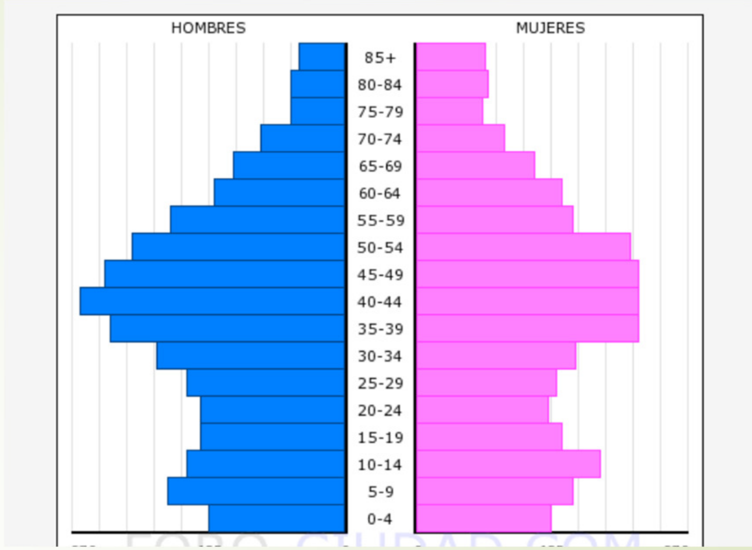
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemáticas



Santiago 1:17

Estimación

cociente de varianzas

TEC | Tecnológico de Costa Rica

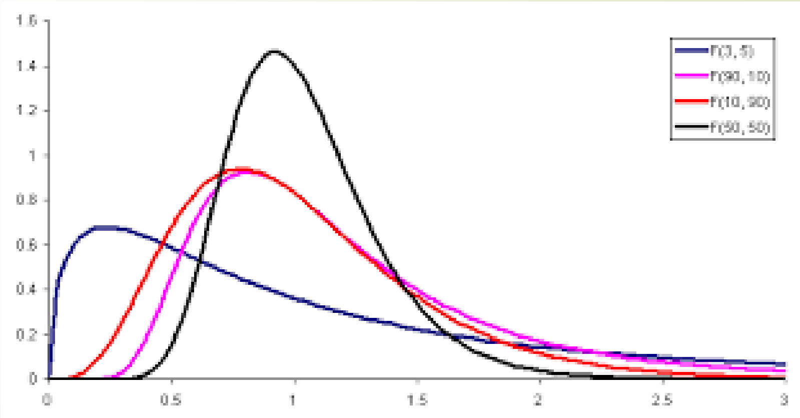
Juan Pablo Prendas
I Semestre 2025

La distribución de Fisher

X v.a.c se dice que $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$ si $f_X(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+x\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$ para $x > 0$,

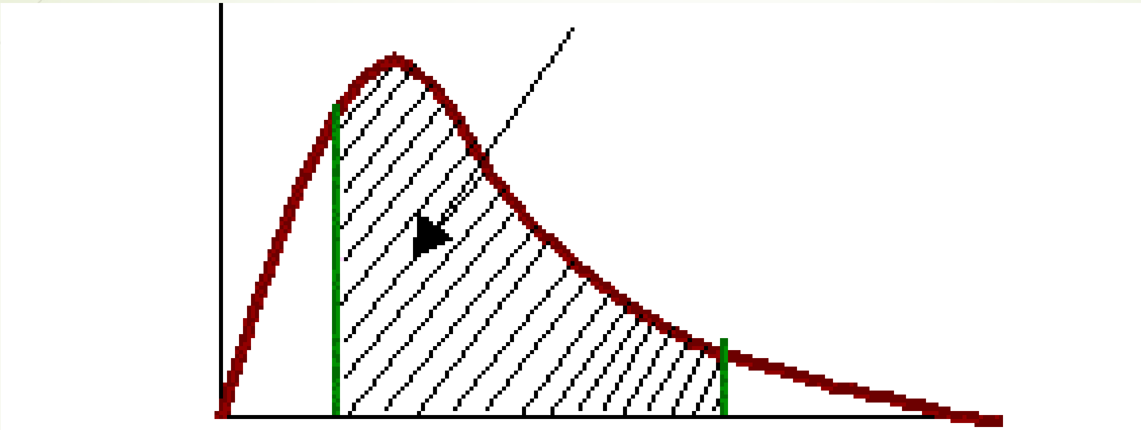
Un par de teoremas

Si $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$ entonces $f_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2} = \dfrac{1}{f_{\alpha,\nu_2,\nu_1}}$



Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ entonces $F = \dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$ con $\nu_1 = n_1 - 1$ y $\nu_2 = n_2 - 1$ para muestras aleatorias e independientes.

IC: cociente de varianzas $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$



$$P\left(f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1} < F = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}\right) = 1-\alpha$$

$$\left]\frac{s_2^2}{s_1^2\ f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}},\ \frac{s_2^2 f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}{s_1^2}\right[$$

Tomar raíz para cociente de desviaciones estándar

Ejercicios

Un profesor considera que el rendimiento promedio (nota promedio) de los estudiantes de Computación en el curso de Matemática Elemental es superior en al menos 9 puntos al rendimiento promedio de los estudiantes de otras carreras. Para analizar esto se tomó una muestra de estudiantes que cursaron el curso el año pasado, obteniendo los siguientes datoss:

Estudiantes	tamaño de muestra	Redimiento promedio observado ($\overline{x}$)	Desviación estándar (s)
De computación:	19	78 puntos	4.3 puntos
De otras carreras:	17	65 puntos	4.7 puntos

Suponga que el redimiento promedio en el curso de Matemática Elemental, tanto en Computación como en otras carreras, se distribuye normalmente.

(a) Encuentre un intervalo de confianza de 90% para el cociente de las varianzas de las notas de ambos tipos de estudiantes. (5 puntos)

$]0.530\,978 \quad , \quad 2.750\,20[$

Ejercicios

III. [4 puntos] Como estrategia publicitaria los organizadores de las fiestas de Zapote han afirmado que su evento es más familiar que las fiestas de Palmares y han querido demostrarlo con los datos sobre edades obtenidos en muestras tomadas en los últimos dos años. Los datos sobre edades arrojaron una varianza de 186 años en una muestra de 85 asistentes a Zapote, mientras que en una muestra de 98 asistentes a Palmares se obtuvo una desviación estándar de 10 años. Respaldan los datos la afirmación de la publicidad? Suponga que las poblaciones tienen distribución normal. **R/]0.352, 0.81301[**

Ejercicios

Para un proyecto del curso de Estadística, se quiere determinar si las notas de los estudiantes que se bañan para recibir lecciones sincrónicas del curso (población A) son similares a las notas de los estudiantes del curso que no se bañan para recibir lecciones sincrónicas (población B). Deciden calcular un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las variancias $\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}$, tomando una muestra de 23 estudiantes de la población A y de 19 estudiantes de la población B. El intervalo obtenido (correctamente) es

$]0.120896, \ 0.550010[$

El valor aproximado del cociente de las variancias muestrales $\left(\frac{s_B^2}{s_A^2}\right)$ corresponde a

○ a) 0.25364

$$0.120896 = \frac{s_B^2}{s_A^2 \cdot f_{0.95,18,22}} \quad \Rightarrow \frac{s_B^2}{s_A^2} = 0.120896 \cdot 2.097994 = 0.253639082622$$

$$0.55001 = \frac{s_B^2 \cdot f_{0.95,22,18}}{s_A^2} \quad \Rightarrow \frac{s_B^2}{s_A^2} = \frac{0.55001}{2.168474} = 0.25363919512$$

Ejercicios

El Rector de la Universidad Futuro Garantizado ha indicado que la edad con se graduan los estudiantes de Computadores (C) es mucha más variable que la edad con que se graduan los estudiantes de Tecnologías de Información (TI). Para contrastar esta afirmación se tomó una muestra de estudiantes recién graduados de ambas carreras:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} \text{C} & : & 32 & 28 & 26 & 34 & 26 & 28 & 26 & 22 & 23 & 27 & 35 & 28 & 25 \\ TI & : & 33 & 28 & 26 & 28 & 29 & 32 & 27 & 31 & 28 & 26 & 28 & & \end{array}$$

Asuma que las edades a las que se graduan los estudiantes siguen una districión normal, para ambas carreras.

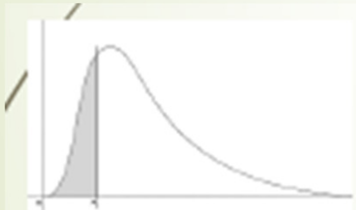
(a) Encuentre un intervalo de confianza de 80% para el cociente de las varianzas de las edades de estudiantes de ambos tipos de carreras. $R/$ $]0.162\,586 \quad , \quad 0.812\,508[$

(b) ¿Considera aceptable la afirmación del rector?. $R/$ Es aceptable la afirmación.

PH: cociente de varianzas

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = r_0$$ El cociente de varianzas es igual a r_0.

$$F = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} = \frac{S_1^2}{r_0 S_2^2} \sim f\,(n_1 - 1, n_2 - 1) \longrightarrow f_{obs} = \frac{s_1^2}{r_0 s_2^2}$$

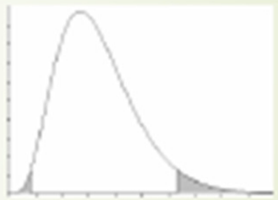


$f_c = f_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

$P(F < f_{obs})$

$f_c = f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$

Valor P es $P(F > f_{obs})$.



$f_{c1} = f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$, $f_{c2} = f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$.

$f_{obs} > 1$ $\quad 2P(F > f_{obs})$.
$f_{obs} < 1$ $\quad 2P(F < f_{obs})$.

Ejercicios

Un investigador desea comparar dos modelos de baterías de teléfonos celulares para determinar cuál de ellos tiene mayor duración de carga. Como desconoce la media y la varianza poblacional de los dos modelos, decide tomar una muestra de 26 baterías del modelo X y de 21 del modelo Z. En ambos casos, el tiempo de duración de la carga se distribuyó de forma normal, con una media muestral de 26 horas y una desviación muestral de 2,3 horas para el modelo X y con una media muestral de 24 horas y una desviación muestral de 1,7 horas para el modelo Z.

[4 puntos] Determine mediante una prueba de hipótesis, con $\alpha = 5\,\%$, si es posible concluir que las varianzas, para el tiempo de duración de carga de ambos modelos de batería, son iguales.

$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ Las varianzas en la duración de baterías son iguales.

$H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$ Las varianzas en la duración de baterías son diferentes.

Ejercicios

Con el objetivo de comparar el rendimiento medio en la prueba de admisión al TEC según la procedencia del estudiantado (zona rural o zona urbana), es necesario determinar si puede suponerse igualdad de varianzas. En un muestreo del Departamento del Registro se tienen desviaciones estándar de 225 puntos en 45 estudiantes de área urbana y 215 en 34 estudiantes de zona rural. Decida si las varianzas pueden considerarse iguales, utilice una significancia de 0.05.

Ejercicios

V. [5 puntos] Se quiere contrastar la hipótesis que los gastos por útiles escolares son mayores en 5000 colones en estudiantes mujeres que en los varones. Con este objetivo se realizó un muestreo y se obtuvieron los siguientes datos

Género	n	$\bar{x}$ **(colones)**	s **(colones)**
Masculino	25	20 000	1600
Femenino	16	23 000	2500

Con una significancia de 0.05, ¿qué puede concluirse respecto de la afirmación?

Examen

En una expoAuto se argumentó que el modelo 2022 del automóvil *PRtric* tiene un rendimiento promedio mayor en por lo menos 45 Km que el modelo del año anterior. En la expoAuto 2023 se presentan los datos de algunos automóviles escogidos de manera aleatoria, como evidencias de la mejora en la autonomía del modelo *PRtric* 2022.

	n	$\overline{x}$ (km por carga)	s (km por carga)
2021	24	340	3.1
2022	28	380	2.6

a) **[5 puntos]** Mediante una prueba de hipótesis verifique que, con una significancia del 6 %, las varianzas poblacionales sobre el rendimiento de los automóviles modelos 2021 y 2022 pueden suponerse iguales. Justifique.

[3 puntos] Para dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2, se desea probar la hipótesis $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2$ con $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2$ y un nivel de significancia de 0.05. En dos muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 20$ y $n_2 = 15$ se obtuvieron desviaciones estándares s_1 y s_2, respectivamente. Si se utiliza el cociente de las desviaciones estándar $\left(\frac{s_1}{s_2}\right)$ como estadístico de prueba, determine el valor crítico $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_c$.

≈ 0.9416347487

Gracias por su amable atención!