Estadística – I 2025

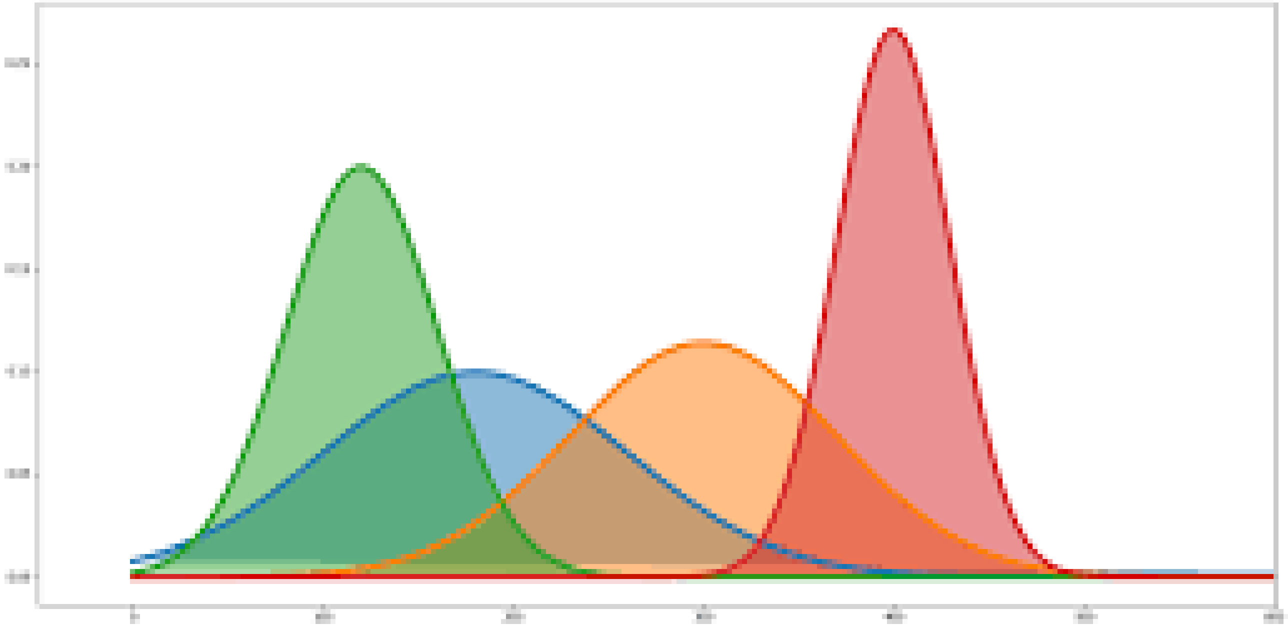
IC y PH: una media.

I Juan 5:14

Distribución de una media

Recordar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$



Distribución de una media

Recordar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

4.3 Distribución t

Definición 14 *Sea T una v.a.c. Se dice que T sigue una distribución t con v grados de libertad si y solo si su función de distribución esta dada por*

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$$

Se denota $T \sim t(v)$.

$X \sim t(\nu)$, entonces $E(X) = 0$ y $Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}$

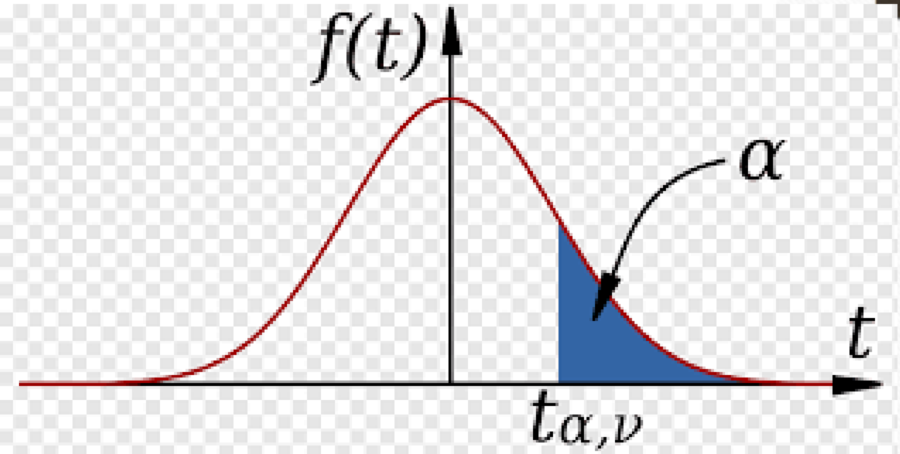
Distribución de una media

Recordar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

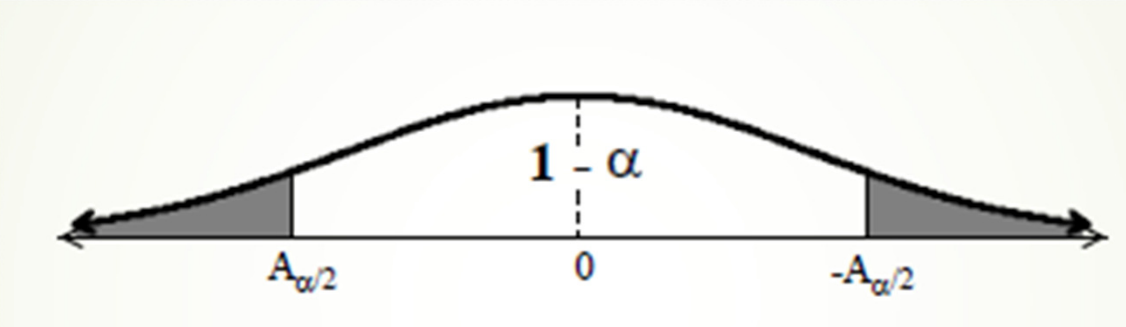
Teorema 12 *Considere la población dada por la variable aleatoria X que sigue una distribución normal con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2. Dada una muestra aleatoria de esta población $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$. Entonces la variable*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

sigue una distribución t con $v = n - 1$ grados de libertad.



Cuando las distribuciones con simétricas



intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\%$ para θ

$$\widehat{\theta} \pm A_{\alpha/2} \cdot \overline{\sigma}$$

IC para una media

Para una v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{r}\right)^2$$

Varianza poblacional conocida

Varianza poblacional desconocida pero el tamaño de muestra es grande.

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Varianza poblacional desconocida pero el tamaño de muestra es pequeño.

Ejemplos

Se sabe que la vida útil de una bombilla de automóvil de una marca determinada, es una variable aleatoria que se distribuye normalmente, con una desviación poblacional de 1000 horas. El gerente de la compañía dice que sus bombillas duran más de 7000 horas. En un estudio hecho sobre una muestra aleatoria de 100 de esas bombillas se observó que la media de su vida útil fue de 6500 horas.

[3 puntos] Determine un intervalo de confianza del 95 % para la media de la vida útil de las bombillas de dicha marca.

Ejemplos

Se sabe que la vida útil de una bombilla de automóvil de una marca determinada, es una variable aleatoria que se distribuye normalmente, con una desviación poblacional de 1000 horas. El gerente de la compañía dice que sus bombillas duran más de 7000 horas. En un estudio hecho sobre una muestra aleatoria de 100 de esas bombillas se observó que la media de su vida útil fue de 6500 horas.

[1 punto] ¿Considera usted que los datos respaldan la afirmación del gerente? Justifique su respuesta.

[2 puntos] Determine el tamaño mínimo de la muestra que se requiere para estimar la media de la vida útil de las bombillas, con un nivel de confianza del 96% y un error máximo (radio del intervalo de confianza) de 200 horas.

Ejercicio

Un estudio ha determinado que la desviación estándar de las estaturas de los niños de 5 años del país C es de 7 cm. En una muestra de 15 niños de 5 años se obtuvieron las siguientes estaturas en centímetros:

$$88, 97, 102, 105, 110, 113, 93, 85, 105, 108, 118, 99, 93, 92, 86$$

Suponga que las estaturas de los niños de 5 años del país C se distribuyen normalmente.

(a) Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la estatura promedio de los niños de 5 años del país C. $R/ \quad]96.0575, \quad 103.142.[$

(b) De acuerdo a la OMS, la estatura promedio ideal de los niños de 5 años es de 105cm. ¿Considera que los niños de 5 años del país C tienen en promedio una estatura ideal?Justifique su respuesta. $R/ \quad NO$

PH para una media

Para una v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0 : \mu = \mu_0$ La media poblacional es igual a μ_0

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Varianza conocida
- Varianza desconocida y n ≥ 30

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- Varianza desconocida y n < 30

$$n \geq \frac{(|z_{\alpha/k}| + |z_\beta|)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

Tamaño mínimo de muestra

k: número de colas

Ejercicios

[4 puntos] La directora de la contraloría de servicios de una oficina asegura que, el promedio de quejas que se reciben por semana en esa sede es a lo sumo 30. Para dar validez a su opinión, decide hacer un estudio durante 12 semanas y obtiene una media de 33 quejas semanales, con una desviación de 5,7 quejas.

Haga una prueba de hipótesis con un nivel de significancia del 5 % para juzgar la validez de la aseveración de la directora. (Asuma que el número de quejas por semana sigue una distribución normal).

Ejercicios

[3 puntos] Se sabe que el promedio μ de partes diarios que hace un oficial de tránsito sigue una distribución normal con desviación poblacional de 8 partes por día.

Determine el tamaño de la muestra que se necesita para hacer la prueba de hipótesis:

$$H_0 : \mu = 25,$$

con un nivel de significancia del 5% y una potencia mínima del 90% para la hipótesis alternativa específica:

$$H_1' : \mu = 30$$

Examen

Los siguientes datos corresponden a los tiempos en minutos de una muestra aleatoria de nuevos dispositivos de las computadoras *Peach* sometidos a calentamiento extremo hasta que se destruyen: 19, 10, 7, 6, 6, 4, 16, 11, 10, 9, 6, 5, 8, 5, 7, 12, 18

a) **[5 puntos]** La empresa fabricante afirma que el tiempo de resistencia media
positivos es de al menos 10 minutos. Para verificar esta información se realizó una prueba de hipótesis y se determinó que la zona de rechazo para el estadístico tiempo medio de resistencia ($\overline{X}$) es $]-\infty,\ 6.868914656[$. Determine la significancia utilizada.

Gracias por su amable atención!!