Instituto Tecnológico de Costa Rica | Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Escuela de Matemática | Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Primer examen parcial - soluciones
II semestre - 2024

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. En una compañía multinacional, se realiza un estudio de las habilidades de 300 empleados, de los cuales, 210 trabajan en alguna de las siguientes tres áreas: Análisis de Datos, Desarrollo de Software y Gestión de Proyectos. Se sabe que en Análisis de Datos trabajan 150 personas, en Desarrollo de Software trabajan 120 personas y en Gestión de Proyectos trabajan 100 personas. Además, 60 personas trabajan en Análisis de Datos y Gestión de Proyectos, 50 personas trabajan en las tres áreas, y 190 personas trabajan en Análisis de datos o en Desarrollo de Software.

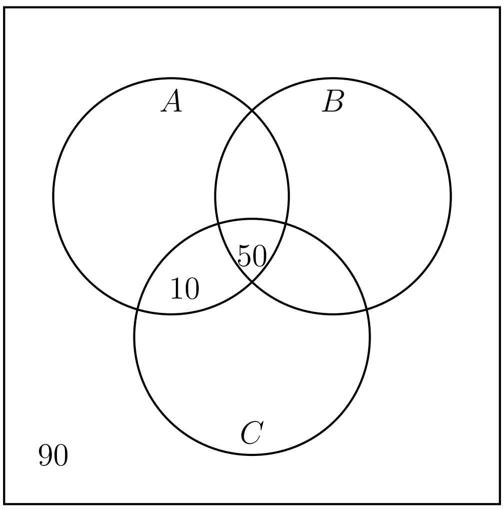
   a) **[2 puntos]** ¿Cuántas personas trabajan únicamente en Análisis de Datos?

   b) **[3 puntos]** ¿Cuántas personas trabajan en exactamente dos áreas?

   Solución.

   Suponiendo que Ω es el conjunto de todos los empleados, considere que A es el conjunto de todos los empleados que trabajan en Análisis de Datos, B es el conjunto de todos los empleados que trabajan en Desarrollo de Software y C es el conjunto de todos los empleados que trabajan en Gestión de Proyectos. Se sabe que $|\Omega| = 210$, $|A| = 150$, $|B| = 120$, $|C| = 100$, $|A \cap C| = 60$, $|A \cap B \cap C| = 50$ y $|A \cup B| = 190$.

   Note que:



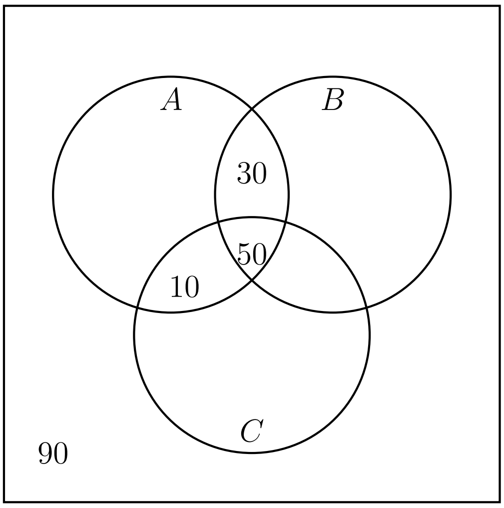
a) Usando el principio de inclusión y exclusión:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$\Rightarrow 190 = 150 + 120 - |A \cap B|$

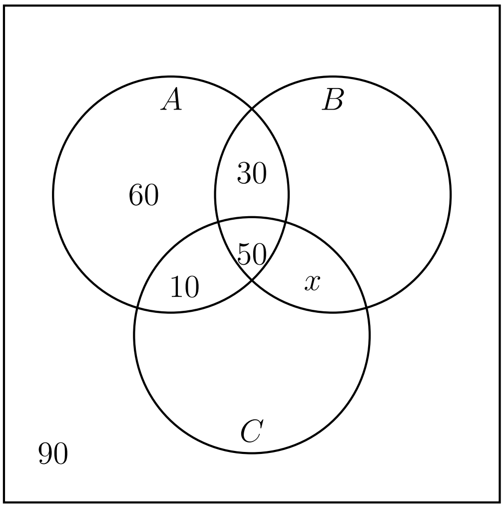
$\Rightarrow |A \cap B| = 80$

Note que:



Por lo tanto, 60 personas trabajan únicamente en Análisis de Datos.

b) Falta determinar x, donde:



Por el principio de inclusión y exclusión:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$\Rightarrow 210 = 150 + 120 + 100 - 80 - 60 - |B \cap C| + 50$

$\Rightarrow |B \cap C| = 70$

Por lo tanto, como $x = 20$, entonces hay $20 + 30 + 10 = 60$ personas que trabajan en exactamente dos áreas.

2. Se tiene dos urnas con bolitas, indistinguibles salvo por el color, de la siguiente manera:

	Bolitas rojas	**Bolitas azules**
Urna 1	4	1
Urna 2	2	2

Se extraen bolitas de las urnas, sin reemplazo y de forma alternada iniciando con la primera urna, hasta obtener dos bolitas rojas (no necesariamente consecutivas).

a) [**3 puntos**] Escriba una representación del espacio muestral para el experimento propuesto.

b) [**3 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que se saquen cuatro bolitas para terminar el experimento?

Solución.

a) Suponga que R_i representa una extracción de bolita roja, mientras que A_i representa una bolita azul, con $i = 1, 2$ representando la urna de donde se obtiene. Note que el experimento se termina cuando se saca la segunda roja.

Cantidad de extracciones	Forma
2	R_1R_2
3	$R_1A_2R_1$
3	$A_1R_2R_1$
4	$R_1A_2A_1R_2$
4	$A_1A_2R_1R_2$
5	$R_1A_2A_1A_2R_1$
5	$A_1A_2R_1A_2R_1$

b) Para calcular la probabilidad solicitada, se hará por etapas:

Forma	Prob. Bolita 1	Prob. Bolita 2	Prob. Bolita 3	Prob. Bolita 4
$R_1A_2A_1R_2$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$A_1A_2R_1R_2$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{3}$

Por lo tanto, la probabilidad de que se saquen cuatro bolitas para terminar el experimento es de $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15} \approx 0.133333$.

3. **[3 puntos]** Considere los eventos A, B y C de un experimento aleatorio. Si se sabe que A y B son independientes, y A y C son excluyentes, pruebe que:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A]\, P\left[\overline{B}\right] + P[B \cup C].$$

Solución.

Se sabe que:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$

$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[B \cap C]$, pues A y C son excluyentes,

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A] - P[A \cap B] + \Big(P[B] + P[C] - P[B \cap C]\Big)$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A] - P[A \cap B] + P[B \cup C]$$

$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A] - P[A]\, P[B] + P[B \cup C]$, pues A y B son independientes,

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A] \Big(1 - P[B]\Big) + P[B \cup C]$$

$$\Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[A]\, P\left[\overline{B}\right] + P[B \cup C]$$

4. Considere la palabra **IMPLEMENTACION**.

   a) **[3 puntos]** Determine la cantidad total de **anagramas con todas las letras** en los que todas las vocales estén juntas (en cualquier orden) y, además, todas aparecen después de la cuarta posición.

   b) **[3 puntos]** Determine la cantidad total de **anagramas de 4 letras** en los que hay a lo sumo dos vocales y las consonantes no se pueden repetir.

Solución.

a) Para este punto, se determinarán los anagramas de las letras **M**, **P**, **L**, **M**, **N**, **T**, **C**, **N**, y **IEEAIO** en cualquier orden.

Esto indica que, de estas 9 "letras" disponibles, deben haber por lo menos 4 consonantes antes de **IEEAIO**. Por lo tanto, se escoge un espacio de los cinco restantes para colocar a todas las vocales.

- *Etapa I:* escoger el espacio para las vocales: $\binom{5}{1} = 5$.
- *Etapa II:* acomodar las vocales: $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.
- *Etapa III:* acomodar las consonantes: $\dfrac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$.

Por lo tanto, hay $5 \cdot 180 \cdot 10080 = 9072000$ anagramas con las condiciones propuestas.

b) Este punto se realiza por casos.

- **Caso I:** no hay vocales.
  Se deben escoger y acomodar cuatro de estas consonantes: **M**, **P**, **L**, **N**, **T** y **C**: $\dfrac{6!}{(6-4)!} = 360$.
- **Caso II:** hay una vocal.
  Se deben escoger tres de estas consonantes: **M**, **P**, **L**, **N**, **T** y **C**; luego, una vocal de **I**, **E**, **A** y **O**, para luego acomodar todas las letras: $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4! = 1920$.
- **Caso III:** hay dos vocales.
  Este caso es más complejo, porque pueden ser vocales diferentes o repetidas. Si son diferentes, solamente se escogen 2 de cuatro disponibles. Si son iguales, solo hay dos casos: **EE** e **II**. Finalmente, se escogen las consonantes y se acomodan todas las letras: $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 4! + 2 \cdot \binom{6}{2} \cdot \dfrac{4!}{2!} = 2520$.

Con esto, hay $360 + 1920 + 2520 = 4800$ anagramas con las condiciones propuestas.

5. Se van a repartir 10 entradas generales al estadio (todas iguales) y 8 camisetas distintas entre tres amigas: Ana, Melissa y Raquel. ¿De cuántas maneras se puede realizar la repartición si:

   a) **[2 puntos]** a Melissa le corresponden a lo sumo cuatro entradas?

   b) **[3 puntos]** le corresponden al menos dos camisetas a cada amiga?

Solución.

a) Se puede resolver por complemento: que a Melissa le corresponden por lo menos cinco entradas.

Al repartir las entradas, se le dan 5 a Melissa (una posibilidad) y luego se reparte el resto entre las tres amigas: $\binom{5+3-1}{5} = 21$.

Falta repartir las camisetas sin restricción: $3^8 = 6561$.

Así, hay $\binom{10+3-1}{10} \cdot 3^8 - 1 \cdot 21 \cdot 6561 = 295245$ maneras distintas de realizar la repartición solicitada.

b) Note que solo hay cuatro posibilidades para esta repartición: $(4-2-2)$ y $(3-3-2)$, junto con sus respectivas variaciones.

Por lo tanto:

- $(4-2-2) : \frac{3!}{2!} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} = 1260.$
- $(3-3-2) : \frac{3!}{2!} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} = 1680.$

Finalmente, hay $\binom{10+3-1}{10} \cdot (1260 + 1680) = 194040$ maneras distintas de realizar la repartición solicitada.

6. **[5 puntos]** Una clínica ha desarrollado una nueva prueba para detectar una enfermedad rara, que afecta al 1 % de la población. Dicha prueba tiene las siguientes características:

- La probabilidad de que la prueba sea positiva, dado que la persona tiene la enfermedad (sensibilidad) es de 95 %.
- La probabilidad de que la prueba sea negativa dado que la persona no tiene la enfermedad (especificidad) es de 90 %.

Si la prueba únicamente puede tener resultado positivo o negativo, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente que recibe la prueba con resultado positivo realmente tenga la enfermedad?

Solución.

Considere el conjunto Ω como todos los habitantes de la población estudiada. Además, considere los subconjuntos de Ω denominados: A: habitantes con la rara enfermedad, $\overline{A}$: habitantes sin la enfermedad, B: habitantes con prueba positiva, y $\overline{B}$: habitantes con prueba negativa.

Es claro que A y $\overline{A}$ forman una partición de Ω. Además, según el problema, $P[A] = 0.01$, $P\left[\overline{A}\right] = 0.99$, $P[B\,|A] = 0.95$, y $P\left[\overline{B}\,|\overline{A}\right] = 0.9$. Se solicita: $P[A\,|B]$.

Utilizando la regla de Bayes, se tiene que:

$$P[A\,|B] = \frac{P[A]\cdot P[B\,|A]}{P[A]\cdot P[B\,|A] + P\left[\overline{A}\right]\cdot P\left[B\,|\overline{A}\right]}$$

Falta probar que $P\left[B\,|\overline{A}\right] = 1 - P\left[\overline{B}\,|\overline{A}\right]$

$$P\left[B\,|\overline{A}\right] = \frac{P\left[B\cap\overline{A}\right]}{P\left[\overline{A}\right]} = \frac{P[B-A]}{P\left[\overline{A}\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[B\,|\overline{A}\right] = \frac{P[B] - P[B\cap A]}{P\left[\overline{A}\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[B\,|\overline{A}\right] = \frac{P[B] - 1 + P\left[\overline{B\cap A}\right]}{P\left[\overline{A}\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[B\,|\overline{A}\right] = \frac{P[B] - 1 + P\left[\overline{B}\cup\overline{A}\right]}{P\left[\overline{A}\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[B\,|\overline{A}\right] = \frac{P[B] - 1 + P\left[\overline{B}\right] + P\left[\overline{A}\right] - P\left[\overline{B}\cap\overline{A}\right]}{P\left[\overline{A}\right]}$$

$$\Rightarrow P\left[B\,|\overline{A}\right] = \frac{1 - 1 + P\left[\overline{A}\right] - P\left[\overline{B}\cap\overline{A}\right]}{P\left[\overline{A}\right]}, \text{ pues } P[B] + P\left[\overline{B}\right] = 1,$$

$$\Rightarrow P\left[B\,|\overline{A}\right] = 1 - \frac{P\left[\overline{B}\cap\overline{A}\right]}{P\left[\overline{A}\right]} = 1 - P\left[\overline{B}\,|\overline{A}\right]$$

Por lo tanto:

$$P[A\,|B] = \frac{0.01\cdot 0.95}{0.01\cdot 0.95 + 0.99\cdot 0.1} = \frac{19}{217} \approx 0.08755760369.$$

Así, la probabilidad de que un paciente realmente tenga la enfermedad dado que recibe un resultado positivo en la prueba es de, aproximadamente, 8.7 %.