Escuela de Matemáticas

Sucesiones y series

M. Sc. Luis Alejandro Acuña Prado
M. Sc. Cindy Calderón Arce

2014

Contenido

Capítulo 1
Sucesiones

En Matemáticas, una sucesión es una lista, generalmente infinita. En este capítulo estudiaremos sucesiones numéricas, que son listas de números. Veremos que hay una relación estrecha entre las sucesiones y los números naturales. Por eso vamos a empezar por estudiar un principio fundamental en el conjunto de números naturales, el principio de inducción, que luego nos resultará útil para demostrar algunas propiedades de sucesiones.

1.1 Inducción

El método de inducción matemática se usa para demostrar algunas propiedades acerca de los números naturales (enteros positivos). Empecemos por establecer que el conjunto de los números naturales es

$$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, 4, \dots \}.$$

Este método está basado en el *principio de inducción*, que es una propiedad fundamental de los números naturales.

Principio de inducción

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

- $1 \in A$
- Para cualquier entero n, si $n \in A$ entonces también $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Se acostumbra usar una notación como $P(n)$ o $Q(n)$ para abreviar una proposición (afirmación) acerca de un número n. Por ejemplo, podría ser $P(n)\colon n^2 > n + 1$. En este caso, $P(1)$ dice que $1^2 > 1 + 1$, lo cual es falso. Pero $P(2)$ dice que $2^2 > 2 + 1$ y $P(5)$ dice que $5^2 > 5 + 1$, que son afirmaciones verdaderas.

A partir del principio de inducción se establecen dos métodos de inducción matemática para demostrar que cierta afirmación $P(n)$ es cierta (válida) para todos los naturales.

- La *inducción débil* (o simplemente *inducción*) dice que si
  1. La proposición $P(1)$ es cierta, y
  2. La suposición de que $P(n)$ sea cierta (llamada *hipótesis de inducción*) implica que también $P(n + 1)$ es cierta.

  entonces $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

- La *inducción fuerte* dice que si

  1. La proposición $P(1)$ es válida, y
  2. La suposición de que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(n)$ sean válidas (*hipótesis fuerte de inducción*) garantiza la validez de $P(n+1)$.

  entonces $P(n)$ se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

A veces el método de inducción se usa para demostrar que una propiedad $P(n)$ se cumple para todo $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, o para todo $n \in \{4, 5, 6, 7, \dots\}$, o en general para todo entero $n \geq K$, donde K es cualquier constante.

Notación sigma para sumas

Si a_1, a_2, ..., a_n es una lista de números, se denota

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Por ejemplo, si $x_k = 2^k$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} x_k &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30\end{aligned}$$

Ejemplo 1: demostrar una igualdad por inducción

Demostrar que para cualquier número natural n,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Note que la suma

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = \frac{2(1)-1}{2^1} + \frac{2(2)-1}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

también se puede denotar $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i}$. Así, la igualdad por demostrar puede escribirse también como

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Para demostrarla por inducción debemos dar dos pasos.

1. Probar que la igualdad es cierta para $n = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1} \frac{2i-1}{2^i} &\stackrel{?}{=} 3 - \frac{2(1)+3}{2^1} \\ \frac{2(1)-1}{2^1} &\stackrel{?}{=} 3 - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\text{: sí se cumple} \end{aligned}$$

2. Suponer que la igualdad es cierta para n,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i} = 3 - \frac{2n+3}{2^n} \qquad \text{(hipótesis de inducción)}$$

y a partir de ese supuesto demostrar la igualdad para $n+1$; esto es demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2^i} = 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2^i} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i} \right) + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \qquad \text{(propiedad de la suma[1])} \\ &= \left(3 - \frac{2n+3}{2^n} \right) + \frac{2n+2-1}{2^{n+1}} \qquad \text{(hipótesis de inducción)} \\ &= 3 - \left(\frac{2n+3}{2^n} - \frac{2n+1}{2 \cdot 2^n} \right) \\ &= 3 - \frac{2(2n+3)-(2n+1)}{2 \cdot 2^n} \\ &= 3 - \frac{2n+5}{2^{n+1}} \\ &= 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Habiendo concluido con los dos pasos del método de inducción, hemos demostrado que la igualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. $\lrcorner$

Repaso

Usando inducción, demuestre que $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n(2n-1)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

[1]Una propiedad fundamental de las sumas en notación sigma es que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) + a_{n+1}$, ya que ambas expresiones son iguales a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$.

Ejemplo 2: demostrar una desigualdad por inducción

Demostrar que para cualquier número natural $n \geq 2$,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4}$$

Observe que se puede escribir

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 = \sum_{i=1}^{n-1} i^3$$

Para demostrar la desigualdad anterior por inducción se deben dar dos pasos: primero demostrarla para el valor inicial de n, y luego suponerla para algún n y demostrarla para $n+1$. Note que en el caso actual el valor inicial de n es 2, no 1.

1. Probar que la desigualdad es cierta para $n = 2$.

$$\begin{aligned} 1^3 &\overset{?}{<} \frac{2^4}{4} \\ 1 &\overset{?}{<} \frac{16}{4} \\ 1 &< 4: \text{ cierto.} \end{aligned}$$

2. Suponer que la desigualdad es cierta para n,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 < \frac{n^4}{4}$$

(hipótesis de inducción), y demostrarla para $n+1$, es decir, demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 < \frac{(n+1)^4}{4}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^3\right) + n^3 && \text{(propiedad de sumas)}\\
&< \frac{n^4}{4} + n^3 && \text{(hipótesis de inducción)}\\
&= \frac{n^4 + 4n^3}{4}\\
&< \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{4} && \text{(propiedad de la desigualdad)}\\
&= \frac{n^4 + 4n^2 + 1 + 4n^3 + 2n^2 + 4n}{4}\\
&= \frac{(n^2 + 2n + 1)^2}{4} && \text{(fórmula notable}^2\text{)}\\
&= \frac{(n+1)^4}{4}
\end{aligned}$$

Con eso queda demostrado que $\sum_{i=1}^{n-1} i^3 < \frac{n^4}{4}$ para todo entero $n \geq 2$. ⌟

Repaso

Demuestre que $1 + 2 + 3 + \cdots + n \leq \frac{1}{8}(2n+1)^2$ para todo entero $n \geq 1$.

Ejemplo 3: demostrar una propiedad de divisibilidad por inducción

Demostrar que si $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ y $x - y$ es múltiplo[3] de 5, entonces $x^k - y^k$ es múltiplo de 5 para todo entero $k \geq 0$.

Ahora el valor inicial de k es 0, así que en el primer paso de inducción debemos demostrar la afirmación para $k = 0$. En el segundo paso procedemos sin cambio.

1. Probar la validez para $k = 0$.
   La afirmación para $k = 0$ dice que $x^0 - y^0$ es múltiplo de 5, lo cual es claro porque $x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0 = 5(0)$, en efecto múltiplo de 5.
2. Suponer la validez para k, esto es, suponer que $x^k - y^k$ es múltiplo de 5, y partir de esta hipótesis de inducción demostrar la validez para $k+1$; es decir, demostrar que $x^{k+1} - y^{k+1}$ es múltiplo de 5.
   Como $x^k - y^k$ es múltiplo de 5 entonces $x^k - y^k = 5p$ para algún entero p, por lo que $x^k = 5p + y^k$.

[2] En general, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ para a, b y c reales.

[3] Que un número a sea múltiplo de 5, o equivalentemente que sea divisible por 5, significa que $a = 5m$ para algún entero m. Por ejemplo, 65 es múltiplo de 5, o divisible por 5, porque $65 = 5(13)$.
En general, que a sea múltiplo de b, o divisible por b, significa que $a = bm$ para algún entero m.

Ahora

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x \cdot x^k - y^{k+1} \\ &= x \cdot (5p + y^k) - y^{k+1} \\ &= 5px + xy^k - y \cdot y^k \\ &= 5px + (x - y)y^k \end{aligned}$$

donde cada sumando es un múltiplo de 5 (recuerde que $x - y$ lo es), por lo que la suma es a su vez un múltiplo de 5.

De los dos pasos anteriores concluimos que $x^k - y^k$ es múltiplo de 5 para cualquier $k \geq 0$.

Repaso

Pruebe que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n^7 - n$ es divisible por 7.

Ejercicios

Demuestre usando el principio de inducción.

1. $k^2 - k$ es par, para todo entero $k \geq 0$

2. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $(a+b)^n \geq a^n + b^n$, para todo entero $n \geq 1$

3. $1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, para todo entero $k \geq 1$

4. $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, para todo entero $k \geq 1$

5. $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, para todo entero $k \geq 1$

6. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$, para todo entero $k \geq 1$

7. $1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \dfrac{k(2k+1)(2k-1)}{3}$, para todo entero $k \geq 3$

8. Si $r \neq 1$ entonces $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, para todo entero $n \geq 0$

9. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{k}$, para todo entero $k \geq 1$

10. $\displaystyle\int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t \leq \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

11. Si $x \geq -1$ entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para todo entero $n \geq 0$

12. $p^2 \geq 3p - 3$, para todo entero $p \geq 1$

13. $p^2 > 3p$, para todo entero $p \geq 4$

14. $2^k > 6k$, para todo entero $k \geq 5$

15. $1 + 2^j < 3^j$, para todo entero $j \geq 2$

16. $(x^n)' = nx^{n-1}\ \forall x \in \mathbb{R}$, para todo entero $n \geq 1$

17. Para todo entero $n \geq 1$, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

(se sabe que $|a+b| \leq |a| + |b|$ siempre que $a, b \in \mathbb{R}$)

18. Si $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ entonces, para todo entero $n \geq 1$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$$

19. $3^{2k+1} + 1$ es múltiplo de 4, para todo entero $k \geq 0$

20. $n^4 + 2n^3 + n^2$ es múltiplo de 4, para todo $n \geq 0$

21. $5^{2p-1} + 1$ es múltiplo de 6, para todo entero $p \geq 1$

22. $8^j - 1$ es múltiplo de 7, para todo entero $j \geq 1$

23. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es múltiplo de 7, para todo $k \geq 0$

24. $9^m - 1$ es múltiplo de 8, para todo entero $m \geq 1$

25. $4^n + 15n - 1$ es múltiplo de 9, para todo entero $n \geq 1$

26. $10^{2p+1} + 1$ es múltiplo de 11, para todo $p \geq 0$

27. $11^{m+1} + 12^{2m-1}$ es múltiplo de 133, para todo entero $m \geq 1$

28. $n^2 - 1$ es múltiplo de 8, para todo *impar* $n \geq 1$.

29. Demuestre que si $r + \frac{1}{r}$ es entero entonces $r^p + \frac{1}{r^p}$ es entero, para todo $p \geq 0$, siguiendo estos pasos (esta es una variación del método de inducción fuerte):

(a) Demuestre la afirmación para $p = 1$ y para $p = 2$.

(b) Suponga que la afirmación es cierta para $p-1$ y para p, y demuéstrela para $p+1$.

1.2 Sucesiones

En términos informales, podemos decir que una *sucesión* es una lista de números. Por ejemplo,

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$$

es la sucesión de números naturales impares. Otro ejemplo puede ser

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \ldots$$

la sucesión de recíprocos de los cuadrados de los números naturales.

Se acostumbra usar una letra minúscula para denotar una sucesión. Por ejemplo, podríamos llamar c la primera sucesión que mencionamos, y x la segunda. Luego, cada elemento de la sucesión se denota con el nombre de la sucesión seguido por un subíndice que indica su posición en la lista. Así, podemos decir que los primeros elementos de la sucesión c son

$$c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_3 = 5,\ c_4 = 7,\ \ldots$$

y los de la sucesión x son

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{9},\ \ldots$$

Comúnmente las sucesiones se definen a través de una fórmula que describe cada elemento. En el primer ejemplo podemos decir que $c_i = 2i - 1$ para cada índice $i \in \mathbb{N}$, porque

$$c_1 = 2(1) - 1 = 1, \quad c_5 = 2(5) - 1 = 9$$

y así los demás. A su vez, la fórmula $x_k = \dfrac{1}{k^2}$ describe los elementos de la segunda sucesión, como

$$x_2 = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4}, \quad x_{10} = \frac{1}{(10)^2} = \frac{1}{100}$$

El primer término de una sucesión no siempre tendrá el índice 1. Por ejemplo, la sucesión $p_n = 2^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ está compuesta por los términos

$$p_0 = 2^0 = 1, \quad p_1 = 2^1 = 2, \quad p_2 = 2^2 = 4, \quad p_3 = 2^3 = 8, \quad p_4 = 2^4 = 16, \quad \ldots$$

Es común que el primer índice sea 0 o 1, pero cualquier número entero puede tomar ese lugar.

Formalmente, así se define una sucesión.

Definición (sucesión)

Sea N un número entero. Una *sucesión de números reales*[4] es una función x del conjunto $\{\, N,\ N+1,\ N+2,\ N+3,\ \ldots \,\}$ en el conjunto de los números reales; es decir,

$$x \colon \{\, N,\ N+1,\ N+2,\ N+3,\ \ldots \,\} \to \mathbb{R}$$

Se acostumbra usar la notación x_k para referirse a $x(k)$.

También suele usarse la notación $\{\, x_n \,\}$ para denotar a la sucesión x. Esto es especialmente práctico cuando se quiere expresar la fórmula de una sucesión sin que importe darle un nombre. Así, podremos hablar de la sucesión $\{\, 2^n \,\}$ o de la sucesión $\{\, 1/\sqrt{k} \,\}$ cuando no sea necesario indicar cómo se llama la sucesión ni cuál es su primer elemento.

[4]Existen sucesiones de funciones, sucesiones de polinomios y en general sucesiones de otros objetos matemáticos. También es posible definir suceesiones finitas. Pero aquí nos concentraremos en las sucesiones infinitas de números reales.

En los tres ejemplos que acabamos de mencionar tenemos

$$\begin{aligned} c\colon \{\,1,2,3,4,\dots\,\} &\to \mathbb{R} \quad \text{dada por } c(i) = 2i-1 \\ x\colon \{\,1,2,3,4,\dots\,\} &\to \mathbb{R} \quad \text{dada por } x(k) = 1/k^2 \\ y\colon \{\,0,1,2,3,\dots\,\} &\to \mathbb{R} \quad \text{dada por } y(n) = 2^n \end{aligned}$$

El uso de alguna de las letras i, j, k, n u otra para denotar el índice no es significativo, de la misma manera en que una función real de variable real puede describirse con una fórmula para $f(x)$, $g(t)$, $h(w)$ y así por el estilo.

Ejemplo 4: enumerar algunos términos de una sucesión

Escribir los diez primeros términos de la sucesión $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(n^2-4)}{3^{n-4}}$, a partir de $n = 3$.

Aplicando la fórmula obtenemos

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{(-1)^{3+1}(3^2-4)}{3^{3-4}} = +\frac{5}{1/3} = 15 \\ b_4 &= \frac{(-1)^{4+1}(4^2-4)}{3^{4-4}} = -\frac{12}{1} = -12 \\ b_5 &= \frac{(-1)^{5+1}(5^2-4)}{3^{5-4}} = +\frac{21}{3} = 7 \\ b_6 &= \frac{(-1)^{6+1}(6^2-4)}{3^{6-4}} = -\frac{32}{9} \end{aligned}$$

El resto de los diez primeros son

$$b_7 = \frac{5}{3}, \quad b_8 = -\frac{20}{27}, \quad b_9 = \frac{77}{243}, \quad b_{10} = -\frac{32}{243}, \quad b_{11} = \frac{13}{243}, \quad b_{12} = -\frac{140}{6561}$$

Repaso

Calcule y simplifique los cinco primeros términos de $c_k = (-1/2)^k\, 2^{k^2}$, para $k \geq 0$. Solución: 1, -1, 4, -64, 4096

Note que la sucesión $\{\,(-1)^n\,\}$ toma los valores $+1, -1, +1, -1, \dots$ (tal vez empezando en -1, según el índice inicial). Prácticamente lo mismo hace la sucesión $\{\,(-1)^{n+1}\,\}$, excepto que sus signos son opuestos. Por ejemplo, empezando en $n = 1$,

$$\begin{aligned} (-1)^n :&\quad -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ \dots \\ (-1)^{n+1} :&\quad +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ \dots \end{aligned}$$

Note también que $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} = -(-1)^n$ para cualquier entero n.

Ejemplo 5: encontrar una fórmula para una sucesión

Determinar la fórmula de a_n en la sucesión $-3,\ -7,\ -11,\ -15,\ -19,\ -23,\ \ldots$

Lo primero que debemos notar es que de cada término al siguiente hay un "incremento" (negativo) de -4, por lo que en algún lugar en la fórmula debe restarse 4. En la tabla

n	a_n
1	$-3 = 1 - 4 \cdot 1$
2	$-7 = 1 - 4 \cdot 2$
3	$-11 = 1 - 4 \cdot 3$
4	$-15 = 1 - 4 \cdot 4$
5	$-19 = 1 - 4 \cdot 5$
6	$-23 = 1 - 4 \cdot 6$
$\vdots$	$\vdots$

es fácil notar el patrón para deducir que la fórmula general es $a_n = 1 - 4n$.

Ejemplo 6: encontrar una fórmula para una sucesión

Encontrar una fórmula para la sucesión b dada por $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \ldots$ e indexada a partir de $i = 1$.

Vemos que el patrón en estos términos consiste en que cada uno es 3 unidades más que el anterior. Eso implica que habrá un $3i$ en la fórmula, más/menos algún ajuste. Como el primer término debe ser $b_1 = 2 = 3(1) \pm$ ajuste, deducimos que el ajuste tiene que ser -1.

Planteamos entonces la hipótesis de que $x_i = 3i - 1$, y comprobamos que en efecto

$$b_1 = 3(1) - 1 = 2, \quad b_2 = 3(2) - 1 = 5, \quad b_3 = 3(3) - 1 = 8, \quad \ldots$$
$$b_6 = 3(6) - 1 = 17$$

de modo que la hipótesis es correcta: la fórmula es $b_i = 3i - 1$ para $i \in \mathbb{N}$.

Repaso

Encuentre una fórmula para la sucesión x dada por $-3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ \ldots,$ a partir de $k = 0$. Solución: $x_k = 4k - 3$

Ejemplo 7: encontrar una fórmula para una sucesión

Determinar la fórmula de la sucesión $1,\ -16,\ 81,\ -256,\ 625,\ -1296,\ \ldots$

En el cuadro

n	b_n
1	$1 = 1^4$
2	$-16 = -2^4$
3	$81 = 3^4$
4	$-256 = -4^4$
5	$625 = 5^4$
6	$-1296 = -6^4$
$\vdots$	$\vdots$

vemos que los signos se van alternando: los términos con índice par son negativos y los de índice impar son positivos. Esos signos se pueden denotar $(-1)^{n+1}$, donde n es el índice.

De esa forma se puede concluir que la fórmula general es $b_n = (-1)^{n+1}\, n^4$, para $n \geq 1$.

Ejemplo 8: encontrar una fórmula para una sucesión

Encontrar una fórmula para y_k, dado que

$$y_1 = -\frac{3/2}{5}, \quad y_2 = \frac{3}{6}, \quad y_3 = -\frac{6}{7}, \quad y_4 = \frac{12}{8}, \quad y_5 = -\frac{24}{9}$$

Vamos a analizar la sucesión en tres partes: signo, numerador y denominador.

Notemos en primer lugar que los signos se alternan. Esto se logra con un factor $(-1)^k$ o $(-1)^{k+1}$. Para decidir, notemos que y_1 es negativo, y_2 es positivo y así sucesivamente, de modo que el factor de signo debe ser $(-1)^k$.

En segundo lugar veamos que los numeradores van duplicándose cada vez. Para esto debe haber un factor 2^k, multiplicado por algún ajuste constante; es decir, el numerador es de la forma $[2^k \cdot \text{ajuste}]$. Si el numerador de $k = 1$ es $3/2$, el de $k = 2$ es 3 y el de $k = 3$ es 6, debe ser que el ajuste es $3/4$, de modo que el numerador es $2^k \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot 2^{k-2}$.

Y en tercer lugar, los denominadores aumentan en 1 unidad, por lo que su fórmula debe ser $[1k + \text{ajuste}]$. Para que $k = 1$ dé 5, $k = 2$ dé 6, etc, el ajuste debe ser 4, de modo que el denominador es $k + 4$.

Finalmente tenemos la fórmula completa,

$$y_k = (-1)^k \, \frac{3 \cdot 2^{k-2}}{k+4} \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

como es fácil de comprobar.

Repaso

Encuentre una fórmula para la sucesión que empieza por $b_0 = -3$, $b_1 = 5/3$, $b_2 = -7/9$, $b_3 = 9/27$, $b_4 = -11/81$. Solución: $b_j = (-1)^{j+1}(2j+3)/3^j$

Ejercicios

Escriba los primeros seis términos de la sucesión.

30. $2q^2 - 5q$ para $q \geq 0$

31. $\cos(\pi n/2)$ para $n \geq 0$

32. $|4\ln p - p|$ para $p \geq 1$

33. $(-1)^{i+1}(i+1) + i^2$ para $i \geq 0$

34. $\dfrac{(-1)^k}{k}$ para $k \geq 1$

35. $\dfrac{(-2)^m}{m^3+1}$ para $m \geq 0$

Escriba una fórmula para la sucesión.

36. $4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$

37. $7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \ldots$

38. $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-3}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{-7}{5},\ \dfrac{9}{6},\ \ldots$

39. $4,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ \ldots$

40. $0,\ 5,\ 0,\ 5,\ 0,\ 5,\ \ldots$

41. $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \ldots$

42. $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{4}{27},\ \dfrac{8}{81},\ \dfrac{16}{243},\ \ldots$

43. $\dfrac{1+1}{2},\ \dfrac{8-1}{5},\ \dfrac{27+1}{10},\ \dfrac{64-1}{17},\ \dfrac{125+1}{26},\ \ldots$

44. $\dfrac{1}{1/2},\ \dfrac{0}{2/3},\ \dfrac{1}{3/4},\ \dfrac{4}{4/5},\ \dfrac{9}{5/6},\ \dfrac{16}{6/7},\ \ldots$

45. $2,\ -2\cdot 4,\ 2\cdot 4\cdot 6,\ -2\cdot 4\cdot 6\cdot 8,\ \ldots$

46. Los papás de Carlos tienen cinco hijos. El mayor se llama Pinocho, el segundo se llama Pincuatro, el tercero Pindós y el cuarto Pinuno. ¿Cómo se llama el menor?

1.3 Recursión

Hay varias maneras de dar la fórmula para una sucesión. Entre ellas están la manera explícita, como en la sección anterior, y la manera implícita. Las fórmulas explícitas dependen únicamente del valor del índice (n, k o alguno otro), y las fórmulas implícitas o *relaciones por recurrencia* dependen, además del índice, de al menos un término anterior de la sucesión.

Ejemplo 9: sucesión definida por recurrencia

La fórmula

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_n = 2x_{n-1} - 3x_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \end{cases}$$

define una sucesión numérica por recurrencia o *recursivamente*. Los primeros términos después de $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$, son

$$\begin{aligned} x_3 &= 2x_2 - 3x_1 = 2(-1) - 3(0) = -2 \\ x_4 &= 2x_3 - 3x_2 = 2(-2) - 3(-1) = -1 \\ x_5 &= 2x_4 - 3x_3 = 2(-1) - 3(-2) = 4 \\ x_6 &= 2x_5 - 3x_4 = 2(4) - 3(-1) = 11 \end{aligned}$$

de modo que la sucesión es $0, -1, -2, -1, 4, 11, \ldots$

Repaso

Escriba los primeros siete términos de la siguiente relación por recurrencia: $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ y en adelante $y_n = 3y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3}$ para $n \geq 4$.

Solución: $-2, 0, 1, 5, 17, 60, 209$

En este Ejemplo 9, la fórmula de x_n depende de dos términos anteriores: x_{n-1} y x_{n-2}. En el siguiente ejemplo veremos una fórmula recursiva que depende de un solo término anterior.

Ejemplo 10: encontrar una fórmula recursiva

Para la sucesión del Ejemplo 5, se puede encontrar también una fórmula recursiva. Recordando la tabla

n	a_n
1	-3
2	$-7 = -3 - 4$
3	$-13 = -7 - 4$
4	$-15 = -13 - 4$
5	$-19 = -15 - 4$
6	$-23 = -19 - 4$
$\vdots$	$\vdots$

vemos que la fórmula general de esa sucesión también puede darse como

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} - 4 \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Repaso

Determine una fórmula recursiva para la sucesión que empieza con $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, $c_4 = 9$, $c_5 = 17$, $c_6 = 33$.

Solución: $c_1 = 2$ y $c_n = 2c_{n-1} - 1$ para $n \geq 2$

Ejemplo 11: confirmar la equivalencia entre dos fórmulas

Comparando la fórmula del ejemplo anterior con la del Ejemplo 5, tenemos que $a_n = a_{n-1} - 4 = 1 - 4n$ para $n \geq 2$. Vamos a verificar esta igualdad usando el método de inducción.

1. Probar la validez para $n = 2$:

$$\begin{aligned} a_1 - 4 &\stackrel{?}{=} 1 - 4(2) \\ -3 - 4 &\stackrel{?}{=} 1 - 8 \\ -7 &= -7\text{: correcto} \end{aligned}$$

2. Suponer que la igualdad es cierta para n: $a_{n-1} - 4 = 1 - 4n$ (esta es la hipótesis de inducción), y demostrar que también es cierta para $n+1$; es decir, que $a_{(n+1)-1} - 4 = 1 - 4(n+1)$.

   Empecemos por el lado izquierdo, $a_n - 4$:

$$\begin{aligned} a_n - 4 &= (a_{n-1} - 4) - 4 && \text{(por el ejemplo anterior)} \\ &= (1 - 4n) - 4 && \text{(hipótesis de inducción)} \\ &= 1 - 4(n+1) && \text{(factor común)} \end{aligned}$$

   como queríamos probar.

En conclusión, $a_{n-1} - 4 = 1 - 4n$ para todo $n \geq 2$.

Repaso

Demuestre que la fórmula recursiva $x_1 = 1$, $x_n = 3x_{n-1} + 1$ para $n \geq 2$ es equivalente a la fórmula explícita $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$.

Ejemplo 12: encontrar una fórmula explícita dada una recursiva

Determinar una fórmula explícita para la sucesión

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_n = 3y_{n-1} + 5 \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

y verificarla por inducción.

En el cuadro

n	y_n
1	1
2	$3(1)+5 = 3+5$
3	$3(3+5)+5 = 3^2+3\cdot 5+5$
4	$3(3^2+3\cdot 5+5)+5 = 3^3+3^2\cdot 5+3\cdot 5+5$
5	$3(3^3+3^2\cdot 5+3\cdot 5+5)+5 = 3^4+3^3\cdot 5+3^2\cdot 5+3\cdot 5+5$
6	$3^5+3^4\cdot 5+3^3\cdot 5+3^2\cdot 5+3\cdot 5+5$
7	$3^6+3^5\cdot 5+3^4\cdot 5+3^3\cdot 5+3^2\cdot 5+3\cdot 5+5$
$\vdots$	$\vdots$

notamos que $y_1 = 1$ y que, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} y_n &= 3^{n-1} + 3^{n-2}\cdot 5 + \cdots + 3^2\cdot 5 + 3\cdot 5 + 5 \\ &= 3^{n-1} + 3^{n-2}\cdot 5 + \cdots + 3^2\cdot 5 + 3^1\cdot 5 + 3^0\cdot 5 \\ &= 3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3^1 + 3^0) \\ &= 3^{n-1} + 5\sum_{i=0}^{n-2} 3^i \end{aligned}$$

Entonces ya tenemos la fórmula $y_n = 3y_{n-1} + 5 = 3^{n-1} + 5\sum_{i=0}^{n-2} 3^i$ para $n \geq 2$, y ahora vamos a probarla por inducción.

1. Probarla para $n = 2$:

$$\begin{aligned} 3y_1 + 5 &\overset{?}{=} 3^1 + 5\sum_{i=0}^{0} 3^i \\ 3(1) + 5 &= 3 + 5\cdot 3^0 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

2. Suponer que $3y_{n-1}+5 = 3^{n-1}+5\sum_{i=0}^{n-2} 3^i$ y probar que $3y_n+5 = 3^n+5\sum_{i=0}^{n-1} 3^i$:

$$\begin{aligned}
3y_n + 5 &= 3\left(3^{n-1} + 5\sum_{i=0}^{n-2} 3^i\right) + 5 && \text{(hipótesis de inducción)}\\
&= 3^n + 5\sum_{i=0}^{n-2} 3^{i+1} + 5\\
&= 3^n + 5\sum_{i=1}^{n-1} 3^i + 5 && \text{(vea la nota al pie}^5\text{)}\\
&= 3^n + 5\left(\sum_{i=1}^{n-1} 3^i + 1\right)\\
&= 3^n + 5\left(\sum_{i=1}^{n-1} 3^i + 3^0\right)\\
&= 3^n + 5\sum_{i=0}^{n-1} 3^i
\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Por lo tanto, $y_n = 3y_{n-1} + 5 = 3^{n-1} + 5\sum_{i=0}^{n-2} 3^i$, para todo entero $n \geq 2$.

Repaso

Encuentre una fórmula explícita para la sucesión dada por $w_1 = 1$ y $w_k = 4w_{k-1} - 1$ para $k \geq 2$, y demuestre la equivalencia de las dos fórmulas a partir de $k = 2$.

Solución: $w_k = 4^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} 4^i$ para $k \geq 2$

[5] Las sumas tienen la propiedad de que $\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}$, simplemente porque ambas son iguales a $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

Recurrencia lineal

Definición (recurrencia lineal)

Una relación por *recurrencia lineal de orden* k está dada por

$$\begin{cases} c_n = \alpha_1 c_{n-1} + \alpha_2 c_{n-2} + \alpha_3 c_{n-3} + \cdots + \alpha_k c_{n-k} + \beta \text{ para } n > k \\ c_i \text{ dado, para } i = 1, 2, 3, \ldots, k \end{cases}$$

donde α_1, α_2, ..., α_k y β son constantes. El orden indica la cantidad de términos de los que depende la fórmula implícita. Se le llama relación por recurrencia lineal *homogénea* de orden k si $\beta = 0$, o *no homogénea* si $\beta \neq 0$.

Por ejemplo, la relación $x_1 = 3$, $x_n = x_{n-1} - 4$ para $n \geq 2$, es lineal no homogénea de orden 1 ($k = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta = -4$). Y la relación $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_k = 2y_{k-1} - 3y_{k-2}$ para $k \geq 3$, es lineal homogénea de orden 2 ($k = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\beta = 0$).

Definición (ecuación característica)

La *ecuación característica* asociada a la relación lineal homogénea de orden k definida arriba es

$$x^k = \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \alpha_3 x^{k-3} + \cdots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$$

En particular, para $k = 2$ se tiene la relación por recurrencia lineal homogénea de orden 2,

$$\begin{cases} c_1 \text{ y } c_2 \text{ dados} \\ c_n = \alpha_1 c_{n-1} + \alpha_2 c_{n-2} \end{cases}$$

y la ecuación característica asociada, $x^2 = \alpha_1 x + \alpha_2$.

Teorema

Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación característica anterior (con $k = 2$).

- Si $x_1 \neq x_2$ entonces la sucesión se puede dar en forma explícita como

$$c_n = Ax_1^n + Bx_2^n \quad \text{con } A \text{ y } B \text{ constantes.}$$

- Si $x_1 = x_2$ entonces la sucesión se puede dar en forma explícita como

$$c_n = Ax_1^n + nBx_2^n \quad \text{con } A \text{ y } B \text{ constantes.}$$

En cada caso, A y B se pueden encontrar dados los valores iniciales c_1 y c_2.

Ejemplo 13: encontrar una fórmula explícita dada una recursiva

Determinar la fórmula explícita de la sucesión dada por $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_k = 10x_{k-1} - 25x_{k-2}$ para $k \geq 3$.

Como esta relación es lineal homogénea de orden 2, con $\alpha_1 = 10$ y $\alpha_2 = -25$, entonces la ecuación característica es $x^2 - 10x + 25 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = x_2 = 5$.

Por el teorema, la fórmula explícita de la relación anterior es $x_k = A5^k + kB5^k$. Para encontrar A y B notamos que según las dos condiciones iniciales ($x_1 = 1$ y $x_2 = 2$) se debe cumplir que

$$\begin{cases} x_1 = A5^1 + 1B5^1 = 5A + 5B = 1 \\ x_2 = A5^2 + 2B5^2 = 25A + 50B = 2 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $A = 8/25$, $B = -3/25$, así que la fórmula explícita para la sucesión es

$$x_k = \frac{8}{25}5^k - \frac{3}{25}k5k = 5^k\left(\frac{8-3k}{25}\right)$$

Repaso

Determine una fórmula explícita para la sucesión dada por $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ y en adelante $a_n = -9a_{n-2} - 6a_{n-1}$ para $n \geq 3$.

Solución: $a_n = \dfrac{(-3)^n(1-n)}{9}$ para $n \geq 1$

Ejemplo 14: encontrar una fórmula explícita dada una recursiva

Encontrar una fórmula explícita para la sucesión definida por $b_1 = 3$, $b_2 = 1$ y $b_n = 3b_{n-2} - 2b_{n-1}$ para $n \geq 3$.

Como $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = 3$, la ecuación característica es $x^2 + 2x - 3 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$. Así, la fórmula explícita de la relación es $b_n = A(-3)^n + B(1)^n = (-3)^n A + B$.

A partir de las condiciones iniciales ($b_1 = 3$ y $b_2 = 1$) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -3A + B = 3 \\ 9A + B = 1 \end{cases}$$

La solución es $A = -\frac{1}{6}$ y $B = \frac{5}{2}$, por lo que finalmente

$$b_n = (-3)^n\frac{-1}{6} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{(-3)^n}{6}$$

Repaso

Determine una fórmula explícita para la sucesión dada por $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_j = -\frac{3}{2}x_{j-1} + x_{j-2}$ para $j \geq 3$ Solución: $x_j = 2^{2-j}$ para $j \geq 1$

Ejemplo 15: probar la equivalencia entre dos fórmulas

Probar que la fórmula del ejemplo anterior es correcta; es decir, que

$$b_n = 3b_{n-2} - 2b_{n-1} = \frac{5}{2} - \frac{(-3)^n}{6} \qquad \text{para } n \geq 3$$

Para $n = 1$ y $n = 2$ es fácil ver que $\frac{5}{2} - \frac{(-3)^1}{6} = 3$ y que $\frac{5}{2} - \frac{(-3)^2}{6} = 1$ respectivamente, por lo que en estos casos la fórmula es correcta. Para $n \geq 3$ procedemos por inducción fuerte.

1. Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} 3b_1 - 2b_2 &\stackrel{?}{=} \tfrac{5}{2} - \tfrac{(-3)^3}{6} \\ 3(3) - 2(1) &= \tfrac{5}{2} + \tfrac{27}{6} \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

2. Suponemos que la igualdad es cierta para $n - 1$:

$$b_{n-1} = 3b_{n-3} - 2b_{n-2} = \frac{5}{2} - \frac{(-3)^{n-1}}{6}$$

y para n:

$$b_n = 3b_{n-2} - 2b_{n-1} = \frac{5}{2} - \frac{(-3)^n}{6}$$

y probamos la validez para $n + 1$:

$$\begin{aligned} 3b_{n-1} - 2b_n &= 3\left(\frac{5}{2} - \frac{(-3)^{n-1}}{6}\right) - 2\left(\frac{5}{2} - \frac{(-3)^n}{6}\right) \\ &= \frac{15}{2} + \frac{(-3)^n}{6} - 5 + \frac{(-3)^n}{3} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{(-3)^n + 2(-3)^n}{6} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3 \cdot (-3)^n}{6} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{(-3)^{n+1}}{6} \end{aligned}$$

que es lo que debíamos probar.

Repaso

Pruebe la equivalencia entre las dos fórmulas (explícita e implícita) de cada uno de los dos repasos anteriores: $a_n = -9a_{n-2} - 6a_{n-1} = \dfrac{(-3)^n(1-n)}{9}$ para $n \geq 3$, y $x_j = -\frac{3}{2}x_{j-1} + x_{j-2} = 2^{2-j}$ para $j \geq 3$

Dos sucesiones especiales: factorial y Fibonacci

Una función importante en el conjunto de números naturales es la función *factorial*. El factorial aparecerá frecuentemente en el estudio de series, en los dos siguientes capítulos.

Definición (factorial)

Para $n \geq 0$ se define el *factorial* de n, denotado $n!$, como

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \quad \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

Por ejemplo, según la definición anterior se tiene

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Note que, para $n \geq 1$,

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \cdots = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} &4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ &6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\ &1! = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 16: enumerar algunos términos de una sucesión

Escribir los cinco primeros términos de la sucesión

$$a_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{(2k)!}$$

a partir de $k = 0$.

La notación en el numerador indica que deben multiplicarse todos los enteros impares desde 1 hasta $(2k+1)$. En el caso de $k = 0$, eso significa desde 1 hasta

$2(0) + 1 = 1$. Para $k = 1$, es desde 1 hasta $2(1) + 1 = 3$, y así sucesivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{0!} = 1 \\
a_1 &= \frac{1 \cdot 3}{2!} = \frac{3}{2} \\
a_2 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \\
a_3 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{6!} = \frac{105}{720} = \frac{7}{48} \\
a_4 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{8!} = \frac{945}{40320} = \frac{3}{128}
\end{aligned}$$

Repaso

Calcule y simplifique los primeros cinco términos de la sucesión $t_n = \dfrac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$, para $n \geq 1$. Solución: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$

Ejemplo 17: proporción de un término al siguiente

Para a_k definido en el ejemplo anterior, simplificar el cociente $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.

Veamos primero qué es a_{k+1}. Si en la fórmula de a_k simplemente sustituimos $k + 1$ en el lugar de k, tendremos

$$a_{k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \big(2[k+1] + 1\big)}{\big(2[k+1]\big)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+3)}{(2k+2)!}$$

lo cual es cierto, pero habría una confusión al simplificar $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ por la presencia de un cociente

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+3)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

donde los puntos suspensivos del numerador no son equivalentes a los del denominador. Podemos cancelar el 1, el 3 y el 5 de arriba con sus equivalentes abajo, pero no podríamos cancelar los puntos suspensivos porque representan cosas distintas.

Mejor escribimos

$$a_{k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)\big(2[k+1] + 1\big)}{\big(2[k+1]\big)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)(2k+3)}{(2k+2)!}$$

donde, al incluir los factores penúltimo y último en el numerador, logramos que los puntos suspensivos sean equivalentes a los de a_k. Así,

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)!}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}{(2k)!}}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)(2k+3)\cdot(2k)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)\cdot(2k+2)!}\end{aligned}$$

Ahora podemos cancelar todo el producto $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)$ que aparece en el numerador con el idéntico que aparece en el denominador. Y a la vez podemos factorizar $(2k+2)! = (2k+2)(2k+1)(2k)!$, de modo que terminamos con

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+3)\cdot(2k)!}{(2k+2)(2k+1)(2k)!} = \frac{2k+3}{(2k+2)(2k+1)}$$

Repaso

Para t_n definido en el repaso del ejemplo anterior, simplifique $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$. Solución: $\frac{1}{2}$

Ejemplo 18: una propiedad de los factoriales

Probar, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{4^n}{n+1} \le \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

1. Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{4^1}{1+1} &\overset{?}{\le} \frac{(2\cdot 1)!}{(1!)^2}\\ \frac{4}{2} &\le \frac{2!}{1^2}\\ 2 &\le 2\end{aligned}$$

2. Suponiendo para n, $\dfrac{4^n}{n+1} \le \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, probamos la validez para $n+1$:

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} \overset{?}{\le} \frac{\big[2(n+1)\big]!}{\big[(n+1)!\big]^2}$$

Empecemos desarrollando el lado derecho:

$$\begin{aligned}
\frac{\big[2(n+1)\big]!}{\big[(n+1)!\big]^2} = \frac{(2n+2)!}{\big[(n+1)\,n!\big]^2} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2\,(n!)^2} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2\,(n!)^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)\,(n!)^2} \\
&= \frac{(4n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&\geq \frac{4n+2}{(n+1)} \cdot \frac{4^n}{n+1} \qquad \text{(hipótesis de inducción)} \\
&= \frac{4(n+\frac{1}{2})\,4^n}{(n+1)^2} = \frac{(n+\frac{1}{2})\,4^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= 4^{n+1} \cdot \frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+2} \\
&= \frac{4^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n^2+\frac{5}{2}n+1}{n^2+2n+1} \\
&> \frac{4^{n+1}}{n+2}
\end{aligned}$$

(la última desigualdad se debe a que $\dfrac{n^2+\frac{5}{2}n+1}{n^2+2n+1} > 1$, porque $\frac{5}{2}n > 2n$), con lo que terminamos la prueba.

Repaso

Demuestre que $k! \geq k$ para todo $k \geq 0$.

Otra sucesión muy conocida, la sucesión de Fibonacci, es una donde los dos primeros términos son iguales a 1 y luego cada término es la suma de los dos anteriores.

Definición (sucesión de Fibonacci)

Se llama sucesión de Fibonacci a la definida por la siguiente relación por recurrencia:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \end{cases}$$

Entonces, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\
F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\
F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 \\
F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8
\end{aligned}$$

Ejemplo 19: una propiedad de la sucesión de Fibonacci

Demostrar por inducción que F_{3k} es par, para todo $k \in \mathbb{N}$.

1. Probar para $k = 1$.
   Como $F_{3(1)} = F_3 = 2$, que es par, está comprobado que la afirmación se cumple para $k = 1$.
2. Suponer que la afirmación es cierta para k: F_{3k} es par, o bien $F_{3k} = 2p$ para algún entero p, y demostrar que la afirmación es cierta también para $k+1$: que $F_{3(k+1)} = F_{3k+3}$ es par.

$$\begin{aligned} F_{3k+3} &= F_{3k+2} + F_{3k+1} && \text{(definición de } F_{3k+3}\text{)} \\ &= (F_{3k+1} + F_{3k}) + F_{3k+1} && \text{(definición de } F_{3k+2}\text{)} \\ &= 2p + 2F_{3k+1} && \text{(hipótesis de inducción)} \end{aligned}$$

lo cual es una suma de números pares y por lo tanto es un número par.

Así hemos demostrado que F_{3k} es par para cualquier valor de $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicios

Escriba los primeros diez términos de la sucesión.

47. $z_j = j + z_{j-1}, \quad z_0 = 0$

48. $x_1 = 1, \quad x_{k+1} = 3/x_k$

49. $s_1 = 1, \quad s_n = 1/(1 + s_{n-1})$

50. $q_n = \sum_{i=1}^{n-1} q_i, \quad q_1 = 1$

51. $c_n = -3c_{n-1}, \quad c_0 = 2$

52. $w_{k+1} = w_k^2, \quad w_0 = 2$

53. $y_k = 2ky_{k-1}, \quad y_0 = 1$

54. $b_1 = 0, \quad b_2 = 3, \quad b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$

55. $a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1$

56. $a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_j = 2a_{j-1} + a_{j-2}$

57. $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} - x_{n-1}), \quad x_0 = -1, \quad x_1 = -2$

58. $p_j = 2p_{j-3} + p_{j-2} - 2p_{j-1}, \quad p_0 = -1, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -4$

Escriba los primeros seis términos de la sucesión.

59. $\dfrac{7^k}{k!}$ para $k \geq 0$

60. $\dfrac{p!}{p^2}$ para $p \geq 1$

61. $\dfrac{2^{2m+1}}{(2m+1)!}$ para $m \geq 0$

62. $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2j)}{2^j\, j!}$ para $j \geq 1$

63. $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!}$ para $n \geq 1$

64. $\dfrac{(2m)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}$ para $m \geq 0$

65. $\dfrac{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3j+2)}{(j-1)!}$ para $j \geq 3$

66. $\dfrac{4^q\, q!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2q)}$ para $q \geq 1$

67. $\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3i+1)}{2^{i+1}\,(i+1)!}$ para $i \geq 0$

68. En cada uno de los ejercicios 59–67 simplifique el cociente $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ (suponiendo que la sucesión se llama c).

Dé una definición recursiva para la sucesión.

69. $-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$

70. $1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \ldots$

71. $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$

72. $1!,\ 3!,\ 5!,\ 7!,\ 9!,\ 11!,\ \ldots$

Demuestre por inducción.

73. $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$, para todo entero $n \geq 1$

74. F_{4n} es múltiplo de 3, para todo entero $n \geq 1$

75. $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$, para todo entero $n \geq 2$

76. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, para todo entero $n \geq 1$

77. $2^k < k!$, para todo entero $k \geq 4$

78. $n! \leq n^n$, para todo entero $n \geq 1$

79. Demuestre que $F_n < 2^n$, para todo $n \geq 1$, siguiendo estos pasos (esta es una variación del método de inducción fuerte):

(a) Demuestre la afirmación para $n = 1$ y para $n = 2$.

(b) Dado, $n \geq 3$, suponga que la afirmación es cierta para $n-1$ y para $n-2$, y demuéstrela para n.

80. Encuentre una fórmula explícita para cada sucesión en los ejercicios 50–58.

81. En Fico Bell, la porción pequeña de fibonachos cuesta ₡450, y la mediana cuesta ₡650. Si la porción grande cuesta ₡1100, ¿cuánto cuesta la extra grande?

1.4 Sucesiones monótonas

Así como una función puede ser creciente o decreciente en un intervalo, el mismo concepto se aplica a sucesiones. Sin embargo, aquí nos interesará solamente si una sucesión es creciente o decreciente no solo en algún intervalo real sino en todo su dominio, o al menos desde algún punto en adelante hasta infinito.

Definición (sucesión creciente o decreciente)

La sucesión $\{ a_k \}$ *crece*, o es *creciente*, si $a_k \le a_{k+1}$ para todo k. Ella *decrece*, o es *decreciente* si $a_k \ge a_{k+1}$ para todo k.

Una sucesión es *monótona* si bien es creciente o bien es decreciente.

Algunas sucesiones son claramente crecientes, como k^2: 1, 4, 9, 16, 25, ..., o claramente decrecientes, como $\frac{1}{n}$: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... Otras son claramente no monótonas (ni crecientes ni decrecientes), como $(-1)^n$: -1, 1, -1, 1, ...

También es común que una sucesión sea creciente o decreciente pero no en todo su dominio sino solo a partir de algún término. Un ejemplo de esto es

$$j^2 - 6j : 0,\ -5,\ -8,\ -9,\ -8,\ -5,\ 0,\ 7,\ 16,\ \ldots$$

que es creciente partir de $j = 3$ aunque no en todo su dominio.

En cálculo diferencial, para investigar si una función derivable es creciente tenemos el criterio que dice que si $f' \ge 0$ en un intervalo I entonces f es creciente en ese intervalo, y si $f' \le 0$ en I entonces f es decreciente en I.

Ahora vamos a ver cuatro métodos para investigar si una sucesión es creciente o decreciente.

Teorema

Si la función $f : [N, \infty[\to \mathbb{R}$ es creciente o decreciente para algún $N \in \mathbb{Z}$, entonces la sucesión $\{ f(k) \}$ es creciente o decreciente a partir de N, respectivamente.

Ejemplo 20: determinar monotonía derivando

Investigar si la sucesión $c_k = \dfrac{k^4}{e^k}$ es creciente o decreciente (o ninguna).

Si tomamos $f(x) = \dfrac{x^4}{e^x}$, entonces tendremos $c_k = f(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y además

$$f'(x) = \frac{4x^3e^x - x^4e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^3(4-x)}{e^x}$$

que claramente cumple $f'(x) \ge 0$ para $x \le 4$, y $f'(x) \le 0$ para $x \ge 4$. Entonces f es decreciente en $[4, \infty[$.

Por el teorema anterior, concluimos que también la sucesión $\{ c_k \}$ es decreciente para $k \ge 4$.

Repaso

Investigar si $d_i = \dfrac{i}{\ln i}$ crece o decrece. Solución: crece a partir de $i = 3$

Como segundo método, recordemos una propiedad elemental de las fracciones. Cuando se comparan dos fracciones con numeradores y denominadores positivos, si las dos tienen igual numerador entonces la fracción con mayor denominador es más pequeña (como $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$ porque $5 > 3$). En símbolos, si a, b y c son números positivos, entonces

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} \geq \frac{c}{b}$$

Eso implica que si una sucesión de fracciones (con numeradores y denominadores positivos) tiene numerador constante y denominador creciente, entonces la fracción decrece. Y si el numerador es constante y el denominador decreciente, entonces la fracción crece. Podemos visualizar esto informalmente de la siguiente manera:

$$\frac{C}{\nearrow} = \searrow \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{\searrow} = \nearrow$$

Por ejemplo, es evidente entonces que $\dfrac{6}{n^2+1}$ es decreciente, porque el numerador es constante y la sucesión n^2+1 es creciente para $n \geq 0$ (esto último porque la función x^2+1 tiene derivada $2x$, positiva para x positivo). Es cierto que al final nos apoyamos en alguna derivada, pero fue mucho más sencillo investigar la derivada del denominador x^2+1 que la derivada de toda la fracción $6/(x^2+1)$.

Una tercera opción para determinar si una sucesión crece o decrece es comparar cada término con el sucesor. La definición dice que $\{ a_n \}$ es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, lo cual equivale a que $a_{n+1} - a_n \geq 0$. Y por el contrario, $\{ a_n \}$ será decreciente si $a_{n+1} - a_n \leq 0$:

$$\{ a_n \} \text{ es } \begin{cases} \text{creciente} & \text{si } a_{n+1} - a_n \geq 0 \text{ para todo } n \\ \text{decreciente} & \text{si } a_{n+1} - a_n \leq 0 \text{ para todo } n. \end{cases}$$

Ejemplo 21: determinar monotonía restando términos consecutivos

Investigar si la sucesión $b_i = \dfrac{i}{i+1}$ es creciente o decreciente.

Podríamos calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, pero probemos esta otra opción. Vemos que

$$b_{i+1} - b_i = \frac{i+1}{i+2} - \frac{i}{i+1} = \frac{(i+1)(i+1) - (i+2)i}{(i+2)(i+1)} = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

que es claramente positivo para todo $i \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que $\{ b_i \}$ es creciente.

Repaso

Investigue si $w_j = \dfrac{1+j}{2j}$ crece o decrece. Solución: decrece para todo $j \geq 1$

Para sucesiones de términos positivos hay una cuarta opción, que consiste en comparar términos sucesivos dividiendo en vez de restar, siempre recordando que $\{ a_n \}$ crece si $a_n \leq a_{n+1}$ y decrece si $a_n \geq a_{n+1}$, así:

$$\{ a_n \} \text{ es } \begin{cases} \text{creciente} & \text{si } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \text{ para todo } n \\ \text{decreciente} & \text{si } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \text{ para todo } n. \end{cases}$$

Ejemplo 22: determinar monotonía dividiendo términos consecutivos

Investigar la monotonía de $z_k = \dfrac{k!}{5^k}$.

Aquí no podemos definir $f(x) = x!/5^x$, porque el factorial existe solamente para números enteros (y aunque la definiéramos, no sabríamos derivarla). Podríamos estudiar la diferencia $z_{k+1} - z_k$ como en el ejemplo anterior, pero consideremos mejor el cociente

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{(k+1)!/5^{k+1}}{k!/5^k} = \frac{5^k (k+1)!}{5^{k+1} k!} = \frac{k+1}{5}$$

Ahora bien, ¿la fracción $\dfrac{k+1}{5}$ es mayor o menor que 1? Veamos:

$$\frac{k+1}{5} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad k+1 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 4,$$

de manera que la sucesión $\{ z_k \}$ es creciente a partir de $k = 4$.

Repaso

Investigue la monotonía de $t_n = \dfrac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$. Solución: es decreciente

Ejercicios

Determine si la sucesión es creciente o decreciente a partir de algún punto.

82. $\dfrac{3}{2n+1}$

83. $\dfrac{1}{j \ln j}$

84. $14q - q^2$

85. $m^3 - 5m^2 - 25m$

86. $\dfrac{k}{k^2+25}$

87. $\dfrac{n}{1 + \ln n}$

88. $\dfrac{(5/4)^p}{p}$

89. $\dfrac{i^3}{2^i}$

90. $\dfrac{m!}{m^2}$

91. $\dfrac{7^k}{k!}$

92. $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2j)}{j!}$

93. $\dfrac{(2m)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}$

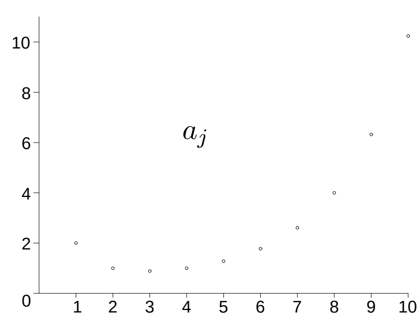
94. $c_0 = 0, \;\; c_n = c_{n-1} + \dfrac{8}{n} - 2$

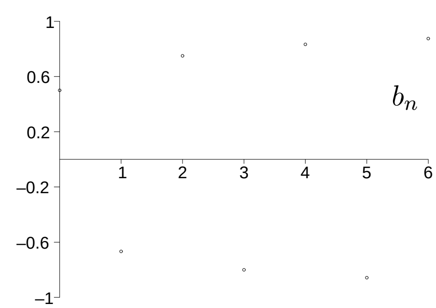
95. $r_1 = \sqrt{2}, \;\; r_k = \sqrt{2 + r_{k-1}}$

1.5 Sucesiones convergentes

Una propiedad importante de las sucesiones es lo que sucede conforme el índice tiende a infinito. Recuerde que una sucesión es una función con dominio $\{ K, \; K+1, \; K+2, \; \dots \}$ para algún $K \in \mathbb{Z}$, y como tal puede ser graficada en un plano cartesiano.

Considere por ejemplo el gráfico de $a_j = \dfrac{2^j}{j^2}$ para $j \geq 1$, abajo a la izquierda, y el de $b_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$ para $n \geq 0$, a la derecha:





En el primer gráfico vemos que conforme $j \to \infty$, a_j parece también tender a infinito. Y en el segundo parece que los términos de $\{ b_n \}$ con índice par, es decir, b_0, b_2, b_4, $\dots$, tienden a 1, mientras que los impares tienden a -1.

Para formalizar estas ideas se habla del límite de una sucesión.

Definición (límite de una sucesión)

Si $\{ a_n \}$ es una sucesión, se dice que su límite es el número L, y se escribe

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n, \quad L = \lim a_n \quad \text{o} \quad a_n \to L$$

si a_n se acerca a L conforme n tiende a infinito.

Se dice que el límite de la sucesión es infinito, y se escribe $\lim a_n = \infty$, si a_n crece sin cota conforme n tiende a infinito.

Y se dice que el límite es menos infinito, $\lim a_n = -\infty$, si a_n decrece sin cota conforme n tiende a infinito.

Si una sucesión tiene un límite real se dice que *converge* o que es *convergente*. De otra manera, *diverge* o es *divergente*.

Al referirse al límite de una sucesión se sobreentiende que el índice tiende a infinito. Así, aunque está bien escribir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, basta con $\lim a_n$.

Mucho de lo que ya sabemos sobre límites al infinito para funciones reales se aplica también a sucesiones. Por ejemplo, es claro que $\lim(1/n) = 0$ y que $\lim(1 - n^2) = -\infty$.

Teorema

Sea $N \in \mathbb{Z}$, y sea $f\colon [N, \infty[\to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces también $\lim f(n) = L$.

Ejemplo 23: límite de una sucesión con forma indeterminada

Calcular $\lim \dfrac{2^j}{j^2}$.

Conforme $j \to \infty$, tanto el numerador 2^j como el denominador j^2 tienden a infinito, de modo que este límite tiene la forma indeterminada ∞/∞.

No se puede usar la regla de L'Hôpital en sucesiones, porque esta regla involucra derivadas y las sucesiones no se pueden derivar en el sentido usual[6]. Pero podemos aprovechar el teorema anterior si definimos la función

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2}$$

y calculamos su límite al infinito. Este límite sigue siendo de la forma ∞/∞, pero ahora sí podemos usar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

Ahora, según el teorema, $\lim \dfrac{2^j}{j^2} = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Repaso

Calcule $\lim \dfrac{m + \ln m}{m}$. Solución: 1

No todos los límites de sucesiones en forma indeterminada pueden resolverse con la regla de L'Hôpital, porque hay funciones de números enteros que no se pueden extender a funciones de variable real. De manera especial debemos estar atentos a expresiones como $(-1)^n$ y $n!$, que no se extienden fácilmente a los reales[7].

Cuando no es posible usar L'Hôpital en el cálculo del límite de una sucesión, tal vez se pueda usar alguno de los dos teoremas siguientes.

[6]Recuerde que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico en ese punto. Pero los gráficos de sucesiones están formados por puntos aislados y no tienen rectas tangentes.

[7]Estas dos sí se pueden extender a los reales, pero no siempre es práctico hacerlo. De hecho, $(-1)^n = \cos(\pi n)$ y $n! = \int_0^\infty t^n \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (cosa que no pretenderemos demostrar aquí), que claramente se extienden a $f(x) = \cos(\pi x)$ y $g(x) = \int_0^\infty t^x \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ respectivamente, con dominio al menos $[0, \infty[$.

El primero de los dos dice que si tres sucesiones se mantienen en orden de menor, mediana y mayor, y si los límites de la menor y de la mayor son iguales, entonces el límite de la mediana también es igual al de las otras dos.

Teorema del encaje

Sean $\{ a_n \}$, $\{ b_n \}$ y $\{ c_n \}$ tres sucesiones, y sea $K \in \mathbb{Z}$, tales que

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq K$, y
- $\lim a_n = \lim c_n$.

Entonces $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$.

Ejemplo 24: límite de una sucesión con $(-1)^k$

Calcular el límite de $f_k = \dfrac{2k^2 + (-1)^k\, 3k}{5k^2 - 2k + 2}$.

El límite de $(-1)^k$ no existe, así que ni siquiera es claro cuál forma tiene $\lim f_k$. De todos modos, empecemos por decir que $-1 \leq (-1)^k \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$2k^2 - 3k \;\leq\; 2k^2 + (-1)^k\, 3k \;\leq\; 2k^2 + 3k$$

y como el denominador $5k^2 - 2k + 2$ es positivo para todo k, la desigualdad se mantiene al dividir, y así llegamos a

$$\frac{2k^2 - 3k}{5k^2 - 2k + 2} \;\leq\; f_k \;\leq\; \frac{2k^2 + 3k}{5k^2 - 2k + 2}$$

Ahora, el límite de la sucesión a la izquierda es

$$\lim \frac{2k^2 - 3k}{5k^2 - 2k + 2} = \lim \frac{k^2(2 - 3k^{-1})}{k^2(5 - 2k^{-1} + 2k^{-2})} = \lim \frac{2 - 3k^{-1}}{5 - 2k^{-1} + 2k^{-2}} = \frac{2}{5}$$

(porque $k^{-1} \to 0$ y $k^{-2} \to 0$), y también el de la sucesión a la derecha es

$$\lim \frac{2k^2 + 3k}{5k^2 - 2k + 2} = \lim \frac{k^2(2 + 3k^{-1})}{k^2(5 - 2k^{-1} + 2k^{-2})} = \lim \frac{2 + 3k^{-1}}{5 - 2k^{-1} + 2k^{-2}} = \frac{2}{5}$$

De esa manera, como el límite de la sucesión menor es igual al de la sucesión mayor, podemos aplicar el Teorema del encaje y concluir que el límite de la sucesión en medio es el mismo:

$$\lim \frac{2k^2 + (-1)^k\, 3k}{5k^2 - 2k + 2} = \frac{2}{5}$$

Repaso

Calcule $\lim \dfrac{5 + (-2)^n}{3^n}$. Solución: 0

Ejemplo 25: límite de una sucesión con factoriales

Calcular $\lim y_n$ donde $y_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$.

Este límite tiene la forma indeterminada ∞/∞, pero ya vimos que no es sencillo extender la fórmula a una función de variable real para usar la regla de L'Hôpital porque los factoriales están definidos solamente para enteros.

Aún así, notemos que

$$
\begin{aligned}
y_n = \frac{3 \quad \cdot \quad 3 \quad \cdots \quad 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n)(2n+1)} &= \frac{3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{4 \cdot 5} \cdot \frac{3}{6 \cdot 7} \cdots \frac{3}{(2n)(2n+1)} \\
&< 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots \frac{3}{(2n)(2n+1)}
\end{aligned}
$$

lo que sugiere que $y_n \leq \dfrac{3}{(2n)(2n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobémoslo por inducción[8].

- Para $n = 1$: $y_1 = \dfrac{3^1}{3!} = \dfrac{1}{2}$, y $\dfrac{3}{(2)(3)} = \dfrac{1}{2}$, así que la desigualdad se cumple.
- Si $y_n \leq \dfrac{3}{(2n)(2n+1)}$, veamos que también $y_{n+1} \leq \dfrac{3}{(2n+2)(2n+3)}$.

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= \frac{3^{n+1}}{(2[n+1]+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!} \\
&= \frac{3^n \cdot 3}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{3^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\
&\leq \frac{3}{(2n)(2n+1)} \cdot \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} && \text{por hipótesis de inducción} \\
&< 1 \cdot \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} && \text{porque } (2n)(2n+1) \geq 2 \cdot 3 > 3
\end{aligned}
$$

Finalmente usamos el Teorema del encaje: como $0 \leq y_n \leq \dfrac{3}{(2n)(2n+1)}$, y como $\lim 0 = \lim \dfrac{3}{(2n)(2n+1)} = 0$, concluimos que

$$
\lim \frac{3^n}{(2n+1)!} = 0
$$

Repaso

Compruebe que $\lim \dfrac{2^k}{k!} = 0$.

[8]Una expresión con puntos suspensivos no es muy confiable, porque no es perfectamente claro qué esconden los puntos (recuerde la advertencia sobre puntos suspensivos en el Ejemplo 17, página 21). Por eso planteamos la desigualdad solamente como una conjetura, para luego demostrarla por inducción.

Otro teorema relacionado con límites de sucesiones comparables dice que si una sucesión es menor que otra, y la menor tiende a infinito, entonces la mayor también tiende a infinito (podríamos decir que la menor "empuja" a la mayor, y llamar a este *Teorema del "empuje"*).

Teorema

Sean $\{ a_n \}$ y $\{ b_n \}$ dos sucesiones, y sea $K \in \mathbb{Z}$, tales que

- $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq K$, y
- $\lim a_n = \infty$.

Entonces también $\lim b_n = \infty$.

Ejemplo 26: otro límite con factoriales

Demostrar que $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Llamemos $q_n = \sqrt[n]{n!} = (n!)^{1/n}$. El límite de q_n es de la forma ∞^0, indeterminado. Usualmente para esa forma se empieza por tomar logaritmo primero y límite después. Calculemos entonces

$$\begin{aligned}
\ln q_n &= \ln(n!)^{1/n} = \frac{1}{n}\ln(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) \\
&= \frac{1}{n}\big(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n\big) \\
&\geq \frac{1}{n}\int_1^n \ln t \,\mathrm{d}t && \text{(ejercicio 10, página 6)} \\
&= \frac{1}{n}(t\ln t - t)\Big|_1^n = \frac{1}{n}(n\ln n - n + 1) \\
&= \ln n - 1 + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Como la función exponencial natural es creciente, al aplicarla en ambos lados de

$$\ln q_n \geq \ln n - 1 + \frac{1}{n}$$

la desigualdad se conserva, y llegamos a

$$q_n \geq \mathrm{e}^{\ln n - 1 + 1/n} = \mathrm{e}^{\ln n}\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{1/n} = n\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{1/n}$$

Por último, como $\lim(n\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{1/n}) = \infty\cdot\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{0} = \infty$, concluimos por el teorema anterior que entonces $\lim q_n = \infty$, como se quería probar.

Repaso

Compruebe que $\lim(j + \cos j) = \infty$.

Terminamos esta sección mencionando un concepto más acerca de sucesiones, el de sucesión *acotada* (una sucesión es acotada y si sus valores no van “más allá” de un cierto punto), y una propiedad importante de sucesiones acotadas que necesitaremos en el próximo capítulo.

Definición (sucesión acotada)

Una sucesión $\{ a_n \}$ es *acotada superiormente* por un número $C \in \mathbb{R}$ si $a_n \leq C$ para todo n.

En este caso, el número C es una *cota superior* de la sucesión.

Teorema

Si la sucesión $\{ a_n \}$ es creciente y acotada superiormente por C, entonces $L = \lim a_n$ existe, y es $L \leq C$.

Ejercicios

Calcule el límite de la sucesión.

96. $\dfrac{3}{1-m}$

97. $\dfrac{(k+1)!}{(k-1)!}$

98. $2^j\, j!$

99. $\dfrac{2q^2-3q}{4+3q^2}$

100. $\dfrac{2n^3-5n+6}{4-n^3}$

101. $\dfrac{i^2+1}{i+9}-i$

102. $\dfrac{3k^2-8k}{5+6k^2}$

103. $\dfrac{4j-3}{\sqrt{5j^2-j+1}}$

104. $\dfrac{p-\sqrt{p^2+1}}{p+6}$

105. $\dfrac{1-n}{1+\ln n}$

106. $\dfrac{4+\ln^2 i}{i+2}$

107. $\dfrac{1}{\ln(m-1)-\ln m}$

108. $\dfrac{\mathrm{e}^q+\mathrm{e}^{-q}}{q^2}$

109. $j-\ln j$

110. $p-\mathrm{e}^p$

111. $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)^p$

112. $\left(1+\dfrac{c}{n}\right)^n$ con c constante

113. $\left(2+\dfrac{1}{k}\right)^k$

114. $\sqrt[n]{n}$

115. $\dfrac{2+\cos k}{k}$

116. $\dfrac{p+2\operatorname{sen} p}{p}$

117. $\dfrac{3}{m+\cos m}$

118. $\dfrac{q}{(-5)^q}$

119. $\dfrac{(-2)^j+j}{3^j}$

120. $\dfrac{5+(-1)^n n}{n+3}$

121. $\dfrac{k}{4+\cos 2k}$

122. $\dfrac{2i^2-5i(-1)^i}{8i-3}$

123. $\dfrac{5\cos p-2p}{\sqrt{p}}$

124. $\dfrac{n!}{2^n}$

125. $\dfrac{q!}{q-1}$

126. Demuestre que si $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq K$, y $b_n \to -\infty$, entonces $a_n \to -\infty$.

127. Demuestre que si $|x_n| \to 0$ entonces $x_n \to 0$.

128. Sea $c > 0$ un número constante. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^c} = 1$.

129. Sea $p(x)$ un polinomio de cualquier grado. Demuestre que $\lim \sqrt[n]{p(n)} = 1$.

130. Sea r la sucesión definida recursivamente por $r_1 = \sqrt{2}$ y $r_k = \sqrt{2 + r_{k-1}}$ para $k \geq 1$. En el ejercicio 95 se determinó que r es creciente.

(a) Demuestre que $\{ r_k \}$ es acotada superiormente por 2.

(b) Concluya que $\{ r_k \}$ es convergente, y calcule su límite.

Capítulo 2
Series

En el capítulo anterior vimos que una sucesión es una lista de números. En este capítulo nos encontramos con el concepto de *serie*, que en pocas palabras puede describirse como la suma de los términos de una sucesión. Digamos entonces que una serie es una suma de infinitos números.

En realidad la palabra *serie* puede usarse en Matemáticas con un significado más amplio. Por un lado, es posible definir sucesiones finitas, y la suma de una sucesión finita sería entonces una serie finita. Por otro lado, también hay sucesiones (finitas o infinitas) no solo de números, sino de funciones, de matrices y de otros objetos matemáticos.

Pero cuando hablemos aquí de series estaremos refiriéndonos precisamente a una *serie numérica infinita*.

2.1 Series, sumas totales y sumas parciales

Como punto de partida, consideremos una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números reales (una lista de números). Su serie es la suma de los términos de la sucesión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Es natural preguntarse cómo se pueden sumar infinitos números. ¡Nunca se terminaría! Al hablar de la suma de una serie nos referimos realmente al límite de las sumas conforme la cantidad de términos sumados tiende a infinito.

Ejemplo 1: calcular la suma de una serie

Sea $x_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$ para $k = 2, 3, \ldots$. Vamos a calcular el valor de la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} x_k = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \cdots$$

Denotemos $S_n = \sum_{k=2}^{n} x_k$, es decir $S_n = x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, que llamaremos *suma parcial* n-ésima de la serie (se llama así porque S_n es la suma de una parte de la serie, solo hasta el término n-ésimo). Con esto definimos una sucesión de sumas parciales S_2, S_3, S_4, ..., cuyos primeros valores son

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}\\
S_3 &= \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{2}{3}\\
S_4 &= \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} = S_3 + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}\\
S_5 &= \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 4} = S_4 + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

En este momento podemos observar que parece haber un patrón: aparentemente $S_n = (n-1)/n$ para todo $n \geq 2$. Comprobémoslo por inducción.

Para $n = 2$, es claro que $S_2 = (2-1)/2$. Y suponiendo que $S_n = (n-1)/n$ fácilmente vemos que

$$S_{n+1} = S_n + x_{n+1} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)(n)} = \frac{(n-1)n+n}{(n+1)(n)} = \frac{n}{n+1}$$

como debía ser.

Entonces tenemos, por ejemplo, $S_{10} = 0.9$ (es decir, al sumar desde $k = 2$ hasta $k = 10$ la suma acumulada es 0.9); $S_{500} = 0.998$ (la suma acumulada hasta $k = 500$ es 0.998). Finalmente, la suma total de la serie es

$$\sum_{k=2}^{\infty} x_k = \lim S_n = \lim \frac{n-1}{n} = 1$$

Repaso

Calcule el valor de la suma $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2)^k$. Solución: 1

Luego de este ejemplo podemos definir ya los conceptos principales sobre series. En general, no es necesario que la sucesión esté numerada a partir de 0 ni de 1.

Definición (serie)

Sea $\{ a_k \}$ una sucesión numerada a partir de un entero N: a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, ... Su *serie* es la suma

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$$

Los números a_N, a_{N+1}, ... son los *términos* de la serie.

Definición (suma parcial, suma total)

Para un entero $n \geq N$, la *suma parcial* n-ésima de la serie $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ es

$$S_n = \sum_{k=N}^{n} a_k = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n$$

La *suma* (total) de la serie es

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

si el límite existe. En ese caso se dice que la serie *converge* o que es *convergente*; si el límite no existe, se dice que la serie *diverge* o que es *divergente*.

Ejemplo 2: una serie divergente

Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^j$.

Las primeras sumas parciales son

$$\begin{aligned}
S_0 &= \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1\\
S_1 &= \left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{5}{2} = 2.5\\
S_2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4.75\\
S_3 &= 4.75 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 8.125\\
S_4 &= 8.125 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 13.1875
\end{aligned}$$

Vemos que las sumas parciales crecen rápidamente sin parecer aproximarse a ningún límite real. De hecho, resulta que $S_n \geq n+1$ siempre, ya que

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^j \geq \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1 \quad \forall\, n \geq 0$$

(la desigualdad se debe a que $(3/2)^j \geq 1$ para todo $j \geq 0$). Finalmente, como $n+1 \to \infty$ y $S_n \geq n+1$, se concluye (por el "teorema del empuje", página 33) que también $S_n \to \infty$.

Por consiguiente, $\sum_{j=0}^{\infty}(3/2)^j$ diverge.

Repaso

Compruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots$ es divergente.

Cuando el índice inicial en una serie no sea importante, generalmente lo omitiremos y escribiremos una expresión como $\sum a_n$, donde se entiende que la suma empieza en algún índice entero y continúa hasta infinito. Que una serie converja o diverja no depende del índice inicial, como dice el siguiente teorema. Por eso, cuando estemos interesados solamente en averiguar si una serie converge o diverge, y no en el valor de su suma, podemos despreocuparnos del índice de inicio.

Teorema (converger o divergir no depende del índice inicial)

Sea x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, $\ldots$ una sucesión de números reales. Entonces para cualesquiera enteros $A \geq N$ y $B \geq N$ se tiene que

$$\sum_{k=A}^{\infty} x_k \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=B}^{\infty} x_k \text{ converge}$$

Las series convergentes se pueden combinar sumándolas, restándolas o multiplicándolas por constantes, como dice el siguiente teorema.

Teorema (combinación de series convergentes)

Si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ son series convergentes, y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces también $\sum(ax_n + by_n)$ es una serie convergente, y su suma es

$$\sum \big(ax_n + by_n\big) = a\sum x_n + b\sum y_n$$

En este teorema es indispensable la hipótesis de que $\sum x_n$ y $\sum y_n$ ambas convergen. Podría ser que $\sum(ax_n+by_n)$ converja sin que las sumas individuales lo hagan. Un ejemplo muy sencillo: si $x_n = n$, $y_n = n$, $a = 1$ y $b = -1$, entonces

- $\sum x_n = \sum n$ diverge (vea el repaso después del ejemplo anterior)
- $\sum y_n = \sum n$ diverge
- $\sum(ax_n + by_n) = \sum(n - n) = \sum 0$ converge

Lo anterior implica que no siempre se puede descomponer una serie convergente en partes separadas. Como acabamos de ver, sería erróneo decir que $\sum(n-n) = \sum n - \sum n$, porque sería como que $0 = \infty - \infty$: ¡falso! (pero vea el ejercicio 15).

El criterio de la divergencia

Una propiedad muy importante que permite determinar rápidamente si algunas series divergen es el llamado *criterio de la divergencia*, que enunciaremos en un momento. Veamos primero de qué se trata.

Como hemos visto, las sumas parciales de una serie cumplen que $S_n = S_{n-1} + a_n$, de donde se despeja $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Ahora, si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces existe el límite de S_n, que además es igual al de S_{n-1}. Por lo tanto,

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$$

(porque los dos últimos límites existen y son iguales).

Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema (criterio de la divergencia, CD)

Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $a_n \to 0$.
De manera equivalente, si $a_n \not\to 0$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

En palabras, podemos decir que si una serie converge entonces sus términos tienden a cero, o bien que si una sucesión de términos no tiende a cero[1] entonces su serie diverge.

Conociendo ese teorema, era inmediato que la serie del ejemplo anterior, $\sum_{j=0}^{\infty}(3/2)^j$, divergía: la sucesión $(3/2)^j$ no tiende a cero.

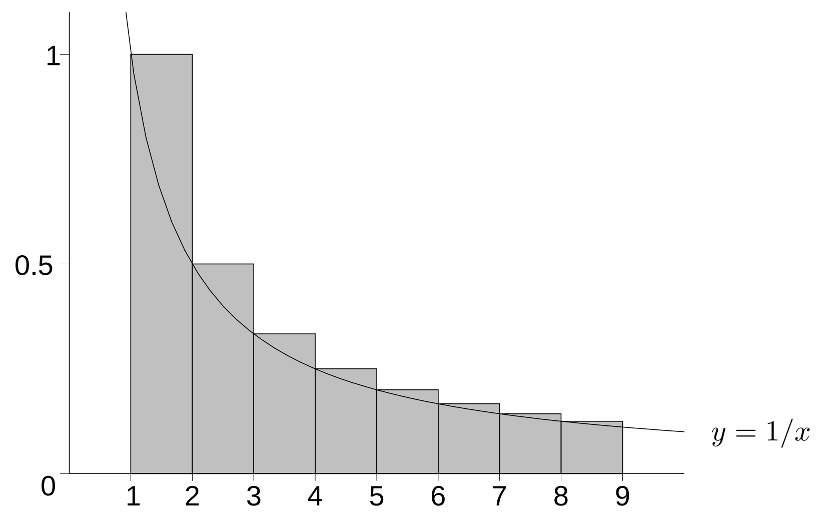
Note que el criterio anterior no dice que si una sucesión tiende a cero entonces la serie converja, ni dice que si una serie diverge entonces la sucesión no tienda a cero. Es posible que una sucesión tienda a cero y su serie diverja, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: otra serie divergente

Comprobar que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge (aunque la sucesión $\{\,\frac{1}{k}\,\}$ tiende a cero).

En el siguiente gráfico tenemos la curva con ecuación $y = 1/x$. Tenemos también una sucesión de rectángulos, todos con base 1 y con alturas respectivas 1, 1/2, 1/3, 1/4, etc. Entonces el área del rectángulo k-ésimo es $a_k = 1/k$, y el área total de los primeros n rectángulos es $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, la suma parcial n-ésima de nuestra serie. Por ejemplo, el área sombreada en el gráfico es $S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8}$.

[1] Aquí la frase “una sucesión no tiende a cero”, simbolizada en el teorema como “$a_n \not\to 0$”, puede significar que el límite es distinto de cero o que el límite del todo no existe.



Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, vemos que la suma de las áreas de los primeros n rectángulos excede el área bajo la curva en el intervalo $[1, n+1]$. Por ejemplo, para $n = 3$, el área de los tres primeros rectángulos, $a_1 + a_2 + a_3$, es mayor que el área bajo la curva en el intervalo $[1, 4]$. Podemos escribir

$$S_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1)$$

para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$ (vea una demostración formal en la discusión luego del gráfico en la página 55).

Por último, como $S_n > \ln(n+1) \to \infty$, resulta que también $S_n \to \infty$ (por el "teorema del empuje", página 33), y entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es divergente[2].

Repaso

Compruebe que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.

Comparando los ejemplos 1 y 3 recibimos una advertencia seria: el hecho de que una sucesión tienda a cero no implica que su serie converja. Una vez más:

- Si $a_n \not\to 0$, entonces $\sum a_n$ diverge (lo garantiza el CD).
- Si $a_n \to 0$, no se sabe si $\sum a_n$ converge (como en el Ejemplo 1) o diverge (como en el Ejemplo 3).

[2] La serie diverge *muy* lentamente. Es decir, las sumas parciales tienden a infinito pero crecen muy despacio. Para hacerse una idea, vea el ejercicio 14.

Ejercicios

Calcule la suma de la serie, si converge.

1. $\displaystyle\sum_{m=4}^{\infty} \frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+m}}$, sabiendo que $S_{N-1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{N}}{N}$

2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2-2n}$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=3}^{K} \frac{4}{n^2-2n} = \frac{3K^2-7K+2}{K^2-K}$

3. $\displaystyle\sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p^2-p-2}$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{p=3}^{m} \frac{1}{p^2-p-2} = \frac{11m^3-18m^2-11m+6}{18m^3-18m}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (4/5)^k$, sabiendo que $S_n = 5 - \dfrac{4^{n+1}}{5^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log_3\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$, sabiendo que $S_K = -\log_3(2K+1)$

6. $\displaystyle\sum_{j=5}^{\infty} (-2)^j$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{j=5}^{n} (-2)^j = \frac{32-(-2)^{n+1}}{3}$

Demuestre que la serie diverge.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n}{1+n}$

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^k}{k+2^k}$

9. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1+3^j}{j+\mathrm{e}^j}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

11. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p+4}}$

12. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m^2+8}$

13. Trace un gráfico como el del Ejemplo 3 pero con los rectángulos bajo la curva (con alturas respectivas 1/2, 1/3, etc).

(a) Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ para todo $n \ge 2$.

(b) Concluya que $\displaystyle\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Un hombre ganó la Lotería Extrema, en la que el premio mayor era un número infinito de dólares. Cuando se presentó a cobrar el premio, le entregaron un cheque por \$1. "¿Pero el premio no era un número infinito de dólares?", preguntó. "Así es", le dijo el encargado. "Hoy le damos un dólar; venga mañana por medio dólar; pasado mañana por un tercio de dólar; el siguiente día por un cuarto, y así sucesivamente. Aquí trabajamos todos los días".

Suponga que cada año tiene 365 días.

(a) Si el ganador se presenta a cobrar su parte del premio cada día durante los próximos diez años, ¿cuánto cobrará en total hasta entonces? ¿Y durante los siguientes cien años?

(b) ¿Cuántos años tardaría en cobrar un acumulado de $20?

15. Sean $\{ x_n \}$ y $\{ y_n \}$ dos sucesiones, y a y b dos números distintos de cero. Ya vimos que si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ ambas convergen entonces $\sum(ax_n + by_n)$ converge. También vimos que aunque $\sum x_n$ y $\sum y_n$ ambas diverjan, $\sum(ax_n + by_n)$ podría converger. Ahora demuestre que[3]...

(a) ... si $\sum x_n$ converge y $\sum(ax_n + by_n)$ converge, entonces $\sum y_n$ converge.

(b) ... si $\sum x_n$ converge y $\sum(ax_n + by_n)$ diverge, entonces $\sum y_n$ diverge.

(c) ... si $\sum x_n$ converge y $\sum y_n$ diverge, entonces $\sum(ax_n + by_n)$ diverge.

(d) ... si $\sum x_n$ diverge y $\sum(ax_n + by_n)$ converge, entonces $\sum y_n$ diverge.

2.2 Series telescópicas

Por lo general, el problema de calcular la suma de una serie es un problema difícil. Muchas veces tendremos que contentarnos con averiguar solamente si una serie converge o diverge, y aun en caso de que converja no podremos calcular la suma.

Un tipo de series en las que usualmente es fácil calcular la suma es el de *series telescópicas.* En estas series, una parte de cada término se cancela, al sumar, con una parte de otros términos anteriores o siguientes. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 4: una serie telescópica

Calcular la suma de la serie $S = \displaystyle\sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{p}{p-1} - \frac{p+2}{p+1} \right)$.

Algunos de los primeros términos en la suma son

$$S = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{6}{5} - \frac{8}{7}\right) + \left(\frac{7}{6} - \frac{9}{8}\right) + \cdots$$

Vemos que la fracción $\frac{5}{4}$ aparece restada y luego sumada, y que lo mismo sucede con $\frac{6}{5}$ y otras fracciones. Vamos a aprovechar esto para simplificar las sumas parciales. Las primeras son

[3] En resumen, que entre las series $\sum x_n$, $\sum y_n$ y $\sum(ax_n + by_n)$, el número de convergentes siempre es impar (las tres o solo una), y el número de divergentes siempre es par (dos o ninguna).

$$\begin{aligned}
S_3 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \\
S_4 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right) \\
S_5 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{6}\right) = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{6}{5} - \frac{7}{6} \\
S_6 &= S_5 + \left(\frac{6}{5} - \frac{8}{7}\right) = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{7}{6} - \frac{8}{7} \\
S_7 &= S_6 + \left(\frac{7}{6} - \frac{9}{8}\right) = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{8}{7} - \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Ya podemos ver el patrón (y lo demostraríamos por inducción si quisiéramos):

$$S_p = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{p+1}{p} - \frac{p+2}{p+1}$$

al menos para $p \geq 4$.

Como la suma de la serie es el límite de las sumas parciales, calculamos

$$\begin{aligned}
S = \lim S_p &= \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \lim \frac{p+1}{p} - \lim \frac{p+2}{p+1} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - 1 - 1 = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Repaso

Calcule la suma de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\cos p}{p+1} - \frac{\cos(p-1)}{p}\right)$. Solución: -1

Agrupar los términos de una serie

Cuando se agrupen, reordenen, cancelen o reagrupen términos de una serie, es importante limitarse a hacerlo solamente dentro de las sumas parciales. Veamos por qué.

Una serie famosa, llamada la *serie de Grandi*, es

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Si se agrupa sin cuidado, podría decirse que

$$G = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

pero también que

$$G = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

lo cual es imposible: ¿$G = 0 = 1$?

Lo correcto es agrupar solamente dentro de las sumas parciales[4]:

$$\begin{aligned} G_0 &= 1 \\ G_1 &= 1 - 1 = 0 \\ G_2 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ G_3 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Aquí vemos que $G_n = 1$ si n es par, y $G_n = 0$ si n es impar. Por eso no existe el límite de G_n y entonces la serie es divergente.

Ejemplo 5: otra serie telescópica

Calcular la suma de la serie $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{4k^2 - 1}$.

Esta serie no es telescópica en esa forma, pero podemos empezar por descomponer la expresión $6/(4k^2 - 1)$ como una diferencia de fracciones. Para esto usamos la técnica de descomposición en fracciones parciales que usted recordará de algún curso de cálculo, en el contexto de integración de fracciones racionales[5]:

$$\frac{6}{4k^2 - 1} = \frac{6}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

donde A y B son constantes que se determinan por métodos algebraicos. En este caso resulta que $A = 3$ y $B = -3$, así que

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2k-1} - \frac{3}{2k+1} \right)$$

A partir de aquí procedemos como en el Ejemplo 4.

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{5} \right) = 1 - \frac{3}{5} \\ S_3 &= 1 - \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{7} \right) = 1 - \frac{3}{7} \\ S_4 &= 1 - \frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{9} \right) = 1 - \frac{3}{9} \end{aligned}$$

Sin más, detectamos ya el patrón: $S_n = 1 - 3/(2n+1)$, por lo que la suma de la serie es

$$S = \lim S_n = 1 - 0 = 1$$

[4]La limitación se debe a que la propiedad asociativa de la suma, la que dice que $a + (b + c) = (a + b) + c$, se aplica a la suma de tres números. Tres. Por inducción se puede demostrar que también se cumple para la suma de cualquier cantidad *finita* de números, como las sumas parciales. Pero es erróneo pretender aplicarla a una suma infinita.

[5]O tal vez no la recuerde, pero al menos sabe dónde buscarla para repasar.

Repaso

Calcule la suma de $\displaystyle\sum_{j=5}^{\infty} \frac{6}{9j^2 - 3j - 2}$. Solución: $2/13$

Fórmula para el cálculo de algunas series telescópicas

Hay una forma abreviada de calcular la suma de una serie telescópica cuando sus términos se pueden escribir como la diferencia de dos términos inmediatamente consecutivos de alguna sucesión. Eso es, si b_k es alguna sucesión, este atajo permite calcular fácilmente la suma de $\sum(b_k - b_{k+1})$, o determinar si esta serie diverge.

Teorema (suma de series telescópicas)

Si b_k es una sucesión numerada a partir de N, entonces

$$\sum_{k=N}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_N - \lim b_k, \qquad \text{si el límite } \lim b_k \text{ existe,}$$

o la serie diverge si el límite no existe.

La demostración es sencilla: usando la misma idea de los ejemplos anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}
S_N &= b_N - b_{N+1}\\
S_{N+1} &= b_N - b_{N+1} + (b_{N+1} - b_{N+2}) = b_N - b_{N+2}\\
S_{N+2} &= b_N - b_{N+2} + (b_{N+2} - b_{N+3}) = b_N - b_{N+3}\\
S_{N+3} &= b_N - b_{N+3} + (b_{N+3} - b_{N+4}) = b_N - b_{N+4}
\end{aligned}$$

Vemos inductivamente que $S_{N+k} = b_N - b_{N+k+1}$, y entonces la suma total es el límite de las sumas parciales,

$$\lim_{k\to\infty} S_{N+k} = b_N - \lim_{k\to\infty} b_{N+k+1} = b_N - \lim b_k$$

(ya que $\lim b_{N+k+1} = \lim b_k$ porque N es constante).

En el Ejemplo 5 podríamos usar esta fórmula para simplificar un poco los últimos cálculos, luego de haber descompuesto la fracción en fracciones parciales. Una vez que tenemos

$$S = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2k-1} - \frac{3}{2k+1}\right)$$

definimos $b_k = 3/(2k-1)$, confirmamos que así $b_{k+1} = 3/(2k+1)$, y aplicamos el teorema:

$$S = \sum_{k=2}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_2 - \lim b_k = \frac{3}{2(2)-1} - \lim \frac{3}{2k-1} = 1 - 0 = 1$$

Una limitación importante de este teorema es que se aplica solamente al caso de que los términos de la serie sean resta de dos términos *inmediatamente consecutivos* de una sucesión. Ese no era el caso en el Ejemplo 4, donde teníamos la serie

$$S = \sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{p}{p-1} - \frac{p+2}{p+1} \right)$$

Si aquí definiéramos $b_p = p/(p-1)$, resultaría que b_{p+1} no es igual a la fracción restada, $(p+2)/(p+1)$. Sí es cierto que $b_{p+2} = (p+2)/(p+1)$, y entonces podemos aprovechar el teorema si escribimos

$$\frac{p}{p-1} - \frac{p+2}{p+1} = b_p - b_{p+2} = (b_p + b_{p+1}) - (b_{p+1} + b_{p+2}) = c_p - c_{p+1}$$

cuando definimos $c_p = b_p + b_{p+1}$ (porque entonces $c_{p+1} = b_{p+1} + b_{p+2}$).

Entonces podemos aplicar el teorema a la sucesión c_p, y tendremos que

$$\begin{aligned} S = \sum_{p=3}^{\infty}(c_p - c_{p+1}) &= c_3 - \lim c_p = (b_3 + b_4) - \lim(b_p + b_{p+1}) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \lim \left(\frac{p}{p-1} + \frac{p+1}{p} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - (1+1) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Vea también el ejercicio 39.

Ejercicios

Calcule la suma de la serie, o indique si diverge.

16. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m+1}{3m-2} - \frac{m+2}{3m+1} \right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n^2} - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \right)$

18. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(j\, 2^j - 4(j+2)\, 2^j \right)$

19. $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\ln i}{4i-2} - \frac{\ln(i+1)}{4i+2} \right)$

20. $\displaystyle\sum_{q=3}^{\infty} \left(\frac{q}{\log_3(q-1)} - \frac{q+2}{\log_3(q+1)} \right)$

21. $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \left(p\, \mathrm{e}^{-p} - (p+1)\, \mathrm{e}^{-p-1} \right)$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k \cos k - (k-1)\cos(k-1))$

23. $\displaystyle\sum_{q=4}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} q}{q-3} - \frac{\operatorname{sen}(q+2)}{q-1} \right)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)$ donde $\{ a_n \}$ es una sucesión convergente

25. $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} \frac{3}{(q+3)(q+4)}$

26. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{6}{(2m-1)(2m-3)}$

27. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k+k^2}$

28. $\displaystyle\sum_{i=-1}^{\infty} \frac{6}{2+3i-9i^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n}$

30. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{4k^2-4k-3}$

31. $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{18}{(3i-2)(3i+4)}$

32. $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{6}{1-q^2}$

33. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2p+3)(p+1)} - \frac{1}{2p^2+p}\right)$

34. $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \ln\left(\frac{j^2-1}{j^2}\right)$

35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(2k-1)(k+1)}{(2k+1)k}\right)$

36. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p+1}}$

37. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}}{\sqrt{m^2-1}}$

38. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-ne}{\mathrm{e}^n}$

39. Sea $\{ b_n \}$ una sucesión convergente. Demuestre que...

(a) $\sum_{k=N}^{\infty}(b_k - b_{k+2}) = b_N + b_{N+1} - 2\lim b_k$

(b) $\sum_{k=N}^{\infty}(b_k - b_{k+3}) = b_N + b_{N+1} + b_{N+2} - 3\lim b_k$

(c) $\sum_{k=N}^{\infty}(b_k - b_{k+p}) = \left(\sum_{i=N}^{N+p-1} b_i\right) - p\lim b_k$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

2.3 Series geométricas y sus parientes

Otro tipo particular de series en las que también es posible calcular la suma (como en las series telescópicas de la sección anterior) es el de *series geométricas.* Estas son series en las que una base constante se eleva a exponentes sucesivos.

Definición (serie geométrica)

Una *serie geométrica* es una de la forma $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} r^k$, donde N es un número entero y r un número real.

Por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$

y

$$\sum_{j=-1}^{\infty} (-1/2)^j = (-1/2)^{-1} + (-1/2)^0 + (-1/2)^1 + (-1/2)^2 + \cdots$$

son series geométricas. La serie de Grandi que vimos en la sección anterior, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, también es geométrica.

Hay un criterio muy sencillo para determinar si una serie geométrica converge o no. Este criterio está basado en la igualdad

$$\begin{aligned}(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n)(1-r) &= (1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n)\\ &\quad -(r+r^2+r^3+r^4+\cdots+r^{n+1})\\ &= 1-r^{n+1}\end{aligned}$$

que implica, si $r \neq 1$, que $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Ahora veamos estos tres casos:

- Si $-1 < r < 1$ entonces $r^{n+1} \to 0$.
- Si $r \leq -1$ o $r > 1$, $\{r^{n+1}\}$ diverge.
- Si $r = 1$, la serie es $\sum 1^n = 1+1+1+\cdots$, que claramente diverge.

En resumen, concluimos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad \text{si } |r| < 1,$$

o bien la serie diverge si $|r| \geq 1$.

Ahora, si una serie geométrica empieza no en 0 sino en cualquier entero N, notemos que

$$\sum_{k=N}^{\infty} r^k = r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \cdots = r^N(1+r+r^2+\cdots) = r^N \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

Todo lo anterior demuestra el siguiente criterio.

Teorema (criterio de series geométricas, CSG)

La serie geométrica $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} r^k$ converge si y solo si $|r| < 1$, y en tal caso su suma es

$$\sum_{k=N}^{\infty} r^k = \frac{r^N}{1-r}$$

Una excepción muy poco probable se daría si fueran $r = 0$ y $N \leq 0$. En ese caso, ambos lados de la igualdad estarían indefinidos y la serie sería divergente.

Ejemplo 6: dos series geométricas

Para las dos series que mencionamos al inicio de la sección tenemos:

- $\sum_{n=3}^{\infty} 2^n$ diverge porque $|r| = 2$, mayor que 1.
- $\sum_{j=-1}^{\infty} (-1/2)^j$ converge porque $|r| = |(-1/2)| = 1/2$, menor que 1.

  La suma de esta serie es

$$\sum_{j=-1}^{\infty} (-1/2)^j = \frac{(-1/2)^{-1}}{1-(-1/2)} = -\frac{4}{3}$$

Repaso

Calcule la suma de $\sum_{m=4}^{\infty} 0.6^m$. Solución: 0.324

Ejemplo 7: separar una serie como combinación de dos geométricas

Calcular la suma de la serie $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1-(-3)^{n+2}}{2^{2n-1}}$.

Esta no es una serie geométrica, pero podemos descomponerla en varias partes que incluyen series geométricas, así:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1-(-3)^{n+2}}{2^{2n-1}} &= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1-(-3)^{n}\cdot(-3)^2}{2^{2n}\cdot 2^{-1}} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1-(-3)^{n}\cdot 9}{4^{n}\cdot \frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 4^n} - \frac{9\cdot(-3)^n}{\frac{1}{2}\cdot 4^n} \right) \\
&= 2\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 18\sum_{n=5}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

(en el último renglón, es válido separar las series porque ambas convergen).

En este punto tenemos una combinación de dos series geométricas, la primera con base $r_1 = 1/4$ y la segunda con base $r_2 = -3/4$. Como cada base tiene valor absoluto menor que 1, entonces ambas series convergen y la suma total es

$$2\cdot\frac{(1/4)^5}{1-(1/4)} - 18\cdot\frac{(-3/4)^5}{1-(-3/4)} = \frac{821}{336} \approx 2.44345$$

Repaso

Calcule la suma de $\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{5-2^{k+1}}{3^{2k}}$ Solución: 2187/56

Ejemplo 8: una aplicación de series geométricas

Una bola se deja caer desde una altura de 2.5 m. Cada vez que golpea el piso rebota a un 40% de la altura que había caído. Si continúa rebotando indefinidamente, ¿cuál será la distancia total que recorra?

La primera vez que golpea el suelo ha caído 2.5 m, así que rebotará a una altura de 1 m (40% de 2.5 m). Luego de subir 1 m y volver a bajarlo, habrá recorrido $2.5 + 1 + 1 = 4.5$ metros, y ahora rebotará a 0.4 m de altura (40% de 1 m). En total recorrerá, en metros,

$$\begin{aligned}
&2.5 + 1 + 1 + 0.4 + 0.4 + 0.16 + 0.16 + 0.064 + 0.064 + \cdots \\
&\quad = 2.5 + 2\left(1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots\right) \\
&\quad = 2.5 + 2\sum_{k=0}^{\infty} 0.4^k = 2.5 + 2\frac{0.4^0}{1-0.4} \quad (\text{porque } |0.4| < 1) \\
&\quad = 5.8\bar{3}
\end{aligned}$$

La distancia total será entonces $5.8\bar{3}$ m.

Repaso

Repita el ejercicio anterior pero con una bola lanzada desde 2 m y que cada vez rebota a la mitad de la altura que cayó. Solución: 6 m

Expansión decimal de números racionales

Es bien sabido que todos los números racionales tienen una expansión decimal finita o infinita periódica. Por ejemplo, $1/2 = 0.5$, finito, y $35/11 = 3.18181818\ldots$, infinito periódico[6].

Recíprocamente, también es cierto que cualquier expansión decimal finita y cualquier expansión decimal infinita periódica representan números racionales. Es fácil encontrar la fracción representada por una expansión finita. Por ejemplo,

$$4.735 = \frac{4735}{1000} = \frac{947}{200}$$

En el siguiente ejemplo vemos cómo encontrar la fracción representada por una expansión decimal infinita periódica.

Ejemplo 9: convertir un decimal a fracción

Escribir el decimal periódico $c = 3.7423423423423\ldots$ como una fracción de números enteros.

[6] En realidad podríamos simplificar la afirmación y decir que *todos* los números racionales tienen una expansión infinita periódica, si aceptamos que, por ejemplo, $1/2 = 0.50000\ldots$, $6/5 = 1.20000\ldots$ y así por el estilo.

Escribimos

$$\begin{aligned}
c &= 3.7 + 0.0423 + 0.0000423 + 0.0000000423 + \cdots \\
&= 3.7 + 0.0423\left(1 + 0.001 + 0.000001 + 0.000000001 + \cdots\right) \\
&= 3.7 + 0.0423\sum_{j=0}^{\infty} 0.001^j = \frac{37}{10} + \frac{423}{10000}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^j \\
&= \frac{37}{10} + \frac{423}{10000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{37}{10} + \frac{423}{10000-10} \\
&= \frac{37}{10} + \frac{423}{9990} = \frac{2077}{555}
\end{aligned}$$

Repaso

Compruebe[7] que $1.99999\ldots = 2$.

Ejercicios

Calcule la suma, si existe.

40. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} 0.6^k$

41. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} (-3/7)^q$

42. $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} (8/13)^n$

43. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} (-0.9)^{2p}$

44. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} (-0.9)^{-p}$

45. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} (5/6)^{q-2}$

46. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \left(3\cdot 2.3^{1-m} - 2(2/3)^{3m+1}\right)$

47. $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{3(-2)^{i+2} - 2\cdot 5^i}{4^{2i}}$

48. $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{3(-2)^{i+2} - 2\cdot 16^i}{4^{2i}}$

49. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^{1-2k} + 6}{(-3)^{1+2k}}$

50. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1 + 2^q + 3^q}{A^q}$ donde $A > 3$

51. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+3} - 4\frac{(-1)^n}{3^{n-2}} - \frac{1}{2n+1}\right)$

52. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 + j - 2^j}{(j^2+j)\,2^j}$

53. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\cdot 3^{m+1} + 5(m^2-1)}{3^m\,(m^2-1)}$

54. ¿Para cuáles valores de r converge la serie $\sum (7-2r)^n$?

55. ¿Para cuáles valores de r converge la serie $\sum 4^n\,(5+3r)^{2n}$?

[7] Viendo que $1.9999\ldots = 2$, la anterior nota al pie tiene aún más sentido, ya que podemos decir que $1/2 = 0.49999\ldots$, $6/5 = 1.19999\ldots$, etc.

56. Calcule el límite de la sucesión definida por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$ (entonces $a_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = \sqrt{5\sqrt{5}}$, $a_3 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ y así sucesivamente).

57. En el Ejemplo 8 (la bola que rebota), suponga que cada vez que la bola cae desde h metros tarda $t = 0.4516\sqrt{h}$ segundos (e igual tarda en subir desde el piso hasta h metros). Calcule el tiempo que tarda la bola rebotando hasta que se detiene[8].

58. Una carretera recta conecta los puntos A y B, distantes 10 km. Un camión sale de A hacia B y al mismo tiempo otro sale de B hacia A, ambos a 60 km/h. En el mismo instante, una mosca que estaba posada en el camión en A empieza a volar hacia B a 120 km/h. En el momento en que alcanza al camión que viene de B, la mosca instantáneamente invierte su dirección y vuela hacia A. Al encontrar al camión que viene de A, la mosca se da vuelta y se dirige hacia B. La mosca mantiene una rapidez constante de 120 km/h y vuela de un camión al otro y de regreso, hasta que finalmente los dos camiones chocan a media carretera y la mosca muere aplastada.

¿Qué distancia recorrió la mosca?

Convierta en una fracción de números enteros.

59. $4.58\overline{58}$

60. $-6.27\overline{27}$

61. $1.3418\overline{18}$

62. $3.2594\overline{594}$

63. $-12.72135\overline{135}$

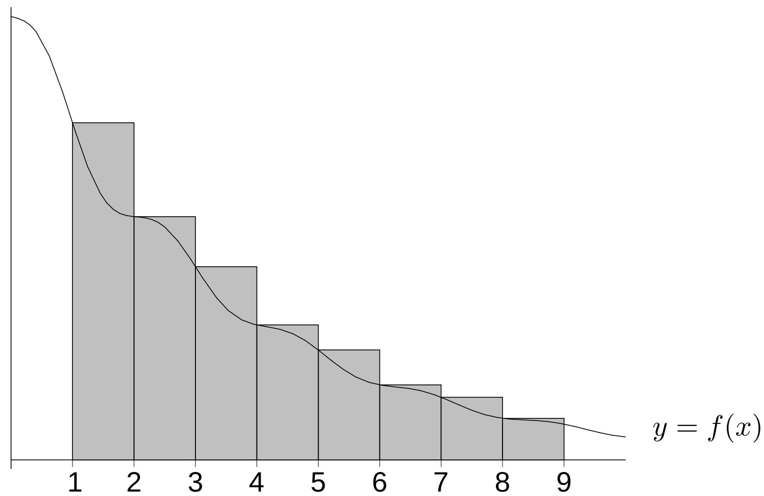
64. $-0.62844\overline{2844}$

2.4 El criterio de la integral

Hemos visto varios criterios que pueden aplicarse para determinar la convergencia o divergencia de algunas series: el criterio de la divergencia, el de series geométricas y el de series telescópicas.

Un cuarto criterio de convergencia es el *criterio de la integral*. Para justificarlo, veamos un gráfico muy parecido al del Ejemplo 3 (página 41), pero ahora con una curva $y = f(x)$ donde solamente se supone que f es positiva y decreciente en el dominio $[0, \infty[$.

[8] Sí se detiene, porque aunque el número de rebotes es infinito, el tiempo que tarda en hacerlos es finito.



Aquí tenemos no solo el gráfico de $y = f(x)$ sino también una sucesión de rectángulos, cada uno con base 1 y altura $f(k)$, para $k = 1, 2, \ldots$. El área del rectángulo k-ésimo es entonces $f(k)$ y, así como en el Ejemplo 3, el gráfico sugiere que

$$S_n = f(1) + \cdots + f(n) \geq \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Demostrémoslo.

En primer lugar, tomemos $k \in \mathbb{N}$ y veamos que como f es decreciente, $f(x) \leq f(k)$ para todo $x \geq k$; en particular, $f(x) \leq f(k)$ para $x \in [k,\ k+1]$. Entonces

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k) \tag{2.1}$$

(en palabras, el área bajo la curva en el intervalo $[k,\ k+1]$ es menor o igual que el área del rectángulo k-ésimo, cosa que es evidente en el gráfico).

Ahora usemos inducción:

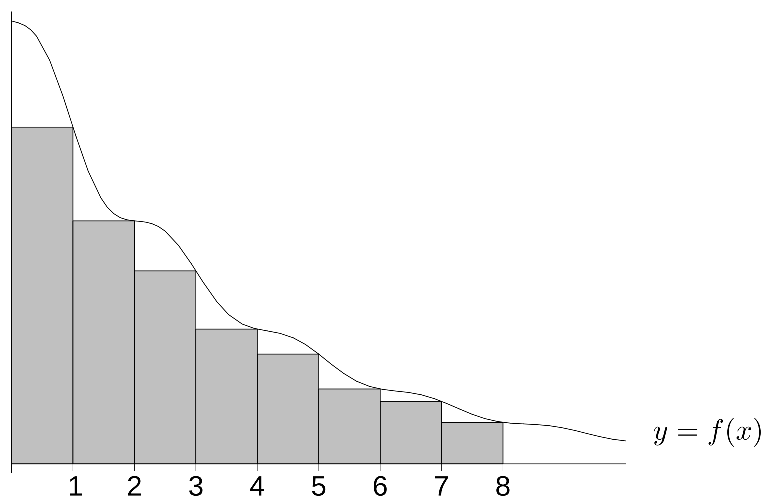
- Para $n = 1$: $S_1 = f(1) \leq \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ por la desigualdad (2.1), con $k = 1$.
- Y si la desigualdad se cumple para n, entonces

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + f(n+1) \\
&\geq \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + f(n+1) && \text{(hipótesis de inducción)} \\
&\geq \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(por (2.1) con } k = n+1\text{)} \\
&= \int_1^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Con lo anterior demostramos que $S_n \geq \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando límite cuando $n \to \infty$ vemos que si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, siendo mayor, también divergirá (por el "teorema del empuje", página 33). El contrapositivo es igualmente cierto: si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge, la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ también será convergente.

Por otro lado, veamos también el siguiente gráfico, que al igual que el anterior muestra la curva $y = f(x)$ junto con una sucesión de rectángulos, cada uno con base 1 y altura $f(k)$ para $k \in \mathbb{N}$.



A diferencia de los anteriores, estos rectángulos están por debajo de la curva, por lo que la nueva desigualdad es

$$S_n = f(1) + \cdots + f(n) \leq \int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Al tomar límite cuando $n \to \infty$ vemos ahora que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ diverge entonces la integral $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, por ser mayor, también será divergente, mientras que si la integral converge, la serie también convergerá.

Como la convergencia de la integral impropia no depende de si el extremo izquierdo del intervalo es 0 o 1 (sino solo de lo que sucede cuando $x \to \infty$), resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

(donde puede ser $c = 0$ o $c = 1$).

Para enunciar el criterio en su forma más general, notemos que no hay nada especial en que f esté definida en $[0, \infty[$ ni en que la serie empiece en $k = 1$. También, la función podría ser creciente y negativa, y el resultado es el mismo.

Teorema (criterio de la integral, CI, o criterio de Maclaurin-Cauchy)

Sea $f\colon [a,\infty[\, \to \mathbb{R}$ una función monótona en algún intervalo[9] $[c,\infty[$ para $c \geq a$, y sea N un entero mayor o igual que a. Entonces

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge.}$$

Por supuesto, el contrapositivo también es cierto: la serie diverge si y solo si la integral diverge. En otras palabras, podemos decir que bajo las hipótesis del teorema, la serie y la integral hacen lo mismo (ambas convergen o ambas divergen).

Ejemplo 10: criterio de la integral

Determinar si la serie $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{1-n^2}$ converge o diverge.

Sea $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$, de modo que $S = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ como en el teorema. Si podemos establecer que f es monótona en algún intervalo $[c,\infty[$ entonces podremos investigar la convergencia o divergencia de la serie S a través de la integral impropia $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En efecto, $f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}(1-2x^2)$, y la inecuación $f'(x) \leq 0$ tiene por solución el conjunto $]-\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [\sqrt{2}/2, \infty[$. Esto significa que f es decreciente al menos en el intervalo $[\sqrt{2}/2, \infty[$, así que la hipótesis del teorema se cumple.

Eso no significa que la serie converja o diverja. Solamente significa que la serie y la integral hacen lo mismo. Entonces analicemos la integral, para lo cual haremos la sustitución $u = 1 - x^2$, $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-\infty} -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^u\Big|_1^{-\infty} = -\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{-\infty} - \mathrm{e}^1) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}$$

Ajá, la integral converge. Según el CI, eso implica que también la serie S converge.

Repaso

Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ converge o diverge. Solución: diverge

Note que el valor de convergencia de la serie no necesariamente es el mismo que el de la integral. Más bien, viendo los dos gráficos anteriores y notando que el área bajo la curva es distinta al área bajo los rectángulos, podemos estar prácticamente seguros de que el

[9] Una función es *monótona* en un intervalo si es creciente en todo el intervalo o bien decreciente en todo el intervalo.

valor de la serie es distinto al de la integral. Pronto veremos cómo obtener una estimación del valor de convergencia de una serie cuando se cumplen las hipótesis del CI.

Para investigar si una función es decreciente, siempre está la posibilidad de ver si su derivada es negativa, como hicimos en el ejemplo anterior (en realidad la pregunta no es tanto *si* la función es decreciente sino *dónde* lo es). Pero muchas veces puede aprovecharse un atajo: si una función tiene la forma

$$y = \frac{\text{constante}}{\text{función creciente}}$$

con ambos numerador y denominador positivos, entonces la función es decreciente. Esto sirve para ver de inmediato que funciones como

$$\frac{4}{3x+1}, \quad \frac{1}{t^2+5t-2}, \quad \frac{28}{3+2^u}$$

son todas decrecientes en $[0, \infty[$, sin necesidad de derivarlas.

Ejemplo 11: no funciona el criterio de la integral

Investigar si la serie $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{2+\cos q}{q^2+1}$ es convergente o divergente.

No es sencillo investigar si la función $f(x) = (2+\cos x)/(x^2+1)$ es creciente o decreciente en algún intervalo de la forma $[c, \infty[$. El denominador es creciente, pero el numerador crece y decrece periódicamente. La derivada $f'(x)$ es demasiado complicada como para resolver la inecuación $f'(x) \leq 0$. De todos modos, probablemente tampoco podríamos calcular la integral de f.

Lo anterior no significa que la serie diverja ni que converja sino simplemente que debemos renunciar a la posibilidad de aplicar el CI.

En el Ejemplo 15 veremos qué otro criterio se puede aplicar para resolver este asunto.

En cuestión de convergencia de series no hay muchas reglas acerca de cuáles criterios se deben aplicar para investigar cuáles series. Como veremos, hay una buena cantidad de criterios que se pueden aplicar, y será la experiencia la que ayude a escoger cuál usar en cada caso. Vea en la Sección 3.4 un resumen de criterios y varias sugerencias sobre su uso.

Aproximar la suma de una serie

Cuando se cumplen las hipótesis del criterio de la integral, es posible estimar el error que se comete al aproximar la serie total con alguna de sus sumas parciales. La palabra "error" tiene el sentido matemático de "diferencia entre un valor exacto y una aproximación". Específicamente, si tenemos una serie S y una suma parcial S_n, el error al aproximar S con S_n es la diferencia entre los valores exacto y aproximado,

$$E_n = |S - S_n|$$

(en valor absoluto porque no interesa el signo sino solo la magnitud de la diferencia). Es útil notar que

$$E_n = \left| \sum_{i=N}^{\infty} x_i - \sum_{i=N}^{n} x_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i \right|$$

para cualquier $n \geq N$.

En el Ejemplo 1 (página 37) teníamos la serie

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

y calculamos que su suma es 1. Si aproximamos la suma total con los primeros quince términos,

$$S \approx S_{16} = \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{210} + \frac{1}{240} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

entonces al decir que $S \approx 0.9375$ el error en la aproximación es

$$E_{16} = |S - S_{16}| = |1 - 0.9375| = 0.0625$$

Cuando hay un valor exacto desconocido, tener una aproximación no es muy útil si no se tiene alguna idea del tamaño del error. Por ejemplo, si para una serie S cualquiera calculamos $S_{100} = 3.456$ y decimos que entonces $S \approx 3.456$ pero no tenemos una estimación del error, entonces estamos casi igual que si no supiéramos nada. ¿Que $S \approx 3.456$ significa que tal vez $S = 3.46$? ¿O $S = 3.3$? ¿Tal vez $S = 4$? ¿O $S = 17$?

No siempre es posible obtener una estimación del error cometido al aproximar la suma de una serie con el valor de una suma parcial, pero veamos qué sucede si se cumplen las hipótesis del CI.

En la página 56 habíamos supuesto que f era positiva y decreciente, y teníamos la desigualdad

$$f(1) + \cdots + f(n) \leq \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si trasladamos el intervalo de integración desde $[0, n]$ una distancia de K unidades a la derecha, con $K \in \mathbb{N}$, tendremos que

$$f(K+1) + f(K+2) + \cdots + f(K+n) \leq \int_K^{K+n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ llegamos a

$$E_K = \sum_{i=K+1}^{\infty} f(i) \leq \int_K^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Con eso hemos demostrado lo siguiente.

Teorema (estimación del error bajo las hipótesis del criterio de la integral)

Si se cumplen las hipótesis del CI para una función $f \geq 0$, y la serie $S = \sum_{i=N}^{\infty} f(i)$ converge, entonces el error al aproximar la suma total con la suma parcial K-ésima cumple

$$|S - S_K| \leq \int_K^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

para cualquier entero $K \geq N$.

Ejemplo 12: aproximar una serie y estimar el error con una integral

Consideremos la serie $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4+k^2}$. Vamos a hacer tres cosas:

(a) Demostrar que la serie converge.

(b) Aproximar su valor con la suma de los primeros veinte términos y estimar el error en esta aproximación.

(c) Aproximar su valor con un error menor que 0.0005.

Definamos $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$, y notemos que f es decreciente en el intervalo $[0, \infty[$ porque el numerador es constante y el denominador es creciente.

(a) Para investigar la convergencia de la serie aplicamos el CI y analizamos

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\arctan(\infty) - \frac{1}{2}\arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

(porque $\arctan(\infty)$, o mejor dicho $\lim\limits_{t\to\infty} \arctan t$, es $\frac{\pi}{2}$, y $\arctan 0 = 0$). Entonces la integral converge, y por lo tanto la serie S también converge.

(b) Si aproximamos el valor de S con la suma parcial de los primeros veinte términos tendremos

$$S \approx S_{19} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{293} + \frac{1}{328} + \frac{1}{365} = 0.859311\ldots$$

¿Qué tan precisa es esa aproximación? Según el teorema anterior, el error es

$$\begin{aligned} E_{19} &= |S - S_{19}| = |S - 0.859311\ldots| \\ &\leq \int_{19}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\bigg|_{19}^{\infty} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{19}{2} \\ &\approx 0.052438 \end{aligned}$$

En resumen, $S \approx 0.859311\ldots$ con un error no mayor que 0.052438. Podemos ir más allá y decir que entonces el valor exacto de S está con seguridad entre los extremos $0.859311\ldots \pm 0.052438$, es decir,

$$0.806873\ldots \leq S \leq 0.911749\ldots$$

(c) Para obtener una aproximación con error menor que 0.0005 bastará con tomar una suma parcial S_n para algún n que satisfaga la inecuación

$$\int_n^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < 0.0005$$

porque entonces tendremos $E_n \le \int_n^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < 0.0005$ (la primera desigualdad viene del teorema, y la segunda viene de la inecuación que acabamos de plantear), así que será $E_n < 0.0005$ como se pide.

¿Y cuál valor de n satisface la inecuación propuesta? Resolvámosla.

$$\begin{aligned}
0.0005 &> \int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\bigg|_n^\infty \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{n}{2} \\
\frac{1}{2}\arctan\frac{n}{2} &> \frac{\pi}{4} - 0.0005 = 0.784898\ldots \\
\arctan\frac{n}{2} &> 1.569796\ldots \\
\frac{n}{2} &> \tan 1.569796\ldots = 999.99967\ldots \\
n &> 1999.999\ldots
\end{aligned}$$

(en el penúltimo paso, la desigualdad se mantiene al aplicar la función tan en ambos lados, porque tan es una función creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$).

Vemos entonces que cualquier entero n mayor que 1999.999 será suficiente. Como mínimo tomemos $n = 2000$, y entonces tendremos la aproximación

$$S = S_{2000} = \sum_{k=0}^{2000} \frac{1}{4+k^2} = 0.90990376\ldots$$

con error menor que 0.0005. Es decir, el valor exacto de S está entre los extremos 0.90990376 ± 0.0005:

$$0.90940376\ldots < S < 0.91040376\ldots$$

Repaso

Aproxime la suma de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$ con error menor que 0.0005.

Solución: $S_3 \approx 1.0169967$

Como dato curioso, el valor exacto de la suma en el ejemplo anterior es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}} \approx 0.9104036418$$

y el de la suma en el repaso anterior es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \approx 1.017343063$$

aunque está mucho más allá de nuestro alcance demostrar esos resultados.

Series p

Otro tipo más de series para nuestro repertorio: las *series* p.

Definición (serie p)

Una *serie* p es una serie de la forma $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, donde N es algún entero positivo y p es alguna constante real.

Algunos ejemplos de series p son

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad (\text{con } p = 1)$
- $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots \qquad (\text{con } p = 1/2)$
- $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots \qquad (\text{con } p = 3)$

Ya nos habíamos encontrado la serie $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ en el Ejemplo 3. Esta se llama *serie armónica*.

Las series p no son muy importantes por sí solas, pero las usaremos en la sección siguiente para ayudarnos a investigar la convergencia de otras series. Esto es porque hay un criterio sencillísimo para saber si una serie p converge, y a veces es fácil comparar otras series con estas. Primero veamos el criterio para series p, y en la siguiente sección veremos cómo investigar otras series comparándolas con una serie p.

Teorema (criterio de series p)

La serie $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, con $N \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$, converge si y solo si $p > 1$.

La demostración de este criterio está basada en el CI, ya que la función $f(x) = 1/x^p$ es monótona en $[1, \infty[$ para cualquier $p \in \mathbb{R}$, y resulta (cosa que no demostramos aquí) que la integral impropia $\int_1^\infty (1/x^p)\,\mathrm{d}x$ converge si y solo si $p > 1$.

Entonces en los tres ejemplos que acabamos de ver tenemos que

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (ya lo sabíamos) porque $p = 1 \not> 1$.
- $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge porque $p = \frac{1}{2} \not> 1$.
- $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^3}$ converge porque $p = 3 > 1$.

Ejercicios

Determine si la serie converge o diverge.

65. $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{k^3}}$

66. $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}$

67. $\displaystyle\sum (5j^{-0.8} - 2j^{-1.3})$

68. $\displaystyle\sum \frac{2i^3 + 3i^2}{i^5}$

69. $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{4+p}}$

70. $\displaystyle\sum \frac{4}{j^2 + 8}$

71. $\displaystyle\sum \frac{3n}{(5n^2+1)^2}$

72. $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{e}^{-1/k}}{k^2}$

73. $\displaystyle\sum \frac{m}{(m^2+1)^2 + 1}$

74. $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{\ln k}}{k}$

75. $\displaystyle\sum \frac{\sec^2(1/n)}{n^2}$

76. $\displaystyle\sum \frac{1}{j \ln^2 j}$

77. $\displaystyle\sum q\,\mathrm{e}^{-q^2}$

78. $\displaystyle\sum m \ln m$

79. $\displaystyle\sum \frac{1}{\mathrm{e}^i + \mathrm{e}^{-i}}$

80. $\displaystyle\sum p\,2^{-p}$

Estime el error cometido si se aproxima la serie con la suma parcial indicada.

81. $\displaystyle\sum \frac{1}{q^3}$ con S_{20}

82. $\displaystyle\sum \frac{3}{1+k^2}$ con S_{400}

83. $\displaystyle\sum m\,2^{-m^2}$ con S_5

84. $\displaystyle\sum \frac{2}{\sqrt{3n+4}^3}$ con S_{50}

85. $\displaystyle\sum \frac{\ln^{-5} p}{p}$ con S_{999}

86. $\displaystyle\sum \frac{2}{j^2 - 1}$ con S_{25}

Aproxime la serie con error menor que el indicado.

87. $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^3}$ con $E \leq 0.0005$

88. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{1+k^2}$ con $E \leq 0.05$

89. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m\, 2^{-m^2}$ con $E \leq 10^{-6}$

90. $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+4}^3}$ con $E \leq 0.1$

91. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln^{-5} p}{p}$ con $E \leq 0.001$

92. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{j^2-1}$ con $E \leq 0.05$

2.5 Comparación directa y comparación en el límite

En la sección anterior vimos que la convergencia o divergencia de algunas series se puede determinar comparando la serie con una integral. También es posible investigar algunas series comparándolas con otras series. Vamos a estudiar dos tipos de comparación entre series, la *comparación directa* y la *comparación en el límite*

Comparación directa

Para ilustrar el primer tipo de comparación, supongamos que queremos investigar si la serie $T = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(4+6k+k^2)$ es convergente. Podríamos definir $f(x) = 1/(4+6x+x^2)$ e intentar usar el CI, pero resulta que la integral de f no es tan fácil de calcular. Más sencillo resulta recordar que en el Ejemplo 12 vimos que la serie $S = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(4+k^2)$ es convergente, y razonar así:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4+6k+k^2} \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4+k^2} \qquad \forall n \geq 0$$

(porque $4+6k+k^2 \geq 4+k^2$). Sabemos que las sumas parciales de S convergen, y entonces como las de T son aún menores, deben converger también.

La idea general es así. Supongamos que $\{ a_k \}$ y $\{ b_k \}$ son sucesiones de términos positivos y que $a_k \leq b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos también que la serie $T = \sum_{k=N}^{\infty} b_k$ converge.

Definamos las sumas parciales respectivas

$$S_n = \sum_{k=N}^{n} a_k \quad \text{y} \quad T_n = \sum_{k=N}^{n} b_k$$

Entonces, como $a_k \leq b_k$ para cada k, las sumas parciales también cumplen $S_n \leq T_n$ para cada n. Por otro lado, como $b_k \geq 0$ para cada k entonces cada suma parcial T_n es menor o igual que la suma total T. En resumen,

$$S_n \leq T_n \leq T \qquad \text{para todo } n \geq N$$

Tenemos entonces que la sucesión $\{ S_n \}$ es creciente (porque $S_{n-1} \leq S_{n-1} + a_n = S_n$ para todo n, debido a que $a_n \geq 0$), y también es acotada superiormente por T. Por el teorema en la página 34 (que dice que cualquier sucesión creciente y acotada superiormente converge), concluimos que la sucesión $\{ S_n \}$ es convergente, o lo que es lo mismo, la serie $\sum a_k$ converge.

En resumen, si $\sum b_k$ converge, también $\sum a_k$ converge. El contrapositivo es que si $\sum a_k$ diverge entonces también $\sum b_k$ diverge. Eso es lo que dice el siguiente teorema.

Teorema (criterio de comparación directa, CCD)

Sean $\{ a_k \}$ y $\{ b_k \}$ dos sucesiones, y sea c un número[10], tales que

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \text{para todo } k \geq c.$$

- Si $\sum b_k$ converge, entonces también $\sum a_k$ converge.
- Si $\sum a_k$ diverge, entonces también $\sum b_k$ diverge.

Ejemplo 13: criterio de comparación directa

Investigar si la serie $R = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{1-n^2}$ converge o diverge.

Recordemos el Ejemplo 10, en el que determinamos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{1-n^2}$ era convergente. Ahora tenemos que

$$0 \leq \mathrm{e}^{1-n^2} \leq n\,\mathrm{e}^{1-n^2}$$

y como ya sabemos que la serie mayor converge, concluimos que la menor, R, también converge.

Repaso

Investigue si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge o diverge. Solución: converge

Ejemplo 14: criterio de comparación directa

Investigar la convergencia o divergencia de la serie $T = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5j-2}$.

[10] Este número c es el análogo del c en el criterio de la integral. No es necesario que la condición crítica (que $a_k \leq b_k$ aquí, o que f sea monótona en el CI) se cumpla para todos los casos, pero sí al menos a partir de un punto y desde ahí hasta infinito.

Podríamos usar el CI, ya que la función $f(x) = 1/(5x-2)$ es monótona en $[3, \infty[$, y fácil de integrar. Pero usemos en cambio una comparación directa: como $5j - 2 < 5j$ se sigue que

$$\frac{1}{5j-2} > \frac{1}{5j} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{j} > 0$$

Como sabemos que la serie menor, $\sum \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{j} = \frac{1}{5} \sum \frac{1}{j}$, es divergente (por ser un múltiplo de una serie p con $p = 1 \not> 1$), concluimos que la serie mayor, T, también diverge.

Repaso

Investigue si la serie $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1+\sqrt{j}}{j}$ converge o diverge. Solución: diverge

Note que el CCD no puede aplicarse como en el ejemplo anterior a la serie $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5j+2}$, porque las desigualdades serían

$$0 \leq \frac{1}{5j+2} < \frac{1}{5j} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{j}$$

Ahora es la serie mayor la que diverge, pero el CCD no hace referencia a este caso.

Al comparar dos series positivas, si solo se sabe que la menor converge o que la mayor diverge, no se puede aplicar el CCD. Pero existe otro criterio de comparación que puede usarse en algunas comparaciones donde las desigualdades no ayudan. Ese es el criterio de comparación en el límite, que presentaremos en breve. Pero primero veamos un ejemplo más del CCD.

Ejemplo 15: criterio de comparación directa

En el Ejemplo 11 planteamos la serie $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{2+\cos q}{q^2+1}$. Investiguemos su comportamiento usando el CCD.

Cuando los términos de una serie contienen senos o cosenos, generalmente es buena idea empezar con el hecho de que

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$$

para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, y a partir de ahí construir una desigualdad que involucre a los términos de la sucesión.

Empecemos aquí por escribir $-1 \leq \cos q \leq 1$, luego sumemos 2 en cada término de la desigualdad y por último dividamos por (q^2+1), que por ser positivo no invierte las desigualdades.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos q \leq 1 \\ 1 &\leq 2+\cos q \leq 3 \\ \frac{1}{q^2+1} &\leq \frac{2+\cos q}{q^2+1} \leq \frac{3}{q^2+1} \end{aligned}$$

Ahora tenemos dos comparaciones posibles:

$$\frac{1}{q^2+1} \leq \frac{2+\cos q}{q^2+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{2+\cos q}{q^2+1} \leq \frac{3}{q^2+1}$$

Probemos con la primera. La serie $\sum 1/(q^2+1)$ es fácil de analizar, porque

$$0 \leq \frac{1}{q^2+1} < \frac{1}{q^2}$$

y se sabe que $\sum 1/q^2$ converge porque es una serie p con $p = 2$. Sin embargo, eso nos lleva a uno de los casos ausentes en el CCD: cuando la serie menor converge. No podemos aplicar el criterio, y seguimos sin saber qué pasa con nuestra serie.

Pero la segunda desigualdad sí es útil, porque

$$0 < \frac{3}{q^2+1} < \frac{3}{q^2}$$

y la serie $\sum 3/q^2 = 3\sum 1/q^2$ converge. Por el CCD, también $\sum 3/(q^2+1)$ converge, y ahora sí podemos concluir entonces que nuestra serie

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{2+\cos q}{q^2+1}$$

es convergente.

Repaso

Investigue si la serie $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{4-3\,\mathrm{sen}\, p}{p-1}$ converge o diverge. Solución: diverge

En el ejemplo anterior, note que el resultado se obtuvo de comparar tres series:

$$0 < \frac{2+\cos p}{p^2+1} < \frac{3}{p^2+1} < \frac{3}{p^2}$$

A veces será necesario comparar más de dos series, como acaba de suceder, o usar más de un criterio como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16: una serie que necesita dos criterios

Determinar si la serie $T = \displaystyle\sum \frac{\mathrm{sen}^2 k}{k\,\ln^2 k}$ converge o diverge.

En el ejemplo anterior dijimos que si hay senos o cosenos en una sucesión, se puede empezar diciendo que $-1 \leq \mathrm{sen}\,\theta \leq 1$. Pero por haber un seno al cuadrado resulta mejor empezar con que $0 \leq \mathrm{sen}^2\,\theta \leq 1$:

$$0 \leq \frac{\mathrm{sen}^2 k}{k\,\ln^2 k} \leq \frac{1}{k\,\ln^2 k}$$

Podríamos usar el CCD si supiéramos que la serie de $1/(k\,\ln^2 k)$ converge. ¿Pero cómo averiguamos si es así?

Con el criterio de la integral; así es como investigaremos la serie $\sum \dfrac{1}{k\,\ln^2 k}$.

Sea $f(x) = 1/(x\,\ln^2 x)$, en el dominio $]1,\infty[$. Es claro que f es decreciente porque el numerador 1 es constante y el denominador $x\ln^2 x$ es creciente en ese dominio. Entonces sí se puede aplicar el CI, y para eso investigamos la integral

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln^2 x} &= \int_{\ln 2}^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \quad \text{(por el cambio } y=\ln x,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}x/x\text{)}\\ &= -y^{-1}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = (-\infty^{-1}) - (-\ln^{-1} 2) = 0 + \ln^{-1} 2\end{aligned}$$

Vemos así que la integral converge, y con eso determinamos por el CI que la serie $\sum \dfrac{1}{k\,\ln^2 k}$ también converge. Por último, usando el CCD concluimos que también la serie $\sum \dfrac{\operatorname{sen}^2 k}{k\,\ln^2 k}$ es convergente.

Repaso

Use el CCD y el CI para determinar si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/k}}{k^2+1}$ converge o diverge.

Solución: converge

En el repaso anterior, la idea es comparar $\dfrac{\mathrm{e}^{1/k}}{k^2+1}$ con $\dfrac{\mathrm{e}^{1/k}}{k^2}$ e investigar esta serie con el CI. Sin embargo, también es posible usar dos comparaciones directas si se nota que $k \ge 1 \;\Rightarrow\; 1/k \le 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{1/k} \le \mathrm{e}^1$ y que entonces

$$0 < \frac{\mathrm{e}^{1/k}}{k^2+1} \le \frac{\mathrm{e}^1}{k^2+1} < \mathrm{e}\cdot\frac{1}{k^2}$$

Ejercicios

Use el criterio de comparación directa para determinar si la serie converge.

93. $\sum \dfrac{2}{2m-1}$

94. $\sum \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 p}{6p-5}$

95. $\sum \dfrac{4}{p^2+5p}$

96. $\sum \dfrac{1}{k^3+2}$

97. $\sum \dfrac{\sqrt[3]{j^2-4j}}{\sqrt{j^5+2j^3+1}}$

98. $\sum \dfrac{\sqrt{j^2+4j}}{\sqrt[3]{j^5-2j^3-1}}$

99. $\sum \dfrac{\sqrt{m}}{m-3}$

100. $\sum \dfrac{\sqrt{2n-1}}{5n^2+n}$

101. $\sum \dfrac{1}{n\,1.3^n}$

102. $\sum \dfrac{1+\frac{1}{2}\operatorname{sen} j}{2^j}$

103. $\sum \dfrac{\operatorname{sen}^2 m}{m^2+\operatorname{sen} m+1}$

104. $\sum (3-\cos k)0.8^{1-2k}$

105. $\sum \dfrac{n-1}{(n^2+4)\ln^2 n}$

106. $\sum \dfrac{1}{(i-1)\ln i}$

107. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-1/k}}{k^2+9}$

108. $\sum \dfrac{\sec^2(1/n)}{n^2+1}$

109. $\sum \dfrac{2q-1}{\mathrm{e}^{q^2}}$

110. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones (no necesariamente positivas) tales que $a_n \le b_n \le c_n$ para todo n. Demuestre que si $\sum a_n$ y $\sum c_n$ son ambas convergentes, entonces también $\sum b_n$ converge[11].

111. Use el resultado del ejercicio anterior para demostrar que $\sum \dfrac{\cos k}{k^2}$ converge (note que no se puede aplicar el CCD a esta serie, porque no es de términos positivos).

Comparación en el límite

Como hemos dicho, es posible que una comparación directa entre dos series no funcione porque solo se sabe que la menor converge o que la mayor diverge, y en esos casos el CCD no se puede aplicar. Pero hay otro criterio de comparación que puede salvar la situación en esos y otros casos. Lo presentamos aquí sin demostración.

Teorema (criterio de comparación en el límite, CCL)

Sean $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ dos sucesiones tales que $a_k \ge 0$ y $b_k \ge 0$ para todo k, y sea

$$L = \lim \frac{a_k}{b_k}$$

Si $0 < L < \infty$, entonces las series $\sum a_k$ y $\sum b_k$ ambas convergen o ambas divergen.

Ejemplo 17: criterio de comparación en el límite

Investigar si la serie $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2+\sqrt{5m^3}}{3m^2-m+1}$ converge o diverge.

Llamemos $a_m = (2+\sqrt{5m^3})/(3m^2-m+1)$. En el límite, cuando $m \to \infty$ sucede lo siguiente.

[11] Note que este resultado se parece al Teorema del encaje para sucesiones (página 31), el que dice que si $a_n \le b_n \le c_n$ y si $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ son convergentes con el mismo límite, entonces $\{b_n\}$ también es convergente y tiene el mismo límite. En este ejercicio solamente se supone que $\sum a_n$ y $\sum c_n$ son convergentes aunque sus sumas sean distintas. Lo único que se puede afirmar en este caso acerca del *valor* de la suma $\sum b_n$ es que $\sum a_n \le \sum b_n \le \sum c_n$.

- El numerador $2+\sqrt{5m^3}$ es comparable con $\sqrt{5m^3}$ porque si m es grande, sumarle 2 o no sumárselo no hará mucha diferencia.
- El denominador $3m^2-m+1$ es comparable con $3m^2$ porque $-m+1$ será pequeño en comparación.

Entonces la fracción a_m es comparable[12] con

$$\frac{\sqrt{5m^3}}{3m^2} = \frac{\sqrt{5}\cdot m^{3/2}}{3m^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{m^{1/2}}$$

Definamos entonces $b_m = \dfrac{1}{m^{1/2}}$, con el fin de comparar $\sum a_m$ con $\sum b_m$ bajo el CCL. Empezamos por notar que $a_m \geq 0$ y $b_m \geq 0$ para todo $m > 0$. Ahora debemos calcular el límite

$$L = \lim \frac{a_m}{b_m} = \lim \frac{\frac{2+\sqrt{5m^3}}{3m^2-m+1}}{\frac{1}{m^{1/2}}} = \lim \frac{(2+\sqrt{5}\cdot m^{3/2})m^{1/2}}{3m^2-m+1}$$

Ahora sacamos como factor común la potencia más alta en el numerador y la potencia más alta en el denominador:

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{m^{3/2}(2m^{-3/2}+\sqrt{5})m^{1/2}}{m^2(3-m^{-1}+m^{-2})} = \lim \frac{m^2(2m^{-3/2}+\sqrt{5})}{m^2(3-m^{-1}+m^{-2})} \\ &= \lim \frac{2m^{-3/2}+\sqrt{5}}{3-m^{-1}+m^{-2}} = \frac{0+\sqrt{5}}{3-0+0} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Entonces sí se cumple que $0 < L < \infty$, como pide el CCL. Pero así como en el CI cuando apenas se ha comprobado que se cumplen las hipótesis, todavía es muy pronto para concluir que la serie $\sum a_m$ converge o diverge. Todo lo que hemos averiguado es que las series $\sum a_m$ y $\sum b_m$ hacen lo mismo.

Sigue investigar la serie $\sum b_m = \sum 1/m^{1/2}$, lo cual es muy fácil porque esta es una serie p con $p = 1/2 \not> 1$. De inmediato sabemos que $\sum b_m$ diverge por el criterio de series p, y concluimos entonces que $\sum a_m$ también diverge.

Repaso

Investigue si la serie $\displaystyle\sum_{m=4}^{\infty} \frac{4m+1}{2m^3-2m-1}$ converge o diverge. Solución: converge

En el CCL, si $L = 0$ o $L = \infty$, el criterio no se aplica. Pero en esos casos podemos regresar al CCD, ya que $L = 0$ necesariamente implica que $a_k \leq b_k$, y $L = \infty$ implica que $a_k \geq b_k$ (en efecto, si una fracción tiende a cero, debe ser que el numerador es menor que el denominador, y al contrario si el cociente tiende a infinito).

[12] Aquí la palabra "comparable" no tiene un significado matemático preciso. Nada más estamos guiando nuestra intuición para determinar con cuál serie sencilla podemos comparar la nuestra. La comparación formal se hace después, calculando el límite correspondiente.

Ejemplo 18: comparación en el límite, o mejor comparación directa

Investigar si la serie $S = \sum \frac{2k-1}{k^3+k^2+5}$ converge o diverge.

Como en el ejemplo anterior, vemos que cuando $k \to \infty$ se tiene $2k-1 \sim 2k$ y $k^3+k^2+5 \sim k^3$. Aquí el símbolo "$\sim$" no tiene un significado preciso; solamente indica que las dos expresiones son comparables (cosa que tampoco pretendemos definir). Todo lo que queremos decir con eso es que tal vez funcione comparar

$$a_k = \frac{2k-1}{k^3+k^2+5} \quad \text{con} \quad b_k = \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$$

(note que no necesitamos incluir el factor constante 2 en la definición de b_k). Para comparar, primero confirmamos que a_k y b_k son positivos para todo $k > 0$. Luego calculamos el límite

$$L = \lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{(2k-1)k^2}{k^3+k^2+5} = \lim \frac{k^3(2-k^{-1})}{k^3(1+k^{-1}+5k^{-3})} = 2$$

Como $0 < L < \infty$, el CCL dice que las dos series $\sum a_k$ y $\sum b_k$ hacen lo mismo. Ahora, es claro que $\sum b_k$ converge por ser una serie p con $p = 2 > 1$, así que $\sum b_k$ converge y por lo tanto $S = \sum a_k$ también converge. Asunto resuelto.

Pero antes de pasar a otra cosa, veamos cuánto más fácil habría sido usar una comparación directa en vez de comparación en el límite:

$$0 \leq \frac{2k-1}{k^3+k^2+5} < \frac{2k}{k^3} = 2\frac{1}{k^2}$$

(la segunda desigualdad debida a que $2k-1 < 2k$ mientras $k^3+k^2+5 > k^3$), y como la serie $2\sum 1/k^2$ converge, nuestra serie S también, por el CCD.

En este ejemplo vimos que generalmente es mucho más sencillo usar el CCD en vez del CCL, si acaso es posible.

Ejercicios

Use alguno de los criterios de comparación para determinar si la serie converge.

112. $\sum \frac{2m+1}{3m^2+5m-1}$

113. $\sum \frac{3k^2-2k}{4k^3+1}$

114. $\sum \frac{6n+5}{2n^3-3n+2}$

115. $\sum \frac{2q^2-q-4}{q^4+3q^2+1}$

116. $\sum \frac{\arctan p}{p^2+p}$

117. $\sum \frac{k+\ln k}{k^2+5k}$

118. $\sum \frac{\sqrt{j}}{j+3}$

119. $\sum \frac{\sqrt[3]{4+i^2}}{4+i^2}$

120. $\sum \dfrac{\sqrt{r^2-4r}}{\sqrt[3]{r^5+2r^3+1}}$

121. $\sum \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}+1}$

122. $\sum \dfrac{1}{2^j+j}$

123. $\sum \dfrac{1}{2^p-p}$

124. $\sum \dfrac{2^i+5^i}{2^{2i}+3^{2i}}$

125. $\sum \dfrac{4+\cos k}{4+k}$

126. $\sum \dfrac{3^r+r^2}{2^r-r}$

127. $\sum \dfrac{3^r-r^2}{2^r+r}$

128. $\sum \dfrac{1}{(n+1)\ln n}$

129. $\sum \dfrac{q+1}{(q\,\ln q)^2}$

130. $\sum \dfrac{2p}{1-\mathrm{e}^{p^2}}$

Capítulo 3
Otros criterios de convergencia

Hasta el momento hemos estudiado criterios y formas de analizar series en las cuales los términos son todos mayores que cero. Ahora les toca el turno a series donde los términos no necesariamente son todos positivos, y también incluiremos algunos nuevos criterios que aún se pueden aplicar a series positivas.

3.1 Series alternadas

Aunque la mayoría de series que se han estudiado han sido de términos positivos, hemos visto también algunas excepciones como las series geométricas con base negativa:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Este último es un ejemplo de un tipo muy importante de series, en las que los términos alternan sus signos: uno se suma, el siguiente se resta y así sucesivamente. Esas series se llaman *alternas* o *alternadas*.

Definición (serie alternada)

Una serie es *alterna* o *alternada* si tiene la forma

$$\sum_{k=N}^{\infty}(-1)^k a_k \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{k=N}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

donde $N \in \mathbb{Z}$ y $a_k \geq 0$ para todo $k \geq N$.

Por ejemplo, la serie anterior, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1/2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1/2)^k$, es una serie alterna con $a_k = (1/2)^k$. Otro ejemplo que veremos luego con detalle es la *serie armónica alternada*,

$$\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q+1}\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

donde $a_q = 1/q$.

Existe un criterio muy sencillo que ayuda a saber si una serie alternada converge.

Teorema (criterio de series alternadas, CSA, o criterio de Leibniz)

Si $a_k \searrow 0$ entonces $\sum(-1)^k a_k$ converge, al igual que $\sum(-1)^{k+1} a_k$.

La notación “$a_k \searrow 0$” indica que la sucesión a_k es decreciente y tiende a 0.

Como se acaba de mencionar, este criterio dice si una serie alternada converge, pero no dice si diverge. Es decir, si el criterio se aplica, la conclusión es que la serie converge; pero si no se aplica, no hay conclusión.

Ejemplo 1: el criterio de series alternadas

Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\ln n}}$ converge o diverge.

Note que esta es una serie alternada con $a_n = 1/\sqrt{\ln n}$. Para usar el criterio de series alternadas primero se debe analizar si a_n cumple las condiciones necesarias en el criterio:

- En primer lugar, $(\sqrt{\ln x})' = \dfrac{1/x}{2\sqrt{\ln x}}$, que es positivo para todo $x > 1$, así que el denominador $\sqrt{\ln n}$ es una sucesión creciente. Por lo tanto, a_n es decreciente.
- Luego, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Con eso que se tiene que $a_n \searrow 0$, por lo que la serie converge.

Repaso

Compruebe que la serie $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q+1}}{q}$ converge.

Ejemplo 2: el criterio de series alternadas

Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \cot\left(\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)(\sqrt{k+5} - \sqrt{k})$$

Note que

$$\begin{aligned} S &= (1)(\sqrt{5} - \sqrt{0}) + (-1)(\sqrt{6} - \sqrt{1}) + (1)(\sqrt{7} - \sqrt{2}) + (-1)(\sqrt{8} - \sqrt{3}) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+5} - \sqrt{k}) \end{aligned}$$

que es alternada con $a_k = \sqrt{k+5} - \sqrt{k}$.

Para ver que a_k decrece se calcula

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

Por otro lado, racionalizando,

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k+5}-\sqrt{k}) = \lim_{k\to\infty}\frac{5}{\sqrt{k+5}+\sqrt{k}} = 0$$

Así, la serie S cumple las dos condiciones del criterio de series alternadas y por lo tanto converge.

Repaso

Compruebe que $\sum \cos(n\pi)\left[\ln(n+1)-\ln n\right]$ converge.

Ejemplo 3: falla el criterio de series alternadas

Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1+3m}{m}$.

Se tiene, por un lado,

$$\left(\frac{1+3x}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \text{para todo } x > 0,$$

así que la sucesión $a_m = (1+3m)/m$ es decreciente.

Pero por otro,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1+3m}{m} = 3 \neq 0$$

Entonces no se puede usar el criterio de las series alternadas ya que la sucesión no converge a 0. Así, el CSA no da ninguna información acerca de la convergencia de esta serie.

Pero que no se cumplan las condiciones del criterio no implica que la serie diverja. Simplemente, no se ha determinado si converge o diverge.

Rápidamente se puede notar que

$$\lim_{m\to\infty}\left|(-1)^m\frac{1+3m}{m}\right| = 3 \neq 0$$

y entonces usando el criterio de la divergencia (página 41) se concluye que la serie diverge.

Repaso

Compruebe que la serie $\sum(-1)^q\sqrt{\dfrac{q}{q+1}}$ diverge.

En general, si en una serie alternada $\sum(-1)^k a_k$ se tiene que $a_k \not\to 0$ entonces se puede aplicar el criterio de la divergencia y concluir que la serie diverge[1].

[1] El CD implica que si $a_k \not\to 0$ entonces la serie $\sum a_k$ diverge. Pero es que si $\lim a_k$ no es cero, tampoco $\lim(-1)^k a_k$ puede ser cero, de modo que también la serie alternada $\sum(-1)^k a_k$ diverge en ese caso.

Aproximar el valor de una serie alternada convergente

Suponga que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ cumple las condiciones del criterio de series alternadas, es decir, $a_k \searrow 0$. Recuerde que

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \qquad \text{y} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

son la suma total y la suma parcial n-ésima, respectivamente.

Recuerde también que la expresión $|S - S_n|$ denota el error en la aproximación, la diferencia entre el valor exacto S y la aproximación S_n. Ya en la página 58 habíamos estudiado el error al aproximar una serie con una suma parcial, allá en el contexto del criterio de la integral.

Analicemos ahora el error $|S - S_n|$ para la serie alternada $\sum(-1)^k a_k$.

$$\begin{aligned}
|S - S_n| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \\
&= \left|(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + (-1)^{n+3}a_{n+3} + (-1)^{n+4}a_{n+4} + \cdots\right| \\
&= \left|(-1)^{n+1}\left[a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots\right]\right| \\
&= |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - a_{n+6} + \cdots|
\end{aligned}$$

Como $\{\, a_k \,\}$ es decreciente entonces $a_i \geq a_{i+1}$ y $(a_i - a_{i+1}) \geq 0$ para todo i. Esto significa que la expresión dentro del valor absoluto es

$$(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (a_{n+5} - a_{n+6}) + \cdots \geq 0$$

por lo que el valor absoluto no es necesario. Entonces

$$\begin{aligned}
|S - S_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - a_{n+6} + \cdots \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - (a_{n+6} - a_{n+7}) - \cdots \\
&\leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

porque cada uno de los términos $(a_{n+2} - a_{n+3})$, $(a_{n+4} - a_{n+5})$, …, es mayor o igual que cero, y ellos se restan de a_{n+1}. Así se concluye que el error es

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

con lo que se tiene demostrado el siguiente teorema.

Teorema (error en una serie alternada)

Sean $S = \displaystyle\sum_{k=N}^{\infty}(-1)^k a_k$ y $S_n = \displaystyle\sum_{k=N}^{n}(-1)^k a_k$ la suma total y la suma parcial n-ésima de una serie alternada. Si $a_k \searrow 0$ entonces

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Ejemplo 4: estimación del error al aproximar una serie alternada

Determinar una cota del error obtenido al aproximar la suma de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\ln n}}$$

con la suma parcial S_{200}.

Para poder utilizar el teorema anterior se debe verificar que la serie cumple las condiciones. En efecto, en el Ejemplo 1 se vio que $a_n \searrow 0$ (con $a_n = 1/\sqrt{\ln n}$).

Aplicando entonces el teorema, una cota para el error en la aproximación S_{200} va a ser a_{201}, así:

$$|S - S_{200}| \leq a_{201} = \frac{1}{\sqrt{\ln 201}} \approx 0.434237$$

Repaso

Estimar el error E al aproximar $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ con la suma parcial S_5.

Solución: $E \leq 1/6! = 0.001388\bar{8}$

Ejemplo 5: cuántos términos se deben sumar

Determinar la cantidad de términos de la serie $\displaystyle\sum_{n=100}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$ que se deden sumar para que la suma parcial aproxime la serie total con un error máximo de 0.01.

Aquí se tiene $c_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. Primero se debe verificar que esta sucesión cumple las condiciones del teorema.

- Decrece porque

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < 0 \quad \text{para todo } x > 0.$$

- Tiende a cero porque racionalizando se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$$

Habiendo comprobado que se cumplen los requisitos del teorema, ahora se busca que 0.01 sea una cota del error para la aproximación S_n. Como el teorema garantiza que c_{n+1} es una cota, entonces para lograr el objetivo basta con que $c_{n+1} \leq 0.01$. Por tanto se debe encontrar un n que cumpla esta desigualdad.

$$\begin{aligned} c_{n+1} = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} &\leq 0.01 \\ \sqrt{n+3} &\leq 0.01 + \sqrt{n+2} \\ n+3 &\leq 0.0001 + 0.02\sqrt{n+2} + n + 2 \\ 0.9999 &\leq 0.02\sqrt{n+2} \\ 0.99980001 &\leq 0.0004(n+2) \\ 2497.5 &\leq n \end{aligned}$$

En el procedimiento anterior, la desigualdad se mantiene al elevar al cuadrado en ambos lados ya que la función x^2 es creciente para $x > 0$. Por otra parte, la solución es que $n \geq 2497.5$, pero recuerde que los valores de n son enteros positivos y que por lo tanto el primer n que satisface la inecuación es 2498. Entonces la solución final, para n entero, es $n \geq 2498$.

Por lo tanto, cualquier valor de n mayor o igual a 2498 funciona, con lo que resulta que hay infinitas soluciones. Por ejemplo las sumas parciales S_{2498}, S_{5000} y S_{20000} aproximan la serie con un error menor o igual a 0.01.

Así, se deben sumar *al menos* 2399 términos, hasta $n = 2498$ (recuerde que la serie empieza en $n = 100$, por lo que no se incluyen los términos del 1 al 99).

Repaso

¿Cuántos términos de $\displaystyle\sum_{j=8}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}$ se deben sumar para que el error sea menor que 0.0005? Solución: Por lo menos 37 (hasta $j = 44$)

Ejemplo 6: aproximar la suma total de una serie

Determinar una aproximación para la serie $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ con un error menor o igual a 0.005.

En este caso se tiene que $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$. Primero se debe verificar que $a_n \searrow 0$.

- Para ver que a_n es decreciente basta con notar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. En efecto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{3^n} = \frac{3}{(2n+3)(2n+2)}$$

  y esta fracción es menor que 1 porque el denominador es mayor que el numerador (note que $(2n+3)(2n+2)$ es por lo menos $(2\cdot1+3)(2\cdot1+2) = 15$, mayor que 3).

- Por otro lado, tal como se estudió en el Ejemplo 25 del Capítulo 1 (página 32),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!} = 0$$

Entonces sí se cumplen las dos condiciones del teorema.

De manera similar al ejemplo anterior, ahora se quiere que $a_{n+1} \leq 0.005$ para lograr una aproximación con error $E \leq 0.005$. Sin embargo note que en esta inecuación no se puede despejar n fácilmente como se hizo en el ejemplo anterior. Por eso, para determinar un n válido se van a ir probando distintos valores de n hasta encontrar alguno que funcione.

n	$a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$
0	$a_1 = \dfrac{3^1}{(2\cdot 1+1)!} = 0.5 > 0.005$
1	$a_2 = \dfrac{3^2}{(2\cdot 2+1)!} = 0.075 > 0.005$
2	$a_3 = \dfrac{3^3}{(2\cdot 3+1)!} \approx 0.005357 > 0.005$
3	$a_4 = \dfrac{3^4}{(2\cdot 4+1)!} \approx 0.000223 < 0.005$

Según el cuadro anterior, ya $n = 3$ cumple la condición $a_{n+1} < 0.005$, así que S_n con $n \geq 3$ aproxima la serie con un error menor que 0.005 (de hecho, menor que $a_4 = 0.000223$). Por lo tanto, una aproximación válida es

$$S_3 = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = \frac{319}{560} \approx 0.56964286$$

Que S_3 aproxime S con error menor que 0.005 significa que S está entre los extremos $S_3 \pm 0.005$; es decir, que $S_3 - 0.0005 < S < S_3 + 0.0005$, o bien que

$$0.56464286 < S < 0.57464286$$

Igual que en el ejemplo anterior, hay infinitas posibilidades (para cada $n \geq 3$), otra de las cuales es

$$S_{10} = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} \approx 0.56986010$$

Repaso

Aproxime la serie $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!}$ con error menor que 0.0005.

Solución: $S_6 = 0.36805\bar{5}$

Como dato curioso, el valor exacto de la serie en el ejemplo anterior es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \approx 0.5698601$$

(vea el ejercicio 46 del Capítulo 4, en la página 113), con lo que se puede notar que la aproximación obtenida con S_{10} tiene al menos siete decimales correctos.

También, el valor exacto de la serie en el repaso es

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.36787944$$

(vea el ejercicio 47 del Capítulo 4, en la página 113).

Ejercicios

Use el criterio de las series alternadas para determinar si converge o diverge.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \mathrm{e}^{-k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1}$

3. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(1-\cos\left(\frac{1}{p}\right)\right)$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+3}{(2n-5)^2}$

5. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi q)}{q}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

7. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{2^{1/p}}{p!}$

8. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{(-5)^m}$

9. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j j \operatorname{sen}\frac{1}{j}$

10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1+4^k}{1+3^k}$

11. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m^4}{\mathrm{e}^m}$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=11}^{\infty}(-1)^n(\log(\log(\log n)))^{-1/100}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{n^2}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^K}{n}$, con $K \in \mathbb{R}^-$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1/K}}$, con $K \in \mathbb{R} - \{0\}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$, con α y β constantes positivas

Determine el menor número de términos necesarios para aproximar con un error menor o igual que el indicado.

18. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{3j+2}$ con $E \leq 10^{-4}$

19. $\displaystyle\sum_{m=-10}^{\infty}\frac{(-1)^m\,2}{\sqrt{m+15}}$ con $E \leq 0.01$

20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5+2}$ con $E \leq 5\times 10^{-8}$

21. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{3}{5+2^i}$ con $E \leq 5\times 10^{-6}$

22. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \frac{6}{6+\log_2 p}$ con $E \le 0.25$

23. $\displaystyle\sum_{k=7}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,k}{k^2-40}$ con $E \le 10^{-4}$

Determine el menor número de términos necesarios para aproximar con un error menor o igual que el indicado, y calcule la aproximación correspondiente.

24. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q+1} \frac{1}{(2q)!}$ con $E \le 0.001$

25. $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k} \frac{1}{k^k}$ con $E \le 0.0003$

26. $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m} \frac{1}{m!}$ con $E \le 2 \times 10^{-7}$

27. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p} \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p$ con $E \le 0.0004$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n+1}{5^n}$ con $E \le 5 \times 10^{-6}$

29. $\displaystyle\sum_{k=6}^{\infty}(-1)^{k} \frac{1}{(k^3+1)\,2^k}$ con $E \le 0.00001$

3.2 Criterios de la razón y de la raíz

Vamos a estudiar ahora dos criterios que pueden aplicarse a series positivas, alternadas o con cualquier combinación de signos. Estos dos criterios tienen varios aspectos en común: para analizar una serie, en cada uno de ellos se calcula el límite L de una sucesión, y resulta que la serie en cuestión converge si $L < 1$ o diverge si $L > 1$. En común tienen también que ninguno de los dos criterios se aplica si $L = 1$.

Veamos primero el criterio del cociente, también llamado criterio de la razón.

Teorema (criterio del cociente o de la razón, CC, o criterio de d'Alembert)

Sea $\sum a_k$ una serie de términos distintos de cero, y sea $L = \displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

- Si $L < 1$, entonces la serie converge.
- Si $L > 1$, entonces la serie diverge.

Ejemplo 7: criterio del cociente

Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$.

Aunque esta serie es alternada, sería un proceso largo y costoso usar el criterio de las series alternadas ya que resulta complicado analizar la monotonía (decrecimiento) y calcular el límite de la sucesión. En series con productos o factoriales, como esta, generalmente es más eficiente usar el criterio del cociente.

Definiendo $a_n = (-1)^n \dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$, se calcula

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)\cdot(3n+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}}{(-1)^n\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)\cdot(3n+3)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot 3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{2n+1} \\ &= \frac{3}{2} > 1 \end{aligned}$$

Como $L > 1$, se concluye que la serie diverge.

Repaso

Investigue la serie $\displaystyle\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2q)}{q!}$. Solución: diverge

El segundo de los dos criterios es muy semejante al anterior, a excepción del límite que se debe calcular.

Teorema (criterio de la raíz n-ésima, CR, o criterio de Cauchy)

Sea $\sum a_k$ una serie, y sea $L = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$.

- Si $L < 1$, entonces la serie converge.
- Si $L > 1$, entonces la serie diverge.

Algunos resultados importantes y muy útiles a la hora de aplicar el criterio de la raíz n-ésima son los siguientes.

1. Si $P(n)$ es cualquier polinomio, $\sqrt[n]{P(n)} \to 1$ (Ejercicio 129 del Cap. 1, pág. 35)
2. $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ (Ejemplo 26 del Cap. 1, pág. 33)
3. $\left(1+\dfrac{c}{n}\right)^n \to e^c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$ (Ejercicio 112 del Cap. 1, pág. 34)

El primer resultado indica que la raíz n-ésima de cualquier polinomio (incluyendo constantes) tiende a 1, y el segundo dice que la raíz n-ésima de un factorial tiende a infinito siempre y cuando el índice de la raíz y el factorial dependan de la misma variable.

Otras dos formas de visualizar y utilizar el tercer resultado son estas:

$$\left(1+\frac{c}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1+\frac{c}{n}\right)^{n}\right)^{-1} \to (\mathrm{e}^{c})^{-1} = \mathrm{e}^{-c}$$

y

$$\left(\frac{n}{n+c}\right)^{n} = \left(\frac{n+c}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{c}{n}\right)^{-n} \to \mathrm{e}^{-c}$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 8: criterio de la raíz

Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5}{(5-m)^m}$.

Usando el criterio de la raíz se tiene que

$$L = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{m^5}{(5-m)^m}\right|} = \lim \frac{\sqrt[m]{m^5}}{m-5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, como $L < 1$, la serie converge.

Repaso

Analice la serie $\displaystyle\sum \frac{(k^2+1)^k}{4k^2+9}$. Solución: diverge

Se puede usar cualquiera de los dos criterios para decidir si una serie converge o diverge, siempre y cuando el límite sea distinto de 1. Aunque hay excepciones, generalmente es más útil el criterio del cociente cuando los términos incluyen factoriales o productos (como $3\cdot 6 \cdots (3n)$ en el ejemplo tras-anterior), o el criterio de la raíz cuando los términos incluyen expresiones variables elevadas a potencias variables (como $(5-m)^m$ en el ejemplo más reciente).

Ejemplo 9: una serie en la que funcionan los dos criterios

La serie $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} p\left(\frac{-3}{7}\right)^{3p}$ se puede analizar con el criterio del cociente y con el criterio de la raíz.

Para el criterio del cociente se calcula

$$L = \lim \left|\frac{(p+1)(-3/7)^{3p+3}}{p\,(-3/7)^{3p}}\right| = \lim \left|\frac{p+1}{p}\left(\frac{-3}{7}\right)^{3}\right| = 1\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{3} = \frac{27}{343}$$

O bien, para el criterio de la raíz se calcula

$$L = \lim \sqrt[p]{\left| p\left(\frac{-3}{7}\right)^{3p} \right|} = \lim \sqrt[p]{p}\ \sqrt[p]{\left| \left(\frac{-27}{343}\right)^{p} \right|}$$
$$= \lim \sqrt[p]{p} \cdot \lim \sqrt[p]{\left(\frac{27}{343}\right)^{p}} = 1 \cdot \frac{27}{343} = \frac{27}{343}$$

Los dos límites dan el mismo resultado (cosa que sucede casi siempre que se puedan aplicar ambos criterios). En este caso, por cualquiera de los dos criterios se deduce que como $L < 1$, la serie converge.

Repaso

Determine si $\sum \frac{p^2}{2^p}$ converge o diverge. Solución: converge

Ejemplo 10: otra serie en la que funcionan los dos criterios

Analizar la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3n+5)!}{20n-7}$.

Por la presencia del factorial, la primera elección es usar el criterio de la razón. El límite es

$$L = \lim \left| \frac{(3(n+1)+5)!}{20(n+1)-7} \cdot \frac{20n-7}{(3n+5)!} \right|$$
$$= \lim \frac{(3n+8)(3n+7)(3n+6)(20n-7)}{(20n+13)}$$
$$= \infty > 1$$

Por lo tanto, según el criterio de la razón, la serie diverge.

Pero también es posible usar el criterio de la raíz:

$$L = \lim \sqrt[n]{\left| \frac{(3n+5)!}{20n-7} \right|} = \lim \frac{\sqrt[n]{(3n+5)!}}{\sqrt[n]{20n-7}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

(el numerador tiende a infinito porque $\sqrt[n]{(3n+5)!} > \sqrt[n]{n!} \to \infty$, y el denominador tiende a uno porque es la raíz n-ésima de un polinomio).

Así confirmamos por el criterio de la raíz que la serie diverge.

Repaso

Investigue la serie $\sum \frac{6j^3}{(2j)!}$. Solución: converge

Ejemplo 11: una serie en la que funciona solo el criterio del cociente

Para analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$, la presencia de $k!$ sugiere el uso del criterio del cociente, pero la presencia de k^k sugiere el criterio de la raíz.

Resulta que el criterio de la raíz no funciona, porque el límite

$$L = \lim \sqrt[k]{\left|\frac{k!}{k^k}\right|} = \lim \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \frac{\infty}{\infty}$$

tiene una forma indeterminada. Además no es posible usar L'Hôpital debido al factorial.

En cambio, usando el criterio del cociente se tiene

$$\begin{aligned} L &= \lim \left|\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{k!}\right| = \lim \frac{(k+1)\,k^k}{(k+1)^{k+1}} \\ &= \lim \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\ &= \mathrm{e}^{-1} < 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie converge.

Ejemplo 12: una serie en la que no funcionan el CC ni el CR

Para analizar la serie $\displaystyle\sum_{m=7}^{\infty}(3\sqrt[m]{m}-2)$, al aplicar el criterio del cociente se obtiene

$$L = \lim \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim \left|\frac{3\sqrt[m+1]{m+1}-2}{3\sqrt[m]{m}-2}\right| = \frac{3\cdot 1-2}{3\cdot 1-2} = 1$$

Por lo tanto, el criterio del cociente no decide. Si se intenta con el criterio de la raíz, el límite es

$$L = \lim \sqrt[m]{|3\sqrt[m]{m}-2|} = \lim \sqrt[m]{(3\cdot 1-2)} = 1$$

de modo que tampoco el criterio de la raíz se puede aplicar.

Sin embargo, note que

$$\lim_{m\to\infty}(3\sqrt[m]{m}-2) = 3\lim \sqrt[m]{m}-2 = 3\cdot 1-2 = 1 \neq 0$$

Entonces, sencillamente por el criterio de la divergencia, se concluye que la serie diverge.

Ejercicios

Use el criterio del cociente o el de la raíz n-ésima para determinar si converge o diverge. Si ninguno de esos criterios se aplica, use alguno otro de los criterios estudiados.

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(-\mathrm{e})^{-n}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\,\mathrm{e}^{k^2}$

32. $\displaystyle\sum_{p=3}^{\infty} p^{-p^2}$

33. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} q^2\, 2^{q+1}(-3)^{-q}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum \left(1+\sqrt[k]{k}\right)^k$

36. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n!}$

38. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}+10}{n!}$

39. $\displaystyle\sum \left(\frac{1+4j}{1+2j}\right)^{3j-1}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{5^n(n+1)}$

41. $\displaystyle\sum_{q=5}^{\infty} \frac{q+2}{q^3-3}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^5}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$

44. $\displaystyle\sum \left(\frac{3p+6}{5p+1}\right)^{p/4}$

45. $\displaystyle\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m)}{(2m)!}$

46. $\displaystyle\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{10^n}$

48. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\ln k)^k}$

49. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 3^{6k}}{(3k+1)!}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n!}$

51. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{13^n\, n!}$

52. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, con $r \neq 1$, constante

53. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{(3^{m+1}-2^{m+1})(3^m-2^m)}$

54. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j+2^{3j-1}}{3^{4j}}$

55. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{q^3+\mathrm{e}^q}$

56. Si se sabe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, demuestre que:

(a) $\sum n^k a_n$ converge para todo k constante.

(b) $a_n \to 0$

(c) $\sum \dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}$ converge

(d) $\sum \dfrac{k}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$ diverge para todo $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

3.3 Convergencia absoluta y convergencia condicional

Cuando no todos los términos de una serie son positivos, podría interpretarse que los positivos se suman y los negativos se restan. Por ejemplo, en la serie armónica alternada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

se podría decir que los términos son 1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., y que ellos se suman y se restan en forma alternada.

Sabemos que esa serie en particular es convergente (por el repaso del Ejemplo 1, en la página 74), y sabemos también que si sus términos se sumaran todos, como en

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

entonces la serie resultante divergiría (serie armónica, es decir serie p con $p = 1$).

Así vemos que existen series que convergen mientras algunos términos se sumen y otros se resten, pero divergirían si todos sus términos se sumaran (podría decirse que los términos que se restan hacen "contrapeso" a los que se suman, y así la serie se equilibra). Pero también existen series que son convergentes sin necesidad de contrapeso, y un ejemplo de eso es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

la cual converge ya sea que sus términos se sumen y resten alternadamente, o se sumen todos (aunque los valores de convergencia son distintos, por supuesto).

De aquí viene la idea de distinguir dos tipos de convergencia, una más fuerte, como la de $\sum (-1)^{k+1}/k^2$, llamada *convergencia absoluta*, y otra más débil, como la de $\sum (-1)^{i+1}/i$, llamada *convergencia condicional*.

Definición (convergencia absoluta)

Se dice que la serie $\sum a_n$ converge *absolutamente* si $\sum a_n$ y $\sum |a_n|$ ambas convergen.

Que una serie converja absolutamente significa entonces que no es necesario, para efectos de convergencia, que los términos positivos y los negativos se contrarresten entre ellos; igual podrían sumarse todos y la serie sigue siendo convergente.

Definición (convergencia condicional)

La serie $\sum a_n$ converge *condicionalmente* si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.

Ejemplo 13: convergencia absoluta

Determinar si la serie $\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3k-9}-\frac{1}{3k}\right)$ converge condicionalmente, converge absolutamente o diverge.

1. Primero se va a analizar la serie original usando el criterio de las series alternadas. Para eso se toma $a_k = \frac{1}{3k-9} - \frac{1}{3k}$, y se observa que
   - a_k es decreciente porque al tomar denominador común resulta que $a_k = \dfrac{1}{k(k-3)}$, con numerador constante y denominador creciente.
   - $a_k \to 0$ porque $\lim\left(\frac{1}{3k-9} - \frac{1}{3k}\right) = 0 - 0 = 0$.

   Así se concluye, por el CSA, que la serie $\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3k-9}-\frac{1}{3k}\right)$ es convergente.
2. Ahora, para distinguir si la convergencia es condicional o absoluta, se va a analizar la serie en valor absoluto. Como
$$\left|(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3k-9}-\frac{1}{3k}\right)\right| = \frac{1}{3k-9}-\frac{1}{3k}$$
   entonces el tipo de convergencia dependerá de si la serie de valores absolutos,
$$\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3k-9}-\frac{1}{3k}\right)$$
   converge o diverge.

   Note que esta es una serie telescópica, de la forma $\sum(b_k - b_{k+3})$ para $b_k = 1/(3k-9)$. Usando la fórmula para series telescópicas[2] se tiene
$$\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3k-9}-\frac{1}{3k}\right) = b_4 + b_5 + b_6 - 3\lim b_k = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9} - 3(0) = \frac{11}{18}$$
   y con eso se determina que la serie de valores absolutos converge.

La conclusión final es que la serie original converge absolutamente.

Repaso

Determine si la serie $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k^3+5}$ converge condicionalmente, converge absolutamente o diverge. Solución: converge absolutamente

[2] Vea el ejercicio 39(b) del Capítulo 2, en la página 49.

Ejemplo 14: convergencia condicional

Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ converge condicionalmente, converge absolutamente o diverge.

1. Primero se va a analizar la serie original usando el criterio de las series alternadas. Se toma $a_n = 1/\ln(n+1)$ y se nota que:
   - a_n decrece porque su numerador es constante y su numerador es creciente.
   - $a_n \to 0$ porque $\displaystyle\lim \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0.$

   Así, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ converge, según el CSA.
2. Como antes, para determinar si la convergencia es absoluta o condicional debe analizarse la serie de valores absolutos. A partir del hecho[3] de que $\ln x < x$ para todo $x > 0$,
$$\ln(n+1) < (n+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\ln(n+1)}$$
   Como $\displaystyle\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, por el criterio de comparación directa se concluye que también la serie $\displaystyle\sum \frac{1}{\ln(n+1)}$ es divergente.

De lo anterior se deduce que la serie original converge condicionalmente.

Repaso

Investigue la serie $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p}{p+7}$. Solución: converge condicionalmente

Recuerde que en el ejercicio 110 del Capítulo 2 (página 69) se estableció que si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n, y que si $\sum a_n$ y $\sum c_n$ son ambas convergentes, entonces $\sum b_n$ también converge.

Suponga ahora que $\sum |a_n|$ converge. Note que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ siempre, y que si $\sum |a_n|$ converge entonces también $\sum(-|a_n|) = -\sum |a_n|$ será convergente. Entonces el resultado del párrafo anterior implica que la serie $\sum a_n$, por estar entre $\sum(-|a_n|)$ y $\sum |a_n|$, también será convergente. Eso es lo que dice el siguiente teorema.

Teorema (convergencia absoluta)

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ también converge.

[3]Usando técnicas de optimización se puede demostrar que la función $g(x) = x - \ln x$ alcanza un mínimo absoluto en el punto $(1, 1)$. Esto implica que $g(x) \geq 1$ para todo $x > 0$; en particular, $x - \ln x > 0$ para todo $x > 0$.

Gracias al teorema anterior, para ver que una serie $\sum a_n$ converge absolutamente basta con ver que $\sum |a_n|$ converge. En particular, recuerde que el criterio de la razón y el de la raíz n-ésima, estudiados en la sección anterior, analizan la serie siempre en valor absoluto. Así, si una serie analizada con alguno de esos criterios resulta ser convergente, entonces se puede concluir que converge de manera absoluta.

Podemos entonces replantear los criterios del cociente y de la raíz de esta manera:

Nuevas versiones del criterio del cociente y del criterio de la raíz

Sea $L = \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (para el CC) o $L = \sqrt[n]{|a_n|}$ (para el CR).

- Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.
- Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ diverge.

Por otro lado, la definición de valor absoluto también garantiza que cualquier serie de términos positivos convergente es absolutamente convergente, ya que si $\sum a_n$ es una serie convergente con $a_n > 0$ para todo n, entonces $\sum |a_n| = \sum a_n$, que converge.

Ejemplo 15: convergencia absoluta

Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)}}{5.7^n}$ converge absoluta o condicionalmente, o si diverge.

Note que el exponente $n(n+1)$ es el producto de dos enteros consecutivos, por lo que siempre alguno de ellos es par y por lo tanto su producto es par. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)}}{5.7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5.7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5.7}\right)^n$$

Esta es una serie geométrica con $r = 1/(5.7) < 1$ y por lo tanto es convergente. Se tiene así una serie de términos positivos convergente, que en consecuencia converge absolutamente puesto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n(n+1)}}{5.7^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{5.7}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5.7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)}}{5.7^n}$$

Repaso

Investigue la serie $\sum \dfrac{1}{k^2}$. Solución: converge absolutamente

Ejemplo 16: convergencia absoluta

Investigar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$.

Usando el criterio de la razón se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+1)!}{(-1)^{n+1}n(n+2)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)!}{n(n+2)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n(n+2)} = 0 < 1$$

Por lo tanto, la serie converge. Como se usó el criterio de la razón, entonces la convergencia es absoluta.

Repaso

Investigue la serie $\displaystyle\sum \frac{(-3)^m}{(m+2)^m}$. Solución: converge absolutamente

Ejercicios

Determine si converge o diverge. Si la serie converge, indique si la convergencia es absoluta o condicional.

57. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(1+n^7)^{-1/3}$

58. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^9}{(-9)^k}$

59. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j+1}\frac{\sqrt{j}}{j^2+1}$

60. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i\frac{i}{1+i^2}$

61. $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} p(-3)^{5-p}$

62. $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1}\frac{(\sqrt[5]{q}-q^2)^5}{q(5-q^5)^2}$

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n-3}-7^n}{5^{2n}+7^{2n+1}}$

64. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+2}}{\sqrt[3]{2-k^2}}$

65. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{n+1}}{(4n)!}$

66. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\ln^2(k+1)}$

67. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(3-k)^3}{3k^{13}}$

68. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \left(1+\frac{K}{n}\right)^n$, con K constante

69. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n^K}$, con $K>1$, constante

3.4 Resumen de criterios de convergencia

Hemos visto diez criterios de convergencia, que el siguiente cuadro resume.

Criterio	**Forma de la serie**	**Converge si...**	**Diverge si...**
Divergencia (CD)	$\sum a_n$		$a_n \not\to 0$
Series telescópicas	$\sum (b_n - b_{n+1})$	$\{ b_n \}$ converge	$\{ b_n \}$ diverge
Series geométricas (CSG)	$\sum r^n$	$\lvert r\rvert < 1$	$\lvert r\rvert \geq 1$
Integral (CI) (Maclaurin-Cauchy)	$\sum f(n)$ con f monótona	$\int^\infty f$ converge	$\int^\infty f$ diverge
Series p	$\sum \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$p \leq 1$
Comparación directa (CCD)	$\sum a_n$	$0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge	$0 \leq b_n \leq a_n$ y $\sum b_n$ diverge
Comparación en el límite (CCL)	$\sum a_n$	$0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < \infty$, a_n y b_n positivos y $\sum b_n$ converge	$0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < \infty$, a_n y b_n positivos y $\sum b_n$ diverge
Series alternadas (CSA) (Leibniz)	$\sum (-1)^n a_n$	$a_n \searrow 0$	
Razón o cociente (CC) (d'Alembert)	$\sum a_n$	$\lim \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	$\lim \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1$
Raíz (CR) (Cauchy)	$\sum a_n$	$\lim \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$\lim \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$

Al analizar la convergencia o divergencia de una serie, no existen reglas simples para decidir cuál es el mejor criterio. La experiencia ayuda mucho a intuir cómo será mejor investigar una serie dada, y esa experiencia se obtiene solamente con la práctica[4].

De todos modos, existen algunas recomendaciones generales que pueden guiar el análisis de convergencia. Veamos unas de ellas.

- Vea si la sucesión tiende a cero. A veces es obvio que no, y se puede aplicar el criterio de la divergencia.
  - Ejemplo: en $\sum (-1)^k \frac{3k+1}{5k+8}$ es claro que $\frac{3k+1}{5k+8} \to \frac{3}{5} \neq 0$, así que la serie diverge.

[4]Esto es análogo a la integración de funciones: no hay reglas (como sí las hay para derivar), pero sí hay recomendaciones, y la experiencia ayuda.

- Si la serie es geométrica o telescópica, aplique el criterio respectivo.
  - Ejemplo: $\sum \dfrac{2 \cdot 3^{j+1} - 5^j}{2^{2j}}$ se descompone como $\sum \left[6\left(\dfrac{3}{4}\right)^j - \left(\dfrac{5}{4}\right)^j\right]$, donde la primera parte converge pero la segunda diverge, así que la serie total diverge.
  - Ejemplo: $\sum \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ se descompone como $\sum[\ln n - \ln(n+1)]$, telescópica con $b_n = \ln n \to \infty$, por lo que la serie diverge.
- Si los términos de la serie son cocientes de polinomios o de potencias de la variable, pruebe con alguno de los criterios de comparación.
  - Ejemplo: $\sum \dfrac{p^2 - 3p + 1}{\sqrt{p^7 + p^4}}$ se puede comparar con $\sum \dfrac{p^2}{p^{7/2}} = \sum \dfrac{1}{p^{3/2}}$, que converge.
- Si los términos incluyen senos o cosenos, pruebe con el criterio de comparación directa.
  - Ejemplo: para $\sum \dfrac{4 + 2\cos q}{1 + q^2}$, note que $\dfrac{2}{1+q^2} \leq \dfrac{4 + 2\cos q}{1 + q^2} \leq \dfrac{6}{1+q^2}$ y escoja comparar con alguno de los dos extremos (el derecho, en este caso).
- Si los términos incluyen funciones exponenciales, factoriales o productos del tipo $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$, use el criterio del cociente.
  - Ejemplo: si $a_i = \dfrac{(-2)^i (i+3)!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3i+2)}$, entonces $\left|\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \dfrac{2(i+4)}{3i+2} \to \dfrac{2}{3} < 1$, así que la serie $\sum a_i$ converge.
- Si los términos incluyen bases variables elevadas a exponentes variables, use el criterio de la raíz.
  - Ejemplo: para $\sum \left(\dfrac{3m+7}{2m+1}\right)^{2m}$, calcule $\lim \sqrt[m]{\left|\dfrac{3m+7}{2m+1}\right|^{2m}} = \lim \left(\dfrac{3m+7}{2m+1}\right)^2 = \dfrac{9}{4} > 1$, de modo que la serie diverge.
- Si los términos incluyen alguna de las funciones log, arctan, arcsen u otras que no hayamos mencionado, considere el criterio de la integral, pero también esté atento a la posibilidad de una comparación sencilla.
  - Ejemplo: para $\sum \dfrac{1}{k^2\, 4^{1/k}}$ podría usarse el criterio de la integral con $f(x) = \dfrac{1}{x^2\, 4^{1/x}}$, que es decreciente y fácil de integrar con la sustitución $u = 1/x$. Sin embargo, es mucho más fácil notar que $0 < \dfrac{1}{k^2\, 4^{1/k}} < \dfrac{1}{4k^2}$ y usar una comparación directa.

Ejercicios

Determine si la serie converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

70. $\sum \frac{1}{q\,3^q}$

71. $\sum \frac{\ln n}{n+1}$

72. $\sum \frac{n}{(-7)^n}$

73. $\sum (-1)^k \frac{3k^2}{5k^2+8}$

74. $\sum \frac{5^{2n}}{n^n}$

75. $\sum \frac{\sqrt[3]{2j+1}}{(5j+2)\sqrt{j}}$

76. $\sum \frac{p}{p^3+1}$

77. $\sum \frac{(3m)^m}{m^{3m}}$

78. $\sum (-1)^p \frac{p}{7+p^2}$

79. $\sum \frac{5p-2}{3^p}$

80. $\sum \frac{1}{\sqrt{2m^3+6m}}$

81. $\sum \frac{23 \cdot 28 \cdot 33 \cdots (5j+18)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots (4j)}$

82. $\sum \frac{2^m}{1+3^m}$

83. $\sum \frac{(2p)!}{(p!)^2}$

84. $\sum \frac{\mathrm{e}^{-k}}{1+\mathrm{e}^{-k}}$

85. $\sum (m! + 4^{-m})$

86. $\sum \frac{k^2-k+3}{\sqrt[4]{k^7+2k^3+1}}$

87. $\sum \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2i+3)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3i+1)}$

88. $\sum \frac{(-n)^n}{5^{2+3n}}$

89. $\sum \frac{1}{3^m - m^2}$

90. $\sum p \left(\frac{-2}{5}\right)^p$

91. $\sum (-1)^{k+1} \frac{3k}{5k+6}$

92. $\sum \frac{1}{(2q-1)(2q+1)}$

93. $\sum \frac{\cos(1/n)}{n^2}$

94. $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3^n}\right)$

95. $\sum \frac{3+\cos m}{m^3}$

96. $\sum \cos(\pi q/2)$

97. $\sum (-1)^{j-1} \frac{\ln j}{j}$

98. $\sum (-1)^{i+1} \frac{1}{i \ln^3 i}$

99. $\sum \frac{1}{k\,(\log_4 k)^2}$

100. $\sum \left(\frac{1}{p^2+6} - \frac{p}{p!}\right)$

101. $\sum (-1)^{q+1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan q\right)$

102. $\sum \ln(1+\frac{3}{n})$

103. $\sum \frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{e}^m - \mathrm{e}^{-m}}$

104. $\sum \frac{1}{p \cdot \ln p \cdot \ln \ln p}$

105. $\sum (-1)^j \frac{j}{1+j^2}$

106. $\sum \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

107. $\sum \left(\frac{1-2p}{2-3p}\right)^{1-2p}$

108. $\sum \frac{(-4)^\ell}{1+9^\ell}$

109. $\sum \frac{\arctan m}{m^4-3}$

110. $\sum \tan(1/j)$

111. $\sum \dfrac{(-2)^{q-1}}{\big(\arctan(q+1)\big)^{q}}$

112. $\sum \dfrac{2^{2j+1}+2^{j}+1}{3^{j}}$

113. $\sum \dfrac{\ln p}{p\ln p+\sqrt{p^{3}\ln^{3} p}}$

114. $\sum a_j$ donde $a_0 = 1$ y

$$a_j = -\frac{j\, a_{j-1}}{2j+1}$$

115. $\sum (-1)^{k} \tan(k^{-1/2})$

116. $\sum \dfrac{\ln q}{q^{3}}$

117. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{k}}{(1+\mathrm{e}^{k})\ln^{2}(1+\mathrm{e}^{k})}$

118. $\sum \ln(1+\frac{1}{k^{2}})$

Capítulo 4

Series de potencias

En este capítulo se va a estudiar un tipo particular de series, en las cuales los términos dependen no sólo de una variable discreta (como lo es el índice de cada término de la sucesión) sino también de una variable continua, de manera semejante a los polinomios.

Definición (serie de potencias)

Dado $c \in \mathbb{R}$, una *serie de potencias* alrededor de c es una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

para $x \in \mathbb{R}$. El número c es el *centro de convergencia* y los números $\{ a_n \}$ son los *coeficientes* de la serie.

En la notación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, para interpretar el término con $n = 0$ cuando $x = c$, se adopta la convención de que $0^0 = 1$ (lo cual no es estándar pero se aplica en este contexto). Es por eso que el primer término de la serie es a_0, aun cuando $x = c$.

Como se puede notar, una serie de potencias representa un "polinomio infinito" o una "función infinita". Es otra manera de representar funciones. Consecuentemente y de manera similar a como se operan las funciones hasta ahora estudiadas, más adelante se estudiará cómo hacer otras operaciones (sumar, restar y multiplicar en la Sección 4.2; integrar y derivar en la Sección 4.3) con estas nuevas funciones.

Ejemplo 1: series de potencias

Considere las siguientes series de potencias.

1. La serie $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es una serie de potencias alrededor de $c = 0$, con $a_n = 1$ para todo n.
2. La serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3-t)^i}{3^i}$ no está en la forma estándar para series de potencias, pero se puede reescribir como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i(t-3)^i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^i (t-3)^i$$

donde vemos que $c = 3$ y $a_i = (-1/3)^i$.

3. En la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2u+5)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(u+\frac{5}{2})^{2k+1}}{(2k+1)!}$, el centro es $c = -\dfrac{5}{2}$.

4.1 Intervalos de convergencia

Note que una serie de potencias se puede ver como una "función de series", en la cual para cada uno de los valores que tome la variable x se obtiene una serie distinta. Así, dependiendo del valor que tome x, la serie resultante puede ser convergente o divergente. Siguiendo con la primera serie de potencias del ejemplo anterior, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, se tiene, por ejemplo:

- Para $x = -4$ la serie es $g(-4) = \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n$. Esta es una serie geométrica divergente, ya que $|-4| > 1$.
- Para $x = 0.35$ la serie es $g(0.35) = \sum_{n=1}^{\infty}(0.35)^n$, que es una serie geométrica convergente ya que $|0.35| < 1$.

En general, se puede ver la serie de potencias $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ como una serie geométrica. Así, la serie converge cuando $|x| < 1$, según el criterio de series geométricas. Por eso se sabe que la serie converge en $]-1, 1[$ y diverge en $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ ya que en este segundo conjunto se cumple que $|x| \geq 1$. Por lo tanto, el *intervalo de convergencia* de esa serie es $]-1, 1[$.

Que una serie de potencias converja o diverja depende no solo del centro y de los coeficientes, sino usualmente también del valor de x. El siguiente teorema garantiza que el conjunto de valores de x para los cuales una serie converge es un intervalo con centro en c.

Teorema

Para la serie de potencias $f(x) = \sum a_n(x-c)^n$ existe un $R \geq 0$, llamado *radio de convergencia*, con estas propiedades:

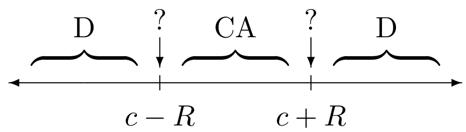
- La serie converge absolutamente si $|x-c| < R$; esto es, si $x \in \,]\,c-R,\ c+R\,[$.
- La serie diverge si $|x-c| > R$; es decir si $x \in \,]-\infty,\ c-R\,[\ \cup\ ]\,c+R,\ \infty\,[$.

El valor de R en el teorema anterior podría ser ∞, en cuyo caso la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición (intervalo y radio de convergencia)

El *intervalo de convergencia* de una serie de potencias es el conjunto de todos aquellos valores de x para los cuales la serie converge. El *radio de convergencia* es el valor de R mencionado en el teorema anterior.

Note que el teorema no dice qué hace la serie en los valores $x = c - R$ y $x = c + R$, los extremos del intervalo, en los cuales $|x - c| = R$. En estos puntos la serie podría converger absolutamente, converger condicionalmente o divergir. El intervalo de convergencia será el intervalo desde $c - R$ hasta $c + R$, a veces incluyendo alguno o ambos extremos y a veces excluyéndolos. Esto varía de una serie a otra. Podemos verlo de forma gráfica así (donde D significa "diverge" y CA significa "converge absolutamente"):



Para analizar la convergencia de una serie de potencias generalmente se usa el criterio de series geométricas, el de la razón o el de la raíz n-ésima. A veces será necesario usar otro criterio para resolver los extremos del intervalo, $c - R$ y $c + R$.

Ejemplo 2: intervalo y radio de convergencia

Determinar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \big[-7(3-2x)\big]^k$.

Como en el ejemplo anterior, usando el criterio de las series geométricas se ve que la serie converge solamente cuando $|-7(3-2x)| < 1$. Esta inecuación se resuelve así:

$$\begin{aligned}
|-7(3-2x)| &< 1 \\
7\,|3-2x| &< 1 \\
|3-2x| &< \frac{1}{7} \\
-\frac{1}{7} < 3 - 2x &< \frac{1}{7} \\
-\frac{22}{7} < -2x &< -\frac{20}{7} \\
\frac{11}{7} > x &> \frac{10}{7}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $\left]\frac{10}{7}, \frac{11}{7}\right[$ y el radio es $R = \frac{1}{14}$.

Repaso

Encuentre el intervalo de convergencia de $\sum (4x+6)^m$.

Solución: converge absolutamente en $\left]-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right[$

Ejemplo 3: intervalo de convergencia y análisis de los extremos

Encontrar el intervalo de convergencia de $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}(4x-5)^{2n}$.

En este caso se va a usar el criterio de la raíz n-ésima. Recuerde que si $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$ entonces la serie $\sum a_n$ converge absolutamente si $L < 1$ o diverge si $L > 1$, pero el criterio no se aplica si $L = 1$. Por eso, en este último caso se tendrá que hacer un análisis individual para los valores de x que resultan en $L = 1$.

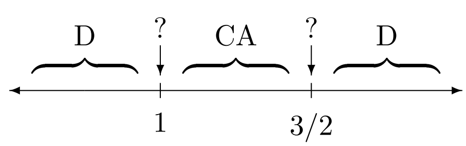
Se calcula entonces

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}(4x-5)^{2n} \right|} \\
&= \left|(4x-5)^2\right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3/7)^n - 1}{(3/7)^n + 1} \right|^{1/n} \\
&= (4x-5)^2 \left| \frac{0-1}{0+1} \right|^0 = (4x-5)^2
\end{aligned}$$

Este L depende de x, así que la pregunta ahora no es *si* $L < 1$ sino *para cuáles valores* de x es $L < 1$. La serie converge absolutamente si $(4x-5)^2 < 1$, inecuación que se empieza a resolver tomando raíz cuadrada:

$$\begin{aligned}
|4x-5| &< 1 \\
-1 < 4x - 5 &< 1 \\
4 < 4x &< 6 \\
1 < x &< \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Entonces la serie converge absolutamente en el intervalo $\left]1, \frac{3}{2}\right[$ y diverge en el conjunto $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$. Pero cuando $x = 1$ o $x = \frac{3}{2}$ aún no se sabe qué hace la serie, ya que en esos puntos el límite en el criterio de la raíz es $L = 1$. Gráficamente,



Estos dos puntos especiales se analizan por separado, regresando a la serie original y aplicando algún otro criterio en cada caso.

- Con $x = 1$ se obtiene la serie $h(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}(4\cdot 1 - 5)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}$.

  Usando el criterio de la divergencia se tiene que como

  $$\left| \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n} \right| = \frac{7^n - 3^n}{3^n + 7^n} = \frac{1 - (3/7)^n}{(3/7)^n + 1} \to 1 \neq 0$$

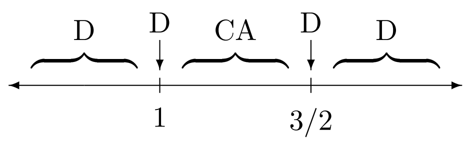
  entonces la serie $h(1)$ diverge.

- Con $x = \frac{3}{2}$ resulta la serie $h(\frac{3}{2}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}(4 \cdot \frac{3}{2} - 5)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}$.

  Como en el punto anterior se tiene que $\left|\frac{3^n-7^n}{3^n+7^n}\right| \to 1 \neq 0$. Por el criterio de la divergencia, también la serie $h(\frac{3}{2})$ diverge.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $\left]1, \frac{3}{2}\right[$ y el radio es $R = \frac{1}{4}$. Además, la serie converge absolutamente para $x \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$ pues se usó el criterio de la raíz n-ésima (la convergencia absoluta se estudió en el capítulo anterior), y diverge para cualquier otro x real.

En forma gráfica,



Repaso

Encuentre el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum \frac{k}{k+1}(x-2)^k$.

Solución: CA en $]1, 3[$

Ejemplo 4: serie de potencias con radio de convergencia infinito

Encontrar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(4t^2-1)^j}{(1-2t)^j\,(1+2j)!}$.

Primero note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(4t^2-1)^j}{(1-2t)^j\,(1+2j)!} &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(2t-1)^j\,(2t+1)^j}{(1-2t)^j\,(1+2j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}(-1)^j\frac{(2t+1)^j}{(1+2j)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2j+1}}{(1+2j)!}(2t+1)^j
\end{aligned}$$

Se va a usar el criterio de la razón, y de manera similar al ejemplo anterior, se deberá analizar por separado aquellos valores de t que hagan que el límite sea $L = 1$, si los hay. Ese límite en el criterio de la razón es

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{(-1)^{2(j+1)+1}(2t+1)^{j+1}}{(1+2(j+1))!}\cdot\frac{(1+2j)!}{(-1)^{2j+1}(2t+1)^j}\right| \\
&= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{(2t+1)(1+2j)!}{(3+2j)!}\right| \\
&= |2t+1|\lim_{j\to\infty}\frac{1}{(3+2j)(2+2j)} \\
&= |2t+1|\cdot 0 = 0 < 1 \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Con eso que se tiene que, independientemente del valor de t, el límite siempre va a ser menor que 1. Así, la serie converge absolutamente siempre, es decir, para cualquier $t \in \mathbb{R}$. En este caso se dice que el intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$ y que el radio de convergencia R es infinito.

Repaso

Encuentre el intervalo de convergencia de $\sum \dfrac{(2y+4)^k}{k!}$. Solución: CA en $\mathbb{R}$

En contraste con la situación del ejemplo anterior, en que el radio de convergencia es infinito, también puede suceder que el radio de convergencia sea cero y que el intervalo de convergencia se reduzca a un solo punto.

Ejemplo 5: serie de potencias con radio de convergencia cero

Analizar la serie $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^{3n} \frac{n!}{2^n}$.

Usando el criterio de la raíz n-ésima se tiene

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(2-x)^{3n} \frac{n!}{2^n}\right|} \\ &= |(2-x)^3| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{2} \\ &= \frac{|(2-x)^3|}{2} \cdot \infty \end{aligned}$$

En este punto hay que tener cuidado de no caer en la tentación de decir que $L = \infty$ para cualquier x y que la serie nunca converge. El producto de una constante por infinito, como en la última expresión, no siempre es infinito: la excepción se da cuando la constante es cero[1].

En efecto, observe lo que se obtiene si $x = 2$:

$$f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2-2)^{3n} \frac{n!}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \frac{n!}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Esto implica que para $x = 2$ sí se obtiene una serie convergente. Para cualquier otro valor de x, el criterio de la raíz da $L = \infty$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia en este caso es $\{2\}$, un solo punto, y el radio es $R = 0$.

Repaso

Encuentre el intervalo de convergencia de $\sum n^n (1-x)^n$.

Solución: CA en $\{1\}$

[1]La expresión $\dfrac{|(2-x)^3|}{2}$, aunque depende de la variable x, es una constante para efectos del límite, ya que el límite es cuando $n \to \infty$. Dentro de ese límite la única variable es n.

Tal como se estudió en el capítulo anterior, también se puede decir qué tipo de convergencia tienen las series convergentes que resultan de cada uno de los valores de x.

Ejemplo 6: convergencia de una serie de potencias

Determinar para cuál o cuáles valores de x la siguiente serie de potencias

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2-3x)^n}{n}$$

converge, y analizar el tipo de convergencia.

Usando el criterio de la razón se tiene que:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1}(2-3x)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{5^n(2-3x)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5(2-3x)n}{n+1} \right| \\ &= 5\,|2-3x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= 5\,|2-3x| \cdot 1 = 5\,|2-3x| \end{aligned}$$

Así,

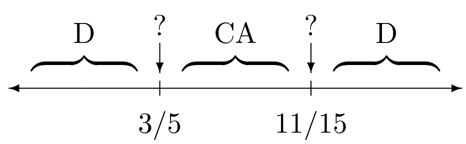
$$5\,|2-3x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 15\,\left|x-\tfrac{2}{3}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|x-\tfrac{2}{3}\right| < \tfrac{1}{15}$$

De esa manera vemos que este resultado confirma lo que el teorema dice. Además, en la notación del teorema, aquí tenemos $c = \frac{2}{3}$ y $R = \frac{1}{15}$.

Al resolver la última inecuación se llega a

$$\left|x-\tfrac{2}{3}\right| < \tfrac{1}{15} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{15} < x-\tfrac{2}{3} < \tfrac{1}{15} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{5} < x < \tfrac{11}{15}$$

Con eso se tiene que la serie converge absolutamente en $\left]\frac{3}{5}, \frac{11}{15}\right[$ y diverge en $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right[\cup \left]\frac{11}{15}, \infty\right[$.



Ahora se deben analizar los extremos.

- Para $x = \frac{3}{5}$ se obtiene la serie

$$g(\tfrac{3}{5}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2-3\cdot\frac{3}{5})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(\frac{1}{5})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

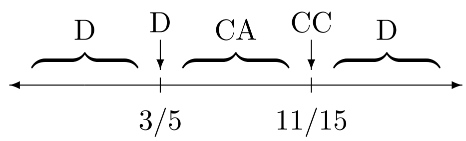
  que es armónica y por lo tanto diverge.

- Para $x = \frac{11}{15}$ la serie es

$$g(\tfrac{11}{15}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2 - 3 \cdot \frac{11}{15})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(-\frac{3}{15})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  que es una armónica alternada, por lo que converge condicionalmente.

Finalmente, la serie original converge absolutamente en $]\frac{3}{5}, \frac{11}{15}[$ y condicionalmente en $\{\, \frac{11}{15} \,\}$. Diverge en todos los demás números reales. En forma gráfica,



Repaso

Encuentre el intervalo de convergencia de $\sum \dfrac{(t+1)^n}{n+1}$.

Solución: CA en $]-2, 0[$, CC en $\{\, -2 \,\}$

Ejercicios

Determine dónde converge absolutamente y dónde converge condicionalmente.

1. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u-4)^m}{m^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-4w)^n}{n}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2v)^k}{k}$

4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2t+6)^k}{\ln k}$

5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2i(4-x)^i$

6. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,(u-7)^{2j}}{2j}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, y^n$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-4t)^{3n+2}}{(2n)!}$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{2n}}{(n!)^2}$

10. $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty} \frac{(1-5x)^{2q}}{q\,\ln q}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z+1)^n$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, n!\, 2^{-n^2}$

13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2w+1)^{2k+1}}{9^k}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3t-2)^{n^4-n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}-z\right)^{2n}}{(2n)!}$

16. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(w-3)^j}{j\,5^j}$

17. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,(1-3y)^k}{(k+1)\,2^k}$

18. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(3-x)^{m+1}}{\sqrt{m^2+1}}$

19. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(u-2)^{2k}}{2k+1}$

20. $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(5v-2)^p}{p\,(\ln p)^5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(3k+1)(5x-12)}{(2k+5)^2}\right)^k$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n (n!)^2}{(2n)!}$ (no analice extremos)

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, n!\, n^{-n}$ (no analice extremos)

25. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!(2y+4)^j}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2j+1)}$ (no analice extremos)

4.2 Series de Taylor y Maclaurin

Dada una función f, su serie de Taylor es una serie de potencias definida a partir de las derivadas de f en algún punto. Vamos a ver cómo se define la serie de Taylor de una función y cómo se encuentra una a partir de la definición. Luego veremos cómo se pueden encontrar series de Taylor a partir de algunas funciones básicas.

La idea que motiva la definición de serie de Taylor es esta: dada una función f, si acaso $f(x)$ fuera el resultado de una serie de potencias, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, entonces ¿qué relación habría entre f y los coeficientes $\{\, a_n \,\}$?

La relación se encuentra al evaluar f y sus derivadas en $x = c$. Suponiendo que para derivar una serie de potencias se puede derivar cada término (vea el teorema sobre derivadas en la página 114), se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \cdots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + 5a_5(x-c)^4 + \cdots \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-c) + 12a_4(x-c)^2 + 20a_5(x-c)^3 + \cdots \\
f^{(3)}(x) &= 6a_3 + 24a_4(x-c) + 60a_6(x-c)^2 + \cdots \\
f^{(4)}(x) &= 24a_4 + 120a_6(x-c) + \cdots
\end{aligned}$$

Evaluando cada una de esas derivadas en $x = c$ resulta $f(c) = a_0$, $f'(c) = a_1$, $f''(c) = 2a_2$, $f^{(3)}(c) = 6a_3$, $f^{(4)}(c) = 24a_4$ y, en general[2],

$$f^{(n)}(c) = n!\, a_n \quad \text{para } n \geq 0,$$

de donde se puede despejar

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

[2]En la notación de series de Taylor, $h^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de h, de modo que $h^{(1)} = h'$, $h^{(2)} = h''$ y así sucesivamente. Como caso especial, la derivada de orden cero es la función misma sin derivar: $h^{(0)} = h$.

Lo anterior supone que la derivada de una suma infinita es igual a la suma de las derivadas, cosa que no siempre es cierta (vea el Ejercicio 48). Pero aún así, el análisis sugiere que si $f(x)$ fuera una serie de potencias alrededor de un número c, los coeficientes no podrían ser otra cosa que $a_n = f^{(n)}(c)/n!$.

De ahí viene la siguiente definición.

Definición (serie de Taylor y serie de Maclaurin)

Sean $c \in \mathbb{R}$ y f una función con derivadas de todos los órdenes en c. Entonces la *serie de Taylor* de f alrededor de c es

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Si $c = 0$ la serie se llama también *serie de Maclaurin*.

Como se ve, este tipo de series es un caso particular de las series de potencias, con coeficientes $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Una serie de Maclaurin es simplemente una serie de Taylor alrededor de cero.

Ejemplo 7: encontrar una serie de Taylor usando la definición

Encontrar la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ alrededor de 3, y determinar su intervalo de convergencia.

En este caso se tiene que $c = 3$. Se debe encontrar $T(x)$ dada por

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$$

Note que las primeras derivadas de f son

$$\begin{array}{rrcrr}
f^{(0)}(x) = & \ln x & \Rightarrow & f^{(0)}(3) = & \ln 3 \\
f^{(1)}(x) = & \dfrac{1}{x} & \Rightarrow & f^{(1)}(3) = & \dfrac{1}{3} \\
f^{(2)}(x) = & -\dfrac{1}{x^2} & \Rightarrow & f^{(2)}(3) = & -\dfrac{1}{9} \\
f^{(3)}(x) = & \dfrac{2}{x^3} & \Rightarrow & f^{(3)}(3) = & \dfrac{2}{27} \\
f^{(4)}(x) = & -\dfrac{6}{x^4} & \Rightarrow & f^{(4)}(3) = & -\dfrac{6}{81} \\
f^{(5)}(x) = & \dfrac{24}{x^5} & \Rightarrow & f^{(5)}(3) = & \dfrac{24}{243} \\
f^{(6)}(x) = & -\dfrac{120}{x^6} & \Rightarrow & f^{(6)}(3) = & -\dfrac{120}{729} \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

En general, cosa que se puede demostrar por inducción,

$$f^{(n)}(3) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{3^n}$$

para $n \geq 1$ (vea el ejercicio 45).

Con eso se tiene que

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{\ln 3}{0!}(x-3)^0 + \frac{0!/3^1}{1!}(x-3)^1 - \frac{1!/3^2}{2!}(x-3)^2 + \frac{2!/3^3}{3!}(x-3)^3 \\
&\quad - \frac{3!/3^4}{4!}(x-3)^4 + \frac{4!/3^5}{5!}(x-3)^5 - \frac{5!/3^6}{6!}(x-3)^6 + \cdots \\
&= \ln 3 + \frac{1}{3^1\cdot 1}(x-3)^1 - \frac{1}{3^2\cdot 2}(x-3)^2 + \frac{1}{3^3\cdot 3}(x-3)^3 \\
&\quad - \frac{1}{3^4\cdot 4}(x-3)^4 + \frac{1}{3^5\cdot 5}(x-3)^5 - \frac{1}{3^6\cdot 6}(x-3)^6 + \cdots \\
&= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}
\end{aligned}$$

Note también que el intervalo de convergencia de $T(x)$ va a ser el mismo que el de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ (porque las dos series difieren solo en la constante $\ln 3$), por lo que se va analizar esa segunda serie $S(x)$ usando el criterio de la raíz n-ésima:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}\right|} \\
&= \frac{|x-3|}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{|x-3|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\
&= \frac{|x-3|}{3}
\end{aligned}$$

Ahora se buscan los valores de x tales que $\frac{|x-3|}{3} < 1$, es decir

$$|x-3| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x-3 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 6$$

Entonces la serie $S(x)$ converge absolutamente en $]0,6[$. Analizando los extremos se tiene:

- Para $x = 0$ la serie es $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que diverge pues es armónica.
- Para $x = 6$, es $S(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, y converge condicionalmente pues es armónica alternada.

Por lo tanto, $S(x)$, e igualmente $T(x)$, converge absolutamente en $]0,6[$, converge condicionalmente en $\{6\}$ y diverge en el resto de $\mathbb{R}$.

Repaso

Encuentre la serie de Maclaurin (es decir, Taylor con $c = 0$) para e^x.

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Ejemplo 8: encontrar una serie de Maclaurin por definición

Determinar la serie de Maclaurin de $g(t) = \cos t$ y su respectivo intervalo de convergencia.

En este caso se tiene $c = 0$. Se debe encontrar $M(t)$ tal que

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, t^n$$

Note que las primeras derivadas son

$$\begin{array}{rcl}
g^{(0)}(t) = \cos t & \Rightarrow & g^{(0)}(0) = 1 \\
g^{(1)}(t) = -\operatorname{sen} t & \Rightarrow & g^{(1)}(0) = 0 \\
g^{(2)}(t) = -\cos t & \Rightarrow & g^{(2)}(0) = -1 \\
g^{(3)}(t) = \operatorname{sen} t & \Rightarrow & g^{(3)}(0) = 0 \\
g^{(4)}(t) = \cos t & \Rightarrow & g^{(4)}(0) = 1 \\
g^{(5)}(t) = -\operatorname{sen} t & \Rightarrow & g^{(5)}(0) = 0 \\
g^{(6)}(t) = -\cos t & \Rightarrow & g^{(6)}(0) = -1 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
M(t) &= 1 + 0 + \frac{-1}{2!}\, t^2 + 0 + \frac{-1}{4!}\, t^4 + 0 + \frac{-1}{6!}\, t^6 + \cdots \\
&= \frac{t^0}{0!} - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Ahora se va a usar el criterio de la razón para determinar el intervalo de convergencia de $M(t)$:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\, t^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n\, t^{2n}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{t^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| \\
&= t^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

que es menor que 1 para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo que se concluye que la serie de Maclaurin de $\cos t$ converge absolutamente en $\mathbb{R}$.

Repaso

Encuentre la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} t$. Solución: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ahora bien, si la serie de Taylor de una función converge, ¿cuál es la relación entre la función y el valor de convergencia de la serie? El siguiente teorema garantiza que para cualquier función, su serie de Taylor, donde sea convergente, converge precisamente al valor de la función.

Teorema (valor de convergencia de una serie de Taylor)

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$ la serie de Taylor de la función f alrededor del punto c, convergente en el intervalo I. Entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \text{para todo } x \in I.$$

Ejemplo 9: valor de convergencia de series de Taylor

Siguiendo los resultados del Ejemplo 7 (la serie $T(x)$ de Taylor para $\ln x$ alrededor de 3) y el Ejemplo 8 (la serie $M(t)$ de Maclaurin para $\cos t$), contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el valor de $T(5)$?
   Note que 5 está dentro del intervalo de convergencia, por lo tanto
   $$T(5) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(5-3)^n}{n \cdot 3^n} = \ln 5$$
2. ¿Se podría decir con certeza cuál es el valor de $T(6)$?
   Sí. A pesar de que la convergencia en 6 es condicional, la serie en ese punto sigue siendo convergente, por lo tanto
   $$T(6) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 6$$
3. ¿Se puede calcular el valor de $T(10)$?
   No, porque 10 no está dentro del intervalo de convergencia. Es decir, la serie obtenida en ese punto diverge.

4. ¿Cuál es el valor de $M(1)$?
   Recuerde que el intervalo de convergencia de M es $\mathbb{R}$, por lo que
   $$M(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1$$

En la respuesta a la pregunta 2 del ejemplo anterior se obtuvo que

$$\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 6$$

de donde se puede despejar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$$

Esto significa que la serie armónica alternada converge exactamente a $\ln 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$$

Series de Taylor a partir de funciones conocidas

En el siguiente cuadro se presentan las series de Taylor de algunas funciones frecuentes con sus respectivos intervalos de convergencia.

Función		**Desarrollo en serie de Taylor**		**Intervalo**
$\frac{1}{x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$	$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$	$]0,2[$
$\ln x$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$	$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$	$]0,2]$
e^x	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sen} x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$	$[-1,1]$
$\operatorname{arcsen} x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$	$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} - \cdots$	$[-1,1]$

El cuadro anterior permite simplificar el trabajo al querer encontrar el desarrollo en serie de Taylor de algunas funciones.

Ejemplo 10: desarrollo en serie de una composición de funciones

Usando los resultados del cuadro anterior, determinar un desarrollo en serie de Taylor y el respectivo intervalo de convergencia para $f(x) = \ln(3x+1)$.

Ya tenemos el desarrollo de $\ln x$ en el cuadro. Haciendo el cambio de variable $u = 3x + 1$ se tiene

$$f(x) = \ln(3x+1) = \ln u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(u-1)^n}{n} \qquad \text{para } 0 < u \leq 2.$$

Y ahora devolviendo el cambio de variable se llega a

$$\ln(3x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3x)^n}{n} \qquad \text{para } 0 < 3x+1 \leq 2,$$

es decir, para $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

Repaso

Encuentre una serie de potencias para $\arctan(1-3t)$.

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \,(1-3t)^{2n+1}}{2n+1}$

Ejemplo 11: desarrollo en serie de una división de funciones

Encontrar una serie de Taylor y su intervalo de convergencia para la función $g(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{y+1}{4})}{y+1}$

Primero se va determinar el desarrollo del numerador $\operatorname{sen}(\frac{y+1}{4})$. Como en el caso anterior, se hace una sustitución, ahora $u = \frac{y+1}{4}$, que resulta en

$$\operatorname{sen}\left(\frac{y+1}{4}\right) = \operatorname{sen} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (y+1)^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$$

para cualquier $u \in \mathbb{R}$ y por lo tanto para cualquier $y \in \mathbb{R}$.

De aquí que

$$
\begin{aligned}
g(y) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{y+1}{4})}{y+1} &= \frac{1}{y+1} \operatorname{sen}\left(\frac{y+1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{y+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(y+1)^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y+1} \cdot \frac{(-1)^n\,(y+1)^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(y+1)^{2n}}{4^{2n+1}(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

con intervalo de convergencia igual a $\mathbb{R}$.

El paso en que la fracción $\frac{1}{y+1}$ entra a la serie es válido porque la variable en la serie es n, mientras que y es una constante con respecto a la serie.

Repaso

Encuentre la serie de Maclaurin de $2\theta^2 \cos\theta$. Solución: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2\theta^{2k+2}}{(2k)!}$

Ejemplo 12: desarrollo en serie de una resta de funciones

Encontrar una serie de Taylor para $h(w) = 1 - \mathrm{e}^{2w}$.

Haciendo la sustitución $x = 2w$ y buscando en el cuadro la serie para e^x se obtiene que $\mathrm{e}^{2w} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2w)^n}{n!}$ para todo $w \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
h(w) = 1 - \mathrm{e}^{2w} &= 1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2w)^n}{n!}\right) \\
&= 1 - \left(1 + \frac{2w}{1!} + \frac{4w^2}{2!} + \frac{8w^3}{3!} + \frac{16w^4}{4!} + \cdots\right) \\
&= -\frac{2w}{1!} - \frac{4w^2}{2!} - \frac{8w^3}{3!} - \frac{16w^4}{4!} - \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2w)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

para $w \in \mathbb{R}$.

Repaso

Encuentre una serie de Taylor para $3t - \operatorname{sen} 3t$. Solución: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(3t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ejercicios

26. Use la definición para encontrar una serie de Taylor para la función $h(u) = \dfrac{1}{u+5}$ alrededor de $c = -4$, y determine el intervalo de convergencia.

27. Use la definición para encontrar una serie de Taylor para la función $g(z) = \sqrt{z}$ alrededor de $c = 1$ y determine el intervalo de convergencia.

Encuentre una serie de Taylor usando el cuadro de la página 110.

28. $\operatorname{sen}\sqrt{x}$

29. e^{-4t}

30. b^y donde $b > 0$

31. $\arctan(5x^3)$

32. $\dfrac{\cos x}{x}$

33. $\dfrac{\operatorname{arcsen} 2t}{t}$

34. $u\,\mathrm{e}^{-u^2}$

35. $1 - \cos 2\beta$

36. $\mathrm{e}^{-2t} + 2t - 1$

37. $\operatorname{sen}^2 x$

38. $\cos^2 z$

39. $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$

40. $\operatorname{senh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

41. $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

42. $\dfrac{y - \operatorname{sen} y}{y^2}$

43. $w(1 - \mathrm{e}^{-2w})$

44. $\dfrac{3}{1 + x - 2x^2}$

45. Con respecto al Ejemplo 7 (página 106), demuestre por inducción que

$$f^{(n)}(3) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{3^n}$$

para $n \geq 1$, donde $f(x) = \ln x$.

46. Con respecto al Ejemplo 6 del Capítulo 3 (página 78), demuestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

47. Con respecto al repaso del Ejemplo 6 del Capítulo 3 (página 78), demuestre que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \mathrm{e}^{-1}$$

48. Recuerde que la derivada de una suma finita de funciones derivables es igual a la suma de las derivadas: $(\sum f_k)' = \sum f_k'$ si la suma es finita. Este ejercicio demuestra que lo anterior no siempre se extiende a sumas infinitas: aunque una serie de funciones derivables converja absolutamente, la suma de sus derivadas puede no existir.

Sea $h_k(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(k^2 x)}{k^2} - \dfrac{\operatorname{sen}((k+1)^2 x)}{(k+1)^2}$ para $x \in I = [0, \pi]$ y $k = 1, 2, 3, \ldots$

(a) Demuestre que h_k es derivable en I, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$

(b) Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ converge a $\operatorname{sen} x$ para todo $x \in I$.

(c) Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} h'_k(x)$ no converge en I.

(d) Concluya que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)\right)' \neq \sum_{k=1}^{\infty} h'_k(x)$$

4.3 Derivadas e integrales de una serie de potencias

Es bien sabido que la derivada de una suma de dos funciones derivables es la suma de sus derivadas: $\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$. Por inducción se puede demostrar que la derivada de la suma de cualquier cantidad *finita* de funciones derivables es la suma de las derivadas:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} h_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{m} h'_i(x)$$

para cualesquiera $h_1, \ldots, h_m$ derivables, y cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Entonces cabe preguntarse: ¿la derivada de una suma *infinita* de funciones será la suma de las derivadas? Es decir, ¿en general es cierto que $\left[\sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{\infty} h'_i(x)$?

La respuesta es que no siempre es así, como ya se vio en el Ejercicio 48. Pero para el caso particular de series de potencias sí se cumple el siguiente teorema.

Teorema (derivada de una serie de potencias)

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es una serie de potencias con centro en c y con radio de convergencia $R > 0$, entonces

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$$

para todo $x \in \,]c-R, c+R[$.

El punto crucial en el teorema es que la derivada de una suma de infinitas funciones se pueda calcular como la suma de las derivadas de cada función. Una vez superado eso, la fórmula es natural porque

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-c)^n\right]' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1} \end{aligned}$$

Por otro lado, igual que con las derivadas sucede con las integrales: se sabe que la integral de una suma de dos, tres o cualquier número finito de funciones integrables es la suma de las integrales individuales:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{m} h_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \int h_i(x)\, \mathrm{d}x$$

para cualesquiera $h_1, \ldots, h_m$ integrables y para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Y de la misma manera, también, resulta que en general la integral de una suma *infinita* de funciones no siempre es igual a la suma de las integrales... pero sí para el caso de una serie de potencias.

Teorema (integral de una serie de potencias)

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ es absolutamente convergente en $]c-R, c+R[$ entonces, en ese mismo intervalo de convergencia,

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1} + K$$

(donde K es la constante de integración).

Como en el caso de la derivada, la clave en este teorema está en que la integral de una suma infinita de potencias es la suma de las integrales individuales. A partir de ahí se deduce que

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x-c)^n \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1} + K \end{aligned}$$

La propiedad garantizada por el teorema anterior es cierta también para integrales definidas: si a y b están en el intervalo $]c-R, c+R[$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1} \right|_a^b$$

Ejemplo 13: derivada de una serie de potencias

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de $\arctan x$ dado en el cuadro de la página 110, obtener un desarrollo en serie de Taylor para $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, y determinar su intervalo de convergencia.

Recuerde que $(\arctan t)' = \dfrac{1}{t^2+1}$. Así,

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{t^2+1} &= (\arctan t)' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n+1}}{2n+1}\right)' \quad \text{para } -1 \leq t \leq 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n\, t^{2n}}{2n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{t^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}$ para $-1 \leq t \leq 1$.

Repaso

Encuentre una serie de Taylor para $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ (recordando que esta es la derivada de $\operatorname{arcsen} z$).

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, z^{2n}}{(2^n\, n!)^2}$

Ejemplo 14: usar una serie para aproximar una integral definida

Usando los resultados del cuadro en la página 110, aproximar el resultado de la integral

$$\int_0^2 \cos(\sqrt{y})\, \mathrm{d}y$$

con un error menor que 0.005.

Note que $\cos(\sqrt{y}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^k}{(2k)!}$, según la serie de Maclaurin de la función coseno, sustituyendo $x = \sqrt{y}$. Así,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \cos(\sqrt{y})\, \mathrm{d}y &= \int_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^k}{(2k)!}\, \mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^{k+1}}{(k+1)(2k)!}\bigg|_0^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k\, 2^{k+1}}{(k+1)(2k)!} - \frac{(-1)^k\, 0^{k+1}}{(k+1)(2k)!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{(k+1)(2k)!} \end{aligned}$$

Para aproximar esta suma se puede utilizar el teorema sobre el error en las sumas parciales de series alternadas. Recuerde que para poder usar dicho teorema se debe comprobar que $a_k \searrow 0$, donde $a_k = \frac{2^{k+1}}{(k+1)(2k)!}$.

Se deja a la curiosidad del lector hacer esa verificación. Como sugerencia, note que $a_{k+1}/a_k < 1$ para todo k.

Aceptando que se cumplen los requisitos del teorema, para encontrar una aproximación con error menor que 0.005 se necesita la k-ésima suma parcial de la serie dada, donde k es algún entero tal que $a_{k+1} \leq 0.005$.

k	$a_{k+1} = \dfrac{2^{k+2}}{(k+2)(2k+2)!}$
0	$\dfrac{2^2}{(2)(2)!} = 1 > 0.005$
1	$\dfrac{2^3}{(3)(4)!} \approx 0.111111 > 0.005$
2	$\dfrac{2^4}{(4)(6)!} \approx 0.005556 > 0.005$
3	$\dfrac{2^5}{(5)(8)!} \approx 0.0001587 < 0.005$

Entonces S_3 aproxima la serie, y por lo tanto la integral, con un error menor que 0.005:

$$\int_0^2 \cos\left(\sqrt{y}\right) \mathrm{d}y \approx S_3 = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{(k+1)(2k)!} = \frac{199}{180} = 1.105\bar{5}$$

Ejercicios

Aproxime con un error menor o igual a 0.0001.

49. $\displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{sen}(t^3)\,\mathrm{d}t$

50. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u$

51. $\displaystyle\int_{-0.9}^0 \arctan t^3\,\mathrm{d}t$

52. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{w^4+1}\,\mathrm{d}w$

53. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} 5^{-y^2} \mathrm{d}y$

54. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arctan z}{z}\,\mathrm{d}z$

55. $\displaystyle\int_0^{1/4} x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

56. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{sen}\,w}{w}\,\mathrm{d}w$

57. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{v}\,\cos v\,\mathrm{d}v$

58. $\displaystyle\int_0^{0.1} x\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

59. $\displaystyle\int_1^{1.25} \frac{\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v$

60. $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{\sqrt{u}}{2^u}\,\mathrm{d}u$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta^2}\, \mathrm{d}\theta$

62. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{y - \operatorname{sen} y}{y^2}\, \mathrm{d}y$

63. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1 + w^3}\, \mathrm{d}w$

64. Usando desarrollos en series de Taylor, pruebe que:

(a) $\operatorname{sen}' x = \cos x$

(b) $\cos' x = -\operatorname{sen} x$

(c) $(\ln x)' = 1/x$

(d) $(\arctan x)' = 1/(x^2 + 1)$

65. Usando el desarrollo en serie de Taylor de $\operatorname{arcsen} x$, obtenga un desarrollo en serie de Taylor para $\arccos x$ y determine su intervalo de convergencia.

66. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ una serie de potencias convergente en el intervalo $]c - R, c + R[$, con $R > 0$.

(a) Demuestre que si $f(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

(b) Demuestre que si $f'' - f = 0$ entonces $n(n-1)a_n - a_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.

Apéndice A
Sugerencias

Capítulo 1

10 Para $n \geq 2$ descomponga $\int_1^{n+1} = \int_1^n + \int_n^{n+1}$. Como ln es una función creciente, $\ln t \leq \ln(n+1)$ para todo $t \in [n,\ n+1]$. Entonces $\int_n^{n+1} \ln t \, \mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \ln(n+1) \, \mathrm{d}t = \ln(n+1)$.
Vea también la discusión luego del gráfico en la página 55.

11 Escriba $1 + x + nx + nx^2 = 1 + x(1+n) + nx^2$ y note que $nx^2 \geq 0$.

12 Escriba $3p - 3 + 2p + 1 = 3p + 2(p-1)$, y note que $2(p-1) \geq 0$ y $3p = 3(p+1) - 3$.

13 Escriba $3p + 2p + 1 = 3p + 3 + 2p - 2$ y note que $2p - 2 \geq 0$.

14 Note que $6k > 6$, así que $6k + 6k > 6k + 6$.

15 Empiece desarrollando el lado derecho, 3^{j+1}.

16 Por la regla del producto, $(x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot 1$.

17 $\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + x_{n+1} \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + |x_{n+1}|$

18 Empiece desarrollando el lado derecho para $n+1$. Note que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \right) + x^n = y \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k-1} \right) + x^n$$

19 Si 3^{2k+1} es múltiplo de 4, entonces $3^{2k+1} = 4m$ para algún entero m. Escriba $9 \cdot 3^{2k+1} + 1 = 9(4m-1) + 1 = 36m + 8$, suma de múltiplos de 4.

20 El desarrollo de $(a+b)^4$ es $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Luego, $n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = (n^4 + 2n^3 + n^2) + (4n^3 + 12n^2 + 12n + 4)$.

21 Si $5^{2p-1} + 1$ es múltiplo de 6, entonces $5^{2p-1} + 1 = 6m$ para algún entero m. Luego $25 \cdot 5^{2p-1} + 1 = 25(6m-1) + 1 = 150m - 24$, resta de múltiplos de 6.

22 Si $8^j - 1$ es múltiplo de 7, entonces $8^j - 1 = 7m$ para algún entero m. Luego $8 \cdot 8^j - 1 = 8(7m-1) + 1 = 56m - 7$, resta de múltiplos de 7.

23 Si $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es múltiplo de 7, entonces $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ para algún entero k. Luego $9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 9(7k - 2^{n+2}) + 2 \cdot 2^{n+2} = 63k - 7 \cdot 2^{n+2}$, resta de múltiplos de 7.

24 Si $9^m - 1$ es múltiplo de 8, entonces $9^m - 1 = 8k$ para algún entero k. Luego $9 \cdot 9^m - 1 = 9(8k+1) - 1 = 72k + 8$, suma de múltiplos de 8.

25 Si $4^n + 15n - 1$ es múltiplo de 9, entonces $4^n + 15n - 1 = 9k$ para algún entero k. Luego $4 \cdot 4^n + 15n + 14 = 4(9k - 15n + 1) + 15n + 14 = 36k - 45n + 18$, suma de múltiplos de 9.

26 Si $10^{2p+1} + 1$ es múltiplo de 11, entonces $10^{2p+1} + 1 = 11m$ para algún entero m. Luego $100 \cdot 10^{2p+1} + 1 = 100(11m - 1) + 1 = 110m - 99$, resta de múltiplos de 11.

27 En la expresión $11 \cdot 11^{j+1} - 12^2 \cdot 12^{2j-1}$, sume y reste $12^2 \cdot 11^{j+1}$. Después agrupe los dos términos que tienen factor común 12^2 y los dos que tienen 11^{j+1}. Note que $12^{2j-1} + 11^{j+1}$ y $11 - 12^2$ son múltiplos de 133.

28 Si n es impar entonces $n = 2k + 1$ para algún entero k. Use inducción sobre k. Note que $4k^2 + 12k + 9 - 1 = (2k+1)^2 - 1 + 8k + 8$.

29 (a) Para $p = 2$, pruebe que $r^2 + 1/r^2 = (r + 1/r)^2 - 2$. (b) Para $p + 1$, pruebe que $r^{p+1} + 1/r^{p+1} = (r^p + 1/r^p)(r + 1/r) - (r^{p-1} + 1/r^{p-1})$, resta de dos enteros.

73 Recuerde que $\sum_{i=1}^{m+1} a_i = (\sum_{i=1}^{m} a_i) + a_{m+1}$ y que $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$.

74 Use la definición de F_{4n+4}; luego use la definición de F_{4n+3} y la de F_{4n+2} dos veces. Note que $4F_{4n+1}$ es múltiplo de 4.

75 En el paso inductivo, use la definición de F_{n+1} y desarrolle el cuadrado. Use también la definición de F_{n+2}. Luego factorice $F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n$, llegue a $-(F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1})$ y use la hipótesis de inducción.

76 Recuerde que $\sum_{i=1}^{m+1} a_i = (\sum_{i=1}^{m} a_i) + a_{m+1}$ y que $(n+1)! \cdot (n+2) = (n+2)!$.

77 Como $k < 2$, entonces $k! \cdot 2 < (k+1)!$.

78 Note que $n^n < (n+1)^n$, así que $n^n(n+1) < (n+1)^{n+1}$.

79 (b) Use la definición de F_n y las dos hipótesis de inducción. Luego note que $2^{n-2} < 2^{n-1}$.

80 (50) A partir del segundo, q_n es potencia de 2. (51) Factorice los primeros términos; por ejemplo, $c_2 = (2)(3)(3)$. (52) Cada w_k es potencia de 2. (53) Cada y_k es múltiplo de $k!$. (54)–(57) Use la ecuación característica. (58) La ecuación característica es $x^3 = -2x^2 + x + 2$.

88 La derivada de $(5/4)^x/x$ es $(5/4)^x(x\ln(5/4) - 1)/x^2$, que es positiva para $x > 4.481$, lo que garantiza que la sucesión crece *al menos* para $p \geq 5$. Pero resolviendo $a_{p+1}/a_p \geq 1$ resulta que de hecho la sucesión crece a partir de $p = 4$.

89 La derivada de $x^3/2^x$ es $x^2\,2^{-x}(3 - x\ln 2)$, que es negativa para $x > 4.328$, lo que garantiza que la sucesión decrece *al menos* para $i \geq 5$. Pero resolviendo $a_{i+1}/a_i \geq 1$ resulta que de hecho la sucesión decrece a partir de $i = 4$.

95 Note que $r_k \geq 0$ para todo k. Racionalice $r_{k+1} - r_k$ y explique por qué siempre es positivo.

124 Demuestre (por inducción) que $\dfrac{n!}{2^n} > \dfrac{n}{2}$ para $n \geq 5$.

125 Note que $\dfrac{q!}{q-1} > \dfrac{q!}{q}$ para $q > 1$.

126 Aplique el teorema de la página 33 a las sucesiones $-b_n$ y $-a_n$.

127 Note que $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

128 Escriba $\sqrt[n]{n^c} = \sqrt[n]{n}^{\,c}$ y use el resultado del ejercicio 114.

129 Sea c el grado de p, y sea $p(x) = a_c x^c + a_{c-1}x^{c-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Factorice $p(x) = x^c(a_c + a_{c-1}x^{-1} + \cdots a_1 x^{1-c} + a_0 x^{-c})$ y use el resultado del ejercicio anterior.

130 (a) Use inducción: primero demuestre que $r_1 \leq 2$, y luego suponga que $r_k \leq 2$ para demostrar que $r_{k+1} \leq 2$. (b) La sucesión es acotada superiormente y creciente. Su límite L debe satisfacer $\lim r_k = \lim \sqrt{2 + r_{k-1}} = \sqrt{2 + \lim r_{k-1}}$; es decir, $L = \sqrt{2 + L}$. Resuelva esta ecuación.

Capítulo 2

11 Compare con la integral impropia de $1/\sqrt{x+4}$, como en el Ejemplo 3.

12 Compare con la integral impropia de $x/(x^2+8)$, como en el Ejemplo 3.

13 (b) La primera inecuación viene del Ejemplo 3. La segunda viene de la parte (a) de este ejercicio, integrando a la derecha y sumando 1 en cada lado.

14 Use la parte (b) del ejercicio anterior.

15 (a) Note que $y_n = \frac{1}{b}(ax_n + by_n) - \frac{a}{b}x_n$ y use el teorema sobre combinaciones de series convergentes. (b) Razone por contradicción: si $\sum y_n$ convergiera… (use el teorema sobre combinaciones de series convergentes). (c) Combine las sugerencias de las partes (a) y (b): si $\sum(ax_n + by_n)$ convergiera… (d) Razone por contradicción y use el punto (c): si $\sum y_n$ convergiera…

18 $4 = 2^2$

24 $a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n = (a_{n-1} - a_n) - (a_n - a_{n+1})$.

28 $\dfrac{6}{2 + 3i - 9i^2} = \dfrac{-2}{3i-2} - \dfrac{-2}{3i+1}$

32 $\dfrac{6}{1-q^2} = \dfrac{-3}{q-1} - \dfrac{-3}{q+1}$

33 Descomponga cada fracción en fracciones parciales y luego agrupe.
$$\frac{1}{(2p+3)(p+1)} - \frac{1}{2p^2+p} = \left[\frac{2}{2p+1} - \frac{2}{2p+3}\right] - \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right]$$

34 Descomponga el logaritmo en los logaritmos más simples que pueda.

35 Descomponga el logaritmo en los logaritmos más simples que pueda.

36 Racionalice el denominador.

37 Separe la fracción en dos y simplifique cada una.

38 Separe la fracción en dos, una con numerador $n+1$ y la otra con numerador ne.

39 (a) Tome $c_k = b_k + b_{k+1}$ y use el teorema de suma de series telescópicas. (b) Tome $c_k = b_k + b_{k+1} + b_{k+2}$ y use el teorema de suma de series telescópicas. (c) Use inducción sobre p.

52 Descomponga la fracción en dos: una con numerador j^2+j y la otra con numerador 2^j. Simplifíquelas y descomponga en fracciones parciales.

53 Descomponga la fracción en dos: una con numerador $2 \cdot 3^{m+1}$ y la otra con numerador $5(m^2-1)$. Simplifíquelas y descomponga en fracciones parciales.

54 Debe cumplirse $|7-2r| < 1$.

55 Debe cumplirse $|4(5+3r)^2| < 1$.

56 Demuestre primero (por inducción) que $a_n = 5^{\sum_{k=1}^{n}(1/2)^k}$.

57 Recuerde que las alturas que baja o sube la bola son 2.5, 1, 1, 0.4, 0.4, 0.16, 0.16, 0.064, 0.064, ... Ahora sume todos los tiempos asociados a esas alturas.

58 La mosca vuela al doble de velocidad que los camiones. Entonces cada vez la mosca vuela 2/3 de la distancia que viajan los camiones, mientras cada camión viaja 1/3 hacia el centro. La primera vez, la mosca recorre 2/3 de 10 km mientras los camiones viajan 1/3 de 10 km. Ahora los camiones están a (1/3)10 km entre ellos, y en la siguiente etapa la mosca vuela 2/3 de esa distancia mientras los camiones viajan 1/3 de esa distancia.

La distancia total volada es $\sum_{j=1}^{\infty} 20(1/3)^j$.

58 Mejor calcule el tiempo que los camiones tardan en chocar (en recorrer la mitad de los 10 km), con o sin mosca. Luego calcule la distancia que se puede recorrer en ese tiempo si se vuela a 120 km/h.

78 Puede integrar por partes, pero es mejor usar el criterio de la divergencia.

79 Para integrar tome $u = \mathrm{e}^x$. La integral es $\arctan(\mathrm{e}^x) + C$.

80 La integral se calcula por partes y es $-(1 + x\ln 2)\, 2^{-x}/\ln^2 2 + C$.

105 Compare con $\sum 1/(n\ln^2 n)$, y para esta use el CI.

106 Compare con $\sum 1/(i\ln i)$, y para esta use el CI.

107 Compare con $\sum(\mathrm{e}^{-1/k})/k^2$, y para esta use el CI. O mejor compare con $\sum 1/k^2$.

108 Compare con $\sum \sec^2(1/n)/n^2$, y para esta use el CI. O mejor compare con $\sum 1/n^2$.

109 Compare con $2\sum q\,\mathrm{e}^{-q^2}$, y para esta use el CI.

110 Note que $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$. Use el CCD y el resultado del ejercicio 15.a.

115 Puede hacer una comparación directa.

116 Recuerde que $\arctan p \to \pi/2$. Puede comparar en el límite con $1/p^2$, o directamente con $(\pi/2)/p^2$.

117 $\ln k$ es pequeño en comparación con k. Compare con $1/k$.

121 Recuerde que $\cos(1/n) \to 1$. Puede comparar con $1/\sqrt{n}$.

122 Puede hacer una comparación directa.

124 Compare con $5^i/3^{2i} = (5/9)^i$.

125 Haga una comparación directa con $3/(4+k)$, y para esta última haga una comparación en el límite con $1/k$.

126 Puede hacer una comparación directa.

127 Compare con $(3/2)^r$. Para calcular $\lim(6^r - r^2 2^r)/(6^r + r2^r)$ saque 6^r como factor común en el numerador y en el denominador, y luego calcule los límites de $r^2/3^r$ y de $r/3^r$ por aparte, usando L'Hôpital.

128 Compare con $1/(n\ln n)$ e investigue esta serie con el CI.

129 Compare con $1/(q\ln^2 q)$ e investigue esta serie con el CI.

130 Note que $a_p = 2p/(1 - \mathrm{e}^{p^2}) < 0$ y no se le puede aplicar un criterio de comparación. Pero la serie $\sum(-a_p)$ es positiva y se puede comparar con la de $2p/\mathrm{e}^{p^2}$.

Capítulo 3

3 Note que $0 < \frac{1}{p} \leq 1$ y considérelo al analizar la monotonía de $\{ a_p \}$.

5 Escriba primero la serie en forma de serie alternada.

7 Recuerde que $\{ a_p \}$ es decreciente si $a_{p+1}/a_p < 1$.

8 Recuerde que $\{ a_m \}$ es decreciente si $a_{m+1}/a_m < 1$. Note que $a_m = m!/5^m$.

11 a_n es decreciente para $n > 4$, lo cual basta ya que el análisis se hace para para $n \to \infty$.

12 Para derivar $y = x^x/(x+1)^{x+1}$ use derivación logarítmica; el resultado es $y' = y(\ln x - \ln(x+1))$, claramente negativo. Para el límite, use el método del Ejemplo 11 (página 85).

13 Analice primero la monotonía de $\log(\log(\log n))$.

14 Para analizar la monotonía, use el hecho de que $\dfrac{x}{x^2+1} < 2\arctan x$ cuando $x \geq 1$.

15 Verique que la sucesión obtenida a partir de los elementos de la suma es decreciente a cero.

17 Para analizar la monotonía, derive $(\ln x)^\alpha/x^\beta$. De la derivada saque a factor común el término $x^{\beta-1}(\ln x)^{\alpha-1}$, y analice el signo del resto de la derivada. Es posible demostrar que el límite de $(\ln x)^\alpha/x^\beta$ es cero, usando L'Hôpital e inducción sobre la parte entera de α, pero omita esta parte.

30 Use el CC. El límite resultante es de la forma $\sqrt[n]{\text{polinomio}}$.

41 $L = 1$; use otro criterio.

46 $L = 1$; use otro criterio. Puede utilizar el hecho que $\arctan n < n^2$ para todo $n \geq 1$, y aplicar el CCD.

47 Note que $(-n)^n/10^n = (-1)^n(n/10)^n$. Use el CD.

52 Calcule el límite en función de la constante r y luego analice dos casos a partir del resultado de dicho límite.

53 Use el CC. Después de simplificar, saque 3^m y 3^{m+2} de factores comunes en el numerador y el denominador respectivamente.

54 Separe como suma de series geométricas.

55 Compare con e^{-q} o use el CC y separe el límite como el cociente de los límites: (a) en el numerador el límite es de la forma $\sqrt[q]{\text{constante}}$, y (b) en el denominador se puede sacar a factor común el término e^q y uno de los términos resultantes es de la forma ∞/∞ el cual se puede analizar aparte usando la regla de L'Hôpital.

56 (a) Use el CC. (b) Combine el CC con el CD. (c) Use el CCD con $\sum a_n^2$, y para esta use el CC. (d) Combine el resultado (b) con el CD.

62 Note que $\dfrac{(\sqrt[5]{q}-q^2)^5}{q(5-q^5)^2} \sim -\dfrac{q^{10}}{q^{11}}$

64 Note que $2-k^2<0$, asi que $|\sqrt[3]{2-k^2}| = \sqrt[3]{k^2-2}$.

73 Use el CD.

80 Use el CCD con $1/m^{3/2}$.

82 Use el CCD con $(2/3)^m$.

84 Puede usar el CI con $u = 1 + \mathrm{e}^{-x}$, pero mejor use el CCD con e^{-k}.

85 Use el CD.

89 Use el CCL con $1/3^m$.

96 Use el CD.

98 Use el CI con $u = \ln x$.

99 Use el CI con $u = \log_4 x$.

100 Use el CCD y el CC.

101 Use el CSA y el CI; use partes para $\int$ arctan.

102 Escriba $1+\frac{3}{n} = (n+3)/n$ y convierta la serie en una telescópica.

103 Use el CSA y el CCL con $(1/\mathrm{e})^m$.

104 Use el CI con $u = \ln(\ln x)$.

106 Use el CCL con $1/n^2$.

108 El valor absoluto es menor que $(4/9)^\ell$.

109 Use el CCL con $1/m^4$.

110 Use el CCL con $1/n$.

113 Simplifique y use el CCD con $1/p^{3/2}$.

115 Use el CCL con $1/k^{1/2}$.

116 Use el CI e integre por partes: $u = \ln x$ y $\mathrm{d}v = x^{-3}\,\mathrm{d}x$.

117 Use el CI con $u = \ln(1+\mathrm{e}^x)$. Dé por un hecho que $\mathrm{e}^x/\big[(1+\mathrm{e}^x)\ln^2(1+\mathrm{e}^x)\big]$ es decreciente para todo x.

118 Use el CCL con $1/k^2$.

Capítulo 4

21 Para $t = 1$ use el CCL con $1/n$.

24 Compare con el Ejemplo 11 del Capítulo 3, en la página 85.

27 Note que $a_n = \left(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \cdots - \frac{2n-3}{2}\right) \frac{(x-1)^4}{4!}$ para $n \geq 2$.

30 Recuerde que $b^y = \mathrm{e}^{y \ln b}$.

37 Recuerde que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

38 Recuerde que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

39 Descomponga el logaritmo como una resta de logaritmos. Luego escriba los primeros términos de la suma parcial resultante para simplificar el término general de la serie.

44 Factorice el denominador y descomponga en una suma de fracciones parciales. Una las sumas y saque a factor común el término x^n.

46 Use la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$, evalúela en $x = \sqrt{3}$ y divida el resultado por $\sqrt{3}$.

47 Evalúe la serie de Maclaurin para e^x en $x = -1$.

48 (b) Es telescópica. Use el teorema del encaje para calcular $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}((k+1)^2 x)}{(k+1)^2}$.
(c) También es telescópica. Para ver que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \cos((k+1)^2 x)$ no siempre existe, tome por ejemplo $x = \pi/2$.
(d) El lado izquierdo es $\cos x$; el lado derecho no existe.

49 $\displaystyle\int_0^1 2\operatorname{sen}(t^3)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)(2n+1)!}$

50 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}$

51 $\displaystyle\int_{-0.9}^0 \arctan t^3\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,0.9^{\,6n+4}}{(6n+4)(2n+1)}$

Para ver que $a_n \searrow 0$, note que el numerador decrece a cero y el denominador crece a infinito.

52 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{w^4+1}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n+1}(4n+1)}$

53 $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} 5^{-y^2} \mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n 5}{n!\,(2n+1)\,4^n}$ (vea el resultado del ejercicio 30).

54 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arctan z}{z}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)^2}$

55 $\displaystyle\int_0^{1/4} x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n+2}n(n+2)}$

56 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen} w}{w}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!\,2^{2n+1}}$

57 $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt[3]{v}\cos v\,\mathrm{d}v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n+4/3)}$

58 $\displaystyle\int_0^{0.1} x\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,0.1^{n+2}}{(n+2)(2n)!}$

Para ver que $a_n \searrow 0$, note que el numerador decrece a cero y el denominador crece a infinito.

59 $\displaystyle\int_1^{1.25} \frac{\ln v}{v-1}\,\mathrm{d}v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n\,n^2}$

60 $\displaystyle\int_0^{1/4} 2^{-u}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\ln 2)^n}{4^{n+3/2}(n+3/2)\,n!}$ (vea el resultado del ejercicio 30).

Para ver que $a_n \searrow 0$, note que $\ln 2 < 1$, así que el numerador decrece a cero y el denominador crece a infinito.

61 $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n(\pi/8)^{2n-1}}{2(2n-1)(2n)!}$ (recuerde que $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$).

Para ver que $a_n \searrow 0$, note que $4^n(\pi/8)^{2n-1} = Kr^n$, donde $K = 8/\pi$, constante, y $r = \pi^2/16 < 1$, así que el numerador decrece a cero y el denominador crece a infinito.

62 $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{y - \operatorname{sen} y}{y^2}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n+1)!}$

63 Primero determine el desarrollo en serie de Taylor alrededor de $c = 0$, por medio de la definición. Ese desarrollo es $\displaystyle 1 + \frac{w^3}{2} - \frac{w^6}{8} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)w^{3n}}{2^n\,n!}$.

Para calcular la aproximación se cumplen las condiciones del criterio de las series alternadas. No las verifique ya que el proceso es largo y complicado.

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+w^3}\,\mathrm{d}w = \frac{3839}{7168} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{(3n+1)n!2^{5n+1}}$$

65 Utilice los resultados del cuadro en la página 110. Recuerde que $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y que $\displaystyle\int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arccos x$.

66 (a) Repase las derivadas que se calcularon en la página 105. (b) Considere la serie de potencias para $f''(x) - f(x)$ y use la parte (a).

Apéndice B
Soluciones

Capítulo 1

30 $0,\ -3,\ -2,\ 3,\ 12,\ 25$

31 $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0$

32 $1,\ 1.306852819,\ 1.901387711,\ 2.613705639,\ 3.390562088,\ 4.208240531$

33 $-1, 3, 1, 13, 11, 31$

34 $-1,\ 1/2,\ -1/3,\ 1/4,\ -1/5,\ 1/6$

35 $1,\ -1,\ 4/9,\ -2/7,\ 16/65,\ -16/63$

36 $2j+2$ para $j \geq 1$

37 $7-3p$ para $p \geq 0$

38 $(-1)^q\,(2q+1)/(q+2)$ para $q \geq 0$

39 $3+(-1)^m$ para $m \geq 0$

40 $2.5+2.5(-1)^n$ para $n \geq 1$

41 $(1/2)^k$ para $k \geq 0$

42 $\dfrac{2^i}{3^{i+1}}$ para $i \geq 0$

43 $\dfrac{p^3-(-1)^p}{p^2+1}$ para $p \geq 1$

44 $\dfrac{(n-1)^2}{(n+1)/(n+2)}$ para $n \geq 0$

45 $(-1)^{j+1}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2j)$ para $j \geq 1$

46 Carlos

47 $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$

48 $1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3$

49 $1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, 55/89$

50 $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$

51 $2, -6, 18, -54, 162, -486, 1458, -4374, 13122, -39366$

52 $2, 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, 2^{32}, 2^{64}, 2^{128}, 2^{256}, 2^{512}$

53 $1, 2, 8, 48, 384, 3840, 46\,080, 645\,120, 10\,321\,920, 185\,794\,560$

54 $0, 3, 3/2, 9/4, 15/8, 33/16, 63/32, 129/64, 255/128, 513/256$

55 $1, -1, -7, -25, -79, -241, -727, -2185, -6559, -19681$

56 $2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726$

57 $-1, -2, 1/2, -5/4, 7/8, -17/16, 31/32, -65/64, 127/128, -257/256$

58 $-1, 0, -4, 6, -16, 30, -64, 126, -256, 510$

59
$1,\ 7,\ 49/2,\ 343/6,\ 2401/24,\ 16807/120$

60 $1,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/2,\ 24/5,\ 20$

61
$2,\ 4/3,\ 4/15,\ 8/315,\ 4/2835,\ 8/155925$

62 1, 1, 1, 1, 1, 1

63 3, 15/2, 35/2, 315/8, 693/8, 3003/16

64 1, 2/3, 8/5, 48/7, 128/3, 3840/11

65 220, 3080/3, 13090/3, 52360/3, 602140/9, 2236520/9

66 2, 4, 8, 16, 32, 64

67 1/2, 1/2, 7/12, 35/48, 91/96, 91/72

68 (59) $7/(n+1)$.
(60) $n^2/(n+1)$.
(61) $2/\big[(n+1)(2n+3)\big]$.
(62) 1.
(63) $(2n+3)/(n+1)$.
(64) $(2n+1)(2n+2)/(2n+3)$.
(65) $(3n+5)/n$.
(66) 2.
(67) $(3n+4)/(2n+4)$.

69 $a_1 = -3$, $a_n = a_{n-1} + 2$

70 $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 1/n$

71 $c_1 = 1$, $c_n = 2c_{n-1}$

72 $y_1 = 1$, $y_n = (2n-1)(2n-2)y_{n-1}$

80 (50) 2^{n-2} si $n \geq 2$, o 1 si $n = 1$.
(51) $2\,(-3)^n$.
(52) 2^{2^k}.
(53) $2^k \cdot k!$.
(54) $2 + 4\,(-1/2)^n$.
(55) $2 - 3^k$.
(56) $(1+\sqrt{2})^j + (1-\sqrt{2})^j$.
(57) $(-1)^n - (1/2)^{n-1}$.
(58) $(-1)^j - (-2)^j - 1$.

81 ₡1750

82 Decrece para $n \geq 0$

83 Decrece para $j \geq 2$

84 Decrece para $q \geq 7$

85 Crece para $m \geq 5$

86 Decrece para $k \geq 5$

87 Crece para $n \geq 1$

88 Crece para $p \geq 4$

89 Decrece para $i \geq 4$

90 Crece para $m \geq 2$

91 Decrece para $k \geq 6$

92 Crece para $j \geq 1$

93 Crece para $m \geq 1$

94 Decrece para $n \geq 3$

95 Crece para $k \geq 1$

96 0

97 ∞

98 ∞

99 2/3

100 -2

101 -9

102 1/2

103 $4/\sqrt{5}$

104 0

105 $-\infty$

106 0

107 $-\infty$

108 ∞

109 ∞

110 $-\infty$

111 e

112 e^c

113 ∞

114 1

115 0

116 1

117 0

118 0

119 0

120 No existe

121 ∞

122 ∞

123 $-\infty$

124 ∞

125 ∞

Capítulo 2

1 $1/2$

2 3

3 $11/18$

4 5

5 Diverge

6 Diverge

14 (a) Entre \$8.20 y \$9.21; entre \$10.50 y \$11.51. (b) Entre 488 992 años y 1 329 220 años. (Las respuestas “exactas” son \$8.78, \$11.08 y 746 304 años, calculadas con computadora).

16 $5/3$

17 $3/4$

18 Diverge

19 $(\ln 2)/6$

20 Diverge

21 0

22 Diverge

23 $\operatorname{sen} 4 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 5$

24 $a_0 - a_1$

25 1

26 -3

27 1

28 $2/5$

29 3

30 $8/15$

31 $33/28$

32 $-9/2$

33 $-1/3$

34 $\ln(2/3)$

35 $-\ln 2$

36 Diverge

37 $1 + 1/\sqrt{2}$

38 0

40 0.54

41 $-3/10$

42 $169/40$

43 3.4531579

44 Diverge

45 $36/5$

46 10.312955

47 $-31/264$

48 Diverge

49 -0.0030865667

50 $1/(A-1) + 2/(A-2) + 3/(A-3)$

51 $6/7$

52 0

53 $16/3$

54 Para $3 < r < 4$

55 Para $-\frac{11}{6} < r < -\frac{3}{2}$

56 5

57 3.1714320 s

58 10 km

59 454/99

60 $-69/11$

61 369/275

62 603/185

63 $-47069/3700$

64 $-3491/5555$

65 Converge

66 Diverge

67 Diverge

68 Converge

69 Diverge

70 Converge

71 Converge

72 Converge

73 Converge

74 Diverge

75 Converge

76 Converge

77 Converge

78 Diverge

79 Converge

80 Converge

81 0.00125

82 0.0075

83 2.15×10^{-8}

84 0.107

85 1.1×10^{-4}

86 0.08

87 $S_{32} \approx 0.20158364$

88 $S_{60} \approx 0.20158364$

89 $S_{5} \approx 0.63092056$

90 $S_{58} \approx 2.71407348$

91 $S_{54} \approx 3.4288380$

92 $S_{41} \approx 1.4518002$

93 Diverge

94 Diverge

95 Converge

96 Converge

97 Converge

98 Diverge

99 Diverge

100 Converge

101 Converge

102 Converge

103 Converge

104 Diverge

105 Converge

106 Diverge

107 Converge

108 Converge

109 Converge

112 Diverge

113 Diverge

114 Converge

115 Converge

116 Converge

117 Diverge

118 Diverge

119 Converge

120 Diverge

121 Diverge

122 Converge

123 Converge

124 Converge

125 Diverge

126 Diverge

127 Diverge

128 Diverge

129 Converge

130 Converge

Capítulo 3

1 Converge

2 Converge

3 Converge

4 Diverge

5 Converge

6 Converge

7 Converge

8 Diverge

9 Diverge

10 Diverge

11 Converge

12 Converge

13 Converge

14 Converge

15 Converge

16 Converge si $K > 0$; diverge si no

17 Converge

18 3333, hasta $j = 3332$

19 39 996, hasta $m = 39985$

20 28, hasta $n = 27$

21 20, hasta $i = 19$

22 262 144, hasta $p = 262144$

23 9994, hasta $k = 10000$

24 3 términos; $S_3 = 0.459722\bar{2}$

25 2 términos; $S_5 = 0.00358625$

26 9 términos; $S_{10} = 0.36787946$

27 8 términos; $S_8 = -0.40531529$

28 10 términos; $S_9 = -0.69444352$

29 2 términos; $S_7 = 0.000049293852$

30 C

31 D

32 C

33 C

34 D

35 D

36 D

37 C

38 C

39 D

40 C

41 C

42 D

44 C

45 C

46 D

47 D

48 C

49 C

50 D

51 C

52 C si $|r| < 1$; D si no

53 C

54 C

55 C

57 CA

58 CA

59 CA

60 CC

61 CA

62 CC

63 CA

64 CC

65 CA

66 CA

67 D

68 D

69 CA

70 CA

71 D

72 CA

73 D

74 CA

75 CA

76 CA

77 CA

78 CC

79 CA

80 CA

81 D

82 CA

83 D

84 CA

85 D

86 D

87 CA

88 D

89 CA

90 CA

91 D

92 CA

93 CA

94 D

95 CA

96 D

97 CC

98 CA

99 CA

100 CA

101 CC

102 D

103 CA

104 D

105 CC

106 CA

107 D

108 CA

109 CA

110 D

111 D

112 D

113 CA

114 CA

115 CC

116 CA

117 CA

118 CA

Capítulo 4

1 CA en $[3,5]$

2 CA en $]0,\frac{1}{2}[$ y CC en $\{\frac{1}{2}\}$

3 CA en $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ y CC en $\{-\frac{1}{2}\}$

4 CA en $]-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}[$ y CC en $\{-\frac{7}{2}\}$

5 CA en $]3,5[$

6 CA en $]6,8[$ y CC en $\{6,8\}$

7 CA en $\{0\}$

8 CA en $\mathbb{R}$

9 CA en $\mathbb{R}$

10 CA en $]0,\frac{2}{5}[$

11 CA en $]-2,0[$

12 CA en $\mathbb{R}$

13 CA en $]-2,1[$

14 CA en $\{\frac{2}{3}\}$

15 CA en $\mathbb{R}$

16 CA en $]-2,8[$ y CC -2

17 CA en $]-\frac{1}{3},1[$

18 CA en $]2,4[$ y CC en $\{2\}$

19 CA en $]1,3[$ y CC en $\{1,3\}$

20 CA en $[\frac{1}{5},\frac{3}{5}]$

21 CA en $]-1,1[$ y CC en $\{-1\}$

22 CA en $\mathbb{R}$

23 CA en $]-4,4[$

24 CA en $]-\mathrm{e},\mathrm{e}[$

25 CA en $]-3,-1[$

26 $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(u+4)^i$; CA en $]-5,-3[$

27

$$1+\frac{1}{2}(z-1)+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot\frac{(z-1)^3}{3!}+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}\cdot\frac{(z-1)^4}{4!}+\cdots=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-3)(z-1)^k}{2^k\,k!};$$

CA en $[0,2]$

28 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{(2n+1)/2}}{(2n+1)!}$

29 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n\,t^n}{n!}$

30 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n b}{n!}y^n$

31 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,5^{2n+1}x^{6n+3}}{2n+1}$

32 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!}$

33 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,2t^{2n}}{(n!)^2\,(2n+1)}$

34 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n+1}}{n!}$

35 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\beta^{2n}}{(2n)!}$

36 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2t)^n}{n!}$

37 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$

38 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$

39 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1}$

40 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

41 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^{2n-1}}{(2n+1)!}$

43 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n\, w^{n+1}}{n!}$

44 $\sum_{n=0}^{\infty} (2(-2)^n + 1) x^n$

49 $S_2 = 0.4677083\bar{3}$

50 $S_6 = 0.74683603$

51 $S_4 = -0.15428688$

52 $S_2 = 0.49396701$

53 $S_4 = 0.88063989$

54 $S_3 = 0.48720167$

55 $S_2 = 0.0047200521$

56 $S_1 = 0.49305\bar{5}$

57 $S_3 = 0.60762311$

58 $S_1 = 0.00483\bar{3}$

59 $S_4 = 0.23586697$

60 $S_2 = 0.075205213$

61 $S_2 = -0.38597029$

62 $S_2 = -0.08125$

63 $\frac{3839}{7168} + S_3 = \frac{3839}{7168} + 7.629394531 \times 10^{-7} \approx 0.53557554$

65 $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$. CA en $]-1, 1[$