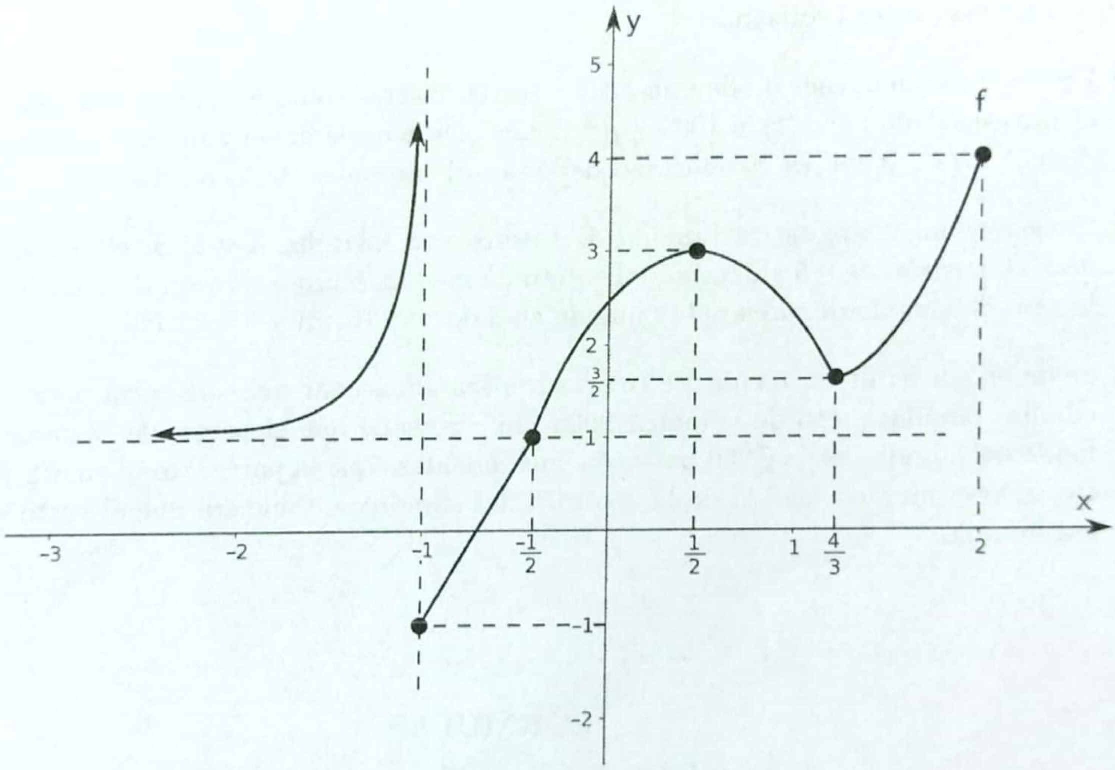
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MA1102 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

II SEMESTRE 2023
TIEMPO: 2 HORAS Y 30 MIN
PUNTAJE TOTAL: 35 PTS

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada y utilice cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

#1. Considere la función $f :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se presenta a continuación.



De acuerdo con la gráfica, responda las siguientes preguntas.

a) El conjunto de todos los valores de x para las cuales $f'(x) < 0$. **1 Pt**

b) El conjunto de todos los valores de x para las cuales $f''(x) > 0$. **1 Pt**

c) El valor donde f alcanza el mínimo absoluto. **1 Pt**

d) Las coordenadas de un punto de inflexión de f. **1 Pt**

e) ¿Posee f máximo absoluto? Justifique. **1 Pt**

Continúa en la siguiente página...

#2. Sea $g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ y $g'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

a) Indique las abscisas de los puntos máximos y mínimos relativos de g. **3 Pts**

b) Determine los intervalos de concavidad de g e indique (si hay) puntos de inflexión. **4 Pts**

c) Si se sabe que la gráfica de g posee una asíntota oblicua, determine su ecuación. **2 Pts**

#3. Determine los puntos de la curva de ecuación $y = \ln\left(x^2+1\right)$ en los cuales la recta normal es paralela a la recta de ecuación $x - y = 1$. **3 Pts**

#4. La ecuación $x^2 - xy = 9 - y^2$ define a y como función implícita de x. Calcule y'. **3 Pts**

#5. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$. **4 Pts**

#6. Resuelva los siguientes problemas:

a) Un objeto se deja caer desde una altura de 100 metros sobre el suelo, y t segundos después su altura está dada por $h(t) = 100 - \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración y su valor es aproximadamente de 9,81 $\mathrm{m/s^2}$. ¿Cuál es la velocidad del objeto justo antes de tocar el suelo? **3 Pts**

b) Considere un triángulo rectángulo de catetos con medidas a y b. Si el cateto de medida a decrece a razón de 0,5 cm/min y el cateto de medida b crece a razón de 2 cm/min, determine la tasa de cambio del área del triángulo cuando $a = 16$ cm y $b = 12$ cm. **4 Pts**

c) Se desea construir un recipiente reforzado para almacenar una sustancia tóxica con forma de cilindro circular recto de volumen 900π cm^3. Se sabe que el precio de construir la tapa y el fondo del cilindro es de ₡250 por cada cm^2; mientras que la parte lateral cuesta ₡150 por cada cm^2. Determine la medida de la altura h del cilindro, de manera que el costo de construirlo sea mínimo. **4 Pts**

FÓRMULAS

Área lateral de un cilindro: $A_L = 2\pi rh$

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

De acuerdo con lo indicado en el programa, en la pregunta 6.c. se desarrollará el atributo asociado al curso.

Atributo: conocimiento de ingeniería.

Nivel: inicial.

Contenido: problemas de máximos y mínimos.

Objetivo: resuelva problemas que involucren los conceptos de máximo y mínimo de una función.

11 - 11 2023

1) a) $]1/2, 4/3[$, se toman abiertos pues $f'(\frac{1}{2})=0$ y $\nexists f'(\frac{4}{3})$ por no tener suavidad

b) $]-\infty,-1[\cup]\frac{4}{3},2]$, el $x=2$ va cerrado ya que no se persive un cambio de convexidad.

c) En $x=-1$

d) No existe. Recordemos que un punto $x=a$ es de inflexión si $f''(a)=0$. En $x=-1$ no hay derivabilidad, En el intervalo $]-1,\frac{-1}{2}[$ la función es lineal, es decir, no hay curvatura, pese a que $f''(x)=0$ en todo ese intervalo. En $x=\frac{4}{3}$ no existe f', ergo, no existe f''.

e) No pues $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$.

2) a) Puntos críticos: $g'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \iff \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$

entonces $x=0$ y $x=4$.

Ahora clasificamos: $g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)2(x-2)}{(x-2)^4}$

$$\Leftrightarrow \quad g''(x) = \frac{(x-2)\left\{2(x-2)(x-2) - 2x(x-4)\right\}}{(x-2)^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad g''(x) = \frac{2\left\{(x-2)^2 - x(x-4)\right\}}{(x-2)^3} = \frac{2\left\{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x\right\}}{(x-2)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad g''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Aquí $g''(0) < 0$, $x=0$ máx. local

$g''(4) > 0$, $x=4$ mín. local

b) Note que no hay puntos de inflexión pues $g'' \neq 0$ en todo su dominio. Pero hay una asíntota vertical en $x=2$.

	$-\infty$	2	$+\infty$
g''	$-$		$+$
g	$\frown$		$\smile$

Entonces g es cóncava en $]-\infty, 2[$

c)
$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-2x} = 1 \\[2ex] b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left\{g(x) - x\right\} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left\{\dfrac{x^2}{x-2} - x\right\} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x-2} = 2 \end{cases}$$

entonces la asíntota oblicua es $\ell: y = x+2$

3) $\mathcal{C}: y=\ln(x^2+1)$, $\ell: x-y=1 \Leftrightarrow y=x-1$

Note que $\mathcal{C}$ define explícitamente $y(x)$ entonces $y'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Por otro lado la pendiente de ℓ es $m=1$. Necesitamos encontrar un (a,b) tal que $y'(a)$ (que es la pendiente de la recta tangente a $\mathcal{C}$) cumpla que $\dfrac{-1}{y'(a)}$ (la pendiente de la recta normal a $\mathcal{C}$) sea igual a $m=1$ para tener paralelismo.

$$\frac{-1}{y'(a)}=1 \Leftrightarrow -\frac{(a^2+1)}{2a}=1$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{a^2+1}{2a}=0 \Leftrightarrow \frac{2a+a^2+1}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)^2}{2a}=0 \Rightarrow a=-1 \text{ y así } b=y(-1)=\ln(2)$$

Entonces el único punto es $(-1,\ln(2))$

4) $\mathcal{C}: x^2 - xy = 9 - y^2$ define implícitamente $y(x)$.

Método tradicional:	Derivadas parciales:
$\frac{d}{dx}(x^2 - xy) = \frac{d}{dx}(9 - y^2)$	$F(x,y) = x^2 - xy - 9 + y^2$
$\Leftrightarrow 2x - y - x\frac{dy}{dx} = -2y\frac{dy}{dx}$	$\frac{dF}{dx} = 2x - y$
$\Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x$	$\frac{dF}{dy} = -x + 2y$
$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x-y)}{2y-x}$

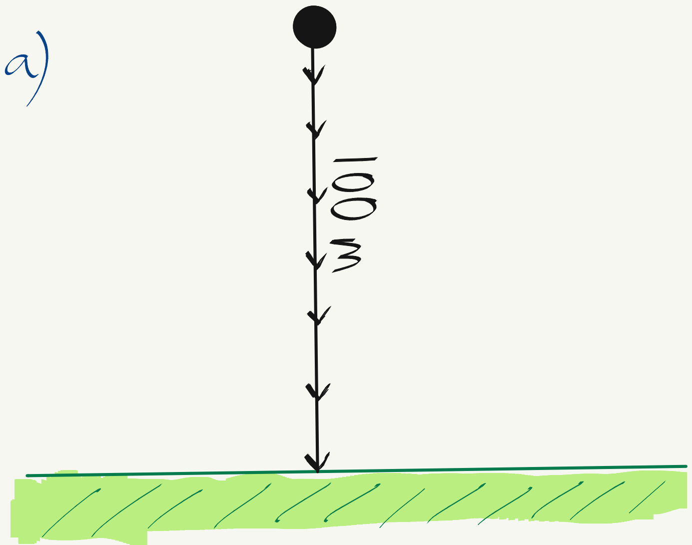
5) $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)} \underset{(\infty^0)}{=} e^{\lim_{x\to0^+}\tan(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot(x)}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\csc^2(x)}}$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}}} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\operatorname{sen}(x)} = e^{1\cdot0} = e^0 = 1$$

6) a)



$h(t) = 100 - \frac{1}{2} g t^2$: altura del objeto en el segundo t.

$\frac{dh}{dt}$: velocidad del objeto

t_0: instante en que $h(t_0) = 0$

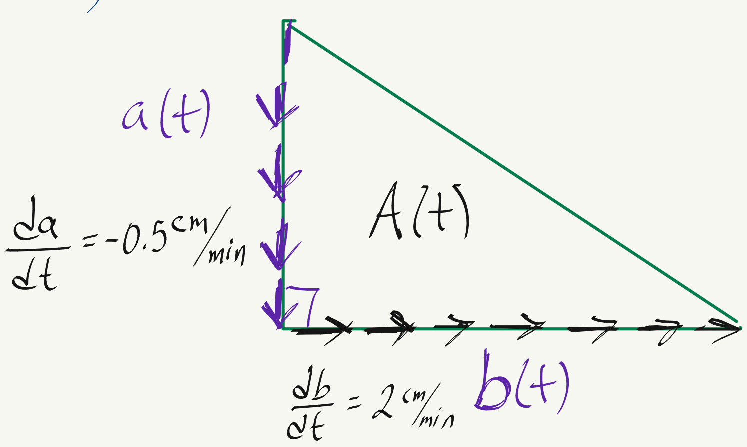
Podemos decifrar t_0: $h(t_0) = 0$

$$\Leftrightarrow 100 - \frac{1}{2} g t_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{100}{\frac{1}{2} g}} \approx 4.52s$$

Luego $\frac{dh}{dt} = -gt$ entonces $\frac{dh}{dt}(4.52) \approx -44.34\, m/s$

b)



$a(t)$: longitud del cateto en min. t.

$b(t)$: longitud del cateto en min. t.

$A(t)$: área del triángulo en min. t. $\frac{dA}{dt}(t_0) = ?$

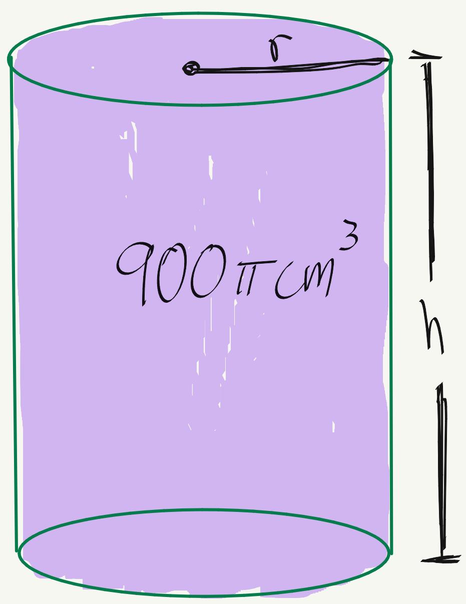
t_0: instante en que $a(t_0) = 16cm$ $b(t_0) = 12cm$

Sabemos que $A(t) = \frac{1}{2} a(t) b(t)$

$$T.F.I \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{da}{dt} b(t) + \frac{1}{2} a(t) \frac{db}{dt}$$

Así $\dfrac{dA}{dt}(t_0) = \frac{1}{2}(-0.5)\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2 = 13\ \text{cm}^2/\text{min}$

c)



Minimizar:

$$\begin{cases} C(r,h) = 250\cdot 2\pi r^2 + 150\cdot 2\pi r h \\ \pi r^2 h = 900\pi\ \text{cm}^3 \end{cases}$$

Note que $h = \dfrac{900}{r^2}$.

Sustituyendo:

$$C(r) = 500\pi r^2 + 300\pi r\cdot \frac{900}{r^2} = 500\pi r^2 + \frac{2700\pi}{r}$$

Ahora $C'(r) = 1000\pi r - \dfrac{2700\pi}{r^2} = 0$

$$\iff \frac{1000\pi r^3 - 2700\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 1000\pi r^3 - 2700\pi = 0$$

$$\iff r^3 = \frac{2700\pi}{1000\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{27}{10}} \approx 1.39\ \text{cm}$$

Ahora $C''(r) = 1000\pi + \dfrac{5400\pi}{r^3} \Rightarrow C''(1.39) > 0$ entonces

$r \approx 1.39$ cm minimiza, y así $h \approx 646.33$ cm