Instituto Tecnológico de Costa Rica

Matemática General

Proyecto

Profesor:
Bryan Rodríguez Castro

Estudiantes:
Angie Esquivel *(2023088908)*, Dana Chavarría *(2023042532)*, Ignacio Dormond *(2023055793)* y Santiago Chavarría *(2023079309)*.

27 de mayo de 2023

0.1 P3

La población de una ciudad crece según una tasa de crecimiento exponencial del 3% anual. En el año 2021, la población de la ciudad era de 100 000 habitantes donde dicha tasa de crecimiento en el tiempo P(t) se modela por medio de la función P(t) = 100000e^{rt} donde r es la tasa de crecimiento anual y t es el tiempo transcurrido en años.

1. **¿Cuál será la población de la ciudad en el año 2031?**
   Sol.
   Primero se debe calcular t con respecto al tiempo inicial que se da en el problema:

   $$t{=}2031{-}2021{=}10$$

   Luego, se tiene que r es 0,03 ya que la tasa de crecimiento anual es del 3%.
   Por lo que nos quedaría:

   $$P(10){=}\ 100000e^{0,03*10} \approx 134392$$

   Respuesta: En el 2031 se espera que la población de la ciudad sea de aproximadamente 134 392 habitantes.

2. **¿En qué año la población de la ciudad alcanzará los 150000 habitantes?**
   Sol.

   $$\begin{gathered} 100000e^{0,03*t}{=}\ 150000 \\ e^{0,03*t} = \tfrac{3}{2} \text{ (se divide entre 100000 ambos lados)} \\ 0{,}03{*}t{=}\ln\tfrac{3}{2} \\ t{=}\ \ln\tfrac{3}{2} * \tfrac{100}{3} \\ t{\approx}\ 13,5155 \end{gathered}$$

   Respuesta: A mediados del año 2034, en el mes de junio, aproximadamente, se alcanzará 150000 habitantes.

3. **Cuánto tiempo tardará la población de la ciudad en duplicarse?**
   Sol.

   $$\begin{gathered} 100000e^{0,03*t}{=}\ 200000 \\ e^{0,03*t}{=}2 \\ 0{,}03{*}t{=}\ \ln(2) \\ t{=}\ \ln(2){*}\tfrac{100}{3} \\ t{\approx}\ 23,10490602 \end{gathered}$$

   Respuesta: Tardará 23 años y un mes, aproximadamente para que la población de la ciudad se duplique.

4. **¿Cuál es la tasa de crecimiento exponencial anual de la población si la población se duplica cada 10 años?**
   Sol.

$$100000e^{x*10}=200000$$
$$e^{x*10}=2$$
$$x*10=\ln(2)$$
$$x=\frac{ln(2)}{10}$$
$$x \approx 0,06931471806$$

   Respuesta: La tasa de crecimiento sería de 6,93%, aproximadamente.

0.2 P6

Una persona tiene una enfermedad que se puede tratar con un medicamento que reduce la cantidad de la enfermedad y se puede modelar mediante la función $f(x) = a * (1 - r)^x$, donde $f(x)$ es el valor final después de x días, a es el valor inicial de células infectadas y r es la tasa de reducción diaria.

1. **Si una persona tiene 1000 células infectadas hoy y al tomar el medicamento reduce la cantidad de la enfermedad en un 10% cada día, ¿cuántas células infectadas tendrá después de 10 días?**
   Sol.

$$f(x) = 1000(1 - \frac{10}{100})^{10}$$
$$f(x) = 1000(\frac{9}{10})^{10}$$
$$f(x) = 1000(0,348)$$
$$f(x) = 348,678$$

   Respuesta: Después de 10 días tendrá aproximadamente 348 células infectadas.

2. **¿Cuántas células infectadas tendrá después de 5 días?**
   Sol.

$$f(x) = 1000(1 - 0,1)^5$$
$$f(x) = 1000(\frac{9}{10})^5$$
$$f(x) = 1000(0,59)$$
$$f(x) = 590,49$$

   Respuesta: Después de 5 días tendrá aproximadamente 590 células infectadas.

3. **¿Cuántos días se necesitan para reducir el número de células infectadas a la mitad?**
   Sol.

$$500=1000(1\text{-}0{,}1)^x$$
$$\frac{500}{1000} = (\frac{9}{10})^x$$
$$\frac{1}{2} = (0,9)^x$$
$$ln(\frac{1}{2}) = x * ln(\frac{9}{10})$$
$$x = \frac{ln(1/2)}{ln(9/10)}$$
$$x = 6{,}58 \text{ días}$$

   Respuesta: En aproximadamente una semana se van a reducir las células infectadas a la mitad.

4. **Si la tasa de reducción diaria fuera del 20% en lugar del 10%,¿cuántas células infectadas tendría la persona después de 10 días?**
   Sol.

$$f(x) = 1000(1 - 0,2)^{10}$$
$$f(x) = 1000(\frac{4}{5})^{10}$$
$$f(x) = 1000(0,10)$$
$$f(x) = 107,37$$

   Respuesta: Tendrá aproximadamente 107 células infectadas.

0.3 P15

Suponga que conduce un automóvil en un frío día de invierno (20°F en el exterior) y la máquina se sobrecalienta (cerca de 220° F). Cuando se estaciona, la máquina comienza a enfriarse. La temperatura T de la máquina t minutos después de que se estaciona satisface la ecuación:

$$ln(\frac{T-20}{200}) = -0,11t$$

1. **Despeje T en la ecuación.**
   Sol.

$$\frac{T-20}{200} = e^{-0,11t}$$
$$T - 20 = 200 * e^{-0,11t}$$
$$T = 200 * e^{-0,11t} + 20$$

   Respuesta: La ecuación despejada es $T = 200 * e^{-0,11t} + 20$.

2. **Determine la temperatura del motor después de 24 minutos.**
   Sol.

$$T = 200 * e^{-0,11t} + 20$$
$$T = 200 * e^{-0,11(24)} + 20$$
$$T = 200 * e^{-2,64} + 20$$
$$T = 34.27F^{\circ}$$

Respuesta: La temperatura es de $34.27F^{\circ}$ aproximadamente.

0.4 P16

Un estanque contiene inicialmente 5000 litros de agua y se le agrega una solución salina. Se sabe que la concentración de sal en el estanque en cada momento t (en minutos) está dada por la función: $C(t) = 1000ln(1 + \frac{t}{10})$ donde C (t) está en gramos de sal por litro de agua.

1. **¿Cuál es la concentración de sal en el estanque en el momento t=0?**
   Sol.

   $$C(0) = 1000ln(1 + \frac{0}{10})$$
   $$C(0) = 0$$

   Respuesta: La concentración de sal sería de 0 gramos.

2. **¿Cuántos minutos deben pasar para que la concentración de sal alcance los 5 gramos por litro?**
   Sol.

   $$1000ln(1 + \frac{t}{10}) = 5$$
   $$ln(1 + \frac{t}{10}) = \frac{5}{1000}$$
   $$1 + \frac{t}{10} = e^{\frac{5}{1000}}$$
   $$\frac{t}{10} = e^{\frac{5}{1000}} - 1$$
   $$t = (e^{\frac{5}{1000}} - 1) * 10$$
   $$t = 10e^{\frac{5}{1000}} - 10$$
   $$t \approx 0,050$$

   Respuesta: Deben pasar aproximadamente 0,050 minutos.

3. **¿Cuánto tiempo debe pasar para que la concentración de sal alcance los 8 gramos por litro?**
   Sol.

$$1000ln(1+\tfrac{t}{10})=8$$
$$\ln\left(1+\tfrac{t}{10}\right)=\tfrac{8}{1000}$$
$$1+\tfrac{t}{10}=e^{\frac{8}{1000}}$$
$$\tfrac{t}{10}=e^{\frac{5}{1000}}-1$$
$$t=10e^{\frac{8}{1000}}-10$$
$$t\approx 0.080$$

Respuesta: Deben pasar aproximadamente 0,080 minutos.