Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 3405 Estadística

Tiempo máximo: 30 minutos
Puntaje máximo: 10 puntos
I semestre 2025

I Prueba Corta

Instrucciones Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Puede hacer uso de las fórmulas oficiales de la cátedra únicamente. No se permite el uso de calculadora programable.

Considere una variable aleatoria $X \sim b(n,p)$ y una muestra aleatoria $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

1. **[6 puntos]** Verifique que el estimador de máxima versimilitud para el parámetro p de la v.a X está dado por $\hat{p} = \dfrac{\overline{x}}{n}$

   Solución

$$L = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i}$$

$$\Rightarrow \ln L = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p) + \ln \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{L'}{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \frac{n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i}{p-1} = 0$$

$$\Rightarrow (p-1)\sum_{i=1}^{n} x_i + pn^2 - p\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} = \frac{\overline{x}}{n}$$

2. **[4 puntos]** ¿Es insesgado este estimador $\hat{p}$? Además, calcule la varianza del estimador $\hat{p}$.

   Solución

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{\overline{x}}{n}\right) = \frac{E(\overline{x})}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{\overline{x}}{n}\right) = \frac{Var(\overline{x})}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n^2}$$