Lógica matemática

FILÁNDER A. SEQUEIRA CHAVARRÍA

El presente apunte de clase está basado fuertemente en el libro ***Introducción a la Matemática Discreta***, 4a edición, de Manuel Murillo Tsijli y la Editorial Tecnológica de Costa Rica.

1. Lógica simbólica

Definición 1.1. Se le conoce como **proposición** a una afirmación que es cierta o falsa. Más precisamente, es una colección de símbolos del lenguaje a la cual se le puede asignar un valor de verdad: falso ($\mathcal{F}$) o verdadero ($\mathcal{V}$).

Las proposiciones se representan con letras mayúsculas, donde usualmente se utilizan por ejemplo: P, Q, R, entre otras.

Ejemplo 1.1. Considere las siguientes proposiciones:

1) "Todos los individuos que respiran están vivos" $\equiv \mathcal{V}$
2) "Todos los individuos que respiran están sanos" $\equiv \mathcal{F}$
3) "Tráigame el cuaderno" $\equiv \varnothing$ (no es proposición)
4) $P: 5-2=4 \equiv \mathcal{F}$
5) $Q:$ El hielo es caliente o $1+1=2 \equiv \mathcal{V}$
6) $R:$ El hielo es caliente y $1+1=2 \equiv \mathcal{F}$
7) $T: 5-2 \neq 4 \equiv \mathcal{V}$
8) $U: 3<2 \equiv \mathcal{F}$
9) "$3>2$ o $3=2$" $\equiv \mathcal{V}$
10) "$a^0=1$" $\equiv \mathcal{F}$
11) "$a^0=1$ si $a \neq 0$" $\equiv \mathcal{V}$
12) "$x^2-1=0$ si $x=\pm 1$" $\equiv \mathcal{V}$

Más aún, utilizando las operaciones que se describen a continuación, es posible de una proposición (o bien más de una), dar origen a nuevas proposiciones.

1.1. Conectivas lógicas

En lo que sigue, salvo que se diga lo contrario, considere a P y a Q como dos proposiciones arbitrarias.

1) Negación: Consiste en el valor de verdad opuesto. La negación de P se denota por: $\neg P$ y se lee como "no P".

P	$\neg P$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Por ejemplo, si $P : 3 > 2 \equiv \mathcal{V}$, entonces $\neg P : 3 \leq 2 \equiv \mathcal{F}$. Por otro lado, si $P : 2 + 1 = 5 \equiv \mathcal{F}$, entonces $\neg P : 2 + 1 \neq 5 \equiv \mathcal{V}$.

Con respecto a los ejemplos previos, nótese que:

P	$=$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$
$\neg P$	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$

2) Conjunción: Une dos proposiciones, donde si alguna de ellas es falsa, se obtiene que la proposición resultante también es falsa. La conjunción entre P y Q se denota por: $P \wedge Q$ y se lee como "P y Q".

P	Q	$P \wedge Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Por ejemplo, si $P : 3 > 0 \equiv \mathcal{V}$ y $Q : 2 + 2 = 3 \equiv \mathcal{F}$, entonces $P \wedge Q$ es falsa.

3) Disyunción: Une dos proposiciones, donde si alguna de ellas es verdadera, se obtiene que la proposición resultante también es verdadera. La disyunción entre P y Q se denota por: $P \vee Q$ y se lee como "P o Q".

P	Q	$P \vee Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Por ejemplo, si $P : 2^3 = 6 \equiv \mathcal{F}$ y $Q : 2 + 2 = 4 \equiv \mathcal{V}$, entonces $P \vee Q$ es verdadera.

4) Disyunción exclusiva: Une dos proposiciones, donde si ambos valores de verdad difieren, se obtiene que la proposición resultante es verdadera. La disyunción exclusiva entre P y Q se denota por: $P \veebar Q$ y se lee como "P o Q, pero no ambas".

P	Q	$P \veebar Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Por ejemplo, si $P : 2 \div 2 = 1 \equiv \mathcal{V}$ y $Q : 2 \times 2 = 4 \equiv \mathcal{V}$, entonces $P \veebar Q$ es falsa.

5) Condicional o implicación: Relaciona dos proposiciones, tomando una de ellas como hipótesis o premisa y la otra como conclusión. Una implicación es falsa sólo cuando siendo verdadera la hipótesis, la conclusión es falsa, es decir, no se debe deducir una conclusión falsa a partir de una hipótesis verdadera. La implicación de P por Q se denota por: $P \to Q$ y se lee como: “si P entonces Q” ó “P implica Q” ó “P solo si Q”.

P	Q	$P \to Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Por ejemplo, si $P : 1+1=3 \equiv \mathcal{F}$ y $Q : 5$ es impar $\equiv \mathcal{V}$, entonces $P \to Q$ es verdadera.

Observación: La proposición $P \to Q$ también suele leerse como “P es condición suficiente para Q” o bien “Q es condición necesaria para P”. Esto ya que, cuando ocurre la condición P, ocurrirá necesariamente la condición Q, es decir, Q es condición necesaria para tener P. No será posible que ocurra P sin ocurrir Q. Por otro lado, P es condición suficiente para tener Q. No es obligatorio tener P para tener Q. Pero si P se cumple entonces se cumplirá Q. Por tanto será suficiente tener P para tener Q. Por ejemplo, “Si pego la lotería entonces me compro un carro”, es suficiente el hecho de que me saque la lotería para comprarme un carro. Sin embargo no es algo necesario, ya que es posible comprarse un carro si me ayuda un familiar adinerado. Y la compra del carro es necesaria para sacar la lotería; ya que no puede darse el hecho de haberme sacado la lotería y no comprarme un carro.

6) Equivalencia o doble implicación: Relaciona dos proposiciones, donde la proposición resultante es verdadera, únicamente cuando ambas proposiciones originales posean el mismo valor de verdad. La doble implicación de P y Q se denota por: $P \leftrightarrow Q$ y se lee como: “P si y sólo si Q” ó “P es necesario y suficiente para Q”.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Por ejemplo, si $P : 4$ es impar $\equiv \mathcal{F}$ y $Q : 1+1=3 \equiv \mathcal{F}$, entonces $P \leftrightarrow Q$ es verdadera. Además, nótese que

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P).$$

Ejemplo 1.2. En cada una de las siguientes proposiciones, use las conectivas lógicas para escribirlas en lenguaje matemático.

$$P: \text{el problema tiene solución}, \quad Q: a+b=1, \quad R: n \text{ es primo}.$$

1) Si el problema tiene solución, entonces $a+b=1$ y n es primo. **Sol:** $P \to (Q \wedge R)$
2) Si $a+b=1$ y n es primo, entonces el problema tiene solución. **Sol:** $(Q \wedge R) \to P$
3) $a+b=1$ y si n es primo, entonces el problema tiene solución. **Sol:** $Q \wedge (R \to P)$
4) El problema tiene solución si n es primo o si $a+b \neq 1$. **Sol:** $(R \vee \neg Q) \to P$

Ejemplo 1.3. Determine el valor de verdad de $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$.

Solución. Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, se utiliza una **tabla de verdad**, la cual considere todos los posibles casos. Por ejemplo, para $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ la tabla de verdad viene dada por:

P	Q	$\neg Q$	(1) $P \to Q$	(2) $P \wedge \neg Q$	$(1) \wedge (2)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

De ella, se puede apreciar que la proposición de interés es siempre falsa. □

Observación: Si la proposición compuesta es falsa para todos los posibles valores de las proposiciones simples que la forman, se llama: **falacia** o **contradicción** y se denota por $\mathcal{F}_0$. Por otro lado, si es siempre verdadera se llama **tautología** (denotada por $\mathcal{V}_0$). En cualquier otro caso se llama **contingencia** o **eventualidad**.

Ejercicio 1.1. Determine el valor de verdad de

1) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
2) $\big[(Q \wedge P) \to \neg R\big] \leftrightarrow \big[\neg Q \vee (P \to R)\big]$
3) $\big[P \to (Q \vee R)\big] \leftrightarrow (\neg P \vee R)$

Observación: Si $P \to Q$, entonces se definen:

$$\begin{aligned} \text{La contrapositiva} &: \neg Q \to \neg P \\ \text{La recíproca} &: Q \to P \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.
1) Si $1 < 4$, entonces $5 \geq 8$.
   - Contrapositiva: Si $5 < 8$, entonces $1 \geq 4 \equiv \mathcal{F}$
   - Recíproca: Si $5 \geq 8$, entonces $1 < 4 \equiv \mathcal{V}$
2) Si $1 + 1 = 3$, entonces $5 \geq 4$.
   - Contrapositiva: Si $5 < 4$, entonces $1 + 1 \neq 3 \equiv \mathcal{V}$
   - Recíproca: Si $5 \geq 4$, entonces $1 + 1 = 3 \equiv \mathcal{F}$

Ejercicio 1.2. Si $P \to Q$ es falsa, determine el valor de verdad de la proposición $\big[(P \vee R) \wedge \neg Q\big] \to \big[(\neg P \wedge S) \to (T \vee P)\big]$.

Ejercicio 1.3. Determine una asignación de valores de verdad para A, B, C, D y E, que verifique que $\big[A \to (B \vee C)\big] \wedge \big[C \to (D \wedge E)\big] \wedge \neg D$, no implica tautológicamente a $A \to E$.

2. Leyes de la lógica

Definición 2.1.

- Se dice que ***P* implica lógicamente a *Q*** (denotado $P \Rightarrow Q$) si y sólo si $P \to Q$ es una tautología.
- Se dice que ***P* es lógicamente equivalente a *Q*** (denotado $P \Leftrightarrow Q$ ó $P \equiv Q$) si y sólo si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología.

Ejemplo 2.1. Determinemos el valor de verdad de la proposición $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Para ello, se construye la tabla de verdad:

P	Q	(1) $P \to Q$	$\neg P$	(2) $\neg P \vee Q$	(1) $\leftrightarrow$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

de la cual se puede apreciar que la proposición es una tautología. Es decir, se tiene que $P \to Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$, o simplemente $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

Con los conceptos de equivalencia lógica o lógicamente equivalentes (ver Definición 2.1), tautología y contradicción, se puede enunciar la siguiente lista de propiedades, denominadas *leyes de la lógica*:

Implicación y disyunción (ID)	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
Doble Negación (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan (DM)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutativa (Con)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociativa (Aso)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva (Dis)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Idempotencia (Ide)	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Neutro (Ne)	$P \vee \mathcal{F}_0 \equiv P$ $P \wedge \mathcal{V}_0 \equiv P$
Inversos (Inv)	$P \vee \neg P \equiv \mathcal{V}_0$ $P \wedge \neg P \equiv \mathcal{F}_0$

Continúa en la siguiente página

Continuación de la página anterior

Dominación (Dom)	$P \wedge \mathcal{F}_0 \equiv \mathcal{F}_0$ $P \vee \mathcal{V}_0 \equiv \mathcal{V}_0$
Absorción (Abs)	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Exportación (Exp)	$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$

Ejemplo 2.2. Justifique que en efecto se cumple la Ley de Exportación, esto es

$$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R\,.$$

Solución. Se debe probar que

$$P \to (Q \to R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \to R\,,$$

para lo cual, podemos proceder de al menos las siguientes dos formas:

1$^{\text{era}}$ Forma: Tal como antes, utilizamos una tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \to R$	(1) $P \to (Q \to R)$	$P \wedge Q$	(2) $(P \wedge Q) \to R$	(1) $\leftrightarrow$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

de ellas es claro que la Ley de Exportación es una tautología.

2$^{\text{da}}$ Forma: Consiste en utilizar las leyes de la lógica previas:

$$\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\equiv \neg P \vee (Q \to R) && \text{(ID)}\\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) && \text{(ID)}\\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R && \text{(Aso)}\\
&\equiv \neg (P \wedge Q) \vee R && \text{(DM)}\\
&\equiv (P \wedge Q) \to R && \text{(ID)}
\end{aligned}$$

$$\therefore\; P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R\,.$$

□

Observación: El segundo método de solución, en el ejemplo anterior, muestra ser más “limpio” en comparación al primero que requiere la construcción de una tabla de cantidad de filas y columnas no necesariamente definidas previamente.

Ejemplo 2.3. Simplifique la proposición $\big[(\neg P \vee Q) \wedge P\big] \to Q$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\big[(\neg P \vee Q) \wedge P\big] \to Q &\equiv \big[P \wedge (\neg P \vee Q)\big] \to Q && \text{(Con)}\\
&\equiv \big[(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)\big] \to Q && \text{(Dis)}\\
&\equiv \big[\mathcal{F}_0 \vee (P \wedge Q)\big] \to Q && \text{(Inv)}\\
&\equiv (P \wedge Q) \to Q && \text{(Con)} + \text{(Ne)}\\
&\equiv \neg (P \wedge Q) \vee Q && \text{(ID)}\\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee Q && \text{(DM)}\\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee Q) && \text{(Aso)}\\
&\equiv \neg P \vee \mathcal{V}_0 && \text{(Inv)}\\
&\equiv \mathcal{V}_0 && \text{(Dom)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que la proposición es una tautología. □

Observación: Es importante resaltar que el procedimiento no es único, ya que depende de las leyes de la lógica que se apliquen y cómo estas se apliquen. Por ejemplo, la simplificación anterior pudo hacerse de la forma:

$$\begin{aligned}
\big[(\neg P \vee Q) \wedge P\big] \to Q &\equiv \neg \big[(\neg P \vee Q) \wedge P\big] \vee Q && \text{(ID)}\\
&\equiv \big[\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg P\big] \vee Q && \text{(DM)}\\
&\equiv \neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) && \text{(Aso)}\\
&\equiv \mathcal{V}_0 && \text{(Inv)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Simplifique la expresión $\big[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R\big] \to \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big]$.

Solución.

$$\begin{aligned}
&\big[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R\big] \to \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big]\\
&\quad\equiv \neg \big[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R\big] \vee \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big] && \text{(ID)}\\
&\quad\equiv \big[\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg\neg R\big] \vee \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big] && \text{(DM)}\\
&\quad\equiv \big[(P \wedge \neg Q) \vee R\big] \vee \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big] && \text{(DM)} + \text{(DN)}\\
&\quad\equiv (P \wedge \neg Q) \vee \Big(R \vee \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big]\Big) && \text{(Aso)}\\
&\quad\equiv (P \wedge \neg Q) \vee \big[(\neg Q \wedge R) \vee (P \vee R)\big] && \text{(Con)} + \text{(Aso)}\\
&\quad\equiv \big[(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg Q)\big] \vee (P \vee R) && \text{(Con)} + \text{(Aso)}\\
&\quad\equiv \big[(P \vee R) \wedge \neg Q)\big] \vee (P \vee R) && \text{(Dis)}\\
&\quad\equiv (P \vee R) \vee \big[(P \vee R) \wedge \neg Q)\big] && \text{(Con)}\\
&\quad\equiv P \vee R && \text{(Abs)}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \big[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R\big] \to \big[(\neg Q \wedge R) \vee P\big] \equiv P \vee R\,.$$

□

Observación: Gracias a las leyes de asociatividad (Aso) y conmutatividad (Con), a partir de ahora expresiones de la forma $P \vee (Q \vee R)$ o $(P \vee Q) \vee R$ se escribirán simplemente como $P \vee Q \vee R$. De igual manera, $P \wedge (Q \wedge R)$ o $(P \wedge Q) \wedge R$ se simplificarán como $P \wedge Q \wedge R$.

Ejercicio 2.1. Dé las razones (leyes de la lógica) que justifican cada paso:

$$
\begin{array}{rll}
& (P \to Q) \wedge \left[\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)\right] & \\
\equiv & (P \to Q) \wedge \neg Q & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q & (\qquad\qquad) \\
\equiv & \neg Q \wedge (\neg P \vee Q) & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q) & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (\neg Q \wedge \neg P) \vee \mathcal{F}_0 & (\qquad\qquad) \\
\equiv & \neg Q \wedge \neg P & (\qquad\qquad) \\
\equiv & \neg (Q \vee P) & (\qquad\qquad)
\end{array}
$$

Ejercicio 2.2. Utilice las leyes de la lógica para verificar que la simplificación de

$$(\neg P \wedge Q) \vee \left[\neg P \wedge \neg (Q \wedge R)\right] \vee \neg (R \to P)$$

corresponde a $\neg P$.

Observación: Utilizando las leyes de la lógica se pueden obtener nuevas leyes, como por ejemplo la *doble distributividad*:

- $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \equiv (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$
- $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S) \equiv (P \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$

3. Inferencias lógicas

Dadas las proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que llamaremos **premisas** y una **conclusión** Q, deseamos decidir si la proposición compuesta

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$$

es una tautología. De ser ese el caso, se dice que el argumento o razonamiento es válido.

Ejemplo 3.1. "Si Juan participa como jurado, entonces saldrá de viaje y debe comprar un traje nuevo. Pero salió de viaje o compró un traje nuevo. Por lo tanto, Juan participa como jurado".

Simbolice el razonamiento y analice su validez.

Solución. Empezamos definiendo

$$
\begin{array}{rl}
P: & \text{Juan participa como jurado} \\
Q: & \text{Juan saldrá de viaje} \\
R: & \text{Juan debe comprar un traje nuevo}
\end{array}
$$

Luego, simbolizando el contexto es claro que:

Premisas	Conclusión
$P \to (Q \wedge R)$ $Q \vee R$	P

Así, el argumento se escribe matemáticamente como:

$$\Big([P \to (Q \wedge R)] \wedge (Q \vee R)\Big) \to P \qquad \text{o bien} \qquad \begin{array}{r} P \to (Q \wedge R) \\ Q \vee R \\ \hline \therefore\ P \end{array}$$

El siguiente paso es analizar la validez de la proposición anterior. Para ello construimos la tabla de verdad:

P	Q	R	(1) $Q \wedge R$	(2) $P \to (1)$	(3) $Q \vee R$	(4) $(2) \wedge (3)$	$(4) \to P$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Como no es tautología, entonces se deduce que el argumento no es válido. □

Observación: Tal como se mencionó anteriormente, el método utilizado para determinar la validez por medio de tablas de verdad, no es eficiente para más de tres proposiciones. Así, para solventar este inconveniente se utilizan las reglas de las siguiente tabla, denominadas *inferencias lógicas*.

Regla de inferencia	Premisas	Conclusión
Simplificación (Simp)	$P \wedge Q$	P Q
Adjunción (Adj)	P Q	$P \wedge Q$
Adición (Adi)	P	$P \vee Q^*$
Separación (Sep) o Modus ponens (MP)	P $P \to Q$	Q
Contraposición o Modus tollens (MT)	$P \to Q$ $\neg Q$	$\neg P$
Silogismo disyuntivo (SD)	$P \vee Q$ $\neg P$	Q
Silogismo hipotético (SH)	$P \to Q$ $Q \to R$	$P \to R$
Dilema constructivo (DC)	$P \vee Q$ $P \to R$ $Q \to S$	$R \vee S$

*para cualquier proposición Q

Continúa en la siguiente página

Continuación de la página anterior

Dilema destructivo (DD)	$\neg R \vee \neg S$ $P \to R$ $Q \to S$	$\neg P \vee \neg Q$
Ley de casos (LC)	$P \to Q$ $\neg P \to R$	$Q \vee R$

Ejercicio 3.1. Utilizando tablas de verdad o leyes de la lógica, verifique la validez de las inferencias (MP) y (DC). Esto es, verifique que

$$\big[P \wedge (P \to Q)\big] \Rightarrow Q \qquad \text{y} \qquad \big[(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S)\big] \Rightarrow (R \vee S)\,.$$

Ejemplo 3.2. Demuestre $P \wedge Q$ a partir de $Q \to \neg R,\ P \vee R,\ Q$.

Solución.

1. $Q \to \neg R$ (Premisa)
2. $P \vee R$ (Premisa)
3. Q (Premisa)
4. $\neg R$ (MP a 1 y 3)
5. P (SD a 2 y 4)
6. $P \wedge Q$ (Adj a 3 y 5)

□

Ejemplo 3.3. Demuestre P a partir de $\left\{\begin{array}{r} (\neg P \vee Q) \to R \\ R \to (S \vee T) \\ \neg S \wedge \neg U \\ \neg U \to \neg T \end{array}\right.$.

Solución.

1. $(\neg P \vee Q) \to R$ (Premisa)
2. $R \to (S \vee T)$ (Premisa)
3. $\neg S \wedge \neg U$ (Premisa)
4. $\neg U \to \neg T$ (Premisa)
5. $\neg U$ (Simp 3)
6. $\neg T$ (MP a 5 y 4)
7. $\neg S$ (Simp 3)
8. $\neg S \wedge \neg T$ (Adj 6 y 7)
9. $\neg (S \vee T)$ (D.Morgan a 8)
10. $\neg R$ (MT a 2 y 9)
11. $\neg (\neg P \vee Q)$ (MT a 1 y 10)
12. $P \wedge \neg Q$ (D.Morgan+DN a 11)
13. P (Simp 12)

□

Ejercicio 3.2. Demuestre $(A \wedge R) \vee (A \wedge S)$ a partir de $\begin{cases} C \rightarrow (R \vee S) \\ A \rightarrow (B \vee C) \\ B \rightarrow \neg A \\ \neg D \\ A \vee D \end{cases}$.

Ejemplo 3.4. Considere el siguiente argumento y establezca su validez: “Si no compro el boleto del tren o no me gusta el arte moderno, entonces me quedaré en la ciudad y le obsequiaré flores a mi esposa. Si me hubiera quedado en la ciudad, habría asistido a la recepción. Pero no asistí a la recepción. Por lo tanto, compré el boleto del tren”.

Solución. Consideremos primero la siguiente notación:

P : compro el boleto del tren
Q : me gusta el arte moderno
R : me quedaré en la ciudad
S : le obsequiaré flores a mi esposa
T : asisto a la recepción

Ahora, el argumento se puede traducir de la forma:

$$\begin{array}{r} (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S) \\ R \rightarrow T \\ \neg T \\ \hline \therefore\ P \end{array}$$

con el cual nótese que

1.	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$	(Premisa)
2.	$R \rightarrow T$	(Premisa)
3.	$\neg T$	(Premisa)
4.	$\neg R$	(MT a 2 y 3)
5.	$\neg R \vee \neg S$	(Adi $\neg S$ a 4)
6.	$\neg (R \wedge S)$	(DM a 5)
7.	$\neg (\neg P \vee \neg Q)$	(MT a 1 y 6)
8.	$P \wedge Q$	(DM+DN a 7)
9.	P	(Simp 8)

Por lo tanto, el argumento es válido. □

Ejercicio 3.3. Demuestre $x = 5$ a partir de $z > x \rightarrow x < 7$, $(x < 6 \vee x = 3) \rightarrow z > x$, $x < 6 \wedge z = 8$, $x \geq 7 \vee x = 5$.

Ejercicio 3.4. Establezca la validez del argumento: “Si José gana la carrera, entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José no ganó la carrera. Si Carlos fue el segundo, entonces Ramón no fue el segundo. José ganó la carrera. Por lo tanto, Carlos no fue el segundo”.

4. Cuantificadores

Para iniciar, considere las siguientes proposiciones:

- $P(x)$: $2x+1$ es un número impar.
- $Q(x)$: $x^2-1=0$.

Nótese que no es posible determinar el valor de verdad de ambas proposiciones, a menos que se conozca algún valor particular de x. A este tipo de proposiciones, en las cuales no es claro su valor de verdad, se les denomina *proposiciones abiertas*. Por otro lado, los **cuantificadores** expresan numéricamente la cantidad de elementos que satisfacen o no una proposición abierta, produciendo que la misma deje de ser abierta sin la necesidad de mostrar explícitamente los valores que la hacen verdadera o bien falsa. Por ejemplo, para las proposiciones anterior se pueden usar:

- R : $2x+1$ es un número impar, **para todo** $x \in \mathbb{Z}$.
- S : $x^2-1=0$, **para algún** $x \in \mathbb{R}$.

Nótese que al expresar el "para todo $x \in \mathbb{Z}$" se hace referencia a que ningún elemento de $\mathbb{Z}$ se descarte. En el caso de la proposición $P(x)$, no importa el valor de $x \in \mathbb{Z}$ que se elija, se tiene que $2x+1$ es un número impar, por lo que $R \equiv \mathcal{V}$. Por el contrario, "para algún $x \in \mathbb{R}$" da a entender que basta con un sólo elemento de $\mathbb{R}$, por lo que no se necesitan todos sus elementos. Así, dado que $x=1$ ó $x=-1$ satisfacen que $x^2-1=0$, se deduce que $S \equiv \mathcal{V}$.

Definición 4.1.

- **Cuantificador existencial:** Los más conocidos corresponden a: "para algún", "existe al menos un", "existe un ____, tal que". Matemáticamente se utiliza el símbolo: $\exists$.

  Por ejemplo, la frase "Existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2-1=0$" se escribe simplemente como "$(\exists\, x \in \mathbb{R})[x^2-1=0]$".

- **Cuantificador universal:** Hace referencia a las afirmaciones: "para todo" o "para cada". Se utiliza el símbolo matemático: $\forall$.

  Por ejemplo, la frase "Para todo $x \in \mathbb{Z}$ se tiene que $2x+1$ es impar" es posible reducirla a "$(\forall\, x \in \mathbb{Z})[2x+1$ es impar$]$".

Observación: Si P es una proposición que depende de un valor arbitrario x, se escribe $P(x)$ y con ello los cuantificadores se suelen denotar como: $\exists\, x\, P(x)$ y $\forall\, x\, P(x)$. Además, $\neg\exists$ ("no existe") se denota simplemente como $\nexists$.

Ejemplo 4.1. Simbolice:

1) "Para todo a y b números reales positivos, existe un número entero n tal que na es mayor o igual que b" $\equiv (\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+)(\exists\, n \in \mathbb{Z})[na \geq b]$.

2) "Para todo número a y para todo número natural b, a y b son primos relativos si y sólo si el máximo común divisor de a y b es igual a uno" $\equiv (\forall\, a \in \mathbb{N})(\forall\, b \in \mathbb{N})[a$ y b primos relativos $\Leftrightarrow \mathrm{mcd}(a,b)=1]$.

Observación: En el ejemplo anterior (respectivamente el 2.), la proposición "$P(a,b)$: a y b primos relativos", corresponde a una *proposición de dos variables.*

Ejercicio 4.1. Simbolice completamente las siguientes proposiciones:

1) Existen tres números reales de manera que la suma de los dos primeros es igual a la suma del tercero más 4.

2) Para todo número real positivo x, existe al menos un número natural n diferente de cero, tal que el inverso multiplicativo de n es menor que x.

3) No existe un número real que sea mayor que todos los reales.

Ejemplo 4.2. Para x entero, considere las siguientes proposiciones abiertas:

$$\begin{aligned} P(x): &\quad 2 < x \leq 10 \\ Q(x): &\quad x \text{ es número impar} \\ R(x): &\quad x \text{ es número primo} \end{aligned}$$

Determine el valor de verdad de:

1) $(\exists\, x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg\, R(x)]$

2) $(\forall\, x \in \mathbb{N})\big[P(x) \to (Q(x) \vee \neg\, R(x))\big]$

Solución. 1) Observe primero que para que $P(x)$ se cumpla, con $x \in \mathbb{N}$, significa que:

$$x \;=\; 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9,\, 10\,.$$

Luego, para que $P(x) \wedge Q(x)$ sea cierto, necesariamente:

$$x \;=\; 3,\, 5,\, 7,\, 9\,.$$

Finalmente, para que $P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg\, R(x)$ sea verdadera, se descartan los valores primos en la lista anterior, produciendo que $x = 9$. Así, dado que se encontró al menos un valor de $x \in \mathbb{N}$ que cumple $P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg\, R(x)$, se deduce que $(\exists\, x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg\, R(x)] \equiv \mathcal{V}$.

2) Para cualquier valor $x \in \mathbb{N}$, hay que establecer si $P(x) \to (Q(x) \vee \neg\, R(x))$ es verdadera, o bien si para al menos un valor es falsa. Para ello, consideramos dos casos independientes:

- **Caso en que $P(x)$ es falsa:** Dado que $P(x) \equiv \mathcal{F}$, es claro que $P(x) \to (Q(x) \vee \neg\, R(x)) \equiv \mathcal{V}$.
- **Caso en que $P(x)$ es verdadera:** Como $P(x) \equiv \mathcal{V}$, se sigue que $x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, donde se puede apreciar que:

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q(x) \vee \neg\, R(x)$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

  Por lo que, $P(x) \to (Q(x) \vee \neg\, R(x)) \equiv \mathcal{V}$.

Finalmente, de los dos casos previos se concluye que $(\forall\, x \in \mathbb{N})\big[P(x) \to (Q(x) \vee \neg\, R(x))\big] \equiv \mathcal{V}$. $\square$

Ejercicio 4.2. Considere $A := \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y la proposición abierta

$$P(x) \ : \ x + 1 \text{ es un número primo.}$$

Determine el valor de verdad de:

$$(\forall\, x \in \mathbb{N})[x \in A \to x < 9] \wedge (\exists\, x \in \mathbb{N})[x \notin A \wedge P(2x)]\,.$$

4.1. Negación de cuantificadores

Teorema 4.1. Se satisfacen las siguientes equivalencias:

- $\neg\,[\exists\, x\, P(x)] \ \equiv \ \nexists\, x\, P(x) \ \equiv \ \forall\, x\,[\neg\, P(x)]$.
- $\neg\,[\forall\, x\, P(x)] \ \equiv \ \exists\, x\,[\neg\, P(x)]$.

O equivalentemente,

- $\exists\, x\, P(x) \ \equiv \ \neg\,\forall\, x\,[\neg\, P(x)]$.
- $\forall\, x\, P(x) \ \equiv \ \neg\,\exists\, x\,[\neg\, P(x)]$.

En particular, el teorema anterior establece que la negación de un $\exists$, es equivalente a un $\forall$ con la proposición abierta negada. Por ejemplo, la negación de la proposición "Existe un número que es par y es primo", corresponde a "Todo número no es par o no es primo". Equivalentemente, "Existe un número que es par y es primo" $\equiv$ "No todo número no es par o no es primo".

Ejemplo 4.3.

1) "Todos los hombres son mortales" $\equiv$ "No existen hombres no mortales".
2) "No existe una persona que mida 20m" $\equiv$ "Todas las personas no miden 20m".
3) "Todos los perros ladran y tienen cola" $\equiv$ "No existen perros que no ladren o no tienen cola".

Ejemplo 4.4. Escriba y simplifique la negación de las proposiciones:

1) $(\forall\, x \in \mathbb{R})[x^2 - 4x + 1 \geq 3]$
2) $(\exists\, x \in \mathbb{R})[x > 2 \to x^2 \leq 5]$
3) $(\nexists\, k \in \mathbb{Z})[k \geq 5 \wedge k < 3]$

Solución.

1) $\neg\left\{(\forall\, x \in \mathbb{R})[x^2 - 4x + 1 \geq 3]\right\} \ \equiv \ (\exists\, x \in \mathbb{R})\neg\,[x^2 - 4x + 1 \geq 3] \ \equiv \ (\exists\, x \in \mathbb{R})[x^2 - 4x + 1 < 3]$

2) $\neg\left\{(\exists\, x \in \mathbb{R})[x > 2 \to x^2 \leq 5]\right\} \ \overset{\text{(ID)}}{\equiv} \ (\forall\, x \in \mathbb{R})\neg\,[x \leq 2 \vee x^2 \leq 5] \ \equiv \ (\forall\, x \in \mathbb{R})[x > 2 \wedge x^2 > 5]$

3) $\neg\left\{(\nexists\, k \in \mathbb{Z})[k \geq 5 \wedge k < 3]\right\} \ \equiv \ (\exists\, k \in \mathbb{Z})[k \geq 5 \wedge k < 3]$ $\square$

Ejercicio 4.3. Simbolice y simplifique la negación de las proposiciones:

1) "Todos los alumnos estudian informática y no practican deporte".

2) "Algunos profesores tienen más de 30 años".

4.2. Cuantificadores para proposiciones de dos variables

Definición 4.2.

1. $\boldsymbol{\forall x \forall y P(x,y)}$**:** cualquier par de elementos x y y del universo respectivo, satisface P.
   Por ejemplo, $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \left[\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}\right]$.

2. $\boldsymbol{\exists x \forall y P(x,y)}$**:** existe un elemento x tal que para todos los elementos y del universo respectivo, se cumple P. El mismo x "sirve" para todos los y.
   Por ejemplo, $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\,[xy = y]$.

3. $\boldsymbol{\forall x \exists y P(x,y)}$**:** para cada elemento x, existe un elemento y con el cual, x y y cumplen P. Conforme x cambia, cambia y.
   Por ejemplo, $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists y \in \mathbb{R}) \left[\sqrt{xy} = 2\right]$.

4. $\boldsymbol{\exists x \exists y P(x,y)}$**:** existe al menos una pareja de elementos x y y, que satisfacen P. No necesariamente $x \neq y$.
   Por ejemplo, $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\,[x^y \text{ no existe}]$.

Observación: Es importante resaltar que

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \not\equiv \exists x \forall y\, P(x,y)\,,$$

donde para asegurarse de esto, basta considerar un ejemplo ("contraejemplo") simple. En efecto, tome

$$\mathcal{V} \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[x < y] \not\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y] \equiv \mathcal{F}\,.$$

Ejemplo 4.5. Determine el valor de verdad de las proposiciones:

1) $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})[x = y + 1]$

2) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})[x = y + 1]$

3) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{Z})[xy = 0]$

Solución.

1) Falso, pues para $x = 1$, el valor de y que sirve es 0, mientras que para $x = 2$, y debería ser 3. Sin embargo, el valor de y no debe cambiar al cambiar x.

2) Verdadero, dado x, basta tomar $y = x - 1$.

3) Verdadero, tome $x = 0$, y así $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $xy = 0$. $\square$

Ejercicio 4.4. Determine el valor de verdad de las proposiciones:

1) $(\exists\, y \in \mathbb{R})(\forall\, x \in \mathbb{R})[2x + 3y = 1]$ **Sol:** $\mathcal{F}$

2) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, y \in \mathbb{R})[2x + 3y = 1]$ **Sol:** $\mathcal{V}$

3) $(\forall\, x \in \mathbb{Z})(\exists\, y \in \mathbb{Z})[2x + 3y = 1]$ **Sol:** $\mathcal{F}$

Ejemplo 4.6. Si $f(x) = 3x - 2$, demuestre la validez de la proposición:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\big[|x - 2| < \delta \to |f(x) - 4| < \varepsilon\big]\,.$$

Solución. Se debe probar que para cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar al menos un $\delta > 0$ (que bien puede depender de ε) tal que la proposición $|x - 2| < \delta \to |f(x) - 4| < \varepsilon$ sea verdadera. En efecto, es claro que el único caso de confunsión es ver que ocurre cuando $|x-2| < \delta \equiv \mathcal{V}$ (por tratarse de "$\to$").

Luego, nótese que

$$|f(x) - 4| \;=\; |(3x - 2) - 4| \;=\; |3x - 6| \;=\; 3|x - 2| \;<\; 3\delta.$$

Es decir que para que ocurra que $|f(x) - 4| < \varepsilon$, basta que se cumpla que $3\delta < \varepsilon$, o equivalentemente, $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ tome $\delta \in \left]0, \frac{\varepsilon}{3}\right[$ y se cumple lo deseado. □

Ejemplo 4.7. Escriba y simplifique la negación de las proposiciones:

1) $(\forall\, x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})(\exists\, y \in \mathbb{R})[xy = 2]$

2) $(\forall\, x \in \mathbb{N})(\exists\, y \in \mathbb{N})[x \in A \to (y \in B \vee y \in C)]$

Solución.

1) $\neg\big\{(\forall\, x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})(\exists\, y \in \mathbb{R})[xy = 2]\big\} \equiv (\exists\, x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})\neg(\exists\, y \in \mathbb{R})[xy = 2] \equiv (\exists\, x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})(\forall\, y \in \mathbb{R})\neg[xy = 2] \equiv (\exists\, x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})(\forall\, y \in \mathbb{R})[xy \neq 2]$

2) $\neg\big\{(\forall\, x \in \mathbb{N})(\exists\, y \in \mathbb{N})[x \in A \to (y \in B \vee y \in C)]\big\} \overset{\text{(ID)}}{\equiv} (\exists\, x \in \mathbb{N})\neg(\exists\, y \in \mathbb{N})[x \notin A \vee (y \in B \vee y \in C)] \equiv (\exists\, x \in \mathbb{N})(\forall\, y \in \mathbb{N})\neg[x \notin A \vee (y \in B \vee y \in C)] \equiv (\exists\, x \in \mathbb{N})(\forall\, y \in \mathbb{N})[x \in A \wedge (y \notin B \wedge y \notin C)]$

□

Ejercicio 4.5. Escriba y simplifique la negación de las proposiciones:

1) $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)[x < \delta \to f(x) < \varepsilon]$

2) $(\exists\, x)(\forall\, y)[x + y = 2014 \to (x = 2000 \vee y = 14)]$