Convenciones y notaciones

Para un seguimiento adecuado de este texto, a continuación se establecen las convenciones y notaciones a utilizar. Para iniciar, se recuerda que $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los **números reales**, cuyos subconjuntos más comunes corresponden a:

- **El conjunto de los números naturales:**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

  Nótese que, para este escrito, el cero pertenece a $\mathbb{N}$.

- **El conjunto de los números enteros:**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

  donde es claro que $\mathbb{N}$ está contenido en $\mathbb{Z}$.

- **El conjunto de los números racionales:**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \right\}.$$

  Similarmente, se satisface que $\mathbb{Z}$ está contenido en $\mathbb{Q}$. En otras palabras, son todos los números con una cantidad finita o periódica de decimales. Por ejemplo, $\frac{7}{2} = 3.5$ y $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ pertenecen a $\mathbb{Q}$. Observe que se utilizará el punto como separador decimal.

- **El conjunto de los números irracionales:**

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \notin \mathbb{Q}\},$$

  es decir, son los números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros.

Por otro lado, durante el texto se definirán nuevas notaciones, las cuales se resumen a continuación:

$\square$	Cierre de solución o demostración.
$\mathcal{V}$	Valor de verdad: verdadero.
$\mathcal{F}$	Valor de verdad: falso.
$\equiv$	"Idéntico a" o equivalencia.
$\neg$	Negación.

$\wedge$	Conjunción.
$\vee$	Disyunción inclusiva.
$\veebar$	Disyunción exclusiva.
$\rightarrow$	Condicional o implicación.
$\leftrightarrow$	Bicondicional o doble implicación.
$\mathcal{V}_0$	Tautología.
$\mathcal{F}_0$	Falacia o contradicción.
$\Rightarrow$	Implicación tautológica.
$\Leftrightarrow$	Equivalencia tautológica.
$\therefore$	"Por lo tanto".
$\forall$	Cuantificador universal: "para todo".
$\exists$	Cuantificador existencial: "existe".
$\exists!$	"Existe un único".
$\nexists$	"No existe".
$x \in A$	x pertenece al conjunto A.
$x \notin A$	x no pertenece al conjunto A.
$:=$	Operador de asignación.
$\varnothing$ o $\{\}$	Conjunto vacío.
$\mathcal{U}$	Conjunto universo.
$A \subseteq B$	A subconjunto de B.
$A \nsubseteq B$	A no es subconjunto de B.
$A \subset B$ o $A \subsetneq B$	A subconjunto propio de B.
$\text{card}(A)$	Cardinalidad del conjunto A.
$\cup$	Unión de conjuntos.
$\cap$	Intersección de conjuntos.
$\setminus$	Diferencia de conjuntos.
$\triangle$	Diferencia simétrica de conjuntos.
$\overline{A}$	Complemento del conjunto A.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto de partes (o potencia) de A.
$\times$	Producto cartesiano.

Lógica matemática

En este capítulo, denominado lógica matemática, se pretende introducir el vocabulario (simbología) necesario para comprender el lenguaje de la matemática en favor de expresar formalmente conceptos que describirán, con mayor facilidad, situaciones de interés provenientes del mundo que nos rodea. El objetivo principal en la presentación de este tema es velar porque el lector sea capaz de simbolizar y asignar el valor de verdad correspondiente a proposiciones, con el fin de obtener conclusiones acertadas (válidas). En otras palabras, se busca desarrollar habilidades que permitan justificar (demostrar) supuestos mediante argumentos sólidos, los cuales serán aplicados después de la correcta utilización del lenguaje matemático. Para lograr esto, a lo largo de este capítulo se presentarán la definición de una proposición, así como la descripción de conectivas lógicas, tablas de verdad, tautologías y contradicciones. Más aún, se especificará el trabajo con inferencias lógicas y cuantificadores.

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1. Una **proposición** corresponde a una expresión a la que se le puede asignar un valor de verdad. Es decir, puede tomar el valor: falso ($\mathcal{F}$) o verdadero ($\mathcal{V}$), pero no ambos (a esto se le conoce como *principio del tercero excluido*).

Las proposiciones se representan usualmente con letras mayúsculas, tales como: P, Q, R, entre otras. Además, se utilizan los dos puntos (:) para asignar una letra a una proposición, por ejemplo, P es la proposición "Hoy es lunes", se denota simplemente como P : Hoy es lunes.

Ejemplo 1.1. Las siguientes expresiones corresponden a proposiciones:

- P : No llovió en toda la semana.
- Q : Todos los perros tienen cuatro patas.
- R : Todos los meses tienen 28 días.
- S : Todos los mamíferos necesitan café.

- T : Todos los estudiantes hacen todos los ejercicios.
- U : $5 - 2 = 4$.
- V : $3 < 2$.
- W : $a^0 = 1$.

Por otro lado, las siguientes no son proposiciones:

- Tráigame el cuaderno.
- Esta expresión es falsa.
- ¿Quién fue primero: el huevo o la gallina?

Observación: Cuando sea claro que una proposición es verdadera se utilizará el símbolo $\mathcal{V}$, mientras que en caso contrario se usará $\mathcal{F}$. En particular, si P es una proposición verdadera, se escribe $P \equiv \mathcal{V}$. El símbolo "$\equiv$" se refiere a una relación de igualdad bajo un criterio (equivalencia). En el caso de proposiciones, el criterio está basado en comparar los valores de verdad.

Ejemplo 1.2. Considere las siguientes proposiciones con su respectivo valor de verdad:

- $P : 2^2 - 1 \geq 4$. $(P \equiv \mathcal{F})$.
- Q : Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 + 1 > 0$. $(Q \equiv \mathcal{V})$.
- R : Existen 10 tipos de personas, las que saben binario y las que no. $(R \equiv \mathcal{V})$.

Ejercicio 1.1. En las siguientes proposiciones, asigne el valor de verdad que corresponda:

a) P : El dominio de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ corresponde a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) Q : Existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 \leq 0$.

c) $R : (a + b)^2 = a^2 + b^2$, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.

d) S : Para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que $2k + 1$ es impar.

e) $T : \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.

Las expresiones anteriores corresponden a proposiciones simples, sin embargo, es posible considerar proposiciones más elaboradas, denominadas compuestas, derivadas de las simples mediante el uso de las llamadas *conectivas lógicas* que serán descritas a continuación.

1.1.1. Conectivas lógicas

En las siguientes definiciones, P y Q corresponden a dos proposiciones arbitrarias.

Definición 1.2. La **negación** de P, denotada $\neg P$, expresa lo opuesto. Es decir, su valor de verdad es el opuesto de P y se lee "no P". En la siguiente tabla se muestra el valor de P y su negación $\neg P$.

P	$\neg P$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Observación: Una tabla como la anterior se denomina *tabla de verdad* y muestra todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta. En la Sección 1.2 se describe en detalle la elaboración de tablas de verdad.

Ejemplo 1.3. Observe lo siguiente:

- La negación de la proposición "La matemática es fácil", es "La matemática no es fácil".
- La negación de la proposición "Heredia es más grande que Alajuela", es "Heredia no es más grande que Alajuela".

Ahora, empleando la notación $\neg$, se puede notar que:

- Si $P : 3 > 2$, entonces $\neg P : 3 \not> 2$.
- Si $P : 2 + 1 = 5$, entonces $\neg P : 2 + 1 \neq 5$.

Por otro lado, es importante aclarar que:

- No es cierto que la negación de la proposición "El perro es negro", sea "El perro es blanco".

Observación: Con base en el ejemplo anterior, considere lo siguiente:

1. La negación de proposiciones que utilicen los símbolos: $=, \geq, \leq, >$ y $<$, suelen ser expresadas mediante otros equivalentes. Por ejemplo, si $P : 3 > 2$, entonces $\neg P$ puede ser escrita como $3 \not> 2$, $\neg(3 > 2)$ o simplemente $3 \leq 2$. Algunos de estos se resumen en la siguiente tabla:

Símbolo	$=$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$
Negación	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$

2. En general, negar una proposición no es necesariamente buscar un antónimo, por ejemplo, se podría pensar que la negación de "El perro es negro", es "El perro es blanco", ya que usualmente se relaciona el color negro como el opuesto al blanco, sin embargo, el hecho de que el perro no sea negro, no necesariamente establece que sea blanco, ya que puede ser de otro color.

Definición 1.3. La **conjunción** de P y Q, denotada $P \wedge Q$, es verdadera siempre que ambas proposiciones lo sean. Asimismo, si alguna de ellas o ambas es falsa, se obtiene que la conjunción es falsa. Además, se lee como "P y Q" y su tabla de verdad es:

P	Q	$P \wedge Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Ejemplo 1.4.

- Si $P:$ Todo cuadrado es un rectángulo y $Q : \pi \geq e$, entonces $P \wedge Q \equiv \mathcal{V}$.
- Si $P:$ El hielo es caliente y $Q : 1 + 1 = 2$, entonces $P \wedge Q \equiv \mathcal{F}$.
- Si $P:$ El cuadrado de todo número real es no negativo y $Q : \frac{0}{0} = 1$, entonces $\neg(P \wedge Q) \equiv \mathcal{V}$.

Definición 1.4. La **disyunción inclusiva** de P y Q, denotada $P \vee Q$, es verdadera si alguna de las proposiciones lo es. Asimismo, si ambas son falsas, se tiene que la disyunción inclusiva es falsa. Además, se lee como "P o Q" y su tabla de verdad es:

P	Q	$P \vee Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Ejemplo 1.5.

- Si P : Todo triángulo rectángulo posee un ángulo interno agudo y Q : La capital de Costa Rica es Heredia, entonces $P \vee Q \equiv \mathcal{V}$.
- Si $P:$ El hielo es caliente y $Q : 1 + 1 = 2$, entonces $P \vee Q \equiv \mathcal{V}$.
- Si $P : 3 + 4 \cdot 5 = 35$ y $Q : a - (b + c) = a - b + c$, entonces $P \vee Q \equiv \mathcal{F}$.
- Si $P:$ Existe un número más grande que todos los otros y Q : π es un número racional, entonces $P \vee \neg(P \wedge Q) \equiv \mathcal{V}$.

Definición 1.5. La **disyunción exclusiva** de P y Q, denotada $P \veebar Q$, es verdadera siempre que las proposiciones posean distintos valores de verdad. Asimismo, si el valor de verdad de ambas proposiciones es igual, se obtiene que la disyunción exclusiva es falsa. Además, se lee como "P o Q, pero no ambas", "o P o Q" o simplemente "P ó Q". Su tabla de verdad es:

P	Q	$P \veebar Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Ejemplo 1.6.

- El sábado puedo irme de fiesta o estudiar, pero no ambas.
- Un número distinto de cero, es o positivo o negativo.
- Si $P : \log_a(b) = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$ y $Q : a = e^{\ln(a)}$, entonces $P \veebar Q \equiv \mathcal{F}$.
- Si $P : \log(a+b) = \log(a) + \log(b)$ y $Q : (a^m)^n = a^{m+n}$, entonces $P \veebar Q \equiv \mathcal{F}$.

Definición 1.6. El **condicional** (o **implicación**) de P a Q, denotado $P \to Q$, es verdadero en todos los casos, excepto si P es verdadera y Q es falsa. Se lee como "si P entonces Q", "P implica Q" o simplemente "P solo si Q". Su tabla de verdad es:

P	Q	$P \to Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Adicionalmente, a P se le denomina *hipótesis*, *antecedente* o *causa*, y respectivamente a Q se le conoce *conclusión*, *consecuente* o *efecto*.

Ejemplo 1.7.

- P : Si estudio mucho entonces pasaré el curso.
- Q : No llueve solo si voy a clases.
- R : Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $a^0 = 1$.
- S : Ir a clases y poner atención, implica que entenderé la materia.
- T : $x^2 - 1 = 0$ si $x = \pm 1$.

Observación:

1. Un condicional es falso solo cuando siendo verdadera la hipótesis, la conclusión es falsa, es decir, no se puede deducir una conclusión falsa a partir de una hipótesis verdadera.
2. Es usual escribir un condicional de forma alternativa, por ejemplo, para $P \to Q$ algunas de ellas (aunque no todas) corresponden a:
   - P causa Q
   - P por tanto Q
   - P es suficiente para Q
   - Q es necesario para P
   - Q si P
   - Q con la condición de P
   - Q cuando P
   - Q siempre que P
   - Q a consecuencia de P

   En particular, el uso de "P es suficiente para Q" y "Q es necesario para P" como representaciones para $P \to Q$, es debido a que si P se cumple entonces se cumplirá Q, es decir, será suficiente tener P para tener Q, y recíprocamente, cuando ocurre P necesariamente sucederá Q, en otras palabras, Q es necesaria para P. Por ejemplo, "Si llueve, entonces el jardín estará húmedo", es suficiente que llueva para que el jardín se humedezca. Sin embargo, no es algo necesario, ya que es posible humedecer el jardín con aspersores. Por otra parte, para que el jardín esté húmedo es necesario que llueva; debido a que no es posible que habiendo llovido, no se humedezca el jardín.

Definición 1.7. El **bicondicional (o doble implicación)** de P y Q, denotado $P \leftrightarrow Q$, es verdadero siempre que ambas proposiciones posean valores de verdad idénticos. Asimismo, si el valor de verdad de las proposiciones es distinto, se deduce que el bicondicional es falso. Además, se lee como "P si y solo si Q", "P es necesario y suficiente para Q" o simplemente "P sii Q". Su tabla de verdad es:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Ejemplo 1.8.

- P : Hoy es viernes si y solo si mañana es sábado.
- Q : $ax^2 + bx + c = 0$ posee soluciones en $\mathbb{R}$ si y solo si $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \geq 0$.
- R : $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 0$ sii $x = -1$.
- S : $2 + 2 = 6$ si y solo si 2 no es un número primo.

Observación: Nótese que según las tablas de verdad anteriores, se tienen las siguientes equivalencias:

- $P \leftrightarrow Q \equiv \neg(P \veebar Q)$

- $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

La primera de estas equivalencias permite, en particular, definir la disyunción exclusiva en términos del bicondicional, esto es, reemplazar $P \veebar Q$ por $\neg (P \leftrightarrow Q)$. De igual forma, la segunda equivalencia admite que $P \leftrightarrow Q$ sea sustituido por $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

Ejercicio 1.2. Si $P \to \neg Q$ es falsa, determine el valor de verdad de la proposición

$$[Q \leftrightarrow (\neg P \wedge R)] \veebar [(Q \vee S) \wedge (Q \to \neg P)] .$$

Ejercicio 1.3. Determine una asignación de valores de verdad para P, Q, R, S y T, que verifique que $(\neg P \to Q) \to \neg [[P \to (R \vee S)] \wedge \neg [S \to (Q \veebar T)]]$ sea falsa.

1.1.2. Simbolización de proposiciones

En lógica matemática, el proceso de simbolización de una proposición consiste en re-expresarla utilizando letras mayúsculas y los símbolos de las conectivas, con el fin de simplificar su escritura y realizar operaciones de manera sencilla, tales como determinar su valor de verdad. Por ejemplo, considere la proposición

"No descansaré mañana, si no estudio la materia o no hago la tarea",

la cual puede ser simbolizada como

$$(\neg Q \vee \neg R) \to \neg P ,$$

donde

P : Descansaré mañana.
Q : Estudio la materia.
R : Hago la tarea.

Es importante notar del ejemplo anterior lo siguiente:

1. Se utilizan los paréntesis para establecer el orden de prioridad entre las conectivas lógicas. Es claro que $(\neg Q \vee \neg R)$ es la hipótesis y $\neg P$, la conclusión. En el caso de no usar paréntesis no sería clara dicha distinción.

2. En este escrito las proposiciones se definirán de manera positiva, utilizando el símbolo $\neg$ para escribir su negación.

Ejemplo 1.9. Considere las proposiciones:

P : El perro es negro, $\quad Q$: El caballo es blanco, $\quad R$: El gato es gris,

y nótese que:

- "Si el perro es negro y el caballo es blanco, entonces el gato es gris", se simboliza:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

- "El perro es negro y, si el caballo es blanco entonces el gato es gris", se simboliza:

$$P \wedge (Q \rightarrow R)$$

- "El perro es negro y el caballo es blanco, si el gato es gris", se simboliza:

$$R \rightarrow (P \wedge Q)$$

- "El perro no es negro o, el gato es gris y el caballo es blanco", se simboliza:

$$\neg P \vee (R \wedge Q)$$

- "El perro no es negro o el gato es gris, y el caballo es blanco", se simboliza:

$$(\neg P \vee R) \wedge Q$$

- "Es falso que, el perro es negro ó el caballo no es blanco", se simboliza:

$$\neg (P \veebar \neg Q)$$

Ejercicio 1.4. Considere las siguientes proposiciones simples:

P : Randall sale a dar un paseo.
Q : La luna está brillando.
R : Está nevando.

Utilizando proposiciones compuestas, escriba los siguientes enunciados en forma simbólica:

a) Si la luna está brillando y no está nevando, entonces Randall sale a dar un paseo.

b) Si la luna está brillando, entonces no está nevando solo si Randall sale a dar un paseo.

c) No ocurre que, Randall salga a dar un paseo si y solo si está nevando o la luna brilla.

d) Si está nevando y la luna no está brillando, entonces Randall no saldrá a dar un paseo.

1.2. Construcción de tablas de verdad

El valor de verdad de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen. Por ejemplo, $(P \wedge Q) \to R$ será falsa cuando P y Q sean ambas verdaderas, y R sea falsa. En cualquier otro caso, $(P \wedge Q) \to R$ será verdadera. En otras palabras, el valor de verdad de $(P \wedge Q) \to R$ puede variar si se cambian los valores de verdad de P, Q o R. En la práctica, para mostrar todos los posibles resultados de una proposición compuesta se emplean *tablas de verdad*. A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 1.10. Construya una tabla para determinar el valor de verdad de la proposición:

$$(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q).$$

Solución. Una tabla de verdad de $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$, viene dada por:

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

De ella, se puede apreciar que la proposición es falsa, independientemente de los valores de verdad de P y Q. □

Observación: En el Ejemplo 1.10 se observa que P y Q tienen dos posibles valores de verdad cada una, por lo que el número total de combinaciones posibles para el valor de verdad de $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ es de $2 \cdot 2 = 2^2$, lo que se ve representado en el número de filas de la tabla de verdad. En general, una tabla de verdad asociada a una proposición compuesta conformada por n proposiciones simples, posee 2^n filas, ignorando el encabezado.

Ejemplo 1.11. Hallar el valor de verdad de la proposición:

$$[(Q \to R) \vee \neg P] \leftrightarrow [\neg (P \wedge Q) \vee R].$$

Solución. Similar al ejemplo anterior, se construye una tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \to R$	$\neg P$	(1) $(Q \to R) \vee \neg P$	$P \wedge Q$	$\neg (P \wedge Q)$	(2) $\neg (P \wedge Q) \vee R$	(1) $\leftrightarrow$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

de ella, se obtiene que la proposición es verdadera sin importar los valores de verdad de P, Q, R. □

Ejemplo 1.12. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$(P \vee R) \to \left[(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow (R \veebar P)\right].$$

Solución. Considere la tabla de verdad:

P	Q	R	$P \vee R$	$\neg P$	(1) $\neg P \wedge Q$	$R \veebar P$	(2) (1) $\leftrightarrow (R \veebar P)$	$(P \vee R) \to$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Nótese que se evidencia que el valor de verdad de la proposición compuesta dada depende de los valores de verdad que tienen P, Q y R. □

Los ejemplos previos muestran las tres posibles situaciones que puede presentar una proposición compuesta. El Ejemplo 1.10 corresponde a una proposición siempre falsa, el Ejemplo 1.11, a una siempre verdadera, mientras que el Ejemplo 1.12, a una cuyo valor de verdad varía según el de las proposiciones simples que la conforman. La siguiente definición brinda terminología a la hora de referirse a estas situaciones.

Definición 1.8. Si una proposición compuesta es falsa para todos los posibles valores de las proposiciones simples que la forman, se denomina **falacia** o **contradicción** y se denota por $\mathcal{F}_0$. Por otro lado, si es siempre verdadera se llama **tautología** y se denota por $\mathcal{V}_0$. En cualquier otro caso se llama **contingencia** o **eventualidad**.

Ejemplo 1.13. Considere la siguiente proposición:

$$\left[P \to (Q \to R)\right] \leftrightarrow \left[(P \wedge \neg R) \to \neg Q\right].$$

Construya la tabla de verdad correspondiente y determine si la expresión representa una tautología, contradicción o contingencia.

Solución. Según la tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \to R$	(1) $P \to (Q \to R)$	$\neg R$	$P \wedge \neg R$	$\neg Q$	(2) $(P \wedge \neg R) \to \neg Q$	(1) $\leftrightarrow$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

se deduce que la proposición dada corresponde a una tautología. □

Ejercicio 1.5. Clasifique como tautología, falacia o contingencia las siguientes proposiciones:

a) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

b) $[(Q \wedge P) \to \neg R] \leftrightarrow [\neg Q \vee (P \to R)]$

c) $[P \to (Q \vee R)] \wedge [\neg (P \to Q) \wedge \neg R]$

Definición 1.9. Se dice que ***P* implica lógicamente a *Q*** si y solo si $P \to Q$ es una tautología. Se denota por $P \Rightarrow Q$. Asimismo, se dice que ***P* es lógicamente equivalente a *Q*** si y solo si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. Se denota por $P \Leftrightarrow Q$ o $P \equiv Q$.

Ejemplo 1.14. Considere la siguiente proposición:

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)\,.$$

Construya la tabla de verdad correspondiente y determine si la expresión representa una tautología, contradicción o contingencia.

Solución. Para determinar el valor de verdad de la proposición, se construye la tabla de verdad:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

de la cual se puede apreciar que la proposición es una tautología. Es decir, se tiene que $P \to Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$, o simplemente $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. □

Ejercicio 1.6. Muestre que $P \veebar Q$ es lógicamente equivalente a cada una de las siguientes proposiciones:

a) $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

b) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

1.3. Leyes de la lógica

Dado que el concepto de tautología (ver Definición 1.8) corresponde a proposiciones que son siempre verdaderas, es posible asociar estas a *fórmulas* o a *leyes*. En la Tabla 1.1 se presentan algunas de estas leyes provenientes de equivalencias lógicas (ver Definición 1.9), las cuales (y entre otras) son conocidas como *leyes de la lógica*.

Observación:

1. Las proposiciones P, Q y R utilizadas en la Tabla 1.1 corresponden a proposiciones cualesquiera. Es decir, pueden ser simples o compuestas.
2. En el caso de proposiciones que involucren el bicondicional o la disyunción exclusiva, se puede hacer uso de las equivalencias:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P) \qquad \text{y} \qquad P \veebar Q \equiv \neg(P \leftrightarrow Q)$$

en conjunto con las leyes de la Tabla 1.1.

Ejemplo 1.15 (Ley de exportación). Demuestre la validez de la proposición:

$$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R\,.$$

Solución. Se debe probar que:

$$[P \to (Q \to R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \to R]$$

es una tautología. Para ello, se puede proceder al menos de las siguientes dos formas.

Primera forma: Tal como antes, se utiliza una tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \to R$	(1) $P \to (Q \to R)$	$P \wedge Q$	(2) $(P \wedge Q) \to R$	(1) $\leftrightarrow$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Nombre	Abreviación	Ley
Implicación y disyunción	ID	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	CP	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
Doble Negación	DN	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan	DM	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutativa	Con	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociativa	Aso	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva	Dis	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Idempotencia	Ide	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Neutro	Ne	$P \vee \mathcal{F}_0 \equiv P$ $P \wedge \mathcal{V}_0 \equiv P$
Inversos	Inv	$P \vee \neg P \equiv \mathcal{V}_0$ $P \wedge \neg P \equiv \mathcal{F}_0$
Dominación	Dom	$P \wedge \mathcal{F}_0 \equiv \mathcal{F}_0$ $P \vee \mathcal{V}_0 \equiv \mathcal{V}_0$
Absorción	Abs	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

Tabla 1.1: Leyes de la lógica.

De aquí es claro que la Ley de Exportación es una tautología.

Segunda forma: Consiste en utilizar las leyes de la lógica previas, tal y como se muestra

$$\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\equiv \neg P \vee (Q \to R) && \text{(ID)}\\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) && \text{(ID)}\\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R && \text{(Aso)}\\
&\equiv \neg(P \wedge Q) \vee R && \text{(DM)}\\
&\equiv (P \wedge Q) \to R && \text{(ID)}
\end{aligned}$$

lo que establece que $P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$. □

Observación: El ejemplo anterior muestra dos maneras para verificar que una proposición compuesta es una tautología. En particular, el uso de las leyes de la lógica permite reducir los procedimientos y en ocasiones simplificar proposiciones tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.16. Simplifique la proposición $[(\neg P \vee Q) \wedge P] \to Q$.

Solución. Aplicando las leyes de la lógica de la Tabla 1.1, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
[(\neg P \vee Q) \wedge P] \to Q &\equiv [P \wedge (\neg P \vee Q)] \to Q && \text{(Con)}\\
&\equiv [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)] \to Q && \text{(Dis)}\\
&\equiv [\mathcal{F}_0 \vee (P \wedge Q)] \to Q && \text{(Inv)}\\
&\equiv (P \wedge Q) \to Q && \text{(Con) y (Ne)}\\
&\equiv \neg (P \wedge Q) \vee Q && \text{(ID)}\\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee Q && \text{(DM)}\\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee Q) && \text{(Aso)}\\
&\equiv \neg P \vee \mathcal{V}_0 && \text{(Inv)}\\
&\equiv \mathcal{V}_0 && \text{(Dom)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se deduce que la proposición $[(\neg P \vee Q) \wedge P] \to Q$ posee el mismo valor de verdad de $\mathcal{V}_0$, lo que la convierte en una tautología. □

Observación: En general, es importante resaltar que los procedimientos que llevan a la respuesta correcta no son únicos. Al respecto, en el ejemplo anterior es posible realizar un procedimiento alternativo al aplicar otras leyes de la lógica, tal y como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
[(\neg P \vee Q) \wedge P] \to Q &\equiv \neg [(\neg P \vee Q) \wedge P] \vee Q && \text{(ID)}\\
&\equiv [\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg P] \vee Q && \text{(DM)}\\
&\equiv \neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) && \text{(Aso)}\\
&\equiv \mathcal{V}_0 && \text{(Inv)}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, simplificar una proposición no siempre permitirá deducir que esta es una tautología, sin embargo, permite obtener una proposición más reducida cuyo valor de verdad es el mismo del original, el cual puede ser determinado mediante tablas de verdad.

Ejemplo 1.17. Determine si la expresión:

$$[[Q \to (R \wedge S)] \vee \neg [Q \to (R \wedge S)]] \to P \tag{1.1}$$

representa una tautología, contradicción o contingencia.

Solución. Tal como se mostró en la Sección 1.2, se puede utilizar una tabla de verdad para clasificar la proposición (1.1) en tautología, contradicción o contingencia. Sin embargo, dicha tabla requeriría de $2^4 = 16$ filas, lo que sugiere un trabajo considerable. Por tal razón, antes de hacer una tabla de verdad primero se intenta simplificar la proposición dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& [[Q \to (R \wedge S)] \vee \neg [Q \to (R \wedge S)]] \to P & \\
\equiv\ & \neg [[Q \to (R \wedge S)] \vee \neg [Q \to (R \wedge S)]] \vee P & \text{(ID)} \\
\equiv\ & [\neg [Q \to (R \wedge S)] \wedge \neg\neg [Q \to (R \wedge S)]] \vee P & \text{(DM)} \\
\equiv\ & \mathcal{F}_0 \vee P & \text{(Inv)} \\
\equiv\ & P & \text{(Ne)}
\end{aligned}$$

Así, el valor de verdad (1.1) es el mismo que el de P, el cual posee dos posibilidades, y con ello se concluye que (1.1) es una contingencia. □

Ejemplo 1.18. Simplifique la expresión $\neg [(P \vee Q) \wedge \neg R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee \neg P]$.

Solución. Se sigue tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
& \neg [(P \vee Q) \wedge \neg R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee \neg P] & \\
\equiv\ & [\neg (P \vee Q) \vee \neg\neg R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee \neg P] & \text{(DM)} \\
\equiv\ & [(\neg P \wedge \neg Q) \vee R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee \neg P] & \text{(DM) y (DN)} \\
\equiv\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee \big[R \vee [(\neg Q \wedge R) \vee \neg P]\big] & \text{(Aso)} \\
\equiv\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee [(\neg Q \wedge R) \vee (\neg P \vee R)] & \text{(Con) y (Aso)} \\
\equiv\ & [(\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg Q)] \vee (\neg P \vee R) & \text{(Con) y (Aso)} \\
\equiv\ & [(\neg P \vee R) \wedge \neg Q)] \vee (\neg P \vee R) & \text{(Dis)} \\
\equiv\ & (\neg P \vee R) \vee [(\neg P \vee R) \wedge \neg Q)] & \text{(Con)} \\
\equiv\ & \neg P \vee R & \text{(Abs)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se llega a que $\neg [(P \vee Q) \wedge \neg R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee \neg P] \equiv \neg P \vee R$. □

Ejercicio 1.7. Dé las razones (leyes de la lógica) que justifican cada uno de los pasos realizados a continuación:

$$\begin{aligned}
(P \to Q) \wedge [\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)] \equiv\ & (P \to Q) \wedge \neg Q & (\qquad\quad) \\
\equiv\ & (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q & (\qquad\quad) \\
\equiv\ & \neg Q \wedge (\neg P \vee Q) & (\qquad\quad) \\
\equiv\ & (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q) & (\qquad\quad) \\
\equiv\ & (\neg Q \wedge \neg P) \vee \mathcal{F}_0 & (\qquad\quad) \\
\equiv\ & \neg Q \wedge \neg P & (\qquad\quad) \\
\equiv\ & \neg (Q \vee P) & (\qquad\quad)
\end{aligned}$$

Observación: Gracias a las leyes de asociatividad (Aso) y conmutatividad (Con), a partir de ahora expresiones de la forma $P \vee Q \vee R$ o $P \wedge Q \wedge R$ están bien definidas, debido a que cada par de proposiciones involucradas en ellas pueden asociarse en cualquier orden.

Ejercicio 1.8. Utilice las leyes de la lógica para verificar que la simplificación de

$$(P \wedge Q) \vee [P \wedge \neg (Q \wedge R)] \vee \neg (R \rightarrow \neg P)$$

corresponde a P.

Ejercicio 1.9. Determine si la expresión:

$$[\neg(\neg P \rightarrow R) \wedge (P \vee Q)] \wedge \neg(\neg Q \rightarrow \neg R)$$

representa una tautología, contradicción o contingencia.

Observación: Es importante resaltar que las leyes de la lógica de la Tabla 1.1 pueden usarse para obtener nuevas leyes. Por ejemplo, nótese que:

$$\begin{aligned} \neg(P \rightarrow Q) &\equiv \neg(\neg P \vee Q) && \text{(ID)} \\ &\equiv P \wedge \neg Q && \text{(DM) y (DN)} \end{aligned}$$

lo que establece que la negación del condicional $P \rightarrow Q$ corresponde a $P \wedge \neg Q$.

Ejercicio 1.10 (Doble distributividad). Demuestre las siguientes leyes:

a) $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \equiv (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$

b) $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S) \equiv (P \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$

1.4. Inferencias lógicas

La definición de condicional (ver Definición 1.6) establece que la proposición:

$$P \rightarrow Q$$

será verdadera cuando P es falsa (sin importar el valor de verdad de Q), o bien, cuando P y Q sean verdaderas. En otras palabras, para concluir que $P \rightarrow Q$ es verdadera, es suficiente suponer que P es verdadera y deducir que Q también lo es. Lo anterior constituye la razón de llamar a P *hipótesis*, y a Q *conclusión*. En general, siguiendo el mismo razonamiento previo, es posible concluir que la proposición compuesta:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q\,, \tag{1.2}$$

es verdadera, cuando las hipótesis $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se suponen verdaderas y se obtiene que Q también lo es.

La argumentación anterior se conoce como una *inferencia*. Más precisamente, la inferencia es un proceso de razonamiento lógico que consiste en deducir el valor de verdad de una conclusión, a partir de una o más hipótesis sujetas a un grupo de reglas de deducción (leyes de la lógica). Por otro lado, a una inferencia del tipo de (1.2) se denominará como *válida*, cuando esta corresponda a una tautología.

En resumen, el procedimiento para probar que la proposición (1.2) es válida consiste en suponer $P_1, \ldots, P_n$ verdaderas y utilizar las *inferencias lógicas* de la Tabla 1.2 para concluir Q. Por simplicidad, se esquematiza lo anterior como sigue:

$$\begin{array}{rl} & P_1 \\ & \vdots \\ & P_n \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

donde, el símbolo $\therefore$ denota la conclusión y se lee "por lo tanto".

Ejemplo 1.19. Demuestre $\neg S$ a partir de $P \wedge Q$, $P \to R$ y $S \to \neg R$.

Solución. Basta determinar la validez de la inferencia:

$$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ P \to R \\ S \to \neg R \\ \hline \therefore \neg S \end{array}$$

Para ello, se puede proceder de la siguiente manera:

Paso 1. Definir las hipótesis, las cuales se enumeran para facilitar su referencia:

1. $P \wedge Q$
2. $P \to R$
3. $S \to \neg R$

Paso 2. Notar de la conclusión que se requiere $\neg S$, donde la proposición S aparece únicamente en la hipótesis 3. Por ello, en virtud de (MT) es posible establecer $\neg S$ si se tiene R. Ahora para obtener R, se puede apreciar de la hipótesis 2 y (MP) que basta con tener P. Finalmente, de la hipótesis 1 y (Simp) se deduce P, concluyendo así lo deseado.

Paso 3. El análisis descrito en el Paso 2, se escribe de manera simplificada, tal y como se muestra:

1.	$P \wedge Q$	(Hip)
2.	$P \to R$	(Hip)
3.	$S \to \neg R$	(Hip)
4.	P	(Simp de 1)
5.	R	(MP de 2 y 4)
6.	$\neg S$	(MT de 3 y 5)

El esquema anterior permite seguir de manera sencilla, gracias a la numeración, el procedimiento realizado para validar la inferencia.

Suponiendo que las hipótesis (Hip) son verdaderas y aplicando las inferencias lógicas, se obtuvieron otras proposiciones verdaderas (numeradas del 4 al 6). En particular, se ha concluido $\neg S$, lo que garantiza la validez de la inferencia. □

Nombre	Abreviación	Inferencia
Simplificación	Simp	$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore\ P}$ o bien $\dfrac{P \wedge Q}{\therefore\ Q}$
Adjunción	Adj	$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline \therefore\ P \wedge Q \end{array}$
Adición	Adi	$\dfrac{P}{\therefore\ P \vee Q}$ (Q es una proposición cualquiera)
Modus ponens	MP	$\begin{array}{c} P \\ P \to Q \\ \hline \therefore\ Q \end{array}$
Modus tollens	MT	$\begin{array}{c} P \to Q \\ \neg Q \\ \hline \therefore\ \neg P \end{array}$
Silogismo disyuntivo	SD	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline \therefore\ Q \end{array}$
Silogismo hipotético	SH	$\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline \therefore\ P \to R \end{array}$
Dilema constructivo	DC	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \to R \\ Q \to S \\ \hline \therefore\ R \vee S \end{array}$
Dilema destructivo	DD	$\begin{array}{c} \neg R \vee \neg S \\ P \to R \\ Q \to S \\ \hline \therefore\ \neg P \vee \neg Q \end{array}$

Tabla 1.2: Inferencias lógicas.

Observación: El procedimiento mostrado en el ejemplo anterior permite apreciar de manera clara y simple, mediante un esquema jerárquico, las leyes e inferencias lógicas empleadas en cada paso. En cada línea numerada aparece la conclusión obtenida a través de la justificación que se presenta a su derecha. Es importante resaltar que en este escrito, y solo por conveniencia, todas las hipótesis deben ser utilizadas en al menos una ocasión.

Ejemplo 1.20. Demuestre S a partir de $R \to Q$, P, $\neg(P \wedge Q)$ y $R \vee S$.

Solución. Se desea establecer la validez de la inferencia:

$$\begin{array}{l} R \to Q \\ P \\ \neg(P \wedge Q) \\ R \vee S \\ \hline \therefore\ S \end{array}$$

así, utilizando las leyes de la lógica y las inferencias de la Tabla 1.2, tal y como se hizo en el Ejemplo 1.19, se sigue que:

1.	$R \to Q$	(Hip)
2.	P	(Hip)
3.	$\neg(P \wedge Q)$	(Hip)
4.	$R \vee S$	(Hip)
5.	$\neg P \vee \neg Q$	(DM de 3)
6.	$\neg Q$	(SD de 2 y 5)
7.	$\neg R$	(MT de 1 y 6)
8.	S	(SD de 4 y 7)

Por lo tanto, se ha obtenido S, lo cual concluye lo deseado. $\square$

Ejemplo 1.21. Deduzca $\neg T \vee S$ a partir de $P \to (Q \vee R)$, $Q \to R$, $P \vee S$ y $\neg R$.

Solución. Siguiendo los ejemplos anteriores, se debe establecer la validez de:

$$\begin{array}{l} P \to (Q \vee R) \\ Q \to R \\ P \vee S \\ \neg R \\ \hline \therefore\ \neg T \vee S \end{array}$$

Luego, dado que la conclusión es $\neg T \vee S$ y la proposición T no aparece en las hipótesis, entonces se debe obtener S para así utilizar (Adi) de $\neg T$. Ahora, como S solo aparece en la tercera hipótesis, se infiere que es necesario obtener $\neg P$ para deducir S a través de (SD). Así, dado que P se encuentra en la primera hipótesis, en virtud de (MT), se necesita $\neg(Q \vee R) \equiv (\neg Q \wedge \neg R)$, donde $\neg R$ se tiene de la cuarta hipótesis, la cual, a su vez, permite extraer $\neg Q$ de la segunda hipótesis al emplear (MT). Una vez concluido $\neg Q$, se utiliza (Adj) con $\neg R$ para concluir $\neg P$ y con ello validar la inferencia.

Lo anterior se resume a continuación:

1.	$P \to (Q \vee R)$	(Hip)
2.	$Q \to R$	(Hip)
3.	$P \vee S$	(Hip)
4.	$\neg R$	(Hip)
5.	$\neg Q$	(MT de 2 y 4)
6.	$\neg Q \wedge \neg R$	(Adj de 4 y 5)
7.	$\neg(Q \vee R)$	(DM de 6)
8.	$\neg P$	(MT de 1 y 7)
9.	S	(SD de 3 y 8)
10.	$S \vee \neg T$	(Adi de $\neg T$ a 9)
11.	$\neg T \vee S$	(Con de 10)

Por lo tanto, se demuestra $\neg T \vee S$ a partir de las hipótesis dadas. □

Ejemplo 1.22. Verifique la validez de la siguiente inferencia:

$$\begin{array}{l} P \to (R \vee S) \\ P \wedge Q \\ S \to R \\ \neg T \to \neg R \\ \hline \therefore\ T \wedge Q \end{array}$$

Solución. Siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores, se puede concluir $T \wedge Q$ y se tienen las proposiciones T y Q, por medio de (Adj). La Q se obtiene de la segunda hipótesis con ayuda de (Simp). Por otro lado, T se obtiene de (MT) en la cuarta hipótesis si se tiene R. Ahora, para obtener R, primero se simplifica P de la segunda hipótesis y se usa con (MP) en la primera para deducir $R \vee S$. Así, la R debe concluirse tanto de la hipótesis $S \to R$ como de la proposición $R \vee S \equiv \neg R \to S$. En efecto, empleando (SH) a $\neg R \to S$ y $S \to R$, se concluye $\neg R \to R \equiv R \vee R \equiv R$, lo que permite validar la inferencia.

El procedimiento anterior se resume como sigue:

1.	$P \to (R \vee S)$	(Hip)
2.	$P \wedge Q$	(Hip)
3.	$S \to R$	(Hip)
4.	$\neg T \to \neg R$	(Hip)
5.	P	(Simp de 2)
6.	$R \vee S$	(MP de 1 y 5)
7.	$\neg R \to S$	(ID de 6)
8.	$\neg R \to R$	(SH de 7 y 3)
9.	$R \vee R$	(ID y DN de 8)
10.	R	(Ide de 9)

11.	T	(MT de 4 y 10)
12.	Q	(Simp de 2)
13.	$T \wedge Q$	(Adj de 11 y 12)

Para finalizar, es importante notar que de $S \to R \equiv \neg S \vee R$ y $R \vee S$, se tiene por (Adj) y (Con) que $(R \vee \neg S) \wedge (R \vee S)$. Luego, por (Dis), (Inv) y (Ne) se concluye alternativamente R. □

Ejemplo 1.23. Muestre mediante leyes de inferencia y equivalencia, la siguiente inferencia:

$$\begin{array}{l} S \to \neg S \\ (\neg P \vee \neg Q) \vee S \\ (T \to P) \wedge (U \to Q) \\ \hline \therefore\ T \to \neg U \end{array}$$

Solución. De los ejemplos anteriores, se sigue que:

1.	$S \to \neg S$	(Hip)
2.	$(\neg P \vee \neg Q) \vee S$	(Hip)
3.	$(T \to P) \wedge (U \to Q)$	(Hip)
4.	$\neg S \vee \neg S$	(ID de 1)
5.	$\neg S$	(Ide de 4)
6.	$\neg P \vee \neg Q$	(SD y Con de 5 y 2)
7.	$T \to P$	(Simp de 3)
8.	$U \to Q$	(Simp de 3)
9.	$\neg T \vee \neg U$	(DD de 6, 7 y 8)
10.	$T \to \neg U$	(ID de 9)

Por lo tanto, se verifica la validez de la inferencia. □

Ejercicio 1.11. Deduzca $\neg Q$ a partir de $(\neg P \vee Q) \to R$, $R \to (S \vee T)$, $\neg S \wedge \neg U$ y $\neg U \to \neg T$.

Ejercicio 1.12. Verifique la validez de la siguiente inferencia:

$$\begin{array}{l} P \to (\neg R \vee U) \\ [U \to \neg(S \veebar T)] \to R \\ \neg(\neg Q \vee U) \\ \hline \therefore\ \neg P \end{array}$$

Ejercicio 1.13. Verifique la validez de la siguiente inferencia:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ (R \vee P) \to T \\ \neg T \\ S \to R \\ \hline \therefore \neg(Q \to S) \end{array}$$

Ejemplo 1.24. Utilizando proposiciones, escriba el siguiente enunciado en forma simbólica y demuestre la validez de la conclusión.

> Si no estudio esta noche, entonces iré a la fiesta de Carlos. Pero, no entiendo la materia. No pasaré el examen, si no entiendo la materia. No iré a la fiesta de Carlos o pasaré el examen. Por lo tanto, estudio esta noche.

Solución. Consideremos primero la siguiente notación:

P : Estudio esta noche.

Q : Iré a la fiesta de Carlos.

R : Entiendo la materia.

S : Pasaré el examen.

Ahora, el argumento se puede escribir de manera simbólica, tal y como sigue:

$$\begin{array}{l} \neg P \to Q \\ \neg R \\ \neg R \to \neg S \\ \neg Q \vee S \\ \hline \therefore P \end{array}$$

con el cual nótese que:

1.	$\neg P \to Q$	(Hip)
2.	$\neg R$	(Hip)
3.	$\neg R \to \neg S$	(Hip)
4.	$\neg Q \vee S$	(Hip)
5.	$\neg S$	(MP de 2 y 3)
6.	$\neg Q$	(SD de 4 y 5)
7.	$\neg\neg P$	(MT de 1 y 6)
8.	P	(DN de 7)

Por lo tanto, el argumento es válido. □

Observación: Del ejemplo anterior se puede apreciar que se ha introducido la palabra "pero", la cual tiene el mismo significado que la conjunción ($\wedge$).

Ejemplo 1.25. Utilizando proposiciones, escriba el siguiente enunciado en forma simbólica y demuestre la validez de la conclusión.

> Si llevo el automóvil al mecánico, me quedo sin este. Puedo llevar a mi novia de paseo solo si tengo el automóvil. Si no la llevo de paseo, ella se enfadará conmigo. Pero si no llevo el automóvil al mecánico, este me puede fallar. Si me falla el automóvil no puedo llevar a mi novia a pasear. Por lo tanto, mi novia se enfadará conmigo.

Solución. Definiendo las proposiciones simples:

P : Llevo el automóvil al mecánico.
Q : Tengo el automóvil.
R : Puedo llevar a mi novia de paseo.
S : Mi novia se enfadará conmigo.
T : El automóvil me fallará.

se puede simbolizar el problema de la forma:

$$\begin{array}{l} P \to \neg Q \\ R \to Q \\ \neg R \to S \\ \neg P \to T \\ T \to \neg R \\ \hline \therefore S \end{array}$$

Ahora, utilizando leyes e inferencias lógicas, observe que:

1. $P \to \neg Q$ (Hip)
2. $R \to Q$ (Hip)
3. $\neg R \to S$ (Hip)
4. $\neg P \to T$ (Hip)
5. $T \to \neg R$ (Hip)
6. $\neg T \to P$ (CP y DN de 4)
7. $\neg T \to \neg Q$ (SH de 1 y 6)
8. $T \vee \neg Q$ (ID y DN de 7)
9. $\neg Q \to \neg R$ (CP de 2)
10. $\neg R \vee \neg R$ (DC de 5, 8 y 9)
11. $\neg R$ (Ide de 10)
12. S (MP de 3 y 11)

lo que verifica la validez de la conclusión. □

Ejemplo 1.26. Escriba, utilizando proposiciones compuestas, el siguiente enunciado en forma simbólica. Además, construya una tabla de verdad y determine a qué tipo de proposición compuesta corresponde.

> Es falso que, estudiaré lógica solo si no estudio teoría de números. Pero, o estudio teoría de números o estudio funciones. En consecuencia, no estudio lógica es una condición necesaria para que no estudie funciones.

Solución. Introduciendo las proposiciones:

P : Estudiaré lógica.
Q : Estudiaré teoría de números.
R : Estudiaré funciones.

se simboliza el enunciado como sigue:

$$\begin{array}{rl} & \neg(P \to \neg Q) \\ & Q \veebar R \\ \hline \therefore & \neg R \to \neg P \end{array}$$

Luego, con el fin de construir una tabla de verdad, se reescribe la inferencia de la forma:

$$[\neg(P \to \neg Q) \wedge (Q \veebar R)] \to (\neg R \to \neg P),$$

y así se tiene que:

P	Q	R	$\neg Q$	(1) $P \to \neg Q$	(2) $\neg$(1)	(3) $Q \veebar R$	(4) (2) $\wedge$ (3)	$\neg R$	$\neg P$	(5) $\neg R \to \neg P$	(4) $\to$ (5)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Por lo tanto, la proposición compuesta es una contingencia. □

Ejercicio 1.14. Utilizando proposiciones, escriba el siguiente enunciado en forma simbólica y demuestre la validez de la conclusión.

> Si trabajo entonces tengo dinero. Si la empresa cierra, entonces no trabajo y no puedo pagar el apartamento. Si el gobierno no financia a la empresa entonces la empresa cierra. Trabajo. Por lo tanto, el gobierno financia a la empresa y tengo dinero.

Ejercicio 1.15. Demuestre $y = 7$ a partir de $y \neq 7 \to y - x \leq 5$, $y - x > 5 \vee 3x + y \geq 2$, $(x + y \leq 1 \vee x = -1) \to 3x + y < 2$, $x + y \leq 1 \wedge x + 2y \geq 0$.

Ejercicio 1.16. Utilizando proposiciones compuestas, simbolice el siguiente enunciado. Construya la tabla de verdad y determine a qué tipo de proposición corresponde.

> Voy al dentista o no me duele la muela. Y, si voy a trabajar no voy al dentista. Pero voy a trabajar. Por lo tanto, no me duele la muela.

1.5. Cuantificadores

Considere la siguiente proposición simple:

$$P : x^2 - 1 = 0 .$$

De ella se puede observar que cuando $x = 1$ se tiene que P es verdadera. Lo mismo ocurre si $x = -1$. Para cualquier otro valor de x, P sería falsa. En otras palabras, el valor de verdad de P depende del valor que se le asigne a x. Por tal razón, se suele escribir:

$$P(x) : x^2 - 1 = 0 ,$$

donde $P(x)$ resalta la dependencia de P sobre x.

Lo anterior sugiere que no es posible determinar el valor de verdad de P sin conocer o caracterizar el de x. Por ejemplo, si el conjunto al que pertenece x es $\{-1 , 1\}$ se tiene que P es verdadera, mientras que si es $\mathbb{R} \setminus \{-1 , 1\}$, P es falsa. En cualquier otro caso, P no es proposición, debido a que no satisface el principio del tercero excluido (ver Definición 1.1). A expresiones de este tipo, que dependen de una o más variables, se les denomina *proposiciones abiertas*.

Ahora, es usual tratar de cuantificar la cantidad de elementos que satisfacen o no una proposición abierta, produciendo que esta deje de ser abierta, sin la necesidad de mostrar explícitamente los valores de las variables que la hacen verdadera ó falsa. En el caso del ejemplo anterior, y en particular, esto se puede hacer de la forma:

$$Q : x^2 - 1 = 0 , \qquad \textbf{para todo } x \in \mathbb{R} ,$$

o bien,

$$R : x^2 - 1 = 0 , \qquad \textbf{para algún } x \in \mathbb{R} .$$

Nótese que al expresar el "para todo $x \in \mathbb{R}$" se hace referencia a cualquier elemento en $\mathbb{R}$. Asimismo, "para algún $x \in \mathbb{R}$" da a entender la consideración al menos de un elemento de $\mathbb{R}$. Con base en esto, se puede apreciar que Q y R no son proposiciones abiertas, debido a que Q es falsa y que R es verdadera.

1.6. Solución de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1 (página 18). *a*) Dado que $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ es indeterminado cuando su denominador es igual a cero, es que se deben eliminar los valores de $x \in \mathbb{R}$ que hacen que $x^2 - 4 = 0$, es decir, no debe ser considerado $x = -2$ ni $x = 2$. Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ y con ello la proposición es verdadera.

b) Es verdadera, debido a que el único número real que satisface $x^2 \leq 0$ es $x = 0$.

c) Es falsa. Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$, entonces se tiene que $(a+b)^2 = 3^2 = 9$, mientras que $a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$.

d) Dado que $2k$ es siempre par, cuando $k \in \mathbb{Z}$, que se deduce que $2k+1$ es siempre impar (le sigue a un par) y con ello la proposición es verdadera.

e) Es falsa. Basta considerar $a = 1$ y $b = 1$ y observar que $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ es distinto de $a+b = 2$. □

Ejercicio 1.2 (página 23). Dado que $(P \to \neg Q) \equiv \mathcal{F}$, entonces por la definición de $\to$, se tiene que P es verdadera y $\neg Q$ es falsa, es decir, $P \equiv \mathcal{V}$ y $Q \equiv \mathcal{V}$. Luego, sin importar los valores de verdad de R y S, lo anterior garantiza que $(\neg P \wedge R) \equiv \mathcal{F}$ y $Q \vee S \equiv \mathcal{V}$, con lo cual es simple verificar que

$$[Q \leftrightarrow (\neg P \wedge R)] \veebar [(Q \vee S) \wedge (Q \to \neg P)] \equiv \mathcal{F}.$$

□

Ejercicio 1.3 (página 23). Para que la expresión sea falsa necesariamente debe ocurrir que

$$\neg P \to Q \equiv \mathcal{V} \quad \text{y} \quad \neg\left[[P \to (R \vee S)] \wedge \neg[S \to (Q \vee T)]\right] \equiv \mathcal{F}. \tag{1.4}$$

De la segunda expresión se deduce que $[P \to (R \vee S)] \wedge \neg[S \to (Q \vee T)] \equiv \mathcal{V}$, con lo cual

$$P \to (R \vee S) \equiv \mathcal{V} \quad \text{y} \quad \neg[S \to (Q \vee T)] \equiv \mathcal{V}. \tag{1.5}$$

De nuevo de la segunda expresión se llega a $S \to (Q \vee T) \equiv \mathcal{F}$, de donde $S \equiv \mathcal{V}$ y $Q \vee T \equiv \mathcal{F}$, o equivalentemente, $S \equiv \mathcal{V}$, $Q \equiv \mathcal{F}$ y $T \equiv \mathcal{F}$. Utilizando ahora el hecho de que $Q \equiv \mathcal{F}$ en la primera expresión de (1.4) se obtiene que $P \equiv \mathcal{V}$. Así, usando esto en la primera expresión de (1.5) se tiene que $R \vee S \equiv \mathcal{V}$. Por último, usando que $S \equiv \mathcal{V}$ se concluye que R puede tener cualquier valor de verdad. En resumen: $P \equiv \mathcal{V}$, $Q \equiv \mathcal{F}$, R cualquier valor de verdad, $S \equiv \mathcal{V}$ y $T \equiv \mathcal{F}$. □

Ejercicio 1.4 (página 24). *a*) $(Q \wedge \neg R) \to P$ *b*) $Q \to (\neg R \to P)$ *c*) $\neg[P \leftrightarrow (R \vee Q)]$ *d*) $(R \wedge \neg Q) \to \neg P$ □

Ejercicio 1.5 (página 27). *a*) Se construye la tabla de verdad

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

y con ella se concluye que la proposición es una tautología.

b) De la tabla

P	Q	R	$Q \wedge P$	$\neg R$	(1) $(Q \wedge P) \to \neg R$	$\neg Q$	$P \to R$	(2) $\neg Q \vee (P \to R)$	$(1) \leftrightarrow (2)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

se deduce que la proposición es una contingencia.

c) Similarmente, se obtiene la tabla

P	Q	R	$Q \vee R$	(1) $P \to (Q \vee R)$	$P \to Q$	(2) $\neg(P \to Q)$	$\neg R$	(3) $(2) \wedge \neg R$	$(1) \wedge (3)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

y se concluye que la proposición corresponde a una falacia. □

Ejercicio 1.6 (página 28). *a*) Se debe verificar que $(P \veebar Q) \leftrightarrow \big[(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)\big]$ es una tautología. En efecto, basta considerar la tabla:

P	Q	$P \veebar Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	(1) $\neg(P \wedge Q)$	(2) $(P \vee Q) \wedge (1)$	$(P \veebar Q) \leftrightarrow (2)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

b) Similarmente, para mostrar que $(P \veebar Q) \leftrightarrow \big[(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)\big]$ es una tautología, se construye la tabla de verdad:

P	Q	$P \veebar Q$	$\neg Q$	(1) $P \wedge \neg Q$	$\neg P$	(2) $\neg P \wedge Q$	(3) $(1) \vee (2)$	$(P \veebar Q) \leftrightarrow (3)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

□

Ejercicio 1.7 (página 31). (Con y Abs), (ID), (Con), (Dis), (Inv), (Ne), (DM). □

Ejercicio 1.8 (página 32). Nótese que:

$$
\begin{array}{rll}
& (P \wedge Q) \vee [P \wedge \neg (Q \wedge R)] \vee \neg (R \rightarrow \neg P) & \\
\equiv & (P \wedge Q) \vee [P \wedge (\neg Q \vee \neg R)] \vee \neg (\neg R \vee \neg P) & \text{(DM) y (ID)} \\
\equiv & [(P \wedge Q) \vee [P \wedge (\neg Q \vee \neg R)]] \vee (R \wedge P) & \text{(Aso), (DM) y (DN)} \\
\equiv & [P \wedge [Q \vee (\neg Q \vee \neg R)]] \vee (R \wedge P) & \text{(Dis)} \\
\equiv & [P \wedge [(Q \vee \neg Q) \vee \neg R]] \vee (P \wedge R) & \text{(Aso) y (Con)} \\
\equiv & [P \wedge (\mathcal{V}_0 \vee \neg R)] \vee (P \wedge R) & \text{(Inv)} \\
\equiv & (P \wedge \mathcal{V}_0) \vee (P \wedge R) & \text{(Dom)} \\
\equiv & P \vee (P \wedge R) & \text{(Ne)} \\
\equiv & P & \text{(Abs)}
\end{array}
$$

Así, se deduce que $(P \wedge Q) \vee [P \wedge \neg (Q \wedge R)] \vee \neg (R \rightarrow \neg P) \equiv P$. □

Ejercicio 1.9 (página 32). Aplicando las leyes de la lógica se sigue que:

$$
\begin{array}{rll}
& [\neg (\neg P \rightarrow R) \wedge (P \vee Q)] \wedge \neg (\neg Q \rightarrow \neg R) & \\
\equiv & [\neg (P \vee R) \wedge (P \vee Q)] \wedge \neg (Q \vee \neg R) & \text{(ID) y (DN)} \\
\equiv & [(\neg P \wedge \neg R) \wedge (P \vee Q)] \wedge (\neg Q \wedge R) & \text{(DM) y (DN)} \\
\equiv & [\neg P \wedge (P \vee Q)] \wedge [(\neg R \wedge R) \wedge \neg Q] & \text{(Con) y (Aso)} \\
\equiv & [\neg P \wedge (P \vee Q)] \wedge (\mathcal{F}_0 \wedge \neg Q) & \text{(Inv)} \\
\equiv & [\neg P \wedge (P \vee Q)] \wedge \mathcal{F}_0 & \text{(Dom)} \\
\equiv & \mathcal{F}_0 & \text{(Dom)}
\end{array}
$$

Por lo tanto, la proposición corresponde a una falacia o contradicción. □

Ejercicio 1.10 (página 32). *a*) Si sigue que:

$$
\begin{array}{rcll}
(P \vee Q) \wedge (R \vee S) & \equiv & [(P \vee Q) \wedge R] \vee [(P \vee Q) \wedge S] & \text{(Dis)} \\
& \equiv & [R \wedge (P \vee Q)] \vee [S \wedge (P \vee Q)] & \text{(Con)} \\
& \equiv & [(R \wedge P) \vee (R \wedge Q)] \vee [(S \wedge P) \vee (S \wedge Q)] & \text{(Dis)} \\
& \equiv & (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S) & \text{(Con) y (Aso)}
\end{array}
$$

b) Similar a la parte *a*), intercambiando $\wedge$ y $\vee$. □

Ejercicio 1.11 (página 37).

1.	$(\neg P \vee Q) \rightarrow R$	(Hip)
2.	$R \rightarrow (S \vee T)$	(Hip)
3.	$\neg S \wedge \neg U$	(Hip)
4.	$\neg U \rightarrow \neg T$	(Hip)
5.	$\neg U$	(Simp de 3)
6.	$\neg T$	(MP de 4 y 5)
7.	$\neg S$	(Simp de 3)
8.	$\neg S \wedge \neg T$	(Adj de 6 y 7)
9.	$\neg (S \vee T)$	(DM de 8)
10.	$\neg R$	(MT de 2 y 9)
11.	$\neg(\neg P \vee Q)$	(MT de 1 y 10)
12.	$P \wedge \neg Q$	(DM y DN de 11)
13.	$\neg Q$	(Simp de 12)

□

Ejercicio 1.12 (página 37).

1.	$P \rightarrow (\neg R \vee U)$	(Hip)
2.	$[U \rightarrow \neg (S \veebar T)] \rightarrow R$	(Hip)
3.	$\neg(\neg Q \vee U)$	(Hip)
4.	$Q \wedge \neg U$	(DM y DN de 3)
5.	$\neg U$	(Simp de 4)
6.	$\neg U \vee \neg (S \veebar T)$	(Adi de $\neg (S \veebar T)$ a 5)
7.	$U \rightarrow \neg (S \veebar T)$	(ID de 6)
8.	R	(MP de 2 y 7)
9.	$R \wedge \neg U$	(Adj de 5 y 8)
10.	$\neg(\neg R \vee U)$	(DM de 9)
11.	$\neg P$	(MT de 1 y 10)

□

Ejercicio 1.13 (página 38).

1.	$P \vee Q$	(Hip)
2.	$(R \vee P) \rightarrow T$	(Hip)
3.	$\neg T$	(Hip)
4.	$S \rightarrow R$	(Hip)
5.	$\neg (R \vee P)$	(MT de 2 y 3)
6.	$\neg R \wedge \neg P$	(DM de 5)
7.	$\neg P$	(Simp de 6)
8.	Q	(SD de 1 y 7)
9.	$\neg R$	(Simp de 6)

10.	$\neg S$	(MT de 4 y 9)
11.	$\neg S \wedge Q$	(Adj de 8 y 10)
12.	$\neg(S \vee \neg Q)$	(DM y DN de 11)
13.	$\neg(\neg Q \vee S)$	(Con de 12)
14.	$\neg(Q \to S)$	(ID de 13)

Ejercicio 1.14 (página 40). Primero se definen las proposiciones simples:

P : Trabajo.
Q : Tengo dinero.
R : La empresa cierra.
S : Puedo pagar el apartamento.
T : El gobierno financia a la empresa.

Luego, el enunciado se simboliza como sigue:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to (\neg P \wedge \neg S) \\ \neg T \to R \\ P \\ \hline \therefore T \wedge Q \end{array}$$

Y con ello, nótese que:

1.	$P \to Q$	(Hip)
2.	$R \to (\neg P \wedge \neg S)$	(Hip)
3.	$\neg T \to R$	(Hip)
4.	P	(Hip)
5.	Q	(MP de 1 y 4)
6.	$\neg(\neg P \wedge \neg S) \to \neg R$	(CP de 2)
7.	$(P \vee S) \to \neg R$	(DM y DN de 6)
8.	$P \vee S$	(Adi de S a 4)
9.	$\neg R$	(MP de 7 y 8)
10.	$\neg\neg T$	(MT de 3 y 9)
11.	T	(DM de 10)
12.	$T \wedge Q$	(Adj de 5 y 11)

de donde se concluye lo deseado.

Ejercicio 1.15 (página 41). Definiendo las proposiciones:

$P : y = 7$	$S : x + y \leq 1$
$Q : y - x \leq 5$	$T : x = -1$
$R : 3x + y \geq 2$	$U : x + 2y \geq 0$

se sigue que:

1.	$\neg P \to Q$	(Hip)
2.	$\neg Q \vee R$	(Hip)
3.	$(S \vee T) \to \neg R$	(Hip)
4.	$S \wedge U$	(Hip)
5.	S	(Simp de 4)
6.	$S \vee T$	(Adi de T a 5)
7.	$\neg R$	(MP de 3 y 6)
8.	$\neg Q$	(SD de 2 y 7)
9.	$\neg\neg P$	(MT de 1 y 8)
10.	P	(DN de 9)

lo cual establece P y concluye la demostración. □

Ejercicio 1.16 (página 41). Considerando las proposiciones:

P : Voy al dentista.
Q : Me duele la muela.
R : Voy a trabajar.

se puede simbolizar el enunciado como:

$$\begin{array}{c} P \vee \neg Q \\ R \to \neg P \\ R \\ \hline \therefore \neg Q \end{array}$$

o bien, dado que se desea construir una tabla de verdad, de la forma alternativa:

$$[(P \vee \neg Q) \wedge (R \to \neg P) \wedge R] \to \neg Q\,.$$

Así, la tabla de verdad viene dada por:

P	Q	R	$\neg Q$	(1) $P \vee \neg Q$	$\neg P$	(2) $R \to \neg P$	(3) (1) $\wedge$ (2)	(4) (3) $\wedge R$	(4) $\to \neg Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

de donde es claro que la proposición es una tautología. □

1.7. Ejercicios

1.1 Si se sabe que P y Q son verdaderas, y R es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $P \vee Q$

b) $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$

c) $(P \wedge Q) \vee R$

d) $\neg (P \vee R) \rightarrow Q$

e) $P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

f) $(P \veebar R) \wedge Q$

1.2 Determine valores de verdad para P, Q, R y S para que la proposición $(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)$ sea falsa.

1.3 Determine valores de verdad para P, Q y R para que la proposición

$$\neg(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow [(R \wedge P) \vee Q]$$

sea falsa.

1.4 Si se sabe que la proposición $P \rightarrow Q$ es falsa, determine el valor de verdad de la proposición

$$\neg (P \vee Q) \wedge (Q \wedge P).$$

1.5 Sean P y Q proposiciones cualesquiera. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow \neg (P \wedge Q)$, cuando $P \leftrightarrow Q$ es falsa.

b) $\neg (P \rightarrow Q) \vee \neg(\neg P \veebar Q)$, cuando $P \leftrightarrow Q$ es verdadera.

1.6 Sean P, Q, R y S proposiciones arbitrarias. Si $P \veebar Q$ es verdadera, entonces determine qué condiciones deben satisfacer R y S, para que la proposición compuesta:

$$(P \wedge Q) \vee [(P \vee Q) \rightarrow (R \leftrightarrow S)]$$

sea verdadera.

1.7 Determine valores de verdad para las proposiciones P, Q, R, S y T de modo que la proposición:

$$[(\neg S \veebar T) \rightarrow \neg R] \leftrightarrow [(R \vee Q) \wedge P]$$

no implique tautológicamente a $P \vee (R \rightarrow S)$.

1.8 Utilizando tablas de verdad, clasifique las siguientes proposiciones en tautología, contradicción o contingencia.

a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow (Q \vee \neg P)$

b) $(P \rightarrow Q) \veebar (\neg P \vee Q)$

c) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

d) $[(P \wedge Q) \rightarrow \neg R] \leftrightarrow [\neg (P \wedge Q) \vee \neg R]$

e) $[P \rightarrow (Q \vee R)] \leftrightarrow (\neg P \wedge R)$

f) $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$

g) $[P \wedge (Q \wedge R)] \rightarrow (\neg P \veebar R)$

h) $\neg (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q)]$

i) $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge \neg R$

j) $[(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)] \rightarrow (Q \vee R)$

1.9 Determine mediante una tabla de verdad si la proposición $(P \veebar Q) \to R$ es tautológicamente equivalente a $(P \leftrightarrow Q) \vee R$.

1.10 Empleando las leyes de la lógica, demuestre las siguientes equivalencias:

a) $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$

b) $(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \wedge Q) \equiv Q \to P$

c) $[P \vee (Q \wedge R)] \vee (\neg Q \wedge R) \equiv R \vee P$

d) $(P \vee Q) \to R \equiv (P \to R) \wedge (Q \to R)$

e) $P \to (Q \vee R) \equiv (P \to Q) \vee (P \to R)$

f) $[(P \vee Q) \wedge (P \to \neg R) \wedge R] \to Q \equiv \mathcal{V}_0$

g) $\neg\left[(P \vee \neg Q) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\right] \equiv \neg P \wedge Q$

h) $[(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q)] \vee \left[\neg [Q \wedge (R \vee Q)] \wedge (P \vee \neg Q)\right] \equiv P \vee \neg Q$

i) $[(P \vee Q) \wedge (P \to \neg R) \wedge R] \to Q \equiv \mathcal{V}_0$

j) $\neg\left[(\neg Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\right] \equiv \neg P \wedge Q$

1.11 Simplifique cada una de las siguientes expresiones, haciendo uso de las leyes de la lógica. Indique la ley que utiliza en cada paso.

a) $(\neg P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)$

b) $\neg(P \veebar Q) \to (P \vee \neg Q)$

c) $Q \wedge [(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q)]$

d) $[(P \to Q) \wedge \neg Q] \to \neg P$

e) $\neg\left[\neg[(P \vee Q) \wedge R] \vee \neg Q\right]$

f) $\neg[(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P)] \wedge (\neg Q \vee R)$

g) $\neg\left[\neg[(\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \vee (S \wedge R)] \vee (Q \wedge P)\right]$

h) $Q \vee \neg\left[\neg[((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee Q] \wedge P\right]$

i) $(P \to \neg Q) \wedge \left[[\neg(R \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\right]$

j) $Q \vee \neg\left[[\neg((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \vee \neg Q] \wedge P\right]$

k) $\neg P \wedge \left[[\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee Q] \wedge \neg P\right]$

1.12 En los siguientes procedimientos, indique las leyes de la lógica que justifican cada uno de los pasos realizados.

a)

$$\begin{array}{lll}
 & \neg\left[(\neg Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\right] & \\
\equiv & \neg(\neg Q \vee P) \vee \neg\neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)] & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (Q \wedge \neg P) \vee [(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)] & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (Q \wedge \neg P) \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge [R \wedge (P \vee R)]] & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (Q \wedge \neg P) \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge R] & (\qquad\qquad) \\
\equiv & (\neg P \wedge Q) \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge R] & (\qquad\qquad) \\
\equiv & \neg P \wedge Q & (\qquad\qquad) \\
 & & (\qquad\qquad)
\end{array}$$

b)
$$\begin{aligned}
& \neg\,[P\wedge\neg\,(Q\wedge R)]\wedge(Q\to\neg\,P) && \\
\equiv\ & [\neg\,P\vee\neg\,\neg\,(Q\wedge R)]\wedge(\neg\,Q\vee\neg\,P) && (\qquad) \\
\equiv\ & [\neg\,P\vee(Q\wedge R)]\wedge(\neg\,Q\vee\neg\,P) && (\qquad) \\
\equiv\ & [\neg\,P\vee(Q\wedge R)]\wedge(\neg\,P\vee\neg\,Q) && (\qquad) \\
\equiv\ & \neg\,P\vee[(Q\wedge R)\wedge\neg\,Q] && (\qquad) \\
\equiv\ & \neg\,P\vee[(R\wedge Q)\wedge\neg\,Q] && (\qquad) \\
\equiv\ & \neg\,P\vee[R\wedge(Q\wedge\neg\,Q)] && (\qquad) \\
\equiv\ & \neg\,P\vee(R\wedge\mathcal{F}_0) && (\qquad) \\
\equiv\ & \neg\,P\vee\mathcal{F}_0 && (\qquad) \\
\equiv\ & \neg\,P && (\qquad)
\end{aligned}$$

1.13 Dadas las siguientes proposiciones, indague si es una tautología, contradicción o contingencia.

a) $(P\wedge\neg\,Q)\wedge(\neg\,P\vee Q)\wedge R$

b) $(P\wedge Q)\vee[\neg\,P\vee(P\wedge\neg\,Q)]\vee R$

c) $(P\veebar Q)\leftrightarrow[(P\wedge\neg\,Q)\vee(\neg\,P\wedge Q)]$

d) $[(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)]\to(P\leftrightarrow Q)$

e) $[P\to(Q\to R)]\leftrightarrow[(P\wedge Q)\to R]$

f) $[(\neg\,P\wedge Q)\wedge(Q\vee R)]\wedge\neg\,(\neg\,Q\to\neg\,R)$

1.14 Establezca la validez del dilema constructivo y destructivo presentados en la Tabla 1.2. Para ello utilice las inferencias previas a ellas dadas en la misma tabla.

1.15 En cada una de las siguientes proposiciones, utilice las leyes de inferencia y de la lógica para obtener la conclusión indicada a partir de las premisas dadas. Justifique cada paso.

a) Pruebe R a partir de $P\to Q$, $\neg\,Q$ y $\neg\,P\to R$.

b) Deduzca T a partir de $(P\vee Q)\to R$, $(R\vee S)\to T$, $S\vee P$ y $\neg\,S$.

c) Demuestre P a partir de $(\neg\,P\vee\neg\,Q)\to(R\wedge S)$, $R\to T$ y $\neg\,T$.

d) Demuestre $\neg\,T$ a partir de $P\to S$, $P\wedge Q$, $(S\wedge R)\to\neg\,T$ y $Q\to R$.

e) Deduzca $(S\wedge P)\vee(Q\veebar R)$ a partir de $P\to(Q\wedge R)$, P, $T\to\neg\,Q$ y $T\vee S$.

f) Obtenga $\neg\,P$ a partir de $\neg\,(P\wedge Q)$, $\neg\,Q\to R$, $S\to\neg\,R$ y $\neg\,S\to\neg\,(\neg\,P\vee\neg\,Q)$.

g) Pruebe U a partir de $(P\to Q)\to R$, $(S\vee T)\to U$, $\neg\,R\vee S$ y $\neg\,(\neg\,Q\wedge P)$.

h) Deduzca $Q\vee U$ a partir de $P\to Q$, $R\to P$, $\neg\,R\to\neg\,T$, $\neg\,(S\wedge\neg\,R)$ y $T\vee S$.

i) Demuestre T a partir de $(P\vee Q)\wedge(\neg\,R\vee\neg\,P)$, $S\to R$, $T\vee S$ y $R\to\neg\,Q$.

j) Demuestre $\mathcal{F}_0$ a partir de $(P\vee Q)\vee(Q\wedge S)$, $(R\vee P)\to(Q\wedge S)$, $\neg\,(Q\wedge S)$ y $\neg\,Q$.

k) Demuestre $y>z$ a partir de $(x=y)\to(x=z)$, $(x\neq y)\to(x<z)$, $(x\geq z)\vee(y>z)$ y $(y\neq z)\wedge x\neq z$.

l) Muestre $x=7$ a partir de $(3x-2y=23)\wedge(x+4y=16)$, $(x=-1)\to(3x-2y\neq 23)$, $(x=-1)\vee(y=4)$ y $(x\neq 7)\to(y\neq 4)$.

1.16 Verifique la validez de las siguientes inferencias:

a)
$$\begin{array}{l} P \\ P \to \neg Q \\ R \vee Q \\ \hline \therefore\ R \wedge P \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \neg P \vee Q \\ \neg R \to (S \to T) \\ (R \vee P) \vee S \\ \neg R \\ \hline \therefore\ \neg T \to (\neg Q \to U) \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ (R \vee P) \to T \\ \neg T \\ S \to R \\ \hline \therefore\ \neg (Q \to S) \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} R \\ (R \vee Q) \to (P \vee S) \\ \neg S \wedge T \\ P \to U \\ \hline \therefore\ U \wedge T \end{array}$$

1.17 En los siguientes procedimientos, indique las leyes de la lógica e inferencias que justifican cada uno de los pasos realizados.

a)

1.	$(\neg P \vee \neg Q) \to (R \wedge S)$	(Hipótesis)
2.	$R \to T$	(Hipótesis)
3.	$\neg T$	(Hipótesis)
4.	$\neg R$	( )
5.	$\neg R \vee \neg S$	( )
6.	$\neg (R \wedge S)$	( )
7.	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	( )
8.	$P \wedge Q$	( )
9.	P	( )

b)

1.	$(\neg P \vee Q) \to R$	(Hipótesis)
2.	$R \to (S \vee T)$	(Hipótesis)
3.	$\neg S \wedge \neg U$	(Hipótesis)
4.	$\neg U \to \neg T$	(Hipótesis)
5.	$\neg U$	( )
6.	$\neg T$	( )
7.	$\neg S$	( )
8.	$\neg S \wedge \neg T$	( )
9.	$\neg (S \vee T)$	( )
10.	$\neg R$	( )
11.	$\neg(\neg P \vee Q)$	( )
12.	$P \wedge \neg Q$	( )
13.	P	( )

1.18 En cada uno de los siguientes enunciados, simbolice las proposiciones involucradas y demuestre la validez de la conclusión utilizando inferencias lógicas.

a) Voy al dentista o no me duele la muela. No voy al dentista si voy a trabajar. Pero voy a trabajar. Por lo tanto, no me duele la muela.

b) Si Antonio matricula el curso de verano entonces María podrá irse de vacaciones. Si María se va de vacaciones entonces Antonio deberá hacerse cargo de la limpieza de la casa y Luis deberá hacerse cargo de las compras del mes. Antonio no se hizo cargo de la limpieza de la casa o Karen no acompañó a María en el viaje o José llegó de visita sin avisar. Antonio matriculó el curso de verano y Karen acompañó a María en el viaje. Por lo tanto, José llegó de visita sin avisar.

c) Los salarios son bajos o viajo a Guanacaste en auto, siempre que se retiran las empresas generadoras de empleo en Costa Rica. No se retirarán las empresas generadoras de empleo en Costa Rica si los salarios son bajos. Si la gasolina aumenta de precio, entonces no viajo en auto a Guanacaste. Se retiran las empresas generadoras de empleo en Costa Rica. En consecuencia, la gasolina disminuye de precio o no existe ley contra el maltrato animal.

d) Si el carro no se acelera, entonces este no correrá. Si no se frena, entonces no se detendrá. Si el carro no corre o no se detiene, entonces está fallando. En conclusión, si el carro no está fallando, entonces se puede acelerar y frenar.

e) Quiero aprender matemáticas o quiero trabajar como profesor. Si quiero aprender matemáticas, entonces voy a organizar mis prioridades. No tengo dinero. Si voy a organizar mis prioridades o quiero trabajar como profesor, entonces voy a estudiar hoy. Si voy a salir esta noche, entonces tengo dinero. Por lo tanto, no voy a salir esta noche y voy a estudiar hoy.

f) Si Carlos invierte su capital en el banco, entonces ganará intereses o iniciará un nuevo negocio. Iniciará un nuevo negocio, si gana intereses. Él invirtió su capital en el banco o lo apostó en el casino. No inició un nuevo negocio. Por lo tanto, no se asesoró de un economista o apostó en el casino.

g) Voy de paseo con mi familia. Si no pido vacaciones no iré de paseo con mi familia. El viaje es a Guanacaste o a Limón. Pero, el viaje no será a Guanacaste y será de una semana. Por lo tanto, pido vacaciones y el viaje es a Limón.

h) Si no trabajo o tengo dinero, entonces voy de paseo. Si voy de paseo entonces, obtengo una beca o estudio. No estudio y no voy a España. Si no voy a España entonces no obtengo la beca. Por lo tanto, no obtengo dinero.

i) Si no cambio mi rutina entonces mi esposa me dejará. Mi esposa me dejará o buscaré otro empleo. Si cambio mi rutina y busco empleo entonces mis hijos me apreciarán. No es cierto que: mi esposa me dejará y no quiero irme de fiesta el fin de semana. No me iré de fiesta el fin de semana. Por lo tanto, mis hijos me apreciarán.

j) Si no matriculo el curso de Lógica entonces gano los otros cursos matriculados. Gano los otros cursos matriculados o cambio de carrera. Si matriculo Lógica y cambio de carrera entonces no me he decidido. No es cierto que: gano los otros cursos matriculados y no quiero estudiar Matemática. No quiero estudiar Matemática. Por lo tanto, no me he decidido.

k) Estudiar para el examen de Matemática y no salir el viernes con mis amigos son condiciones suficientes para que mi padre me permita ir al partido el domingo. Si no estudio para el examen de Matemática entonces mi madre me reclamará. No es cierto que mi madre me reclamará y que no saldré el viernes con mis amigos. No saldré el viernes con mis amigos. Por lo tanto, mi padre me permitirá ir al partido el domingo o mi madre me reclamará.

1.19 Simbolice las siguientes proposiciones, y determine su valor de verdad.

a) Todo entero con un cuadrado impar es impar.

b) Todo entero con un cuadrado par es par.

c) Existen algunos enteros cuyos cuadrados son primos.

d) Para cualquier número real a y cualquier número real b mayor que a. Se cumple que el promedio de a y b se encuentra entre a y b.

e) Todo número entero tiene un divisor primo.

f) Para todo número real x, si $x^2 - 10x + 21 = 0$, entonces x es positivo.

g) Para todo número real x, si $|x-3| < 7$, entonces $-4 < x < 10$.

h) Existen dos números naturales cuyo producto es un valor entre 5 y 7.

1.20 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones con cuantificadores. En caso de ser falsas, escriba su negación.

a) $(\forall\, x \leq 0)\,(\exists\, y \in \mathbb{R})\,\big[(xy = 2) \vee (y \geq 1)\big]$

b) $(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,(\exists\, y \in \mathbb{R})\,\big[xy = -5 \veebar |y| < |x|\big]$

c) $(\forall\, n \in \mathbb{Z})\,(\exists\, m \in \mathbb{Z})\,\big[n^2 < m\big]$

d) $(\exists\, n \in \mathbb{Z})\,(\exists\, m \in \mathbb{Z})\,\big[(n+m=4) \wedge (n-m=2)\big]$

e) $(\forall\, x \in]0,+\infty[)\,(\exists\, r \in \mathbb{Z})\,\big[r = 3x+5\big]$

f) $(\exists\, y \in \mathbb{Z} \cap]0,+\infty[)\,(\forall\, x \in \mathbb{Z} \cap]0,+\infty[)\,\big[x-1 \leq y\big]$

g) $(\forall\, y \in \mathbb{Z} \cap]0,+\infty[)\,(\exists\, x \in \mathbb{Z} \cap]0,+\infty[)\,\big[x-1 \leq y\big]$

1.21 Considere $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, así como las proposiciones abiertas:

$$P(x) : x+3 \text{ es positivo.}$$
$$Q(x) : x^2+1 \text{ es un número impar.}$$

Determine el valor de verdad de las proposiciones:

a) $(\forall\, x \in \mathbb{Z})\big[x \in A \to Q(2x)\big] \wedge (\exists\, x \in \mathbb{Z})\big[x \in A \wedge P(-2-x^2)\big]$

b) $(\forall\, x \in \mathbb{Z})(\exists\, y \in \mathbb{Z})\big[x \in A \to \big(P(x) \veebar Q(x+y)\big)\big]$

1.22 Para $x \in \mathbb{Z}$ considere las siguientes proposiciones abiertas:

$$P(x) : 0 \leq x < 10$$
$$Q(x) : x \text{ es impar}$$
$$R(x) : x \text{ es primo}$$
$$S(x) : 2x+1 \text{ es divisible por } 3$$
$$T(x) : x \text{ es múltiplo de } 4$$

Determine y justifique el valor de verdad de las siguientes proposiciones: