Probabilidades-II 2024

Distribuciones Continuas de Probabilidad

(Definición y propiedades)

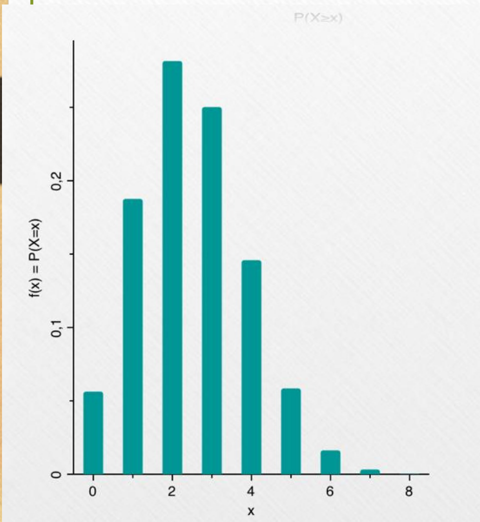
Proverbios 14:12

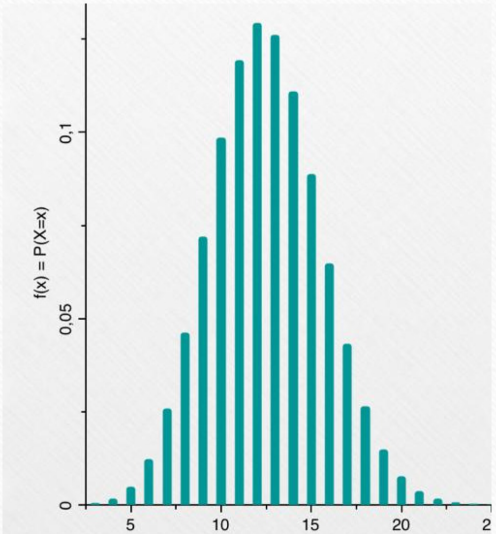
El paso al continuo….

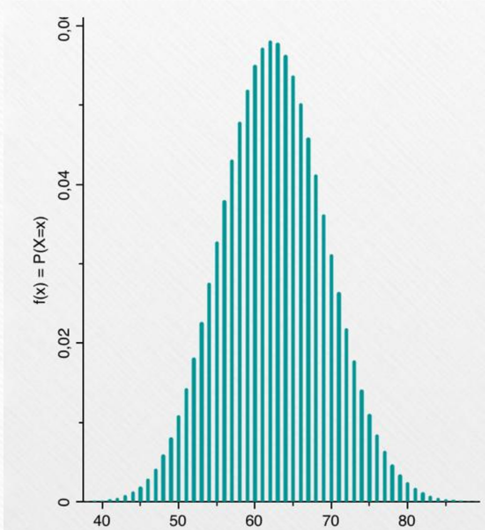
Considere una variable aleatoria X de modo que $X \sim b(x; 10{,}0.25)$

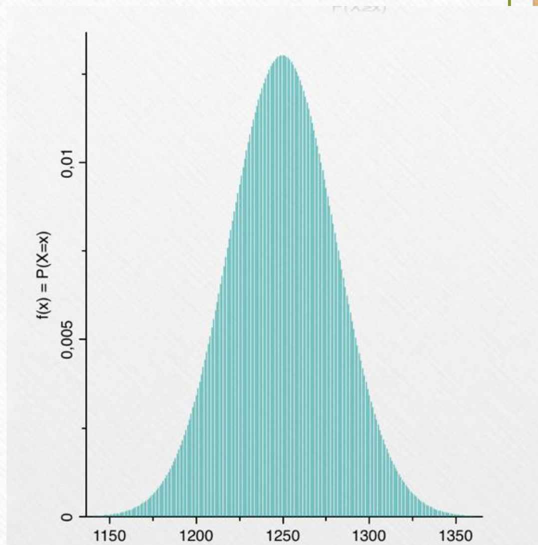
1. Utilice la aplicación *Probability Distributions* para hacer una gráfica de esta distribución de probabilidad.
2. Repite el paso 1 pero ahora con n = 50.
3. Repite el paso 1 pero ahora con n = 250.
4. Repite el paso 1 pero ahora con n = 5000.
5. ¿Qué conclusiones puedes inferir?

El paso al continuo….









Distribuciones Continuas

Las integrales las interpretaremos como áreas entre la curva y el eje de abscisas

Si X es una variable aleatoria continua una distribución de probabilidad para X es una función f_X que cumple las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0 \; \forall x$.
2. Si $a < b$ se tiene $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a),$$
$$P[X = b] = 0.$$

Además se define la función de distribución acumulada por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Ejercicios

Una persona recibe un tratamiento, una pastilla por ejemplo. Por muchos años de estudio y estadísticas se sabe que el tiempo que tarda un persona en reaccionar es una variable aleatoria, en minutos, cuya distribución de probabilidad de de la forma $f_X(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 1$ y 0 en cualquier otro caso.

a) ¿Es correcta la distribución de probabilidad enunciada anteriormente?

b) Determine la probabilidad de que una persona elegida al azar reaccione antes de dos horas.

Media y Varianza

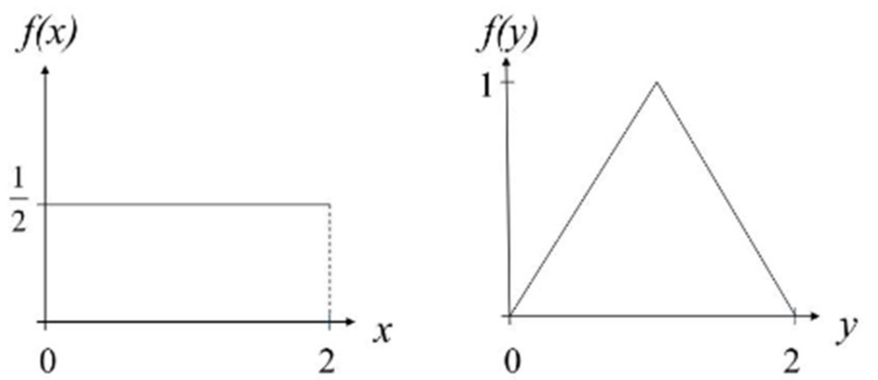
Variable aleatoria discreta	Variable aleatoria continua
$\mu = \sum x_i . p_i$	$\mu = \int_a^b x.f(x).dx$
$\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$	$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx - \mu^2$

Las propiedades sobre la esperanza y varianza estudiadas en el caso discreto son válidas también para distribuciones de probabilidad continuas.

Ejemplo

Si X es una v.a.c tal que $f_X(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$. Determine el valor de k.

¿Cuál variable aleatoria, X o Y, tiene menor varianza?



Función Generadora de Momentos

Si X es una variable aleatoria continua se llama función generadora de momentos a la esperanza de e^{tX} y se denota por $m_X(t)$, es decir:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)\,dx. \tag{4}$$

Si X es una variable aleatoria con función generadora de momentos $m_X(t)$ se tiene que

$$m_X^{(n)}(0) = E(X^n). \tag{5}$$

Ejercicios

Considere una variable X cuya distribución de probabilidad tiene la forma:

$$g(x) = \begin{cases} cx(25-x) & \text{si } x \in (0,25) \\ 0 & x \text{ en otros casos} \end{cases}$$

- Calcule el valor de c $\quad c = \frac{6}{25^3}$
- Determine la distribución acumulada para X $\quad \frac{6}{25^3}\left(\frac{25}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$
- Se sabe que $P(X < \omega) = \frac{1}{2}$ determine el valor de ω $\quad w = \frac{25}{2}$
- Determine $P(5 \leq X < 10)$ $\quad$ 0,248

Ejercicios

Calcule, en cada caso, el valor de la constante y la esperanza de la variable.

$$k_X(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{e^{3t}} & si\ t \geq 3 \\ 0 & cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

$a = 3e^9$

$\mu_X = \frac{10}{3}$

Gracias por su
amable atención!!