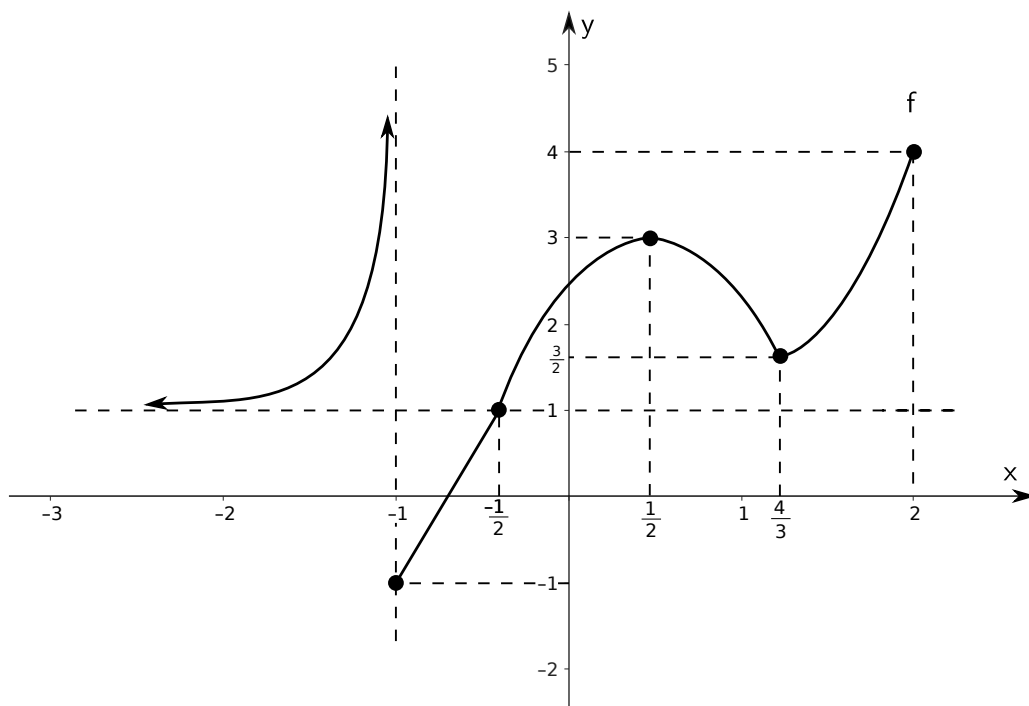


Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada y utilice cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos electrónicos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

#1. Considere la función $f :]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica se presenta a continuación.



De acuerdo con la gráfica, responda las siguientes preguntas.

- a) El conjunto de todos los valores de x para las cuales $f'(x) < 0$. R/ $]\frac{1}{2}, \frac{4}{3}[$ 1 Pt
- b) El conjunto de todos los valores de x para las cuales $f''(x) > 0$. R/ $]-\infty, -1[\cup]\frac{4}{3}, 2[$ 1 Pt
- c) El valor donde f alcanza el mínimo absoluto. R/ $x = -1$ 1 Pt
- d) Las coordenadas de un punto de inflexión de f . R/ $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$ 1 Pt
- e) ¿Posee f máximo absoluto? Justifique. R/ No, ya que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ 1 Pt

Continúa en la siguiente página...

#2. Sea $g : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2}{x-2}$ y $g'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

a) Indique las abscisas de los puntos máximos y mínimos relativos de g .

3 Pts

.....

$$g'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Cuadro de signos de g' :

	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x	—	•	+		+		+		
$(x-2)^2$	+		+	•	+		+		
$x-4$	—		—		—	•	+		
$g'(x)$	+		—		—		+		
$g(x)$	↗		↘		↘		↗		

2 puntos

.....

Máximo relativo: $x = 0$

Mínimo relativo $x = 4$

1 punto

.....

b) Determine los intervalos de concavidad de g e indique (si hay) puntos de inflexión.

4 Pts

.....

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x^2-4x)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

1 punto

.....

Signo de g'' :

	$-\infty$		2		$+\infty$
8	+		+		
$x-2$	—		+		
g''	—		+		
g	∩		∪		

(2 puntos)

.....

$\cap :]-\infty, 2[$

$\cup :]2, +\infty[$

No hay puntos de inflexión.

1 punto

.....

c) Si se sabe que la gráfica de g posee una asíntota oblicua, determine su ecuación. **2 Pts**

.....

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$

0,5 puntos

.....

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x - 2} = 2$$

1 punto

.....

Ecuación: $y = x + 2$

0,5 puntos

.....

#3. Determine los puntos de la curva de ecuación $y = \ln(x^2 + 1)$ en los cuales la recta normal es paralela a la recta de ecuación $x - y = 1$. **3 Pts**

.....

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow m = 1$$

1 punto

.....

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = -1 \Rightarrow 2x = -x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

1 punto

.....

Evaluyendo:

$$y(-1) = \ln 2$$

El punto de la curva en los cuales la recta normal es paralela a la recta $x - y = 1$ es $(-1, \ln 2)$

1 punto

.....

#4. La ecuación $x^2 - xy = 9 - y^2$ define a y como función implícita de x . Calcule y' .

3 Pts

.....

$$(x^2 - xy)' = (9 - y^2)' \Rightarrow 2x - (y + xy') = -2yy'$$

1 punto

.....

$$2x - y - xy' = -2yy' \Rightarrow -xy' + 2yy' = y - 2x$$

1 punto

.....

$$y'(-x + 2y) = y - 2x \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

1 punto

.....

#5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

4 Pts

Forma: ∞^0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\tan x \cdot \ln \left(\frac{1}{x}\right) \right)} = e^L$$

1 punto

.....

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x}{-\csc^2 x}$$

1 punto

.....

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0$$

1 punto

.....

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^0 = 1$$

1 punto

.....

#6. Resuelva los siguientes problemas:

- a) Un objeto se deja caer desde una altura de 100 metros sobre el suelo, y t segundos después su altura está dada por $h(t) = 100 - \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración y su valor es aproximadamente de 9,81 m/s². ¿Cuál es la velocidad del objeto justo antes de tocar el suelo? **3 Pts**

.....

$$h(t) = 100 - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \Rightarrow h(t) = 100 - 4,9t^2$$

$$v(t) = h'(t) \Rightarrow v(t) = -9,8t$$

1 punto

.....

$$h = 0 \Rightarrow 100 - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t \approx -4,52 \text{ o } t \approx 4,52$$

1 punto

.....

$$v(4,52) \approx (-9,8) \cdot (4,52) \approx -44,27$$

La velocidad justo antes de caer al suelo es de aproximadamente 44,27 m/s.

1 punto

.....

- b) Considere un triángulo rectángulo de catetos con medidas a y b . Si el cateto de medida a decrece a razón de 0,5 cm/min y el cateto de medida b crece a razón de 2 cm/min, determine la tasa de cambio del área del triángulo cuando $a = 16$ cm y $b = 12$ cm. **4 Pts**

.....

$$\frac{da}{dt} = -0,5 \text{ cm/min} \quad \frac{db}{dt} = 2 \text{ cm/min}$$

2 puntos

.....

$$A = \frac{ab}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt} \right)$$

1 punto

.....

$$\frac{dA}{dt} \big|_{a=16, b=12} = \frac{1}{2} (-0,5 \cdot 12 + 16 \cdot 2) = 13$$

El área del triángulo aumenta a una tasa de 13 cm²/min.

1 punto

.....

- c) Se desea construir un recipiente reforzado para almacenar una sustancia tóxica con forma de cilindro circular recto de volumen $900\pi \text{ cm}^3$. Se sabe que el precio de construir la tapa y el fondo del cilindro es de \$250 por cada cm^2 ; mientras que la parte lateral cuesta \$150 por cada cm^2 . Determine la medida de la altura h del cilindro, de manera que el costo de construirlo sea mínimo. **4 Pts**

.....

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = 900\pi \Rightarrow h = \frac{900}{r^2}$$

$$C = 2\pi r^2 \cdot 250 + 2\pi r h \cdot 150 \Rightarrow C = 500\pi r^2 + 300\pi r \cdot \frac{900}{r^2}$$

$$C(r) = 500\pi r^2 + \frac{270\,000\pi}{r}$$

1 punto

.....

$$C'(r) = 0 \iff 1000\pi r - \frac{270\,000\pi}{r^2} = 0 \iff r^3 = 270 \iff r = \sqrt[3]{270} \approx 6,46$$

1 punto

.....

$$C''(r) = 1000\pi + \frac{540\,000}{r^3} \Rightarrow C''(6,46) > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada si $r \approx 6,46$ el costo es mínimo.

1 punto

.....

$$h = \frac{900}{(\sqrt[3]{270})^2} \approx 21,54$$

Para que el costo sea mínimo la altura debe ser de aproximadamente 21,54 cm

1 punto

.....

.....

FÓRMULAS

Área lateral de un cilindro: $A_L = 2\pi r h$

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

.....

De acuerdo con lo indicado en el programa, en la pregunta 6.c. se desarrollará el atributo asociado al curso.

Atributo: conocimiento de ingeniería.

Nivel: inicial.

Contenido: problemas de máximos y mínimos.

Objetivo: resuelva problemas que involucren los conceptos de máximo y mínimo de una función.