Probabilidades – II 2024

Distribuciones de Probabilidad

(Discretas)

Hebreos 11:1

Actividad: **Resultado de la F(E)!!**

UNA URNA CONTIENE 5 BOLAS ROJAS Y 7 VERDES. UN JUEGO CONSISTE EN SACAR TRES BOLAS UNA TRAS OTRA SIN SUSTITUCIÓN; SE PAGA $3 POR CADA BOLA ROJA Y $1 POR CADA BOLA VERDE QUE SE EXTRAIGA.

A) ¿ES ALEATORIA LA VARIABLE *X*: LA CANTIDAD DE DINERO GANADO?

B) ¿CUÁL ES EL RANGO DE LA VARIABLE X?

C) ¿CONSIDERA EXAGERADO COBRAR UNA CUOTA DE $6 POR PARTICIPAR EN EL JUEGO?

$U = \{7V,\ 5R\}$ $\quad$ X: *cantidad recibida al jugar* $\quad$ $R_X = \{3, 5, 7, 9\}$

$$f_X(3) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{7}{44} \quad VVV$$

$$f_X(5) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{21}{44} \quad RVV + VRV + VVR$$

$$f_X(7) = 3\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10}\right) = \frac{7}{22} \quad RRV + RVR + VRR$$

$$f_X(9) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22} \quad RRR$$

$$E(X) = 3 \cdot \frac{7}{44} + 5 \cdot \frac{21}{44} + 7 \cdot \frac{7}{22} + 9 \cdot \frac{1}{22} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Distribución de Probabilidad

Definición 1.

Si Ω es el espacio muestral para un experimento aleatorio entonces una variable aleatoria X es una función del espacio muestral al conjunto de los reales.

$$X : \Omega \longrightarrow \Re.$$

Definición 2.

Si X es una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ una distribución de probabilidad para X es una función, f_X, del $Rango(X)$ a los reales.

$$f_X : Rango(X) \longrightarrow \Re, \text{que cumple:}$$

1. $f_X(x_i) \geq 0, \ \forall x_i \in Rango(X),$
2. $\displaystyle\sum_{x \in Rango(X)} f_X(x) = 1.$

Distribución de Probabilidad

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Definición 3.

Si X es una variable aleatoria discreta con rango $R = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ entonces se define la función de distribución de masa o distribución acumulada para X por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \sum_{i=0}^{r} f_X(x_i) & \text{si } x_0 \leq x < x_{r+1}. \end{cases}$$

IMPORTANTE

$$
\begin{aligned}
P[a \leq X \leq b] &= F(b) - F(a^-), \\
P[a \leq X < b] &= F(b^-) - F(a^-), \\
P[a < X \leq b] &= F(b) - F(a).
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Suponga que una variable aleatoria discreta X se distribuye de acuerdo a la distribución de probabilidad siguiente:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

Determine el valor de k

Determine la probabilidad de que X sea superior a 6

Ejemplo

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 20 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

$$\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1 \quad \rightarrow \sum_{x=0}^{20} kx^2 = 1 \quad \rightarrow k \sum_{x=0}^{20} x^2 = 1 \cdot \quad \rightarrow k \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 1 \quad \rightarrow k = \frac{1}{2870}$$

$$\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1 \rightarrow \sum_{x=0}^{20} kx^2 = 1 \rightarrow k \sum_{x=0}^{20} x^2 = 1 \rightarrow k = \frac{1}{\sum_{x=0}^{20} x^2} \rightarrow k = \frac{1}{2870}$$

Ejemplo

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 20 \\ 0 & otro\ caso \end{cases} \quad \rightarrow k = \frac{1}{2870}$$

$$P(X>6) = \sum_{x=7}^{20} \frac{x^2}{2870} = \frac{397}{410}$$

$$P(X>6) = 1 - P(X \le 6) = 1 - \sum_{x=0}^{6} \frac{x^2}{2870} = \frac{397}{410}$$

Esperanza o Valor esperado

Si X es una variable aleatoria se define la media o la esperanza de X por a. Si X es discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ se definen la media o esperanza de X por

$$\mu_X = \sum_{x_i \in R_X} x_i f_X(x_i),$$

con la condición de que

$$\sum_{x_i \in R_X} |x_i| f_X(x_i) < \infty.$$

Esperanza o Valor esperado

Si $h(x)$ es una función real y X es una variable aleatoria se tiene que

a. Si X es discreta

$$\mu_{h(X)} = \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) f_X(x_i),$$

con la condición de que

$$\sum_{x_i \in R_X} |h(x_i)| f_X(x_i) < \infty.$$

Propiedades de la esperanza

Si X y Y son variables aleatorias y c es una constante, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El valor esperado de una variable aleatoria constante es la misma constante.

$$\mu_c = c.$$

2. El valor esperado de una variable aleatoria multiplicada por una constante es la constante por el valor esperado de la variable.

$$\mu_{(cX)} = c\mu_X.$$

3. El valor esperado de una suma de dos variables aleatorias es la suma de los valores esperados de las variables.

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y.$$

Varianza

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad f_X, y media μ_X se define la varianza de X como la esperanza de $(X - \mu_X)^2$.

Teorema 2.

Si X es una variable aleatoria cuya media y varianza existen se tiene que $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Caracterización de la varianza

Propiedades de la varianza

Si X y Y son variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen y c es una constante, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. La varianza de una variable aleatoria constante es cero.

$$VAR(c) = 0.$$

2. La varianza de una variable aleatoria multiplicada por una constante es la constante al cuadrado por la varianza de la variable.

$$VAR(cX) = c^2 VAR(X).$$

3. La varianza de una suma de dos variables aleatorias es la suma de las varianzas de las variables.

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y).$$

Ejemplo

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Sean X y Y variables aletorias discretas tales que $E(X) = 4$, $Var(X) = \frac{16}{5}$ y $Y = X^2 - 3X + 2$. Determine la esperanza de Y.

$$E(Y) = E(X^2 - 3X + 2)$$

$$= E(X^2) - 3E(X) + E(2)$$

$$= \frac{16}{5} + 4^2 - 12 + 2$$

$$= \frac{46}{5}$$

Ejercicio

Considere f_X la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X

Calcule el valor de $Var(X)$ si se sabe que:

- $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$
- $f_X(1) = f_X(3)$
- $f_X(2) = f_X(4)$
- $F_X(3) = 0{,}8$

Función Generadora de Momentos

Se llamará momento de orden k a la esperanza de X^k. Es decir el momento de orden k para la variable aleatoria discreta X es

$$E(X^k) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^k f_X(x_i),$$

Sean X, Y dos variables aleatorias discretas tales que

$$E[X] = 3 \text{ y } \operatorname{var}[X] = 2 \text{ y } Y = 2X - 3$$

Determine

a) el segundo momentos de X.

b) el primer y segundo momento de Y,

Función Generadora de Momentos

Si X es una variable aleatoria se llama función generadora de momentos a la esperanza de e^{tX} y se denota por $m_X(t)$, es decir:

$$m_X(t) = E(e^{tX}). \tag{4}$$

Si X es una variable aleatoria con función generadora de momentos $m_X(t)$ se tiene que

$$m_X^{(n)}(0) = E(X^n). \tag{5}$$

Ejercicios

Sea X una variable aleatoria discreta cuya esperanza es $E(X) = h$ y su varianza es $Var(X) = k$. Se puede asegurar que el valor de $m''_X(0)$ es

Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \quad si\, x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, determine la fórmula de $F_X(n)$.
2. Pruebe que la función generadora de momentos de X es $m_X(t) = \dfrac{1}{4-2e^t} + \dfrac{1}{3-e^t}$ si $e^t < 2$.
3. Determine la esperanza de X.

Gracias por su amable atención!!