Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

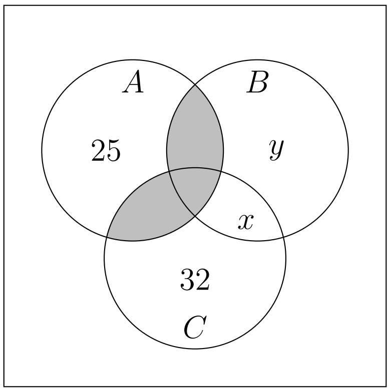
Probabilidades
Primer examen parcial
II semestre - 2023

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. [**5 puntos**] Se entrevistaron a los usuarios de cierto autobús. Se destacan tres preguntas de sí o no: ¿volvería a usar el servicio?, ¿recomendaría el transporte? y ¿le agradó la actitud del chofer? De las 245 personas que respondieron todas las preguntas antes mencionadas, 25 marcaron afirmativa la primera únicamente, 61 respondieron afirmativa la segunda pero no la primera, y 32 respondieron afirmativa la tercera únicamente. ¿Cuántas personas marcaron la primera pregunta como afirmativa?

   Solución.

   Tomando Ω como el conjunto de los usuarios entrevistados, A como el conjunto de los usuarios entrevistados que responden afirmativamente a la pregunta ¿volvería a usar el servicio?, B como el conjunto de los usuarios entrevistados que responden afirmativamente a la pregunta ¿recomendaría el transporte? y C como el conjunto de los usuarios entrevistados que responden afirmativamente a la pregunta ¿le agradó la actitud del chofer?, se tiene que:



   Note que $x + y = 61$. Por lo tanto, este ejercicio se reduce en encontrar el valor de las tres regiones sombreadas, llámese S. El problema es un poco abierto. Si se supone que todas las personas respondieron afirmativamente alguna de las tres preguntas, entonces:

$$245 = 25 + S + 61 + 32 \;\Rightarrow\; S = 127\ .$$

   Finalmente, 152 usuarios entrevistados marcaron la primera pregunta como afirmativa. Esta es la cantidad máxima. Cualquier valor entre 25 y 152 tendría sentido, siempre que se justifique.

2. **[5 puntos]** Considere los eventos A, B y C, no nulos, y con A y B disjuntos. Se sabe que $P[B \cap C] = \dfrac{P[B]}{5}$ y $P[C \cup A] = \dfrac{P[B]}{7}$. Pruebe que:

$$P[A \cup B \cup C] = \frac{33P[B]}{35}\ .$$

Solución.

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[B \cap C] - P[A \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - 0 - \frac{P[B]}{5} - P[A \cap C] + 0$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[B] - \frac{P[B]}{5} + \Big(P[A] + P[C] - P[A \cap C]\Big)$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[B] - \frac{P[B]}{5} + P[A \cup C]$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[B] - \frac{P[B]}{5} + \frac{P[B]}{7}$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = \frac{33P[B]}{35}$$

3. En una encuesta sobre el uso de una pasta dental de cierta marca, donde el 63 % eran mujeres y el resto hombres, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Sí la uso	No la uso	No responde
Mujeres	36 %	48 %	16 %
Hombres	41 %	46 %	13 %

a) **[2 puntos]** ¿Qué porcentaje de las personas encuestadas usa la pasta dental?

b) **[3 puntos]** Si una persona encuestada no quiso responder, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución.

Suponga que Ω es el conjunto de todas las personas encuestadas. Considere los eventos M: persona encuestada mujer, H: persona encuestada hombre, S: persona encuestada que usa la pasta dental, N: persona encuestada que no usa la pasta dental, R: persona encuestada que no contesta.

a) Se solicita $P[S]$. Para esto, se utilizará la partición de Ω dada por los conjuntos M y H. Con esto, utilizando la probabilidad total:

$$P[S] = P[M] \cdot P[S\,|M] + P[H] \cdot P[S\,|H]$$

$$\Rightarrow P[S] = 0.63 \cdot 0.36 + 0.37 \cdot 0.41 = 0.3785$$

Por lo tanto, de las personas encuestadas, el 37.85 % usa la pasta dental.

b) Se solicita $P[M\,|R]$. Utilizando la regla de Bayes:

$$P[M\,|R] = \frac{P[M] \cdot P[R\,|M]}{P[M] \cdot P[R\,|M] + P[H] \cdot P[R\,|H]}$$

$$\Rightarrow P[M\,|R] = \frac{0.63 \cdot 0.16}{0.63 \cdot 0.16 + 0.37 \cdot 0.13} = \frac{1008}{1489} \approx 0.676964$$

Por lo tanto, si una persona encuestada no quiso responder, la probabilidad de que sea mujer es de, aproximadamente, 67.7 %

4. Considere la palabra **COMPROMISO**.

   a) [**2 puntos**] ¿Cuántos anagramas de esta palabra hay que inicien con vocal?

   b) [**3 puntos**] Determine la cantidad de anagramas que se pueden formar con esta palabra en donde las letras **M** deben ir separadas por al menos otra letra.

Solución.

a) En este ejercicio note que solo hay dos casos: que inicie con **O** o que inicie con **I**. La diferencia está en que la primera letra se repite. Por eso, aplicando la regla de la suma: $\dfrac{9!}{2!\cdot 2!}+\dfrac{9!}{3!\cdot 2!}$, para concluir que hay 120960 anagramas de esta palabra que inician con vocal.

b) Este ejercicio se puede hacer por complemento, ya que es más sencillo calcular la cantidad de anagramas que se pueden formar con esta palabra en donde las letras **M** deben ir juntas.

Por esto, como en total hay $\dfrac{10!}{3!\cdot 2!}=302400$ anagramas sin restricción, y juntando las letras **M** hay $\dfrac{9!}{3!}=60480$ anagramas, entonces hay 241920 anagramas que se pueden formar con esta palabra en donde las letras **M** deben ir separadas por al menos otra letra.

5. Rebeca, Carlos y Cindy juntaron su dinero para comprar 7 libros distintos y 10 lapiceros idénticos.

   a) **[2 puntos]** ¿De cuántas maneras se pueden repartir todos los objetos si a Rebeca, que puso más dinero, le corresponden exactamente 3 libros y por lo menos 4 lapiceros?

   b) **[3 puntos]** Determine la cantidad de reparticiones que se pueden hacer si a Carlos le corresponden a lo sumo 2 libros.

Solución.

a) La repartición se hará por etapas.

- *Etapa I:* escoger 3 libros de Rebeca: $\binom{7}{3}$.
- *Etapa II:* repartir el resto de libros: 2^4.
- *Etapa III:* darle 4 lapiceros a Rebeca: 1.
- *Etapa IV:* repartir el resto de lapiceros: $\binom{6+3-1}{6}$.

Por lo tanto, hay 15680 maneras en las que se pueden repartir todos los objetos si a Rebeca le corresponden exactamente 3 libros y por lo menos 4 lapiceros.

b) Este se hará por casos:

- **Caso I:** a Carlos no le corresponde libro.
  - *Etapa I:* repartir los libros: 2^7.
  - *Etapa II:* repartir los lapiceros: $\binom{10+3-1}{10}$.
- **Caso II:** a Carlos le corresponde un libro.
  - *Etapa I:* escoger el libro para Carlos: $\binom{7}{1}$.
  - *Etapa II:* repartir los libros: 2^6.
  - *Etapa III:* repartir los lapiceros: $\binom{10+3-1}{10}$.
- **Caso III:** a Carlos le corresponden dos libros.
  - *Etapa I:* escoger los libros para Carlos: $\binom{7}{2}$.
  - *Etapa II:* repartir los libros: 2^5.
  - *Etapa III:* repartir los lapiceros: $\binom{10+3-1}{10}$.

Así, hay 82368 reparticiones en las que a Carlos le corresponden a lo sumo 2 libros.

6. [**5 puntos**] Se va a realizar una prueba de diagnóstico de los estudiantes de Probabilidades. Esta consta de 15 preguntas: 5 de Matemática General, 5 de Cálculo Diferencial e Integral y 5 de Cálculo y Álgebra Lineal. Todas las preguntas son de selección única, con 4 opciones de respuesta cada una. Mario decide responder la prueba de la siguiente forma: no contesta exactamente dos preguntas de un curso, y el resto lo llena de forma aleatoria. ¿De cuántas maneras distintas puede contestar Mario la prueba?

   Solución.

   Considere el conjunto Ω de todas las posibles formas en las que una persona responde la prueba.

   Note que $|\Omega| = 5^{15}$, es decir, cada pregunta tiene cinco posibilidades: las cuatro opciones de respuesta o dejarla en blanco.

   Para cumplir las condiciones de Mario, lo primero que se debe hacer es escoger el grupo del cuál no va a responder, luego escoger las preguntas que se dejarán en blanco, y luego contestar las preguntas faltantes.

   Así, se tienen:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4^{13} \, ,$$

   es decir, 2013265920 maneras distintas en las que puede contestar Mario la prueba.