Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Primer examen parcial
I semestre - 2024

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. [**3 puntos**] Un banco hace un estudio con 500 de sus clientes. De estas personas, 360 personas tienen algún tipo de crédito (vivienda, automóvil o tarjeta), 150 personas tienen un crédito de vivienda, 100 personas tienen un crédito para automóvil y 300 personas tienen deudas en su tarjeta de crédito. Se supo también que 77 personas tienen crédito de vivienda y automóvil, 78 tienen deudas en la tarjeta y crédito de automóvil, y 97 tienen deuda en la tarjeta y crédito de vivienda. ¿Cuántas personas tienen los tres tipos de crédito de ese banco (vivienda, automóvil y tarjeta)?

   Solución.

   Considere el conjunto Ω correspondiente a los clientes sobre los que está hecho el estudio. Además, considere los subconjuntos de Ω llamados A, los clientes con crédito de vivienda, B, los clientes con crédito de automóvil, y C, los clientes con deudos por tarjeta de crédito.

   Se sabe que: $|\Omega| = 500$, $|A \cup B \cup C| = 360$, $|A| = 150$, $|B| = 100$, $|C| = 300$, $|A \cap B| = 77$, $|B \cap C| = 78$ y $|A \cap C| = 97$.

   Utilizando el principio de inclusión y exclusión:

   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

   $$\Rightarrow 360 = 150 + 100 + 300 - 77 - 78 - 97 + |A \cap B \cap C|$$

   $$\Rightarrow 62 = |A \cap B \cap C|$$

   Con esto, hay 62 personas que tienen los tres tipos de crédito de ese banco (vivienda, automóvil y tarjeta).

2. Los profesores de Cátedra se dieron cuenta que el 63.7 % del estudiantado tienen este ejercicio correcto. Suponga que las calificaciones de este ejercicio son independientes.

   a) **[2 puntos]** Si se toman al azar 4 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que solo el segundo **NO** tenga este ejercicio correcto?

   b) **[2 puntos]** Si se toman al azar 3 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero tenga este ejercicio correcto, dado que los otros dos estudiantes **NO** tienen este ejercicio correcto? Justifique su respuesta.

Solución.

a) Suponiendo que A_i es el evento correspondiente a que el i-ésimo estudiante tenga este ejercicio incorrecto, para $i \in \{1,2,3,4\}$, se tiene que $P[A_i] = 0.363$, para cualquier $i \in \{1,2,3,4\}$. Además,

$$P\left[\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right] = P\left[\overline{A_1}\right] \cdot P[A_2] \cdot P\left[\overline{A_3}\right] \cdot P\left[\overline{A_4}\right] = (0.637)^3 \cdot (0.363),$$

por lo tanto, la probabilidad de que solo el segundo **NO** tenga este ejercicio correcto es, aproximadamente, 0.093826.

b) En este ejercicio, se solicita:

$$P\left[\overline{A_3}\,|(A_1 \cap A_2)\right] = \frac{P\left[\overline{A_3} \cap A_1 \cap A_2\right]}{P[A_1 \cap A_2]} = P\left[\overline{A_3}\right] = 0.637.$$

Esto se puede realizar porque dichos eventos son independientes. Por lo tanto, la probabilidad de que el tercero tenga este ejercicio correcto, dado que los otros dos estudiantes **NO** tienen este ejercicio correcto es de, aproximadamente, 0.637.

3. Una empresa recibe lotes de material por parte de tres proveedores, de manera que el 50 % de los lotes vienen del proveedor A, el 30 % del proveedor B y el resto del proveedor C. Se sabe que el 0.1 % de los lotes del proveedor A vienen defectuosos, al igual que el 0.5 % de los lotes del proveedor B. Además, se sabe que la probabilidad de tomar un lote al azar y esté defectuoso es de 0.004.

   a) **[3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un lote escogido al azar del proveedor C esté defectuoso?

   b) **[2 puntos]** Si se escoge al azar un lote y está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del proveedor A?

Solución.

a) Suponiendo que Ω corresponde al conjunto de todos los lotes de material, el evento A son lotes provenientes del proveedor A, el evento B son lotes provenientes del proveedor B y el evento C son lotes provenientes del proveedor C. Además, considere el evento D correspondiente a un lote defectuoso.

Se solicita $P\left[D\,|C\right]$. Note que, como A, B y C forman una partición de Ω, entonces se utiliza la probabilidad total:

$$P\left[D\right] = P\left[A\right] \cdot P\left[D\,|A\right] + P\left[B\right] \cdot P\left[D\,|B\right] + P\left[C\right] \cdot P\left[D\,|C\right]$$

$$\Rightarrow 0.004 = 0.5 \cdot 0.001 + 0.3 \cdot 0.005 + 0.2 \cdot P\left[D\,|C\right]$$

$$\Rightarrow 0.01 = P\left[D\,|C\right]$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un lote escogido al azar del proveedor C esté defectuoso es de 0.01.

b) Se solicita $P\left[A\,|D\right]$. Note que, utilizando la regla de Bayes:

$$P\left[A\,|D\right] = \frac{P\left[A\right] \cdot P\left[D\,|A\right]}{P\left[D\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[A\,|D\right] = \frac{0.5 \cdot 0.001}{0.004}$$

$$\Rightarrow P\left[A\,|D\right] = 0.125$$

Por lo tanto, si se escoge al azar un lote y está defectuoso, la probabilidad de que sea del proveedor A es de 0.125.

4. Considere la palabra **PROCESO**.

   a) **[3 puntos]** Determine la cantidad total de **anagramas con todas las letras** en los que las dos **O** no estén juntas.

   b) **[5 puntos]** Determine la cantidad total de **anagramas de 4 letras** en los que hay al menos una vocal.

Solución.

a) Se puede realizar por complemento. Primero, se calcula la cantidad de anagramas sin restricción y luego se juntan las **O**.

$\frac{7!}{2!} - 6! = 1800.$

Por lo tanto, hay 1800 anagramas con todas las letras en los que las dos **O** no están juntas.

b) Se realizará por casos.

- *Caso I:* En el anagrama solo hay 1 vocal.

  Primero, note que hay dos posibilidades: E y O. Luego, de las consonantes $PRCS$ se deben escoger 3 y acomodar todas las letras: $2 \cdot \binom{4}{3} \cdot 4! = 192.$

- *Caso II:* En el anagrama solo hay 2 vocales.

  Primero, se escogen 2 consonantes de $PRCS$. Además, se pueden tomar ambas O o E y O. Luego, se acomodan todas las letras: $\binom{4}{2}\left[\frac{4!}{2!} + 4!\right] = 216.$

- *Caso III:* En el anagrama están las 3 vocales.

  Primero, se escoge una consonante. Luego, se acomodan las letras: $\binom{4}{1} \cdot \frac{4!}{2!} = 48.$

Con esto, sumando los casos, hay 456 anagramas de 4 letras en los que hay al menos una vocal.

5. **[5 puntos]** Se van a rifar 10 regalos iguales entre los empleados de tres sucursales de una empresa. Las sucursales tienen nombre clave A, B y C, y en ellas hay 5, 2 y 3 empleados, respectivamente. Determine la cantidad total de formas en las que pueden quedar distribuidos los regalos para que en todas las sucursales quede al menos un regalo.

Solución.

En este caso, se utiliza el principio de inclusión y exclusión. Tomando Ω el conjunto de todas las posibles reparticiones, considere los eventos:

$A = \{x \in \Omega : \text{en } x, \text{ la sucursal A recibe al menos un regalo}\}$

$B = \{x \in \Omega : \text{en } x, \text{ la sucursal B recibe al menos un regalo}\}$

$C = \{x \in \Omega : \text{en } x, \text{ la sucursal C recibe al menos un regalo}\}$

Se solicita determinar $|A \cap B \cap C|$. No obstante, se procede por complemento: $|\Omega| - \left|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right|$.

Así:

- $\left|\overline{A}\right| = \binom{10+5-1}{10} = 1001.$
- $\left|\overline{B}\right| = \binom{10+8-1}{10} = 19448.$
- $\left|\overline{C}\right| = \binom{10+7-1}{10} = 8008.$
- $\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = \binom{10+3-1}{10} = 66.$
- $\left|\overline{B} \cap \overline{C}\right| = \binom{10+5-1}{10} = 1001.$
- $\left|\overline{C} \cap \overline{A}\right| = \binom{10+2-1}{10} = 11.$
- $\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = 0.$

Con esto:

$$
\begin{aligned}
&|\Omega| - \left|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right| \\
&= \binom{10+10-1}{10} - (1001 + 19448 + 8008 - 66 - 1001 - 11 + 0) \\
&= 64999
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hay 64999 formas en las que pueden quedar distribuidos los regalos para que en todas las sucursales quede al menos un regalo.

6. **[5 puntos]** Hay n ladrillos rojos (con n un número par) y 3 ladrillos azules, todos indistinguibles (salvo por el color). Se van a colocar en una fila. Determine la cantidad total de formas de colocarlos si entre dos ladrillos azules siempre debe haber la misma cantidad de ladrillos rojos.

Solución.

Para este ejemplo se harán representaciones. Tome R el símbolo para un ladrillo rojo y A el símbolo para el ladrillo azul. Como n es par, se tiene el siguiente cuadro:

Cantidad de R entre A	Forma base	Cantidad de formas
0	$\overbrace{R...R}^{n \text{ veces}}\ AAA$	$\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$
1	$\overbrace{R...R}^{n-2 \text{ veces}}\quad ARARA$	$\dfrac{((n-2)+1)!}{(n-2)!} = (n-2)+1$
2	$\overbrace{R...R}^{n-4 \text{ veces}}\quad ARRARRA$	$\dfrac{((n-4)+1)!}{(n-4)!} = (n-4)+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n/2$	$A\ \overbrace{R...R}^{n/2 \text{ veces}}\ A\ \overbrace{R...R}^{n/2 \text{ veces}}\ A$	$\dfrac{((n-2\cdot(n/2))+1)!}{(n-2\cdot(n/2))!} = n-2\cdot(n/2)+1$

Con esto, el total de formas de colocar los ladrillos si entre dos ladrillos azules siempre debe haber la misma cantidad de ladrillos rojos es:

$$\sum_{k=0}^{n/2} [(n-2k)+1] = \frac{(n+2)^2}{4}\ .$$