1. Si se sabe que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

a) Determine una serie de potencia para $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{x}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^k}{k!} \Rightarrow e^{-2x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow e^{-2x} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^k}{k!} \Rightarrow -\frac{e^{-2x}-1}{x} = -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^{-2x}}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot 2^k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!}$$

∴ La serie de potencia para la función $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{x}$

es $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (2)^k \frac{(x)^{k-1}}{k!}$

b) Determine una aproximación para la integral $\int_0^{1/3} f(x)\,dx$ con un error $\leq$ a 0.0000001.

$$\int_0^{1/3} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_0^{1/3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 2^k \frac{x^{k-1}}{k!}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} \int_0^{1/3} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{k!} \left(\frac{x^k}{k}\right)\Bigg|_0^{1/3}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{k!} \cdot \left(\frac{(1/3)^k}{k} - \frac{0^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{3^k \cdot k \cdot k!}$$

Si demostramos que la sucesión de $a_k = \frac{2^k}{3^k \cdot k \cdot k!}$ converge a 0 y es decreciente, podemos encontrar la aproximación con la cota de error.

1. Convergencia a 0

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2^k}{3^k \cdot k \cdot k!} = 0; \quad 3^k > 2^k \quad y \quad 2^k \ll k!$$

2. Demostrar decrecimiento.

$$a_k \geq a_{k+1} \iff \frac{2^k}{3^k \cdot k \cdot k!} \geq \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} \cdot (k+1)(k+1)!}$$

$$\iff \frac{2^k}{3^k \cdot k \cdot k!} \geq \frac{2^k \cdot 2}{3^{k+1}(k+1)(k+1)!}$$

$$\iff \frac{1}{3^k \cdot k \cdot k!} \geq \frac{2}{3^{k+1}(k+1)(k+1)!}$$

$$\iff \frac{1}{k \cdot k!} \geq \frac{2}{3(k+1)(k+1)!}$$

$$\iff \frac{1}{k} \geq \frac{2}{3(k+1)(k+1)}$$

$$\iff 3(k+1)^2 \geq 2k$$

$$\iff 3k^2 + 2k + 1 \geq 2k$$

$$\iff 3k^2 + 1 \geq 0$$

$\therefore$ Se cumple que es decreciente para $k \geq 0$

Como la sucesión $\{a_k\}$ converge a 0 y es decreciente, debe darse que $|S - S_m| \leq a_{m+1} = \frac{2^{m+1}}{3^{m+1}(m+1)(m+1)!}$ y se necesita determinar un valor de m tal que:

$$\frac{2^{m+1}}{3^{m+1}(m+1)(m+1)!} \leq 10^{-7}$$

El valor de m que cumple con la condición es $m = 7$, por lo que cuando $m+1 \geq 8$ la cota de error es $\leq 10^{-7}$.

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)\, 2^k}{3^k \cdot k \cdot k!} \approx 0.57015954$$

2. Considere la ecuación

$$x^7 - x^6 - x + 1 = 0$$

Compruebe que la suma de las soluciones complejas de la ecuación anterior, es igual a cero.

Soluciones reales: ± 1

$$\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\downarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x^6 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
\downarrow & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^4(x-1) + x^2(x-1) + 1(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$$

$x - 1 = 0$

$\Rightarrow \underline{x = 1}$

Raíz real

$x^4 + x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0$

$\Rightarrow (x^2+1)^2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1}$

$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1}$

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{1-\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = 0$$

3. Considere los complejos z_1, z_2 tal que la parte imaginaria de z_1 es positiva. Determine los valores de z_1, z_2 que satisfacen de forma simultánea las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} z_1 \text{ es la raíz cuadrada de } 2i \\ \operatorname{Arg}(\overline{z_1} \cdot z_2) = \dfrac{3\pi}{4} \\ \left| \dfrac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$2i + 1 - 1$

$= 2i + 1 - i^2$

$\Rightarrow i^2 + 2i + 1 \Rightarrow (i+1)^2 \Rightarrow \sqrt{(i+1)^2} = i+1 \Rightarrow z_1$

$\dfrac{x}{1+i} = \pm 1 \pm i$ ya que $\sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$

$1+i$	$1-i$	$-1-i$	$-1+i$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$z_2 = 2i$	$z_2 = 2$	$z_2 = -2i$	$z_2 = -2$

$$\frac{-2}{1+i} = \frac{-2(1-i)}{1^2 - i^2} = \frac{-2(1-i)}{\cancel{2}} = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$\overline{z_1} = 1 - i$

$$\operatorname{Arg}((1-i)\cdot -2) = \operatorname{Arg}(-2+2i) \Rightarrow \operatorname{Arc}\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

R// Los valores que satisfacen todas las condiciones son $z_1 = i+1$ y $z_2 = -2$.

4. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$z^3 + 2i = -2\sqrt{3}$$

y represente las soluciones en un mismo gráfico complejo.

$$z^3 = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$\sqrt[3]{z^3} = \sqrt[3]{-2\sqrt{3} - 2i} \rightarrow \text{Pasar a polar}$$

$$r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}\right) - \pi = \frac{-5}{6}\pi$$

$$z = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(-5/6\,\pi\right)$$

$$w_0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(\frac{-5/6\,\pi}{3}\right) \approx \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(\frac{-5}{18}\pi\right)$$

*Añadir / sumar $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$

$$w_1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(\frac{-5}{18}\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(\frac{7}{18}\pi\right)$$

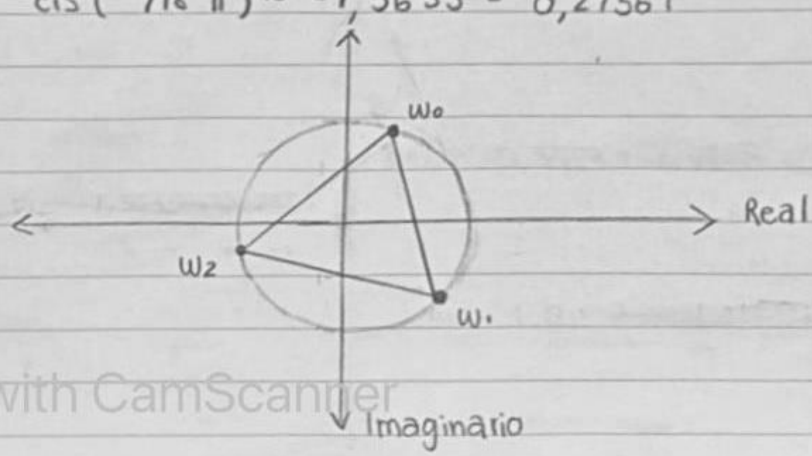
$$w_2 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(\frac{7}{18}\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(\frac{19}{18}\pi\right)$$

Convertir las soluciones a forma rectangular.

$$w_0 = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(-5/18\,\pi\right) \approx 1{,}0204 - 1{,}2160i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(7/18\,\pi\right) \approx 0{,}5429 + 1{,}4917i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis}\left(19/18\,\pi\right) \approx -1{,}5633 - 0{,}2756i$$



5. a)

$$XA^T = I + (BX^T)^T$$

$$\Rightarrow XA^T = I + (X^T)^T \cdot B^T$$
$$\Rightarrow XA^T = I + X \cdot B^T$$
$$\Rightarrow XA^T - X \cdot B^T = I$$
$$\Rightarrow (A^T - B^T) \cdot X = I$$
$$\Rightarrow (A-B)^T \cdot X = I$$
$$\Rightarrow [(A-B)^T \cdot X]^T = I^T$$
$$\Rightarrow [(A-B)^T]^T \cdot X^T = I$$
$$\Rightarrow (A-B) \cdot X^T = I$$
$$\Rightarrow (A-B)^{-1} \cdot (A-B) X^T = (A-B)^{-1} \cdot I$$
$$\Rightarrow I \cdot X^T = (A-B)^{-1} \cdot I$$
$$\Rightarrow X^T = (A-B)^{-1}$$
$$\Rightarrow (X^T)^T = [(A-B)^{-1}]^T \quad \Rightarrow X = [(A-B)^{-1}]^T$$

b)

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}^{(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{4} & -7 & 0 & \frac{-3}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{4}\cdot F_2+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-31}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{4}{-31}\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{4} & 0 & \frac{3}{31} & \frac{19}{124} & \frac{4}{31} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{4}\cdot F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{24}{31} & \frac{7}{31} & \frac{1}{31} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{24}{31} & \frac{7}{31} & \frac{1}{31} \\ \frac{28}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \\ \frac{-3}{31} & \frac{3}{31} & \frac{-4}{31} \end{pmatrix}$$

$$[(A-B)^{-1}]^{T} = \begin{pmatrix} \frac{24}{31} & \frac{28}{31} & \frac{-3}{31} \\ \frac{7}{31} & \frac{3}{31} & \frac{3}{31} \\ \frac{1}{31} & \frac{-4}{31} & \frac{-4}{31} \end{pmatrix}$$

6. $\begin{cases} x - ay - a^2 z = 1-a \\ ax + ay + a^2 z = a \\ (a+1)x + ay + (a+a^2)z = a+1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -a^2 & 1-a \\ a & a & a^2 & a \\ (a+1) & a & (a+a^2) & a+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-a-1)F_1+F_3]{-aF_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -a^2 & 1-a \\ 0 & (a^2+a) & (a^3+a^2) & a^2 \\ 0 & (a^2+2a) & (a^3+2a^2+a) & a^2+a \end{array}\right) \quad (*)$$

$$\left(\frac{1}{a^2+a}\right)\cdot F_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -a^2 & 1-a \\ 0 & 1 & a & a/a+1 \\ 0 & (a^2+2a) & (a^3+2a^2+a) & a^2+a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-a^2-2a)F_2+F_3]{aF_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/a+1 \\ 0 & 1 & a & a/a+1 \\ 0 & 0 & a & a/a+1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{a}\cdot F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/a+1 \\ 0 & 1 & a & a/a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a+1 \end{array}\right)$$

$$-a\cdot F_3 + F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/a+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a+1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 1/a+1 \\ y = 0 \\ z = 1/a+1 \end{cases}$$

$S = \{ (1/a+1,\ 0,\ 1/a+1 : a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}) \}$

El sistema tiene una unico solución

- Sustituyendo en la matriz (*) $a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En la segunda fila se presenta una inconsistencia, en este caso el sistema no presenta solución

$S = \emptyset$

- Sustituyendo en la matriz (*) $a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Se presentan infinitas soluciones ya que sin importar el valor de y o z que se utilicen se multiplicará por un coeficiente 0

$$S = \{(1, 0t, 0\lambda : t, \lambda \in \mathbb{R}\}$$