

Tercer examen parcial

Formulario 1

Instrucciones:

Nombre del estudiante: _____	Pts
Carné: _____ N° grupo: _____	Nota:
Nombre del docente: _____	

1. Al inicio de la prueba debe completar la portada de su cuaderno de examen con su información personal (nombre completo, número de carné, profesor y número de grupo). Durante la prueba solo podrá tener: lápiz, tajador, borrador, lapicero, calculadora no programable y el cuadernillo o folleto de examen.
2. La prueba consta de tres secciones: selección única, respuesta corta y desarrollo; para un total de 13 preguntas numeradas de 1 a 13. Los procedimientos que requiera realizar para obtener la respuesta de cada una de las preguntas de selección única o de respuesta corta NO serán tomados en cuenta a la hora de calificar la prueba. Para estas preguntas, al final de esta página se incluye la **tablas de respuestas**.
3. Cada estudiante deberá reportar las opciones marcadas para las preguntas de selección única y el resultado de las preguntas de respuesta corta en la tabla de respuestas. La información registrada en esta es la **única** que utilizará el docente para calificarle estas preguntas. De la pregunta 10 a la pregunta 13 se calificarán lo escrito en el espacio correspondiente asignado a cada pregunta dentro del cuadernillo de examen. En caso de que requiera más espacio, puede usar los espacios en blanco que posee el cuadernillo del examen, en estos casos debe indicar el lugar en donde continúa el procedimiento de la pregunta, si aun así no es suficiente, levante la mano e indíquelo a la persona a cargo.
4. No debe desengrapar este enunciado. No se permiten dispositivos electrónicos con conectividad a internet. El examen debe ser resuelto con lapicero azul o negro. En caso de que en alguna pregunta utilice lápiz o que realice alteraciones con corrector o similar, pierde el derecho de realizar reclamos posteriores sobre la evaluación de dicha pregunta.
5. Al finalizar la prueba debe entregar el cuadernillo del examen, con la tabla de respuesta y los datos personales llenos, así como todos los procedimientos realizados desde la pregunta 10 a la 13.

Tablas de respuestas:

Selección única

1. (A) (B) (C) (D)	4. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)	5. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)	

Formas válidas de marcar (E) (X)

Respuesta corta:

6. _____	8. _____
7. a. _____	9. _____
b. _____	

Se recomienda marcar con lápiz las opciones y la respuesta corta, y pasar a lapicero antes de entregar la prueba. En caso que cambie de opinión en alguna pregunta, borre bien y agregue su nueva respuesta.

I. Selección única. (total de la sección: 5 puntos)

A continuación, se presentan 5 ítems de selección única, para cada uno de ellos seleccione, entre las 4 opciones, aquella que a su juicio responda correctamente a la pregunta o situación planteada. Debe reportar las opciones marcada en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

1. [1 punto] Considere la sucesión $\{a_n\}$ dada en forma explícita por $a_n = 2 \cdot 3^n + 5n + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para determinar una fórmula definida por recurrencia para a_n , una ecuación característica asociada a esta corresponde a:

A) $(x + 3)(x + 1)^2(x + 2) = 0$

B) $(x - 3)(x - 1)^2(x - 2) = 0$

C) $(x - 3)(x - 1)(x - 2) = 0$

D) $(x - 3)(x - 2)x^2 = 0$

2. [1 punto] ¿Cuál de las siguientes definiciones corresponde a una Ley de Composición Interna sobre su respectivo conjunto?

A) Sobre $\mathbb{Q} - \{\frac{1}{2}\}$ se define \uparrow por: $a \uparrow b = \frac{a + b}{4}$.

B) Sobre \mathbb{N} se define \star por: $a \star b = 2a^2 + b + 1$.

C) Sobre \mathbb{Z} se define $*$ por: $a * b = \frac{2a + b}{2}$.

D) Sobre \mathbb{R}^+ se define \otimes por: $a \otimes b = (2a - 3b)^2$

3. [1 punto] Sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se define la operación $*$ por:

$$(a, b) * (m, n) = (a + m - 1, 3bn)$$

Si se sabe que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, *)$ es un grupo abeliano, con neutro $e = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ e inversos tales que $(a, b)^{-1} = \left(2 - a, \frac{1}{9b}\right)$.

El resultado de $\left(2, \frac{1}{3}\right)^{-2}$ es:

A) $(-2, 1)$

B) $\left(-1, \frac{2}{9}\right)$

C) $\left(\frac{1}{4}, 9\right)$

D) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

4. [1 punto] Sobre el conjunto $A = \{4, 9, n, x\}$ se define la operación \perp de acuerdo con la siguiente tabla de operaciones:

\perp	4	9	n	x
4	9	x	4	n
9	x	n	9	4
n	4	9	n	x
x	n	4	x	9

Suponga que \perp es asociativa en A y considere las siguientes afirmaciones:

I. (A, \perp) es un grupo.

II. (A, \perp) es un grupo abeliano.

¿Cuál o cuáles de las afirmaciones anteriores son con certeza verdaderas?

A) Solo la II.

B) Ninguna.

C) Solo la I.

D) Ambas.

5. [1 punto] Considere el conjunto \mathbb{Z}_{17}^* , sobre el cual se define la operación \odot como la multiplicación usual de clases de equivalencias. De esta forma se tiene que $(\mathbb{Z}_{17}^*, \odot)$ es un grupo de orden 16. Considere la siguientes afirmaciones:

I. $5 \odot 10 = 16$

II. Es posible la existencia de un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{17}^*, \odot)$ de orden 7.

A) Ambas.

B) Ninguna.

C) Solo la II.

D) Solo la I.

II. Respuesta corta. (total de la sección: 5 puntos)

A continuación, se presentan 4 ítems de respuesta corta. Resuelva cada uno de ellos y anote el resultado en la línea indicada. Debe reportar su respuesta en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

6. [1 punto] Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida en forma recursiva por:

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 5a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 3, & a_1 = 6 \end{cases}$$

El valor de a_3 corresponde a: _____

7. [2 puntos] Sobre el conjunto $A = \{2, 3, 8, a, w\}$ se define la operación \downarrow por la siguiente tabla de operaciones:

\downarrow	2	3	8	a	w
2	3	2	a	w	8
3	2	3	3	a	w
8	w	8	2	a	3
a	a	a	8	2	w
w	2	w	3	8	a

Con base en la estructura algebraica (A, \downarrow) se tiene que:

- a) el resultado de la operación $2 \downarrow 8 \downarrow w$ corresponde a: _____
- b) el o los valores de x en A tal que se cumpla que $x \downarrow 8 = 3$, corresponden a: _____

8. [1 punto] Sobre \mathbb{R} se define la ley de composición interna \triangle por:

$$a \triangle b = \frac{4a^2 - 5b}{4}$$

Entonces, el conjunto que contiene a todos los elementos idempotentes de (\mathbb{R}, \triangle) es: _____

9. [1 punto] Sobre el conjunto $\mathcal{G} = \{3, 6, b, c, m\}$ considere el grupo $(\mathcal{G}, *)$, donde $*$ está definido por:

$*$	3	6	b	c	m	p
3	3	6	b	c	m	p
6	6	c	p	3	b	m
b	b	p	6	m	3	c
c	c	3	m	6	p	b
m	m	b	3	p	c	6
p	p	m	c	b	6	3

Un subgrupo de orden 3 de $(G, *)$ corresponde a: _____

III. Desarrollo. (total de la sección: 15 puntos)

A continuación, se presentan 4 preguntas. Para cada una de ellas resuelva en el espacio en blanco lo solicitado. Justifique cada uno de los pasos que lo llevaron a obtener su respuesta.

10. [3 puntos] Considere la sucesión $\{w_n\}$ definida en forma recursiva por:

$$\begin{cases} w_n = \frac{1}{4}w_{n-2}, & \forall n \geq 2. \\ w_0 = 1, & w_1 = -2 \end{cases}$$

Use la teoría estudiada sobre el polinomio característico para determinar una fórmula explícita para $\{w_n\}$.

11. [4 puntos] Use el método de inducción matemática para demostrar que:

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + (2n) \cdot 2^{2n-1} = 2^{2n} (2n - 1), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

12. [4 puntos] Use el método de inducción matemática para demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ es divisible por 9, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

13. [4 puntos] Sobre el conjunto $\mathbb{Q} - \{\frac{1}{2}\}$ se define la ley de composición interna \perp por:

$$a \perp b = a + b - 2ab$$

Suponga que $(\mathbb{Q} - \{\frac{1}{2}\}, \perp)$ es una estructura algebraica conmutativa y con elemento neutro $e = 0$.

- Demuestre que \perp es una operación asociativa.
- Demuestre que en $(\mathbb{Q} - \{\frac{1}{2}\}, \perp)$ se satisface la propiedad de los inversos.