Instituto Tecnológico de Costa Rica — Tiempo máximo: 50 minutos
Escuela de Matemática — Puntaje máximo: 15 puntos
MA 2404 Probabilidades — II semestre 2024

IV Prueba Corta

Instrucciones Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable. No se permite el uso de dispositivos con conectividad.

---

1. En un proyecto de urbanización se han construido 50 casas, de las cuales 10 han presentado problemas de drenajes.

   a) **[3 puntos]** Si 5 supervisores son enviados a este proyecto en días diferentes y cada uno elige al azar una casa para inspeccionar, calcule la probabilidad de que sean inspeccionadas 3 casas con problemas de drenaje.

   Solución. Debe notarse que como los supervisores son enviados en días diferentes y eligen una casa al azar, las elecciones son independientes y se mantiene una probabilidad de éxito fija de 0.2.

   Si se define X : cantidad de casas con problemas de drenaje de las 5 elegidas, entonces $X \sim b(x; 5, 0.2)$.

   La probabilidad que se pide es $P(X=3) = \binom{5}{3} 0.2^3 \cdot 0.8^2 = \dfrac{32}{625} = 0.0512.$ $\ltimes \wr \rtimes$

   b) **[3 puntos]** Si más bien los 5 supervisores son enviados en conjunto y cada uno elige una casa de manera aleatoria, calcule la probabilidad de que sean inspeccionadas 3 casas con problemas de drenaje.

   Solución. Si los supervisores son enviados el mismo día entonces las elecciones, aunque sean al azar NO son independientes. Tampoco se mantiene una probabilidad de éxito fija.

   Si se define X : cantidad de casas con problemas de drenaje , entonces $X \sim h(x; 5, 10, 50)$.

   La probabilidad que se pide es $P(X=3) = \dfrac{\binom{10}{3} \cdot \binom{40}{2}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{2340}{52969} = 0.04417678265.$

   $\ltimes \wr \rtimes$

2. [**4 puntos**] Un sensor para la detección de humo tiene una probabilidad de fallar de 0.03. En una demostración de este producto se instalaron sensores en cada recinto de una casa muy grande y se probó su eficiencia. La estrategia fue producir humo en diferentes sectores de un recinto en forma secuencial (se produce humo, se apaga, se produce de nuevo, se vuelve apagar..) y se consideró eficiente si el humo era detectado antes de la cuarta vez que se produzca. Este proceso se repite en cada recinto. ¿Cuál es la probabilidad de que el reciento número 4 sea el primero en el que el sensor no sea eficiente?

   Solución

   X : cantidad de intentos hasta que el sensor detecte el humo, $X \sim g(x; 0.97)$.

   La probabilidad de tener un sensor eficientes es $P(X \leq 3) = \displaystyle\sum_{x=1}^{3} 0.97 \cdot 0.03^{x-1} = 0.999973$.

   Y : cantidad de recintos probados hasta que un sensor no sea eficiente, $Y \sim g(x; 0.000027)$.

   La probabilidad solicitada es $P(Y = 4) = 0.00027 \cdot 0.999973^3 = 0.00002699781$. $\ltimes \wr \rtimes$

3. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson con media 8.

   a) [**2 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

   Solución

   X : cantidad de componentes que fallan antes de 25 horas, $X \sim p(x; 2)$.

   $P(X = 1) = \dfrac{2e^{-2}}{1!} = 0.2706705665$.

   $\ltimes \wr \rtimes$

   b) [**3 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

   Solución

   X : cantidad de componentes que fallan antes de 125 horas, $X \sim p(x; 10)$.

   $P(X \geq 10) = 1 - \displaystyle\sum_{x=0}^{9} \frac{10^x e^{-10}}{x!} = 0.5420702855$.

   $\ltimes \wr \rtimes$