Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Tercer examen parcial
I semestre - 2024

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable y las tablas dispuestas por la Cátedra. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. [**3 puntos**] En la universidad, se realizó un estudio para analizar las calificaciones finales de los estudiantes en un grupo de Cálculo. Se sabe que las calificaciones, denotadas por la variable aleatoria X, tienen una media de 70, con una desviación estándar de 5. Utilice la desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota inferior para la probabilidad que de una calificación esté entre 55 y 85.

   Solución.

   Se solicita una cota para:

   $P[55 < X < 85]$

   $= P[55 - 70 < X - 70 < 85 - 70]$

   $= P[-15 < X - 70 < 15]$

   $= P[|X - 70| < 15]$

   $\geq 1 - \dfrac{5^2}{15^2}$, utilizando la desigualdad de Chebyshev,

   $= \dfrac{8}{9} \approx 0.888889$

   Por lo tanto, la cota inferior es $\dfrac{8}{9}$.

2. Considere la variable aleatoria continua Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{x^4} & , \text{con} \quad x \geq k \\ \\ 0 & , \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   a) **[3 puntos]** Determine el valor de k.

   b) **[2 puntos]** Calcule $P\left[\dfrac{3}{2} \leq X \leq 2\right]$.

Solución.

a) Recuerde que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x)\,dx = 1$$

$$= \int_{-\infty}^{k} 0dx + \int_{k}^{+\infty} \frac{15}{x^4}dx = 1$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\int_{k}^{+\infty} 15x^{-4}dx\right] = 1$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{15x^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_{k}^{n}\right] = 1$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{15n^{-3}}{-3} - \frac{15k^{-3}}{-3}\right] = 1$$

$$= \frac{5}{k^3} = 1$$

$$= \sqrt[3]{5} = k$$

b) Note que:

$$P\left[\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right]$$

$$= P\left[\frac{3}{2} \leq X \leq \sqrt[3]{5}\right] + P\left[\sqrt[3]{5} \leq X \leq 2\right]$$

$$= 0 + \int_{\sqrt[3]{5}}^{2} \frac{15}{x^4}dx$$

$$= \frac{3}{8} = 0.375$$

3. En un almacén, el número de fallos de una máquina por día sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 3 fallos por día.

   a) **[3 puntos]** Determine la probabilidad de que el tiempo hasta que ocurran 6 fallos sea menor que 2 días.

   b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre dos fallos consecutivos sea menor que 7 horas?

Solución.

Note que, si X es la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de fallos diarios de la máquina, entonces $X \sim Poisson\,(3)$.

a) Suponga que T es la variable aleatoria continua correspondiente al tiempo que transcurre, en días, hasta que se den los 6 fallos. Con esto:

$$T \sim Gamma\left(6, \frac{1}{3}\right).$$

Por lo tanto, se solicita:

$P\,[T < 2]$

$= F\left(\frac{2}{1/3}, 6\right)$, utilizando la Gamma Incompleta,

$= F\,(6, 6)$

$= 0.554$

Así, la probabilidad de que el tiempo hasta que ocurran 6 fallos sea menor que 2 días es de, aproximadamente, 55.4 %.

b) Suponga que V es la variable aleatoria continua correspondiente al tiempo, en días, entre dos fallos consecutivos. Con esto:

$$V \sim Exp\,(3)\,.$$

Se solicita:

$P\left[V < \frac{7}{24}\right]$

$= \int_0^{7/24} 3e^{-3x}dx = 1 - e^{-3\cdot\frac{7}{24}}$

$= 0.583137$

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo sucesivo entre dos fallos consecutivos sea menor que 7 horas es de, aproximadamente, 58.3 %.

4. Suponga que el tiempo T que tarda una persona en resolver una práctica para examen sigue una distribución normal con media 50 minutos y desviación estándar desconocida.

   a) **[3 puntos]** Si se sabe que la probabilidad de que el tiempo para resolver la práctica supere los 80 minutos es del 5 %, determine el valor de la varianza de T.

   b) **[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma_T = 18.5$, determine el valor de c para que:

$$P\left[50 - c \leq T \leq 50 + c\right] = 0.975.$$

Solución.

a) Se sabe que $T \sim N\left(50, \sigma_T^2\right)$. Además, $P\left[T > 80\right] = 0.05$. Con esto:

$$\begin{aligned}
&P\left[T > 80\right] = 0.05\\
&\Rightarrow 1 - P\left[T \leq 80\right] = 0.05\\
&\Rightarrow \Phi\left(\frac{80 - 50}{\sigma_T}\right) = 0.95\\
&\Rightarrow 1 - \Phi\left(-\frac{80 - 50}{\sigma_T}\right) = 0.95\\
&\Rightarrow -\frac{80 - 50}{\sigma_T} = \Phi^{-1}\left(0.05\right)\\
&\Rightarrow -\frac{80 - 50}{\sigma_T} = -1.645\\
&\Rightarrow -\frac{80 - 50}{-1.645} = \sigma_T\\
&\Rightarrow 332.5911623 = \sigma_T^2
\end{aligned}$$

Así, la varianza de T es de, aproximadamente, 332.6.

b) Tomando $T \sim N\left(50, 18.5^2\right)$, entonces:

$$\begin{aligned}
&P\left[50 - c \leq T \leq 50 + c\right] = 0.975\\
&\Rightarrow P\left[T < 50 - c\right] = \frac{0.025}{2}, \text{ por simetría de la distribución normal,}\\
&\Rightarrow \Phi\left(\frac{50 - c - 50}{18.5}\right) = 0.0125\\
&\Rightarrow \frac{-c}{18.5} = -2.24\\
&\Rightarrow c = 41.44
\end{aligned}$$

Así, $c = 41.44$.

5. Una compañía embotelladora de refrescos tiene envases para cierta bebida. Se sabe que la cantidad de refresco en una botella sigue una distribución, con media 2.02 litros y una desviación estándar de 0.04 litros.

   a) **[3 puntos]** Si se inspeccionan 100 botellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad total de líquido esté entre 201 y 203 litros?

   b) **[4 puntos]** Si se quiere que al menos el 95 % de la cantidad promedio de refresco esté entre 2 y 2.04, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Solución.

a) Considere las variables aleatorias X_1, X_2, ..., X_{100}, donde X_i corresponde a la cantidad de refresco en la i-ésima botella, con $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.

Si se toma $S_{10} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} \underset{\text{aprox}}{\sim} N\left(100 \cdot 2.02, 100 \cdot 0.04^2\right)$, entonces:

$$P\left[201 < S_{100} < 203\right] \approx \Phi\left(\frac{203 - 100 \cdot 2.02}{\sqrt{100 \cdot 0.04^2}}\right) - \Phi\left(\frac{201 - 100 \cdot 2.02}{\sqrt{100 \cdot 0.04^2}}\right)$$

$$= \Phi\left(2.5\right) - \Phi\left(-2.5\right)$$

$$= 1 - 2 \cdot \Phi\left(-2.5\right)$$

$$= 1 - 2 \cdot 0.0062 = 0.9876$$

Por lo tanto, si se inspeccionan 100 botellas al azar, la probabilidad de que la cantidad total de líquido esté entre 201 y 203 litros es de, aproximadamente, 98.7 %.

b) Considere las variables aleatorias X_1, X_2, ..., X_n, donde X_i corresponde a la cantidad de refresco en la i-ésima botella, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Si se toma $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \underset{\text{aprox}}{\sim} N\left(\dfrac{n \cdot 2.02}{n}, \dfrac{n \cdot 0.04^2}{n^2}\right)$, entonces:

$$P\left[2 < \overline{X} < 2.04\right] \geq 0.95$$

$\Rightarrow P\left[\overline{X} \leq 2\right] < \dfrac{0.05}{2}$, usando la simetría de la distribución normal,

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{2 - 2.02}{\sqrt{\dfrac{0.04^2}{n}}}\right) < 0.025$$

$$\Rightarrow \frac{2 - 2.02}{\sqrt{\dfrac{0.04^2}{n}}} < -1.96$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{-1.96}{\dfrac{2 - 2.02}{\sqrt{0.04^2}}} = 3.92$$

$$\Rightarrow n > 15.3664$$

Por lo tanto, si se quiere que al menos el 95 % de la cantidad promedio de refresco esté entre 2 y 2.04, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 16 botellas.

6. [**4 puntos**] Una farmacéutica produce cierto tipo de pastillas, y lograron determinar que el 1 % de las pastillas producidas no cumplen con los estándares de calidad. Suponiendo que se tiene un lote de 500 pastillas, determine, utilizando la aproximación normal de la distribución binomial, la probabilidad de que entre 3 y 8 pastillas, inclusive, no cumplan con los estándares de calidad. Si calcula la probabilidad real, ¿considera que la aproximación es buena?

Solución.

Suponga que X es la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de pastillas, de las 500, que no cumplen con los estándares de calidad. Se sabe que $X \sim Bin\,(500, 0.01)$.

Ser solicita:

$$P\,[3 \leq X \leq 8]$$

$$\approx \Phi\left(\frac{8 - 500 \cdot 0.01 + \frac{1}{2}}{\sqrt{500 \cdot 0.01 \cdot 0.99}}\right) - \Phi\left(\frac{3 - 500 \cdot 0.01 - \frac{1}{2}}{\sqrt{500 \cdot 0.01 \cdot 0.99}}\right)$$

$$= \Phi\,(1.57) - \Phi\,(-1.12)$$

$$= 1 - \Phi\,(-1.57) - \Phi\,(-1.12)$$

$$= 1 - 0.0582 - 0.1314 = 0.8104$$

Por otro lado:

$$P\,[3 \leq X \leq 8] = \sum_{i=3}^{8} \binom{500}{x} \cdot (0.01)^i \cdot (0.99)^{500-x} = 0.809504.$$

Con esto, queda en evidencia que la aproximación es muy buena.