Inducción matemática. Sucesiones y series

M.Sc. Jeffry Chavarría Molina
M.Sc. Natalia Rodríguez Granados

8 de mayo de 2019

Índice general

Capítulo 1

Método de Inducción Matemática

1.1. Proposiciones lógicas

Definición **1 (Proposición)**
*Una proposición es una colección de símbolos sintácticos a la cual se le puede asignar uno y solo un valor de verdad: verdadero **(V)** o falso **(F)**. Las proposiciones, generalmente se denotan con letras en mayúscula.*

Ejemplo **1**
Considere las proposiciones que se presentan a continuación:

P : *En el planeta tierra hay vida.*

Q : *Los delfines son mamíferos.*

R : *El sol es muy frío.*

Es claro que las proposiciones P y Q son ambas verdaderas, mientras que la proposición R es falsa. En cuyo caso se escribe:

$$P \equiv V \qquad Q \equiv V \qquad R \equiv F$$

Definición **2 (La negación de una proposición)**
Sea P una proposición lógica, la negación de P se denota $\neg P$ y se define como una nueva proposición que se lee "no P" o "no es cierto P" cuyo valor de verdad es contrario al valor de verdad de P. Es decir:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ejemplo 2

Considere la proposición P dada por

P : *El número π es irracional.*

De este modo, la negación de P corresponde a la proposición:

$\neg P$: *El número π no es un número irracional.*

Dos o más proposiciones lógicas pueden conectarse entre sí para formar nuevas proposiciones. Para realizar estas conexiones se utilizará lo que conocerá como conectiva lógica. El valor de verdad de las nuevas proposiciones dependen, únicamente, de los valores de verdad de las proposiciones utilizadas y de las conectivas empleadas.

Conectivas lógicas

Sean P y Q dos proposiciones, las conectivas lógicas conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación ($\Rightarrow$), y doble implicación ($\Leftrightarrow$) generan nuevas proposiciones cuyos valores de verdad se define a continuación:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo 3

P : *María es alta.*
Q : *María es delgada.*

Así, se tiene que:

$P \wedge Q$: *María es alta y delgada.*
$P \vee Q$: *María es alta o delgada.*

R : *Me gané la lotería.*
S : *Me compraré un auto.*

Así, se tiene que:

$R \Rightarrow S$: *Si me gané la lotería, entonces me compraré un auto.*
$S \Leftrightarrow R$: *Me compro un auto, si y solo si, me gané la lotería.*

Definición 3 (Proposición abierta)

Una proposición abierta es una colección de proposiciones indexadas a través de uno o varios parámetros. El conjunto más grande de posibles valores para los parámetros, se denomina universo de discurso o dominio.

Ejemplo 4

Considere la proposición abierta:

$$P_n : n^2 + 1 \text{ es un número par. Donde } n \in \mathbb{N}.$$

note que para diferentes valores de n la proposición P_n puede ser falsa o verdadera, *es importante entender que P_n no es una sola proposición, sino una familia de proposiciones. Donde P_1, P_2, P_3, etc, son miembros particulares de dicha familia. Para este caso, se puede observar que: $P_1 \equiv V$, $P_2 \equiv F$, $P_3 \equiv V$, $P_4 \equiv F$.*

Demostración de una implicación
Demostrar $P \Rightarrow Q$ consiste en demostrar que:

$$P \Rightarrow Q \equiv V,$$

es decir, que no es posible la combinación $P \equiv V$ y $Q \equiv F$.
Para demostrar $P \Rightarrow Q$ se puede hacer de dos posibles formas:

- **Demostración directa:** Consiste en suponer que $P \equiv V$ y demostrar que bajo esa suposición Q tiene que ser verdadera.

- **Demostración por contradicción:** Consiste en suponer verdadero la proposición: $P \wedge \neg Q$ y demostrar que bajo dicha suposición, se puede concluir una contradicción (una proposición evidentemente falsa). De esta manera, de proposición de la cual se partió debe ser falsa y como P no puede ser falsa, pues es la premisa o hipótesis $\neg Q$ tiene que serlo. Así, se tiene que $P \Rightarrow Q \equiv V$.

1.2. Inducción matemática.

La inducción matemática es una técnica de demostración que se basa en los cinco postulados de Peano[1] utilizados comúnmente para construir el conjunto de los número naturales. La lista de los cinco postulados se presenta a continuación:

[1]**Giuseppe Peano 1858-1932**: fue un matemático, lógico y filósofo italiano quien ideo un conjunto de axiomas para fundamentar la aritmética y la construcción de los números naturales.

Postulados de Peano

1. 0 es un número natural.
2. Si k es un número natural, entonces $k+1$ también es un número natural llamado el sucesor de k.
3. 0 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si dos números naturales m y n tienen el mismo sucesor, entonces $m = n$.
5. Considere un conjunto A que cumple que:
   - $0 \in A$, y
   - todo número natural $k \in A$ cumple que su sucesor $k+1$ también está en A;

   entonces $\mathbb{N} \subseteq A$.

El quinto postulado de Peano es denominado el postulado de inducción matemática el cual establece el principio que se estudiará en la presente sección para demostrar la validez de proposiciones abiertas con dominio $\mathbb{N}$. Específicamente, el principio de inducción matemática se usa para probar que una proposición abierta es verdadera para todo n en su dominio, siempre que éste sea de la forma $\{p, p+1, p+2, p+3, \ldots\}$, donde $p \geq 0$. Para el caso de que el dominio sea $\mathbb{N}$ se tiene que:

TEOREMA **1 (Inducción matemática para proposiciones con dominio $\mathbb{N}$)** *Considere una proposición abierta P_n, con $n \in \mathbb{N}$. Suponga que dicha proposición cumple que:*

- $P_0 \equiv V$, *y*
- $P_n \Rightarrow P_{n+1} \equiv V$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, se puede asegurar que

$$(\forall n \in \mathbb{N})[P_n] \equiv V.$$

❏ **Demostración.** Considere el conjunto A definido por todos los número naturales n que cumplen que $P_n \equiv V$, es decir:

$$A = \{n, n \in \mathbb{N} / P_n \equiv V\}.$$

Como $P_0 \equiv V$, entonces $0 \in A$.

Como $P_n \Rightarrow P_{n+1} \equiv V$, entonces se puede concluir que si $P_n \equiv V$, entonces $P_{n+1} \equiv V$, lo que significa, según la definición de A, que si $n \in A$, entonces su sucesor

$n+1$ también está en A. De donde, según el quinto postulado de Peano, conduce a concluir que $\mathbb{N} \subseteq A$.

Pero, según la definición de A la proposición $\mathbb{N} \subseteq A$ equivale a decir que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $P_n \equiv V$ quedando así demostrado lo que se quería.

❐

En caso, de que el domino de la proposición abierta sea $D = \{p, p+1, p+2, \ldots\}$, con $p > 0$, se deberá demostrar $P_p \equiv V$, donde p es el primer elemento del dominio. Posteriormente se debe probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1} \equiv V$ para n arbitrario, $n > p$, ésto completaría la demostración por inducción. Finalmente, se concluye que $(\forall n \in D)[P_n] \equiv V$.

Para demostrar que la implicación $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ es verdadera para todo n, se procede demostrando que la implicación $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ es verdadera para un n fijo pero arbitrario. La demostración de la implicación puede hacerse en forma directa o bien por contradicción, en ambos casos se debe suponer que P_n es verdadera. A esta proposición se el conoce como Hipótesis de Inducción ($HI : P_n$).

1.2.1. ¿Por qué funciona el método de inducción matemática?

La demostración del método de inducción matemática, dado el quinto postulado de Peano (ver demostración del teorema 1), no deja duda de la funcionalidad del método para demostrar proposiciones abierta con dominio natural. Sin embargo, una reflexión del proceso podría podrías ayudar a tener una visualización más clara del mismo.

El objetivo de la técnica de inducción matemática, es poder garantizar que una proposición abierta P_n es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$. Por comodidad suponga que $p = 0$.

Si se tiene que $P_0 \equiv V$ y $P_n \Rightarrow P_{n+1} \equiv V$ para todo n, entonces se puede hacer el siguiente análisis:

$$\begin{array}{rcl}
P_0 & \equiv & V \\
\text{Para } n=0 \text{ se tiene que: } P_0 \Rightarrow P_1, \text{ por lo que } P_1 & \equiv & V \\
\text{Para } n=1 \text{ se tiene que: } P_1 \Rightarrow P_2, \text{ por lo que } P_2 & \equiv & V \\
\text{Para } n=2 \text{ se tiene que: } P_2 \Rightarrow P_3, \text{ por lo que } P_3 & \equiv & V \\
\text{Para } n=3 \text{ se tiene que: } P_3 \Rightarrow P_4, \text{ por lo que } P_4 & \equiv & V \\
\text{Para } n=4 \text{ se tiene que: } P_4 \Rightarrow P_5, \text{ por lo que } P_5 & \equiv & V \\
\vdots & \equiv & \vdots
\end{array}$$

Bajo el mismo racionamiento se puede concluir que $P_n \equiv V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una variación válida del método de inducción matemática corresponde a lo que se conoce comúnmente como método de inducción fuerte o inducción transfinita. Esta variación se enuncia a continuación:

Método de inducción fuerte
Para demostrar $(\forall n \in \mathbb{N})[P_n] \equiv V$. Basta probar que:

- $P_0 \equiv V$.
- $P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1} \equiv V$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

El método de inducción fuerte es una generalización del método ya estudiado, lo que significa que el método al que hace referencia el teorema 1 es un caso particular de método de inducción fuerte. La fortaleza de la inducción fuerte es debido a que el mismo cuenta con más premisas en la hipótesis de inducción lo que la hace más robusta. La inducción fuerte se usa cuando para poder demostrar P_{n+1} se requiere más información que P_n. De esta manera se tiene que la hipótesis de inducción, será ahora:

$$HI : P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$$

El por qué funciona esta variante del método de inducción matemática se puede apreciar en el siguiente análisis similar al realizado anteriormente para el método ya estudiado.

Primero se demuestra que $P_0 \equiv V$. Luego, si se tiene que $P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1} \equiv V$, para todo n, entonces se puede razonar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P_0 &\equiv V \\
\text{Para } n = 0 \text{ se tiene que: } P_0 \Rightarrow P_1, \text{ por lo que } P_1 &\equiv V \\
\text{Para } n = 1 \text{ se tiene que: } P_0 \wedge P_1 \Rightarrow P_2, \text{ por lo que } P_2 &\equiv V \\
\text{Para } n = 2 \text{ se tiene que: } P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3, \text{ por lo que } P_3 &\equiv V \\
\text{Para } n = 3 \text{ se tiene que: } P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow P_4, \text{ por lo que } P_4 &\equiv V \\
\text{Para } n = 4 \text{ se tiene que: } P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow P_5, \text{ por lo que } P_5 &\equiv V \\
\vdots &\equiv \vdots
\end{aligned}$$

Bajo el mismo razonamiento, se puede concluir que $P_n \equiv V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.2.2. Aplicación del método de inducción matemática

La inducción matemática se puede emplear en una gran variedad de pruebas de resultados que tengan la forma $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq p)[P_n]$. Las pruebas más comunes son sobre resultados de divisibilidad, igualdades y desigualdades. En el presente documento, se abordaran, a groso modo, dos tipos de proposiciones: las que tiene que ver con igualdades y las que tienen que ver con desigualdades. Estas mismas se fortalecerán en el capítulo de `sucesiones y series`.

Ejemplo 5

Use el método de inducción matemática para demostrar que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ con } n \geq 1$$

★ **Solución.** Se aplicará inducción sobre n, para $n \geq 1$. Defina

$$P_n \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

- Como primer paso, se debe probar que P_1 es verdadero, ésto es:

  $$P_1 \equiv 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}. \quad \checkmark$$

  Por lo que P_1 es verdadera.

- Ahora se debe probar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Lo que equivale a demostrar, para un n fijo pero arbitrario, la implicación siguiente:

  $$\overbrace{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera, entonces:

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{HI} + (n+1) \\ &\overset{HI}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} \end{aligned}$$

  $$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, se tiene que:

  $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

★

Ejemplo 6

Use el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

★ **Solución.** Se aplicará el método de inducción matemática para demostrar que la proposición P_n es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, donde:

$$P_n \equiv 3^0 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

- Se debe demostrar que P_0 es verdadera.

  $$P_0 \equiv 3^0 = \frac{3^{0+1}-1}{2} \qquad \checkmark$$

  Por lo tanto P_0 es verdadera.

- Ahora se debe probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Lo que equivale a demostrar, para un n fijo pero arbitrario, la implicación siguiente:

  $$\overbrace{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2}-1}{2}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera, entonces:

  $$\begin{aligned} 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} &= \underbrace{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}_{HI} + 3^{n+1} \\ &\overset{HI}{=} \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1 + 2 \cdot 3^{n+1}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 1}{2} \\ &= \frac{3^{n+2}-1}{2} \end{aligned}$$

  Por lo tanto, suponiendo válido la hipótesis de inducción, se demuestra que:

  $$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2}-1}{2}$$

  de esta manera queda demostrado para todo $n \in \mathbb{N}$ que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

- Finalmente, por el principio de inducción matemática se tiene que la proposición:

  $$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

  es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

★

■ EJEMPLO **7**

Sea $r \in \mathbb{R}$, con $r \neq 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ se cumple que:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \tag{1.1}$$

★ **Solución.** Defina la proposición P_n por:

$$P_n \equiv 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

- Primero se debe probar que P_1 es verdadera, ésto es:

$$P_1 \equiv 1 = \frac{1 - r^1}{1 - r} \quad \checkmark$$

  De donde se tiene que P_1 es verdadera.

- Ahora se debe probar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Lo que equivale a demostrar que para n fijo pero arbitrario se cumple la implicación siguiente:

$$\overbrace{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera, entonces:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n &= \underbrace{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}}_{H.I.} + r^n \\ &\overset{HI}{=} \frac{1 - r^n}{1 - r} + r^n \\ &= \frac{1 - r^n}{1 - r} + \frac{r^n(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^n}{1 - r} + \frac{r^n - r^{n+1}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

- De este modo, por el principio de inducción matemática, se demuestra:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

★

EJEMPLO 8
Use el método de inducción matemático para demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq k\sqrt{k}, \quad \forall k \geq 1$$

★ **Solución.** Se aplicara el método de inducción matemática para demostrar que la proposición P_k es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 1$; donde

$$P_k \equiv \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq k\sqrt{k}$$

- Primero se demostrará que P_1 es verdadera.

$$P_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1}} \leq 1\sqrt{1}. \quad \checkmark$$

Por lo que la proposición es válida para el primer elemento ($P_1 \equiv V$).

- Ahora se debe probar que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ es verdadero para todo $k \geq 1$. Sea k un número natural fijo pero arbitrario, se debe probar que:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq k\sqrt{k}}_{HI} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq (k+1)\sqrt{k+1}}_{HQD}$$

Suponga que HI es verdadera.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}}}_{HI} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\stackrel{HI}{\leq} k\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\stackrel{?}{\leq} (k+1)\sqrt{k+1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

El ejercicio se completa, solo si esta última desigualdad es verdadera. La veracidad de dicha desigualdad se estudiará de manera independiente a continuación:

$$\begin{aligned} k\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq (k+1)\sqrt{k+1} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{k+1} \cdot k\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k+1}} \leq (k+1)\sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k+1} \cdot k\sqrt{k} + 1 \leq (k+1)(k+1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k+1} \cdot k\sqrt{k} + 1 \leq k^2 + 2k + 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k+1} \cdot k\sqrt{k} \leq k^2 + 2k \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k} \leq k + 2 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k}\right)^2 \leq (k+2)^2 \\ &\Leftrightarrow k(k+1) \leq k^2 + 4k + 4 \\ &\Leftrightarrow k^2 + k \leq k^2 + 4k + 4 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 3k + 4 \end{aligned}$$

Donde esta últimas proposición es verdadera para todo $k \geq 1$. En este mismo sentido, como todas las proposiciones anteriores son tautológicamente equivalentes ($\Leftrightarrow$), entonces la primera de ellas es también verdadera, quedando así demostrada la desigualdad 1.2.

Finalmente se puede asegurar que bajo la suposición de que HI es verdadera se logra demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq (k+1)\sqrt{k+1}$$

Así, por el principio de inducción matemática se tiene que P_k es cierta para todo $k \geq 1$.

★

Ejercicios 1.

1. Use el método de inducción matemática para demostrar cada una de las proposiciones que se indican a continuación:

   - $2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^3 + 2^3 \cdot 3^4 + \cdots + 2^n \cdot 3^{n+1} = \dfrac{18}{5}(6^n - 1)$, para $n \geq 1$.
   - $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$, para $k \geq 1$.
   - $2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + m \cdot 3^{m-1} = \frac{3^m \cdot (2m-1) - 3}{4}$, para $m \geq 2$.
   - $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = 2^{k+1}(k-1) + 2$, para $k \geq 1$.
   - $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + m^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, para $m \geq 1$.
   - $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2 (n+1)^2}{4}$, para $n \geq 1$.
   - $-1 + 9 + 19 + 29 + \cdots + (10m - 1) = (m+1)(5m-1)$, para todo $m \geq 0$.
   - $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$, para todo $n \geq 2$.
   - $\left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{5^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{6^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{3k+3}{4k}$, para todo $k \geq 4$.

continuación....

2. Demuestre, por el método de inducción matemática sobre k, que:

$$1+2r+3r^2+4r^3+\cdots+kr^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}k\,(k+1) & \text{si} \quad r=1 \\ -\dfrac{r^k\,(k+1)-kr^{k+1}-1}{(r-1)^2} & \text{si} \quad r\neq 1 \end{cases}$$

   para todo $k \geq 1$.

3. Use el método de inducción matemática para demostrar las siguientes desigualdades:

   - $n^2 < 2^n$, para todo $n \geq 5$.
   - $1+2+3+4+\cdots+k \leq \dfrac{1}{8}\cdot(2k+1)^2$, para todo $k \geq 1$.
   - $4m < m^2 - 7$, para todo $m \geq 6$.
   - $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{n+2}{2}$, para todo $n \geq 1$.

Capítulo 2

Sucesiones y series numéricas

2.1. Sucesiones numérica

Definición **4 (Sucesión numérica)**
Una sucesión $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ *de números reales, es una función* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Es decir, es una función de la forma:*

$$\begin{array}{rcl} a & : & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & n \longmapsto a(n) = a_n \end{array}$$

En las sucesiones, la notación funcional cambia por una notación de subíndice, así:

$$\begin{array}{ccc} a(0) & = & a_0 \\ a(1) & = & a_1 \\ a(2) & = & a_2 \\ a(3) & = & a_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a(k) & = & a_k \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Las sucesiones pueden iniciar en $n = 0$, $n = 1$, o en $n = p$, con $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. En caso de iniciar en p con $p \neq 1$, la sucesión se debe denotar explícitamente por $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ o bien $\{a_n\}_{n \geq p}$. En caso de que la sucesión inicie en 1, entonces es posible denotarla con $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, o bien $\{a_n\}$. En este caso, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$.

Ejemplo **9**

1. *Considere la sucesión de los números impares* $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$. *Es posible denotar esta sucesión como* $\{2n+1\}_{n=0}^{\infty}$, $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2n-3\}_{n=2}^{\infty}$, $\{2n-5\}_{n=3}^{\infty}$, *etc.*

2. *Considere la sucesión* $\{2^n+(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, los primeros términos de esta sucesión:* $\{2,1,5,7,17,31,\ldots\}$

3. *Considere la sucesión* $\left\{\frac{n^2}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$*. Esta sucesión se puede representar por extensión por:* $\left\{\frac{4}{1},\frac{9}{2},\frac{16}{3},\frac{25}{4},\frac{36}{5},\ldots\right\}$*. Esta sucesión puede ser redefinida de manera que pueda iniciar en* $n=0$*, para ésto basta realizar un corrimiento del índice, quedando:* $\left\{\frac{(n+2)^2}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Como se observa en el ejemplo 9 parte 3, toda sucesión puede ser expresada de forma que su dominio sea $\mathbb{N}$, es decir, que inicie en $n=0$. Por esta razón, en la presente obra los resultados y teorema serán enunciados para sucesiones con dominio $\mathbb{N}$.

2.1.1. Sucesión factorial

Definición **5**
La sucesión definida por $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$*, se denomina sucesión factorial, donde:*

$$n! = n(n-1)! \qquad \text{con } 0! = 1$$

Ejemplo **10**

- $3! = 3\cdot 2! = 3\cdot 2\cdot 1! = 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0! = 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 6$
- $5! = 5\cdot 4! = 5\cdot 4\cdot 3! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 120$
- *Considere la sucesión* $\{a_n\}_{n\geq 1}$*, donde* $a_n = \frac{3(n+1)!}{2(n-1)!}$*. Note que* $a_3 = \frac{3\cdot 4!}{2\cdot 2!} = \frac{72}{4} = 18$.

  Considere además la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *definida por* $b_n = \frac{a_n}{a_{n+2}}$*. Es posible simplificar la fórmula del enésimo término de esta nueva sucesión, de la siguiente manera:*

  $$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{\frac{3(n+1)!}{2(n-1)!}}{\frac{3(n+3)!}{2(n+1)!}} = \frac{3(n+1)!2(n+1)!}{2(n-1)!3(n+3)!} = \frac{n(n+1)}{(n+3)(n+2)}$$

  De esta forma se tiene que la sucesión:

  $$\{b_n\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{n(n+1)}{(n+3)(n+2)}\right\}_{n\geq 1}$$

Ejercicios 2.

Considere la sucesión definida por $\{a_n\}_{n\geq 0} = \left\{\frac{3(2n)!}{4(2n+4)!}\right\}_{n\geq 0}$. Determine a_2 y a_4. Además, simplifique la expresión $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$.

Ejemplo 11

Encuentre una posible fórmula para el enésimo término de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $3, 7, 11, 15, ...$ *b)* $2, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ *c)* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, ...$

d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$ *e)* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, ...$ *d)* $-1, 2, 7, 14, 23, ...$

★ **Solución.**

a) $\{4n-1\}_{n\geq 1}$ b) $\left\{\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right\}_{n\geq 0}$ c) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n\geq 1}$

d) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 2}$ e) $\left\{\frac{2^{n-1}}{3^n}\right\}_{n\geq 0}$ d) $\left\{n^2-2\right\}_{n\geq 1}$

★

Todas las sucesiones dadas anteriormente están expresadas en forma explícita, ésto es que su n-ésimo término está en función únicamente de n. Existe otra forma de representar sucesiones, esta nueva forma se conocerá como recursiva o recurrente y su teoría se expone a continuación.

2.1.2. Sucesiones recursivas

Definición **6 (Sucesión recursiva.)**
Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida en forma recursiva, si el $n-$ésimo término está en función de los términos anteriores.

Además, se define el orden de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada en forma recursiva como el número de términos anteriores necesarios para representar el término $n-$ésimo. Es decir, se dice que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión recursiva de orden k, si y solo si:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$$

donde los términos a_0, a_1, $\ldots$, a_{k-1} son conocidos y se denominan condiciones iniciales de la sucesión.

Ejemplo 12

Considere la sucesión de orden 1 definida por:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Esta sucesión corresponde a: $\{1, 5, 13, 29, 61, \ldots\}$.

En las sucesiones definidas por recurrencia es necesario definir condiciones iniciales que son el punto de partida para la sucesión, en caso de que el $n-$ésimo término dependa de m términos anteriores, entonces se requieren m condiciones iniciales, a estas sucesiones se denominan sucesiones recursivas de orden m.

Ejemplo 13

Considere la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1, \ a_1 = 1 \end{cases}$$

Esta sucesión corresponde a:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$$

y es conocida como la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es una de las sucesiones más curiosas que se conocen, esta sucesión da la solución al famoso problema de los conejos que Fibonacci escribió en su libro *Liber abaci*. El problema en lenguaje actual diría:

Problemas de los conejos

Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada mes engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?

Ejemplo 14

Considere la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *definida por:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

donde f *es la función con criterio* $f(x) = x^2 + 3$*. Note que* $f'(x) = 2x$ *por lo que la sucesión sería:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 + 3}{2x_n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

y la sucesión dada por extensión corresponde a: $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$

Ejercicios 3.

Para cada una de las funciones que se presentan a continuación, determine los primeros 5 términos de las sucesiones:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 = p \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)(a_n - a_{n-1})}{f(a_n) - f(a_{n-1})} \\ a_0 = p, a_1 = p+1 \end{cases}$$

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$; $p = 2$.
2. $f(x) = \cos(x) - x$; $p = \pi$.
3. $f(x) = \ln(x) + x^2$; $p = 2$.
4. $f(x) = \cos(x) - x^2$; $p = -2$.

2.1.3. Paso de la forma recursiva a explícita y viceversa

Las sucesiones recursivas tienen el inconveniente de requerir mucha información para determinar nuevos términos. Por ejemplo, para determinar el término 8 de la sucesión de Fibonacci es necesario conocer el valor de a_6 y a_7. Para saber a_7 es necesario conocer el valor de a_6 y a_5, pero para conocer el valor de a_5 es necesario conocer a_4 y a_3 y así sucesivamente hasta llegar a las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 1$.

Por otro lado, si una sucesión está dada en forma explícita, determinar el valor de algunos de los términos de la sucesión es muy sencillo, basta asignar el valor de n que se desee y listo. Por esta razón es importante determinar un método o estrategia que permita representar las sucesiones recursivas como sucesiones explícitas. A continuación, se estudian dos estrategias para realizar este trabajo.

Ejemplo 15

Considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$\begin{cases} a_n &= a_{n-1} + 5 \\ a_1 &= 3 \end{cases}$$

Demuestre, usando el método de inducción matemática, que la forma explícita de la sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_n = 5n - 2$.

★ **Solución.** Se debe probar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se cumple que $a_n = 5n - 2$. Se procederá por inducción sobre n. Defina:

$$P_n \equiv a_n = 5n - 2$$

- Primero, se debe probar que P_1 es verdadero, ésto es:

$$P_1 \equiv a_1 = 5 \cdot 1 - 2 = 3 \quad \checkmark$$

De donde se deduce que P_1 es verdadera.

- Ahora, se debe probar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se cumple que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Lo anterior, equivale probar para n fijo pero arbitrario la implicación siguiente:

$$\overbrace{a_n = 5n-2}^{HI} \Rightarrow \overbrace{a_{n+1} = 5(n+1)-2}^{HQD}$$

Se procederá por una prueba directa, suponga que HI es verdadera. Demuestre, bajo la suposición anterior, que: $a_{n+1} = 5(n+1) - 2 = 5n+3$.

Demostración:
Por el criterio recursivo de la sucesión, se sabe que $a_{n+1} = a_n + 5$, de este modo se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + 5 \\ & \overset{HI}{=} & (5n-2)+5 \\ & = & 5n+3 \end{array}$$

$$\therefore a_{n+1} = 5n+3$$

- Finalmente, queda demostrado, por el método de inducción matemática, que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $a_n = 5n - 2$.

★

Ejemplo 16
Considere la sucesión $\{t_n\}_{n=2}^{\infty}$ definida en forma recursiva por:

$$\begin{cases} t_n & = & 2t_{n-1} + t_{n-2} - 2t_{n-3} \\ t_2 & = & 2 \\ t_3 & = & 5 \\ t_4 & = & 7 \end{cases}$$

Use el método de inducción matemática para demostrar que el término explícito de la sucesión es: $t_n = 1 - \dfrac{2}{3} \cdot (-1)^n + \dfrac{5}{12} \cdot 2^n$.

★ **Solución.** Se procederá con inducción fuerte sobre n. Defina:

$$P_n \equiv t_n = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{5}{12} \cdot 2^n$$

- Primero se debe demostrar que la proposición es válida para el primer elemento, en este caso, se debe probar que P_2 es verdadera.

$$P_2 \equiv t_n = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^2 + \frac{5}{12} \cdot 2^2 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 2 \quad \checkmark$$

De este modo, $P_2 \equiv V$.

- Ahora, se debe probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se cumple que $P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Lo anterior, equivale a demostrar, para n fijo pero arbitrario, la implicación siguiente:

$$\overbrace{t_k = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^k + \frac{5}{12} \cdot 2^k, \ \forall k = 2, 3, \ldots, n}^{HI} \Rightarrow \overbrace{t_{n+1} = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{5}{12} \cdot 2^{n+1}}^{HQD}$$

Se procederá por una prueba directa, suponga que HI es verdadera. Se demostrará, bajo la suposición anterior, que: $t_{n+1} = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{5}{12} \cdot 2^{n+1}$.

Demostración:
Por la fórmula recursiva, se sabe que $t_{n+1} = 2t_n + t_{n-1} - 2t_{n-2}$, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= 2t_n + t_{n-1} - 2t_{n-2} \\
&\overset{HI}{=} 2\left(1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{5}{12} \cdot 2^n\right) + \left(1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{5}{12} \cdot 2^{n-1}\right) \\
&\quad -2\left(1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-2} + \frac{5}{12} \cdot 2^{n-2}\right) \\
&= 2 - \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{5}{6} \cdot 2^n + 1 + \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{5}{24}2^n - 2 + \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{5}{24}2^n \\
&= 1 + \frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{5}{6} \cdot 2^n \\
&= 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{5}{12} \cdot 2^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\therefore t_{n+1} = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{5}{12} \cdot 2^{n+1}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, queda demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se cumple que:

$$t_n = 1 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{5}{12} \cdot 2^n$$

★

De recursiva a explícita: por inspección

Esta estrategia consiste en realizar sustituciones en los primeros términos de la sucesión y reacomodarlos algebraicamente, con el fin de determinar un posible patrón de donde se pueda inferir un posible fórmula explícita. Una vez que tiene la sospecha de una posible fórmula explícita, es necesario demostrar dicha fórmula por inducción.

Ejemplo 17
Determine una fórmula explícita para la sucesión recursiva dada por:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

★ **Solución.**

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ a_2 &= 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1 \\ a_3 &= 2 \cdot \left(2^2 + 2 + 1\right) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ a_4 &= 2 \cdot \left(2^3 + 2^2 + 2 + 1\right) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

De esta manera se deduce que:

$$a_n = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$$

Haciendo uso de la fórmula 1.1 demostrada en el ejemplo 7, para $r = 2$ se tendría que:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

Quedando así que:

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

De esta forma se sospecha que $a_n = 2^{n+1} - 1$. Ahora se debe demostrar por inducción. Defina:

$$P_n \equiv a_n = 2^{n+1} - 1$$

- Primero, se debe probar que la proposición es válida para el primer elemento, ésto es, probar que P_0 es verdadera:

$$P_0 \equiv a_0 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

- Ahora se debe demostrar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, se debe probar para un n fijo pero arbitrario que:

$$\overbrace{a_n = 2^{n+1} - 1}^{HI} \Rightarrow \overbrace{a_{n+1} = 2^{n+2} - 1}^{HQD}$$

Demostración:
Suponga que HI es verdadera. Además, por el término recursivo, se sabe que $a_{n+1} = 2a_n + 1$, de esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\ &\overset{HI}{=} 2 \cdot (2^{n+1} - 1) + 1 \\ &= 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, queda demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_n = 2^{n+1} - 1$.

★

■ Ejemplo 18
Determine una fórmula explícita para la sucesión recursiva dada por:

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 3a_n + 1 \\ a_0 & = & 2 \end{cases}$$

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_1 &= 3 \cdot 2 + 1 \\
a_2 &= 3 \cdot (3 \cdot 2 + 1) + 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 + 1 \\
a_3 &= 3 \cdot \left(2 \cdot 3^2 + 3 + 1\right) + 1 = 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 3 + 1 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

De esta manera se deduce que:

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1$$

Haciendo uso de la fórmula 1.1 demostrada en el ejemplo 7, para $r = 3$ se tendría que:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$$

De donde quedaría que:

$$a_n = 2 \cdot 3^n + \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$$

Ahora, por medio del método de inducción matemática se demostrará la fórmula anterior. Defina:

$$P_n \equiv a_n = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$$

- Primero, se debe probar que P_0 es verdadero, ésto es:

  $$P_0 \equiv a_0 = \frac{5 \cdot 3^0 - 1}{2} = 2 \checkmark$$

  De donde se concluye que P_0 es verdadero.

- Ahora se debe demostrar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, se probará para un n fijo pero arbitrario que:

  $$\overbrace{a_n = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{a_{n+1} = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 1}{2}}^{HQD}$$

Demostración: Suponga que HI es verdadera. Además, por el término recursivo, se sabe que $a_{n+1} = 3a_n + 1$, de esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + 1 \\ &\overset{HI}{=} 3 \cdot \left(\frac{5 \cdot 3^n - 1}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, queda demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$a_n = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$$

★

Ejemplo 19

Determine una fórmula explícita para la sucesión recursiva dada por:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 5a_n - 3 \\ a_0 &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

★ **Solución.**

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_1 &= 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \\ a_2 &= 5 \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \right) - 3 = 5^2 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 - 3 \\ a_3 &= 5 \cdot \left(5^2 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 - 3 \right) - 3 = 5^3 \cdot \frac{1}{2} - 5^2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 3 \\ a_4 &= 5 \cdot \left(5^3 \cdot \frac{1}{2} - 5^2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 3 \right) - 3 = 5^4 \cdot \frac{1}{2} - 5^3 \cdot 3 - 5^2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 3 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n &= 5^n \cdot \frac{1}{2} - 5^{n-1} \cdot 3 - 5^{n-2} \cdot 3 - \cdots - 5^2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 3 \\ &= 5^n \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5^2 + 5 + 1 \right) \end{aligned}$$

Haciendo uso de la fórmula 1.1 demostrada en el ejemplo 7, para $r = 5$ se tendría que:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1-5^n}{1-5}$$

De donde quedaría que:

$$\begin{aligned} a_n &= 5^n \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1-5^n}{1-5} \\ &= \frac{5^n}{2} - \frac{3 - 3\cdot 5^n}{-4} \\ &= \frac{2\cdot 5^n + 3 - 3\cdot 5^n}{4} \\ &= \frac{3-5^n}{4} \end{aligned}$$

De donde se sospecha que

$$a_n = \frac{3-5^n}{4}$$

Ahora, por medio del método de inducción matemática, se demostrará que la fórmula anterior es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina

$$P_n \equiv a_n = \frac{3-5^n}{4}$$

- Primero, se debe probar que P_0 es verdadero, ésto es:

  $$P_0 \equiv a_0 = \frac{3-5^0}{4} = \frac{1}{2} \checkmark$$

  Así, P_0 es verdadero.

- Ahora se debe demostrar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, se debe probar para un n fijo pero arbitrario que:

  $$\overbrace{a_n = \frac{3-5^n}{4}}^{HI} \Longrightarrow \overbrace{a_{n+1} = \frac{3-5^{n+1}}{4}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera. Además, por el término recursivo, se sabe que $a_{n+1} = 5a_n - 3$, de esta manera se tiene que:

  $$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n - 3 \\ &\overset{HI}{=} 5 \cdot \left(\frac{3-5^n}{4}\right) - 3 \\ &= \frac{3-5^{n+1}}{4} \end{aligned}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, queda demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$a_n = \frac{3 - 5^n}{4}$$

★

Ejemplo 20

Determine una fórmula explícita para la sucesión dada por:

$$\begin{cases} q_{n+1} & = & 2(n+1)q_n \\ q_0 & = & 1 \end{cases}$$

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
q_0 &= 1 \\
q_1 &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \\
q_2 &= 2 \cdot 2 \cdot (2) = 2 \cdot 2^2 \\
q_3 &= 2 \cdot 3 \cdot \left(2 \cdot 2^2\right) = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \\
q_4 &= 2 \cdot 4 \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 2^3\right) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4 \\
q_5 &= 2 \cdot 5 \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4\right) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

De este modo se sospecha que:

$$q_n = n!2^n.$$

Se debe demostrar esta fórmula por el método de inducción matemática, para ésto defina:

$$P_n \equiv q_n = n!2^n.$$

- Primero, se debe probar que P_0 es verdadera, para este caso se tiene:

$$P_0 \equiv q_0 = 0!2^0 = 1\checkmark$$

- Ahora se debe demostrar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, se debe probar para un n fijo pero arbitrario que:

$$\overbrace{q_n = n!2^n}^{HI} \Rightarrow \overbrace{q_{n+1} = (n+1)!2^{n+1}}^{HQD}.$$

Demostración: Suponga que HI es verdadera. Además, por el término recursivo, se sabe que $q_{n+1} = 2\,(n+1)\,q_n$, de esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 2\,(n+1)\,q_n \\ &\stackrel{HI}{=} 2\,(n+1)\,n!2^n \\ &= (n+1)!2^{n+1} \end{aligned}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, queda demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$
$$q_n = n!2^n.$$

★

Ejercicios 4.

1. Para cada una de las siguientes sucesiones que se presenta a continuación, determine su fórmula explícita.

a) $\begin{cases} a_{n+1} &= a_n^2 \\ a_0 &= 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_{n+1} &= 3b_n - 7 \\ b_0 &= \dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_{n+1} &= 2nc_n \\ c_1 &= 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_{n+1} &= 7d_n - 2 \\ d_0 &= 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y_1 &= 3 \\ y_{n+1} &= 2y_n - 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{2}{3} \\ x_n &= 5x_{n-1} + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

De explícita a recursiva: por inspección

Generalmente, este método requiere mucha práctica, debido a que se basa en la observación de un patrón de la secuencia. Algunos patrones no son fáciles de delimitar, lo que hace que este procedimiento carezca de una estructura rígida y se base principalmente en la ocurrencia e ingenio de la persona que resuelve el ejercicio.

Ejemplo 21
Determine una fórmula recursiva para la sucesión explícita dada por:

$$a_n = \frac{5^{n+1} - 1}{7} \tag{2.1}$$

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{5^{0+1}-1}{7} = \frac{4}{7}\\
a_1 &= \frac{5^{1+1}-1}{7} = \frac{24}{7}\\
a_2 &= \frac{5^{2+1}-1}{7} = \frac{124}{7}\\
a_3 &= \frac{5^{3+1}-1}{7} = \frac{624}{7}\\
a_4 &= \frac{5^{4+1}-1}{7} = \frac{3124}{7}\\
a_5 &= \frac{5^{5+1}-1}{7} = \frac{15\,624}{7}\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Diferenciando los términos sucesivos se tiene que:

$$\begin{aligned}
7a_1 - 7a_0 &= 24 - 4 = 20\\
7a_2 - 7a_1 &= 124 - 24 = 100\\
7a_3 - 7a_2 &= 624 - 124 = 500\\
7a_4 - 7a_3 &= 3124 - 624 = 2500\\
7a_5 - 7a_4 &= 15624 - 3124 = 12\,500\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En esta nueva sucesión es importante notar que el $7a_{n+1} - 7a_n = 5\,(7a_n - 7a_{n-1})$ de donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
7a_{n+1} - 7a_n = 5\,(7a_n - 7a_{n-1}) &\iff a_{n+1} - a_n = 5a_n - 5a_{n-1}\\
&\iff a_{n+1} = 6a_n - 5a_{n-1}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n - 5a_{n-1} & \text{para } n \geq 2\\ a_0 = \frac{4}{7},\ a_1 = \frac{24}{7} \end{cases} \tag{2.2}$$

Ahora se debe demostrar dicha fórmula por inducción. Es necesario utilizar la inducción fuerte, ya que la sucesión recursiva depende de dos términos anteriores. Ahora, es importante entender que demostrar que 2.1 es la forma explícita de 2.2 es equivalente a demostrar que 2.2 es la forma recursiva de 2.1. Por lo que se demostrará que la fórmula explícita de la sucesión 2.2 es:

$$a_n = \frac{5^{n+1}-1}{7}$$

Defina primero la proposición abierta

$$P_n \equiv a_n = \frac{5^{n+1}-1}{7}$$

- Note que la proposición es verdadera para el primer elemento, pues

$$P_0 \equiv a_0 = \frac{5^{0+1}-1}{7} = \frac{4}{7}\checkmark$$

- Ahora se debe demostrar que $P_0 \wedge P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, se debe probar para un n fijo pero arbitrario que:

$$\overbrace{a_k = \frac{5^{k+1}-1}{7}, \quad \forall k = 0,1,2,\ldots,n}^{HI} \Rightarrow \overbrace{a_{n+1} = \frac{5^{n+2}-1}{7}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera. Además, por el término recursivo, se sabe que $a_{n+1} = 6a_n - 5a_{n-1}$, de esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6a_n - 5a_{n-1} \\ &\overset{HI}{=} 6\left(\frac{5^{n+1}-1}{7}\right) - 5\left(\frac{5^n-1}{7}\right) \\ &= \frac{30 \cdot 5^n - 6 + 5 - 5 \cdot 5^n}{7} \\ &= \frac{5^{n+2}-1}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{5^{n+2}-1}{7}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, queda demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

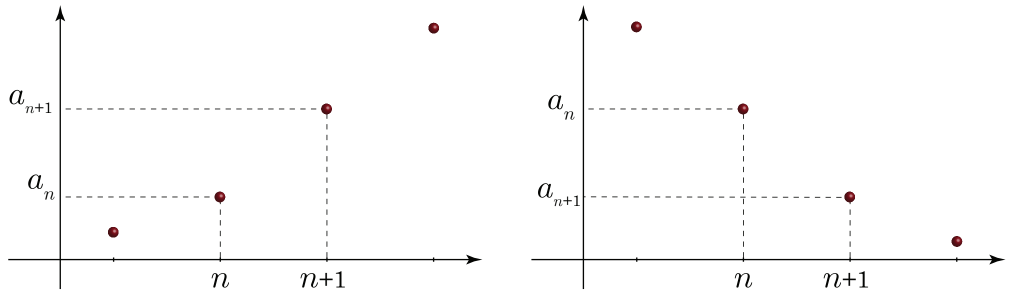
$$a_n = \frac{5^{n+1}-1}{7}.$$

★

2.1.4. Monotonía de sucesiones.

Definición 7
Una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *se dice que es:*

- *creciente, si y solo si,* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
- *decreciente, si y solo si,* $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.



(a) Sucesión creciente $a_n \leq a_{n+1}$.   (b) Sucesión decreciente $a_n \geq a_{n+1}$.

Figura 2.1: Interpretación geométrica del crecimiento y decrecimiento de una sucesión numérica.

Otra forma para estudiar la monotonía de una sucesión es, si la sucesión lo permite, definir una función que pasa por todos los puntos de la sucesión y utilizar los conocimientos acerca de la primera derivada. Si la función es monótona, entonces la sucesión también es monótona.

Si la definición de sucesión creciente o de sucesión decreciente se cumple a partir de un número $p \in \mathbb{N}$, entonces se puede decir que la sucesión es creciente o decreciente, según corresponda, a partir de p.

Ejemplo 22

Considere la sucesión definida por $\left\{\dfrac{2n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$*, estudie la monotonía de dicha sucesión en su dominio.*

★ **Solución.** Si se logra demostrar que para cualquier valor de $n \geq 1$ se cumple que $a_n \leq a_{n+1}$, entonces se tendría que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, en caso que se demuestre que $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$; se tendría que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. En cualquier otro caso, se tendría que la sucesión no es monótona.

$$\begin{aligned} a_n \overset{?}{\leq} a_{n+1} &\iff \frac{2n^2}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{2\,(n+1)^2}{n+2} \\ &\iff 2n^2\,(n+2) \overset{?}{\leq} 2\,(n+1)^3 \\ &\iff 2n^3 + 4n^2 \overset{?}{\leq} 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 \\ &\iff 0 \overset{?}{\leq} 2n^2 + 6n + 2 \end{aligned}$$

Note que como $0 \leq 2n^2+6n+2$ es cierta para $n \geq 0$, entonces se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$ también es cierta para todo $n \geq 0$. Por lo tanto $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es siempre creciente.

Una forma alternativa de resolver el ejercicio, consiste en considerar una función $f\ :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ tal que el gráfico de la sucesión sea subconjunto del gráfico de la función, es decir, una función que cumpla que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Sea f definida por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2x^2}{x+1} &\Longrightarrow f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} \\ &\Longrightarrow f'(x) = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

	$-\infty$	-2	-1	0 $+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	#	#	#	$+$
$f(x)$	#	#	#	$\nearrow$

Tabla 2.1: Variación de signos para la f'

De la tabla 2.1 se puede observar que $f'(x) > 0$ para todo $x \in]0, \infty[$ por lo que f es creciente en $]0, \infty[$ y se concluye que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente en todo su dominio.

★

■ Ejemplo **23**

Analice la monotonía de las siguientes sucesiones:

$$a) \quad \{3 + (-1)^n\} \qquad\qquad b) \quad \left\{\frac{-2n}{1+n}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

★ **Solución.**

a) $\{3 + (-1)^n\}$
Esta sucesión alterna entre 2 y 4, por lo tanto no es monótona.

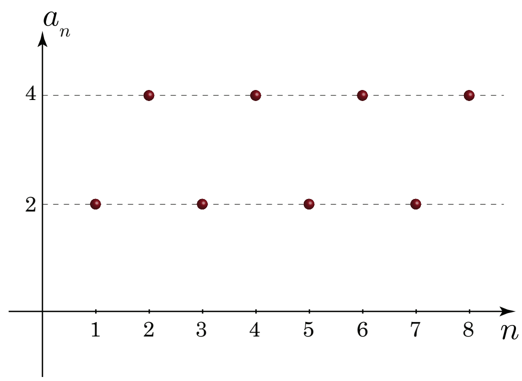


Figura 2.2: Sucesión numérica oscilante.

b) $\left\{\dfrac{-2n}{1+n}\right\}_{n=0}^{\infty}$
¿Será esta sucesión creciente?, es decir ¿$b_n \leq b_{n+1}$? $\forall n \geq 0$.

$$\begin{aligned} & b_n \overset{?}{\leq} b_{n+1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{-2n}{1+n} \overset{?}{\leq} \frac{-2\,(n+1)}{1+(n+1)} \\ \Longleftrightarrow \quad & 4n + 2n^2 \overset{?}{\geq} 2n^2 + 4n + 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 \overset{?}{\geq} 2 \end{aligned}$$

Debe notarse que $0 \geq 2$ es evidentemente falso, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $0 \leq 2$ es evidentemente verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que conlleva a que $b_n \geq b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $\{b_n\}$ es decreciente.

Una forma alternativa de estudiar la monotonía es considerar la función f que cumple $f(n) = \frac{-2n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y que está definida por:

$$f\,(x) = \frac{-2x}{x+1}$$

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2(x+1) - -2x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Como $f'\,(x) < 0,\ \forall x > -1$, entonces f es decreciente en el intervalo $]-1, \infty[$ de lo que se puede concluir que $\left\{\dfrac{-2n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente.

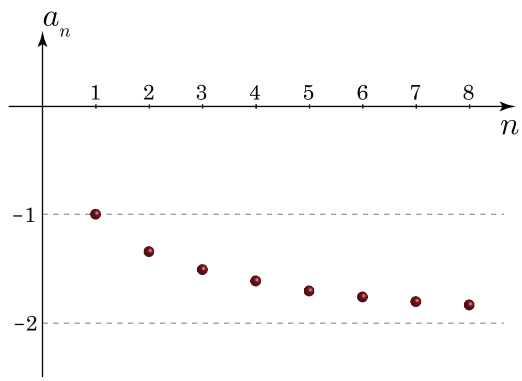


Figura 2.3: Sucesión numérica decreciente.

★

EJEMPLO 24
Use inducción matemática para demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{n!}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión creciente.*

★ **Solución.** Sea $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ y considere la proposición $P_n \equiv a_n \leq a_{n+1}$. Se debe demostrar que $P_n \equiv V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

- Demuestre que $P_1 \equiv V$ (Demostrar para el primer elemento, $n = 1$).

$$P_1 : a_1 \leq a_2 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

- Se demostrará que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, lo que equivale a demostrar para un n fijo pero arbitrario la implicación siguiente:

$$\overbrace{\frac{n!}{2^n} \leq \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \leq \frac{(n+2)!}{2^{n+2}}}^{HQD}$$

Demostración: Considere verdadera HI, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} &= \frac{(n+1)\,n!}{2\cdot 2^n} = \frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{n!}{2^n}\\
&\overset{HI}{\leq} \frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\\
&\leq \frac{(n+2)}{2}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\\
&= \frac{(n+2)!}{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \leq \frac{(n+2)!}{2^{n+2}}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $\dfrac{n!}{2^n} \leq \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$ lo que significa que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es creciente.

★

■ Ejemplo **25**

Considere la sucesión $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ definida por:

$$y_t = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3t+1)}{3^{t-1}(2t)!}$$

Analice la monotonía de $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, en caso de ser monótona a partir de algún número natural, indíquelo.

★ **Solución.** Si $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ fuera creciente, entonces se debería cumplir que $y_t \leq y_{t+1}$ para todo t. Se realizará el estudio para saber para que valores de t esta desigualdad es cierta y para que valores no lo es.

$$\begin{aligned}
y_t \overset{?}{\leq} y_{t+1} &\iff \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3t+1)}{3^{t-1}(2t)!} \overset{?}{\leq} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3t+1)\,(3\,(t+1)+1)}{3^t\,(2\,(t+1))!} \\
&\iff \frac{3^t\,(2t+2)!}{3^{t-1}\,(2t)!} \overset{?}{\leq} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3t+1)\,(3t+4)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3t+1)} \\
&\iff \frac{3^t\,(2t+2)\,(2t+1)\,(2t)!}{3^{t-1}\,(2t)!} \overset{?}{\leq} 3t+4 \\
&\iff 3\,(2t+2)\,(2t+1) \overset{?}{\leq} 3t+4 \\
&\iff 12t^2 + 18t + 6 \overset{?}{\leq} 3t+4 \\
&\iff 12t^2 + 15t + 2 \overset{?}{\leq} 0 \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Es claro que la desigualdad 2.3 no es cierta para ningún $t \geq 0$, lo que la hace falsa. Gracias a los valores de verdad para la conectiva " $\iff$ "se sabe que de donde se partió debe ser también falso. Así que:

$$y_t \geq y_{t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

De esta manera, se tiene que $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona decreciente en todo $\mathbb{N}$.

★

■ Ejemplo **26**

Considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$a_n = \frac{3 \cdot n!}{n \cdot 7^{n+1}}$$

Estudie, usando la definición, si la sucesión anterior es creciente o decreciente a partir de algún número natural. Debe indicar a partir de que número la sucesión es monótona.

★ **Solución.** Se analizará para que valores de n la desigualdad $a_n \leq a_{n+1}$ es cierta y para que valores no lo es.

$$
\begin{aligned}
a_n \leq a_{n+1} &\iff \frac{3 \cdot n!}{n \cdot 7^{n+1}} \leq \frac{3 \cdot (n+1)!}{(n+1) \cdot 7^{n+2}} \\
&\iff \frac{(n+1) \cdot 7^{n+2}}{n \cdot 7^{n+1}} \leq \frac{3 \cdot (n+1)!}{3 \cdot n!} \\
&\iff \frac{(n+1) \cdot 7}{n} \leq \frac{3 \cdot (n+1)\, n!}{3 \cdot n!} \\
&\iff \frac{(n+1) \cdot 7}{n} \leq (n+1) \\
&\iff \frac{(n+1) \cdot 7}{(n+1)} \leq n \\
&\iff 7 \leq n
\end{aligned}
$$

De esta manera, se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$ es verdadera, si y solo si $7 \leq n$. Lo que significa que la sucesión es creciente para todo n natural mayor o igual a 7, o bien, ser puede decir que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente a partir de 7.

★

Ejercicios 5.

1. Demuestre que las siguientes sucesiones son monótonas en todo su dominio. Indique si son crecientes o decrecientes.

   a) $\left\{\dfrac{2^n(n+1)}{n!}\right\}_{n=2}^{\infty}$

   b) $\left\{\dfrac{6^k\left[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)\right]}{(2k+1)!}\right\}_{k=3}^{\infty}$

   c) $\left\{\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n+1}\right\}_{n=2}^{\infty}$

   d) $\left\{\dfrac{-9}{4(m+1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$

   e) $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}_{n=0}^{\infty}$

   f) $\left\{\dfrac{(2k)!}{k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$

2. Para cada una de las siguientes sucesiones, establezca a partir de que número natural es la sucesión creciente o decreciente.

   a) $\left\{\dfrac{(n-2)!}{(n-2)\cdot 9^{n+1}}\right\}_{n=3}^{\infty}$

   b) $\left\{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{2^k\cdot k^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

   c) $\left\{\dfrac{n!\cdot 3^{-n}}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$

   d) $\left\{\dfrac{17^m}{(m+1)!}\right\}_{m=1}^{\infty}$

   e) $\{n^3-9n^2+23n-15\}_{n=0}^{\infty}$

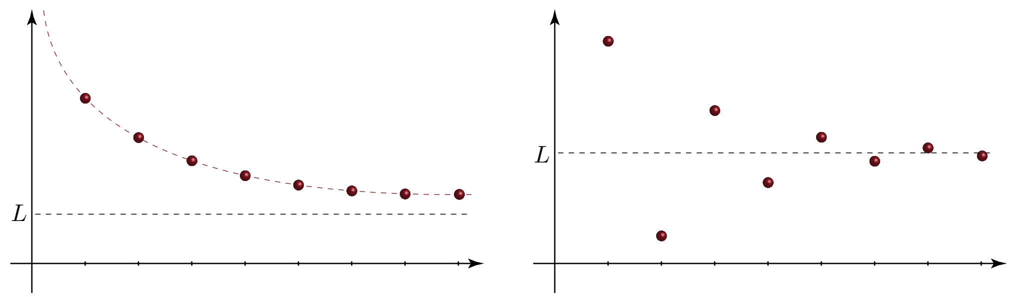
   f) $\{w^6e^{-w}\}_{w=1}^{\infty}$

2.1.5. Sucesiones convergentes

DEFINICIÓN **8 (Sucesión numérica convergente)**
Sea $\{x_n\}$ una sucesión numérica, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión convergente si existe un $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

En este caso se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a L. En caso de que no exista $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se dice que $\{x_n\}$ diverge.



(a) Sucesión convergente a L. (b) Sucesión convergente a L.

Figura 2.4: Interpretación geométrica de la convergencia de sucesiones numéricas

EJEMPLO **27**
Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2n}{3n-7}\right\}_{n=3}^{\infty}$ *es convergente o divergente, en caso de converja determine su límite o valor de convergencia.*

★ **Solución.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(3-\dfrac{7}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3-\cancelto{0}{\dfrac{7}{n}}}=\frac{2}{3}$$

De donde se tiene que la sucesión $\left\{\dfrac{2n}{3n-7}\right\}_{n=3}^{\infty}$ es una sucesión convergente y su valor de convergencia es $\dfrac{2}{3}$.

★

TEOREMA **2**
Sea f una función de variable real y sea $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ una sucesión cualquier donde $p \in \mathbb{N}$. Si $f(n)=a_n$ para todo $n \geq p$, entonces la implicación siguiente es cierta:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

donde L puede ser un número real, $+\infty$ ó $-\infty$.

La importancia de este resultado es la posibilidad de aplicar la regla de L'Hôpital en el cálculo del límite. En el límite de una sucesión no es posible la utilización de la regla de L'Hôpital en forma directa, debido a que por definición, las sucesiones no son funciones continuas y por lo tanto no son derivables. Por esta razón el teorema 2 tiene una importancia relevante en el cálculo de límites para sucesiones.

EJEMPLO 28
Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{e^n}{2e^n+5n^2}\right\}$ *converge o diverge.*

★ **Solución.** Se debe calcular el límite de la sucesión, es decir, se debe calcular, si existe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{2e^n+5n^2}$$

Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuyo criterio es:

$$f(x)=\frac{e^x}{2e^x+5x^2}$$

Dicha función cumple que $f(n)=a_n$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$. De este modo, en virtud del teorema 2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{2e^n+5n^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x+5x^2} && f:\frac{\infty}{\infty}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x+10x} && f:\frac{\infty}{\infty}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x+10} && f:\frac{\infty}{\infty}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^x}}{2\cancel{e^x}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que la sucesión converge a $\dfrac{1}{2}$.

★

EJEMPLO 29
Determine si la sucesión $\{a_n\}$ *es convergente o divergente, donde:*

$$a_n=\frac{n^2}{2^n-1}$$

En caso de converger indique el valor de convergencia.

★ **Solución.** Considere la función asociada $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x-1}$ cuyo gráfico contiene a todos los puntos de la sucesión, en virtud del teorema 2 se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x-1}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\cdot\ln 2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\cdot\ln^2 2}=0$$

Como la función posee límite 0, entonces la sucesión $\{a_n\}$ anterior converge a 0.

★

TEOREMA **3 (del valor absoluto)**
Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales. Si* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO **30**
Determine si las siguientes sucesiones $\{a_m\}$ *y* $\{b_n\}$ *son convergentes o divergentes, donde:*

- $a_m = \dfrac{(-1)^m m}{m^2+13}$
- $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 2$

★ **Solución.**

- Note que:

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{(-1)^m m}{m^2+13}\right| = \lim_{m\to\infty}\frac{m}{m^2+13} = \lim_{m\to\infty}\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\left(m+\dfrac{13}{m}\right)} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+\cancel{\dfrac{13}{m}}^{\,0}} = 0$$

Por lo tanto la sucesión $\{|a_m|\}$ es convergente a 0. En virtud del teorema 3 se tiene que la sucesión $\{a_m\}$ también converge a cero.

- Note que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n}+2\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}+2$, por lo que se debe analizar la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

por lo que en virtud del teorema 3 se tiene que la sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ también converge a cero. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+2\right) = 2$$

y la sucesión en cuestión converge a 2.

★

Ejercicios 6.

Determine si las sucesiones siguientes convergen o divergen

1. $\left\{\dfrac{2n^2+3n}{n^2-5}\right\}$
2. $\{\ln(3n+5)-\ln(5n+8)\}$
3. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}\right\}$
4. $\left\{\dfrac{1}{j+4}\right\}$
5. $\left\{\dfrac{(-1)^{m+2}}{m}\right\}$
6. $\left\{\left(\dfrac{7}{3}\right)^n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right\}$
7. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\right\}$
8. $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+3}-n}{\sqrt{4n+5}-1}\right\}$
9. $\left\{\dfrac{2^k+4^k}{3^k-5^k}\right\}$
10. $\left\{\sqrt{4m^2-6}-\sqrt{4m^2+m}\right\}$
11. $\left\{\dfrac{-1}{h^2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2}{h}\right)}\right\}$
12. $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+3}\right\}$

Los recíproco del teorema 2 no es cierto en general. Es decir, la implicación: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ no es en general cierta en el contexto del teorema 2. El siguiente ejemplo evidencia este hecho.

EJEMPLO 31

Considere los siguientes límites. Los primeros dos sobre $\mathbb{R}$ *y el tercero sobre* $\mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{sen}(\pi x)\right)$. *Este límite no existe pues* $\operatorname{sen}(\pi x)$ *oscila entre* -1 *y* 1 *en todo* $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\operatorname{sen}(\pi n)\right)$. *Observe que* $\operatorname{sen}(\pi n)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, *por lo que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\operatorname{sen}(\pi n)\right)=0$$

Así la sucesión $\{a_n\}$ *definida por* $a_n=\dfrac{1}{n}+\operatorname{sen}(\pi n)$ *converge a* 0 *a pesar que la función* $f(x)=\dfrac{1}{x}+\operatorname{sen}(\pi x)$ *es divergente cuando* $x\to\infty$.

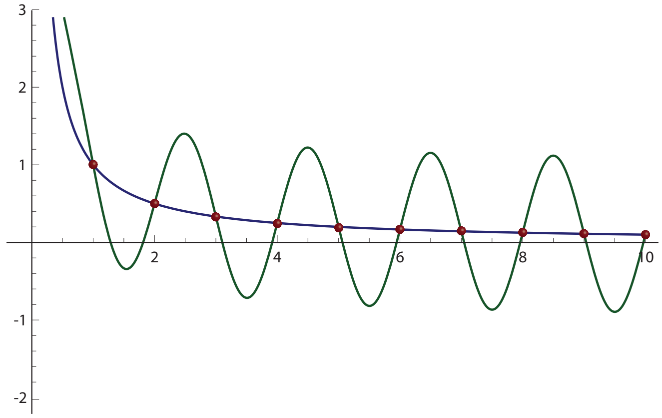


Figura 2.5: Contra ejemplo que demuestra que el recíproco del teorema 2 no es cierto

TEOREMA **4 (del encaje para sucesiones)**
Si para todo $n \geq N$ *se cumple que* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$*. Donde* L *puede ser un número real,* $+\infty$ *ó* $-\infty$*.*

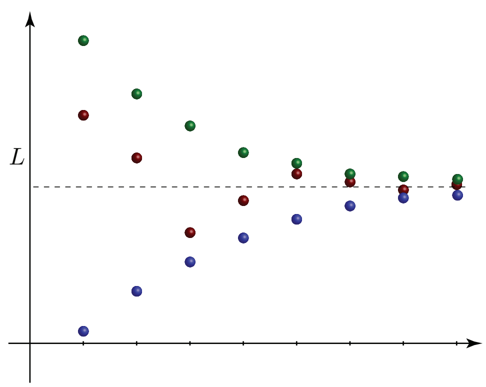


Figura 2.6: Representación gráfica del teorema del encaje.

EJEMPLO **32**
Estudie la convergencia de la siguiente sucesión $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}(n)}{3^n+1}\right\}$.

★ **Solución.**

Se tiene que $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así:

$$\frac{-1}{3^n+1} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n+1}$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{3^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n+1} = 0$, por el teorema anterior se tendría que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{3^n+1} = 0$$

y por lo que la sucesión anterior converge a 0.

★

Teorema **5**
Si $\{a_n\}$ es una sucesión y $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo **33**
Dada la sucesión $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n!n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1} < 1
\end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = e^{-1}$ y como $e^{-1} < 1$, entonces la sucesión converge a 0.

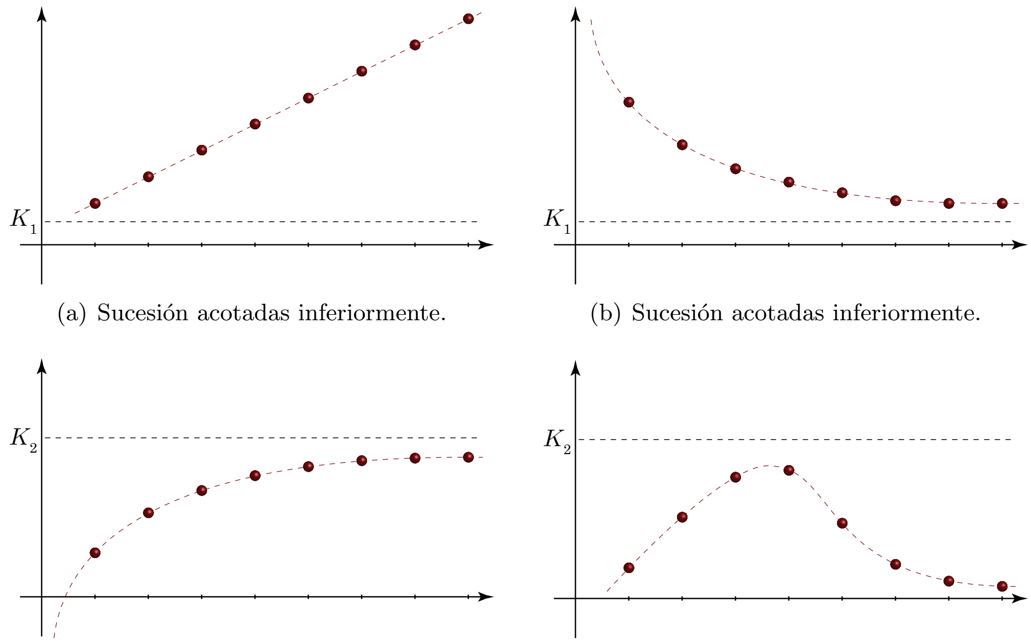
2.1.6. Sucesiones acotadas

Definición **9**

- *Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada inferiormente si existe una constante real K_1 tal que $K_1 \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- *Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada superiormente si existe una constante real K_2 tal que $a_n \leq K_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- *Si una sucesión es acotada inferiormente y superiormente se dice que es acotada.*



(a) Sucesión acotadas inferiormente. (b) Sucesión acotadas inferiormente.

(c) Sucesión acotadas superiormente. (d) Sucesión acotadas superiormente.

Figura 2.7: Interpretación geométrica de una sucesión acotadas inferior o superiormente.

Ejemplo 34
Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión acotada.*

★ **Solución.** Se debe probar que dicha sucesión es acotada inferior y superiormente.

- Primero note que $\dfrac{n}{n+1} < 1$, pues es una fracción positiva tal que el denominador es mayor que el numerador. Es decir:

  $$\frac{n}{n+1} < 1 \iff n < n+1$$

  Por lo que la sucesión es acortada superiormente por 1.

- Note además que $0 \leq \dfrac{n}{n+1}$, para todo $n \geq 0$, pues una fracción con numerador y denominador no negativos. Por lo que la sucesión está acotada inferiormente por 0.

Como dicha sucesión esta acotada superior e inferiormente, entonces se puede concluir que es acotada.

★

Ejemplo 35
Demuestre, usando el método de inducción matemática, que la sucesión

$$\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión acotada superiormente por $\frac{5}{6}$.

★ **Solución.** Defina la proposición abierta P_n por:

$$P_n \equiv \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$$

La cual equivale a:

$$P_n \equiv \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}-\frac{1}{n+1}$$

- Para el primer elemento se tiene que:

  $$P_1 \equiv \frac{1}{1+2} \leq \frac{5}{6}-\frac{1}{1+1} \equiv \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

  Por lo tanto se tiene que $P_1 \equiv V$.

- Ahora se procede a demostrar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Es decir, se debe probar, para un n fijo pero arbitrario la siguiente implicación es verdadera:

  $$\overbrace{\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}-\frac{1}{n+1}}^{P_n:HI} \Rightarrow \overbrace{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+3} \leq \frac{5}{6}}^{P_{n+1}:HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera.

  $$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+1}}_{HI}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3} \\ \overset{HI}{\leq}\; & \frac{5}{6}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3} \\ \overset{??}{\leq}\; & \frac{5}{6} \end{aligned}$$

  Esta última desigualdad se deberá probar aparte, pues a simple vista no es clara.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq \frac{5}{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+3} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+3} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-(2n+3) + 2(n+1)}{2(n+1)(2n+3)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{(n+1)(2n+3)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad -1 \leq 0
\end{aligned}$$

Donde resulta claro que esta última desigualdad es cierta. Así, según los valores de verdad que toman las proposiciones de verdad con la conectiva ($\Longleftrightarrow$), se tiene que de donde se partió debe ser también verdadera. Quedando así demostrado lo que se pedía ($P_n \Rightarrow P_{n+1}$).

- De este modo, según el principio de inducción matemática, se concluye que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$$

es verdadero para todo $n \geq 1$.

Finalmente, se puede concluir que la sucesión está acotada superiormente por $\dfrac{5}{6}$.

★

Teorema **6**

- *Si una sucesión es decreciente y acotadas inferiormente, entonces es convergente.*
- *Si una sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces es convergente.*

Ejemplo **36**

Considere la sucesión definida por:

$$\left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

1. *Use el método de inducción matemática parta demostrar que* $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \leq 2 - \frac{1}{3^n}$ *y use este hecho para concluir que la sucesión es acotada superiormente.*
2. *Pruebe que la sucesión es creciente.*
3. *¿Qué se puede decir de la convergencia de la sucesión?*

★ **Solución.**

1. Defina:
$$P_n \equiv \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \leq 2 - \frac{1}{3^n}$$

   - Para el primer elemento se tiene que:
   $$P_1 \equiv \frac{2}{3} \leq 2 - \frac{1}{3} \equiv \frac{2}{3} \leq \frac{5}{3} \quad \checkmark$$
   por lo que $P_1 \equiv V$.
   - Ahora se debe probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Es decir, se debe probar que para n fijo pero arbitrario la implicación siguiente es verdadera.
   $$\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} \leq 2 - \frac{1}{3^n}}_{HI} \Rightarrow \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{3^{n+1}}}_{HQD}$$
   Demostración: Suponga que HI es verdadera, así:
   $$\begin{aligned} \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n}}_{HI} + \frac{2}{3^{n+1}} &\overset{HI}{\leq} 2 - \frac{1}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{3}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$
   Quedando así probado que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.
   - Finalmente, por el principio de inducción matemática, se tiene que:
   $$P_n \equiv \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \leq 2 - \frac{1}{3^n}$$
   es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

   Por otro lado, de los demostrado se puede concluir que dicha sucesión está acotada superiormente por 2, pues es claro que:
   $$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \leq 2 - \frac{1}{3^n} < 2$$
   para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2. Defina $a_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^3} + \cdots + \dfrac{2}{3^n}$. Se debe probar que $a_n \leq a_{n+1}$, para lo cual se procede como sigue:
$$\begin{aligned} a_n \leq a_{n+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \frac{2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$
   Lo cual es evidentemente cierto. De donde se puede concluir que $a_n \leq a_{n+1}$ también es cierto. Así $\{a_n\}$ es una sucesión creciente.

3. Como la sucesión
$$\left\{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
es acodada superiormente por 2 y creciente, entonces en virtud del teorema 6 se tiene que dicha sucesión es convergente.

★

Es importante aclarar que la aplicación de este teorema no indica el valor de convergencia de la sucesión. En el ejemplo 36 no es posible determinar, de la solución realizada, el valor de convergencia de la sucesión. A lo más que se puede aspirar, en este ejemplo, es decir que su límite existe y debe ser menor o igual a 2.

Ejercicios 7.

1. Hallar el $n-$ésimo término de la sucesión dada por:
$$a_n = 1 - f^{(n-1)}(0)$$
donde $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ y determinar si es convergente dicha sucesión.
2. Determine si las siguientes sucesiones convergen o no.

1. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$	4. $a_n = \dfrac{n^p}{e^n} \quad p>0$
2. $b_n = \dfrac{\ln^2 n}{n}$	5. $b_n = \dfrac{(n-2)!}{n!}$
3. $c_n = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$	6. $c_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

2.2. Series numéricas

Definición **10**
Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *se define la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *como la suma de todos los términos de la sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Es decir:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

En caso de que la serie inicie en 1, entonces se puede denotar por $\sum a_n$. En cualquier otro caso, es necesario indicar el término inicial de la serie.

Definición **11**
Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, se define su* $k-$*ésima suma parcial, y se denota* S_k *como:*

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

En caso de que la serie inicie en p*, entonces*

$$S_k = \sum_{n=p}^{k+p-1} a_n = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+k-1}$$

Se define además, la sucesión de $k-$*ésimas sumas parciales como* $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Al igual que se hizo en sucesiones, las series se pueden redefinir de forma que den inicio en $p = 0$, $p = 1$ o bien en el valor que más convenga. Así:

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p+k}$$

Por esta razón, a partir de este punto, los resultados se estudiarán para series que inicien en uno. Sin embargo, los resultados que se estudiarán podrán ser aplicados a series que dan inicios en números naturales distintos a la unidad aplicando una traslación conveniente.

2.2.1. Convergencia y divergencia de series numéricas

Definición **12**
Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, si la sucesión de las* $k-$*ésimas sumas parciales converge, entonces se dice que la serie es convergente. En caso contrario se dice que la serie es divergente.*

Si la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales de una serie converge a S, con $S \in \mathbb{R}$, entonces se dice que la serie converge a S y se escribe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = S$$

al valor de S se le denomina, suma total de la serie o valor de convergencia de la serie numérica.

Ejemplo 37 *Considere la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$. *Use inducción para demostrar que:*

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^k}$$

¿Es la serie convergente? de serlo ¿cuál es su valor de convergencia?

★ **Solución.** Aplicando inducción sobre k. Se debe demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ se cumple que:

$$P_k \equiv \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^k}$$

- Para el primer elemento ($k = 1$) se tiene que:

  $$\sum_{n=1}^{1} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^1} \iff \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

  Por lo que P_1 es verdadera.

- Se debe probar que para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$, lo que equivale demostrar para k fijo pero arbitrario la implicación siguiente:

  $$\overbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^k}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{\sum_{n=1}^{k+1} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^{k+1}}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera, entonces:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{n=1}^{k+1} \frac{2}{3^n} &= \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^k}}_{\sum_{n=1}^{k} \frac{2}{3^n}} + \frac{2}{3^{k+1}} \\
  &= \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{k+1}} \\
  &\overset{HI}{=} \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) + \frac{2}{3^{k+1}} \\
  &= 1 - \frac{3}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+1}} \\
  &= 1 - \frac{1}{3^{k+1}}
  \end{aligned}$$

  $$\therefore \sum_{n=1}^{k+1} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^{k+1}}$$

- Finalmente, por el principio de inducción matemática, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Lo anterior demostró que

$$S_k = 1 - \frac{1}{3^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Para analizar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ converge, basta probar si la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales converge, lo que implica analizar la convergencia de la sucesión $\left\{1 - \frac{1}{3^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) = 1$$

de donde se tiene que la serie converge y lo hace a 1.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$$

★

En el ejemplo 36 se probó, indirectamente, que la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales, de la serie en el ejemplo 37, era creciente y acotada superiormente y por lo tanto convergente. Sin embargo, no fue posible determinar el valor de convergencia. En el ejemplo 37 se determina que dicha serie, y por ende la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales convergen a 1.

Ejemplo 38
Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k$*. Use inducción matemática para demostrar que:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Determine si la serie converge o diverge.

★ **Solución.** Gracias al ejemplo 5 se tiene demostrado que:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

Lo que demuestra que la sucesión de las $n-$ésimas sumas parciales está dada por $\{S_n\}_{n\geq 1}$ donde

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Finalmente, se puede observar que $S_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, de donde se concluye que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k$ es divergente.

★

■ Ejemplo **39**
Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right)$

1. *Demuestre que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right) = \log 2 + \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ *utilizando el principio de inducción matemática.*

2. *Determine el carácter de la serie; en caso de ser convergente determine el valor al que converge.*

★ **Solución.**

1. Sea $P_n \equiv \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \log 2 + \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$.

   - Se debe probar que $P_1 \equiv V$.

     En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) &= \log 2 + \log\frac{2}{3} \\
\Longrightarrow \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) &= \log\frac{4}{3} \\
\Longrightarrow \log\frac{4}{3} &= \log\frac{4}{3} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

   - Ahora se debe probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Es decir, se debe probar para un n fijo pero arbitrario que la implicación siguiente es verdadera:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \tfrac{1}{k(k+2)}\right) = \log 2 + \log\left(\tfrac{n+1}{n+2}\right)}_{HI} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \log\left(1 + \tfrac{1}{k(k+2)}\right) = \log 2 + \log\left(\tfrac{n+2}{n+3}\right)}_{HQD}$$

Demostración: Suponiendo verdadera HI se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)+\log\left(1+\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right)\\
&= \log 2+\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right)\\
&= \log 2+\log\left[\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right)\right]\\
&= \log 2+\log\left[\frac{n+1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]\\
&= \log 2+\log\left[\frac{(n+1)(n+3)+1}{(n+2)(n+3)}\right]\\
&= \log 2+\log\left[\frac{n^2+4n+4}{(n+2)(n+3)}\right]\\
&= \log 2+\log\left(\frac{n+2}{n+3}\right)
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que si P_n es verdadera, entonces P_{n+1} también lo es. Así $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ es verdadera para todo $n \geq 1$.

- Luego por el principio de inducción matemática queda demostrado que:

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k^2+2k}\right)=\log 2+\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \qquad \forall n \geq 1$$

2. Luego, si $S_n = \log 2+\log\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \log 2+\log 1 = \log 2$$

De esta forma se deduce que la serie converge, y lo hace a $\log 2$.

★

Ejemplo 40

Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k$, *donde r es una constante real distinta de cero y uno. Deduzca una fórmula para la $n-$ésima suma parcial. Demuéstrela por inducción y determine bajo que condiciones se tiene la convergencia de la serie.*

★ **Solución.** Se desea determinar una fórmula para S_n, donde

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}$$

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} \\
&= \frac{(1-r)\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}\right)}{1-r} \\
&= \frac{\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}\right) - r\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}\right)}{1-r} \\
&= \frac{\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}\right) - r - r^2 - r^3 - r^4 - \cdots - r^{n-1} - r^n}{1-r} \\
&= \frac{1-r^n}{1-r}
\end{aligned}$$

por lo que:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$$

Esta misma fórmula fue demostrada por inducción en el ejemplo 7 de la presente obra. De esta manera, queda solo determinar las condiciones sobre r para que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k$ sea convergente. Por la definición de convergencia de una serie, se sabe que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \text{ converge} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{existe}$$

Aplicando propiedades de límites se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} r^n}{1-r}$$

Donde $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ existe únicamente cuando $|r| < 1$. Y en este caso se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

De donde se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

siempre que $|r| < 1$. Y diverge en cualquier otro caso.

★

Ejercicios 8.

1. Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Demuestre, por el principio de inducción matemática, que la sucesión de las $n-$ésimas sumas parciales está dada por $\left\{\dfrac{n}{3n+9}\right\}_{n\geq 1}$. ¿Es la serie convergente o divergente?

2. Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$. Demuestre, por el principio de inducción matemática, que la sucesión de las $n-$ésimas sumas parciales está dada por $\left\{\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right\}_{n\geq 1}$. ¿Es la serie convergente o divergente?

3. Use el método de inducción matemática para demostrar que la $n-$ésima suma parcial de la serie numérica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ está dada por $S_n = 2-2^{-n}(n+2)$ para todo $n\geq 1$. Use este hecho para demostrar que la serie es convergente.

4. Considere la siguiente serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$$
   a) Demuestre, usando inducción $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.
   b) Determine si la serie dada converge o diverge. En caso de convergencia determine su suma.

5. Realice lo siguiente:
   a) Demuestre, utilizando inducción matemática, la siguiente igualdad.
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=3-\frac{2n+3}{2^n} \tag{1}$$
   b) Utilice el resultado (1) para determinar si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2^k}$ es convergente o divergente, en caso de converger indique el valor de la suma total.

(continua...)

continuación....

6. Considere la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$.

   a) Demuestre que la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales está dada por:
$$\left\{1 - \frac{1}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

   b) ¿Es la serie convergente? en caso de que lo sea, determine el valor de la suma total.

7. Use el principio de inducción matemática para demostrar que las igualdades siguentes son verdaderas para todo $n \geq 1$.

   a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

   b) $\sum_{m=1}^{n}(2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

   c) $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

   d) $\sum_{t=1}^{n} t \cdot t! = (n+1)! - 1$.

Ejemplo **41**
Considere la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i-1}{2^i}$. *Demuestre que la serie converge. Para ésto proceda como sigue:*

- *Use inducción matemática para demostrar que* $S_k \leq \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k}$. *Use este hecho para concluir que* $\{S_k\}$ *es acotada superiormente por* $\frac{7}{2}$.
- *Pruebe que* $\{S_k\}$ *es una sucesión creciente.*
- *Concluya que la serie es convergente usando el resultado del teorema 6.*

★ **Solución.** Se debe probar que:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} \leq \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k}, \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Usando inducción sobre k, para $k \geq 1$. Defina:

$$P_k \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} \leq \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k}$$

- Se debe probar para el primer elemento ($k = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{2i-1}{2^i} \leq \frac{7}{2} - \frac{2+3}{2^1} \iff \frac{1}{2} \leq 1 \quad \checkmark$$

  De donde se tiene que P_1 es verdadero.

- Ahora se debe probar que para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. Lo que equivale a demostrar que para k fijo pero arbitrario se cumple la implicación siguiente:

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} \leq \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k}}^{HI} \Rightarrow \overbrace{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2i-1}{2^i} \leq \frac{7}{2} - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}}^{HQD}$$

  Demostración: Suponga que HI es verdadera, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2i-1}{2^i} &= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{2k-1}{2^k}}_{\sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i}} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \\
&\overset{HI}{\leq} \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{7}{2} - \left(\frac{4k+6}{2^{k+1}} - \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \right) \\
&= \frac{7}{2} - \frac{2k+5}{2^{k+1}} \\
&= \frac{7}{2} - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}} \\
\therefore \quad \sum_{i=1}^{k+1} \frac{2i-1}{2^i} &\leq \frac{7}{2} - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

- De este modo, por el principio de inducción matemática, se tiene que:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} \leq \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k}, \quad \text{para todo } k \geq 1\,.$$

Note además que:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k} \leq \frac{7}{2} &\iff -\frac{2k+3}{2^k} \leq 0 \\
&\iff -(2k+3) \leq 0 \\
&\iff -2k \leq 3 \\
&\iff k \geq \frac{-3}{2}
\end{aligned}$$

Lo que es evidentemente cierto, por lo que se tiene que $\{S_k\}_{k\geq 1}$ está acotada superiormente por $\frac{7}{2}$.

Ahora se demostrará que $\{S_k\}_{k\geq 1}$ es creciente. Por definición basta demostrar $S_k \leq S_{k+1}$ para todo $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
S_k \leq S_{k+1} &\iff \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{2i-1}{2^i} \\
&\iff \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i} + \frac{2\,(k+1)-1}{2^{k+1}} \\
&\iff 0 \leq \frac{2\,(k+1)-1}{2^{k+1}} \\
&\iff 0 \leq 2\,(k+1)-1 \\
&\iff 1 \leq 2k+2 \\
&\iff -1 \leq 2k \\
&\iff \frac{-1}{2} \leq k
\end{aligned}$$

Esto último es evidentemente cierto, por lo que se tiene que $S_k \leq S_{k+1}$ para todo $k \geq 1$. Así, se tiene que $\{S_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión creciente.

Como $\{S_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces en virtud del teorema 6 se tiene que es convergente. Por lo que finalmente se puede concluir que $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2^i}$ es una serie convergente.

★

Ejemplo 42
Considere la serie dada por $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}}$.

- *Use inducción para demostrar que* $S_k \geq \sqrt{k}$.
- *¿Qué se puede decir sobre la convergencia de la serie?*

★ **Solución.** Se debe probar que:

$$S_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{k} \text{ para todo } k \geq 1.$$

Usando inducción sobre k, con $k \geq 1$. Defina:

$$P_k \equiv \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{k}$$

- Se debe probar para el primer elemento ($k = 1$):

$$\sum_{m=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{1} \iff 1 \geq 1 \qquad \checkmark$$

De donde se tiene que P_1 es verdadera.

- Ahora se debe probar que para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se cumple que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. Lo que equivale a demostrar que para k fijo pero arbitrario se cumple la implicación siguiente:

$$\overbrace{\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{k}}^{HI} \Longrightarrow \overbrace{\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{k+1}}^{HQD}$$

Demostración: Suponga que HI es verdadera, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{m}} &= \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m}}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&\geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{?}{\geq} \sqrt{k+1}
\end{aligned}$$

Ahora se probará que la desigualdad anterior es verdadera:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1} \\
\iff & \sqrt{k+1}\sqrt{k} + 1 \geq k+1 \\
\iff & \sqrt{k+1}\sqrt{k} \geq k \\
\iff & (k+1)\, k \geq k^2 \\
\iff & k^2 + k \geq k^2 \\
\iff & k \geq 0, \quad \text{lo cual es verdadero.}
\end{aligned}$$

De donde se deduce que:

$$\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{k+1}$$

- De este modo, por el principio de inducción matemática, se tiene que:

$$S_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{k}, \qquad \text{para todo } k \geq 1.$$

Finalmente, note que la serie diverge, pues $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{k} = \infty$ y como $S_k \geq \sqrt{k}$ para todo k, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \infty$.

★

En el ejemplo 41 se pudo demostrar que la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales es convergente y por lo tanto la serie converge, sin embargo no es posible determinar el valor de convergencia usando del procedimiento realizado. En adelante algunos de los métodos empleados para analizar convergencia de series numéricas tiene esta misma característica. Es decir, puede determinar convergencia o divergencia, pero en caso de convergencia no es posible determinar el valor de la suma total.

Ejercicios 9.

1. Considere la serie dada por $\sum\limits_{r=1}^{\infty} r^2$. Use inducción para demostrar que $S_k > \dfrac{k^3}{3}$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la serie?

2. Considere la serie dada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n+1)2^n}$. Use inducción para demostrar que $S_k < \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(n+1)2^n}$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la serie?

3. Considere la serie dada por $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2m-1}{2^m}$. Demuestre, por el principio de inducción matemática, que:

$$S_k \leq \frac{7}{2} - \frac{2k+3}{2^k} \qquad \forall k \geq 1$$

¿Qué se puede decir de la convergencia de la serie?

4. Considere la serie $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^3$, demuestre, por el principio de inducción matemática, que: $S_k > \dfrac{n^4}{4}$ $\forall k \geq 1$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la serie?

TEOREMA **7 (propiedades de las series)**
Si $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ *y* $\sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n$ *son dos series convergentes,* p *un número natural cualquiera y* c *es una constante real, entonces también son convergentes las series* $\sum\limits_{n=p}^{\infty} ca_n$*,* $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n + b_n)$ *y* $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n - b_n)$*. Además se cumple:*

- $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=p}^{\infty} a_n$
- $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=p}^{\infty} b_n$

Es importante exponer algunas consideraciones que no están presentes en el teorema 7 y que son necesarias para el análisis de convergencia de series que se hará posteriormente. Este teorema permite la separación de la serie de una suma o una resta solo cuando ambas series convergen por separado, sin embargo, muchas veces no se conoce el carácter de una serie hasta haberlas separado y analizado. De esta manera, en la práctica se realizará la separación primero y luego se hará el análisis de la convergencia de las series por separado. La clasificación $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ en convergente o divergente se hará de acuerdo con la siguiente regla:

- Si las series $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n$ convergen ambas, entonces $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ también es convergente en virtud del teorema 7.
- Si una de las series $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ ó $\sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n$ converge y la otra diverge, entonces se puede decir que $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ es divergente.
- Si las series $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n$ divergen ambas, entonces no es válido realizar la separación de la serie, lo anterior pues la serie $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ con la condiciones anteriores puede ser convergente o divergente. Es decir, la suma o resta de series divergentes puede ser convergente o divergente, hecho que debe estudiarse sin realizar la separación.

TEOREMA **8 (Supresión de los primeros N términos de una serie)**
Para cualquier entero positivo N *las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \quad y \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

son ambas convergentes o ambas divergentes. Si ambas convergen, sus sumas totales difieren en S_N, donde S_N es la $N-$ésima suma parcial.

■ EJEMPLO **43**
Si se hace uso del resultado obtenido en el ejemplo 40, con $r = \frac{2}{3}$, se obtiene que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ es convergente al valor 3. Utilice el resultado presente en el teorema 8 para calcular el valor de convergencia de $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ en caso de ser convergente.

★ **Solución.** Primero que todo, la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ es convergente en virtud del teorema 8 pues dicha serie es el resultado de suprimir los primeros tres términos de la serie convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Por otro lado.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}^{S_3} + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
\frac{1}{1-\frac{2}{3}} &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
3 &= \frac{19}{9} + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
3 - \frac{19}{9} &= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
\frac{8}{9} &= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ es convergente y el valor de su suma total corresponde a $\frac{8}{9}$.

★

A continuación se realizará una presentación de un conjunto de criterios o reglas que permitirán el estudio del carácter de una serie, algunas de estas reglas brindan, en el caso de convergencia, el valor de la suma total de la serie. Otros por su parte solo brindarán el carácter de la serie, pero no brindaran, en caso de convergencia, el valor de la suma total.

2.2.2. Criterio de divergencia

TEOREMA **9 (criterio de la divergencia)**
Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge a* $L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

❑ **Demostración.** Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a un número real L, ésto implica que $\{S_n\}$ donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ también converge a L. Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L - L = 0 \end{aligned}$$

De donde se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

❐

La contrapositiva del teorema 9 es lo que se conoce como el criterio de divergencia, el mismo se leería como sigue:

Criterio de divergencia
Si la sucesión $\{a_k\}$ **no** converge a cero, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Es importante aclarar que en caso de que la sucesión $\{a_k\}$ converja a cero, no hay garantía de la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Esto es: si $a_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ puede converger o puede diverger.

EJEMPLO **44**
Determine, de ser posible, utilizando el criterio anterior, cuáles de las siguientes series divergen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n^2}{4n^2-1}$

★ Solución.

- Para la 2. y la 4. se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} = 0$$

 por lo que el criterio no se aplica y no se puede concluir nada sobre su convergencia (posteriormente se verá que una de ellas converge y la otra diverge).

- Para las series 1., 3., 5. y 9. se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 2^n &= \infty \neq 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n!+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\left(2+\dfrac{1}{n!}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(2+\dfrac{1}{n!}\right)} = \frac{1}{2} \neq 0 \\
\lim_{n\to\infty} \arctan(n) &= \frac{\pi}{2} \neq 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{4n^2-1} &= \begin{cases} \dfrac{3}{4} \neq 0 & \text{Si } n \text{ es par.} \\[2em] \dfrac{-3}{4} \neq 0 & \text{Si } n \text{ es impar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

 y por el criterio de divergencia se concluye que las cuatro series divergen.

- Para el caso de la series dadas en 6., 7. y 8. se tiene que:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe, pues cuando n es par da 1 y cuando es impar da -1. De este modo dichas series divergen, pues el límite de su sucesión asociada no es cero.
  - Considere el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, note que cuando n es par se tiene que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$ y cuando n es impar se tiene que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = 1$ o bien $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = -1$. De donde se concluye que el límite no existe y en consecuencia la serie diverge.
  - Para el caso de $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$ note que el mismo tiene la forma $+\infty \cdot -\infty$ de donde se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

 y como el límite no es cero, entonces por el criterio de divergencia la serie correspondiente diverge.

★

Ejercicios 10.

Determine, de ser posible, utilizando el criterio de divergencia, cuáles de las series dadas son divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \ln\left(\frac{j+1}{j+2}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{5-3n^2}{7n+5n^2}$.
3. $\displaystyle\sum_{h=4}^{\infty} (3\sqrt[h]{h}+2)$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$.
6. $\displaystyle\sum_{m=3}^{\infty} \frac{m^2}{(3m^2-1)^2}$

2.2.3. Criterio de la serie geométrica

DEFINICIÓN **13 (Serie geométrica)**
La serie dada por:

$$1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}$$

donde r es una constante real fija, se llama serie ***geométrica****.*

TEOREMA **10**
La serie geométrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ *converge a* $\dfrac{1}{1-r}$, *si* $|r|<1$ *y diverge si* $|r|\geq 1$.

❏ **Demostración.** Para ver la demostración de este resultado puede consultar el ejemplo 40 de este documento.

❐

En el caso de que la serie inicie en p y $|r|<1$ se tiene que

$$\sum_{k=p}^{\infty} r^k=\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+p}=r^p\sum_{k=0}^{\infty} r^k=r^p\cdot\frac{1}{1-r}=\frac{r^p}{1-r}$$

Criterio de la serie Geométrica

$$\sum_{k=p}^{\infty} r^k \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{r^p}{1-r} & \text{si} \quad |r|<1 \\ \\ \text{diverge} & \text{si} \quad |r| \geq 1. \end{cases}$$

Ejemplo 45
Determine la suma total de la serie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{4^{k+1}}{5^k}$ *en caso que la misma resulte convergente.*

★ **Solución.**

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4^{k+1}}{5^k} = 4 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{4^k}{5^k} = 4 \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

como $\left|\dfrac{4}{5}\right| < 1$ la serie converge y:

$$4 \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = 4 \cdot \frac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3}{1-\dfrac{4}{5}} = \frac{256}{25}$$

Por lo que la serie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{4^{k+1}}{5^k}$ converge a $\dfrac{256}{25}$.

★

Ejemplo 46
Analice la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}-2^k}{5^{k+1}}$*, en caso de converger determine la suma.*

★ **Solución.** Usando la propiedades para series convergentes dadas en el teorema 7, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}-2^k}{5^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{5^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{5} \frac{(-1)^k}{5^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5} \frac{2^k}{5^k} \\ &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^k - \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k \end{aligned}$$

como $\left|\dfrac{-1}{5}\right| < 1$ y $\left|\dfrac{2}{5}\right| < 1$ ambas series convergen, así:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^k - \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k \\ = & -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1}{5}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}-2^k}{5^{k+1}}$ converge a $\dfrac{-1}{2}$.

★

Ejemplo 47
Considere la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}+3^{n-1}}{4^{2n}}$$

Analice la convergencia de dicha serie. En caso de converger calcule el valor de su suma.

★ **Solución.** Haciendo uso del teorema 7 se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}+3^{n-1}}{4^{2n}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{3n}}{4^{2n}}+\frac{3^{n-1}}{4^{2n}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}}{2^{4n}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{16^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^n \end{aligned}$$

Note que $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ y $\left|\dfrac{3}{16}\right| < 1$, entonces las series son convergentes, de este modo se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^n &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{16}} \\ &= 2+\frac{16}{39}=\frac{94}{39} \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{3n}+3^{n-1}}{4^{2n}}$ converge a $\dfrac{94}{39}$.

★

■ EJEMPLO **48**
Considere la serie

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3i} + 4^i}{7^{i+3}}$$

Estudie el carácter de la serie dada. En caso de resultar convergente, determine el valor de su suma total.

★ **Solución.** Usando las propiedades de series convergentes presentes en el teorema 7 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3i} + 4^i}{7^{i+3}} &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3i}}{7^{i+3}} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{4^i}{7^{i+3}} \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-8)^i}{7^i \cdot 7^3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{4^i}{7^i \cdot 7^3} \\
&= \frac{1}{7^3} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{-8}{7}\right)^i + \frac{1}{7^3} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^i
\end{aligned}$$

note que $\left|\frac{-8}{7}\right| \geq 1$ y $\left|\frac{4}{7}\right| < 1$ de donde se concluye que la serie $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \left(\frac{-8}{7}\right)^i$ es una serie divergente y la serie $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^i$ es convergente, ambas por el criterio de la serie geométrica. De esta manera, como una serie converge y la otra diverge en virtud de la regla expuesta posterior al teorema 7 se puede concluir que la serie $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3i} + 4^i}{7^{i+3}}$ es divergente.

★

■ EJEMPLO **49**
Si $q > 0$, determine condiciones para q de tal forma que la serie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2 \cdot q^{k+3}}{3 \cdot q^{2k+1}}$ converja, además determine su suma (en términos de q).

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2 \cdot q^{k+3}}{3 \cdot q^{2k+1}} &= \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{q^{k+3}}{q^{2k+1}} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{q^k \cdot q^3}{q^{2k} \cdot q} \\
&= \frac{2q^3}{3q} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \frac{q^k}{q^{2k}} = \frac{2q^2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} q^{k-2k} \\
&= \frac{2q^2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} q^{-k} = \frac{2q^2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^k
\end{aligned}$$

la serie anterior es una serie geométrica con $r = \dfrac{1}{q}$, por lo tanto, para que la serie converja, debe cumplirse que:

$$\overbrace{\left|\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q}}^{\text{pues } q>0} < 1 \Leftrightarrow 1 < q$$

Por lo que la serie es convergente para todo $q > 1$.

Finalmente, para valores de $q > 1$ se tiene que el valor de la suma total se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{2q^2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^k = \frac{2q^2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^3}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{2}{3q-3}$$

Así, la serie converge para valores de $q > 1$ y el valor de la suma total es $\dfrac{2}{3q-3}$.

★

Ejemplo 50
Determine si la serie $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+2} \cdot 3^{k-1}}{63 \cdot 7^{k-3}}$ *converge o diverge, en caso de ser convergente determine la suma total.*

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+2} \cdot 3^{k-1}}{63 \cdot 7^{k-3}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+5} \cdot 3^{k+2}}{63 \cdot 7^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^5 \cdot 3^2}{63} \cdot \frac{2^k \cdot 3^k}{7^k} \\
&= \frac{32}{7} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k \text{ que converge pues } r = \frac{6}{7} < 1. \\
&= \frac{32}{7} \frac{1}{1 - \frac{6}{7}} = 32
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+2} \cdot 3^{k-1}}{63 \cdot 7^{k-3}}$ converge y el valor de su suma total es 32.

★

Ejercicios 11.

1. Demuestre que las siguientes series con convergentes, en cada caso, calcule el valor de la suma total.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6e^k}{3^{k+1}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{4}\right)^{2-n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^n}{3^{n+1}} - 2^{-n+2}\right]$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]$

   e) $\displaystyle\sum_{m=5}^{\infty} \frac{3^{m+2}}{4^{m-2}}.$

   f) $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \frac{2^{2h+1} - 3^{h+2}}{7^h}$

2. Encuentre los valores de w $(w \neq 0)$ para que la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2w^{2n+1}}{3w^{n+3}}$ sea convergente y halle su respectiva suma total en términos de w.

3. Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2p^2\right)^{n+1}}{(3p)^{n-1}}, \text{ con } p \neq 0.$$

   Determine que condición debe cumplir p para garantizar la convergencia de la serie. Para estos valores de p, determine el valor de suma en términos de p.

4. El número $S = 0.\overline{3} = 0.3333333\ldots$ puede expresarse como una suma infinita, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} S &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \cdots \end{aligned}$$

   a) Represente a S por medio de una serie.

   b) Verifique que la serie anterior converge y utilícela para expresar el valor de S como un cociente de enteros.

5. Use el razonamiento empleado en el ejercicio anterior para expresar cada uno de los número que se presentan a continuación como un cociente de enteros.

   a) $0.\overline{2} = 0.222222222\ldots$

   b) $0.\overline{73} = 0.7373737373\ldots$

   c) $0.\overline{7} = 0.7777777777\ldots$

   d) $0.\overline{12} = 0.1212121212\ldots$

2.2.4. Criterio de la serie telescópica

DEFINICIÓN **14 (Serie telescópica)**

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es telescópica si existe una sucesión* $\{b_n\}$ *tal que* $a_n = b_n - b_{n+1}$.

TEOREMA **11**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ *una serie telescópica. Entonces la serie converge, si y solo si, la sucesión* $\{b_n\}$ *converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

❏ **Demostración.** Considere la $k-$ésima suma parcial de la serie,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^{k} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{k} (b_n - b_{n+1}) \\ &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{k-1} - b_k) + (b_k - b_{k+1}) \\ &= b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cdots + \cancel{b_{k-1}} - \cancel{b_k} + \cancel{b_k} - b_{k+1} \\ &= b_1 - b_{k+1} \end{aligned}$$

De este modo se tiene que la sucesión de las $k-$ésimas sumas parciales $\{S_k\}$ corresponden a $S_k = b_1 - b_{k+1}$. Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, si la sucesión $\{S_k\}$ converge, y lo hacen al mismo valor. Así, la sucesión $\{S_k\}$ converge, si y solo si $\lim_{k\to\infty} b_{k+1}$ existe. De donde se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (b_1 - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$$

❐

Si la serie inicie en p se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{\infty} a_n &= \sum_{n=p}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+(p-1)} - b_{n+(p-1)+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+p-1} - b_{n+p}) = b_p - \lim_{k\to\infty} b_{k+p} \\ &= b_p - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}\end{aligned}$$

Pues $\lim\limits_{k\to\infty} b_{k+p} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1}$.

Criterio de la serie telescópica

$$\sum_{n=p}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) \begin{cases} \text{converge a } b_p - \lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1} & \text{si } \lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1} \text{ existe} \\ \text{diverge} & \text{si } \lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1} \text{ no existe} \end{cases}$$

■ Ejemplo **51**

Considere la serie

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}}$$

Exprese la serie anterior como una serie telescópica y analice la convergencia de la misma. En caso de ser convergente determine el valor de su suma total.

★ **Solución.** Para este caso, $a_m = \dfrac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}}$, se debe determinar una sucesión $\{b_m\}$ tal que $a_m = b_m - b_{m+1}$.

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}} &= \frac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}} \cdot \frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m+2}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m+2}} \\ &= \frac{-(\sqrt{m+1}-\sqrt{m+2})}{(m+1)-(m+2)} \\ &= \frac{-(\sqrt{m+1}-\sqrt{m+2})}{-1} \\ &= \sqrt{m+1}-\sqrt{m+2}\end{aligned}$$

De esta manera se tiene que:

$$\frac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}} = \sqrt{m+1}-\sqrt{m+2}$$

por lo que bastaría definir $b_m = \sqrt{m+1}$ lo que implica que $b_{m+1} = \sqrt{m+2}$ y la serie se puede expresar por medio de una serie telescópica de la siguiente manera:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}} = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m+2}\right)$$

Sin embargo, note que $\lim\limits_{m\to\infty} b_{m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt{m+2} = \infty$ por lo que se puede concluir que la serie telescópica es divergente.

★

■ EJEMPLO **52**
Considere la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$. *Determine si esta serie converge o diverge. Si converge calcule su suma.*

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\ln\left(n^2-1\right) - \ln\left(n^2\right)\right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)\right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln n\right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego $b_{n+1} = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$, como

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

se concluye que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge y al ser una serie telescópica, su suma está dada por:

$$b_2 - \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

★

■ EJEMPLO **53**
Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$$

En caso de converger, determine el valor de su suma.

★ **Solución.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{(n+2)\,(n+1)}{n\,(n+3)}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n+3}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\right] \qquad (2.4) \\
&= \ln\left(\frac{2+1}{1}\right) - \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right) \\
&= \ln(3) - 0
\end{aligned}$$

Note que la serie en 2.4 es convergente por el criterio de las series telescópicas, dado a que:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right) \text{ existe}$$

por lo tanto se tiene que la serie original converge y el valor de convergencia corresponde a $\ln(3)$.

★

■ **EJEMPLO 54**

Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2+3n+2}\right)$$

En caso de converger, determine el valor de su suma.

★ **Solución.** Aplicando fracciones parciales a $\dfrac{-1}{n^2+3n+2}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{n^2+3n+2} = \frac{-1}{(n+1)\,(n+2)} &= \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} \\
\Longrightarrow \frac{-1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\
\Longrightarrow -1 &= A(n+2)+B(n+1) \\
\Longrightarrow A = -1 \quad &\text{y} \quad B = 1
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{-1}{n^2+3n+2} = \frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{n+2}$$

y se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n^2+3n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{n+2}\right)$$

Luego, $b_{n+1} = \frac{-1}{n+2}$ de donde se tiene que $\{b_n\}$ es una sucesión convergente ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+2} = 0$$

Así, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n^2+3n+2}\right)$ converge y al ser una serie telescópica, su suma está dada por:

$$b_1 - \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+2} = \frac{-1}{2}$$

★

■ Ejemplo **55**

Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{9n^2+24n+7}\right)$$

En caso de converger, determine el valor de su suma.

★ **Solución.** Aplicando fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{6}{9n^2+24n+7} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+7}$$

note que los términos no son consecutivos por lo que la serie no es telescópica. Sin embargo,

$$\frac{6}{9n^2+24n+7} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{3n+7}$$

por lo que en virtud del teorema 7 se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+24n+7} \\
= \;& \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) + \left(\frac{1}{3n+4} - \frac{1}{3n+7}\right)\right] \\
= \;& \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+4} - \frac{1}{3n+7}\right) \qquad (2.5) \\
= \;& \left(\frac{1}{3+1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+4}\right) + \left(\frac{1}{3+4} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+7}\right) \\
= \;& \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{11}{28}
\end{aligned}$$

Note que las series en 2.5 son series convergentes por el criterio de las series telescópicas.

Finalmente se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+24n+7}$ es convergente y el valor de su suma total es $\frac{11}{28}$.

★

Ejemplo 56
Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$$

En caso de converger, determine el valor de su suma.

★ **Solución.** Usando fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

Usando el resultado del teorema 7 se puede hacer el siguiente análisis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{-2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \quad (2.6) \\
&= \frac{1}{2} \left[1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Note que las series en 2.6 son series convergentes por el criterio de las series telescópicas.

Finalmente se concluye que la serie original es convergente y el valor de convergencia corresponde a $\frac{1}{4}$.

★

EJEMPLO **57**
Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

En caso de converger, determine el valor de su suma.

★ **Solución.** Usando fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{4}{2}}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3} \right) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} + \frac{\frac{3}{2}}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3} \right) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{3}{2}}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3} \right) \\
= & -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \qquad (2.7) \\
= & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} \right) \\
= & -\frac{1}{4} + \frac{3}{6} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Note que las series en 2.7 son series convergentes por el criterio de las series telescópicas.

Finalmente se concluye que la serie original es convergente y el valor de convergencia corresponde a $\frac{1}{4}$.

★

EJEMPLO **58**
Si se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Calcular la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

★ **Solución.** Aplicando la técnica de fracciones parciales a las expresión $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Luego, se puede notar que:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$ pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\iff 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\iff \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=2$, pues es una serie telescópica convergente.

Finalmente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-2=\frac{\pi^2}{3}-3$

★

■ Ejemplo **59**
Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{4}{n(n+1)}+\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}\right]$. *Determine si la serie converge o diverge; en caso de ser convergente, calcule su suma.*

★ **Solución.** En virtud del teorema 7 se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{4}{n(n+1)}+\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$$

suponiendo que ambas series son convergentes.

Note que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}$ es una serie telescópica convergente. En efecto:

$$\frac{4}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Longrightarrow 4 = A(n+1) + Bn$$

Si $n = 0$, entonces $A = 4$. Además, si $n = -1$, entonces $A+B = 0$, y en consecuencia $B = -4$, ya que $A = 4$.

De esta forma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n+1} \right) = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 2$$

Por otro lado, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ es una serie geométrica convergente. Observe que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)}{5^n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

donde $r = -\dfrac{1}{5}$ y $\left|-\dfrac{1}{5}\right| < 1$, lo cual garantiza la convergencia de la serie. Además,

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{(-1/5)^2}{1+\dfrac{1}{5}} = -\frac{1}{30}.$$

Finalmente la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{4}{n(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} \right]$ es convergente y su suma S es $S = 2 + -\dfrac{1}{30} = \dfrac{59}{30}$.

★

Ejercicios 12.

1. Determine si las siguientes series convergen o divergen. En caso de ser convergente halle su suma.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k^2+6k+8}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{16}{(4n-1)(4n+7)}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos\frac{\pi}{k} - \cos\frac{\pi}{k+2}\right]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n2^n-(n+1)2^{n+1}}{3^{n+1}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$

g) $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2-6n+5}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$

i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{20}{4n^2+4n-3}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)}\frac{1}{3^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\right]}{n(\ln n)\ln(n+1)^{n+1}}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$

n) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}+\frac{2^{k+1}}{3^{2k}}\right)$

ñ) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{40k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}.$

o) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{4}{(4j-3)(4j+1)}$

p) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$

q) $\displaystyle\sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{3}{4m^2-1}+\frac{2^{1-m}}{3^{2m}}\right)$

2.2.5. Criterio de la integral y $p-$series

Los criterios que se estudiarán en adelante, incluidos el criterio de la integral y las $p-$series, brindarán información sobre el carácter de una serie, sin embargo de garantizar convergencia no se podrá saber el valor exacto de su suma total por medio del criterio en si. En algunos criterios, tal como la integral y el criterio de las series alternadas, existen resultados que permiten aproximar el valor de la suma total con cualquier precisión que se desee. No obstante, en el presente documento solo se estudiará estos resultados para el caso de las series alternadas.

Teorema **12 (Criterio de la integral)**
Si f es monótona en el intervalo $[a,\infty[$ para algún $a \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

❑ **Demostración.** Se demostrará una parte del teorema, la demostración completa puede ser consultada en libros de cálculo. Para minimizar los cálculos se supondrá que $a = 1$, sin embargo, el procedimiento que se presenta, puede ser realizado de igual forma para cualquier $a \in \mathbb{N}$, siempre que el dominio de la función lo permita. Además, recuerde que cualquier serie puede ser redefinida de manera que inicie en 1, así que no hay perdida de generalidad.

Caso de una función decreciente positiva:

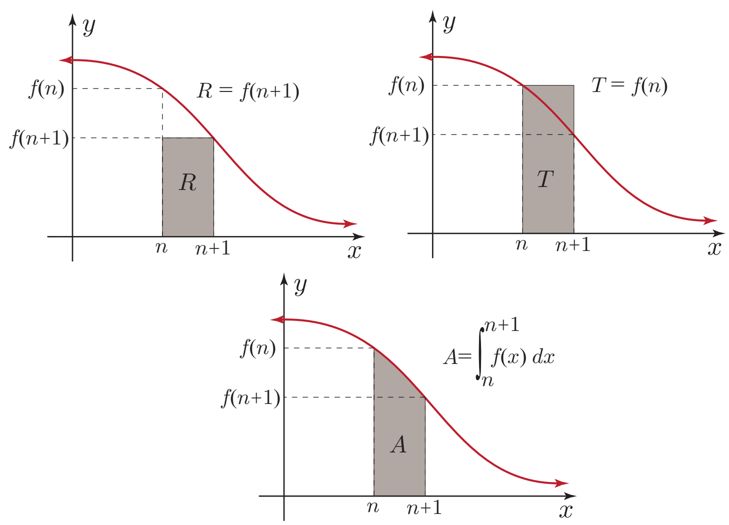


Figura 2.8: Caso de una función decreciente positiva

- Si f es decreciente y positiva $[1,\infty[$, entonces en el intervalo $[n, n+1]$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
& f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) \\
\Rightarrow \quad & \sum_{n=1}^{k} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{k} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k} f(n) \\
\Rightarrow \quad & \sum_{n=2}^{k+1} f(n) \leq \sum_{n=1}^{k} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k} f(n) \\
\Rightarrow \quad & S_{k+1} - f(1) \leq \int_1^{k+1} f(x)dx \leq S_k \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

En este punto, es posible realizar el siguiente análisis:

- Del lado izquierdo de la desigualdad 2.8 y del hecho que f es positiva, se tiene que:

$$S_{k+1} \leq \int_1^{k+1} f(x)dx + f(1) \leq \overbrace{\int_1^{\infty} f(x)dx + f(1)}^{M}$$

De donde se tiene que si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ existe se tendría que la sucesión $\{S_k\}$ es creciente y acotada superiormente por M, de donde y en virtud del teorema 6 se tiene que $\{S_k\}$ es convergente. Por lo tanto:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ converge } \Longleftarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

- Del lado derecho de la desigualdad 2.8:

$$\int_1^{k+1} f(x)dx \leq S_k$$

se observa que si la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$, entonces $S_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Y la serie diverge, de este modo:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ diverge } \Longleftarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx \text{ diverge}$$

cuya contrapositiva corresponde a:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

- De estos dos últimos análisis se concluye que:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

donde f es una función decreciente y positiva en $[1, \infty[$.

- Si f es creciente y positiva, se puede hacer un análisis similar al anterior, sin embargo, en este caso es evidente que la serie y la integral divergen, en el caso de la serie puede estudiarse con el criterio de divergencia.

- En caso de ser f negativa, basta estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -f(n)$.

  Ya que: $-f$ es positiva, $f \nearrow \Rightarrow -f \searrow$, $f \searrow \Rightarrow -f \nearrow$ quedando así contenido en algunos de los casos anteriores. Finalmente, se puede concluir que:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

  donde f es una función monótona en $[1, \infty[$.

❒

Ejemplo 60

Determine si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ *converge o diverge.*

★ **Solución.** Aplicando el criterio de la integral. Primero se debe estudiar la monotonía de la función asociada a la serie, para ésto se empleará el estudio sobre la primera derivada de la función f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

y cuya primera derivada corresponde a

$$f'(x) = \frac{0 - (\ln^2 x + 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x})}{(x \ln^2 x)^2} = \frac{-\cancel{\ln x} \cdot (\ln x + 2)}{\cancel{\ln x} \cdot x^2 \ln^3 x} = \frac{-(\ln x + 2)}{x^2 \ln^3 x}$$

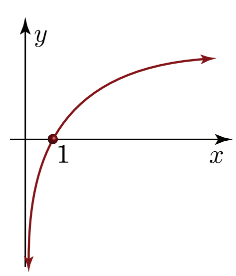


Figura 2.9: $\ln x$.

De la figura 2.9, se puede observar que $\ln x > 0$, $\forall x > 1$. Por lo que $f'(x) < 0$, $\forall x > 1$. Consecuentemente se tiene que la función f es decreciente, y por lo tanto monótona, en $]1, \infty[$. De lo anterior se concluye que f es monótona en $[2, \infty[$, pues se requiere que el extremo izquierdo del intervalo se encuentre contenido en el mismo.

Ahora que se tiene cubierta las hipótesis del teorema 12 se procede a aplicar dicho criterio calculando la integral.

Tome $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, de donde se tiene que:

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{\ln x} + C$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln^2 x} dx \\
&= \lim_{b \to \infty} \left(\left. \frac{-1}{\ln x} \right|_2^b \right) \\
&= \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ converge a $\frac{1}{\ln 2}$ y por lo tanto según el criterio de la integral expuesto en el teorema 12 la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ también es convergente.

Sin embargo, se debe tener cuidado pues el valor de la suma total sigue siendo desconocido.

★

■ Ejemplo **61**
Determine si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ *converge o diverge.*

★ **Solución.** Aplicando del criterio de la integral. Primero se debe estudiar la monotonía de la función asociada a la serie, para ésto se empleará el estudio sobre la primera derivada de la función f definida por:

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}$$

y cuya primera derivada corresponde a

$$f'(x) = e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

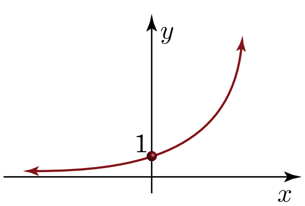


Figura 2.10: e^x.

De la figura 2.10, se puede observar que $e^{-\sqrt{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, además $\sqrt{x} > 0$ para todo $x > 0$. Por lo que $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$. Consecuentemente se tiene que la función f es decreciente, y por lo tanto monótona, en $]0, \infty[$. De lo anterior se concluye que f es monótona en $[1, \infty[$, pues se requiere que el extremo izquierdo del intervalo se encuentre contenido en el mismo.

Ahora que se tiene cubierta las hipótesis del teorema 12 se procede a aplicar dicho criterio calculando la integral.

Tomando $w = \sqrt{x} \Longrightarrow w^2 = x \Longrightarrow 2wdw = dx$, de donde se tiene que:

$$\int e^{-\sqrt{x}} dx = \int e^{-w} 2wdw = \int 2we^{-w} dw$$

Aplicando partes a esta última integral tomando $u = 2w \Longrightarrow du = 2dw$ y $dv = e^{-w}dw \Longrightarrow v = -e^{-w}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int 2we^{-w}dw &= 2w \cdot -e^{-w} - \int -e^{-w} 2dw = -2we^{-w} - 2e^{-w} + C \\ &= -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

Calculando la integral impropia se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-\sqrt{x}}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\cancelto{0}{-2\sqrt{b}e^{-\sqrt{b}}}}_{\text{regla de L'H}}-2e^{-\sqrt{b}}-\left(-2e^{-1}-2e^{-1}\right)\right)=4e^{-1}
\end{aligned}$$

así la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ converge a $4e^{-1}$ por lo que aplicando el criterio de la integral se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ es también convergente y en virtud del teorema 8 la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ converge.

★

Ejemplo 62
Analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

★ **Solución.** Se empleará el criterio de la integral

Primero se debe estudiar la monotonía de la función asociada a la serie, para ésto se empleará el estudio sobre la primera derivada de la función f definida por:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

y cuya primera derivada corresponde a

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-1\cdot\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

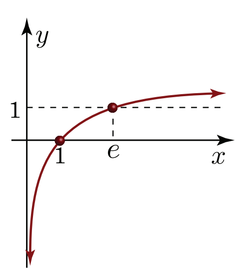


Figura 2.11: $\ln x$.

De la figura 2.11, se puede observar que $\ln x>1$, $\forall x>e$, de donde se tiene que $1-\ln x<0$ para todo $x\in]e,\infty[$. Por lo que $f'(x)<0$, $\forall x>e$. Consecuentemente se tiene que la función f es decreciente, y por lo tanto monótona, en $]e,\infty[$. De lo anterior se concluye que f es monótona en $[3,\infty[$, pues se requiere que el extremo izquierdo del intervalo se encuentre contenido en el mismo.

Ahora que se tiene cubierta las hipótesis del teorema 12 se procede a aplicar dicho criterio calculando la integral.

Tome $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$, de donde se tiene que:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Calculando la integral impropia se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx &= \lim_{A\to\infty} \int_3^A \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_3^A \\ &= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{\ln^2 A}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Por lo que se tiene que la integral impropia $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ es divergente. De este modo la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es también divergente por criterio de la integral. En virtud del teorema 8 se concluye que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

★

Ejemplo 63

Determine el carácter de la serie dada por: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$

★ **Solución.** Se aplicará el criterio de la integral. Primero deberá estudiarse si la función asociada a la serie es monótona. Considere la función f definida por:

$$f(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$$

cuya derivada está dada por:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\left[e^{\arctan x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}\right](1+x^2) - 2x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{e^{\arctan x} - 2x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{e^{\arctan x}(1-2x)}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

De acuerdo con la figura 2.10 la expresión $e^{\arctan x} > 0$ para todo x. Por otro lado, el factor $(1-2x) < 0$ para todo $x > \frac{1}{2}$ y el factor $(1+x^2)^2$ es no negativo para cualquier valor de x. De este modo $f'(x) < 0$ para todo $x \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$. Consecuentemente, se concluye que la la función f es decreciente y por lo tanto monótona en $[1, \infty[$.

Satisfechas la condición de monotonía de la función asociada a la serie se procede a determinar la convergencia de la integral impropia. Primero se debe calcular la integral indefinida por sustitución.

Tome $u = \arctan x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$. Así:

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\arctan x} + C$$

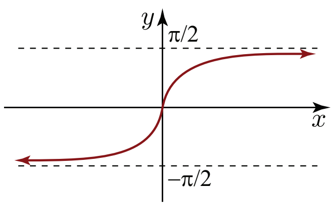


Figura 2.12: $\arctan x$.

El análisis de la integral impropia procede como sigue:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx \\ &= \lim_{A\to\infty} e^{\arctan x}\Big|_1^A \\ &= \lim_{A\to\infty}\left(e^{\arctan A} - e^{\arctan 1}\right) \qquad (2.9) \\ &= e^{\pi/2} - e^{\pi/4}\end{aligned}$$

Note que el límite en 2.9 se cálcula por medio de la gráfica presentada en la figura 2.12 en la cual se aprecia que $\arctan x \to \pi/2$ cuando $x \to \infty$.

Finalmente, se concluye que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$ converge a $e^{\pi/2} - e^{\pi/4}$. Así, según el criterio de la integral la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$ es también convergente.

★

Ejemplo 64
Determine si la serie $\displaystyle\sum_{p=3}^{\infty} \frac{-1}{(2p-1)\ln^2(2p-1)}$ *es convergente o divergente.*

★ **Solución.** Primero considere la función f definida por:

$$f(x) = \frac{-1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}$$

Primero se debe estudiar la monotonía de f para lo cual considere su primera derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{0-\left(2\ln^2(2x-1)+2\ln(2x-1)\cdot\dfrac{1}{\cancel{2x-1}}\cdot 2\cdot\cancel{(2x-1)}\right)\cdot -1}{(2x-1)^2\ln^4(2x-1)} \\
&= \frac{\cancel{\ln(2x-1)}\,(2\ln(2x-1)+4)}{\cancel{\ln(2x-1)}(2x-1)^2\ln^3(2x-1)} \\
&= \frac{2\ln(2x-1)+4}{\ln^3(2x-1)\,(2x-1)^2}
\end{aligned}
$$

De acuerdo a la figura 2.9, se tiene que $\ln(x)>0$ para todo $x>1$, lo que significa que $\ln(2x-1)>0$ para todo $x>1$ ya que:

$$2x-1>1 \iff 2x>2 \iff x>1$$

De donde se tiene que:

$$f'(x)=\frac{2\ln(2x-1)+4}{\ln^3(2x-1)\,(2x-1)^2}>1 \quad \text{para todo } x>1$$

Consecuentemente, la función f debe ser creciente y por lo tanto monótona para todo $x\in]1,\infty[$, pudiendo concluirse que f es monótona en $[3,\infty[$. Por lo que f satisface las hipótesis del teorema 12.

Ahora, se debe analizar el carácter de la integral impropia:

$$\int_3^{\infty}\frac{-1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}dx=\lim_{A\to\infty}\int_3^{A}\frac{-1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}dx$$

Para lo cual se debe calcular la integral indefinida para la cual tome $u=\ln(2x-1)\Longrightarrow du=\dfrac{2}{2x-1}dx$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{-1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}dx &= \int\frac{-1}{u^2}\frac{du}{2}=\frac{1}{2u}+C \\
&= \frac{1}{2\ln(2x-1)}+C
\end{aligned}
$$

De donde se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty}\int_3^{A}\frac{-1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}dx &= \lim_{A\to\infty}\left.\frac{1}{2\ln(2x-1)}\right|_3^A \\
&= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{2\ln(2A-1)}-\frac{1}{2\ln(6-1)}\right] \\
&= -\frac{1}{2\ln(5)}
\end{aligned}
$$

De esta forma se tiene que $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{-1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}dx$ converge a $\frac{-1}{2\ln(5)}$. Gracias al criterio de la integral es posible concluir que la serie

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{-1}{(2p-1)\ln^2(2p-1)}$$

es también convergente.

★

■ Ejemplo **65**
Determine si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}$ *es convergente o divergente.*

★ **Solución.** Utilizando el criterio de la integral. Considere la función asociada a la serie definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

Primero es necesario estudiar la monotonía de la función, para esto considere la primera derivada de f dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)^2 - \ln(x+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{\cancel{(x+1)}\left[1-2\ln(x+1)\right]}{\cancel{(x+1)}(x+1)^3} \\ &= \frac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

Note que, como e^x es una función creciente, entonces el siguiente razonamiento es válido:

$$\begin{aligned} 1-2\ln(x+1)<0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \ln(x+1) \iff e^{1/2} < e^{\ln(x+1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{1/2} < x+1 \iff x > e^{1/2}-1 \end{aligned}$$

de donde se puede concluir que $(1-2\ln(x+1)) < 0$ para todo $x \geq 1$. En caso de $(x+1)^3 > 0$ para todo $x > -1$. De donde finalmente se puede concluir que $f'(x) < 0$ para todo $x \in [1, \infty[$. Consecuentemente, f es decreciente y por lo tanto monótona para todo $x \in [1, \infty[$.

Ahora se procede a calcular la integral definida para luego analizar la convergencia de la integral impropia.

Aplicando la sustitución $w = \ln(x+1) \Longrightarrow dw = \dfrac{1}{x+1}dx$ se tiene que:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx = \int we^{-w}dw$$

Aplicando la regla de integración por partes a la integral anterior y regresando el cambio de variable se obtiene que:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx = \frac{-\ln(x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1} + C$$

Así:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-\ln(x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right|_1^A \\
&= \lim_{A\to\infty}\left[\left(\cancelto{0}{\frac{-\ln(A+1)}{A+1}} - \cancelto{0}{\frac{1}{A+1}}\right) - \left(\frac{-\ln(1+1)}{1+1} - \frac{1}{1+1}\right)\right] \\
&= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De donde se concluye que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$ converge a $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Finalmente se concluye que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}$ debe ser también convergente por el criterio de la integral.

★

Ejemplo 66

Utilice el ***criterio de la integral*** *para demostrar que la serie* $\sum\limits_{n=1}^\infty (n+1)^p$ *diverge para* $p > -1$.

★ **Solución.** Se debe demostrar que $(x+1)^p$ es monótona. Sea $f(x) = (x+1)^p$

$$f'(x) = p(x+1)^{p-1}$$

donde para $x > 1$ se tiene que f es creciente si $p > 0$ y decreciente si $p < 0$. En cualquier caso f es monótona. Por lo que se puede aplicar el criterio de la integral.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty (x+1)^p\,dx &= \lim_{B\to\infty}\int_1^B (x+1)^p\,dx = \lim_{B\to\infty}\left.\frac{(x+1)^{p+1}}{p+1}\right|_1^B \\
&= \lim_{B\to\infty}\left(\frac{(B+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{(1+1)^{p+1}}{p+1}\right) \\
&= \lim_{B\to\infty}\left(\frac{(B+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{2^{p+1}}{p+1}\right)
\end{aligned}$$

Si $p > -1$, entonces $p+1 > 0$ y se puede concluir que

$$\lim_{B\to\infty} (B+1)^{p+1} = \infty$$

por lo que la integral diverge, y en consecuencia la serie también lo hace, quedando así demostrado que la serie diverge si $p > -1$.

★

Ejercicios 13.

1. Use el criterio de la Integral para analizar la convergencia de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{e^{3n^2}}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^3 k}$

   c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1+\ln^2 m)}$

   d) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j\sqrt{\ln j}}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

   f) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\arctan(m)}{m^2+1}$

   g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

   h) $\displaystyle\sum_{m=6}^{\infty} \frac{\ln^2 m}{m}.$

   i) $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2+1}.$

   j) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}.$

2. Use el criterio de la integral para determinar que condiciones debe cumplir p para que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

   sea convergente y que condición debe cumplir para que sea divergente.

Teorema **13 (Criterio de las $p-$series)**
La serie definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$. Esta serie se conoce como $p-$serie o serie de Dirichlet.

❏ **Demostración.** Ejercicio 2 del bloque 13.

❐

Ejemplo 67

Analice la convergencia de las siguientes series:

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ converge pues es una $p-$serie con $p = 5 > 1$.
- $\sum_{n=5}^{\infty} \sqrt{n}$ diverge ya que
$$\sum_{n=5}^{\infty} \sqrt{n} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^{-1/2}}$$
la cual es una $p-$serie con $p = \frac{-1}{2} \leq 1$.
- $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^6}$, converge ya que
$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^6} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$
la cual es una $p-$serie con $p = 6 > 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge pues es una $p-$serie con $p = 1 \leq 1$. Esta serie es conocida como la serie armónica.

Ejemplo 68

Si se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ determine la suma de $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{5}{n^2 - 6n + 9}$

★ **Solución.** Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1$ de donde se desprende el siguiente análisis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} \frac{5}{n^2 - 6n + 9} &= 5\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} = 5\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= 5\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1\right) = 5\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1\right) \\
&= 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 5 = \frac{5\pi^2}{6} - 5
\end{aligned}$$

★

■ Ejemplo **69**
Analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+4n+4)^2}$.

★ **Solución.** Note que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+4n+4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

la cual corresponde a una $p-$serie convergente con $p = 4 > 1$. Por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+4n+4)^2}$ converge.

★

■ Ejemplo **70**
Determine la convergencia o divergencia de la serie definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{9n^2+18n+9}$$

★ **Solución.** Al factorizar el denominador de la sucesión asociada a la serie se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{9n^2+18n+9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{9\,(n^2+2n+1)} = \frac{5}{9}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{5}{9}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

La serie anterior es una p serie con $p = 2 > 1$, por lo que la serie converge.

★

2.2.6. Criterios de Comparación

Teorema **14 (I criterio de comparación / criterio de comparación directa)**
Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones numéricas. Considere además, que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que se satisface que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$. Entonces:

- *Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
- *Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

❏ **Demostración.** Se sabe que las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene el mismo comportamiento que las series $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ respectivamente, en virtud del teorema 8.

Considere S_k y T_k las $k-$ésimas sumas parciales de las series $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$, respectivamente. Como las series son de términos no negativos, las sucesiones $\{S_k\}_{k\geq 1}$ y $\{T_k\}_{k\geq 1}$ son crecientes.

- Si $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n = T$, entonces se tiene que:

  $$0 \leq S_k \leq T_k \leq T \qquad \forall k \geq 1$$

  De donde se tiene que la sucesión $\{S_k\}_{k\geq 1}$ es acotada por T, resultando que dicha sucesión es creciente y acotada superiormente. En virtud del teorema 6 se tiene que $\{S_k\}_{k\geq 1}$ converge.

- Si $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n = \infty$, entonces la sucesión $\{S_k\}_{k\geq 1}$ crece sin cota. Y como $T_k \geq S_k$ para todo k, entonces se tiene que $\{T_k\}_{k\geq 1}$ crece sin cota y por lo tanto $\sum\limits_{k=N}^{\infty} b_n$ diverge.

❐

Teorema **15 (II criterio de comparación / criterio de comparación en el límite)**

Suponga que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos, es decir $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$, L es **finito** positivo. Entonces ambas series convergen o ambas series divergen.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

❏ **Demostración.** Se omite (requiere la definición formal de límite de una sucesión).

❐

Comentarios sobre el teorema anterior:

1. Si el límite da una constante es porque el comportamiento de ambas series en el infinito es muy parecido.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, necesariamente $a_n \leq b_n$ para $n \geq N$ y como $\sum b_n$ converge, aplicando el criterio de comparación directa se tiene que $\sum a_n$ converge.
3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$, necesariamente $a_n \geq b_n$ para $n \geq N$ y como $\sum b_n$ diverge, aplicando el criterio de comparación directa se tiene que $\sum a_n$ diverge.

Definición **15**
Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos, se dice que b_n domina a a_n, o que a_n es dominado por b_n si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

b_n domina a a_n, se denotará por $a_n \ll b_n$.

Para hacer la escogencia de las series para la comparación se puede hacer uso del resultado que brinda el teorema 16, el cual establece un orden de dominancia entre expresiones en el infinito. Este orden se utilizará cuando las acotaciones no son directas.

Teorema **16**
Sea $p, a \in \mathbb{R}^+$ con $a > 1$, entonces para n suficientemente grande se tiene que:

$$k \ll \ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n \tag{2.10}$$

❏ **Demostración.** Esta prueba es un poco exhaustiva, puesto que se debe probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ para cualquier dos expresiones $f(n)$ y $g(n)$ en la cadena 2.10.

Los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n!},\ \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n!},\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n!},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$$

dan cero en virtud del teorema 5. Los restante pueden ser calculados en virtud del teorema 2.

❐

Un uso que se le dará al resultado expuesto en el teorema 16 consiste en un método de escogencia de series para la comparación, dicha escogencia se realiza despreciando expresiones que en el infinito no son significativas respecto a otra basados en la cadena 2.10.

Ejemplo 71

Las siguientes expresiones son equivalentes en el infinito y se denota con el símbolo $\backsim$.

- $\dfrac{n^{10}+\ln n}{\sqrt{5^n+62}} \backsim \dfrac{n^{10}}{\sqrt{5^n}}$. *Pues* $62 \ll 5^n$ *y* $\ln n \ll n^{10}$ *por lo que* 62 *y* $\ln n$ *son despreciables en el infinito comparadas con* 5^n *y* n^{10} *respectivamente.*

- $\dfrac{6^n+n!}{n^n+n^{525}} \backsim \dfrac{n!}{n^n}$. *Pues* $6^n \ll n!$ *y* $n^{525} \ll n^n$ *por lo que* 6^n *y* n^{525} *son despreciables en el infinito comparadas con* $n!$ *y* n^n *respectivamente.*

Ejemplo 72

Determine la convergencia de las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n^2\right)+1}{7^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$
5. $\displaystyle\sum_{h=2}^{\infty} \frac{\ln h}{h^5}$
6. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j+3^{1-j}}{5^j(j+7)}$
7. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2+\cos^2 k}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n+5\cos(n^2+1)}{1+3^{2n}}$

★ **Solución.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n^2\right)+1}{7^n}$, considere el análisis que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
-1 \leq \operatorname{sen}\left(n^2\right) \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leq \operatorname{sen}\left(n^2\right)+1 \leq 2 \\
&\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{\operatorname{sen}\left(n^2\right)+1}{7^n} \leq \frac{2}{7^n}
\end{aligned}$$

como la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n$$
converge ya que es una serie geométrica de $r=\frac{1}{7}<1$, entonces, por el criterio de comparación directa, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n^2\right)+1}{7^n}$ también converge.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{3^n-1}$. Note que:

$$\frac{4^n}{3^n-1} > \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ diverge ya que es una serie geométrica de $r = \dfrac{4}{3} > 1$, entonces, por el criterio de comparación directa, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$ también diverge.

Nota: Este ejemplo, se puede realizar utilizando comparación paso al límite, considerando que: $\frac{4^n}{3^n-1} \backsim \frac{4^n}{3^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$, considere el análisis que se presenta a continuación, dado que $1 \ll n^3$:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}} \backsim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n}$$

La comparación se realizará con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} = 1$$

como el límite es finito positivo y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ corresponde a una $p-$serie divergente o la serie armónica, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ también diverge.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$. Considere el análisis que se presenta a continuación, dado que $1 \ll 2n^2$, $1 \ll 3n^5$ y $2n \ll 3n^5$.

$$\frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1} \backsim \frac{2n^2}{3n^5} = \frac{2}{3n^3}$$

Por lo que se comprará con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^3}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}}{\dfrac{2}{3n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^5-3n^3}{6n^5+4n+2} = 1$$

como el límite es finito positivo y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3n^3} = \dfrac{2}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ converge por el criterio de las $p-$series con $p = 3 > 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$ también converge por el criterio de comparación paso al límite.

5. $\sum\limits_{h=2}^{\infty} \dfrac{\ln h}{h^5}$. Como $\ln h \ll h$, entonces:

$$\frac{\ln h}{h^5} < \frac{h}{h^5} = \frac{1}{h^4}$$

La serie $\sum\limits_{h=2}^{\infty} \dfrac{1}{h^4}$ es una $p-$serie convergente, entonces por el criterio de comparación directa la serie $\sum\limits_{h=2}^{\infty} \dfrac{\ln h}{h^5}$ también converge.

6. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j+3^{1-j}}{5^j(j+7)}$. Primero note que:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{3^{1-j}}{j} = \lim_{j\to\infty} \frac{3}{3^j j} = 0$$

Así se tiene que $3^{1-j} \ll j$, además $7 \ll j$ de donde se desprende el siguiente análisis:

$$\frac{j+3^{1-j}}{5^j\,(j+7)} \sim \frac{j}{5^j j} = \frac{1}{5^j} = \left(\frac{1}{5}\right)^j$$

De este modo, se comparará con la serie $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^j$ que corresponde a una serie geométrica convergente, pues $|r| = \frac{1}{5} < 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \frac{\dfrac{3^{1-j}}{5^j\,(j+7)}}{\dfrac{1}{5^j}} &= \lim_{j\to\infty} \frac{5^j\left(j+3^{1-j}\right)}{5^j\,(j+7)} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{j+3^{1-j}}{j+7} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{j\left(1+\frac{3^{1-j}}{j}\right)}{j\left(1+\frac{7}{j}\right)} = 1
\end{aligned}$$

Ahora como el límite da un número real finito positivo y la serie $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^j$ converge, entonces la serie $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \dfrac{j+3^{1-j}}{5^j\,(j+7)}$ converge por criterio de comparación paso al límite.

7. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2+\cos^2 k}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$. Considere el siguiente análisis:

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \cos^2 k \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad 2 \leq 2+\cos^2 k \ \leq 3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}} \leq \frac{2+\cos^2 k}{\sqrt[3]{k^2-2k}} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{k^2-2k}} \tag{2.11}$$

Considere la serie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$ la cual se debe estudiar su convergencia o divergencia, para lo cual se empleara el criterio de comparación paso al límite. Como $2k \ll k^2$, entonces:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{k^2}}$$

comparando la serie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$ con $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k^2}}$ usando paso al límite, se tiene el cálculo del límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}}}{\dfrac{2}{\sqrt[3]{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\sqrt[3]{k^2}}{2\sqrt[3]{k^2-2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\sqrt[3]{k^2}}{2\sqrt[3]{k^2}\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{k}}} = 1$$

como el límite es finito positivo, y la serie $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k^2}} = 2\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ es divergente pues es una $p-$serie con $p = 2/3 < 1$. Entonces la serie por lo que $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$ diverge por criterio de comparación paso al límite.

Finalmente, regresando a la desigualdad 2.11 y del hecho que la serie $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$ es divergente, entonces se concluye que $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2+\cos^2 k}{\sqrt[3]{k^2-2k}}$ diverge por criterio de comparación directa.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 5\cos\left(n^2+1\right)}{1+3^{2n}}$. Considere el siguiente análisis:

$$\begin{aligned}
& -1 \leq \cos(n^2+1) \leq 1 \\
\Longrightarrow \quad & -5 \leq 5\cos(n^2+1) \leq 5 \\
\Longrightarrow \quad & -5+7^n \leq 7^n + 5\cos(n^2+1) \leq 5+7^n \\
\Longrightarrow \quad & 0 < \frac{-5+7^n}{1+3^{2n}} \leq \frac{7^n+5\cos(n^2+1)}{1+3^{2n}} \leq \frac{5+7^n}{1+3^{2n}} \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

lo cual es válido para todo $n \geq 2$.

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+7^n}{1+3^{2n}}$ a la cual se le debe analizar su convergencia o divergencia, lo que se abordará con el criterio de comparación paso al límite. Dado que $5 \ll 7^n$ y $1 \ll 3^{2n} = 9^n$, entonces:

$$\frac{5+7^n}{1+3^{2n}} \sim \frac{7^n}{3^{2n}} = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$ corresponde a una serie geométrica convergente con $|r| = \frac{7}{9} < 1$. Y calculando el límite se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5+7^n}{1+9^n}}{\dfrac{7^n}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n(5+7^n)}{7^n(1+9^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n 7^n \left(\dfrac{5}{7^n}+1\right)}{7^n 9^n \left(\dfrac{1}{9^n}+1\right)} = 1$$

Como el límite es finito positivo y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$ es converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+7^n}{1+3^{2n}}$ converge por criterio de comparación paso al límite.

Finalmente, regresando a la desigualdad 2.12 y del hecho que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+7^n}{1+3^{2n}}$ converge, se puede concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 5\cos\left(n^2+1\right)}{1+3^{2n}}$$

es convergente por el criterio de comparación directa.

★

EJEMPLO 73
Determine si la serie siguiente es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \log n + 5^n}$$

★ **Solución.** Note que:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \log n + 5^n} \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Además, se puede observar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ es geométrica convergente.

Luego, utilizando el criterio de comparación en el límite se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n + 3^n}{n^2 + \log n + 5^n}}{\dfrac{3^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(2^n + 3^n\right)}{\left(n^2 + \log n + 5^n\right)3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5^n \cdot 3^n}\left(\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\,0} + 1\right)}{\left(\cancel{\frac{n^2}{5^n}}^{\,0} + \cancel{\frac{\log n}{5^n}}^{\,0} + 1\right)\cancel{3^n \cdot 5^n}} = 1$$

Es decir, ambas series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \log n + 5^n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ poseen el mismo comportamiento. Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \log n + 5^n}$$

debe ser convergente por el criterio de comparación paso al límite.

★

EJEMPLO 74
Considere las sucesiones de términos estrictamente positivos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tal que $a_n^2 \cdot b_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analice la convergencia de la serie $\sum a_n$, suponiendo que la serie $\sum \dfrac{1}{\sqrt{b_n}}$ es convergente.

★ **Solución.** Note que

$$a_n^2 \cdot b_n \leq 1 \iff a_n^2 \leq \frac{1}{b_n} \iff a_n \leq \frac{1}{\sqrt{b_n}}$$

de este modo se tiene que

$$0 < a_n \leq \frac{1}{\sqrt{b_n}}$$

Por otro lado se tiene que $\sum \frac{1}{\sqrt{b_n}}$ es una serie convergente, de donde se deduce que $\sum a_n$ también converge por criterio de comparación directa.

★

Ejercicios 14.

Determine si las siguientes series convergen o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen}(k)}{2^{2k}+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-\cos(2k)}{2k+5}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{n}+1}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^{-n}}{5^n(n+9)}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n+e^{-n}}$
6. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{10m+5}{m3^m}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}$
10. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m+1}{m^3+m}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\sqrt{k}-173}{k^2+\cos k}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{4n^2+5}$
14. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{7^j+(-1)^j}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$
17. $\displaystyle\sum_{p=3}^{\infty} \frac{5p+3\cos p}{p^3+2}$
18. $\displaystyle\sum_{w=1}^{\infty} \frac{w^2-\left(\frac{1}{3}\right)^w}{7^w(w^2+4)}$
19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n^4\right)+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^4+1}}$

2.2.7. Criterio de la razón y criterio de la raíz

TEOREMA **17 (Criterio de la razón)**
Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ *ó* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

❏ **Demostración.** Se omite. Requiere la definición formal de convergencia de una sucesión.

❒

TEOREMA **18 (Criterio de la raíz)**
Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ *ó* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

❏ **Demostración.** Se omite. Requiere la definición formal de convergencia de una sucesión.

❒

Resultados relevantes
Los siguientes dos límites serán considerados directos durante la aplicación del criterio de la raíz.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1$, con k constante positiva.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

Los resultados expuestos anteriormente son fácilmente verificables.

- Si k es una constante positiva, entonces

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[n]{k} = \lim_{n\to\infty} k^{1/n} = 1$$

pues la forma del límite $f : k^0$ la cual no es indeterminada y tiende a 1.

- Para el caso $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}$ considere la función f definida por $f(x) = x^{1/x}$. Aplicando el tercer caso para la regla de H'Lôpital se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x^{1/x})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x}{x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

El criterio de la razón es muy útil en caso que a_n tenga factoriales, productos o cocientes, mientras que el criterio de la raíz se utiliza cuando se tiene potencias de exponente n.

Ejemplo 75

Determine si las siguientes series convergen o divergen:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n-1} - n^4}{n! + 3^n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n n}{n^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^{\frac{-5n}{3}}$
5. $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}$
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$
7. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{2m}{5m+1}\right)^{2m-3}$

★ **Solución.**

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$.

   Se utiliza directamente el criterio de la razón como sigue:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+2}\,(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\cdot(2\,(n+1)+1)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}} \right| \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\cdot(2n+3)}}{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!\cdot(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1))}{n!\cdot(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\,(2n+3))} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+3)} = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

por lo que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\, n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ converge por criterio de la razón o cociente..

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} - n^4}{n! + 3^n}$.

   Se empleará el criterio de comparación directa y criterio de la razón. Primero es necesario justificar que la serie es de términos positivos, para ésto note que $n^4 \ll 4^{n-1}$ de donde se puede concluir que $4^{n-1} - n^4 > 0$ para n suficientemente grande (no es necesario precisarlo). De este modo, para n suficientemente grande se tiene que

$$0 < \frac{4^{n-1} - n^4}{n! + 3^n} \leq \frac{4^{n-1}}{n!}$$

   Ahora se empleará el criterio de la razón para analizar la convergencia o divergencia de la series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n-1}}{n!}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{4^n}{(n+1)!}}{\dfrac{4^{n-1}}{n!}} \right| &= \lim_{n \to \infty} \frac{4^n \cdot n!}{(n+1)! \cdot 4^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 4^n \cdot 4^{-1}} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{4}{(n+1)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

   por lo que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n-1}}{n!}$ es convergente. Finalmente, por el criterio de comparación directa, se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n-1} - n^4}{n! + 3^n}$ también converge.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n n}{n^n}$.

   Note que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

   aplicando el criterio de la raíz, se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 < 1$$

   pues $\ln n \ll n$. Por lo que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n n}{n^n}$ converge por criterio de la raíz $n-$ésima.

4. Para la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^{\frac{-5n}{3}}$, considere lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^{\frac{-5n}{3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^{\frac{5n}{3}}}$$

aplicando el criterio de la raíz, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^{\frac{5n}{3}}}\right|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{3}}}{(3n+1)^{\frac{5}{3}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{5}{3}}\cdot\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{3^5}}\approx 0.160\,25<1
\end{aligned}$$

por lo que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^{\frac{-5n}{3}}$ converge por criterio de la raíz $n-$ésima.

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}$

Aplicando el criterio de la razón se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(k+1+3)!\cdot 2^{2(k+1)+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)\,(3\,(k+1)+2)}}{\dfrac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}}\right|\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(k+4)!\cdot 2^{2k+3}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)\,(3k+5)}}{\dfrac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+4)\,(k+3)!\cdot 2^{2k+3}2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)\,(3k+5)}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+4)\cdot 2^2}{(3k+5)}=\frac{4}{3}>1
\end{aligned}$$

Por el criterio de la razón la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+3)!\cdot 2^{2k+1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}$ es divergente.

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$.

   Aplicando el criterio de la raíz $n$ésima se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{27}{125} < 1$$

   De donde se concluye que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+3k+1}{5+5k^2}\right)^{3k}$ es una serie convergente por el criterio de la raíz $n-$ésima.

7. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2m-3}$.

   Aplicando directamente el criterio de la raíz $m-$ésima se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left|\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2m-3}\right|} &= \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2m}\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{-3}} \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2}\sqrt[m]{\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{-3}}\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{\frac{-3}{m}} \\
&= \left(\frac{2}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{0} \\
&= \frac{4}{25} < 1
\end{aligned}$$

   por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2m}{5m+1}\right)^{2m-3}$ es una serie convergente según el criterio de la raíz.

★

■ Ejemplo **76**

Si p es una constante real positiva, determine condiciones para p de tal forma que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p^n}{n^3\cdot 5^{n+1}}$ converja.

★ **Solución.** Aplicando el criterio de la razón, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{p^{n+1}}{(n+1)^3\cdot 5^{(n+1)+1}}}{\dfrac{p^n}{n^3\cdot 5^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\cdot n^3\cdot p^{n+1}}{(n+1)^3\cdot p^n\cdot 5^{n+2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3\cdot p}{(n+1)^3\cdot 5}\right| = \left|\frac{p}{5}\right| = \frac{p}{5}
\end{aligned}
$$

Según el criterio de la razón, para que la serie converja el límite anterior debe ser menor que la unidad y diverge si es mayor que la unidad. De este modo se tiene el siguiente análisis:

- Converge:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Longrightarrow \frac{p}{5} < 1 \Longrightarrow p < 5$$

- Diverge:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Longrightarrow \frac{p}{5} > 1 \Longrightarrow p > 5$$

Note que para $p = 5$ el criterio no decide, por lo que se debe analizar por separado, en ese caso se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n}{n^3\cdot 5^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{5n^3} = \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

Donde esta última serie converge pues es una $p-$serie exponente 3 mayor que 1.

Finalmente, para que la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{p^n}{n^3\cdot 5^{n+1}}$, converja, debe cumplirse que $p \leq 5$ y diverge en caso contrario.

★

Ejemplo 77

Determine si la siguiente serie converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

★ **Solución.** Por criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\cancelto{1}{\sqrt[n]{n}} - 1\right| = 0$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = 0 < 1$, lo que implica que la serie dada es convergente por el criterio de la raíz $n-$ésima.

★

■ Ejemplo **78**
Considere la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5a}{3}\right)^k$$

Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales se pueda garantizar la convergencia de la serie.

★ **Solución.** Se aplicara el criterio de la raíz a la serie.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|k\left(\frac{5a}{3}\right)^k\right|} = \lim_{k\to\infty} \cancelto{1}{\sqrt[k]{k}} \cdot \left|\frac{5a}{3}\right| = \left|\frac{5a}{3}\right|$$

Según el criterio de la raíz, la serie converge si dicho límite es menor que 1 y diverge si es mayor que 1. Mientras en caso de dar 1 no decide. Considere el siguiente análisis:

$$\left|\frac{5a}{3}\right| < 1 \iff -1 < \frac{5a}{3} < 1 \iff \frac{-3}{5} < a < \frac{3}{5}$$

De modo que para $a \in \left]\frac{-3}{5}, \frac{3}{5}\right[$ la serie converge. En caso que $a = \pm\dfrac{3}{5}$ el valor del límite es 1, por lo que dicho criterio no funciona y el análisis debe hacerse de otra forma.

- Caso $a = \dfrac{-3}{5}$.

  $$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5a}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(-1)^k$$

  la cual diverge por criterio de divergencia, pues el $\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^k k$ no existe.

- Caso $a = \dfrac{3}{5}$.

  $$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5a}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k$$

  la cual diverge por criterio de divergencia, pues el $\lim\limits_{k\to\infty} k = \infty$.

Finalmente, es posible concluir que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\dfrac{5a}{3}\right)^k$ converge para valores de $a \in \left]\frac{-3}{5}, \frac{3}{5}\right[$ y diverge en cualquier otro caso.

★

Ejercicios 15.

1. Considere la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{a^n \cdot n!}$$

   Determine todos aquellos valores de a para los cuales el criterio de la razón garantiza la convergencia de la serie.

2. Determine si las siguientes series, que se dan a continuación, convergen o divergen.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\arctan(k))^k}$

   b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4^m (m+2)!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3m+2)}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!3^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{10} \cdot 5^n}$

   f) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{\ln^m (m+1)}$

   g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{7k+3}\right)^{2k+1}$

   h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 \cdots (5n+3)}{2^n (n+1)!}$

   i) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-3)^{m+1}(m-2)!}{6 \cdot 11 \cdot 16 \cdots (5m+1)}$

3. Estudie el carácter de la serie, que se muestra a continuación, en función del parámetro k

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

   utilizando comparación en el límite con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot \frac{1}{n}$.

4. Estudie el comportamiento de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+x) \cdot 5^n} \qquad x > 0$$

   en función de x.

5. Si se sabe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$, aplique el criterio de la raíz para demostrar que la serie siguiente es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n+1}{n}\right]^{-n}$$

continuación....

6. Determine para que valores de $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la serie:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^a}{b^j}$$

converge. Donde a es una constante real cualquiera.

7. Determine para que valores de $b \in \mathbb{R}$ la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$$

converge.

2.2.8. Series alternadas y convergencia absoluta

Definición **16**

Dada un serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, se dice que es una serie alternada, si y solo si,* $a_n = (-1)^n b_n$*, donde* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión que siempre tiene el mismo signo. Es decir,* $b_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *ó* $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

En síntesis una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ *es alternada si* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión cuyos términos siempre tienen el mismo signo.*

Ejemplo **79**

Son series alternadas:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \quad \rightarrow$ *serie armónica alternada*
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$

Teorema **19 (Criterio de las series alternadas)**

Sea $\sum\limits_{n=p}^{\infty} (-1)^n b_n$*, una serie alternada, tal que* $b_n > 0, \forall n \geq p$*. Si la sucesión* $\{b_n\}_{n\geq p}$ *cumple simultáneamente las condiciones:*

- $\{b_n\}_{n\geq p}$ *es decreciente.*

- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces, la serie $\sum_{n=p}^{\infty}(-1)^n b_n$ *es convergente.*

❏ **Demostración.** Dado que cualquier serie se puede redefinir para que inicie en 1, se realizará la demostración suponiendo $p = 1$, ésto para minimizar los cálculos. Note que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$, de este modo bastará demostrar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$.

La $k-$ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ está dada por:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{k-2} b_{k-1} + (-1)^{k-1} b_k$$

de este modo se tiene que:

$$\begin{aligned} S_{2k} &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{2k-2} b_{2k-1} + (-1)^{2k-1} b_{2k} \\ &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2k-1} - b_{2k} \\ &= b_1 - [(b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \cdots + (b_{2k-2} - b_{2k-1}) + b_{2k}] \\ &\leq b_1 \end{aligned}$$

pues, como la sucesión es decreciente se tiene que $b_n - b_{n+1} \geq 0$. Por lo que la sucesión $\{S_{2k}\}$ es acotada.

Por otro lado,

$$S_{2(k+1)} = S_{2k+2} = S_{2k} + (b_{2k+1} - b_{2k+2}) \geq S_{2k}$$

De donde se tiene que la sucesión $\{S_{2k}\}$ es creciente. Así, en virtud del teorema 6 se tiene que la sucesión $\{S_{2k}\}$ es convergente por ser creciente y acotada superiormente. Sea S es el valor al cual converge la sucesión $\{S_{2k}\}$.

Por otro lado, note que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2k} + b_{2k+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2k} + \lim_{n\to\infty} b_{2k+1} = S$$

Como la subsucesión de los términos pares de $\{S_k\}$ converge a S y la subsucesión de los términos impares de $\{S_k\}$ converge también a S, entonces se puede concluir que la sucesión $\{S_k\}$ converge a S.

Finalmente, por la definición de convergencia de una serie, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ converge a S. Finalmente se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ es convergente.

❐

Nota importante
En la primera condición del teorema 19, no es necesario que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea siempre decreciente, basta con que exista un $N \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{b_n\}_{n=N}^{\infty}$ sea decreciente. Este detalle se justifica en virtud del teorema 8.

■ Ejemplo **80**
Determine la convergencia de cada una de las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(2n)}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{4n^2-3}\right)$

★ **Solución.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-1)^{n-1}(2)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}\right]$

   - Verifique que $a_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$ es decreciente:

   $$a_n \geq a_{n+1} \Longleftrightarrow \frac{n}{2^{n-1}} \geq \frac{n+1}{2^n} \Longleftrightarrow \frac{2n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^n} \Longleftrightarrow n \geq 1$$

   ésta última desigualdad es verdadera, por lo que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = 0$. Pues $n \ll 2^{n-1}$. Utilizando el criterio de las series alternadas se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}}$ converge.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\ln(2n)}$
   Verifique que $a_n = \dfrac{n}{\ln(2n)}$ no satisface que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(2n)} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

   utilizando el criterio de la divergencia se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln(2n)}$ diverge.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n+2}{4n^2-3}\right)$

- Se verifica que $a_n = \dfrac{3n+2}{4n^2-3}$ es decreciente, para ello se define una función f de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x^2-3} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{12x^2+16x+9}{(4x^2-3)^2}$$

  Se tiene que la derivada de f es negativa para toda $x \geq 1$, por lo que se tiene que f es una función decreciente y se cumple que la sucesión $\left\{\dfrac{3n+2}{4n^2-3}\right\}$ es también decreciente.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{4n^2-3} = 0.$

  Por lo tanto por el criterio de las series alternadas se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n+2}{4n^2-3}\right)$ es convergente.

★

Ejemplo 81

Demuestre si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{2k^2+1}$ *es una serie convergente.*

★ **Solución.** Se debe probar que $b_k = \dfrac{k}{2k^2+1}$ es una sucesión decreciente y que converge a cero.

- $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{2k^2+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{k(2k+1/k)} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k+1/k} = 0$

  Por lo que $\{b_k\}$ es una sucesión convergente a cero.

- Se deber probar que $\{b_k\}$ es decreciente. Considere f una función continua y derivable tal que $f(k) = b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2+1}{(2x^2+1)^2}$$

  de donde se tiene que para todo $x \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right[$ se cumple $f'(x) < 0$. Así, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente.

De lo anterior y en virtud del teorema 19 es posible concluir que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{2k^2+1}$ es convergente por el criterio de las series alternadas.

★

Ejercicios 16.

Determine cuáles de las siguientes series alternadas son convergentes y cuáles no lo son:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{e^{2n}+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+2n-1}{n^2+5n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n+1}$

Aproximación de la suma de una serie alternada convergente

Si bien el criterio de las series alternadas no indica el valor de la suma en caso de existir convergencia, existe un resultado que permite aproximar el valor de la suma total con una suma parcial de manera que dicha aproximación sea tan precisa como se quiera. Es importante, para este tema, conocer el concepto error absoluto que se comete cuando se aproxima un valor real, este concepto se presenta a continuación.

Definición **17**
Sea $\overline{x}$ una aproximación del valor real x, se define el error absoluto cometido por $\overline{x}$ al aproximar x, y se denota $E_{\overline{x}}$, como:

$$E_{\overline{x}} = |x - \overline{x}|$$

De esta manera, el error cometido por una aproximación corresponde a la distancia absoluta que existe entre la aproximación y el valor real. Si el error $E_{\overline{x}}$ es pequeño, entonces se dice que $\overline{x}$ es una buena aproximación de x.

Teorema **20 (Cota para el error en una serie alternada)**

Sea $\sum\limits_{n=p}^{\infty}(-1)^n b_n$, una serie alternada convergente a S, donde la sucesión $\{b_n\}_{n\geq p}$ es decreciente y convergente a cero. Sea $S_k = \sum\limits_{n=p}^{k+p-1}(-1)^n b_n$ la $k-$ésima suma parcial. Entonces, el error que se comete al aproximar el valor de S con S_k satisface que:

$$|S - S_k| \leq b_{k+p}$$

❏ **Demostración.** Se omite, sin embargo la misma se basa en un procedimiento análogo al empleado en la demostración del teorema 19.

❐

Este teorema indica que si se toma una suma parcial como valor aproximado de la suma total de la serie, el error que se comete es menor al valor absoluto del primer sumando despreciado en el cálculo de la $k-$ésima suma parcial. O dicho de otra manera, el error que se comete al emplear S_k como aproximación de S es siempre menor al valor absoluto del término $k+1$ de la serie.

■ Ejemplo **82**

Considere la serie alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3+1}$$

Verifique que la serie anterior es convergente y determine una aproximación de la suma total con un error absoluto menor que 10^{-3}.

★ **Solución.** Primero se debe verificar que $\{b_k\}$ satisface las hipótesis del teorema 20. Es decir, sede probar que es decreciente y que tiende a cero.

- $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k^3+1} = 0$
- Ahora, note que:

$$\begin{aligned} b_k \geq b_{k+1} \quad &\iff \quad \frac{1}{k^3+1} \geq \frac{1}{(k+1)^3+1} \\ &\iff \quad (k+1)^3+1 \geq k^3+1 \\ &\iff \quad k^3+3k^2+3k+2 \geq k^3+1 \\ &\iff \quad 3k^2+3k+1 \geq 0 \end{aligned}$$

  donde, esto último es cierto para todo $k \geq 1$, de este modo se tiene que $\{b_k\}$ es decreciente.

De donde se concluye que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^3+1}$ es convergente por el criterio de las series alternadas. Además, la serie cumple las hipótesis del teorema 20, en consecuencia debe darse que:

$$|S - S_m| \leq b_{m+1} = \frac{1}{(m+1)^3+1}$$

por lo que bastaría determinar un valor para m tal que:

$$\frac{1}{(m+1)^3+1} \leq 10^{-3}$$

por inspección se tiene que $m = 9$ cumple.

Así , $S_9 = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^k}{k^3+1} = -0.4148742942...$ es la aproximación buscada.

★

EJEMPLO 83
Considere la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n!}\right)$$

1. *Demuestre que es convergente.*

2. *Aproxime el valor de la suma total con S_6.*

3. *Encuentre, haciendo uso de la aproximación determinada en el paso anterior y el teorema 20, el menor intervalo en donde se pueda garantizar que esté contenido el valor exacto de la suma.*

★ **Solución.**

1. Se demostrará que la serie es convergente haciendo uso del criterio de las series alternadas. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = \dfrac{1}{n!}$, note que esta sucesión satisface las siguientes dos propiedades:

   - Es decreciente, pues:

   $$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{(n+1)!} \iff \frac{(n+1)!}{n!} \geq 1 \iff n+1 \geq 1$$

   - Converge a cero:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

   Ésto completa las hipótesis del criterio de las series alternadas, con lo cual queda demostrado que la serie converge, además la serie cumple las hipótesis del teorema 20.

2. Considere S_6 como aproximación del valor de la suma total S, donde:

   $$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144} = 0.6319\overline{44}.$$

3. Ahora, haciendo uso del teorema 20 se tiene que el error cometido por S_6 está

dado por $a_7 = \dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{5040}$, así:

$$\begin{aligned}
|S - S_6| \leq a_7 &\iff \left|S - \frac{91}{144}\right| \leq \frac{1}{5040} \\
&\iff \frac{-1}{5040} \leq S - \frac{91}{144} \leq \frac{1}{5040} \\
&\iff \frac{199}{315} \leq S \leq \frac{177}{280}
\end{aligned}$$

De esta manera el menor intervalo que garantiza contener a S y que fue calculado haciendo uso de S_6 corresponde a:

$$\left[\frac{199}{315}, \frac{177}{280}\right]$$

★

Ejemplo 84

Si se sabe que serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ *es convergente, determine el menor valor para* N *de manera que* S_N *aproxime el valor de la suma de esta serie con un error* E_N *tal que* $E_N \leq 0.0001$

★ **Solución.** Aunque como hipótesis se tenga la convergencia de la serie alternada, es importante comprobar que la misma cumple las hipótesis del teorema 20 para poder, de esta manera, determinar una cota del error absoluto cometido por la aproximación.

Sea $b_n = \dfrac{1}{(2n)!}$, note que esta sucesión es:

- converge a cero pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)!} = 0$$

- decreciente pues:

$$\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} &\iff \frac{1}{(2n)!} \geq \frac{1}{(2n+2)!} \\
&\iff (2n+2)(2n+1)(2n)! \geq (2n)! \\
&\iff (2n+2)(2n+1) \geq 1
\end{aligned}$$

como esta última desigualdad es verdadera para todo $n \geq 0$, entonces se concluye que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente.

De este modo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ satisface las hipótesis del teorema 20, en virtud de este teorema, se tiene que $|E_N| \leq a_n$, donde $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$, por lo que basta determinar un valor de n para el cual se satisfaga la desigualdad:

$$\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{1000}$$

misma que se cumple para $n \geq 4$. Así basta tomar $N = 4$. Finalmente, la aproximación buscada corresponde a:

$$S_4 = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \frac{389}{720} \approx 0.5402777778$$

★

EJEMPLO 85

Considere la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{(n+1)^n}$$

Si se sabe que la serie anterior es convergente:

1. *Determine la menor cantidad de términos que se deben sumar para aproximar el valor de la suma infinita con un error absoluto menor que* 10^{-3}.

2. *Calcule una aproximación del valor de la suma con un error absoluto menor que* 10^{-3}.

★ **Solución.**

1. Es necesario verificar las hipótesis del teorema 20, para lo cual hay que verificar que la sucesión cuyo $n-$ésimo término es $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n}$ es decreciente y tiene a cero.

   - Decreciente:

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{n!}{(n+1)^n} \geq \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{n!}{(n+1)^n} \geq \frac{(n+1)n!}{(n+2)^{n+1}} \\ &\Longleftrightarrow \quad (n+2)^{n+1} \geq (n+1)(n+1)^n \\ &\Longleftrightarrow \quad (n+2)^{n+1} \geq (n+1)^{n+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad n+2 \geq n+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 \geq 1 \end{aligned}$$

   donde esta última desigualdad es cierta y por lo tanto $a_n \geq a_{n+1}$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde se concluye que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente.

- Tiende a cero:

  Como $n! \ll n^n < (n+1)^n$, entonces claramente se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} = 0$$

Por lo que se satisfacen las hipótesis del teorema 20, de este modo se tiene que:

$$|S - S_k| \leq b_{k+0} = b_k$$

por lo que se debe determinar un valor de k para el cual $b_k \leq 10^{-3}$

$$b_k \leq 10^{-3} \iff \frac{k!}{(k+1)^k} \leq 10^{-3}$$

lo cual es cierta para $k \geq 8$ de donde que tiene que se deben sumar un mínimo de 8 térimos de la serie para obtener la aproximación solicitada.

2. Para determinar la aproximación buscada es necesario sumar los primeros 8 términos de la serie, de este modo:

$$S_8 = \sum_{n=0}^{7} \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{(n+1)^n} = -0.655\,156\,763\,2$$

es la aproximación buscada.

★

Ejercicios 17.

1. Cada una de las series que se presentan a continuación son convergentes por el criterio de las series alternadas. Estime el número de términos que se deben sumar para que la suma parcial aproxime a la suma real con un error absoluto menor que la cota presentada en cada caso.

   a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{(n-2)^2-1}$ cota 0.001

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5+n}$ cota 0.00001

   c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n+1}$ cota 10^{-7}

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{-n-1}}{(n+4)^2}$ cota 10^{-7}

2. Determine si las siguientes series que se dan a continuación convergen o divergen.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\ \ln\ n}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(3k-1)}{k^2}$

3. Aproxime la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ con un error menor que 0.0001

4. Considere la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$. Determine el menor número de términos necesarios que se deben tomar para aproximar la suma de la serie con un error menor a 0.01.

5. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^n}{n!}$ una serie convergente. Determine $N \in \mathbb{N}$ tal que S_N aproxime la suma de esa serie con un error menor de 10^{-3}.

6. Sabiendo que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5^{2k+1}}{(2k+1)!}$ converge a S, determine el menor valor posible de N, para que se cumpla que S_N aproxima a S con un error E, tal que $|E| < 0.001$.

Definición **18 (convergencia absoluta)**
Una serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *se llama* ***absolutamente convergente*** *si la serie* $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

Definición **19 (convergencia condicional)**
Una serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *se llama* ***condicionalmente convergente*** *si la serie es convergente, pero no es absolutamente convergente.*

Teorema **21**
Si una serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

Ejemplo **86**
Determine si las siguientes series convergen, en caso de serlo, determine si lo hace absolutamente o condicionalmente.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.
3. $\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}\cdot h}{2h^2+8}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k-1}}$.

★ **Solución.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}$.

   Note que dicha serie no es alternada, pues existen términos consecutivos con el mismo signo. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

   es convergente ya que es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}$ converge absolutamente y por lo tanto converge.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

   Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

   Note que $\ln(n+1) \ll n+1$ lo que significa que existe $N \in \mathbb{N}$ para el cual se cumple que:

$$\ln(n+1) < n+1 \quad \forall n \geq N.$$

   De donde se concluye que:

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \forall n \geq N.$$

Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ la cual diverge pues es la serie armónica, entonces por el criterio de comparación directa se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ también es divergente.

Por otro lado, como la serie es alternada, aplicamos el criterio de las series alternadas con $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente pues:

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{\ln(n+2)} \iff \ln(n+2) \geq \ln(n+1)$$

lo cual es cierto pues ln es una función creciente.

Y se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$$

por lo que por el criterio de las series alternadas se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ converge.

Finalmente, se puede concluir que la serie anterior convergen condicionalmente.

3. $\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1} \cdot h}{2h^2+8}$.

Considere la función f continua tal que: $f(h) = \dfrac{h}{2h^2+8}$. Note que:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$$

	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
$-1/2$	$-$	$-$	$-$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x^2+4)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

De donde queda claro que f' es negativa $]2,\infty[$ por lo que f sería decreciente. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+8} = 0$$

así, por el criterio de las series alternadas se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\, n}{2n^2+8}$ converge.

Ahora se debe analizar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\,n}{2n^2+8}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+8}$$

Note que dicha serie es de términos positivos, y como $8 \ll n^2$, entonces:

$$\frac{n}{2n^2+8} \sim \frac{1}{n}$$

donde aplicando comparación paso al límite se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{2n^2+8}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+8} = \frac{1}{2}$$

de donde se tiene que las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n^2+8}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ tiene el mismo comportamiento. Ahora, como la serie armónica diverge, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n^2+8}$ también diverge por criterio de comparación paso al límite.

Finalmente, se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\,n}{2n^2+8}$ converge condicionalmente.

4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k-1}}$.

   Primero se analizará la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k-1}}\right| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k-1}}$$

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}}$$

y como $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ diverge pues es una $p-$serie con $p=\dfrac{1}{3}<1$, se concluye que $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k-1}}\right|$ es una serie divergente por criterio de comparación directa.

Ahora, se tiene que analizar la convergencia de la serie alternada original. Note que:

- $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[3]{k-1}} = 0.$
- $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{k-1}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt[3]{k}} \iff 2\sqrt[3]{k} \geq 2\sqrt[3]{k-1} \iff \sqrt[3]{k} \geq \sqrt[3]{k-1}$ lo cual es cierto para todo $k \geq 1$. De donde $\left\{\dfrac{1}{2\sqrt[3]{k-1}}\right\}$ es decreciente.

Así, se tiene que la serie es convergente por criterio de series alternadas. Finalmente se tiene que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k-1}}$$

converge condicionalmente.

★

Ejercicios 18.

1. Determine si las siguientes series son, absolutamente convergentes, condicionalmete convergentes o divergentes. Justifique su respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n \cdot \arctan(n)}{n^2+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{n!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{n^{2n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(\ln n)}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} \cdot 3^n}{(2n-1)^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(5n-2)}$

j) $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos(h)}{4^h}.$

k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{3+k!}$

l) $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{m+1}{m^2-2}$

2.3. Series de potencias

Definición **20 (Serie de potencias)**
Sea x una variable real, y sea c una constante. La serie dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots \tag{2.13}$$

se le conoce como una serie de potencias en variable x y centrada en c. Donde, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión real y son llamados los ***coeficientes*** *de la serie.*

Notación
Para poder hacer uso siempre de la misma notación, en adelante se considerará que $(x-c)^0 = 1$, aún cuando $x = c$.

Si se considera la serie dada en la ecuación 2.13, se puede definir una función f con criterio:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots$$

El dominio de dicha función es el conjunto de los x para los cuales la serie converge. El primer valor donde dicha serie converge es $x = c$, dado que:

$$f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c-c)^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \cdots = a_0$$

De donde que tiene que c pertenece al dominio de la función.

Convergencia de una serie de potencias

Teorema **22**
Para una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *existen sólamente tres posibilidades:*

1. *La serie converge absolutamente solo cuando $x = c$ y diverge para $x \neq c$.*
2. *La serie converge absolutamente para toda x real.*
3. *Existe $r > 0$ para el cual se cumple que la serie converge absolutamente para toda x tal que $|x-c| < r$ y divergente para toda x tal que $|x-c| > r$.*

❑ **Demostración.** La demostración de este resultado se deduce del método empleado para determinar el radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias, mismo que se abordará más adelante en esta misma sección.

❒

El valor de r más grande que cumpla la condición 3 del teorema 22 se le llamará **radio de convergencia** de la serie. Además, siempre es posible reescribir esta condición de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |x-c| < r &\iff -r < x-c < r \\ &\iff c-r < x < c+r \\ &\iff x \in]c-r, c+r[\end{aligned} \tag{2.14}$$

de donde se tiene que la condición 3 del teorema 22 puede enunciarse como la existencia de $r > 0$ para el cual se cumple que la serie converge absolutamente para toda $x \in]c-r, c+r[$ y diverge para toda x tal que $x \notin [c-r, c+r]$. Dicha condición no específica el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo, es decir, en $x = c - r$ y $x = c + r$, con respecto a este detalle se indica que el estudio de la convergencia en estos valores se debe de realizar de manera independiente, debido a que las técnicas que se emplearán para determinar el radio de convergencia nunca decidirán en éstos.

Por otro lado, si r es el radio de convergencia y c es el centro de una serie de potencias, entonces al intervalo dado en 2.14 se conocerá como el **interior del intervalo de convergencia** de la serie dada.

DEFINICIÓN **21 (Intervalo de convergencia)**
Considere la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, *entonces se define el intervalo de convergencia de la serie como el conjunto de todos los* $x \in \mathbb{R}$ *tal que la serie converge.*

Además, se define el intervalo de convergencia absoluta como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ *para los cuales la serie converge absolutamente.*

Es importante mencionar que el intervalo de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta coinciden en todos sus puntos salvo tal vez en los extremos, lo anterior se debe a que en dichos extremos puede que la serie diverja y en caso de converger puede que lo haga condicionalmente. Por esta razón, se tiene que si r es el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, entonces el intervalo de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta corresponden a uno de los siguientes intervalos:

$$]c-r, c+r[, \quad [c-r, c+r[, \quad]c-r, c+r] \quad \text{o bien,} \quad [c-r, c+r]$$

no siendo necesariamente el mismo.

Nota:
Para unificar la notación se conviene que si la serie de potencias converge solo cuando $x = c$, entonces su radio de convergencia será $r = 0$. Y si la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces su radio de convergencia será $r = \infty$.

El siguiente resultado puede ser de utilidad durante en análisis de los extremos del intervalo.

TEOREMA **23**
Considere la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *y sea* r *su radio de convergencia. Para determinar el radio de convergencia y el radio de convergencia absoluta se deben analizar los extremos* $c-r$ *y* $c+r$ *del intervalo* $]c-r, c+r[$ *para el cual se cumple la siguiente propiedad:*

Si la serie converge absolutamente en uno de los extremos del intervalo, entonces converge absolutamente en el otro extremo.

❏ **Demostración.** Para $x = c - r$ se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n((c-r)-c)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(-r)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

mientras que para $x = c + r$ se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n((c+r)-c)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

de este modo, si la convergencia absoluta se da en alguno de los extremos, implica directamente la convergencia absoluta en el otro extremo, lo que completa la demostración de este resultado.

❐

Gracias al resultado expuesto en el teorema 23 se tiene que en caso de convergencia absoluta en uno de los extremos del intervalo, no hay necesidad de estudiar la convergencia en el otro extremo, pues ya se tiene certeza de la convergencia absoluta en el mismo. Por otro lado, de la contrapositiva del teorema, se desprende que si una serie diverge o converge condicionalmente en un extremo del intervalo, entonces si converge en el otro extremo, debe hacerlo condicionalmente.

2.3.1. Cálculo del radio e intervalo de convergencia

El radio y el interior del intervalo de convergencia pueden determinarse fácilmente haciendo uso del criterio de la razón, o bien el criterio de la raíz.

Intervalo de convergencia absoluta e intervalo de convergencia
Considere la serie dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Por el criterio de la razón y el criterio de la raíz, se tiene que la serie converge absolutamente para todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| < 1, \quad \text{o bien} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} < 1$$

Por lo que el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que satisfagan alguna de las desigualdades anteriores, constituye el interior, ya sea del intervalo de convergencia o del intervalo de convergencia absoluta. Finalmente, se debe analizar por separado los extremos de dicho intervalo para determinar la posible inclusión de los extremos en el intervalo estudiado.

■ EJEMPLO **87**

Determine el intervalo de convergencia, el intervalo de convergencia absoluta y el radio de convergencia de cada una de las series de potencias que se presentan a continuación.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

★ **Solución.**

1. Si $x=1$ se sabe que la serie converge absolutamente. Utilizando el criterio del cociente para analizar el caso de $x \neq 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{3^n}{n}(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}n\,(x-1)^{n+1}}{3^n\,(n+1)\,(x-1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n\,(x-1)}{(n+1)}\right| = |3\,(x-1)|
\end{aligned}$$

Luego para que la serie converja debe darse que:

$$\begin{aligned}
& |3\,(x-1)| < 1 \\
\Longrightarrow\ & -1 < 3\,(x-1) < 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Así la serie es absolutamente convergente en $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right[$. Faltaría analizar los extremos del intervalo:

- Para $x = \dfrac{2}{3}$ se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

esta es la serie armónica alternada y utilizando el criterio para series alternadas se prueba que es convergente pero no absolutamente.

- Para $x = \dfrac{4}{3}$ se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{4}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que corresponde a la serie armónica, de la cual se sabe que es divergente.

De este modo, se tiene que el intervalo de convergencia es $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$ y el intervalo de convergencia absoluta sería $\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$. Mientras que el radio de convergencia está dado por: $r = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$.

2. Si $x = 0$ se sabe que la serie converge absolutamente. Utilizando el criterio del cociente para analizar el caso de $x \neq 0$ se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\, n!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x\,(n+1)| = \infty$$

Así la serie es divergente para todo $x \neq 0$. Finalmente, el intervalo de convergencia absoluta y el intervalo de convergencia es $\{0\}$, mientras que su radio de convergencia está dado por $r = 0$.

3. Si $x = 0$ se sabe que la serie converge absolutamente. Utilizando el criterio del cociente para analizar el caso de $x \neq 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+3}\, (2n+1)!}{(-1)^n\, x^{2n+1}\, (2n+3)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+3}\, (2n+1)!}{(-1)^n\, x^{2n+1}\, (2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-x^2}{(2n+3)\,(2n+2)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)\,(2n+2)}
\end{aligned}$$

Note que dicho límite da cero independientemente del valor que tenga x. De este modo, por el criterio del cociente esta serie converge para toda x. Siendo $\mathbb{R}$ el intervalo de convergencia absoluta y $r = \infty$ su radio de convergencia.

★

Una forma alternativa para realizar el cálculo del radio de convergencia, lo constituye el siguiente teorema, cuya demostración se basa en el criterio de la razón y el criterio de la raíz.

Teorema **24 (Radio de convergencia)**
Considere la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, *entonces el radio de convergencia de dicha serie se puede calcular mediante las fórmulas:*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

❑ **Demostración.**

- Por el criterio de la razón, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge absolutamente si:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-c|\right) = |x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

  - Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0$, entonces $L > 0$. Así se tiene que:

$$\begin{aligned}
|x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x-c|L < 1\\
&\Longleftrightarrow \quad |x-c| < \frac{1}{L}\\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{L} < x-c < \frac{1}{L}\\
&\Longleftrightarrow \quad c-\frac{1}{L} < x < c+\frac{1}{L}
\end{aligned}$$

    De donde se tiene que el interior del intervalo de convergencia está dada por: $\left]c-\frac{1}{L}, c+\frac{1}{L}\right[$. Por lo que se deduce que $\frac{1}{L}$ es el radio de convergencia de la serie.
    Ahora bien: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{L}$. Así, si r es el radio de convergencia de la serie dada, entonces se deduce que:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

  - En el caso que $L = 0$, entonces, por el criterio de la razón, la serie converge para todo $x \in \mathrm{I\!R}$, pues $L < 1$. De donde se deduce que $r = \infty$. Note que en este caso

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty.$$

    Lo que completa la demostración.

- La demostración $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ por el criterio de la raíz, queda como ejercicio para el lector.

❒

■ Ejemplo **88**

Determine el radio de convergencia y el interior del intervalo de convergencia para cada una de las series de potencias dadas:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^{2n}}(x-1)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)!}(x+1)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n+1}(x+1)^n$

★ **Solución.**

1. Para la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$ se tiene que $a_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera se tiene que:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

Así, el radio de convergencia de la serie es $r = 1$ y el interior del intervalo de convergencia sería $]2, 4[$.

2. Para la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^{2n}}(x-1)^n$ se tiene que $a_n = \dfrac{3^n}{(n+1)^{2n}}$ así:

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{(n+1)^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{(n+1)^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)^2} = 0$$

Así, el radio de convergencia de la serie sería $r = \infty$. Y el interior del intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$.

3. Para la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{(n+1)!}(x+1)^n$ se tiene que $a_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{(n+1)!}$ así:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{3^n \cdot n!}{(n+1)!}}{\dfrac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+2)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)!n!}{3\,(n+1)!\,(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3}\frac{(n+2)\,(n+1)!n!}{(n+1)!\,(n+1)\,n!}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right| = \frac{1}{3}$$

por lo que el radio de convergencia de la serie es $r = \frac{1}{3}$. Y el interior del intervalo de convergencia es $\left]-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right[$.

4. Para la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+1}(x+1)^n$ se tiene que $a_n = \dfrac{n!}{n+1}$ así:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n!}{n+1}}{\dfrac{(n+1)!}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,(n+2)}{(n+1)\,(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,(n+2)}{(n+1)\,(n+1)\,n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{(n+1)^2}\right| = 0$$

Por lo que $r = 0$. Así se concluye que el único valor donde la serie converge absolutamente es en $x = -1$. El intervalo de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta es $[-1,-1] = \{-1\}$. Sin embargo, el interior del intervalo de convergencia en este caso es $\varnothing$, pues un conjunto discreto tiene interior vacío. Visto de otra manera, se puede ver el interior como $]-1,-1[= \varnothing$.

★

Ejercicios 19.

1. Determine el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2x-1)^n}{4^n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n (x+6)^n$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(x+3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2x+1)^n}{n\sqrt{n}}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(x-2)^n}{2^n}$

2. Determine el intervalo de convergencia para la siguiente serie (no analice los extremos).

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\,(x+1)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)!\cdot(x-3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\,(2x+1)^n}{3^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-7)^k \ln k}{5k+1}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)^n(x-1)^n}{(2n+3)^n}$

   f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(3-2x)^{2k}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}.$

Teorema **25 (Propiedades de las series de potencias)**
Considere la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *con radio de convergencia* r. *Y considere, además la función* $f:]c-r, c+r[\to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

Entonces, en el interior del intervalo de convergencia de la serie se tiene que: f *es una función continua, derivable e integrable, donde:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-c)^{n-1} \qquad y \\ \int_c^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^x (t-c)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \end{aligned}$$

Además, las series obtenidas por derivación e integración poseen el mismo radio de convergencia.

❑ **Demostración.** Se Omite.

❒

El teorema anterior asegura que las series, para $f(x)$, $f'(x)$ y $\int_c^x f(t)dt$, poseen el mismo radio de convergencia, y por ende, el mismo interior del intervalo de convergencia, sin embargo, no necesariamente poseen el mismo intervalo de convergencia. Ésto se debe a que en los extremos la convergencia de dichas series puede variar, este detalle se puede observar en el ejemplo 89.

Ejemplo **89**
Hallar los intervalos de convergencia de $\int_0^x f(t)\,dt$, $f(x)$ *y* $f'(x)$ *donde:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Solución: Por el teorema anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ \int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left(\frac{t^n}{n}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

- Determine el intervalo de convergencia de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}} \right| = |x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$$

y analizando los extremos se tiene que el intervalo de convergencia es $[-1, 1[$.

- Determine el intervalo de convergencia de $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n}}{n}}{\dfrac{x^{n-1}}{n-1}} \right| = |x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$$

y analizando los extremos se tiene que el intervalo de convergencia es $]-1, 1[$.

- Determine el intervalo de convergencia de $\displaystyle\int f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}} \right| = |x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$$

y analizando los extremos se tiene que el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

2.3.2. Series de Taylor y Maclaurin

Definición **22**
Sea $f : A \longrightarrow B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sea $c \in A$, se dice que f admite un desarrollo en series de potencias alrededor de $x = c$, si existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $r \geq 0$ tal que para toda x en $]c - r, c + r[\cup \{c\}$ se tiene que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ converge absolutamente a $f(x)$.

Teorema **26**
Sea f una función n veces derivable en $x = c$. Si f admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de $x = c$, entonces:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

donde $f^{(n)}(c)$ denota la $n-$ésima derivada de f evaluada en c.

❏ **Demostración.** Considere la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_k(x-c)^k + \cdots$$

de esta manera, derivando $k-$veces dentro de su intervalo de convergencia se tiene que:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \tfrac{n!}{(n-k-1)!}(x-c)^{n-k}$$

evaluando en $x = c$ se tiene que:

$$f^{(k)}(c) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \tfrac{n!}{(n-k-1)!}(c-c)^{n-k}$$

de esta manera el único término que no es nulo es en $n = k$ quedando entonces que:

$$f^{(k)}(c) = a_k k! \quad \text{o equivalentemente} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

❒

De esta forma, a la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ se le conoce como serie de Taylor de f centrada en $x = c$. En el caso particular de que la serie esté centrada en cero, a esta se le conoce como la serie de Maclaurin de f.

Si f es una función definida por medio de una serie de potencias de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

el dominio de la función f es el intervalo de convergencia de la serie. En este caso, es necesario estudiar la convergencia de la serie en los extremos de dicho intervalo, con el objetivo identificar si éstos están o no contenidos en el dominio de la función.

Dada una función $f : A \longrightarrow B$, tal que f admita un desarrollo en series de potencias alrededor de $c \in A$ y f infinitamente derivable en c, entonces siempre es posible calcular la serie de Taylor para f alrededor de c.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

■ Ejemplo **90**

Calcule la serie de Maclaurin para la función $f(x) = e^x$.

★ **Solución.** Para la función f se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x) & = & e^x \\ f'(x) & = & e^x \\ \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(x) & = & e^x \\ \vdots & & \vdots \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(0) & = & 1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}}$$

De esta forma se tiene que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es decir,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Ahora se debe determinar el intervalo de convergencia de la serie. Para esta labor se aplicará el resultado presentado en el teorema 24. Considere en este caso $a_n = \dfrac{1}{n!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $\mathbb{R}$. De donde se concluye que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

★

■ Ejemplo **91**

Encontrar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

★ Solución.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \operatorname{sen}(x) \\ f'(x) & = & \cos(x) \\ f''(x) & = & -\operatorname{sen}(x) \\ f'''(x) & = & -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) & = & \operatorname{sen}(x) \\ \vdots & & \vdots \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 1 \\ f''(0) & = & 0 \\ f'''(0) & = & -1 \\ f^{(4)}(0) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En la parte 3 del ejemplo 87 se demuestra que el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ es $r = \infty$, por lo que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Así:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

★

Ejemplo 92

Encontrar la serie de Taylor para la función $f(x) = \ln(x)$ alrededor de $x = 1$.

★ **Solución.** Se tiene que:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x) \\
f'(x) &= \tfrac{1}{x} \\
f''(x) &= \tfrac{-1}{x^2} \\
f'''(x) &= \tfrac{2}{x^3} \\
f^{(4)}(x) &= \tfrac{-6}{x^4} \\
f^{(5)}(x) &= \tfrac{24}{x^5} \\
&\vdots
\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}
f(1) &= 0 \\
f'(1) &= 1 \\
f''(1) &= -1 \\
f'''(1) &= 2 \\
f^{(4)}(1) &= -6 \\
f^{(5)}(1) &= 24 \\
&\vdots
\end{aligned}}$$

De este modo:

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \frac{24(x-1)^5}{5!} - \cdots \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \frac{24(x-1)^5}{5!} - \cdots \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \cdots
\end{aligned}$$

$$\therefore \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

Finalmente, se debe calcular el radio de convergencia de la serie. Haciendo uso del resultado presente en el teorema 24 se tiene:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}} \right| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

De donde se observa que el interior del intervalo de convergencia es $]0,2[$, pues la serie esta centrada en $x=1$. Ahora es necesario estudiar los extremos del intervalo de convergencia absoluta.

- Para $x=0$ se tiene que:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  la cual es divergente pues es la serie armónica.

- Para $x=2$ se tiene que:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

  la cual converge por ser la armónica alternada.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie será $]0,2]$. Finalmente se concluye que:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} \qquad \forall x \in]0,2] \tag{2.17}$$

★

El siguiente ejemplo muestra como es posible determinar el desarrollo en series de potencia para una función utilizando como base el desarrollo en series de potencia de otra función.

Ejemplo 93

Encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x^2}}{2}$ utilizando la serie de potencia de la función $g(x) = e^x$ calculada en el ejemplo 90.

★ **Solución.** Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\
e^{-x^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\
e^{-x^2} - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\
-\frac{e^{-x^2} - 1}{2} &= \frac{-1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2 \cdot n!}
\end{aligned}
$$

Por lo que finalmente se puede concluir que:

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n}}{2n!}$$

Además, el intervalo de convergencia de esta nueva serie de potencia será $\mathbb{R}$ pues se hereda de la serie original y ningún paso del proceso de construcción violenta la existencia del $x \in \mathbb{R}$.

★

Ejemplo 94

Determine la serie de Maclaurin para la función f definida por:

$$f(x) = \frac{-\cos x}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$$

use como base la serie de Maclaurin para la función seno dada en el ejemplo 91 por:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

★ **Solución.** En virtud del teorema 25 se tiene que en el interior del intervalo de convergencia, la serie de potencias son derivables e integrables. Por esta razón, existen dos posibilidades para realizar el trabajo solicitado, se puede usar derivación o integración sobre la serie de la función seno para obtener la función coseno que se requiere en el ejercicio.

Usando Derivación: Primero note que:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{d}{dx} \operatorname{sen}(x)=\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{d}{dx} x^{2n+1} \qquad (2.18)\\
\Longleftrightarrow \quad & \cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\, x^{2n} \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Note que en 2.18, la serie resultante, posterior a la derivación, sigue iniciando en $n=0$, ésto se debe a que la serie del seno no tiene término constante, por lo que la derivada en ninguno de los términos es cero.

De este modo, se puede continuar el trabajo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \Longleftrightarrow \quad & \frac{-1}{x^2} \cos x=\frac{-1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-\cos x}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n x^{2n}}{x^2\,(2n)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-\cos x}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-\cos x}{x^2}=\frac{-1 \cdot x^{-2}}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-\cos x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}=\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-\cos x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}
\end{aligned}$$

Así, se tiene que:

$$\frac{-\cos x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Usando Integración:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_0^x \operatorname{sen}(t)\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}dt\\
&\Longleftrightarrow \quad -\cos t|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n+1}dt\\
&\Longleftrightarrow \quad -\cos x+1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left.\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right|_0^x\\
&\Longleftrightarrow \quad -\cos x+1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-\cos x+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-\cos x+1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-\cos x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-\cos x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}
\end{aligned}
$$

Así, se tiene que:

$$\frac{-\cos x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

★

Ejemplo 95

Considere la serie de potencias para la función ln *centrada en* $x=1$ *y dada por:*

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} \quad \forall x\in]0,2] \tag{2.19}$$

Partiendo de la serie de potencias dada anteriormente, deduzca la serie de potencias para la función $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ *con su respectivo intervalo de convergencia.*

★ **Solución.** Recuerde que en el interior del intervalo de convergencia la serie dada en 2.19, dicha serie es derivable, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
\ln x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} && \forall x \in]0,2[\\
\frac{d}{dx}\ln x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} && \forall x \in]0,2[\\
\frac{1}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} && \forall x \in]0,2[\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{d}{dx}(x-1)^n && \forall x \in]0,2[\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\cancel{n}}\cancel{n}(x-1)^{n-1} && \forall x \in]0,2[\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(x-1)^{n-1} && \forall x \in]0,2[\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}(x-1)^{n} && \forall x \in]0,2[
\end{aligned}$$

De este modo se deduce que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \qquad \forall x \in]0,2[.$$

Ahora se debe sustituir x por $2x-3$, de este modo se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n && \forall x \in]0,2[\\
\frac{1}{2x-3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x-3-1)^n && \forall (2x-3) \in]0,2[\\
\frac{1}{2x-3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (x-2)^n && \forall (2x-3) \in]0,2[
\end{aligned}$$

Sin embargo,

$$(2x-3) \in]0,2[\iff 0 < 2x-3 < 2 \iff 3 < 2x < 5 \iff \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2x-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (x-2)^n \qquad \forall x \in \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$$

Para finalizar el ejercicio, es necesario estudiar la convergencia en los extremos, dado que al derivar la convergencia en éstos puede variar.

- $x = \dfrac{3}{2}$.
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{3}{2}-2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}1$$
la cual diverge por criterio de divergencia.

- $x = \dfrac{5}{2}$.
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{5}{2}-2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$
la cual diverge por criterio de divergencia.

por lo tanto:
$$\frac{1}{2x-3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(x-2)^n \qquad \forall x \in \left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[.$$

★

Ejemplo 96
Si se sabe que $\dfrac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ *para todo* $x \in]-1,1[$. *Determine la serie de potencias para la función* g *dada por:*
$$g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

★ Solución.
$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^2\right)^n \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{x^2+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\end{aligned}$$

Por otro lado note que el único cambio que se realizó fue x por x^2, de donde se puede obtener el siguiente razonamiento del hecho que $x \in]-1,1[$.
$$x \in]-1,1[\Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -1 < x^2 < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

por lo que la serie para g es:
$$\frac{x}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

★

Ejemplo 97

Considere la serie de Taylor para la función f definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad \forall x \in]a, b[$$

Determine el intervalo de convergencia de la serie de Taylor para $f(3x-5)$.

★ **Solución.**

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n & a < x < b \\
f(3x-5) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (3x-5-c)^n & a < 3x-5 < b \\
f(3x-5) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(3\left(x - \frac{5+c}{3}\right)\right)^n & \dfrac{a+5}{3} < x < \dfrac{b+5}{3} \\
f(3x-5) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (3)^n \left(x - \frac{5+c}{3}\right)^n & \dfrac{a+5}{3} < x < \dfrac{b+5}{3}
\end{array}$$

Por lo tanto, el intervalo de convergencia para la función $f(3x-5)$ corresponde a $\left]\frac{a+5}{3}, \frac{b+5}{3}\right[$.

★

Ejercicios 20.

1. Para cada una de las siguientes funciones, determine la serie de Taylor centrada en el punto que se dá con cada una:

   a) $f(x) = \arctan(x)$ centrada en $x = 0$.

   b) $g(x) = \frac{1}{1-x}$ centrada en $x = 0$.

   c) $h(x) = \cos(x)$ centrada en $x = 0$.

   d) $r(x) = \frac{1}{1+x^2}$ centrada en $x = 0$.

2. Sea f una función que admite un desarrollo en series de potencias alrededor de $x = c$ tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \qquad \forall x \in]c-r, c+r[$$

   donde r es el radio de convergencia de la serie. Determine el centro y el radio de convergencia de la serie de potencias para $f\left(\dfrac{7x-2}{3}\right)$.

3. Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$, para todo $x \in [c-2, c+2]$, donde 2 es el radio de convergencia de la serie y c es su centro. Determine el radio de convergencia para la serie de $f'\left(\dfrac{x-6}{7}\right)$.

4. Considere la serie de potencias para e^x, dada por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Determine la serie de potencias para $\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$.

5. Se sabe que:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n} \qquad \forall x \in]0, 2]$$

   Deduzca, de la anterior, la serie de potencias para $\dfrac{-1}{x^2+1}$.

6. Considere que:

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \qquad \forall x \in]0, 2[$$

   Deduzca, de la anterior la serie de potencias para $\ln(x^2+1)$.

continuación....

7. Sea f una función definida por $f(x) = -x^2\operatorname{sen}(x) + x^3$. Considere además, la serie de Maclaurin dada por:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Verifique, usando la serie anterior, que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

8. Justifique por un criterio de convergencia que estudiado anteriormente que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \text{ tal que } |x| < 1$$

Conociendo la serie anterior, verifique que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ para todo $x \in]-1,1]$.

2.3.3. Aproximación de derivadas e integrales

Por el teorema 25 se sabe que una función f definida a través de una serie de potencia centrada en $x = c$ y con radio de convergencia r, es continua, derivable e integrable en el interior del intervalo de convergencia $]c-r, c+r[$. Además:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-c)^{n-1} \text{ y} \\ \int_c^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^x (t-c)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \end{aligned}$$

Ejemplo 98

Utilice una serie de potencias para calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-e^{-x^2}}{2}dx$ *con un error menor que* 0.001.

★ **Solución.** Utilizando el resultado obtenido en el ejemplo 93, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1-e^{-x^2}}{2}dx &= \int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,x^{2n}}{2n!}dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2n!}\int_0^2 x^{2n}dx\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^2\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2n!}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,4^n}{n!\,(2n+1)}
\end{aligned}$$

Donde se puede tomar $a_n = \frac{4^n}{n!(2n+1)}$. Es necesario demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y converge a cero, de manera que cumpla las hipótesis del teorema 20, y así poder usarlo para determinar una cota del error cometido al aproximar el valor de la suma total con una suma parcial.

- Converge a cero. Recuerde que $4^n << n!$ de donde se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!(2n+1)} = 0$$

- Es decreciente. Por definición se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{4^n}{n!(2n+1)} \geq \frac{4^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{4^n}{n!(2n+1)} \geq \frac{4\cdot 4^n}{(n+1)n!(2n+3)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2n+1} \geq \frac{4}{(n+1)(2n+3)} \\
&\Longleftrightarrow \quad (n+1)(2n+3) \geq 4\,(2n+1) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2n^2+5n+3 \geq 8n+4 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2n^2-3n-1 \geq 0
\end{aligned}$$

  lo cual es cierta para $n \geq 2$.

Así, se puede concluir que la serie cumple las hipótesis del teorema 20, de esta manera se cumple que $|E_{S_n}| \leq a_{n+1}$, por lo que bastaría determinar un valor de n para el cual se cumpla que $a_{n+1} \leq 0.001$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq 0.001 \\
\frac{4^{n+1}}{(n+1)!\,(2n+3)} &\leq \frac{1}{1000} \\
1000 &\leq \frac{(n+1)!\,(2n+3)}{4^{n+1}}
\end{aligned}$$

esta desigualdad se verifica para $n = 12$. Así:

$$\int_0^2 \frac{1 - e^{-x^2}}{2} dx \approx \sum_{n=1}^{12} \left(\frac{(-1)^{n+1} \, 4^n}{n! \, (2n+1)} \right) \approx 0.55864$$

★

Ejemplo 99

Utilice una serie de potencias para calcular el valor de convergencia de la siguiente integral impropia $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} dx$ *con un error menor que* 0.001.

★ **Solución.** Se determinará el desarrollo en series de potencias de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$, a partir del desarrollo de la función $\operatorname{sen}(x)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\operatorname{sen}(2x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} dx &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n+1} (-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\pi/2} x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^{2n+1} (-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^{2n+1} (-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \, \pi^{2n+1}}{(2n+1)! \, (2n+1)} \right]
\end{aligned}$$

Sea $a_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)! \, (2n+1)}$, se debe probar que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente a cero y decreciente.

- Convergente a cero: Recuerde que $\pi^{2n+1} \ll (2n+1)!$, de donde se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} = 0$$

- Decreciente. Por definición de decrecimiento se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} \geq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!\,(2n+3)} \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} \geq \frac{\pi^{2n+1}\pi^2}{(2n+3)\,(2n+2)(2n+1)!\,(2n+3)} \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{(2n+1)} \geq \frac{\pi^2}{(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+3)} \\
& \Longleftrightarrow \quad (2n+3)(2n+2)(2n+3) \geq \pi^2(2n+1) \\
& \Longleftrightarrow \quad 8n^3 + 32n^2 + 42n + 18 \geq \pi^2(2n+1)
\end{aligned}$$

  Esta última desigualdad es cierta para todo $n \geq 0$, por lo que la sucesión es siempre decreciente.

Así, se tiene que la serie cumple las hipótesis del teorema 20, de donde se cumple entonces que $|E_{S_n}| \leq a_n$, así basta que:

$$\begin{aligned}
a_n & \leq 0.001 \\
\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} & \leq \frac{1}{1000} \\
1000 & \leq \frac{(2n+1)!\,(2n+1)}{\pi^{2n+1}}
\end{aligned}$$

esta desigualdad se verifica para $n = 5$. Así:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{x} dx \approx \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} \right) \approx 1.852572637$$

★

Ejercicios 21.

1. Use las series de potencias ya conocidas y calculadas en ejercicios anteriores para determinar la serie de potencia para las funciones que se presente a continuación:

   a) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

   b) $G(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$.

   c) $H(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$

   d) $K(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ Sug: Analice cual función derivada da $K(x)$.

2. Utilizando el desarrollo en series de potencias de las funciones dentro de cada integral para calcular una aproximación de cada integral tal que el error absoluto cometido en cada caso sea menor que E.

   a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, con $E = 0.001$.

   b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$, con $E = 0.000001$

   c) $\int_0^1 \cos(x^2) dx$, con $E = 0.001$.

   d) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$, con $E = 0.001$.

3. Encuentre una aproximación para la integral impropia dada por $\int_{-1/2}^{0} \frac{e^{2x}-1}{x} dx$, con un error menor o igual que $0.00001\,(E_{S_k} \leq 0.00001)$, donde se sabe que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Si se sabe que

   $$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} \qquad \forall x \in]0,2]$$

   Aproxime el valor de

   $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

   con un error $E_{S_N} \leq 0.0001$.

5. Si se sabe que:

   $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Aproxime el valor de la integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error menor que 0.0001

continuación....

6. Si se sabe que:
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Determine una aproximación de $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$ con un error menor o igual a 0.0000001.

7. Si se sabe que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, aproxime $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx$ con error menor que 0.00001.

8. Si $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Exprese la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ como una serie de potencias. **Sugerencia:** Recuerde que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Ejercicios del capítulo

Inducción y recursividad

1. Usando el método de inducción matemática, demuestre la siguiente proposición:

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + ... + ab^n = \frac{ab^{n+1} - a}{b - 1} \qquad n \in \mathbb{N}, \;\; b \neq 1$$

2. Considere la siguiente sucesión de números: $1, -1, -5, -11, -19, ...$

   Determine una fórmula de explícita para la sucesión dada.

3. Considere la siguiente fórmula de recurrencia: $a_n = 2a_{n-1} + 1, \;\; a_1 = 1$

   a) Escriba los cinco primeros términos de la sucesión.

   b) Encuentre una fórmula explícita para relación y demuéstrela por inducción.

4. Determine la fórmula de $f^{(n)}(x)$ para $f(x) = e^{3x}$ y demuéstrela por inducción.

5. Considere la sucesión $\{x_n\}$, definida por:

$$x_1 = 1; \;\; x_2 = 2; \; x_{n+1} = \frac{x_{n-1} - 1 - x_n}{1 + x_n}, \forall n \geq 2$$

   ¿Cuál es el valor de x_4?

6. Demuestre por inducción cada una de las siguientes igualdades:

   a) $14 + 44 + 120 + 304 + \cdots + (4n + 2)2^n = 2^{n+1}(4n - 1) + 2.$

   b) $\frac{-8}{3} + \frac{-4}{9} + 0 + \frac{4}{81} + \cdots + (4k - 12)3^{-k} = 3^{-k}(3 - 2k) - 3.$

   c) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$

Convergencia y divergencia de series

1. Determine si la serie que se da a continuación converge o diverge. En caso de que sea convergente dé el valor de la suma, y si es divergente indique el criterio que utiliza.

a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 2\operatorname{sen}(n)}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k/7} + \ln^k(6)}{2^k}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(n+2)! + \ln n}{2^{5n+3} - 5n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2^{2n-3}}{6^{n-1}} + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n + 6}{5n^3 - 2n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2 - n} + \frac{1}{e^{2n}} \right)$

g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 7^k}{3^{2k+1}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{\pi^n}$

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot 2^k}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3k+1)}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5 + n + 2}}$

k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k+5}$

l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{6}{9n^2 + 24n + 7} + \frac{3^{n-1}}{2^{3n-1}} \right)$

m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$

n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n-1}}{6^{n-2}}$

ñ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\sqrt{n})}$

o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 - 2} + \frac{(n+1)^2}{2 - (n+1)^2} \right)$

p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2k^2 + 8k + 8}$

q) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k + 5}{5k^2 - k + 1}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-n}}{3}$

2. Determine si las series que se dan a continuación convergen o divergen. Indique el criterio que utiliza.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n^2+1\right) + 3}{e^n + n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan\left(\frac{3}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n^2 - 2}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2k}}{e^k}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{2k}}{(3k-1)!}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln^3(2k)}$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + e^k}{2^k}$

i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2 - 3n + 1}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}.$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1}.$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 5^n}{7^{n+1}}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

ñ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$.

p) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n) \cdot \ln(\ln(\ln n))}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}}$

r) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n + 2 \operatorname{sen}(n)}{n^3 + 7}$

s) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+1)! \cdot \left(5^{k+3}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}$

t) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2n^2 + 1}$

u) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(k)}{k^2 + 1}$

v) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{5n^n}{2^n (n+1)^n}$

w) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+1} - n^{30}}{(n-2)! + \ln(n+1)}$

x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n n(n+1)}$

y) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

z) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n!}$

3. Considere la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la cual es una serie convergente con suma total es S.

   a) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$?

   b) Pruebe que la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$$
   es convergente.

4. Considere la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7e^{k+1} - 7e^k}{e^k e^{k+1} - 2e^{k+1} - 2e^k + 4}$, tal que:
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{7e^{k+1} - 7e^k}{e^k e^{k+1} - 2e^{k+1} - 2e^k + 4} = \frac{\frac{7}{e^n} - 7}{2 - e - \frac{4}{e^{n+1}} + \frac{2}{e^n}}$$

   Determine si la serie anterior converge o diverge, en caso que converja determine su suma.

5. Determine si las siguientes series convergen o divergen, en caso que converja indique si lo hace absolutamente o condicionalmente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[\ln(2n+1)]^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{7n^2+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n^2+3}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}}$

6. Determine, si existe, el valor de b tal que:

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 5$$

7. Considere la serie siguiente:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{(3n-1)!}$$

   a) Verifique que esta serie es absolutamente convergente.
   b) Aproxime la suma de esta serie con un error menor que 10^{-10}.

8. Determine si la siguiente serie es convergente o divergente. En caso de ser convergente determine si es absolutamente o condicionalmente convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!}$$

9. Suponga que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente. ¿Qué se puede decir sobre la serie siguiente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$$

Ejercicios teóricos

1. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de términos positivos tal que $a_n \leq a_{n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Justifique si la serie $\sum (-1)^n a_n$ converge o diverge.

2. Proponga un ejemplo de una serie **divergente** de la forma $\sum a_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Justifique que realmente cumple con las condiciones dadas.

3. Indique si es posible aplicar el criterio de la raíz para determinar si la serie $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{\left(2n^2+3\right)^n}{(5n-2n^2)^n}$ converge o diverge.

4. Determine la fracción que representa el siguiente decimal de expansión decimal infinita, no periódica. Utilice las series geométricas.

$$2{,}25252525252525252525....$$

5. Si p es una constante real positiva, determine condiciones para p de tal forma que la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^3 5^n}{p^{n+1}}$ converja.

Series de potencias

1. ¿Para qué valores de p, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! x^n}{(pn)^n}$ tiene radio de convergencia igual a 1?

2. Considere una función f, y considere una serie de potencias tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1} \cdot (x-2)^n}{3^{n+3}(n^2+1)}$$

   Con base en lo anterior realice lo que se le solicita:

   a) Calcule el radio de convergencia de la serie anterior.

   b) ¿Tiene sentido aproximar $f(1)$ utilizando la serie anterior? Justifique.

   c) ¿Tiene sentido aproximar $f(4)$ utilizando la serie anterior? Justifique.

3. Considere la función $f(x) = e^{-x^2/2} + \dfrac{x^2}{2} - 1$.

   a) Si se sabe que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, verifique que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+2}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) Aproxime, con un error menor que 0.000001, el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

4. Considere el siguiente desarrollo en serie de potencias:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{\frac{n}{2}-1}\right] \qquad \text{con} \qquad 0 < x < 1$$

   Haciendo uso del desarrollo anterior, verifique la igualdad siguiente:

$$\int_{\frac{4}{25}}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2} \right) dx = \frac{2}{21}$$

5. Considere la función $f(x) = e^{\sqrt[3]{-x}} - 1$.

   a) Si se sabe que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, verifique que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{\frac{n}{3}}}{n!}$.

b) Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias correspondiente a la función f.

c) Aproxime, con un error menor que 0.001, el valor de la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

6. Determine el interior del intervalo de convergencia de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{\ln(n+1)}$$

7. Determine el interior del intervalo de convergencia de la siguiente serie. No analice extremos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^2+n}$$

8. Si se sabe que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$, para todo $x \in]-1,1]$. Obtenga a partir de esta serie, el desarrollo de Taylor para la función $f(x) = \frac{\ln(5+2x)}{4+2x}$ con su respectivo intervalo de convergencia.

Soluciones de algunos ejercicios

Capítulo 01.

Ejercicios 1:

1. Demostración.
2. Demostración.
3. Demostración.

Capítulo 02.

Ejercicios 2:

- $a_2 = \dfrac{1}{2240}$, $a_4 = \dfrac{1}{15840}$.
- $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \dfrac{(2n+8)(2n+7)}{(2n+4)(2n+3)}$

Ejercicios 3:
Se omite.

Ejercicios 4:

a) $a_n = 2^{2^n}$

b) $b_n = -2 \cdot 3^n + \dfrac{7}{2}$

c) $c_n = 2^{n-1}(n-1)!$

d) $d_n = \dfrac{2}{3} \cdot 7^n + \dfrac{1}{3}$

e) $y_n = 5 - 2^n$

f) $x_n = \dfrac{5^{n-1}}{6}$

Ejercicios 5

1. a) decreciente. b) decreciente. c) creciente. d) creciente. e) decreciente. f) creciente.
2. a) creciente a partir de $n = 11$.
   b) decreciente a partir de $k = 1$.
   c) creciente a partir de $n = 3$.
   d) decreciente a partir de $m = 15$.
   e) creciente a partir de $n = 4$.
   f) decreciente a partir de $w = 6$.

Ejercicios 6:

1. conv. a 2.
2. conv. a $\ln\left(\frac{3}{5}\right)$.
3. conv. a 0.
4. conv. a 0.
5. conv. a 0.
6. diverge.
7. conv. a e.
8. diverge.
9. conv. a 0.
10. conv. a $-1/4$.
11. conv. a $-1/4$.
12. diverge.

Ejercicios 7:

1. $a_n = 1 - \dfrac{1}{3^{n-1}}$ y converge.
2. Todas convergen.

Ejercicios 8:

1. La sucesión de las $n-$ésimas sumas parciales está dada por $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. La serie converge a $\frac{1}{3}$.
2. La sucesión de las $n-$ésimas sumas parciales está dada por $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$. La serie converge a $\frac{3}{4}$.
3. converge a 2.
4. a) Demostración. b) converge a 1.
5. a) Demostración. b) converge a 3.
6. a) Demostración. b) converge a 1.
7. Demostraciones por inducción.

Ejercicios 9:

1. De lo demostrado por inducción se tiene que:

   $$S_k > \tfrac{k^3}{3} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} S_k \geq \lim_{k\to\infty} \tfrac{k^3}{3} = \infty$$

   de donde se concluye que

   $$\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$$

   por lo que la serie diverge.

2. De lo demostrado por inducción, se deduce que la sucesión $\{S_k\}$ está acotada por $3/2$. Además, se puede demostrar que es creciente por lo que se puede concluir de dicha sucesión debe ser convergente. Por lo tanto la serie converge. (Ver ejemplo 41).

3. De lo demostrado por inducción, se puede demostrar que $\{S_k\}$ está acotada por $7/2$ y además se puede probar que dicha sucesión es creciente, de donde se deduce que es convergente. Por lo tanto la serie converge. (Ver ejemplo 41).

4. La serie diverge, pues:

   $$S_k > \tfrac{k^4}{4} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} S_k \geq \lim_{k\to\infty} \tfrac{k^4}{4} = \infty$$

   De donde se concluye que $S_k = \infty$.

Ejercicios 10:

1. no aplica.
2. diverge.
3. diverge.
4. diverge.
5. diverge.
6. no aplica.

Ejercicios 11:

1. a) $\dfrac{-2e}{e-3}$. b) $\dfrac{49}{12}$. c) $\dfrac{-10}{3}$. d) $\dfrac{26}{9}$.
   e) $\dfrac{2187}{16}$. f) $\dfrac{-133}{12}$.

2. Para que la serie converja, el valor $w \in]-1,1[\smallsetminus\{0\}$. Y el valor de la suma total en términos de w es: $\dfrac{2w}{3(1-w)}$.

3. Para que la serie converja, el valor $p \in \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[\smallsetminus \{0\}$. Y el valor de la suma total en términos de p es: $\dfrac{-12p^4}{2p-3}$.

4. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{10^n}$ b) El valor de convergencia es $\dfrac{1}{3}$.

5. a) $\dfrac{2}{9}$. b) $\dfrac{73}{99}$. c) $\dfrac{7}{9}$. d) $\dfrac{4}{33}$.

Ejercicios 12:

a) $\dfrac{9}{10}$. b) $\dfrac{36}{77}$. c) -3. d) $\dfrac{1}{4}$. e) $\dfrac{8}{9}$.
f) 1. g) $\dfrac{25}{48}$. h) 4. i) $\dfrac{12}{7}$. j) $\dfrac{4}{3}$. k) 1.
l) $\dfrac{1}{2\ln 2}$. m) $\dfrac{1}{2}$. n) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{16}{567}$.
ñ) $\dfrac{5}{9}$. o) $\dfrac{1}{5}$. p) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}$. q) $\dfrac{2068}{6885}$.

Ejercicios 13:

1. a) converge. b) converge.
   c) converge. d) converge.
   e) diverge. f) converge.
   g) converge. h) diverge.
   i) converge. j) converge.

2. Si $p > 1$ entonces la serie converge. Si $p \leq 1$ la serie diverge.

Ejercicios 14:

1. converge.
2. diverge.
3. diverge.
4. converge.
5. converge.
6. converge.
7. converge.
8. diverge.
9. converge.
10. converge.
11. diverge.
12. converge.
13. converge.
14. converge.
15. diverge.
16. converge.
17. converge.
18. converge.
19. converge.

Ejercicios 15:

1. $a \in]-2, 2[$.
2. a) converge. b) diverge. c) diverge. d) converge. e) diverge. f) converge. g) converge. h) diverge. i) converge.
3. Si $1 - k \leq 1$ la serie diverge y en caso contrario converge.
4. Si $x \leq 5$ la serie es convergente, en caso contrario es divergente.
5. Demostración.
6. Para que la serie converja, debe cumplirse que $|b| > 1$.
7. La serie converge para todo $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicios 16:

1. converge.
2. converge.
3. diverge.
4. converge.

Ejercicios 17:

1. a) $k = 54$. b) $k = 9$.c) $k = 16$. d) $k = 14$.
2. a) converge. b) converge.
3. La aproximación buscada se da cuando $n = 6$. Y la aproximación es $S_6 = \sum_{n=2}^{7} \dfrac{1}{n!}$.
4. Se requiere sumar 99 términos de la suma.
5. $N = 9$.
6. $N = 8$.

Ejercicios 18:

a) converge condi.
b) converge condi.
c) converge condi.
d) converge condi.
e) converge abs.
f) converge abs.
g) converge condi.
h) converge abs.
i) diverge.
j) converge abs.
k) converge abs.
l) converge condi.

Ejercicios 19:

1. a) $r = 2$, $\left]\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right[$.

   b) $r = 0$, $[-6, -6]$.

   c) $r = \infty$, $\mathbb{R}$.

   d) $r = \frac{1}{2}$, $[0, 1]$.

   e) $r = 0$, $\{2\}$.
2. a) $]-3, 1[$. b) $]0, 4[$. c) $]-2, 1[$.

   d) $]3, 4[$. e) $\left]\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right[$. f) $\mathbb{R}$.

Ejercicios 20:

1. *a*) $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{1+2k}}{1+2k}$
   $\forall x \in [-1, 1]$.

   b) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
   $\forall x \in]-1, 1[$

   c) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
   $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$
$\forall x \in]-1,1[$

2. El centro es $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3c}{7}$ y el radio es $\dfrac{3r}{7}$.
3. El centro es $6 + 7c$ y el radio es 14.
4. $\dfrac{e^{-3x} - 1}{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n x^{n-1}}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
5. $\dfrac{-1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$
$\forall x \in]-1,1[$
6. $\ln(x^2+1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$
$\forall x \in [-1,1]$.
7. Verificación.
8. Verificación.

Ejercicios 21:

1. a) $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   b) $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
   c) $H(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
   d) Note que $g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ cumple que $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ de esta manera $K(x) = g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.
2. a) Utilizando la parte #1 se tiene que $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx = F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, por el teorema 20 se requieren los 5 primeros términos, donde se obtiene $S_5 = 0.7474867724$.
   b) Utilizando la parte #1 se tiene que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} dx = G(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{2n}}{(2n+1)!}$, por el teorema 20 se requieren sumar los 4 primeros términos, donde se obtiene $S_4 = 0.9588510664$.
   c) Primero demuestre que: $\displaystyle\int_0^x \cos(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$. Tomando $x = 1$ y aplicando el teorema 20 se requiere sumar los primeros 3 términos, donde se obtiene $S_3 = 0.9046296296$.
   d) Utilizando la parte #1 se tiene que $\displaystyle\int_0^1 \cos(x^2) dx = H(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, por el teorema 20 se requiere sumar los primeros 16 términos, donde $S_{16} = 0.9154787319$.
3. Primero se prueba que $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{e^{2x}-1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!}$
Ahora, como la serie es alternada convergente, y se puede probar que satisface las hipótesis del teorema 20, de donde se deduce que la aproximación buscada corresponde a:

$$S_7 = \sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} \approx 0.7966024187$$

4. Primero se determina que:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Donde esta serie es alternada convergente y cumple las hipótesis del teorema 20, del cual se deduce que la aproximación buscada corresponde a:

$$S_{99} = \sum_{n=1}^{99} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \approx 0.82251753$$

5. Primero se determina que:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

la cual es una serie alternada convergente que satisface las hipótesis del teorema 20, del cual se deduce que S_7 es la aproximación buscada, donde

$$S_7 = \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \approx 0.74683603$$

6. Primero se determina que:

$$\int_0^{1/3} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{3^n \cdot n! \cdot n}$$

la cual es una serie alternada convergente que satisface las hipótesis del teorema 20, del cual se deduce que la aproximación buscada corresponde a S_8, donde:

$$S_8 = \sum_{n=1}^{8} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{3^n \cdot n! \cdot n} \approx 0.57015954$$

7. Primero se determina que:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\left(2n+\frac{3}{2}\right)}$$

La cual es una serie alternada convergente que satisface las hipótesis del teorema 20, del cual se deduce que la aproximación busca está dada por S_8, donde:

$$S_8 = \sum_{n=0}^{7} \frac{(-1)^n}{n!\left(2n+\frac{3}{2}\right)} \approx 0.45339066$$

8. $\operatorname{sen}^2 x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n} \cdot x^{2n}}{2 \cdot (2n)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicios del Capítulo

Solución: Inducción y recursividad

1. Demostración.
2. La fórmula es $a_n = 1 - n(n+1)$.
3. *a*) 1, 3, 7, 15, 31.
   b) La fórmula es $a_n = 2^n - 1$.
4. $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.
5. El valor de $x_4 = 5$, para el cual se requiere calcular $x_3 = \dfrac{-2}{3}$.
6. Demostraciones.

Solución: Convergencia y divergencia de series

1. *a*) Diverge. Por ser de términos positivos, se puede abordar por comparación directa, o bien, y comparación paso al límite, en cuyos casos se compara con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$.
   b) Diverge. Se separa como dos series geométricas, una convergente y otra divergente.

c) Diverge, se analiza por comparación paso al límite dado que $\ln n \ll (n+2)!$ y $5n^2 \ll 2^{5n+3}$. También puede abordarse por comparación directa pues:

$$0 \leq \frac{5(n+2)!}{2^{5n+3}} \leq \frac{5(n+2)!+\ln n}{2^{5n+3}-5n^2}$$

d) Converge serie geométrica y telescópica. El valor de su suma total es $\dfrac{17}{18}$.

e) Diverge, criterio de divergencia.

f) Converge por criterio de la series telescopicas y geométrica. El valor de la suma total corresponde a $-\dfrac{e^{-4}}{e^{-2}-1} - 1$.

g) Converge a $\dfrac{49}{27}$ por serie geométrica.

h) Se separa como dos series geométricas convergentes, el valor de convergencia corresponde a: $\dfrac{4}{\pi(\pi-2)} + \dfrac{27}{\pi(\pi-3)}$

i) Diverge por criterio de la razón.

j) Diverge, comparación en el límite con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$.

k) Diverge, criterio de divergencia.

l) Converge. Se separa como dos series convergentes una geométrica y la otra telescópica. Su valor de convergencia corresponde a: $\dfrac{11}{28}$

m) Diverge, criterio de la integral

n) Converge. Se separa como dos series geométricas convergentes. Su valor de convergencia corresponde a: $\dfrac{48}{7}$

ñ) Diverge por criterio de la integral

o) Converge. La series es telescópica y su valor de convergencia corresponde a 1.

p) Converge. Aplica fracciones parciales para expresar la series como una telescópica que resulta convergente. El valor de convergencia corresponde a: $\dfrac{5}{12}\pi^2 - \dfrac{25}{8}$

q) Diverge, comparación en el límite con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{k^2}$.

r) Diverge, por criterio de divergencia.

2. *a*) Converge por criterio de la integral.

b) Converge por criterio de comparación directa. Se compara con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{e^n+n}$, la cual converge al compararla en el límite con $\dfrac{1}{e^n}$.

c) Diverge, criterio de divergencia.

d) Converge, criterio de series alternadas.

e) Converge, criterio de la raíz.

f) Converge, criterio de la razón.

g) Converge, criterio de la integral.

h) Diverge, serie geométrica y criterio de la razón.

i) Converge, criterio de series alternadas.

j) Diverge por criterio de comparación en el límite con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.

k) Converge por criterio de series alternadas.

l) Converge por criterio de la razón.

m) Converge, criterio de la razón.

n) Converge por criterio de la razón.

ñ) Converge por criterio de la raíz.

o) Converge por criterio de series alternadas.También se puede aplicar el criterio de la raíz.

p) Diverge por criterio de la integral.

q) Converge por criterio de comparación directa con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

r) Converge por comparación en el límite con $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2+5n}{n^3+7}$

s) Diverge por criterio de la razón.

t) Converge por criterio de series alternadas.

u) Converge, criterio de la integral. También puede aplicarse el criterio de comparación directa, pues $\arctan x < \frac{\pi}{2}$ para todo $x > 0$.

v) Converge, criterio de la raíz.

w) Converge. Como $n^{30} \ll 3^{n+1}$ y $\ln(n+1) \ll (n-2)!$, entonces se puede aplicar el criterio de comparación paso al límite con $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n-2)!}$.

x) Converge. Comparación paso al límite pues $3 \ll 2n$ y $1 \ll n$. Se compara con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n n^2}$, esta última series se analiza con el criterio de la razón.

y) Converge. Criterio de la integral.

z) Converge. Criterio de comparación paso al límite. Se compara con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, la cual se analiza con el criterio de la razón.

3. *a*) El valor de convergencia es $2S - a_1$.

   b) La serie se puede separar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{a_n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

   donde la primera serie es convergente por hipótesis y la segunda se puede analizar por comparación directa pues:

$$0 < \frac{a_n}{n} \leq a_n.$$

4. La serie es convergente. El valor de la suma total corresponde a $\frac{-7}{2-e}$ pues la sucesión de las $n-$ésimas sumas parciales converge a ese valor.

5. *a*) La serie converge absolutamente. El análisis de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(2n+1}$ puede hacerse por criterio de la raíz $n-$ésima.

   b) Converge condicionalmente.

   c) Converge condicionalmente.

   d) Converge condicionalmente.

6. El valor buscado es $b = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$. Pues la expresión dada puede verse como una geométrica de razón $r = e^b$.

$$\begin{aligned} 1 + e^b + e^{2b} + \ldots &= 5 \\ 1 + \left(e^b\right)^1 + \left(e^b\right)^2 + \ldots &= 5 \\ \frac{1}{1-e^b} &= 5 \end{aligned}$$

El final es importante verificar que $r = e^b = \dfrac{4}{5} < 1$, de manera que se garantice la convergencia de la serie geométrica.

7. *a*) La convergencia absoluta se debe analizar por criterio de la razón.

   b) Es necesario demostrar que$\{b_n\}$, donde $b_n = \frac{3^n}{(3n-1)!}$ es una sucesión decreciente y que su límite tiende a cero, de manera que satisfaga las hipótesis del teorema 20. La aproximación buscada corresponde a:

$$S_3 = \sum_{n=3}^{5} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{(3n-1)!} \approx 0.00066762$$

8. Converge absolutamente. Puede ser analizado por el criterio de la razón.

9. Converge por comparación directa, pues:

$$0 < \frac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq |a_n|$$

Solución: Ejercicios Teóricos.

1. Converge por criterio de las series alternadas.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ es divergente pues es la armónica.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ por lo que el criterio no decide.

4. $\dfrac{223}{99}$.

5. Por el criterio de la razón, la serie converge si $\dfrac{5}{p} < 1 \Longrightarrow 5 < p$. En caso que $p = 5$ el criterio no decide, sin embargo para este caso la serie diverge por criterio de divergencia. Por lo que la serie converge únicamente para los valores de p tal que $0 < p < 5$.

Solución: Series de potencias.

1. $p = e^{-1}$.

2. *a*) El radio de convergencia es $\dfrac{3}{2}$.

   b) El interior del intervalo de convergencia corresponde a $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right[$, note que 1 pertenece al mismo, lo que indica que la serie converge para $x = 1$. Si tiene sentido utilizar la serie para aproximar $f(1)$.

   c) 4 no está contenido en el intervalo de convergencia por lo que la serie diverge para $x = 4$. No tiene sentido utilizar la serie para aproximar $f(4)$.

3. *a*) Verificación.

   b) Primero se determina que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}$$

   dicha serie satisface las hipótesis del teorema 20, de donde se tiene que la aproximación buscada es S_5, donde:

$$S_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}$$

$$\approx 0.02229115647$$

4. Verificación.

5. *a*) Verificación.

   b) $\mathbb{R}$.

c) Primero se debe determinar que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{n}{3}+1\right)}$$

dicha serie satisface las hipótesis del teorema 20, de donde se obtiene que la aproximación buscada es S_5, donde:

$$\begin{aligned} S_5 &= \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{n}{3}+1\right)} \\ &\approx -0.5186011904 \end{aligned}$$

6. $]0,2[$.

7. $]0,1[$.

8. La serie buscada es:

$$\frac{\ln(5+2x)}{4+2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}(x+2)^{n-1}}{n}$$

El intervalo de convergencia corresponde a $\left]\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}\right] \smallsetminus \{-2\}$.