Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 horas, 20 minutos

Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Segundo examen parcial - soluciones
II semestre - 2024

1. Suponga que para jugar AZUL, se deben pagar 400 colones. Una jugada consiste en sacar aleatoriamente de manera sucesiva, y sin reemplazo, dos bolitas de una urna cerrada. En dicha urna hay siete bolitas blancas y tres bolitas azules. Por cada bolita azul que saca, el dueño del juego le da 300 colones.

   a) **[2 punto]** Determine el rango y el criterio de la distribución de probabilidad de la variable X correspondiente a la cantidad de bolitas azules en una jugada.

   b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una jugada se saque al menos una bolita azul?

   c) **[2 puntos]** ¿Cuál es la ganancia esperada en una jugada?

   Solución.

   a) Considere la variable aleatoria discreta X correspondiente a la cantidad de bolitas azules en una jugada. Se tiene que $X \sim HG(2, 10, 3)$. Por lo tanto, para $R_X = \{0, 1, 2\}$, en criterio de la distribución de probabilidad corresponde a:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\dbinom{3}{x} \cdot \dbinom{7}{2-x}}{\dbinom{10}{2}} & \text{, si} \quad x \in \{0, 1, 2\} \\ \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   b) Se solicita:

$$P[X \geq 1] = \sum_{i=1}^{2} \frac{\dbinom{3}{i} \cdot \dbinom{7}{2-i}}{\dbinom{10}{2}} = \frac{8}{15} \approx 0.533333.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que en una jugada se saque al menos una bolita azul es de, aproximadamente, 53.3 %.

   c) Considerando la variable aleatoria Y correspondiente a la ganancia en una jugada, se tiene que:

$$Y = 300X - 400 \Rightarrow E(Y) = E(300X - 400) = 300 \cdot \left(\sum_{i=0}^{2} i \cdot \frac{\dbinom{3}{i} \cdot \dbinom{7}{2-i}}{\dbinom{10}{2}} \right) - 400$$

   Por lo tanto, en una jugada, se espera que el jugador pierda 220 colones.

2. Durante un día de jornada laboral, se ha determinado que el número de estudiantes que asisten a horas de consulta con algún profesor de Matemática por hora sigue una distribución de Poisson, con media diez personas por hora. Además, la Escuela de Matemática se considera saturada si hay más de 15 estudiantes por hora.

   a) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de haya entre 64 y 96 estudiantes, inclusive, en 8 horas?

   b) **[2 puntos]** Calcule la probabilidad de que la Escuela se considere saturada.

   c) **[3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana (40 horas) hayan por lo menos 30 horas en las que la Escuela se considera saturada?

Solución.

a) Considere la variable aleatoria discreta X correspondiente a la cantidad de estudiantes que asisten a horas de consulta con algún profesor de Matemática por hora. Se sabe que $X \sim Poisson\,(10)$.

Considere X_1 la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de estudiantes que asisten a horas de consulta con algún profesor de Matemática por 8 hora. Se sabe que $X \sim Poisson\,(80)$.

Se solicita:

$$P\left[64 \leq X_1 \leq 96\right] = \sum_{i=64}^{96} \frac{80^i \cdot e^{-80}}{i!}$$

Esta última suma tiene cálculos grandes para una calculadora convencional. Por lo que la probabilidad de haya entre 64 y 96 estudiantes, inclusive, en 8 horas es de la suma anterior.

b) Para calcular la probabilidad de que la Escuela se encuentre saturada, se realiza:

$$P\left[X > 15\right] = 1 - P\left[X \leq 15\right] = 1 - \sum_{i=0}^{15} \frac{10^i \cdot e^{-10}}{i!} = 0.0487404033$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la Escuela se considere saturada es de, aproximadamente, 4.87 %.

c) Considere la variable aleatoria discreta Y correspondiente a la cantidad de horas en las que la Escuela está saturada, de las 40. Se tiene que $Y \sim Bin\,(40, 0.0487404033)$.

Por esta razón, se solicita:

$$P\left[Y \geq 30\right] = \sum_{i=30}^{40} \binom{40}{i} \cdot (0.0487404033)^i \cdot (1 - 0.0487404033)^{40-i} = 2.265210291 \times 10^{-31}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que en una semana (40 horas) hayan por lo menos 30 horas en las que la Escuela se considera saturada es casi nula.

3. Para probar el nuevo sistema en una central telefónica de cierta empresa, se realiza una prueba diaria, la cual consiste en marcar un número específico tantas veces como sea necesario hasta obtener comunicación. El sistema se considera eficiente durante un día específico si al realizar dicha prueba telefónica se logra comunicación con a lo sumo 3 intentos. Además, se sabe que la probabilidad de que se responda una llamada es de 25 %.

   a) **[2 puntos]** Calcule la probabilidad de que un día se considere eficiente.

   b) **[3 puntos]** Determine la probabilidad de que al observar el sistema por 15 días hábiles, en al menos 8 de ellos el sistema sea hallado eficiente.

Solución.

a) Sea X la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de intentos hasta que el sistema logre comunicación. Se tiene que $X \sim Geo\,(0.25)$, con $R_X = \{1, 2, \ldots\}$.

Se solicita:

$$P\,[X \leq 3] = \sum_{i=1}^{3} (1 - 0.25)^{i-1} \cdot (0.25) = \frac{37}{64} = 0.578125$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un día se considere eficiente es de, aproximadamente, 57.8 %.

b) Sea Y la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de días, de los 15, en los que el sistema se considera eficiente. Se tiene que $Y \sim Bin\left(15, \dfrac{37}{64}\right)$.

Se solicita:

$$P\,[Y \geq 8] = \sum_{i=8}^{15} \binom{15}{i} \cdot \left(\frac{37}{64}\right)^{i} \cdot \left(1 - \frac{37}{64}\right)^{15-i} = 0.7320889578$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al observar el sistema por 15 días hábiles, en al menos 8 de ellos el sistema sea hallado eficiente es de, aproximadamente, 73.2 %.

4. **[3 puntos]** Considere la variable aleatoria discreta Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{x+23}{900} & , \text{si} \quad x \in \{1, 2, \ldots, k\} \\ \\ 0 & , \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de k.

Solución.

Se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i+23}{900} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{900} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} i \right) + \frac{23}{900} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{900} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + \frac{23}{900} \cdot k = 1$$

$\Rightarrow k^2 + k + 46k = 1800$

$\Rightarrow k^2 + 47k - 1800 = 0$

$\Rightarrow k = 25$ o $k = -72$

Por contexto, se cumple que $k = 25$.

5. **[4 puntos]** Considere la variable aleatoria discreta Y, tal que $E(Y)$, $Var(Y)$ y $E\left((5Y-2\mu_Y)^2\right)$ existen. Demuestre que:

$$E\left((5Y-2\mu_Y)^2\right) = 25Var(Y) + 9\mu_Y^2.$$

Solución.

$E\left((5Y-2\mu_Y)^2\right)$
$= E\left(25Y^2 - 20\mu_Y Y + 4\mu_Y^2\right)$
$= E\left(25Y^2\right) - E\left(20\mu_Y Y\right) + E\left(4\mu_Y^2\right)$
$= 25E\left(Y^2\right) - 20\mu_Y E(Y) + 4\mu_Y^2$
$= 25\left[Var(Y) + (E(Y))^2\right] - 20\mu_Y^2 + 4\mu_Y^2$
$= 25Var(Y) + 25\mu_Y^2 - 20\mu_Y^2 + 4\mu_Y^2$
$= 25Var(Y) + 9\mu_Y^2$

6. [**5 puntos**] Considere la variable aleatoria discreta X, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_X(x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}, \text{ si } x \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Determine el criterio y el dominio de la función generadora de momentos de X, y utilícela para calcular $E(X)$.

Sugerencia: recuerde que, para cualquier $k \in \mathbb{R}$, se cumple que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k^i}{i!} = e^k$.

Solución.

Se tiene que:

$$m_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$\Rightarrow m_X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{it} \cdot \frac{4^i e^{-4}}{i!}$$

$$\Rightarrow m_X(t) = e^{-4} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(4e^t)^i}{i!}$$

$\Rightarrow m_X(t) = e^{-4} \cdot e^{4e^t}$, con $4e^t \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in \mathbb{R}$.

Por otro lado,

$$m_X(t) = e^{-4} \cdot e^{4e^t}$$

$$\Rightarrow m_X'(t) = e^{-4} \cdot e^{4e^t} \cdot 4e^t$$

$$\Rightarrow m_X'(0) = e^{-4} \cdot e^{4e^0} \cdot 4e^0$$

$$\Rightarrow m_X'(0) = 4$$

Por lo tanto, la esperanza de la variable X corresponde a 4.