Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Primer examen parcial
I semestre - 2023

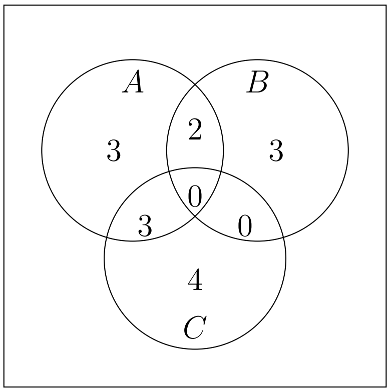
Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

---

1. [**3 puntos**] En un grupo de Probabilidades se realizó una encuesta sobre los dispositivos que usan los estudiantes para jugar videojuegos. A 8 personas les gusta jugar en consola, a 5 les gusta jugar en PC y a 7 les gusta jugar en celular. Se descubrió que no hay estudiantes que les guste jugar en PC y celular. Solo hay 2 que les gusta jugar en consola y PC. Además, a 3 les gusta jugar en consola y celular. ¿Cuántos estudiantes respondieron en la encuesta que les gusta jugar en alguno de los tres dispositivos mencionados?

   Solución.

   Tomando A como el conjunto de los estudiantes que les gusta jugar en consola, B como el conjunto de los que les gusta jugar en PC y C como el conjunto de los estudiantes que les gusta jugar en celular, se tiene que $|A| = 8$, $|B| = 5$, $|C| = 7$, $|B \cap C| = 0$, $|A \cap B| = 2$ y $|A \cap C| = 3$.



   Por lo tanto, 15 estudiantes respondieron en la encuesta que les gusta jugar en alguno de los tres dispositivos mencionados.

2. [**3 puntos**] Cierto día, las personas que ingresan a una atracción de la feria obtienen un boleto para sortear 6 camisetas, todas distintas, y 4 llaveros de colección, todos iguales. Ese día solo se registraron 6 participantes. Determine el total de formas en que puede quedar la distribución si cada persona recibe una camiseta, y los llaveros se reparten sin ninguna restricción.

   Solución.

Este ejercicio se divide en etapas. La primera consiste en repartir las camisetas. Como cada persona recibe una, y solo hay 6, entonces hay $6! = 720$ posibilidades de repartirlas. En la segunda etapa se reparten los llaveros sin restricción, por lo que se tienen $\binom{4+6-1}{4} = 126$. posibilidades de repartirlos. Al final, se tiene que hay $720 \cdot 126 = 90\,720$ formas en que puede quedar la distribución con las condiciones impuestas.

3. [**4 puntos**] Determine la cantidad de anagramas de la palabra "**casino**" en los que alguna de sus sílabas quedan juntas.

   Solución.

   Considerando el conjuntos A de todos los anagramas que tienen la sílaba "**ca**", B de todos los anagramas que tienen la sílaba "**si**" y C de todos los anagramas que tienen la sílaba "**no**", se solicita lo siguiente:

   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

   $$\Rightarrow |A \cup B \cup C| = 3 \cdot 5! - 3 \cdot 4! + 3!$$

   Por lo tanto, hay 294 anagramas con las condiciones propuestas.

4. [**5 puntos**] Un alfabeto reducido está conformado por 5 letras distintas y 6 números diferentes. Las reglas permiten usar cualquier combinación de los 11 símbolos para formar una palabra, con la condición de que en estas palabras no queden números consecutivos. ¿Cuántas palabras, con las condiciones propuestas, de 4 símbolos se pueden formar?

   Solución.

   Se puede hacer por casos.

   Caso I: no hay números: $P(5;4) = 120$.

   Caso II: hay 1 número: $6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 4! = 1440$.

   Caso III: hay 2 números: $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3 \cdot 2! \cdot 2! = 1800$.

   Con esto, hay 3 360 palabras de 4 símbolos para el alfabeto propuesto.

5. [**5 puntos**] En una mesa se tienen un par de urnas: la primera urna (llamada A) tiene 4 bolitas rojas y 6 bolitas azules, mientras que la segunda urna (llamada B) posee 16 bolitas rojas y una cantidad desconocida de bolitas azules. Un experimento consiste en sacar una bolita, al azar, de cada urna. Si se sabe que la probabilidad de que ambas bolitas sean del mismo color es de 0.44, ¿cuántas bolitas azules hay en la urna B?

   Solución.

   La probabilidad de que ambas sean rojas es de $\frac{4}{10} \cdot \frac{16}{n}$, donde n es la cantidad de bolitas de la urna B. La probabilidad de que ambas sean de color azul es de $\frac{6}{10} \cdot \frac{16-n}{n}$. Si se suman dichas probabilidades, el resultado es 0.44. Por lo tanto:

   $$4.4n = 64 + 6n - 96 \;\Rightarrow\; n = 20\,.$$

   Así, hay 4 bolitas azules en la urna B.

Continúa en la siguiente página.

6. **[5 puntos]** Expertos concluyeron que, en un prueba sanguínea, si una persona posee cierta enfermedad, la probabilidad de que resulte positivo es de 95 %, mientras que si no posee la enfermedad, la probabilidad de que resulte positivo es de 0.5 %. Se estima que en determinada población, alrededor del 1 % de las personas realmente posee dicha enfermedad. Determine la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población tenga la enfermedad, si su prueba resultó positiva.

   Solución.

   Se necesita calcular $P[E|A]$, donde el evento E es que la persona esté enferma, mientras que el evento A es la persona tenga la prueba positiva.

   Considerando la partición del espacio muestral con los eventos E y N: persona no tiene la enfermedad, por la regla de Bayes, se tiene:

   $$P[E|A] = \frac{P[E]\cdot P[A|E]}{P[E]\cdot P[A|E] + P[N]\cdot P[A|N]}$$

   $$\Rightarrow P[E|A] = \frac{0.01\cdot 0.95}{0.01\cdot 0.95 + 0.99\cdot 0.005} \approx 0.657439$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población tenga la enfermedad, si su prueba resultó positiva es de, aproximadamente, 65.7 %.

7. **[5 puntos]** En un grupo grande de pacientes en recuperación de heridas de hombro, el 22 % asiste tanto a terapia física como al quiropráctico, mientras que el 12 % no asiste a ninguno. Se sabe que la probabilidad de que un paciente escogido al azar visite al quiropráctico excede en 0.14 a la probabilidad de que un paciente escogido al azar visite la terapia física. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente, elegido al azar, visite la terapia física?

   Solución.

   Se resuelve por el principio de inclusión y exclusión para probabilidades. Tomando el evento A: los pacientes que visitan el quiropráctico, y el evento B: los pacientes que visitan la terapia física, se tiene que:

   $$P[A\cup B] = P[A] + P[B] - P[A\cap B]$$

   $$\Rightarrow 1 - 0.12 = P[B] + 0.14 + P[B] - 0.22$$

   $$\Rightarrow P[B] = 0.48$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que un paciente elegido al azar visite la terapia física es de 48 %.

Todos los fenómenos de la naturaleza son solo los resultados matemáticos de un pequeño número de leyes inmutables. Pierre-Simon Laplace.