador), primero deben dividirse los polinomios para conseguir la suma de un polinomio y una fracción propia.

²Que no sea repetido significa que la factorización del denominador no contiene otro factor lineal con el mismo cero. Por ejemplo, los factores $(3t - 6)$ y $(2t - 4)$, sin ser iguales, son “repetidos” porque tienen el mismo cero, $t = 2$.

Ejemplo 5

Para calcular $I = \int \frac{1+4z^2}{z(1-2z)^2} dz$ (donde la fracción es propia) empezamos por descomponer

$$\frac{1+4z^2}{z(1-2z)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-2z} + \frac{C}{(1-2z)^2}$$

Cancelando denominadores tenemos $1+4z^2 = A(1-2z)^2 + Bz(1-2z) + Cz$. Ahora sustituimos:

$$\begin{array}{llll} z=0 & \Rightarrow & 1=1A+0B+0C & \Rightarrow & A=1 \\ z=\frac{1}{2} & \Rightarrow & 2=0A+0B+\frac{1}{2}C & \Rightarrow & C=4 \\ z=1 & \Rightarrow & 5=1A-1B+1C & \Rightarrow & B=A+C-5=0 \end{array}$$

Entonces $I = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{4}{(1-2z)^2} \right) dz$. La primera parte es inmediata, y para la segunda tomamos $u = 1-2z$, con $du = -2dz$:

$$I = \ln|z| + \int 4u^{-2} \frac{du}{-2} = \ln|z| - 2 \frac{u^{-1}}{-1} + D = \ln|z| + 2(1-2z)^{-1} + D$$

(note que la constante de integración no debe llamarse C , porque en este procedimiento C es una constante que ya se determinó que tiene valor 4).

Ejemplo 6

En la integral $J = \int \frac{6w-4}{4w^2-12w+13} dw$, la fracción es propia y el denominador no se factoriza (en los números reales). Como solo hay un factor, la fracción no se descompone y se integra como está. El procedimiento es así:

- Completar el cuadrado en el denominador: $4w^2 - 12w + 13 = (2w-3)^2 + 4$.
- Sustituir la expresión al cuadrado: tomamos $x = 2w-3$, con $dx = 2dw$.
- Aplicar el cambio de variable en el resto de la integral (usando $w = \frac{x+3}{2}$):

$$J = \int \frac{6\frac{x+3}{2} - 4}{x^2 + 4} \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{3x+5}{x^2+4} dx$$

- Separar la fracción y calcular dos integrales separadas:

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{3x}{x^2+4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{5}{x^2+4} dx$$

La primera integral se calcula con la sustitución $y = x^2 + 4$, $dy = 2x dx$; la segunda es inmediata (recordando que $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int \frac{3}{y} \frac{dy}{2} + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{3}{4} \ln|y| + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C \\ &= \frac{3}{4} \ln|x^2+4| + \frac{5}{4} \arctan \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

- Devolver la sustitución:

$$J = \frac{3}{4} \ln(4w^2 - 12w + 13) + \frac{5}{4} \arctan \frac{2w - 3}{2} + C$$

Calcule

$$22. \int \frac{u - 8}{u^2 - 2u - 8} du$$

$$27. \int \frac{532 - 182q}{(3q^2 - 10q - 8)^2} dq$$

$$23. \int \frac{5}{1 - r - 6r^2} dr$$

$$28. \int \frac{2y^5 - 60y^2 + 150y - 125}{(4 - y^2)(2y - 5)^3} dy$$

$$24. \int \frac{8 - 10w^2 - w^3}{8w + 2w^2 - w^3} dw$$

$$29. \int \frac{q - 1}{q^2 + 2q + 2} dq$$

$$25. \int \frac{87 - 43s - 77s^2 - 15s^3}{(s^2 + s - 2)(s^2 - 9)} ds$$

$$30. \int \frac{8t^3 + 10}{4t^2 - 4t + 5} dt$$

$$26. \int \frac{18v^4 - 59v^2 - 31v}{3v^3 + 7v^2 + 5v + 1} dv$$

$$31. \int \frac{9^r + 3^r + 6}{9^r - 3^r - 2} dr$$

A.4 Sustitución trigonométrica

Recuerde:

Para integrar una función con...	intente la sustitución...	que resulta en...
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$\sqrt{x^2 - a^2} = \pm a \tan t$ (+ si $x > 0$, o - si $x < 0$)

Ejemplo 7

La función en $I = \int \frac{5x^3}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx$ no contiene ninguna de las formas mencionadas, pero si sacamos el coeficiente 4 de la raíz tendremos

$$I = \int \frac{5x^3}{2\sqrt{x^2 + 1/4}} dx$$

que coincide con el segundo caso, con $a = 1/2$. Entonces tomamos $x = \frac{1}{2} \tan t$, de donde obtenemos $\sqrt{x^2 + 1/4} = \frac{1}{2} \sec t$ y $dx = \frac{1}{2} \sec^2 t dt$. De aquí que

$$I = \int \frac{5(\frac{1}{8} \tan^3 t)}{\sec t} \frac{1}{2} \sec^2 t dt = \frac{5}{16} \int \tan^3 t \sec t dt$$

Podemos escribir $\tan^3 t \sec t \, dt = \tan^2 t (\tan t \sec t \, dt) = (\sec^2 t - 1)(\tan t \sec t \, dt)$, y tomando $u = \sec t$ tendremos la integral de $(u^2 - 1)du$. Ahora

$$I = \frac{5}{16} \int (u^2 - 1)du = \frac{5}{16} \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C = \frac{5}{48} \sec^3 t - \frac{5}{16} \sec t + C$$

y como $\sec t = 2\sqrt{x^2 + 1/4} = \sqrt{4x^2 + 1}$, llegamos finalmente a

$$I = \frac{5}{48} \sqrt{4x^2 + 1}^3 - \frac{5}{16} \sqrt{4x^2 + 1} + C$$

El ejemplo anterior ilustra la técnica de sustitución trigonométrica, pero podría ser más fácil calcular esa integral haciendo el cambio de variable $u = 4x^2 + 1$.

Calcule

$$32. \int 2y^3 \sqrt{9 - y^2} \, dy$$

$$35. \int \frac{dx}{(4x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$33. \int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$$

$$36. \int (q^2 - 100)^{-3/2} \, dq$$

$$34. \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{9r^2 + 1}}$$

$$37. \int \frac{dm}{(m+1)\sqrt{m^2 + 2m}}$$

A.5 Partes

La fórmula de integración por partes, $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, puede usarse para integrar productos de funciones.

Ejemplo 8

Para calcular $K = \int v^2 \arctan v \, dv$ podemos tomar $x = \arctan v$ y $dy = v^2 dv$:

$$\begin{aligned} x = \arctan v &\Rightarrow dx = \frac{dv}{v^2 + 1} \\ dy = v^2 dv &\Rightarrow y = \frac{v^3}{3} \end{aligned}$$

Entonces $K = \frac{v^3}{3} \arctan v - \int \frac{v^3}{3(v^2 + 1)} dv$. Ahora hacemos la sustitución $z = v^2 + 1$, $dz = 2v \, dv$, con lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{v^3}{3(v^2 + 1)} dv &= \int \frac{v^2}{3(v^2 + 1)} v \, dv = \int \frac{z-1}{3z} \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{6} \int (1 - z^{-1}) dz \\ &= \frac{1}{6} [z - \ln |z|] = \frac{1}{6} [v^2 + 1 - \ln(v^2 + 1)] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$K = \frac{v^3}{3} \arctan v - \frac{1}{6} [v^2 + 1 - \ln(v^2 + 1)] + C$$

Calcule

$$38. \int p^3 \ln p \, \phi$$

$$42. \int w^3 8^{w^2+1} \, dw$$

$$39. \int \frac{w+1}{e^w} \, dw$$

$$43. \int (1 + \ln u)^2 \, du$$

$$40. \int q^2 e^{3q-1} \, dq$$

$$44. \int 2^q \cos q \, dq$$

$$41. \int p \ln(p+5) \, \phi$$

$$45. \int \frac{\ln z}{(z+1)^2} \, dz$$

A.6 Repaso general

Calcule

$$46. \int \frac{dq}{\sqrt{6q-5}}$$

$$55. \int \frac{dq}{q^2(q^2+8)^{3/2}}$$

$$47. \int \frac{5z^3 - z^2 + 4z + 4}{(z^2 + z)(z^3 - z)} \, dz$$

$$56. \int \frac{6 \, dw}{5 - 12w + 9w^2}$$

$$48. \int \frac{q+1}{q^3+q} \, dq$$

$$57. \int \frac{\ln^2(y+1)}{y+1} \, dy$$

$$49. \int \sin^4 3u \, du$$

$$58. \int \frac{e^v - 2}{3e^v + 5 - 6v} \, dv$$

$$50. \int \frac{5x^3}{\sqrt{4x^2+1}} \, dx \text{ por sustitución algebraica}$$

$$59. \int 3 \cos^2(\pi w) \sin(\pi w) \, dw$$

$$51. \int \frac{t e^t}{(t+1)^2} \, dt$$

$$60. \int (2y - 2^y)^2 \, dy$$

$$52. \int \frac{(w^2-2)(w^2+2)}{4w^3} \, dw$$

$$61. \int e^{3p-1} \, \phi$$

$$53. \int \frac{e^s - 2}{e^s + 1} \, ds$$

$$62. \int z e^{3z} \, dz$$

$$54. \int (s^3 + 4s) \sqrt{s^2 + 4} \, ds$$

$$63. \int \frac{1 + \sin t}{\cos t} \, dt$$

64. $\int \operatorname{sen} x \, e^{\cos x} \, dx$

65. $\int (5r^4 + \csc r \cot r) \, dr$

66. $\int \log(5y^2 - 4y) \, dy$

67. $\int (e^v - 2)^3 \, dv$

68. $\int 10 \cot^6 y \sec^5 y \, dy$

69. $\int \frac{2t^2 + 3t - 2}{3t^4 - 2t^3} \, dt$

70. $\int \tan^4 \theta \, d\theta$

0. Cálculo proposicional

54 También $(-3)^2 = 9$.

56 Podría ser un lunes feriado.

59 La implicación $F \rightarrow F$ es cierta.

62 De hecho, los cuadrados son rectángulos. La implicación $F \rightarrow V$ es cierta.

63 La implicación $F \rightarrow V$ es cierta, pero $V \rightarrow F$ es falsa.

80 Falla si $y = F$, $z = V$.

85 Falla si $p = V$, $q = F$, $r = V$.

101 A pesar de la palabra “y” en la primera premisa, la simbolización puede ser $(S \vee O) \rightarrow L$ (si el mes es setiembre u octubre, llueve). Otra posibilidad es $(S \rightarrow L) \wedge (O \rightarrow L)$ (si el mes es setiembre, llueve, y si el mes es octubre, llueve). Para este ejercicio la segunda es más conveniente. De todos modos note que en el Ejercicio 91 se demuestra que $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ es equivalente a $(p \vee q) \rightarrow r$.

102 Si las tijeras no están en la gaveta, alguien las usó, y tuvo que ser Carla o Fabio. Como no están en la gaveta, no fue Fabio. Entonces tuvo que ser Carla.

103 Si no tiene beca, no estudia Biotecnología; entonces estudia Administración o Computación. Pero como lleva más de cinco años, no estudia Administración. Se deduce que estudia Computación, y entonces va a graduarse con hijos.

La primera premisa puede simbolizarse $A \vee (B \vee C)$, $(A \vee B) \vee C$ o de otras maneras, según convenga.

104 Si Sergio va al estadio, no puede ir al minigolf, y por eso tampoco va Pamela. Entonces ella va adonde su tío y, como siempre, lleva puesta la bufanda. Como no se la pone cuando hace calor, entonces no puede estar haciendo calor.

La segunda premisa puede simbolizarse $(Pm \rightarrow Sm) \wedge (Sm \rightarrow Pm)$ (si Pamela va al minigolf, Sergio va al minigolf, y si Sergio va al minigolf, Pamela va al minigolf), o bien $(Pm \wedge Sm) \vee (\neg Pm \wedge \neg Sm)$ (los dos van al minigolf o ninguno de los dos va).

1. Límites y continuidad

- 57** Racionalice el denominador, recordando que $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
- 58** Tome $t = \sqrt[6]{u + 3}$. Factorice $(t^6 - 1)$ por división sintética.
- 59** Tome $x = \sqrt[5]{9w + 5}$. Factorice $(x^5 - 32)$ y $(-x^5 + 9x + 14)$ por división sintética.
- 60** Tome $r^{12} = 5z + 1$ de modo que $\sqrt[3]{5z + 1} = r^4$ y $\sqrt[4]{5z + 1} = r^3$. Factorice $(r^{12} - 1)$ por división sintética.
- 68** Escriba $\sin^2 = 1 - \cos^2$, factorice y simplifique, o bien multiplique numerador y denominador por $(1 - \cos \beta)$.
- 69** Multiplique numerador y denominador por $(1 + \sin x)$.
- 78** Multiplique numerador y denominador por \sqrt{t} .
- 79** Factorice el numerador y tome $u = y - 1$. Luego descomponga $\sin(\pi u + \pi)$. Sustituya los valores (constantes) de $\cos \pi$ y $\sin \pi$. Después tome $v = \pi u$.
- 80** Tome $u = 1 - r$. Después escriba $\tan = \sin / \cos$ y descomponga \sin y \cos de $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)$. Cuando sea el momento, tome $v = \frac{\pi}{2}x$.
- 82** Puede hacer $x = 2u$ o escribir $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$.
- 83** Escriba $\sec = 1 / \cos$ y tome denominador común.
- 84** Tome $u = \pi - \alpha$. Después descomponga $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2})$. Por último tome $v = u/2$.
- 85** Tome $u = x + \pi/6$ y escriba $\tan = \sin / \cos$.
- 86** Multiplique numerador y denominador por z y separe como producto de dos fracciones.
- 87** Multiplique numerador y denominador por α , escriba $\tan = \sin / \cos$, separe como producto de dos fracciones y luego tome $u = 6\alpha$ en una y $v = 5\alpha$ en la otra.
- 88** Multiplique numerador y denominador por r y separe como producto de dos fracciones.
- 89** Escriba $\cot = \cos / \sin$, multiplique numerador y denominador por α y separe como producto de dos fracciones.
- 90** Desarrolle $\sin(x + h)$ y después separe la fracción en dos.
- 91** Desarrolle $\cos(x + h)$ y después separe la fracción en dos.
- 92** Tome $h = u - a$ y siga como en el Ejercicio 90.
- 93** Tome $h = u - a$ y siga como en el Ejercicio 91.

135 Multiplique numerador y denominador por \sqrt{u} .

136 Tome $x = \cos \beta$.

137 Multiplique numerador y denominador por $\sqrt{\sin 3t}$, después por $2t$ y por $3t$; separe la fracción como producto de tres fracciones.

138 Escriba $\csc = 1/\sin$. Tome $u = y - 1$, descomponga $\sin(\pi u + \pi)$ y factorice el numerador.

153 Calcule el límite de cada fracción.

154 Calcule el límite de cada fracción.

155 Calcule el límite de cada fracción.

157 Tome denominador común.

166 Racionalice.

168 Racionalice.

170 Tome denominador común.

172 Calcule los límites laterales por aparte.

174 Combine los logaritmos en uno.

175 Tome $x = 1/u$.

180 $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$

181 $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$

190 Cada ángulo mide $\frac{1}{n}(n-2)180^\circ$.

213 Los límites laterales en 3 deben ser iguales.

216 Los límites laterales en -1 deben ser iguales, y en 3 también.

217 Los límites laterales en 0 deben ser iguales, y en b también. Si fuera $b < 0$ habría una contradicción entre las líneas primera y tercera.

2. Derivación

20 Use la primera fórmula y tome $h = v - \pi$, o mejor use la segunda fórmula.

21 Use la primera fórmula y tome $h = r - \pi/3$, o mejor use la segunda fórmula.

22 En $2 \cos(y/2) - \cos y - 1$, reste y sume 2 así: $2 \cos(y/2) - 2 - \cos y - 1 + 2$; luego agrupe los dos primeros y los tres últimos términos.

63 La derivada es infinita, así que la recta es vertical.

69 Si la tangente es vertical, la derivada está indefinida.

70 Si la tangente es vertical, la derivada está indefinida.

71 (e) Golpea el suelo cuando su altura es cero: $h(t) = 0$.

72 (e) Golpea el suelo cuando su altura es cero: $h(t) = 0$.

73 Golpea el suelo cuando su altura es cero.

74 (a) d' es la tasa de cambio de la distancia hasta la pared, negativa porque el automóvil se está acercando. Considere que la velocidad del automóvil es positiva. (b) Se detiene cuando su velocidad es cero.

75 El volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Despeje r como función de t .

82 $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

100 Primero desarrolle el producto en el numerador.

101 Puede tomar y^2 como el primer factor y $\sec y \cot y$ como el segundo.

109 $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$

124 Si y es la altura del cohete, en metros, y α el ángulo de elevación, entonces $\tan \alpha = y/600$. Despeje y , dérVELO y evalúe la derivada en $\alpha = 20\pi/180$. Recuerde que este resultado está en metros por radián.

154 $(p \circ q)'(6) = p'(q(6)) \cdot q'(6)$

155 $g'(x) = r'(x^2) \cdot 2x$

156 $h'(t) = [f'(3-t)(-1) \cdot t - f(3-t) \cdot 1]/t^2$

157 $q'(\theta) = p'(\cos 2\theta) \cdot (-2 \sin 2\theta) \cdot 2$

173 Evalúe la derivada de y con respecto a t y evalúe en $t = 4.5$ (cuatro horas y media después de mediodía). Recuerde que ese resultado está en metros por hora.

181 Use la regla $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$ para separar antes de derivar.

190 Use las reglas de descomposición de logaritmos para separar antes de derivar.

191 Use las reglas de descomposición de logaritmos para separar antes de derivar.

197 Recuerde que $a^x = e^{x \ln a}$.

200 $q'(t) = f'(\ln t) \cdot \ln'(t)$

201 $h'(x) = \frac{1}{2}[f(e^{x^2-x})]^{-1/2} f'(e^{x^2-x}) e^{x^2-x} (2x-1)$

205 Si la recta tangente es horizontal, la perpendicular es vertical.

217 El costo promedio está dado por $\bar{C} = C(q)/q$.

243 El volumen de una esfera con radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. A los tres segundos el volumen es $V = 6$. ¿Cuánto es el radio?

244 Si el ángulo de elevación es α entonces $\tan \alpha = h(t)/5$. Cuando el objeto cae al suelo, $h = 0$ y $\alpha = 0$. ¿Cuánto es t ?

261 Calcule algunas de las primeras derivadas. ¿Qué tienen en común las de orden par? ¿Las de orden impar?

269 $y' = (2x - y)/x$, y vale 6 en $(-1, 4)$.

270 $q' = -q \ln q / (p + q)$, y vale $-\ln 2$ en $(0, 2)$.

271 $r' = -t^2/r^2$

272 $x' = -1$

273 $z' = e^{w+z} / (2z - e^{w+z}) = z^2 / (2z - z^2) = z / (2 - z)$

274 $\beta' = -\cos \alpha / \cos \beta$

275 $x' = -(x+2) \cos y / (\sin x + \sin y)$, y vale $-2\sqrt{3}$ en $(0, \pi/6)$.

3. Optimización

22 El dominio es $]0, \infty[$.

23 El dominio es $]0, \infty[$.

24 El dominio es $]0, \infty[$.

75 Encuentre los puntos críticos y estime $\lim_{u \rightarrow \infty} y$ (con una tabla).

- 76** Encuentre los puntos críticos y estime $\lim_{r \rightarrow \infty} y$.
- 77** Encuentre los puntos críticos y calcule $\lim_{q \rightarrow \pm \infty} y$.
- 78** Encuentre los puntos críticos y estime $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y$.
- 79** Maximizar $P = x(200 - x)$.
- 80** Minimizar $P = x(x - 50)$.
- 81** Minimizar $S = x + 192x^{-1}$.
- 82** Maximizar $D = x - 10x^{-1}$ en $[1, 10]$.
- 83** Maximizar $P = -x^2$ en $[-10, 10]$.
- 90** Demuestre que el mínimo de $e^x - 1 - x$ es mayor o igual que cero.
- 91** Demuestre que el mínimo de $x - \sin x$ en $[0, \infty[$ es mayor o igual que cero.
- 92** Demuestre que el mínimo de $\cos x - 1 + x^2/2$ es mayor o igual que cero. La única solución de $\sin x = x$ es $x = 0$.
- 93** Minimizar $\bar{C} = 3000 - 50n$ en $[0, 20]$, donde $n =$ número de pasajeros adicionales.
- 94** Maximizar $I = (18 - 0.03q)q$.
- 95** Maximizar $U = \frac{3}{5}(650 - q)q - 24q$ en $[0, 300]$.
- 96** El consumo de gasolina será $0.002x$ por km, y el viaje es de 700 km. El viaje tardará $700/x$ horas, y el conductor cuesta \$6 por hora. Se debe minimizar $C = 1.68x + 4200x^{-1}$ en $[70, 100]$.
- 97** Si I es la intensidad de un foco y $2I$ la del otro, y si x es la distancia entre el primer foco y el objeto, entonces la iluminación total es $kI/x^2 + 2kI/(2 - x)^2$, que se debe minimizar en $[0, 2]$.
- 98** El objeto cae cuando $y = 0$. Despeje t de esa ecuación. Se debe maximizar $x = 20 \cdot (20 \sin \theta / 4.9) \cos \theta$ en $[0, \pi/2]$.
- 99** Sea t el número de horas después de las 8 am. La distancia entre los aviones es $d = \sqrt{(600t)^2 + [450(1 - t)]^2}$, que se debe minimizar en $[0, 1]$.
- 100** Minimizar $T = \frac{1}{250}x + \frac{1}{30}\sqrt{50^2 + (75 - x)^2}$ en $[0, 75]$, donde $x =$ distancia que corre.
- 101** Sean k el costo por km de instalar en tierra (constante), $2k$ el costo de instalar en el mar, y x la distancia en tierra, en km. Se debe minimizar $C = kx + 2k\sqrt{1.5^2 + (3 - x)^2}$ para $x \in [0, 3]$.
- 102** Minimizar $C = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{(x - 40)^2 + 144}$ en $[0, 40]$, donde x es la distancia desde el poste de 8 m.
- 103** $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$.

104 $g(-0.6) = 3.6$ y $g'(-0.6) = 0$.

105 Maximizar $LT = 1500n - 18n^2$.

106 Tome $n =$ número de disminuciones de \$10, de modo que $p = 1500 - 10n$ y $q = 10000 + 100n$. Maximizar $I = -1000n^2 + 50000n + 15000000$.

107 Tome $n =$ número de disminuciones de \$100, de modo que $p = 16000 - 100n$ y $q = 5000 + 40n$. Maximizar $I = -4000n^2 + 140000n + 80000000$.

108 Maximizar (a) $I = -800n^2 + 38000n + 600000$ y (b) $U = -800n^2 + 22000n + 335000$, donde $n =$ número de descuentos de \$10.

109 Maximizar $U = -2n^2 + 100n + 30000$, donde $n =$ número de unidades adicionales.

110 Maximizar $I = -50\,000n^2 + 1\,000\,000n + 75\,000\,000$ en $[0, 6]$, donde $n =$ número de rebajas de \$10.

111 Maximizar $I = -150n^2 + 750n + 7500$ donde $n =$ número de videos por encima de cinco. Note que n debe ser entero.

112 Maximizar $N = -3n^2 + 240n + 72000$, donde $n =$ número de árboles adicionales.

113 Maximizar $I = -0.4n^2 - 2n + 300$ en $[0, 30]$, donde $n =$ número de pasajeros adicionales.

114 Minimizar $C = -n^2 + 50n + 50000$ en $[0, 120]$, donde $n =$ número de personas adicionales.

115 Maximizar $I = -200n^2 - 800n + 9000$, donde $n =$ número de incrementos de \$0.20. Note que n no puede ser negativo (se está considerando un incremento, no una reducción en la tarifa).

116 Maximizar $RT = -2n^2 + 80n + 1000$, donde n es el número de incrementos de 5% en el salario mínimo.

117 Minimizar $C = 3x + 120000x^{-1}$, donde $x =$ longitud del lado paralelo a la división.

118 Maximizar $A = x(120 - 2x)$, donde $x =$ longitud del lado perpendicular.

119 Maximizar $A = x(20 - 4x/3)$, donde $x =$ longitud del lado perpendicular.

120 Maximizar $A = (b - 5)(600b^{-1} - 6)$, donde $b =$ base de la hoja.

121 Minimizar $b[6 + 360/(b - 5)]$, donde $b =$ base de la hoja.

122 Maximizar $A = 2r(400 - \pi r)$, donde $r =$ radio de los semicírculos.

123 Maximizar $A = 2r(3 - r - r\pi/2) + \pi r^2/2$, donde $r =$ radio del semicírculo.

124 Maximizar $V = (10 - 2x)(16 - 2x)x$ en $[0, 5]$, donde $x =$ lado del cuadrado.

125 El triángulo pequeño a la derecha del rectángulo y el triángulo pequeño encima del rectángulo son semejantes al triángulo grande. Se debe maximizar $A = x(12 - 12x/5)$ en $[0, 5]$, donde $x =$ lado del rectángulo sobre el lado de 5 cm.

126 Si x es la longitud de la primera parte, r el radio del círculo y ℓ el lado del cuadrado, entonces $2\pi r = x$ y $4\ell = 40 - x$. Despeje r y ℓ . Se debe optimizar $A = \pi x^2/(2\pi)^2 + (10 - x/4)^2$ en $[0, 40]$.

127 Minimizar $d = \sqrt{x^2 + (20/x)^2}$.

128 Maximizar $A = x\sqrt{100 - x^2}$ en $[0, 10]$, o bien $A = (10 \cos \alpha)(10 \sin \alpha)$ en $[0, \pi/2]$, donde x es la longitud de la base del rectángulo y α es el ángulo entre la base y la diagonal.

129 Minimizar $C = 30\pi r^2 + 4500r^{-1}$, donde $r =$ radio de la base.

130 Minimizar $M = x^2 + 128x^{-1}$, donde $x =$ lado de la base.

131 Si el cilindro tiene radio r y altura h , entonces $r^2 + (h/2)^2 = 5^2$. Se debe maximizar $V = \pi(25 - h^2/4)h$ en $[0, 10]$.

132 Si el cono tiene radio r y altura h , entonces $r^2 + (h - 5)^2 = 5^2$. Se debe maximizar $V = \frac{1}{3}\pi(10h - h^2)h$ en $[0, 10]$.

133 Minimizar $M = \pi r^2 + 2\pi r(1.8r^{-2}/\pi - \frac{2}{3}r) + 2\pi r^2$ donde $r =$ radio de la base, en dm.

134 Minimizar $C = 2\pi r(4.2r^{-2}/\pi - \frac{4}{3}r) \cdot K + 4\pi r^2 \cdot 3K$, donde $r =$ radio de la base, en m, y $K =$ costo por metro del material del cilindro.

135 Maximizar $C = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{100 - r^2}$ en $[0, 10]$, donde $r =$ radio de la base del cono.

136 Minimizar $d = \sqrt{x^2 + (3x + 2)^2}$.

137 Minimizar $d = \sqrt{(x - 1)^2 + (x^2 + 1)^2}$.

138 Minimizar $d = \sqrt{(x - 4)^2 + x}$ en $[0, \infty[$.

139 Maximizar $A = x(2x^2 - 9x + 12)$ en $[0, 3]$.

140 Maximizar $A = (2x)(2y) = 4x\sqrt{9 - x^2}$ en $[0, 3]$ donde $x =$ coordenada horizontal de la esquina superior derecha, o bien $A = 36 \cos \theta \sin \theta = 18 \sin 2\theta$ en $[0, \pi/2]$, donde $\theta =$ ángulo entre el eje X positivo y la esquina superior derecha.

141 Considere la circunferencia $x^2 + y^2 = 5^2$ en el plano cartesiano con centro en $(0, 0)$ y radio 5, y el triángulo isósceles con vértices en (x, y) , $(-x, y)$ y $(0, 5)$. Su base es $b = 2x$ y su altura es $h = 5 - y$. Se debe maximizar $A = \frac{1}{2}(2x)(5 + \sqrt{25 - x^2})$. También puede tomar el ángulo θ entre el eje X positivo y la esquina inferior derecha del triángulo. Entonces $x = 5 \cos \theta$ y $y = 5 \sin \theta$, y se debe maximizar $A = \frac{1}{2}(10 \cos \theta)(5 - 5 \sin \theta)$.

142 Sean $(0, 0)$, $(x, 0)$ y $(0, y)$ los vértices. Abajo a la derecha se forma un segundo triángulo, con vértices $(3, 0)$, $(x, 0)$ y $(3, 2)$, semejante al primero. Entonces $y = 2x/(x - 3)$ y el objetivo es maximizar $A = \frac{1}{2}x \cdot 2x/(x - 3)$.

143 Sean $(0, 0)$, $(x, 0)$ y $(0, y)$ los vértices. Abajo a la derecha se forma un segundo triángulo, con vértices $(4, 0)$, $(x, 0)$ y $(4, 2)$, semejante al primero. Entonces $y = 2x/(x - 4)$ y el objetivo es minimizar $A = \frac{1}{2}x \cdot 2x/(x - 4)$.

144 (Vea también la siguiente sugerencia.) Tome un punto (x_1, y_1) en la parábola P y un punto (x_2, y_2) en la recta R . El objetivo es minimizar la distancia $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, con $y_1 = x_1^2$ y $y_2 = x_2 - 1$ (por estar los puntos en P y R respectivamente). Además, como los puntos óptimos forman un segmento perpendicular a la recta L (por minimizar la distancia) y la pendiente de L es $m = 1$, entonces $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = -1$.

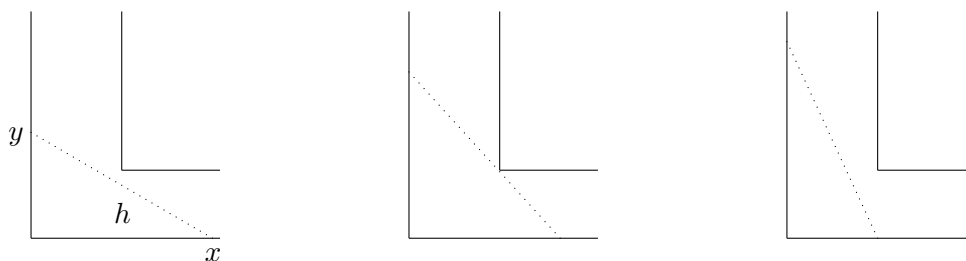
144 (Vea también la sugerencia anterior.) La distancia mínima se alcanza entre dos puntos, un punto p_1 en la recta R y un punto p_2 en la parábola P , tales que el segmento que los une es perpendicular a la recta y a la parábola. Encuentre:

1. El punto p_1 en la parábola P donde la tangente a la parábola es paralela a la recta R .
2. La ecuación de la recta que pasa por p_1 y es perpendicular a la recta R .
3. El punto p_2 donde la perpendicular anterior interseca a la recta R .
4. La distancia entre p_1 y p_2 .

145 Sea L la longitud de la barra más larga, y suponga que una barra de longitud L está pasando por la esquina, tocando las paredes inferior e izquierda. Defina un sistema de coordenadas con el origen $(0, 0)$ en la esquina inferior izquierda del dibujo, y sean $(0, x)$ y $(y, 0)$ los puntos de contacto de la barra con las paredes inferior e izquierda respectivamente.

Sea h la "altura" de la barra sobre el punto $(0, 4)$ como en el primer dibujo abajo. Note dos triángulos semejantes: uno con catetos x y y , y el otro con catetos $x - 4$ y h .

Conforme la barra se traslada hacia la izquierda y x decrece, h aumenta, alcanza un máximo y luego disminuye. Para que la barra apenas pase sin atascarse, ese máximo debe ser igual a 3. Tome h como la función objetivo, donde $h(x) = (1 - 4x^{-1})\sqrt{L^2 - x^2}$. El punto crítico es $x = \sqrt[3]{4L^2}$. Iguale el máximo de h a 3 y despeje L .



4. Otras aplicaciones de las derivadas

3 Puede ser mejor racionalizar.

15 Después de usar L'Hôpital (o tal vez mejor antes) puede tomar $x = 1/r$.

26 Escriba $\tan = \sin / \cos$. Note que $\sin(\pi r/2)$ no tiende a cero; puede separarlo del límite y concentrarse en los dos factores que sí tienden a cero.

35 Escriba $\ln r/(e^r - 1)^{-1}$. Después de usar L'Hôpital, separe $\lim(-1/e^r) \cdot \lim[(e^r - 1)^2/r]$; el primer factor es inmediato, y solo el segundo necesita L'Hôpital.

36 Haga la sustitución $u = 1/t$.

42 Tome denominador común.

43 Tome denominador común.

47 Este no es indeterminado.

50 Escriba $\csc = 1/\sin$ y $\alpha^{-1} = 1/\alpha$, y tome denominador común.

63 Tome $u = 1/y$, y el límite se convierte en $\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{1/u}$.

64 Tome $u = 1/x$, y el límite se convierte en $\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 - 5u)^{1/u}$.

65 Tome $u = 1/s$, y el límite se convierte en $\lim_{u \rightarrow 0^+} (u^2 + 3u + 1)^{1/u}$.

74 Después de llegar a la expresión $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \ln(1 + r/n)}{1/n}$, tome $u = 1/n$.

86 Use el Teorema del encaje (Sección 1.6).

87 Escriba $\cot t = \cos t / \sin t$.

88 Separe como $(3u + 1)/u - (\sin 2u)/u$, y para la segunda fracción use el Teorema del encaje (Sección 1.6).

102 Use el Teorema del encaje (Sección 1.6).

103 Use el Teorema del encaje (Sección 1.6).

114 $y' = 3(r - 2)(r + 2)$; $y'' = 6r$.

115 $y' = 3q(q - 2)$; $y'' = 6q - 6$.

116 $y' = -6(p + 1)(p - 2)$; $y'' = -12p + 6$.

117 $y' = 12x^2(x + 1)$; $y'' = 12x(3x + 2)$.

118 $y' = 4(v - 1)(v - 4)^2$; $y'' = 12(v - 2)(v - 4)$.

119 $y' = 1/(q + 3)^2$; $y'' = -2/(q + 3)^3$.

120 $y' = t(t - 2)/(t - 1)^2$; $y'' = 2/(t - 1)^3$.

121 $y' = \frac{-(w^2 + 4)}{(w - 2)^2(w + 2)^2}$; $y'' = \frac{2w(w^2 + 12)}{(w - 2)^3(w + 2)^3}$.

$$122 \quad y' = -v(v-2)/(1-v)^2; \quad y'' = 2/(1-v)^3.$$

$$123 \quad y' = 2(p+3)(p+1)/(p+2)^2; \quad y'' = 4/(p+2)^3.$$

$$124 \quad y' = \frac{-10x}{(2-x)^2(2+x)^2}; \quad y'' = \frac{-10(3x^2+4)}{(2-x)^3(2+x)^3}.$$

$$125 \quad y' = (4r-2)/(r+1)^3; \quad y'' = (10-8r)/(r+1)^4.$$

$$126 \quad y' = (u+2)(u^2-2u+4)/u^3; \quad y'' = -24/u^4.$$

$$127 \quad y' = \frac{1}{2}v(3v+4)/(v+1)^{3/2}; \quad y'' = \frac{1}{4}(3v^2+8v+8)/(v+1)^{5/2}.$$

$$128 \quad y' = 2/(s^2+2)^{3/2}; \quad y'' = -6s/(s^2+2)^{5/2}.$$

$$129 \quad y' = (\sqrt[3]{t}-2)(\sqrt[3]{t}+2)t^{-2/3}; \quad y'' = \frac{8}{3}t^{-5/3}.$$

$$130 \quad y' = \frac{-16(x^2-2)}{x^2(x-2)^{3/2}(x+2)^{3/2}}; \quad y'' = \frac{16(3x^4-10x^2+16)}{x^3(x-2)^{5/2}(x+2)^{5/2}}.$$

$$131 \quad y' = \frac{\sqrt{8-w}-2\sqrt{8+w}}{2\sqrt{8-w}\sqrt{8+w}}; \quad y'' = -\frac{(8-w)^{3/2}+2(8+w)^{3/2}}{4(8-w)^{3/2}(8+w)^{3/2}}. \text{ Puede haber extremos locales en los bordes del dominio.}$$

$$132 \quad y' = \frac{-3}{2\sqrt{x(x-3)^3}}; \quad y'' = \frac{3(x-3)^2(4x-3)}{4\sqrt{x(x-3)^3}}. \text{ Puede haber extremos locales en el borde del dominio.}$$

$$133 \quad y' = e^p - e^{-p}; \quad y'' = e^p + e^{-p}.$$

$$134 \quad \text{La única solución de } \ln(w+2) - w - 1 = 0 \text{ es } w = -1; \quad y' = -(w+1)/(w+2); \quad y'' = -1/(w+2)^2.$$

$$135 \quad y' = 2(2-x)e^{4x-x^2}; \quad y'' = 2(2x^2-8x+7)e^{4x-x^2}.$$

$$136 \quad y' = 2p/(p^2+1); \quad y'' = -2(p-1)(p+1)/(p^2+1)^2.$$

$$137 \quad y' = 3e^{-q}/(1+e^{-q})^2; \quad y'' = 3e^{-q}(e^{-q}-1)/(1+e^{-q})^3.$$

$$138 \quad y' = -\sin \beta; \quad y'' = -\cos \beta.$$

$$139 \quad y' = 1 - 2 \cos t; \quad y'' = 2 \sin t.$$

$$140 \quad y' = 1 - \tan^2 u; \quad y'' = -2 \tan u (1 + \tan^2 u).$$

$$141 \quad \text{Si } x \text{ es la distancia del pie a la pared y } y \text{ es la altura del extremo superior, ambos en m, entonces } x' = 0.25 \text{ y } x^2 + y^2 = 4^2.$$

142 Si d es la distancia de la lancha al muelle y ℓ la longitud de la cuerda, ambos en m, entonces $\ell' = -0.4$ y $d^2 + 2^2 = \ell^2$.

143 Si x es la distancia de la persona al poste y y es la distancia del extremo de la sombra al poste, ambos en m, entonces $x' = -100$ (con el tiempo en minutos) y $(y - x)/1.7 = y/6$.

144 Si r es el radio y A el área, ambos en cm, entonces $r' = 30$ y $A = \pi r^2$.

145 Si r es el radio en cm y V el volumen en cm^3 , entonces $V' = 100$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

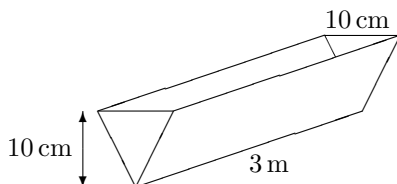
146 Si r es el radio en cm y S la superficie en cm^2 , entonces $S' = -2$ y $S = 4\pi r^2$.

147 Si r es el radio en cm, V el volumen en cm^3 y S la superficie en cm^2 , entonces $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$ y $V' = kS$ con k constante.

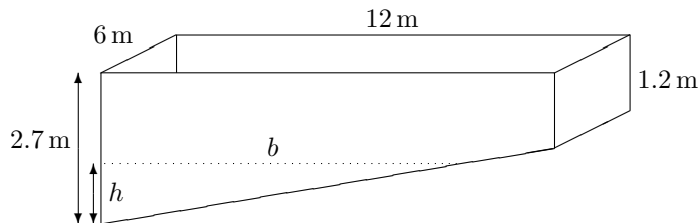
148 Si h es el nivel de agua en dm, E la cantidad de agua que entra y S la cantidad que sale, en litros, y V es el volumen de agua en dm^3 , entonces $S' = 25$, $h' = -0.05$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = E - S$ y $h/2 = r/2$.

149 Si r y h son el radio y la altura de la pila en m, y V es el volumen en m^3 , entonces $V' = 0.8$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ y $h = 2r$.

150 Si h es el nivel del agua, b la longitud de la superficie del agua en cada extremo triangular, ambos en cm, y V es la cantidad de agua en cm^3 , entonces $V' = 50$, $b/10 = h/10$ y $V = \frac{1}{2}bh \cdot 300$.



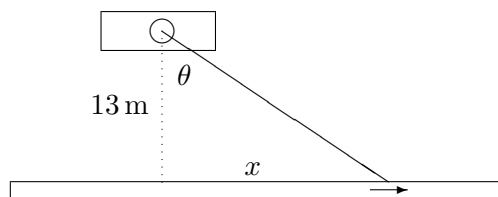
151 Si h es el nivel del agua, b la longitud de la superficie del agua en cada extremo (perpendicular a las paredes de 6 m), ambos en m, y V es la cantidad de agua en m^3 , entonces $V' = 3$, $b/12 = h/1.5$ y $V = \frac{1}{2}bh \cdot 6$.



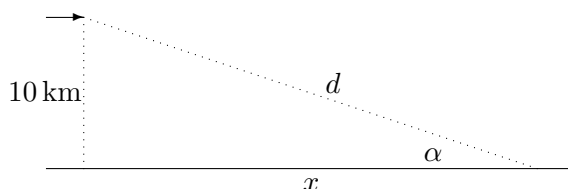
152 Si x es la distancia del pie a la pared, en m, y α el ángulo entre la pared y la escalera, entonces $x' = 0.25$ y $\sin \alpha = x/4$.

153 El sol gira 360° cada 24 horas. Si x es la longitud de la sombra, en m y α el ángulo de elevación del sol, entonces $\alpha' = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60)$ rad/s y $\tan \alpha = 5/x$.

154 Sea θ el ángulo central en el techo de la ambulancia, entre el rayo de luz y el segmento desde el techo hasta el punto más cercano en la pared, y sea x la distancia desde la proyección de la luz hasta el punto más cercano en la pared, en m. Entonces $\theta' = 40(2\pi)$ rad/min y $\tan \theta = x/13$. Cuando el ángulo en la pared es 30° , $\theta = \pi/3$.

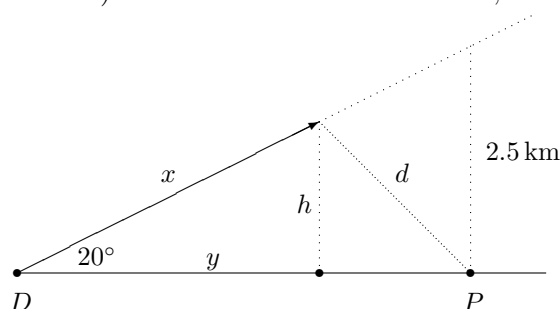


155 Si d es la distancia del avión al radar y x es la distancia que le falta al avión para pasar sobre el radar, ambas en km, y si α es el ángulo de elevación, entonces $\alpha' = 0.5$ grados por segundo, $\sin \alpha = 10/d$, $d^2 = x^2 + 10^2$ y $\tan \alpha = 10/x$.



156 Suponiendo que el avión ha volado en línea recta desde que despegó y que el punto de despegue es D , la distancia DP en km desde D hasta P satisface $\tan 20^\circ = 2.5/DP$. Si x es la distancia que el avión ha volado, y la distancia horizontal que ha cubierto, h la altura del avión y d la distancia del avión al punto P , todas en km, entonces $x' = 400$ (con el tiempo en horas), $\cos 20^\circ = y/x$, $\sin 20^\circ = h/x$ y $d^2 = h^2 + (DP - y)^2$.

La incógnita es d' . Escriba h y y en términos de x antes de derivar. La ecuación es $d^2 = x^2 \sin^2 20^\circ + (DP - x \cos 20^\circ)^2$. Cuando la altura es 2500 m, $\sin 20^\circ = 2.5/x$ (en km).



5. Integración

28 $e^{2u} = (e^2)^u$

29 $e^{-t} = (e^{-1})^t$

30 $6^x/3^{2x} = (2/3)^x$, y $15^x/3^{2x} = (5/3)^x$.

34 Saque 9 como factor común de la raíz.

47 La velocidad es la derivada de la distancia, así que $d(t) = \int v(t) dt$.

48 La velocidad es la derivada de la altura, así que $h(t) = \int v(t) dt$.

49 A los 0 s no ha recorrido ninguna distancia.

50 Recuerde que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

53 $F(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + C$

54 $F(p) = \frac{1}{5}p^5 - 2p^2 + C$

55 $F(q) = 4q^{3/2} + \frac{2}{3}q^{-3} + C$

56 $F(s) = 4s - 2s^{5/2} + C$

57 $F(u) = \frac{3}{4}u^{4/3} + \frac{3}{2}u^{2/3} + C$

58 Note que $1/(3r)^2 = \frac{1}{9}r^{-2}$. $F(r) = \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{9}r^{-1} + C$

59 $F(t) = \ln|t| - \frac{1}{2}t^{-2} + C$

60 $F(v) = 2^v / \ln 2 + C$

61 Use la identidad $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. $F(r) = 3 \sin r + C$.

62 $F(\theta) = \arcsen \theta + C$

63 La derivada de $\operatorname{arcsec} y$ es $1/(|y|\sqrt{y^2 - 1})$, y $y > 0$ en el intervalo de integración. Entonces $F(y) = \operatorname{arcsec} y$. Para evaluar arcsec en la calculadora, use la identidad $\operatorname{arcsec}(y) = \arccos(1/y)$.

64 La derivada de $\operatorname{arcsec} u$ es $1/(|u|\sqrt{u^2 - 1})$, y $u < 0$ en el intervalo de integración. Entonces $F(u) = -\operatorname{arcsec} u$. Para evaluar arcsec en la calculadora, use la identidad $\operatorname{arcsec} u = \arccos(1/u)$.

65 Descomponga \int_3^8 como $\int_3^5 + \int_5^8$.

66 Descomponga \int_{-2}^3 como $\int_{-2}^0 + \int_0^3$.

67 Separe la integral en dos, dependiendo del signo de $6 - 4u$.

68 $F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + bx + C$

69 $F(z) = \ln|z| + C$

72 La superior es $y = 0$ y la inferior es $y = \sqrt{x} - x$.

73 Intersecciones: $x = -1$ y $x = 1.6$.

74 Intersecciones: $x = -2$, $x = 1$ y $x = 2$. Las funciones superior e inferior se intercambian: a la izquierda la superior es $y = 0$; a la derecha es $y = x^2 - x^3 + 4x - 4$.

75 Intersecciones: $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ y $x = 1$ (factorice por división sintética).

76 Intersecciones: $x = 0$, $x = 0.5$ y $x = 1$.

77 Intersecciones: $x = (3 - \sqrt{13})/2$, $x = 0$ y $x = (\sqrt{5} - 1)/2$.

88 Las curvas se intersecan en -2 , 0 y 2 . Calcule el área entre -2 y 0 , y por aparte el área entre 0 y 2 ; luego súmelas.

93 $e^{-0.16t} = (e^{-0.16})^t$

95 El flujo de caja es la tasa de cambio del ingreso total.

115 Si toma $u = 4 - p^2$ entonces $du = -2p \, dp$ y $p^3 \, dp = (p^2) \cdot (p \, dp) = (4 - u) \cdot (-\frac{1}{2} du)$.

117 $s^3 + 4s = s(s^2 + 4)$

123 Tome $u = z + 5$.

124 Tome $u = 3y - 1$.

125 No importa que -1 sea menor que 0 .

129 Tome $y = 1 + \sqrt{p}$.

135 Desarrolle el cuadrado.

138 $1/\sqrt{e^x} = e^{-x/2}$

150 Tome $x = 3v$.

151 Saque 4 como factor común de la raíz y tome $u = t/2$.

153 Complete cuadrado en el denominador y tome $u = x - 5$.

154 Complete cuadrado en el denominador y tome $z = 3w - 2$.

155 Complete cuadrado en el denominador y tome $x = u - 3$.

156 Complete cuadrado en la raíz y tome $v = 2y + 1$.

157 Tome $y = e^r$.

160 Multiplique el numerador y el denominador por e^t .

161 Tome $u = \ln(p + 1)$.

180 Puede tomar $u = \sin 2x$, o usar el resultado del Ejemplo 9.

183 Separe la fracción en dos. Para la primera, saque 4 como factor común de la raíz y tome $x = u/2$. Para la segunda, tome $y = 4 - u^2$.

184 Si $V(t)$ es el valor en dólares a los t años, entonces $V(t)$ *decrece* a razón de $1500\sqrt{t+1}$ dólares por año: $V'(t) = -1500\sqrt{t+1}$.

185 Recuerde que la velocidad es la derivada de la distancia, así que $d(t) = \int v(t) dt$. También note que t está en minutos pero v está en km/h; primero convierta v a km/min dividiéndolo por 60:

$v = 5\frac{3t+2}{t+2}$ km/min, y luego integre con respecto a t de 0 a 3 (minutos).

Otra opción es convertir el tiempo a horas: si x es el número de horas, entonces $x = \frac{1}{60}t$ y $t = 60x$, así que $v = 300\frac{3(60x)+2}{(60x)+2}$; integre con respecto a x de 0 a $\frac{3}{60}$ (horas).

186 Recuerde que la aceleración es la derivada de la velocidad, así que $v(t) = \int a(t) dt$. Note también que $v(0) = 0$. Para integrar, escriba $t^2 + 225 = 225((t/15)^2 + 1)$ y tome $u = t/15$.

188 El radio a los t min es $r(t) = 9\sqrt{2t+4} - 18$, y el área es πr^2 .

189 El flujo de inversión es la tasa de cambio de la inversión total.

191 Si no se contratan recolectores, no hay recolección: $C(0) = 0$.

200 Recuerde intentar sustitución antes que fracciones parciales.

223 Tome $t = e^y$.

224 Tome $y = e^s$.

225 Tome $u = e^x$, y entonces el denominador será $1 - u^2$.

226 Tome $v = 3^r$, y entonces $9^r = v^2$. El numerador será $v^2 + v + 6$.

227 Tome $u = 2^t$, así que $4^t = (2^t)^2 = u^2$ y el denominador será $u^2 + 2u + 2$.

228 Tome $x = \ln q$.

229 Tome $x = v^{1/2}$, y el denominador será $x^3 + 9x$.

239 Puede tomar $u = 5 + 2 \tan \alpha$.

242 Puede sacar $\sec \alpha$ como factor común y tomar $u = \sec \alpha$, o sacar $\sec^2 \alpha$ como factor común y tomar $u = \tan \alpha$.

244 Escriba $(\tan^2)(\tan^2) = (\tan^2)(\sec^2 - 1)$.

246 Escriba $(\cot^2)(\csc \cot) = (\csc^2 - 1)(\csc \cot)$.

247 Convierta a senos y cosenos.

248 Convierta a senos y cosenos.

249 Convierta a senos y cosenos, y tome $x = \cos^2 v + 1$. Otra opción es multiplicar numerador y denominador por $\sec v$, tomar $y = \sec v$ y descomponer en fracciones parciales.

250 Note que el exponente de $\cos r$ es impar. O bien multiplique numerador y denominador por $1 + \sin r$. O, si recuerda las fórmulas para $\int \sec$ y para $\int \tan$, simplemente separe la fracción (y si no las recuerda, calcúlelas, notando que \cos tiene exponente impar en ambas).
Vea el Ejercicio 16 en el Capítulo 6 (página 132).

251 Multiplique numerador y denominador por $1 + \sin z$, y separe la fracción resultante.
Vea el Ejercicio 9 en el Capítulo 6 (página 132).

252 Convierta a senos y cosenos, multiplique numerador y denominador por $\cos t$, y tome $u = \sin t$. También vea el Ejercicio 306 (página 124) y su sugerencia.

253 Vea el Ejemplo 21. Vea también el Ejercicio 12 en el Capítulo 6 (página 132) y su sugerencia.

255 Puede ser más fácil tomar $u = 9 - y^2$.

256 Tome $t = \sin \beta$ y use el resultado del Ejercicio 235 (página 117).

257 Tome $u = 3r$. O factorice: $\sqrt{9(r^2 + \frac{1}{9})} = 3\sqrt{r^2 + \frac{1}{9}}$.

259 Puede ser más fácil tomar $x = 4v^2 + 1$.

264 Piense en $(4x^2 - 4x + 5)^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 5}^4$.

266 $F(x) = -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} \right| + C$

267 Para integrar $\sec^3 t$ escríbalo como $1/\cos^3 t$, tome $x = \sin t$ y use fracciones parciales. O dentro de un tiempo vea los ejercicios 305 y 306 (página 124).

268 $F(t) = \sqrt{t^2 - 16} + 4 \operatorname{arcsec}(t/4) + C$

269 Tome $x = \ln y$.

270 Tome $z = \sqrt{w}$.

271 Tome $t = e^u$.

272 $F(z) = \frac{1}{9}e^{3z}(3z - 1)$

273 $F(p) = \frac{1}{4}p^4 \ln p - \frac{1}{16}p^4$

274 $F(s) = \frac{2}{3}s^{3/2} \ln s - \frac{4}{9}s^{3/2}$

275 $F(x) = 2x \ln \sqrt{x} - x$

280 $F(\beta) = \sin \beta - \beta \cos \beta$

281 $F(z) = \frac{1}{4} \cos 2z + \frac{1}{2} z \sin 2z$

282 Para integrar $p^2/(p^2 + 1)$, divida los polinomios. $F(p) = \frac{1}{2}(p^2 \arctan p - p + \arctan p)$.

284 Desarrolle el cuadrado.

287 $F(w) = (w + \frac{1}{2}) \ln(2w + 1) - w$

288 Antes (o después) de integrar por partes, haga la sustitución $t = p + 5$.

$F(p) = \frac{1}{2} \ln(p + 5)(p^2 - 25) - \frac{1}{4}p^2 + \frac{5}{2}p$.

289 Después de integrar por partes, use la sustitución $u = 5y - 4$.

292 Después de integrar por partes, simplifique $(3v^3 - 4v^2)/(v^3 - 2v^2)$.

$F(v) = v \ln(v^3 - 2v^2) - 2 \ln(v - 2) - 3v$.

293 Primero sustituya $x = w^2 + 1$. $F(x) = (x - 1)8^x/(2 \ln 8) - 8^x/(2 \ln^2 8)$.

294 Primero sustituya $x = p^2 - 2p$. Entonces $(p - 1)^2 = x + 1$ y $dx = 2(p - 1)dp$. Descomponga $(p - 1)^3 = (p - 1)^2 \cdot (p - 1)$.

295 Primero sustituya $x = \sqrt{u}$.

296 Use partes con $u = t$, $dv = (4 + 3t)^{-1/2} dt$; o mejor sustituya $u = 4 + 3t$.

$F(t) = \frac{2}{3}t(4 + 3t)^{1/2} - \frac{4}{27}(4 + 3t)^{3/2} = \frac{2}{27}(4 + 3t)^{3/2} - \frac{8}{9}(4 + 3t)^{1/2}$.

297 Use partes con $x = v^2$, $dy = v(9 - v^2)^{-1/2} dv$; o mejor haga una sustitución trigonométrica.

Todavía mejor, sustituya $x = 9 - v^2$. $F(v) = -v^2(9 - v^2)^{1/2} - \frac{2}{3}(9 - v^2)^{3/2} = -\frac{1}{3}(v^2 + 18)\sqrt{9 - v^2}$.

298 $F(u) = u + u \ln^2 u$

299 Primero sustituya $y = 4 - 7x$. $F(y) = \frac{2}{7}y^{-1/2} \ln y + \frac{4}{7}y^{-1/2}$.

301 Tome $u = te^t$ y $dv = (t + 1)^{-2} dt$.

302 Use partes con $u = \ln(p + \sqrt{1 + p^2})$; du resulta ser $dp / \sqrt{1 + p^2}$.

305 Use partes con $u = \sec \alpha$. También vea el ejercicio siguiente y su sugerencia.

306 Escriba $\tan^2 = \sec^2 - 1$, desarrolle y separe en dos integrales. Para la primera, vea el ejercicio anterior y su sugerencia. Para la segunda, la fórmula de $\int \sec$ se da después del Ejemplo 21 de este capítulo. Vea también el Ejercicio 252 (página 118) y su sugerencia. Todavía otra opción es usar partes con $u = \tan t$.

308 Primero sustituya $x = \sqrt{t}$. Vea el Ejercicio 280 (página 124) y su sugerencia.

$F(t) = 2 \sin \sqrt{t} - 2 \sqrt{t} \cos \sqrt{t} + C$.

309 Use integración por partes con $u = \ln z$, y después fracciones parciales.

310 Use integración por partes con $u = \ln(y^2 - 1)$, y después fracciones parciales.

311 $F(w) = \arcsen w + C$

312 $F(p) = \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan \frac{p}{\sqrt{8}} + C$

313 Tome $x = \ln u$. $F(u) = \frac{1}{2} \ln^2 u + C$.

314 $F(t) = \frac{3}{2}(t-2)^{2/3} + C$

315 $F(x) = \frac{1}{1-p} x^{1-p} + C$ si $p \neq 1$. La convergencia depende de si $p > 1$ o $p < 1$.

316 $F(\alpha) = \tan \alpha - \alpha + C$

317 $F(\theta) = \ln |\sec \theta| + C$

318 $F(p) = (p-1)e^p + C$

319 $F(v) = \frac{1}{2}v^2 \ln v - \frac{1}{4}v^2 + C$

320 $F(q) = \frac{1}{2}e^{-q}(\sin q - \cos q) + C$. Para encontrar $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2}e^{-q}(\sin q - \cos q)$, use el Teorema del encaje (Sección 1.6).

321 $F(\beta) = -\cot \beta + C$

322 $F(r) = \arctan r + C$

323 $F(y) = \ln |\ln y| + C$

324 Tome $x = e^w$. $F(w) = \arctan(e^w) + C$.

325 $F(z) = \frac{1}{6}(\ln |z-3| - \ln |z+3|) + C$

6. Temas adicionales sobre integración

1 Mejor tome $u = 2t^2 + 3$.

3 Mejor tome $u = r^2 + 5$.

9 Además de probar $u = \tan(z/2)$, vea también el Ejercicio 251 del Capítulo 5 (página 118) y su sugerencia.

10 Mejor tome $u = \cos t - 1$.

12 Escriba $\sec x = 1/\cos x$. Vea también el Ejercicio 253 en el Capítulo 5 (página 118) y su sugerencia.

15 También puede tomar $x = \cos w$.

16 Además de probar $u = \tan(y/2)$, vea también el Ejercicio 250 del Capítulo 5 (página 118) y su sugerencia.

18 Después de hacer la sustitución, note que la fracción racional es impropia.

20 Recuerde que $\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p$.

44 Tome $\Delta = 5/M$ y $x_j = j\Delta$.

45 Tome $\Delta = 3/n$ y $x_k = 1 + k\Delta$.

46 $\int \sqrt{10} \, dq = q\sqrt{10} + C$

47 $\int \frac{1}{2} \sqrt{4 + 81x} \, dx = \frac{1}{243} (4 + 81x)^{3/2} + C$

48 $\int (4w^2 + 1)/(4w) \, dw = \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{4} \ln |w| + C$

49 $\int (r^4 + 1)/(2r^2) \, dr = -\frac{1}{2} r^{-1} + \frac{1}{6} r^3 + C$

50 $\int (4p^6 + 1)/(-4p^3) \, dp = \frac{1}{8} p^{-2} - \frac{1}{4} p^4 + C$

51 $\int (z^8 + 1)/(2z^4) \, dz = -\frac{1}{6} z^{-3} + \frac{1}{10} z^5 + C$

52 $\int \sec \theta \, d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$

53 $\int \sqrt{1 + 16t^2} \, dt = \frac{1}{2} t \sqrt{1 + 16t^2} + \frac{1}{8} \ln |4t + \sqrt{1 + 16t^2}| + C$

54 $\int (1 + y^2)/(1 - y^2) \, dy = -y + \ln |y + 1| - \ln |y - 1| + C$

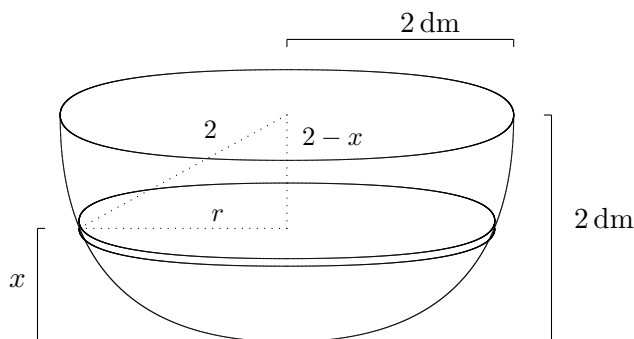
55 $\int \sqrt{v^2 + 1}/v \, dv = \sqrt{v^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{v^2 + 1} - 1| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{v^2 + 1} + 1| + C$

56 $\int \sqrt{1 + \frac{1}{u}} \, du = \sqrt{u^2 + u} + \frac{1}{2} \ln |1 + 2u + 2\sqrt{u^2 + u}| + C$. Para integrar, tome $x = \sqrt{1 + \frac{1}{u}}$ y note que $u = 1/(x^2 - 1)$; luego use fracciones parciales.

O bien empiece por intercambiar las variables en la ecuación de la curva: si $y = 2\sqrt{u}$ para $u \in [\frac{1}{9}, 1]$ entonces $u = (y/2)^2$ para $y \in [\frac{2}{3}, 2]$.

62 Compare con el Ejemplo 9. Ahora cada disco tiene radio $r = x/2$, donde x es el nivel del agua en metros.

63 Compare con el Ejemplo 9. Ahora cada disco tiene radio $r = \sqrt{4x - x^2}$, donde x es el nivel del agua en decímetros.



66 Recuerde que $F = kx$ con k constante. Despeje k en la ecuación $\int_0^{0.20} F \, dx = 0.5$.

67 Vea la sugerencia del ejercicio anterior.

68 La masa del cable es de 1.25 kg por metro. Cuando falta recoger x metros de cable, la masa que cuelga es $m(x) = 1.25x$ kg. Entonces la fuerza necesaria para recogerla es $F(x) = (1.25x)(9.8)$, para $0 \leq x \leq 20$.

A. Repaso de técnicas de integración

5 $6^x/3^{2x} = (2/3)^x$, y $15^x/3^{2x} = (5/3)^x$.

6 Saque 9 como factor común de la raíz.

14 Complete cuadrado en el denominador y tome $z = 3w - 2$.

15 Tome $u = \ln(p + 1)$.

18 Puede tomar $u = 5 + 2 \tan \alpha$.

20 Convierta a senos y cosenos.

21 Multiplique numerador y denominador por $1 + \sin z$, y separe la fracción resultante.

31 Tome $u = 3^r$ (entonces $9^r = u^2$).

32 Puede ser más fácil tomar $u = 9 - y^2$.

34 Tome $u = 3r$.

41 Antes (o después) de integrar por partes, haga la sustitución $t = p + 5$.

42 Primero sustituya $x = w^2 + 1$.

45 Use integración por partes con $u = \ln z$, y después fracciones parciales.

51 Tome $u = te^t$ y $dv = (t + 1)^{-2} dt$.

54 $s^3 + 4s = s(s^2 + 4)$

56 Complete cuadrado en el denominador y tome $z = 3w - 2$.

66 Después de integrar por partes, use la sustitución $u = 5y - 4$.

68 Convierta a senos y cosenos.

70 Escriba $\tan^2 \cdot \tan^2 = \tan^2(\sec^2 - 1)$.

APÉNDICE C

Soluciones

0. Cálculo proposicional

- | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|
| 1 Sí | 4 Sí | 7 No | 10 Sí | 13 Sí |
| 2 Sí | 5 No | 8 Sí | 11 Sí | |
| 3 No | 6 Sí | 9 No | 12 No | 14 No |

15 $\exists x \in P, m(x)$ donde $P = \{ \text{mis primas} \}$ y $m(x)$: “ x estudió medicina”

16 $\exists x \in A, nv(x)$ donde $A = \{ \text{aves} \}$ y $nv(x)$: “ x no puede volar”

17 $\exists d \in A_{1998}, n(d)$ donde $A_{1998} = \{ \text{días en 1998} \}$ y $n(d)$: “el día d cayó nieve en el Irazú”

18 $\exists x \in B, nb(x)$ donde $B = \{ \text{canciones de los Beatles} \}$ y $nb(x)$: “ x no lleva batería”

19 $\forall x \in B, c(x)$ donde $B = \{ \text{canciones de los Beatles} \}$ y $c(x)$: “ x es cantada”

20 $\forall x \in C, a(x)$ donde $C = \{ \text{sus compañeros} \}$ y $a(x)$: “ x le dice apodos”

21 $\forall x \in P, r(x)$ donde $P = \{ \text{computadoras portátiles} \}$ y $r(x)$: “ x es un riesgo de robo”

22 $\forall t \in T, s(t) = 180^\circ$ donde $T = \{ \text{triángulos} \}$ y $s(t)$ es la suma de los ángulos de t

23 $\forall x \in H, nv(x)$ donde $H = \{ \text{humanos} \}$ y $nv(x)$: “ x no puede vencer a Superman”

24 $\exists d \in M, \forall a \in G, t(a, d)$ donde $M = \{ \text{días del mes pasado} \}$, $G = \{ \text{alumnos de este grupo} \}$, y $t(a, d)$: “el alumno a llegó temprano el día d ”

25 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, r^2 = y$

26 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$

27 $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$

28 $\ell \wedge f, (\neg \ell) \vee (\neg f)$: “ayer no llovió o no hizo frío”

29 $b \wedge (\neg \ell), (\neg b) \vee \ell$: “Ese carro no es blanco, o está muy limpio”

30 $(\neg g) \wedge c, g \vee (\neg c)$: “Le gustó o no estaba caro”

31 $m \vee v, (\neg m) \wedge (\neg v)$: “Sandra no viene mañana ni el viernes”

32 $e \vee p, (\neg e) \wedge (\neg p)$: “ x no es entero ni positivo”

33 $(\neg t) \wedge a, t \vee (\neg a)$: “Voy en tren o no voy en avión”

34 $c \vee (\neg s), (\neg c) \wedge s$: “La obra no es clásica y es de este siglo” (podría ser “pero” o “sino que” en vez de “y”)

35 $(\neg a) \wedge (g \vee c), a \vee [(\neg g) \wedge (\neg c)]$: “El sujeto estaba armado, o no llevaba gorra ni capucha”

36 $n \wedge (d \vee b), (\neg n) \vee [(\neg d) \wedge (\neg b)]$: “No es nuevo, o bien no está descompuesto ni se le gastó la batería”

37 $e \vee (r \wedge p), (\neg e) \wedge [(\neg r) \vee (\neg p)]$: “ n no es entero, y no es racional o no es positivo”

38 $(a \wedge d) \vee (\neg e), [(\neg a) \vee (\neg d)] \wedge e$: “La modelo no es alta o no es delgada, pero será elegida”

39 $\forall x \in V, (sg(x) \wedge \neg bg(x)), \exists x \in V, \neg sg(x) \vee bg(x)$: “alguna vaca no puede subir gradas o sí puede bajarlas”

40 Ninguna de mis primas estudió medicina.

41 Todas las aves pueden volar.

42 Ningún día de 1998 cayó nieve en el Irazú.

43 Todas las canciones de los Beatles llevan batería.

44 Hay una canción de los Beatles que no es cantada.

45 Alguno de sus compañeros no le dice apodos.

46 Hay una computadora portátil que no es un riesgo de robo.

47 Algún humano puede vencer a Superman.

48 Cada día del mes pasado hubo algún alumno de este grupo que no llegó temprano.

49 Un día el mes pasado ningún alumno de este grupo faltó a clase.

50 Existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene $r^2 \neq y$.

51 V; “Si $x^2 > 0$ entonces $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ ”: F

52 V; “Para que $n \neq 0$ debe existir $1/n$ ” (o bien “si $n \neq 0$ entonces $1/n$ existe”): V

53 F; “Si $n^3 = 25$ entonces $n = 5$ ”: F

54 F; “Si $t = 3$ entonces $t^2 = 9$ ”: V

- 55 V; “Si $t^2 = 9$ entonces $t = 3$ o $t = -3$ ”: V
- 56 F; “Si hoy los bancos abren normalmente entonces hoy es lunes”: F
- 57 V; “Cada vez que hace frío, cae nieve”: F
- 58 V; “Si el vapor es gaseoso, el hielo es sólido”: V
- 59 V; “Si los caballos vuelan, los perros también vuelan”: V
- 60 F; “Cuando un carro de gasolina no tiene gasolina, se apaga”: V
- 61 F; “Si todos los triángulos son equiláteros entonces algún triángulo es equilátero”: V
- 62 F; “Si todos los triángulos son redondos, todos los cuadrados son rectángulos”: V
- 63 V; “Si hay vida en la Tierra, la Tierra es plana”: F
- 64 $d \rightarrow m$; “Si no le hacen multa, no lo detuvieron”
- 65 $(\neg g) \rightarrow d$; “Si no lo devuelve, entonces le gustó”
- 66 $(e \vee t) \rightarrow \ell$; “Si no puede llevárselo, entonces no trae efectivo ni tarjeta de crédito”
- 67 $[t \wedge (\neg e)] \rightarrow (\neg q)$; “Si puedo hacer el quiz, entonces no llegué tarde o bien traje excusa”
- 68 $g \rightarrow (c \wedge v)$; “Si no le compran carro o no lo llevan de viaje, no se graduó”
- 69 $a \rightarrow (p \vee s)$; “Si no llega de primera ni de segunda, no se apuró”
- 70 $\forall v \in D, te(v) \rightarrow vq(v)$; “Cada vez que no me va bien en el quiz, no trasnoché estudiando”.
- 71 $\forall x \in D, r(x) \rightarrow v(x)$; “Todos los días que no se va la luz, no hay rayos”
- 72 $\forall x \in P, m(x) \rightarrow (\neg p(x))$; “Las personas que pagan no son menores de edad”

73

x	y	$\neg x$	$(\neg x) \wedge y$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

75

p	q	$\neg q$	$p \vee (\neg q)$	$\neg[p \vee (\neg q)]$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

74

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow (\neg q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

76

x	y	$\neg x$	$x \rightarrow y$	$(\neg x) \wedge (x \rightarrow y)$
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

77	x	y	z	$\neg z$	$y \vee (\neg z)$	$x \wedge [y \vee (\neg z)]$
	V	V	V	F	V	V
	V	V	F	V	V	V
	V	F	V	F	F	F
	V	F	F	V	V	V
	F	V	V	F	V	F
	F	V	F	V	V	F
	F	F	V	F	F	F
	F	F	F	V	V	F

78	a	b	c	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow c$	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$
	V	V	V	V	V	V
	V	V	F	V	F	F
	V	F	V	F	V	F
	V	F	F	F	V	F
	F	V	V	V	V	V
	F	V	F	V	F	F
	F	F	V	V	V	V
	F	F	F	V	V	V

79 Sí

83 Sí

87 Sí

91 Sí

80 No

84 Sí

88 Sí

92 Sí

81 Sí

85 No

89 Sí

93 Sí

82 Sí

86 Sí

90 Sí

94 Sí

95 $\frac{3. \quad b}{4. \quad (\neg c)} \quad \begin{array}{l} \text{S 1} \\ \text{MT 2, 3} \end{array}$

96 $\frac{3. \quad x}{4. \quad y} \quad \begin{array}{l} \text{S 1} \\ \text{SD 2, 3} \end{array}$
 5. $y \vee (\neg z) \quad \text{A 4}$

97 $\frac{4. \quad \neg q}{5. \quad p} \quad \begin{array}{l} \text{MT 2, 3} \\ \text{SD 1, 4} \end{array}$

98 $\frac{4. \quad y}{5. \quad \neg x} \quad \begin{array}{l} \text{MP 1, 3} \\ \text{MT 2, 4} \end{array}$

99 $\frac{3. \quad q}{4. \quad p} \quad \begin{array}{l} \text{S 2} \\ \text{SD 1, 3} \end{array}$
 5. $r \quad \text{S 2}$
 6. $p \wedge r \quad \text{Ad 4, 5}$

100 $\frac{3. \quad c}{4. \quad \neg(a \vee d)} \quad \begin{array}{l} \text{S 2} \\ \text{MT 1, 3} \end{array}$
 5. $(\neg a) \wedge (\neg d) \quad \text{DeMorgan}$
 6. $\neg d \quad \text{S 5}$

101 Sean S : setiembre, O : octubre, L : lluvia, CM : “las calles se mojan”.

Premisas y conclusión:
 1. $(S \rightarrow L) \wedge (O \rightarrow L)$
 2. $L \rightarrow CM$
 $\frac{}{O \rightarrow CM}$

Demostración:
 3. $O \rightarrow L \quad \text{S 1}$
 6. $O \rightarrow CM \quad \text{SH 3, 2}$

102 Sean C = Carla, F = Fabio, Tg : “las tijeras están en la gaveta”, $t(x)$: “ x usó las tijeras”.

Premisas y conclusión:
 1. $\neg(\exists x, t(x)) \rightarrow Tg$
 2. $(\exists x, t(x)) \rightarrow (t(C) \vee t(F))$
 3. $t(F) \rightarrow Tg$
 4. $\neg Tg$
 $\frac{}{t(C)}$

Demostración:
 5. $\exists x, t(x) \quad \text{MT 1, 4}$
 6. $t(C) \vee t(F) \quad \text{MP 2, 5}$
 7. $\neg t(F) \quad \text{MT 3, 4}$
 8. $t(C) \quad \text{SD 6, 7}$

103 Sean A : “V́ctor estudia Administración”, B : “V́ctor estudia Biotecnología”, C : “V́ctor estudia Computación”, $g5$: “se graduó en cinco años o menos”, bk : “tiene beca”, gh : “va a graduarse con hijos”.

Premisas y conclusión:

1. $(A \vee C) \vee B$
 2. $A \rightarrow g5$
 3. $B \rightarrow bk$
 4. $C \rightarrow gh$
 5. $\neg g5$
 6. $\neg bk$
-
- $C \wedge gh$

Demostración:

7. $\neg B$ MT 3, 6
8. $A \vee C$ SD 1, 7
9. $\neg A$ MT 2, 5
10. C SD 8, 9
11. gh MP 4, 10
12. $C \wedge gh$ Ad 12, 11

104 Sean Se : “Sergio va al estadio”, Sm : “Sergio va al minigolf”, Pm : “Pamela va al minigolf”, Pt : “Pamela va adonde su tío”, Pb : “Pamela se pone la bufanda”, Tm : “la tía va al

minigolf”, C : “hace calor”.

Premisas y conclusión:

1. $\neg(Se \wedge Sm)$
 2. $(Pm \rightarrow Sm) \wedge (Sm \rightarrow Pm)$
 3. $Pm \vee Pt$
 4. $Pt \rightarrow Pb$
 5. $\neg Tm$
 6. $C \rightarrow \neg Pb$
 7. Se
-
- $\neg C$

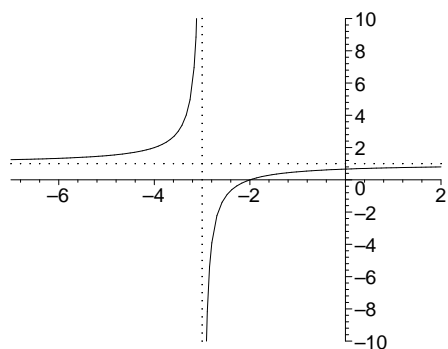
Demostración:

8. $\neg Se \vee \neg Sm$ DeMorgan 1
9. $\neg Sm$ SD 7, 8
10. $Pm \rightarrow Sm$ S 2
11. $\neg Pm$ MT 9, 10
12. Pt SD 3, 11
13. Pb MP 4, 12
14. $\neg C$ MT 6, 13

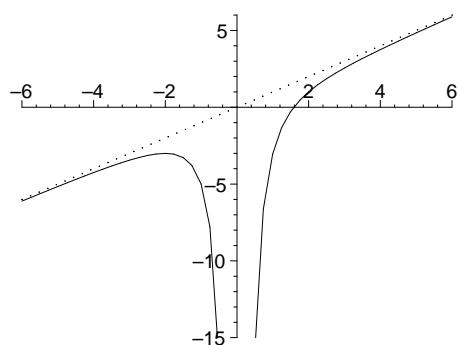
1. Límites y continuidad

1 1	14 -10	27 $\sqrt{28}$	39 2
2 0	15 1/2	28 160	40 2
3 1	16 -1/4	29 16/7	41 2
4 2	17 1	30 No existe (3 izq, 1 der)	42 2
5 3	18 -1/4	31 -4	43 -5
6 2	19 0	32 -4	44 -2
7 3	20 -1	33 -1	45 5
8 1	21 -1	34 No existe	46 $c/2$
9 2	22 0	35 6	47 1/2
10 0	23 $e \approx 2.7183$	36 5	48 -5/4
11 1	24 $e^2 \approx 7.3891$	37 6	49 4
12 2	25 $\ln 2 \approx 0.6931$	38 No existe	50 $2k$
13 -1/2	26 -2		51 0

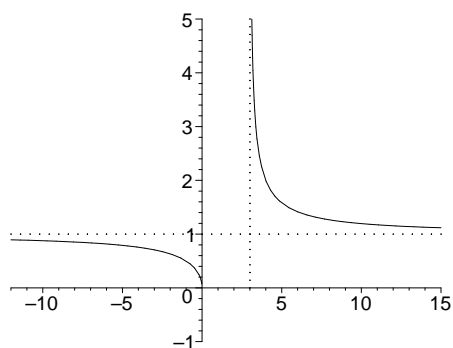
52 $-1/8$	67 $-\sqrt{2}/2$	84 0	101 1
53 $5/4$	68 2	85 $1/6$	102 1
54 $1/\sqrt{a}$	69 2	86 0	103 ∞
55 -20	70 0	87 $6/5$	104 ∞
56 3	71 1	88 -2	105 $-\infty$
57 -1	72 3	89 0	106 ∞
58 -18	73 5	90 $\cos x$	107 1
59 $-80/71$	74 -1	91 $-\sin x$	108 $-\infty$
60 $5/12$	75 $45/2$	92 $\cos a$	109 ∞ izq, $-\infty$ der
61 $\pi/4 - \sqrt{2} \approx$ -0.628815	76 $1/\pi \approx 0.318310$	93 $-\sin a$	110 $e^{0.2} \approx 1.2214$
62 2	77 1	94 -1	111 ∞
63 $3/2 + \sqrt{3} \approx 3.23205$	78 0	95 2	112 0
64 $-3\sqrt{3}/(8\pi) \approx$ -0.206748	79 $-2/\pi \approx -0.636620$	96 ∞	113 ∞ izq, $-\infty$ der
65 $1/\pi \approx 0.318310$	80 $2/\pi \approx 0.636620$	97 $-\infty$	114 ∞
66 1	81 0	98 $-\infty$	115 0
	82 4	99 $-\infty$	
	83 0	100 ∞	

116

117



118

119 $-\infty$ izq, ∞ der120 $-\infty$ izq, ∞ der121 ∞ izq, $-\infty$ der122 $-\infty$ 123 ∞ izq, $-\infty$ der124 ∞ 125 $-\infty$ izq, ∞ der126 $-\infty$ izq, ∞ der127 ∞ 128 $-\infty$ izq, ∞ der129 ∞ izq, $-\infty$ der130 ∞ 131 -1 132 $-\infty$ 133 $-\infty$ 134 $-\infty$ izq, ∞ der135 ∞ 136 ∞ izq, $-\infty$ der137 ∞ 138 ∞ izq, $-\infty$ der139 $-\infty$ 140 $-\infty$ 141 0 142 0 izq, ∞ der143 ∞ izq, 0 der144 $2 \cdot 1^{-1}$ 145 0 izq, ∞ der146 $-1/2$ 147 0 148 0 149 -2 150 $2/7$ 151 $-\infty$ 152 0 153 $13/5$ 154 ∞ 155 $-\infty$ 156 $-\infty$ 157 -9 158 $-1/2$ 159 $-\infty$ 160 $-3/2$ 161 $1/\sqrt{5}$ 162 -1 163 ∞ 164 $2/3$ 165 2 166 $-1/2$ 167 $-\infty$ 168 ∞ 169 0 170 $1/2$ 171 ∞ 172 0 izq, ∞ der173 ∞ 174 $-\ln 4$ 175 0 176 ∞ 177 $-\infty$ 178 ∞ 179 0 180 ∞ 181 $-\infty$ 182 0 183 ∞

184 A 21**185** 1.8074, 6.2651, 19.98 m/s. A ∞ m/s.**186** A 6.**187** 300 km/h; 800 km/h; a 900 km/h**188** \$54.286 millones; \$87.692 millones;
a \$95 millones**189** A seis meses**190** 180° **191** 0**192** 1**193** 0**194** 0**195** 0**196** 1**197** 0**198** ∞ **199** No, $f(2)$ no existe**200** Sí**201** No, los límites laterales son distintos**202** No, $p(-1) \neq \lim_{r \rightarrow -1} p(r)$ **203** No, $y(-5)$ no existe**204** $\mathbb{R} - \{3, -3\}$ **205** $[0, \infty[- \{1\}$ **206** $\mathbb{R} - \{-1\}$ **207** $\mathbb{R} - \{-5\}$ **208** $\mathbb{R} - \{3\}$ **209** $\mathbb{R} - \{1\}$ **210** $\mathbb{R} - \{0\}$ **211** $\mathbb{R} - \{-2\}$ **212** $\mathbb{R} - \{-1, 2, 3, 4\}$ **213** $a = 9$ **214** $b = -2$ **215** $a = 2$ o $a = -1$ **216** $a = -1, b = 1$ **217** $a = 1, b = 2$

2. Derivación

1 3**2** -6**3** 6**4** -15**5** 5**6** 1**7** -6**8** $-1/2$ **9** -11**10** -10**11** $-5/3$ **12** $1/4$ **13** $-3/10$ **14** $1 - \sqrt{3}/6$ **15** $4/\sqrt{3}$ **16** 1**17** $-1/8$ **18** 3**19** -4**20** 0**21** $(1 + 3\sqrt{3})/2$ **22** 0

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{23} & \mathbf{1} & 3. & \mathbf{3} & 2u - 4. & \mathbf{5} & 6y^2 - 1. & \mathbf{7} & -6/(2w + 5)^2. & \mathbf{9} & -11(v - 4)^{-2}. & \mathbf{11} & (2t^2 + 12t - 15)(t + 3)^{-2}. \\ \mathbf{13} & & -\frac{3}{2}x^{-1/2}. & \mathbf{15} & 2y(2y^2 - 5)^{-1/2}. & \mathbf{17} & -\frac{1}{2}r^{-1/2}(1 + \sqrt{r})^{-2}. & \mathbf{19} & -4\cos(2\alpha). & \mathbf{21} & \cos r + 3\sin r. \end{array}$$

24

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{2} & -6. & \mathbf{4} & 2x - 3. & \mathbf{6} & (1 - z)^{-2}. & \mathbf{8} & -2y^{-2}. & \mathbf{10} & -10/(2 + x)^2. & \mathbf{12} & 1/(2\sqrt{v + 3}). & \mathbf{14} & (2\sqrt{1 - t} - 1)/(2\sqrt{1 - t}). \\ \mathbf{16} & 1/\sqrt{1 - 2u}. & \mathbf{18} & 3\cos 3u. & \mathbf{20} & 5\sin v. & \mathbf{22} & \sin y - \sin(y/2). \end{array}$$

$$\mathbf{25} \quad y - 4 = 3(x - 1)$$

$$\mathbf{46} \quad 3t^{-2} - 2t^{-3}$$

$$\mathbf{26} \quad q + 1 = -(p + 1)$$

$$\mathbf{47} \quad 5w^{-2} - 4w^{-3}$$

$$\mathbf{27} \quad y + 6 = 8(t + 3)$$

$$\mathbf{48} \quad \frac{3}{2}r^{1/2} - \frac{5}{2}r^{-7/2}$$

$$\mathbf{28} \quad y + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}(r - 2)$$

$$\mathbf{49} \quad 18u^2 + 18u - 2$$

$$\mathbf{29} \quad z - 3 = \frac{1}{6}(w - 6)$$

$$\mathbf{50} \quad 9x^2 - 14x + 7$$

$$\mathbf{30} \quad w - 1 = -(u + 2)$$

$$\mathbf{51} \quad 9t^2$$

$$\mathbf{31} \quad 9x^8$$

$$\mathbf{52} \quad 4s^3 + 3s^2 + 6s + 2$$

$$\mathbf{32} \quad 15t^2$$

$$\mathbf{53} \quad 5y^{3/2} + y^{-3/2}$$

$$\mathbf{33} \quad 7u^3$$

$$\mathbf{54} \quad 3v^2 - 6v + 2$$

$$\mathbf{34} \quad -36y^{-4}$$

$$\mathbf{55} \quad 72w - 48$$

$$\mathbf{35} \quad 2r^{-2/3}$$

$$\mathbf{56} \quad \frac{7}{2}x^{5/2} - 1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$\mathbf{36} \quad 52t^3 - 10t + 6$$

$$\mathbf{57} \quad 2 + 3y^{-2}$$

$$\mathbf{37} \quad 18y^{1/2} - 3y^{-1/2} + 3y^{-2}$$

$$\mathbf{58} \quad 20t^{3/2} - 1/5$$

$$\mathbf{38} \quad -10x + 3$$

$$\mathbf{59} \quad 9\cos \theta$$

$$\mathbf{39} \quad 11/4$$

$$\mathbf{60} \quad z = 0$$

$$\mathbf{40} \quad -1/5 + u$$

$$\mathbf{61} \quad y + 5 = 16(r + 1)$$

$$\mathbf{41} \quad 15y^4 - \sin y$$

$$\mathbf{62} \quad y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{48}(x - 8)$$

$$\mathbf{42} \quad \frac{\sqrt{5}}{2}v^{-1/2} + 6\sin v + 2\cos v$$

$$\mathbf{63} \quad u = 0$$

$$\mathbf{43} \quad 10y^3$$

$$\mathbf{64} \quad y - 1 = -2(x - \pi/2)$$

$$\mathbf{44} \quad \frac{1}{2}\cos \beta - \frac{5}{4}\sin \beta$$

$$\mathbf{65} \quad y - 0.403377 = -4.69247(w - 1.0472)$$

$$\mathbf{45} \quad -5\sqrt{8}x^{-6}$$

$$\mathbf{66} \quad (2, -16) \text{ y } (-2, 16)$$

$$\mathbf{67} \quad (\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) \text{ para cualquier } k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{68} \quad (3/2, 15/2)$$

69 $(0, 1)$

70 No hay

71 (a) 1.1 m/s. (b) -8.7 m/s. (c) -3.849 m/s.
(d) -3.8 m/s. (e) -28.6356 m/s.

72 (a) -34.3 m/s. (b) -29.89 m/s.
(c) -29.4049 m/s. (d) -29.4 m/s.
(e) -54.2218 m/s.

73 $h_0 = 11.4796 \text{ m}$

74 (a) $18 - 4t \text{ m/s}$. (b) 4.5 s. (c) 4 s. (d) Sí,
porque tarda menos en chocar que en detenerse.

75 0.366234 dm/s

76 $20x^4 - 48x^3 + 63x^2 - 20x + 26$

77 $5s^4 - 9s^2 - 2s - 4$

78 $2y + \frac{5}{2}y^{3/2}$

79 $\frac{5}{6}t^{-1/6} + t^{-2/3}$

80 $25w^{3/2} - 5 - 2w^{-1/2} - 2w^{-2}$

81 $\sin \theta + (\theta + 1) \cos \theta$

82 $2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$

83
 $(28t^3 - 8t)(2 \sin t + \cos t) + (7t^4 - 4t^2)(2 \cos t - \sin t)$

84 $\sec^2 u(1 - \cot u) - (1 + \tan u) \csc^2 u$

85 $(12z^3 + 3z^4 - 5)/(3 + z)^2$

86 $(19 - 4x - 3x^2)/(x^2 - 5x + 3)^2$

87 $-t(t+2)/(t^2+2t+2)^2$

88 $(u^2 - 2u - 2)/(u^2 + u + 1)^2$

89 $\sec v \tan v$

90 $-\csc \beta \cot \beta$

91 $-\csc^2 \alpha$

92 $-2 \csc x \cot x / (1 - \csc x)^2$

93 $(ad - bc)/(cx + d)^2$

94 $2t + 1/(3 - t)^2$

95 $1/(y + 1)^2 - 4/(y + 3)^2$

96 $[(1 + r) \cos r - \sin r]/(1 + r)^2 - [-\sin r(1 - r) - \cos r]/(1 - r)^2$

97 $(12x^2 + 12x + 1)/(2x + 1)^2$

98 $(2u^2 + 8u - 1)/(u + 2)^2$

99 $(2s^3 - 5s^2 - 4s - 3)/(s - 2)^2$

100 $[-\csc v - (\csc v - 1) \sec^2 v]/\tan^2 v$

101 $y \csc y (2 - y \cot y)$

102 $-24p^3 - 3p^2 - 8p - 1$

103 $66u^{9/2} - 81u^{7/2} + 30u^{3/2} - 9u^{1/2} - 9u^{-1/2}$

104 $(4w^5 + 2w^4 - 4w^3)/(w + 1)^2$

105 $(10 - 2x)/(x + 1)^3$

106 $[-4t^2 + 6t - 1]/[(1 - t)^2(t - 2)^2]$

107
 $[u^4 + 8u^3 - 13u^2 - 14u - 18]/[(u - 1)^2(5 + u)^2]$

108 $[64r^2 + 48r - 12]/[r^2(1 - 2r)^2]$

109 5

110 -6

111 8

112 $3/16$

113 $q - 4 = 4(p + 2)$

114 $w - 1.81859 = 0.0770038(\theta - 2)$

115 $v - 0.133975 = -0.0358984(\beta - 1.0472)$

116 $w + 1 = \frac{1}{5}(u - 9)$

$$117 \quad r = t$$

$$118 \quad y + \frac{3}{4} = -\frac{2}{3}(w - \frac{1}{4})$$

$$119 \quad y + \frac{1}{3} = 18(x - 4)$$

$$120 \quad t - 1.10266 = -2.26985(\alpha - 0.523599)$$

$$121 \quad 0.054966 \text{ m/s}^2$$

122 $I'(12) \approx 0.316535$. A los doce meses, el ingreso adicional es aproximadamente \$316 535 por mes.

123 0.032, 0.8. Después de eliminar 50%, el siguiente 1% costará aproximadamente \$32; después de 90%, el siguiente 1% costará aproximadamente \$800.

$$124 \quad 11.8592 \text{ m/}^\circ$$

125 $x = 18$ toneladas; $U(18) = 24$ millones de colones

$$126 \quad -90(5 - 6x)^4$$

$$127 \quad 6t(9t^2 + 5)^{-2/3}$$

$$128 \quad -48(16u + 1)^{-4}$$

$$129 \quad (24y^2 + 32)(y^3 + 4y)^{-3/5}$$

$$130 \quad 2520w(4w^2 - 7)^2 + \frac{5}{2}(1 - 5w)^{-1/2}$$

$$131 \quad -2v \cos(1 - v^2)$$

$$132 \quad -6 \tan^2 t \sec^2 t$$

$$133 \quad \pi \csc(\pi r) \cot(\pi r)$$

$$134 \quad 2(5u + \sqrt{1 - 3u})[5 - \frac{3}{2}(1 - 3u)^{-1/2}]$$

$$135 \quad \frac{1}{2}(v + v^{1/2})^{-1/2}(1 + \frac{1}{2}v^{-1/2})$$

$$136 \quad 2\pi \sin(\pi(z - 1)) \cos(\pi(z - 1))$$

$$137 \quad \sec^2 \alpha \tan \alpha / \sqrt{1 + \sec^2 \alpha}$$

$$138 \quad 120 \left(((y^2 + 3)^5 + 1)^3 - 2 \right)^3 ((y^2 + 3)^5 + 1)^2 (y^2 + 3)^4 y$$

$$139 \quad (1 - 2y^2) / \sqrt{1 - y^2}$$

$$140 \quad 3(p^2 - 5p)^2(2p + 1)^5(2p - 5) + 10(p^2 - 5p)^3(2p + 1)^4$$

$$141 \quad 2u \cos(6u - 5) - 6u^2 \sin(6u - 5)$$

$$142 \quad 2 \cot^2 w - (4w - 2) \cot w \csc^2 w$$

$$143 \quad 8q(3q + 1)^{-2/3}(5q - 1)^{-4/5}$$

$$144 \quad [3w(4w + 2)^3]^{-1/2}(4w + 2)^2(24w + 3)$$

$$145 \quad 5 \sec(5\theta) + 10 \sin^2(5\theta) \sec^3(5\theta)$$

$$146 \quad 27(x - 7)^2 / (x + 2)^4$$

$$147 \quad \frac{15}{2}(5 - x)^{-3/2}(3x)^{-1/2}$$

$$148 \quad (-10t^3 + 30t^2 - 8) / (t^3 - 4)^3$$

$$149 \quad (18t^5 - 105t^4) / (2\sqrt{t^2 - 5t^3})$$

$$150 \quad [1 + \cos^2 y + 2(y + 1) \cos y \sin y] / (1 + \cos^2 y)^2$$

$$151 \quad 2 \frac{\tan x \sec^2 x (\csc^2 x + 2) + (\tan^2 x - 1) \csc^2 x \cot x}{(\csc^2 x + 2)^2}$$

$$152 \quad -2(6r - 5)^2(21r - 88) / (7r + 2)^5$$

$$153 \quad (-5v^3 + \frac{3}{2}v^2 + 7v - \frac{1}{2})(v^3 - v)^{-1/2}(2v + 1)^{-5}$$

$$154 \quad -4$$

$$155 \quad -10$$

$$156 \quad -1/4$$

$$157 \quad -3$$

$$158 \quad y - 4 = 4(x - 1)$$

$$159 \quad y = 1$$

$$160 \quad u - 1 = -\frac{3}{2}(t + 1)$$

$$161 \quad z = 0$$

$$162 \quad w - 18 = -\frac{1}{48}(v - 2)$$

- 163** $y - 48 = \frac{1}{96}(r + 1)$
164 $w = \pi/4$
165 $y - 4 = \frac{8}{25}(x - 2)$
166 $(1/6, 0)$
167 $(0, 0)$ y $(1, 0)$
168 $(2, 4)$
169 $(-19/8, 1/2)$
170 $V'(12) = -200$: a los 12 minutos el agua sale a 200 litros por minuto. El flujo es mayor a los 0 minutos.
171 $I' = 100 - (2q^2 + 20)/\sqrt{q^2 + 20}$
172 $N'(75) = -10$: a los 75 años, el número de personas disminuye en 10 por cada año adicional
173 3.47604 mm/s
174 $2 + e^t$
175 $e^u + e^{-u}$
176 $3 \cdot 5^r \ln 5 - e^r - re^r$
177 $(1/2)^x \ln(1/2) + 2^x \ln 2$
178 $e^{2y} - 6e^{4y}$
179 $3/(2t)$
180 $-1/x$
181 $u^{-1} - 2u(u^2 - 1)^{-1}$
182 $8/(y \ln 10)$
183 $1/(5x \ln 2)$
184 $e^{3w}(3w^2 + 2w + 3)$
185 $(4x - 5)e^{2x^2 - 5x + 3}$
186 $(e^u + ue^u + 1)/(2\sqrt{ue^u + u})$
187 $5(q - 3e^{q/3})^4(1 - e^{q/3})$
188 $2e^x/(e^x + 1)^2$
189 $10^{2-5y} - 5y10^{2-5y} \ln 10$
190 $t^{-1} + t(t^2 + 1)^{-1}$
191 $3p^2(p^3 - 1)^{-1} - 2p + 5(2 - 10p)^{-1}$
192 $(6r - 5)/[(3r^2 - 5r) \ln 10]$
193 $-1/\sqrt{s^2 - 1}$
194 $\frac{1}{2}z^{-1}(1 + \ln z)^{-1/2} + \frac{1}{2}z^{-1/2}(1 + \sqrt{z})^{-1}$
195 $2 \ln(2y + 6)/(y + 3)$
196 $(2q + 1) \ln(5q^2 + 1) + 10(q^3 + q^2)/(5q^2 + 1)$
197 $w^{w+1}(\ln w + 1 + w^{-1})$
198 $2 \ln(\ln(2z^3 - 8z))(6z^2 - 8) / [(2z^3 - 8z) \ln(2z^3 - 8z)]$
199 $3e^{3x}g(\ln^2 x) + 2e^{3x}g'(\ln^2 x) \ln x/x$
200 -3
201 $-3/2$
202 -3
203 $q - 5 = -10(p - 1)$
204 $z - 40 = 40(\ln 10 - 1)(t + 2)$
205 $x = 0$
206 $w = -\frac{3}{2}(u + 3)$
207 $(-1, e^{-1})$
208 $(-1/\ln 2, -e^{-1}/\ln 4)$
209 $(0.1, 5e^{3.4})$
210 (e, e)
211 $(e^{-1}/2 - 4, e^{-1})$
212 -0.150534 grados por segundo

$$213 \quad A'(t) = \text{Pre}^{rt} \Rightarrow A'/A = r$$

$$214 \quad -10^{a-bM} b \ln 10$$

215 $q'(40) = -62.5$: cuando el precio es \$40, la demanda disminuye en 62.5 unidades por dólar de aumento

216 $f'(25) = -0.36e^{-3} \approx -0.01792$: en 1990 la cantidad de petróleo necesaria para cada \$1000 de producción disminuía a 0.01792 barriles por año

$$217 \quad C'(q) = 10e^{q/400}; C'(343) \approx 23.5726$$

$$218 \quad -1/\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$219 \quad 1/(1+r^2)$$

$$220 \quad 1/(|u|\sqrt{u^2-1})$$

$$221 \quad -1/(|v|\sqrt{v^2-1})$$

$$222 \quad -1/(1+w^2)$$

$$223 \quad -13$$

$$224 \quad 1/3$$

$$225 \quad -2$$

$$226 \quad -1$$

$$227 \quad e^2 - e$$

$$245 \quad (z+1)^4(z^2+3)\sqrt[3]{2z+1} \left(\frac{4}{z+1} + \frac{2z}{z^2+3} + \frac{2}{6z+3} \right)$$

$$246 \quad \frac{(1+y)(2-y)}{(1-y)(2+y)^2} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{2-y} + \frac{1}{1-y} - \frac{2}{2+y} \right)$$

$$247 \quad \frac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2} \left(\frac{-2x}{1-2x^2} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{4x-1} \right)$$

$$248 \quad \sqrt[3]{\frac{z^2+1}{z^2-1}} \left(\frac{2z}{3z^2+3} - \frac{2z}{3z^2-3} \right)$$

$$249 \quad \sqrt{\frac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}} \left(\frac{3}{2v-2} - \frac{1}{2v+7} + \frac{1}{5-v} \right)$$

$$228 \quad 7/2$$

$$229 \quad -2.4x/y$$

$$230 \quad -(2t^2+v)/(t+v^2)$$

$$231 \quad \sin \beta \cos \beta / (\sin \alpha \cos \alpha)$$

$$232 \quad 1/(2wz+2z^2-1)$$

$$233 \quad -1/(2e^y+2ye^y)$$

$$234 \quad -x / [\ln(2x+y)(2x+y)+2x]$$

$$235 \quad y-3 = \frac{1}{5}(x+1)$$

$$236 \quad y-1 = -2x$$

$$237 \quad y+3 = -\frac{2}{3}(x-2)$$

$$238 \quad y+2 = \frac{9}{4}(x-3)$$

$$239 \quad y-1 = -\frac{5}{2}x$$

$$240 \quad y = 0$$

$$241 \quad y = \frac{1}{4}(x-1)$$

$$242 \quad y = -5x/2$$

$$243 \quad 0.125250 \text{ dm/s}$$

$$244 \quad -3.92 \text{ radianes por segundo}$$

$$250 \quad 2t^{\ln t - 1} \ln t$$

$$251 \quad (3y + 1)^{2y} \left(2 \ln(3y + 1) + \frac{6y}{3y + 1} \right)$$

$$252 \quad (2/y)^y [\ln(2/y) - 1]$$

$$253 \quad (u + 1)^{1/u} \left(\frac{1}{u^2 + u} - \frac{\ln(u + 1)}{u^2} \right)$$

$$254 \quad e^w w^{1-w} (w^{-1} - \ln w)$$

$$255 \quad 2 - 45e^{3t}$$

$$256 \quad (x^2 + 1)^{-3/2}$$

$$257 \quad 6/(1 - r)^4$$

$$258 \quad -\frac{15}{16}u^{-7/2} + 24u^{-5}$$

$$259 \quad -120p^{-6}$$

$$260 \quad 3(1 - s)^{-5/2}$$

$$261 \quad 9 \cos \beta + 7 \sin \beta$$

$$262 \quad 4 \sec^2 w \tan^2 w + 2 \sec^4 w$$

$$263 \quad -2 \csc v \cot v + v \csc v \cot^2 v + v \csc^3 v$$

$$264 \quad 60x^3 - 8$$

$$265 \quad -64e^{1-4q}$$

$$266 \quad 0$$

$$267 \quad 16(1 + 2s)^{-3}$$

$$268 \quad 2^{40} \sin 2\theta$$

$$269 \quad 10$$

$$270 \quad \ln 2$$

$$271 \quad -2t(t^3 + r^3)/r^5$$

$$272 \quad 0$$

$$273 \quad 2z/(2 - z)^3$$

$$274 \quad (\sin \alpha \cos^2 \beta + \sin \beta \cos^2 \alpha) / \cos^3 \beta$$

$$275 \quad -10$$

3. Optimización

1 Crece en $]-\infty, -2]$; decrece en $[-2, \infty[$; máx en $(-2, 5)$

2 Crece en $]-\infty, -1]$ y en $[1, \infty[$; decrece en $[-1, 1]$; máx en $(-1, 0)$; mín en $(1, -4)$

3 Crece en $[0, 2]$; decrece en $]-\infty, 0]$ y en $[2, \infty[$; máx en $(2, 4)$; mín en $(0, 0)$

4 Crece en $[-2, -1]$ y en $[0, \infty[$; decrece en $]-\infty, -2]$ y en $[-1, 0]$; máx en $(-1, 1)$; mín en $(-2, 0)$ y en $(0, 0)$

5 Crece en $]-\infty, -\sqrt{6}/3]$ y en $[0, \sqrt{6}/3]$; decrece en $[-\sqrt{6}/3, 0]$ y en $[\sqrt{6}/3, \infty[$; máx en $(-\sqrt{6}/3, -2/3)$ y en $(\sqrt{6}/3, -2/3)$; mín en $(0, -2)$

6 Crece en $]-\infty, 0]$; decrece en $[0, \infty[$; máx en $(0, 0)$

7 Crece en $]-\infty, -2]$ y en $[0, \infty[$; decrece en $[-2, 0]$; máx en $(-2, 3\sqrt[3]{4})$; mín en $(0, 0)$

8 Decrece en \mathbb{R}

9 Crece en \mathbb{R}

10 Crece en $]-\infty, 0[$ y en $[2, \infty[$; decrece en $]0, 2]$; mín en $(2, -6/\sqrt[3]{2})$

11 Crece en \mathbb{R}

12 Crece en $[-2/3, \infty[$; decrece en $[-1, -2/3]$; máx en $(-1, 0)$; mín en $(-2/3, -2\sqrt{3}/9)$

13 Crece en $[-2, 0]$; decrece en $]-\infty, -2]$ y en $[0, \infty[$; máx en $(0, 1)$; mín en $(-2, -1/3)$

- 14** Decrece en $]-\infty, 4/3[$ y en $]4/3, \infty[$
- 15** Crece en $[-1, 1]$; decrece en $]-\infty, -1]$ y en $[1, \infty[$; máx en $(1, 1/2)$; mín en $(-1, -1/2)$
- 16** Crece en $[-1, \infty[$; decrece en $]-\infty, -1]$; mín en $(-1, -e^{-1})$
- 17** Crece en $[-3, \infty[$; decrece en $]-\infty, -3]$; mín en $(-3, -27e^{-3})$
- 18** Crece en $]-\infty, 2]$; decrece en $[2, \infty[$; máx en $(2, 6e^4)$
- 19** Crece en $[0, \infty[$; decrece en $]-\infty, 0]$; mín en $(0, 2)$
- 20** Crece en $]-\infty, -\ln 2]$ y en $[0, \infty[$; decrece en $[-\ln 2, 0]$; máx en $(-\ln 2, 1.09416)$; mín en $(0, 1)$
- 21** Crece en $[0, \ln 5]$; decrece en $]-\infty, 0]$ y en $[\ln 5, \infty[$; mín en $(0, 2)$; máx en $(\ln 5, 6.85707)$
- 22** Crece en $[1/\sqrt{2}, \infty[$; decrece en $]0, 1/\sqrt{2}]$; mín en $(1/\sqrt{2}, 1 + \ln 2)$
- 23** Crece en $[e^{-1/2}, \infty[$; decrece en $]0, e^{-1/2}]$; mín en $(e^{-1/2}, -1/(2e))$
- 24** Crece en $]0, 1]$ y en $[3, \infty[$; decrece en $[1, 3]$; máx en $(1, 80)$, mín en $(3, 38.0248)$
- 25** Arriba en $]-\infty, 2]$; abajo en $[2, \infty[$; inflexión en $(2, -3)$
- 26** Arriba en $]-\infty, -1]$ y en $[1, \infty[$; abajo en $[-1, 1]$; inflexión en $(1, -5)$ y en $(-1, -5)$
- 27** Arriba en \mathbb{R}
- 28** Abajo en \mathbb{R}
- 29** Arriba en $]2, \infty[$; abajo en $]-\infty, 2[$
- 30** Arriba en $[-1, 1]$; abajo en $]-\infty, -1]$ y en $[1, \infty[$; inflexión en $(1, 1/4)$ y en $(-1, 1/4)$
- 31** Arriba en $]-2, 0]$ y en $]2, \infty[$; abajo en $]-\infty, -2[$ y en $[0, 2[$; inflexión en $(0, 0)$
- 32** Arriba en $]-\infty, 0]$; abajo en $[0, \infty[$; inflexión en $(0, 0)$
- 33** Arriba en $[-3, \infty[$
- 34** Arriba en $[0, \infty[$; abajo en $]-4, 0]$; inflexión en $(0, 0)$
- 35** Arriba en $]0, 1/2]$; abajo en $[1/2, \infty[$; inflexión en $(1/2, -1/4 - (\ln 2)/2)$
- 36** Arriba en $]-\infty, -3]$ y en $[-1, \infty[$; abajo en $[-3, -1]$; inflexión en $(-3, 10e^{-3})$ y en $(-1, 2e^{-1})$
- 37** Arriba en $[-1, 1]$; abajo en $]-\infty, -1]$ y en $[1, \infty[$; inflexión en $(1, \ln 2)$ y en $(-1, \ln 2)$
- 38** Arriba en $[e^{-3/2}, \infty[$; abajo en $]0, e^{-3/2}]$; inflexión en $(e^{-3/2}, -3e^{-3/2})$
- 39** Arriba en \mathbb{R}
- 40** Arriba en $[-\pi, -0.841069]$ y en $[0.841069, \pi]$; abajo en $[-0.841069, 0.841069]$; inflexión en $(-0.841069, 6.91274)$ y en $(0.841069, -1.49795)$
- 41** Arriba en $[1.10715, 4.24874]$; abajo en $[0, 1.10715]$ y en $[4.24874, 2\pi]$; inflexión en $(1.10715, 0)$ y en $(4.24874, 0)$
- 42** Máx en $(-2, 13)$; mín en $(1, -14)$
- 43** Mín en $(1, 0)$
- 44** Máx en $(0, 2)$; mín en $(1, 1)$
- 45** Máx en $(-1, 2)$; mín en $(1, -2)$
- 46** Máx en $(0, 0)$; mín en $(2, 4)$
- 47** Máx en $(0, -2)$; mín en $(2, 2)$
- 48** Mín en $(0, 0)$
- 49** Mín en $(0, 1)$
- 50** Máx en $(-3, 0)$; mín en $(-2, -4)$
- 51** Máx en $(-2, 4e^{-2})$; mín en $(0, 0)$
- 52** Máx en $(0, e^4)$; mín en $(-2, 5)$ y en $(2, 5)$

- 53** Mín en $(1, 1)$
54 Mín en $(0, \ln 5)$
55 Máx en $(-0.4, 0.707149)$; mín en $(0.4, -0.707149)$
56 Máx en $(2.01371, 8.36568)$; mín en $(4.26948, 2.48388)$
57 Mín en $(-2.73008, 1.87758)$; máx en $(-0.411517, 6.40561)$
58 Máx en $(3, 33)$; mín en $(-3/2, -15/2)$
59 Máx en $(5, 266)$; mín en $(1, -6)$
60 Máx en $(12, 3745)$; mín en $(-10, -1579)$
61 Máx en $(-3, 297)$; mín en $(0, 0)$
62 Máx en $(1, 1/2)$; mín en $(0, 0)$
63 Máx en $(3, 21)$; mín en $(5, 35/3)$
64 Máx en $(0, 3)$; mín en $(2, \sqrt{5})$
65 Máx en $(2, 1)$; mín en $(-2, -1/3)$
66 Máx en $(-32, 16)$; mín en $(0, 0)$
67 Máx en $(1, e^{-1})$; mín en $(0, 0)$
68 Máx en $(-1/2, 0.41218)$; mín en $(0, 0)$
69 Máx en $(1, -2)$; mín en $(e, -e)$
70 Máx en $(1, -3)$; mín en $(e, -e^2)$
71 Máx en $(e - 1, e^{-1})$; mín en $(0, 0)$
72 Máx en $(-\pi/2, 1)$, $(0, 1)$ y $(\pi/2, 1)$; mín en $(-\pi/4, -1)$ y $(\pi/4, -1)$
73 Máx en $(2.79253, 10.1096)$; mín en $(0, 0)$
74 Mín en $(-0.588003, -3.60555)$; máx en $(2.55359, 3.60555)$
75 Máx en $(2, \ln 4 - 2)$
76 Mín en $(0, 0)$; máx en $(1, e^{-1})$
77 Mín en $(2, -8)$
78 Máx en $(1/3, e^{-1}/3)$
79 100 y 100
80 25 y -25
81 $8\sqrt{3}$ y $8\sqrt{3}$
82 10 y 1
83 10 y -10
84 $83.\bar{3}$ km/h
85 9.8 m
86 450 cajas; ₡729 000
87 Máx el 30 de abril ($t = 2/3$); mín el 10 de junio ($t = 2$)
88 $q = 40$ unidades; $\bar{C} = 23$
89 13.91 unidades
93 60 pasajeros
94 300 unidades
95 300 unidades; \$55 800
96 70 km/h
97 A 0.884987 m del primer foco
98 El ángulo es $\pi/4 = 45^\circ$, y el alcance es 40.8163 m
99 A las 8:21'36" am (9/25 de hora después de las 8 am)
100 Correr 68.956 m, nadar 50.364 m; 1.955 min (aprox. 1 min 57.3 s)
101 2133.97 m en tierra a lo largo de la costa y 1732.05 m en línea recta hacia el pozo bajo el mar

102 A 1.6 m del poste de 8 m; 20.3961 m de cable.

103 $b = -2$, $c = 4$

104 $a = 2.97121$, $b = -2.03271$

105 42 bombillos

106 ₡1250

107 ₡14 250

108 (a) \$362.50. (b) \$462.50

109 125 unidades; ₡31 250

110 ₡440; ₡79 200 000

111 ₡8400

112 160 árboles

113 30 turistas

114 320 tickets

115 \$1.80

116 200% (un 100% adicional)

117 $200\text{ m} \times 300\text{ m}$, con la división paralela al lado de 200 m

118 30 m el lado perpendicular a la pared, 60 m el paralelo

119 7.5 m el lado perpendicular a la pared, 10 m el paralelo

120 22.36 cm de base y 26.83 cm de altura

121 22.32 cm de base y 26.78 cm de altura

122 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos

123 Rectángulo: 1.68 m de base y 0.84 m de altura; semicírculo: 0.84 m de radio

124 2 cm de lado

125 $2.5\text{ cm} \times 6\text{ cm}$

126 40 cm y 0 cm para máxima; 17.596 cm y 22.404 cm para mínima

127 4.47214×4.47214

128 7.07107×7.07107

129 2.8794 cm el radio de la base, 8.6382 cm la altura; costo ₡23.44

130 4 dm el lado de la base, 2 dm la altura

131 4.08248 el radio de la base, 5.7735 la altura

132 4.71405 el radio de la base, $6\bar{6}$ la altura

133 7.00527 cm el radio del cilindro, 7.00527 cm la altura del cilindro

134 0.52322 m el radio del cilindro, 4.18579 m la longitud del cilindro

135 403.067 ml

136 $(-0.6, 0.2)$

137 $(0.312908, 1.09791)$

138 $(3.5, \sqrt{3.5})$

139 $A = 9$ cuando $x = 3$

140 18

141 8.66025 la base, 7.5 la altura

142 No hay solución

143 $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4)$

144 $3\sqrt{2}/8$, entre $(1/2, 1/4)$ y $(7/8, -1/8)$

145 9.866 m

4. Otras aplicaciones de las derivadas

1 $1/2$	20 0	39 ∞	58 1
2 0	21 $-1/3$	40 ∞	59 1
3 $1/4$	22 4	41 ∞	60 10
4 2	23 ∞	42 $1/5$	61 e^3
5 -1	24 $1/\pi$	43 $1/12$	62 1
6 $1/2$	25 1	44 $1/2$	63 e
7 0	26 $2/\pi$	45 $-\infty$ izq, ∞ der	64 e^{-5}
8 ∞	27 0	46 $1/2$	65 e^3
9 $-\ln 2$	28 0	47 ∞	66 1
10 0	29 ∞ izq, 0 der	48 0	67 1
11 0	30 0	49 -1	68 1
12 $1/2$	31 0	50 0	69 1
13 0	32 0	51 1	70 1
14 ∞	33 0	52 e^{-1}	71 1
15 $-\infty$	34 -1	53 e^3	72 1
16 $-1/6$	35 0	54 e^{-1}	73 e^{-1}
17 1	36 -4	55 e^{-2}	74 e^{rt}
18 1	37 ∞	56 1	
19 $-\sqrt{2}$	38 1	57 1	
75 $w = 0, y = 0$		80 $s = -2, s = 3, y = 0$	
76 $t = -2, t = 2, y = 0$		81 $q = -1, y = -1$	
77 $y = 0$		82 $z = -3/2, y = -1/2$	
78 $y = -2$		83 $y = -1$ en $-\infty, y = 1$ en ∞	
79 $r = -1, r = 0, y = -1$		84 $x = 3, y = 1$	
		85 $w = 0, y = -1$ en $-\infty, y = 1$ en ∞	

86 $y = 0$

87 $t = \pi/2 + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

88 $u = 0, y = 3$

89 $\alpha = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

90 $w = 0, y = w$

91 $r = 2, y = r - 1$

92 $u = -1, y = u$

93 $t = -2, t = 2, y = -t$

94 $y = -p$

95 $u = -2, y = 2u - 4$

96 $y = v$

97 $s = -3, s = 3, y = -s$ en $-\infty, y = s$ en ∞

98 $y = 2q$ en $+\infty$

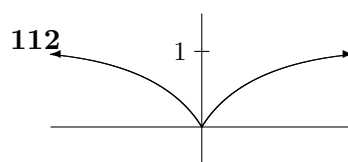
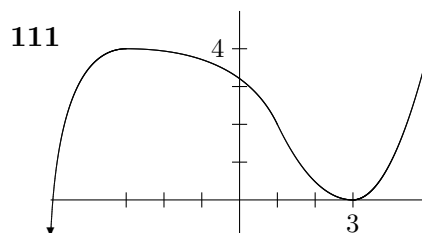
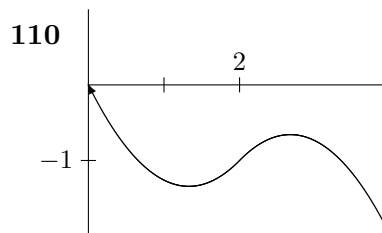
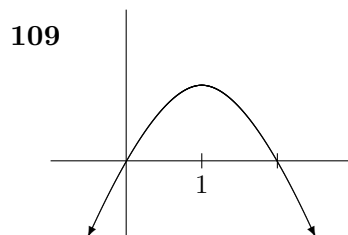
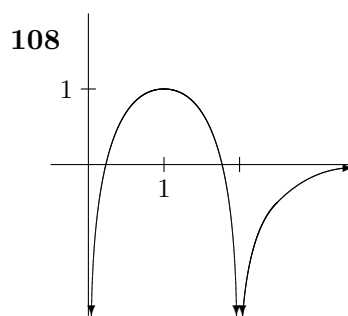
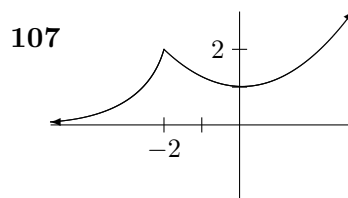
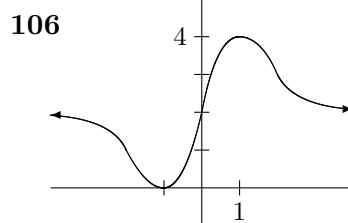
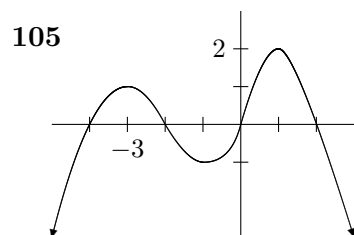
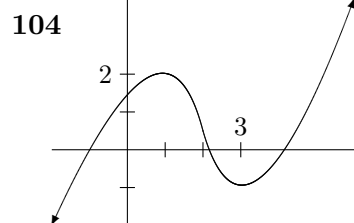
99 $t = 0, t = 2, y = 3t + 5$

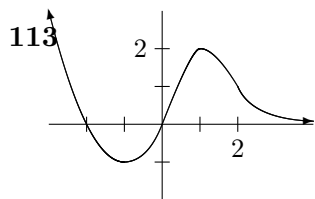
100 $x = 0, y = -1$ en $-\infty, y = x$ en ∞

101 $z = 1, z = -1, y = 2z - 2$ en $-\infty$

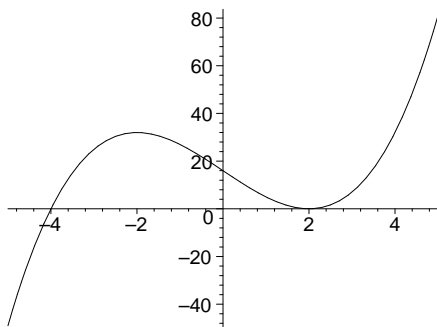
102 $y = 2r$

103 $w = -1, y = w - 1$

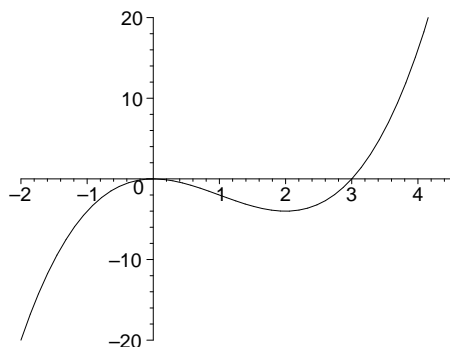




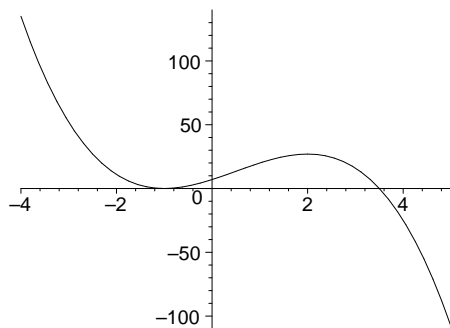
114 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 16)$, $(-4, 0)$, $(2, 0)$; máx en $(-2, 32)$; mín en $(2, 0)$; infl en $(0, 16)$



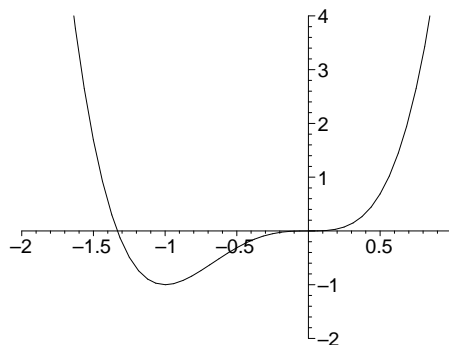
115 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 0)$, $(3, 0)$; máx en $(0, 0)$; mín en $(2, -4)$; infl en $(1, -2)$



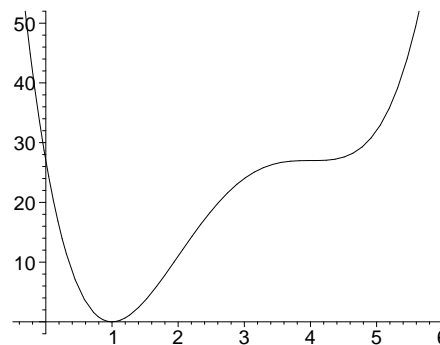
116 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 7)$, $(-1, 0)$, $(7/2, 0)$; máx en $(2, 27)$; mín en $(-1, 0)$; infl en $(1/2, 27/2)$



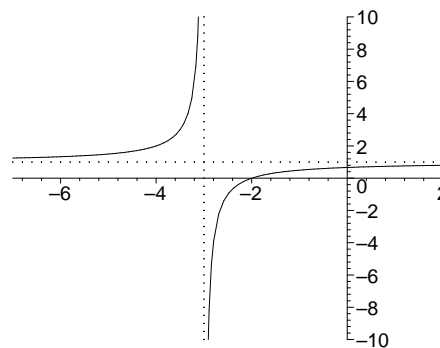
117 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 0)$, $(-4/3, 0)$; mín en $(-1, -1)$; infl en $(-2/3, -16/27)$ y en $(0, 0)$



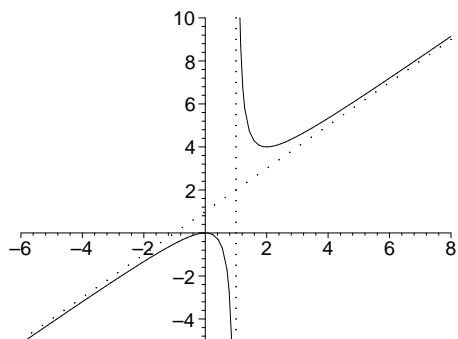
118 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 27)$, $(1, 0)$; mín en $(1, 0)$; infl en $(2, 11)$ y en $(4, 27)$



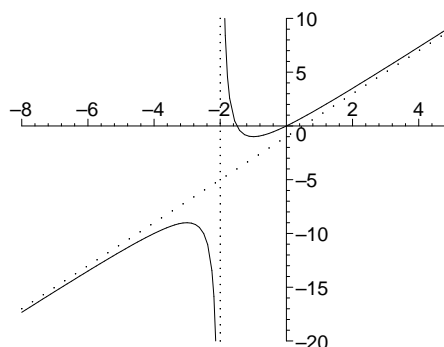
119 Dom $\mathbb{R} - \{-3\}$; inters $(0, 2/3)$, $(-2, 0)$; asíntotas $q = -3$, $y = 1$



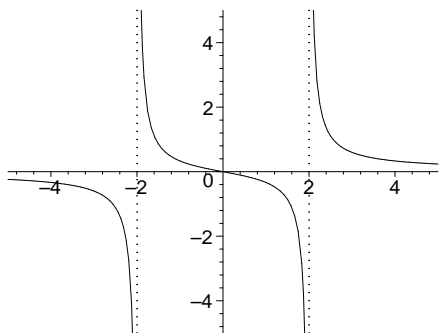
120 Dom $\mathbb{R} - \{1\}$; inters $(0, 0)$; máx en $(0, 0)$; mín en $(2, 4)$; asíntotas $t = 1$, $y = t + 1$



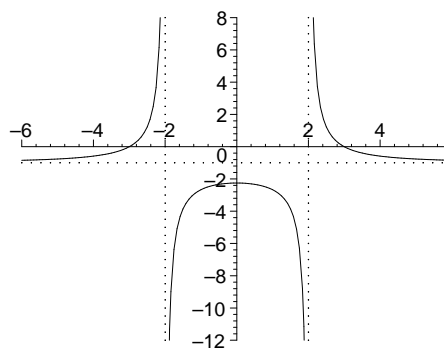
123 Dom $\mathbb{R} - \{-2\}$; inters $(0, 0)$, $(-3/2, 0)$; máx en $(-3, -9)$; mín en $(-1, -1)$; asíntotas $p = -2$, $y = 2p - 1$



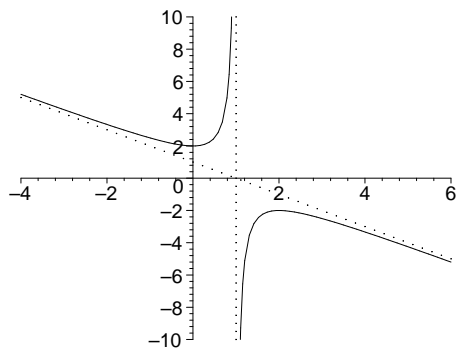
121 Dom $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$; inters $(0, 0)$; infl en $(0, 0)$; asíntotas $w = -2$, $w = 2$, $y = 0$



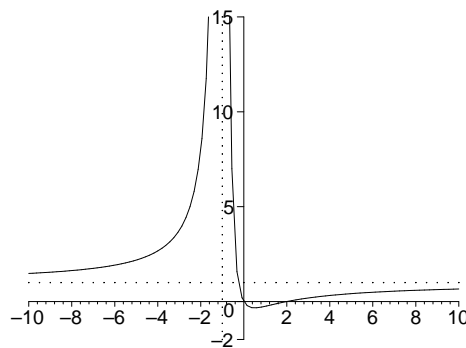
124 Dom $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$; inters $(0, -9/4)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$; máx en $(0, -9/4)$; asíntotas $x = -2$, $x = 2$, $y = -1$



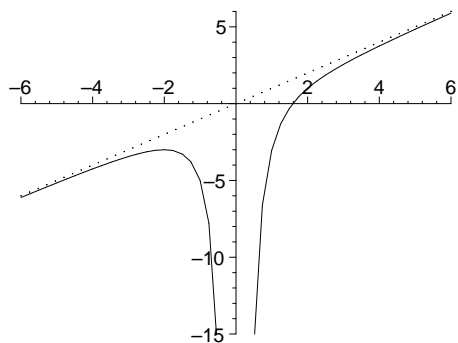
122 Dom $\mathbb{R} - \{1\}$; inters $(0, 2)$; máx en $(2, -2)$; mín en $(0, 2)$; asíntotas $v = 1$, $y = -v + 1$



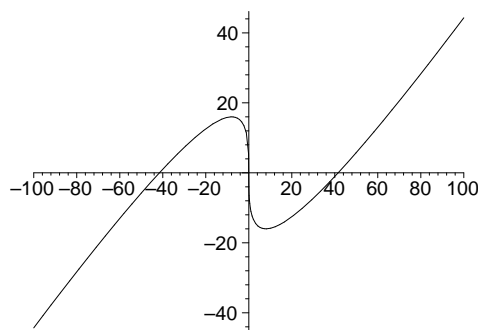
125 Dom $\mathbb{R} - \{-1\}$; inters $(0, 0)$, $(2, 0)$; mín en $(1/2, -1/3)$; infl en $(5/4, -5/27)$; asíntotas $r = -1$, $y = 1$



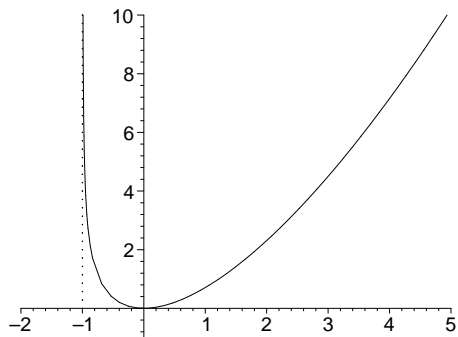
126 Dom $\mathbb{R} - \{0\}$; inters $(\sqrt[3]{4}, 0)$; máx en $(-2, -3)$; asíntotas $u = 0$, $y = u$



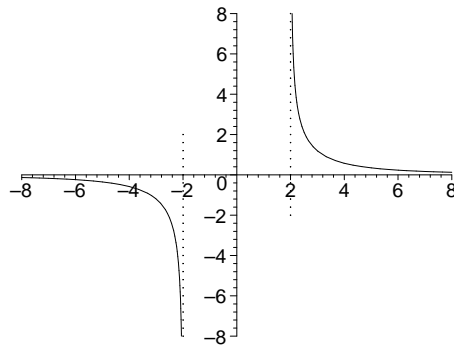
129 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 0)$, $(-24\sqrt{3}, 0)$, $(24\sqrt{3}, 0)$; máx en $(-8, 16)$; mín en $(8, -16)$; infl en $(0, 0)$



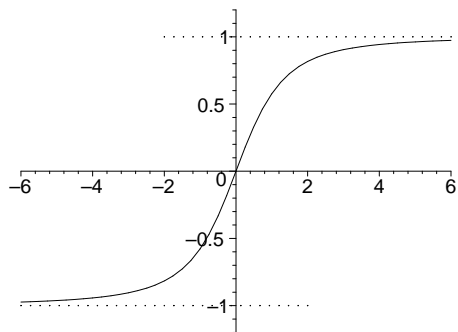
127 Dom $]-1, \infty[$; inters $(0, 0)$; mín en $(0, 0)$; asíntota $v = -1$



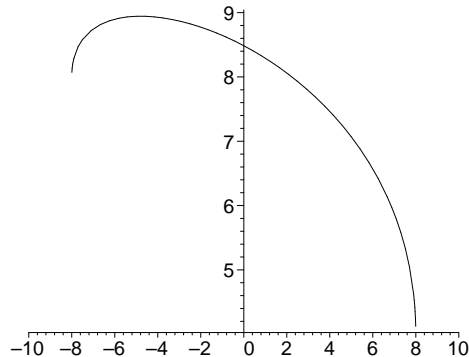
130 Dom $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$; asíntotas $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$



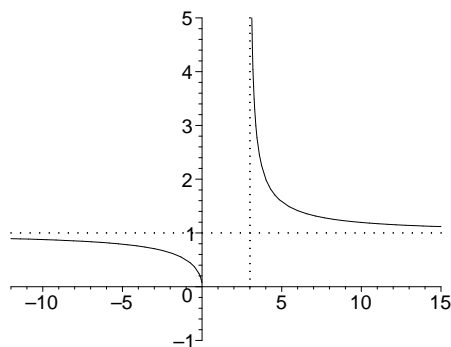
128 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 0)$; infl en $(0, 0)$; asíntotas $y = -1$ en $-\infty$, $y = 1$ en ∞



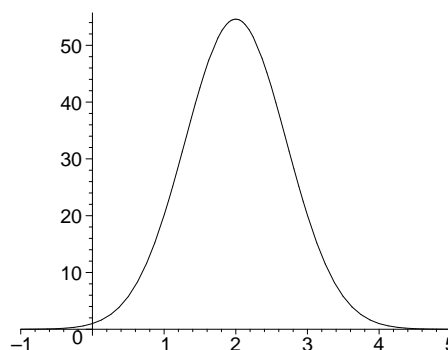
131 Dom $[-8, 8]$; inters $(0, 6\sqrt{2})$; máx en $(-24/5, 4\sqrt{5})$; mín en $(-8, 8)$ y en $(8, 4)$



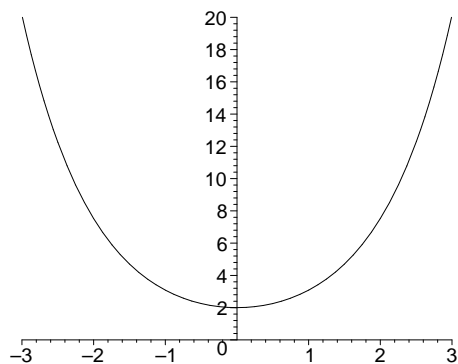
132 Dom $]-\infty, 0] \cup]3, \infty[$; inters $(0, 0)$; mín en $(0, 0)$; asíntotas $x = 3$, $y = 1$



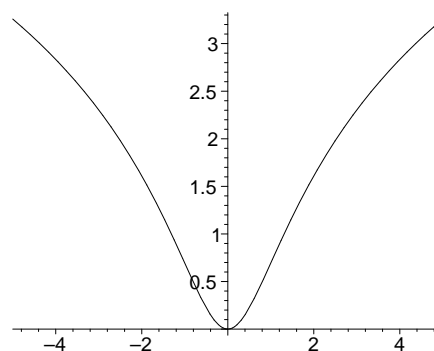
135 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 1)$; máx en $(2, e^4)$; infl en $(2 - \sqrt{1/2}, e^{7/2})$ y en $(2 + \sqrt{1/2}, e^{7/2})$; asíntota $y = 0$



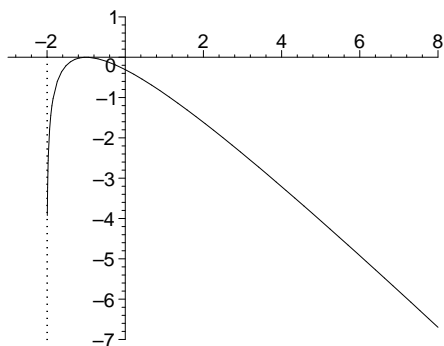
133 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 2)$; mín en $(0, 2)$



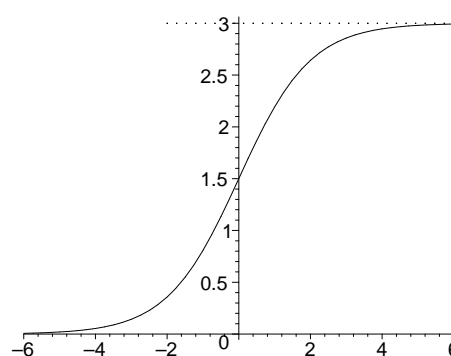
136 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 0)$; mín en $(0, 0)$; infl en $(-1, \ln 2)$ y en $(1, \ln 2)$



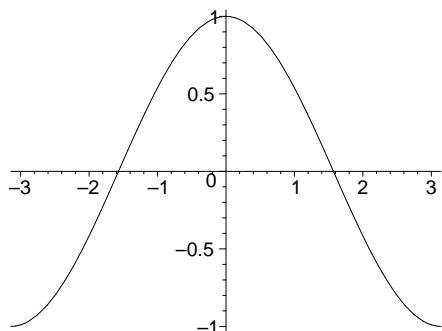
134 Dom $]-2, \infty[$; inters $(0, \ln 2 - 1)$, $(-1, 0)$; máx en $(-1, 0)$; asíntota $w = -2$



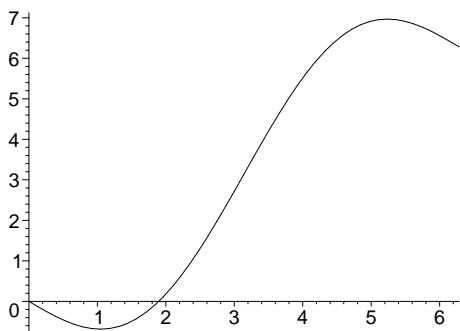
137 Dom \mathbb{R} ; inters $(0, 3/2)$; infl en $(0, 3/2)$; asíntotas $y = 0$ en $-\infty$, $y = 3$ en ∞



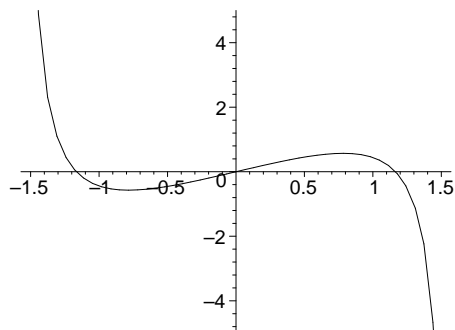
138 Dom $[-\pi, \pi]$; inters $(0, 1)$, $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$; máx en $(0, 1)$; mín en $(-\pi, -1)$ y en $(\pi, 1)$; infl en $(-\pi/2, 0)$ y en $(\pi/2, 0)$



139 Dom $[0, 2\pi]$; inters $(0, 0)$, $(1.89549, 0)$; máx en $(5\pi/3, 6.96804)$; mín en $(\pi/3, -0.684853)$; infl en (π, π)



140 Dom $]-\pi/2, \pi/2[$; inters $(-1.16556, 0)$, $(0, 0)$, $(1.16556, 0)$; máx en $(\pi/4, \pi/2 - 1)$; mín en $(-\pi/4, 1 - \pi/2)$; infl en $(0, 0)$



141 Baja 0.433013 m/s

142 Se acerca 0.480740 m/s

143 2.32558 m/s

144 Crece 18 849.6 cm²/s

145 Aumenta 0.206783 cm/s

146 Disminuye 0.00530516 cm/min

148 Entran 9.29204 L/s

149 Aumenta 1.69765 cm/s

150 Aumenta 0.0208 $\bar{3}$ cm/s

151 Sube 6.25 cm/min

152 Aumenta 0.125 rad/s

153 Disminuye 2.26893 cm/s

154 Se mueve a 217.817 m/s

155 615.752 km/h

156 Cambia a 136.808 km/h

5. Integración

1 $5u + C$

2 $3y^2 + C$

3 $t^2 + t\sqrt{3} + C$

4 $w^3 + 4w^2 - 4w + C$

5 $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x + C$

6 $\frac{3}{2}q^4 - \frac{3}{5}q^{5/3} - 5q^{-1} + C$

7 $-3\cos\theta - 2\sin\theta + C$

8 $\sin z + 3\tan z + C$

9 $2\ln|t| - 5t + \sec t + C$

10 $r^5 - \csc r + C$

11 $\frac{6}{5}r^{5/2} + 8r^{1/2} + \frac{3}{2}r^2 + 4\ln|r| + C$

12 $\frac{5}{4}p^4 - \frac{3}{10}p^{10/3} + C$

13 $\frac{2}{3}u^{3/2} + 6u^{1/2} + C$

14 $s^{5/2} - s^{3/2} + s^{1/2} + C$

15 $\frac{8}{9}v^{3/2} - \frac{8}{3}v^{1/2} - \frac{2}{3}v^{-1/2} + C$

16 $-2t^{-1} - \frac{1}{12}t^{-4} - 2t^{1/2} + C$

17 $-4t^{-1} + 3\ln|t| + 4t^{1/2} + C$

18 $\frac{1}{4}s^{13} - \frac{1}{4}s^5 + \frac{1}{2}\ln|s| + C$

19 $-15z^{-1} + \frac{5}{2}z^{-2} + 10\ln|z| + C$

20 $\frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{2}w^{-2} + C$

21 $\frac{1}{6}w^2 + \ln|w| + 3w^{-2} + C$

22 $x^3 - e^x + C$

23 $\frac{1}{5}(e^r - r^2) + C$

24 $e^v + v^{e+1}/(e+1) + C$

25 $\frac{1}{4}t^4 - 3^t/\ln 3 + C$

26 $\frac{2^z + (1/2)^z}{\ln 2} + C$

27 $100^w/\ln 100 - 2 \cdot 10^w/\ln 10 + w + C$

28 $2e^{2u} + C$

29 $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + C$

30 $\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} - \frac{4(5/3)^x}{\ln(5/3)} + C$

31 $\frac{1}{3}e^{3v} - 3e^{2v} + 12e^v - 8v + C$

32 $e^q + e^{-q} + C$

33 $\frac{2}{3}\arctan y + C$

34 $4\arcsin u + C$

35 $y = 3s^2 - 7s + 3$

36 $p = \frac{4}{3}w^{3/2} + w + \frac{5}{3}$

37 $r = z^5 + 2\ln|z| + 1$

38 $w = q^2 - 6e^q + 6e$

39 $u = 2\beta + 5\sin\beta - 5$

40 $w = \frac{1}{2}x^2 - \arctan x + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

41 $z = \frac{1}{2}r^4 + r^2 - \ln|r| + 2r - 3$

42 $y = -3v + 1$

43 $u = -3z^3 - 5z + 2$

44 $q = t^4 - 2t^3 - e^t + t + e$

45 $v = -\frac{27}{4}p^{4/3} + \frac{3}{2}p^2 + 4p - 2$

46 $z = 5\theta^3 + \sin\theta + \frac{\pi}{4}\theta^2 - 1$

47 40 m

48 $h(t) = 40 - 4.9t^2$; tarda 2.857 s;
golpea a 28 m/s

49 48.5287

50 2910.56 cm^3

51 $100t + 120t^{7/4} + 3500$; 13 984 afiliados

52 $P(t) = 206064.6 \cdot 1.02973^t$; $P(84) \approx 2\,414\,161$
habitantes (nota: según el censo de 1984, la
población era 2 416 809 habitantes)

53 4

54 45

55 $875/32 = 27.34375$

56 $96 - 576\sqrt{3} \approx -901.661$

57 0

58 $1171/30 = 39.0\bar{3}$

59 $\ln 2 + \frac{3}{8} \approx 1.06815$

60 $3/(2 \ln 2) \approx 2.16404$

61 3

62 $\pi/3$

63 $\pi/12$

64 $-\pi/6$

65 $13/2 = 6.5$

66 $13/2 = 6.5$

67 25

68 $4m + 4b$

69 $\ln 2 \approx 0.693147$

70 $76/3 = 25.\bar{3}$

71 $8\sqrt{2}/3 \approx 3.77124$

72 $17/6 = 2.8\bar{3}$

73 $2197/150 = 14.64\bar{6}$

74 $71/6 = 11.8\bar{3}$

75 $13/6 = 2.1\bar{6}$

76 $\frac{2}{3} + \ln 2 \approx 1.35981$

77 $(13\sqrt{13} + 5\sqrt{5} - 52)/12 \approx 0.504376$

78 $4/3 = 1.\bar{3}$

79 $2/15 = 0.1\bar{3}$

80 $2\sqrt{2}$

81 $\sec 1 - 1 \approx 0.850816$

82 4

83 $32/3 = 10.\bar{6}$

84 $4/5 = 0.8$

85 $1/12 = 0.08\bar{3}$

86 9

87 $\pi - 2 \approx 1.14159$

88 $128/15 = 8.5\bar{3}$

89 $9/2 = 4.5$

90 $27/4 = 6.75$

91 3.2524 dm

92 64.8 unidades

93 En \$133.43

94 1 760 193 habitantes

95 ₡1 147 500; ₡6 412 500

96 99.1653

97 $\sqrt{1 - x^4}$

98 $-\ln(6 + t^2)$

- 99** $3e^{27x^3}$
100 te^t
101 $6y \cos(27y^6)$
102 $\pi \cos(r\pi) \sqrt[5]{r^2\pi^2 + 1}$
103 $6x^3 \cos(x^6) - x^{-1/3} \cos x$
104 $3 \operatorname{sen}(y^{3/2}) / (2y) - \operatorname{sen}(e^y)$
105 $\frac{2}{15}(6y^3 - 7)^5 + C$
106 $\frac{9}{25}(5w^2 + 4)^{5/3} + C$
107 0
108 $\frac{1}{3}\sqrt{6q - 5} + C$
109 $\sqrt{v^2 + 1} + C$
110 $\frac{3}{4}(1 + 8t + 5t^2)^{2/3} + C$
111 $-\frac{1}{90}(5x^3 - 4)^{-6} + C$
112 $2/9 = 0.\bar{2}$
113 $\frac{1}{6}(2u + 1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2u + 1)^{1/2} + C$
114 $886/15 = 59.\bar{06}$
115 $-\frac{5}{3}(4 - p^2)^{6/5} + \frac{5}{22}(4 - p^2)^{11/5} + C$
116 $-\frac{2}{7}(1 - r)^{7/2} + \frac{4}{5}(1 - r)^{5/2} - \frac{2}{3}(1 - r)^{3/2} + C$
117 $\frac{1}{5}(s^2 + 4)^{5/2} + C$
118 $-5 \ln |2 - x| + C$
119 $3 \ln(4q^2 + 7) + C$
120 $-\ln 2 \approx -0.693147$
121 $\frac{1}{6} \ln(47/15) \approx 0.19035$
122 $\frac{1}{2} \ln |3t^2 + 4t| + C$
123 $\frac{1}{2}z^2 - 8z + 36 \ln |z + 5| + C$
124 $\frac{2}{3}y - \frac{1}{9} \ln |3y - 1| + C$
125 $\ln 2 - 1 \approx -0.306853$
126 $-3z^{-1} - \frac{3}{2} \ln(z^2 + 1) + C$
127 $\ln(e^r + e^{-r}) + C$
128 $\frac{1}{3} \ln |3e^v + 5 - 6v| + C$
129 $2 - 2 \ln 2 \approx 0.613706$
130 $2 \ln(1 + \sqrt{u}) + 2/(1 + \sqrt{u}) + C$
131 $-\log_2 |5 + t \ln 2 - 2^t| + C$
132 $\frac{1}{a(1-k)}(ax + b)^{1-k} + C$ si $k \neq 1$,
o $\frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$ si $k = 1$
133 $\frac{1}{3}e^{3p-1} + C$
134 $-\frac{5}{2}e^{1-w^2} + C$
135 $e^u + 2u - e^{-u} + C$
136 $-e^{1/z} + C$
137 $\frac{1}{2}(e^{-3.91} - e^{-3.99}) \approx 0.000770393$
138 $-2e^{-x/2} + C$
139 $38/3 = 12.\bar{6}$
140 $2^{1+\sqrt{t}} / \ln 2 + C$
141 $-\frac{3}{2} 10^{1-y^2} / \ln 10 + C$
142 $-1/(5^{\ln v} \ln 5) + C$
143 $-\ln |\cos \theta| + C = \ln |\sec \theta| + C$
144 -3
145 $-\frac{1}{\pi} \cos^3 \pi w + C$
146 $-\frac{1}{7} \cot 7\alpha + C$
147 $16 - 5\sqrt{3} \approx 7.33975$
148 $-2/\sqrt{\sec \theta} + C$
149 $\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0.5 \approx 0.362045$

$$150 \quad 3 \arctan 3v + C$$

$$151 \quad \pi/4$$

$$152 \quad \frac{1}{2} \arctan^2 z + C$$

$$153 \quad 9 \arctan(x - 5) + C$$

$$154 \quad 2 \arctan(3w - 2) + C$$

$$155 \quad \arcsen(u - 3) + C$$

$$156 \quad \pm \frac{1}{2} \operatorname{arcsec}(2y + 1) + C$$

$$157 \quad \arctan e^r + C$$

$$158 \quad -e^{\cos x} + C$$

$$159 \quad \frac{1}{2} \ln(1 + 2e^r) + C$$

$$160 \quad 1$$

$$161 \quad \frac{1}{2} \ln^2(p + 1) + C$$

$$162 \quad 2$$

$$163 \quad \ln |\ln 0.5| - \ln |\ln 0.2| \approx -0.842398$$

$$164 \quad \ln |\ln x| + \ln x + C$$

$$165 \quad -1/\ln(1 - w) + C$$

$$166 \quad 2\sqrt{\ln r} + C$$

$$167 \quad \frac{5}{4} \ln^2(t^2 + 1) + C$$

$$168 \quad \frac{1}{3} \ln^3(y + 1) + C$$

$$169 \quad 2\sqrt{s^2 + \ln s} + C$$

$$170 \quad \frac{3}{2}(1 + \sqrt{v})^{4/3} + C$$

$$171 \quad \sqrt{1 + \ln(u^2 + 1)} + C$$

$$172 \quad \sqrt{1 + \ln^2(p + 1)} + C$$

$$194 \quad 2 \ln |p - 3| - \ln |p - 5| + K$$

$$195 \quad \ln |v - 1| - \ln |v + 2| + K$$

$$173 \quad \frac{1}{3}(e^{x^2} + 1)^{3/2} + C$$

$$174 \quad -\frac{1}{8} \log_{10} |1 - 10^{4z^2+1}| + C$$

$$175 \quad \frac{1}{9}[8(1 + x^3)^{3/2} - 16\sqrt{2}]$$

$$176 \quad 38/3 = 12.\bar{6}$$

$$177 \quad (1 - e^{-3})/3 \approx 0.316738$$

$$178 \quad 4 - \sqrt{7} \approx 1.35425$$

$$179 \quad 4 - \ln 16 \approx 1.22741$$

$$180 \quad -0.498201$$

$$181 \quad 1.21276$$

$$182 \quad f(t) = -\frac{1}{3}(1 - t^2)^{3/2}$$

$$183 \quad g(u) = \arcsen(u/2) + \sqrt{4 - u^2} - 1$$

$$184 \quad V(t) = 64000 - 1000(t + 1)^{3/2} \text{ dólares; } 15 \text{ años}$$

$$185 \quad 45 + 20 \ln(2/5) \approx 26.674 \text{ km}$$

$$186 \quad 200 \arctan(4/3) \approx 185.459 \text{ m/s}$$

$$187 \quad P(t) = 50e^{0.01t^2} - 15; P(12) \approx 196 \text{ individuos}$$

$$188 \quad 9160.9 \text{ m}^2$$

$$189 \quad \$223\,935.67$$

$$190 \quad 137\,360 \text{ barriles; } 65\,924 \text{ barriles}$$

$$191 \quad 14.415 \text{ kg/h; en } 2.004 \text{ kg/h}$$

$$192 \quad \text{En } 28.2198 \text{ m}$$

$$193 \quad \$150.05$$

$$196 \quad \frac{5}{3} \ln |u + 2| - \frac{2}{3} \ln |u - 4| + K$$

$$197 \quad \ln |t + 1| + 2 \ln |t - 2| - 2t + K$$

$$198 \ln|2x+3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + K$$

$$199 \ln|1+2r| - \ln|1-3r| + K$$

$$200 -\frac{1}{6} \ln|9-u^2| + K$$

$$201 \ln|q+1| + \ln|q-1| - 2 \ln|q| + K$$

$$202 w + \ln|w| + 2 \ln|w+2| + 9 \ln|w-4| + K$$

$$203 \frac{1}{2} \ln|2z+5| + \frac{1}{2} \ln|z-1| - \ln|z+3| + K$$

$$204$$

$$2 \ln|y-1| + \frac{1}{2} \ln|y| - \frac{3}{4} \ln|y+2| - \frac{7}{4} \ln|y-2| + K$$

$$205$$

$$2 \ln|s-1| - \ln|s+2| + 3 \ln|s+3| - 19 \ln|s-3| + K$$

$$206 s + s^{-1} + 2 \ln|s| + \ln|s-3| + K$$

$$207 3v^2 - 14v - 5(v+1)^{-1} + 3 \ln|3v+1| + K$$

$$208 \frac{9}{4}(2x+3)^{-1} + \frac{5}{4} \ln|2x+3| + \frac{1}{2} \ln|2x-3| + K$$

$$209$$

$$-\frac{9}{4}(2p-1)^{-1} + \frac{1}{4} \ln|2p-1| + \ln|p| - \ln|p+2| + K$$

$$210 -3(r+2)^{-1} - r^{-1} + 2 \ln|r+2| - \ln|r| + K$$

$$211$$

$$(q-4)^{-1} - 10(3q+2)^{-1} - \frac{1}{2} \ln|q-4| + \frac{1}{2} \ln|3q+2| + K$$

$$212$$

$$4z^{-1} - 3(z+1)^{-1} - 3 \ln|z+1| + 3 \ln|z-1| + K$$

$$213 -\frac{1}{2}t^{-2} - \ln|t| + \ln|3t-2| + K$$

$$214 32(4-w)^{-2} - \ln|w+1| + K$$

$$215 -\frac{1}{4}y + \frac{125}{16}(2y-5)^{-2} + \frac{75}{8}(2y-5)^{-1} - \frac{1}{4} \ln|y-2| + \frac{1}{4} \ln|y+2| - \frac{15}{8} \ln|2y-5| + K$$

$$216 -2(u-2)^{-1} - (u-2)^{-2} - \frac{3}{2}(2u+1)^{-1} + \frac{1}{2} \ln|2u+1| + K$$

$$217$$

$$x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|3x+1| + \frac{10}{3} \ln|3x-1| + K$$

$$218 5 \ln|z| + \ln(z^2+1) - \arctan z + K$$

$$219 \frac{1}{2} \ln(q^2+2q+2) - 2 \arctan(q+1) + K$$

$$220$$

$$\ln|w-1| + \frac{3}{8} \ln(4w^2+4w+5) - \frac{5}{8} \arctan(w+\frac{1}{2}) + K$$

$$221 -r^{-1} + \frac{1}{2} \ln(r^2+5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan(r/\sqrt{5}) + K$$

$$222$$

$$t^2 + 2t - \frac{1}{4} \ln(4t^2 - 4t + 5) - \frac{1}{4} \arctan(t - \frac{1}{2}) + K$$

$$223 \ln(2e^y+3) - \ln(e^y+2) + K$$

$$224 3 \ln(e^s+1) - 2s + K$$

$$225 x - \frac{1}{2} \ln|1-e^x| - \frac{1}{2} \ln|1+e^x| + K$$

$$226 2 \log_3|3^r-2| + 2 \log_3|3^r+1| - 3r + K$$

$$227$$

$$2t - \frac{1}{2} \log_2|4^t + 2^{t+1} + 2| + \frac{2}{\ln 2} \arctan(2^t + 1) + K$$

$$228 \ln|\ln q+1| - \ln|\ln q-1| - \ln|q| + K$$

$$229 \frac{2}{3} \arctan(\sqrt{v}/3) + K$$

$$230 \frac{1}{7} \sin^7 \theta + C$$

$$231 -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$232 \frac{1}{14} \sin^7(2w+1) - \frac{1}{18} \sin^9(2w+1) + C$$

$$233 -\frac{1}{8} \csc^8 y + \frac{1}{6} \csc^6 y + C$$

$$234$$

$$\frac{2}{3\pi} \sec^3(\pi v/2) - \frac{4}{\pi} \sec(\pi v/2) - \frac{2}{\pi} \cos(\pi v/2) + C$$

$$235 \frac{1}{8} \beta - \frac{1}{32} \sin 4\beta + C$$

$$236 \frac{3}{8} u - \frac{1}{12} \sin 6u + \frac{1}{96} \sin 12u + C$$

$$237 \frac{5}{2} t + 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C$$

$$238 \frac{1}{5} \tan^5 y + \frac{1}{3} \tan^3 y + C$$

$$239 \frac{1}{3} (5 + 2 \tan \alpha)^{3/2} + C$$

$$240 \frac{1}{5} \sec^5 z - \frac{1}{3} \sec^3 z + C$$

$$241 3 \sec^8(2\beta) - 8 \sec^6(2\beta) + 6 \sec^4(2\beta) + C \\ = 3 \tan^8(2\beta) + 4 \tan^6(2\beta) + D$$

$$242 \frac{1}{4} \sec^4 \alpha - \frac{1}{2} \sec^2 \alpha + C_1 = \frac{1}{4} \tan^4 \alpha + C_2$$

$$243 \ln |4 + \tan x| + C$$

$$244 \frac{1}{3} \tan^3 \theta - \tan \theta + \theta + C$$

$$245 -3 \cot^3 v + C$$

$$246 \csc x - \frac{1}{3} \csc^3 x + C$$

$$247 \frac{1}{3} \sec^3 \alpha - \sec \alpha + C$$

$$248 -2 \csc^5 y + C$$

$$249 -\frac{1}{2} \ln(\cos^2 v + 1) + C, \text{ o bien } \ln |\sec v| - \frac{1}{2} \ln(1 + \sec^2 v) + D$$

$$250 \ln |1 + \operatorname{sen} r| + C$$

$$251 \tan z + \sec z + C$$

$$252 \frac{1}{4} [(1 - \operatorname{sen} t)^{-1} - (1 + \operatorname{sen} t)^{-1} + \ln |1 - \operatorname{sen} t| - \ln |1 + \operatorname{sen} t|] + C$$

$$253 \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$254 2 \operatorname{arcsen}(p/2) + \frac{1}{2} p \sqrt{4 - p^2} + C$$

$$255 -6\sqrt{9 - y^2}^3 + \frac{2}{5} \sqrt{9 - y^2}^5 + C$$

$$256 \frac{1}{8} \operatorname{arcsen} t - \frac{1}{8} t \sqrt{1 - t^2} (1 - 2t^2) + C \\ = \frac{1}{8} \operatorname{arcsen} t - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4 \operatorname{arcsen} t) + D$$

$$257 -\sqrt{9r^2 + 1}/r + C$$

$$258 -(q^2 + 4)/(32q\sqrt{q^2 + 8}) + C$$

$$259 -\frac{1}{2}(4v^2 + 1)^{-3/2} + C$$

$$260 \sqrt{4t^2 - 9} - 3 \arctan \left(\frac{1}{3} \sqrt{4t^2 - 9} \right) + C$$

$$261 \sqrt{u^2 - 5}/(25u) - \sqrt{u^2 - 5}^3/(75u^3) + C$$

$$262 -q/(100\sqrt{q^2 - 100}) + C$$

$$263 \operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{2}(z + 1) \right) - \sqrt{3 - 2z - z^2} + C$$

$$264$$

$$\frac{1}{32} [(4x - 2)/(4x^2 - 4x + 5) + \arctan(x - \frac{1}{2})] + C$$

$$265$$

$$\pm \operatorname{arcsec}(m + 1) + C_1 = -\operatorname{arccot}(\sqrt{m^2 + 2m}) + C_2$$

$$266 \frac{1}{5} \ln(3/2) \approx 0.0810930$$

$$267 39 + 48 \ln 2 \approx 72.2711$$

$$268 3 + 4 \operatorname{arcsec}(-5/4) - 4\pi \approx 0.425996$$

$$269 2 \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2} \ln y) + (\frac{1}{2} \ln y) \sqrt{4 - \ln^2 y} + C$$

$$270 \frac{2}{27} \sqrt{1 - 9w^{-1}}^3 + C$$

$$271 e^{-u} \sqrt{1 + e^{2u}} + C$$

$$272 1/9 = 0.\bar{1}$$

$$273 124 \ln 2 - 15 \approx 70.9503$$

$$274 36 \ln 3 - \frac{104}{9} \approx 27.9945$$

$$275 2e^3 + 1 \approx 41.1711$$

$$276 2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t} + C$$

$$277 -2^{-t}(1 + t \ln 2)/\ln^2 2 + C$$

$$278 -we^{-w} - 2e^{-w} + C$$

$$279 10^x(x^2/\ln 10 - 2x/\ln^2 10 + 2/\ln^3 10) + C$$

$$280 \pi \approx 3.14159$$

$$281 0$$

$$282 (\pi - 2)/4 \approx 0.285398$$

$$283 \frac{1}{27} e^{3q-1}(9q^2 - 6q + 2) + C$$

$$284 \frac{1}{4} e^{4r} - \frac{1}{2} e^{2r} + r e^{2r} + \frac{1}{3} r^3 + C$$

$$285$$

$$(3u^3 + 2u^2 + u) \log_5 u - (u^3 + u^2 + u)/\ln 5 + C$$

$$286 \frac{1}{2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2} \theta \cos 2\theta + C$$

$$287 \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193147$$

$$288 18 - \frac{21}{2} \ln 7 \approx -2.43206$$

$$289$$

$$y \log(5y^2 - 4y) - (2y + \frac{4}{5} \ln |5y - 4|)/\ln 10 + C$$

$$290 u \arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + C$$

- 291** $y \arcsen 2y + \frac{1}{2}\sqrt{1-4y^2} + C$
292 $18 \ln 2 - 6 \ln 3 - 3 \approx 2.88498$
293 $(28 - 32 \ln 8)/\ln^2 8 \approx -8.91338$
294 $\frac{1}{2}e^{p^2-2p}(p^2-2p) + C$
295 $2e^{\sqrt{u}}(\sqrt{u}-1) + C$
296 20
297 -18
298 $2e - 1 \approx 4.43656$
299 $(2 \ln 4 + 4)/14 - (2 \ln 25 + 4)/35 \approx 0.185535$
300 $3(y^2+1)^3 \ln(y^2+1) - (y^2+1)^3 + C$
301 $e^t/(t+1) + C$
302 $p \ln(p + \sqrt{1+p^2}) - \sqrt{1+p^2} + C$
303 $2^q(\sin q + (\ln 2) \cos q)/(1 + \ln^2 2) + C$
304 $-\frac{2}{5}e^{-w} \cos 2w - \frac{1}{5}e^{-w} \sin 2w + C$
305 $\frac{1}{2}(\sec \alpha \tan \alpha + \ln |\sec \alpha + \tan \alpha|) + C$
306 $\frac{1}{2}(\sec t \tan t - \ln |\sec t + \tan t|) + C$
307 $\frac{1}{2}r[\cos(\ln r) + \sin(\ln r)] + C$
308 2
309 $-\ln z/(z+1) + \ln z - \ln |z+1| + K$
310 $(y^3+y) \ln(y^2-1) - \frac{2}{3}y^3 - 4y + 2 \ln |y+1| - 2 \ln |y-1| + K$
311 $\pi/2 \approx 1.57080$
312 0.435210
313 Diverge
314 6
315 $1/(p-1)$ si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$
316 Diverge
317 Diverge
318 -1
319 $-1/4$
320 $1/2$
321 Diverge
322 $\pi \approx 3.14159$
323 Diverge
324 $\pi/2 \approx 1.57080$
325 Diverge

6. Temas adicionales sobre integración

- 1** $-\frac{5}{4}(2t^2+3)^{-1} + K$
2 $3q(1+q^2)^{-1} + 3 \arctan q + K$
3 $-\frac{1}{2}(r^2+5)^{-1} + \frac{5}{4}(r^2+5)^{-2} + K$
4 $\frac{1}{2} \ln(z^2+4) - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} + (z+2)(z^2+4)^{-1} + K$
5 $2 \ln |r| + \frac{1}{2} \arctan r - \ln(r^2+1) - \frac{1}{2}(r+2)(r^2+1)^{-1} + K$

$$\mathbf{6} \quad \ln|w+1| + 2 \arctan(w/3) - \frac{1}{2}(6w-27)(w^2+9)^{-1} + K$$

$$\mathbf{7} \quad \frac{1}{4} \arctan(1+2u) - (\frac{1}{2}u + \frac{1}{4})(4u^2+4u+2)^{-1} + K$$

$$\mathbf{8} \quad \frac{9}{16} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-5)(x^2-2x+5)^{-1} + K$$

$$\mathbf{9} \quad 2 \operatorname{sen} z / (\cos z + \operatorname{sen} z - 1) + C$$

$$\mathbf{10} \quad 4(\cos t - 1)^{-2} + C$$

$$\mathbf{11} \quad \ln|\operatorname{sen} q + 5 + 5 \cos q| - \ln|5 \operatorname{sen} q - 1 - \cos q| + C$$

$$\mathbf{12} \quad \ln|1 + \cos x + \operatorname{sen} x| - \ln|1 + \cos x - \operatorname{sen} x| + C = \ln|\sec x + \tan x| + D$$

$$\mathbf{13} \quad \ln|\operatorname{sen} x| - \ln|1 + \operatorname{sen} x + \cos x| + C$$

$$\mathbf{14} \quad \ln|\operatorname{sen} v - 2 - 2 \cos v| - \ln|\operatorname{sen} v| + C$$

$$\mathbf{15} \quad 3 \ln|1 + \cos w| - 3 \ln|\cos w| + C$$

$$\mathbf{16} \quad 2 \ln|1 + \tan(r/2)| - \ln|1 + \tan^2(r/2)| + C$$

$$\mathbf{17} \quad \ln|1 + \tan(r/2)| - \ln|1 - \tan(r/2)| - \tan(r/2) + C$$

$$\mathbf{18} \quad \tan(z/2) + 2 \ln|\tan(z/2) - 1| - 2(\tan(z/2) - 1)^{-1} + C$$

$$\mathbf{19} \quad 2(\tan(\beta/2) + 1)^{-1} + \beta + C$$

$$\mathbf{20} \quad \frac{1}{4} \ln|1 + 2 \cos p| - \frac{1}{4} \ln|1 - 2 \cos p| + \frac{\sqrt{3}}{12} \ln|3 - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} p| - \frac{\sqrt{3}}{12} \ln|3 + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} p| + C$$

$$\mathbf{21} \quad 0.749784, 0.950158, 1.08461$$

$$\mathbf{31} \quad -0.157080, 0, 0.157080$$

$$\mathbf{22} \quad 0.831963, 1.16528, 1.46005$$

$$\mathbf{32} \quad -0.342084, -0.333333, -0.342084$$

$$\mathbf{23} \quad 4.03976, 3.45398, 2.34235$$

$$\mathbf{33} \quad 24$$

$$\mathbf{24} \quad 0.292272, 0.412889, 0.326270$$

$$\mathbf{34} \quad 2.5$$

$$\mathbf{25} \quad -0.303931, -0.000781726, 0.307193$$

$$\mathbf{35} \quad 70$$

$$\mathbf{26} \quad 1.7154, -0.3125, -2.6054$$

$$\mathbf{36} \quad -15$$

$$\mathbf{27} \quad 0.777448, 0.949333, 1.06029$$

$$\mathbf{37} \quad 28.5$$

$$\mathbf{28} \quad 0.982130, 1.16061, 1.32870$$

$$\mathbf{38} \quad 0.375$$

$$\mathbf{29} \quad 3.74687, 3.38761, 2.89816$$

$$\mathbf{40} \quad -40/3$$

$$\mathbf{30} \quad 0.324540, 0.410727, 0.324540$$

$$\mathbf{41} \quad 1625/3$$

42 0

43 (a) $\frac{1}{n^3} \left(\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-2}$.
(b) $2/3$

44 $\int_0^5 x \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

45 $\int_1^4 \ln x \, dx$

46 15.8114

47 21.2209

48 1.67329

49 2.0625

50 $136.00\bar{8}$

51 $3.2458\bar{3}$

52 0.881374

53 2.32339

54 0.598612

55 1.20273

56 1.61677

57 23.52 J

58 22 050 J

59 450 000 J

60 399.667 J; 1195.01 J

61 46 181.4 J

62 641.409 J

63 12.5664 J

64 0.1125 J

65 1.56 J

66 6.25 N

67 $2.013\bar{8}$ J

68 32 666.7 J

69 5

70 $(5 - 3e^{-2})/2 \approx 2.2970$

71 $2/\pi \approx 0.636620$

72 0

73 $(\ln 7)/3 \approx 0.648637$

74 $-7/(6e - 6) \approx -0.678973$

75 $(13e^6 - 1)/27 \approx 194.206$

76 $4/\pi - 1 \approx 0.273240$

77 $e^4/(1 - e) \approx -31.7749$

78 $5(4 - 3 \ln 5)/8 \approx -0.517696$

79 $(3/4) \ln(5/9) \approx -0.44084$

80 $\ln 243 \approx 5.49306$

81 39.9667 N; 119.501 N

82 63.7 m/s

83 37.53° C

84 3.442 un; 2.036 un; 4.532 un

85 \$120 545.63

86 (a) ₱3 715 763.75 (b) ₱3 910 415.72
(c) ₱4 687 515.56.

87 ₱5 830 980.15

A. Repaso de técnicas de integración

$$1 \quad r^5 - \csc r + C$$

$$2 \quad \frac{8}{9}v^{3/2} - \frac{8}{3}v^{1/2} - \frac{2}{3}v^{-1/2} + C$$

$$3 \quad \frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{2}w^{-2} + C$$

$$4 \quad \frac{1}{4}t^4 - 3^t / \ln 3 + C$$

$$5 \quad \frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} - \frac{4(5/3)^x}{\ln(5/3)} + C$$

$$6 \quad 4 \arcsen u + C$$

$$7 \quad \frac{2}{15}(6y^3 - 7)^5 + C$$

$$8 \quad -\frac{1}{3}(x^3 - 2)^{-1} + C$$

$$9 \quad 3 \ln(4q^2 + 7) + C$$

$$10 \quad -3z^{-1} - \frac{3}{2} \ln(z^2 + 1) + C$$

$$11 \quad \frac{1}{3}e^{3p-1} + C$$

$$12 \quad 2^{1+\sqrt{t}} / \ln 2 + C$$

$$13 \quad \frac{3}{2} \sec^2 u + 15 \tan u + C$$

$$14 \quad 2 \arctan(3w - 2) + C$$

$$15 \quad \frac{1}{2} \ln^2(p + 1) + C$$

$$16 \quad -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$17 \quad \frac{1}{8}\beta - \frac{1}{32} \sen 4\beta + C$$

$$18 \quad \frac{1}{3}(5 + 2 \tan \alpha)^{3/2} + C$$

$$19 \quad \ln |4 + \tan x| + C$$

$$20 \quad \frac{1}{3} \sec^3 \alpha - \sec \alpha + C$$

$$21 \quad \tan z + \sec z + C$$

$$22 \quad \frac{5}{3} \ln |u + 2| - \frac{2}{3} \ln |u - 4| + K$$

$$23 \quad \ln |1 + 2r| - \ln |1 - 3r| + K$$

$$24 \quad w + \ln |w| + 2 \ln |w + 2| + 9 \ln |w - 4| + K$$

$$25$$

$$2 \ln |s - 1| - \ln |s + 2| + 3 \ln |s + 3| - 19 \ln |s - 3| + K$$

$$26 \quad 3v^2 - 14v - 5(v + 1)^{-1} + 3 \ln |3v + 1| + K$$

$$27$$

$$(q - 4)^{-1} - 10(3q + 2)^{-1} - \frac{1}{2} \ln |q - 4| + \frac{1}{2} \ln |3q + 2| + K$$

$$28 \quad -\frac{1}{4}y + \frac{125}{16}(2y - 5)^{-2} + \frac{75}{8}(2y - 5)^{-1} - \frac{1}{4} \ln |y - 2| + \frac{1}{4} \ln |y + 2| - \frac{15}{8} \ln |2y - 5| + K$$

$$29 \quad \frac{1}{2} \ln(q^2 + 2q + 2) - 2 \arctan(q + 1) + K$$

$$30$$

$$t^2 + 2t - \frac{1}{4} \ln(4t^2 - 4t + 5) - \frac{1}{4} \arctan(t - \frac{1}{2}) + K$$

$$31 \quad 2 \log_3 |3^r - 2| + 2 \log_3 |3^r + 1| - 3r + K$$

$$32 \quad -6\sqrt{9 - y^2}^3 + \frac{2}{5}\sqrt{9 - y^2}^5 + C$$

$$33 \quad -\frac{1}{5} \ln |(5 + \sqrt{25 - x^2})/x| + C$$

$$34 \quad -\sqrt{9r^2 + 1}/r + C$$

$$35$$

$$\frac{1}{32} [(4x - 2)/(4x^2 - 4x + 5) + \arctan(x - \frac{1}{2})] + C$$

$$36 \quad -q/(100\sqrt{q^2 - 100}) + C$$

$$37$$

$$\pm \operatorname{arcsec}(m + 1) + C_1 = -\operatorname{arccot}(\sqrt{m^2 + 2m}) + C_2$$

$$38 \quad \frac{1}{4}p^4 \ln p - \frac{1}{16}p^4$$

$$39 \quad -we^{-w} - 2e^{-w} + C$$

$$40 \quad \frac{1}{27}e^{3q-1}(9q^2 - 6q + 2) + C$$

$$41 \quad \frac{1}{2} \ln(p + 5)(p^2 - 25) - \frac{1}{4}p^2 + \frac{5}{2}p$$

$$42 \quad w^2 8^{w^2+1} / (2 \ln 8) - 8^{w^2+1} / (2 \ln^2 8) + C$$

$$43 \quad u + u \ln^2 u$$

$$44 \quad 2^q (\sen q + (\ln 2) \cos q) / (1 + \ln^2 2) + C$$

$$45 \quad -\ln z / (z + 1) + \ln z - \ln |z + 1| + K$$

46 $\frac{1}{3}\sqrt{6q-5} + C$

47
 $4z^{-1} - 3(z+1)^{-1} - 3\ln|z+1| + 3\ln|z-1| + K$

48 $\arctan q + \ln|q| - \frac{1}{2}\ln(q^2+1) + K$

49 $\frac{3}{8}u - \frac{1}{12}\sin 6u + \frac{1}{96}\sin 12u + C$

50 $\frac{5}{48}\sqrt{4x^2+1}^3 - \frac{5}{16}\sqrt{4x^2+1} + C$

51 $e^t/(t+1) + C$

52 $\frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{2}w^{-2} + C$

53 $3\ln(e^s+1) - 2s + K$

54 $\frac{1}{5}(s^2+4)^{5/2} + C$

55 $-(q^2+4)/(32q\sqrt{q^2+8}) + C$

56 $2\arctan(3w-2) + C$

57 $\frac{1}{3}\ln^3(y+1) + C$

58 $\frac{1}{3}\ln|3e^v+5-6v| + C$

59 $-\frac{1}{\pi}\cos^3\pi w + C$

60 $\frac{4}{3}y^3 + 4 \cdot 2^y/\ln^2 2 + 4^y/(2\ln 2) - 4y \cdot 2^y/\ln 2 + C$

61 $\frac{1}{3}e^{3p-1} + C$

62 $\frac{1}{9}e^{3z}(3z-1) + C$

63 $\ln|\sec t + \tan t| - \ln|\cos t| + C$

64 $-e^{\cos x} + C$

65 $r^5 - \csc r + C$

66 $y\log(5y^2-4y) - (2y + \frac{4}{5}\ln|5y-4|)/\ln 10 + C$

67 $\frac{1}{3}e^{3v} - 3e^{2v} + 12e^v - 8v + C$

68 $-2\csc^5 y + C$

69 $-\frac{1}{2}t^{-2} - \ln|t| + \ln|3t-2| + K$

70 $\frac{1}{3}\tan^3\theta - \tan\theta + \theta + C$