Estadística – I 2025

IC y PH: una varianza.

I Juan 5:14

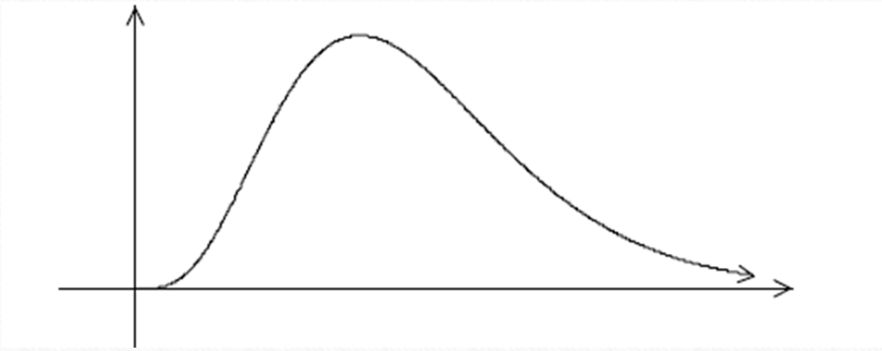
Distribución Chi Cuadrado

X v.a.c se dice que $X \sim \chi^2(\upsilon)$ si $X \sim Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}, 2\right)$

υ se refiere a los grados de libertad de la distribución.

$X \sim \chi^2(\upsilon)$, entonces $E(X) = \upsilon$ y $Var(X) = 2\upsilon$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces en una muestra aleatoria para X se sigue que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$



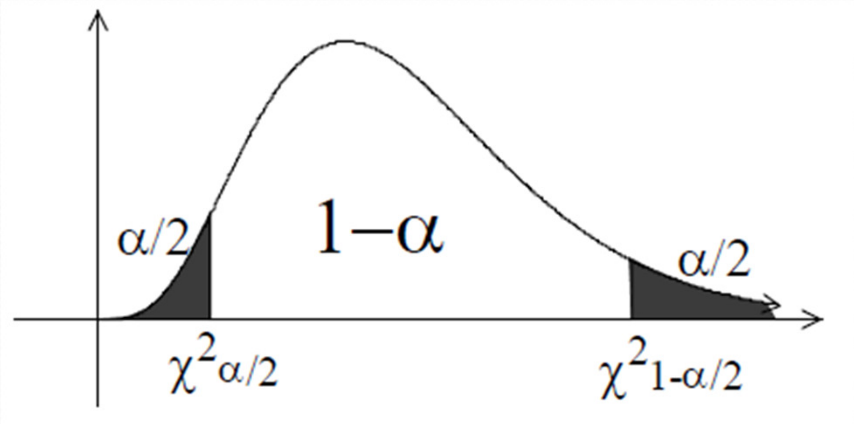
IC para una varianza

Para una v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\left]\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\ n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\ n-1}}\right[$$

La χ^2 es una distribución asimétrica

Al tomar raíz cuadrada se obtienen los extremos para el IC de la desviación estándar.



Ejemplos

Para el buen funcionamiento de una empresa tamalera, sus productos terminados deben tener un peso similar. En la tamalera **Ta' bien** se tomó una muestra para determinar si la producción se encuentra bajo control (tamales con pesos similares).
Los pesos (en gramos) obtenidos son 125, 123, 122, 124, 127, 126, 127, 130, 128, 122, 134, 129, 124, 122, 129. Con un nivel de confianza de 90 %, ¿puede sostenerse que los tamales producidos en **Ta' bien** tienen pesos similares? (8 puntos)

$\Rightarrow]2.677, 5.0825[$

Ejemplos

[3 puntos] Se utiliza una muestra de 26 datos, en la que se obtuvo $s^2 = 36$, para calcular un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\,\%$ para la varianza de una variable aleatoria normal X. Mediante un procedimiento correcto se obtuvo que el extremo superior del intervalo es 68.599. ¿Cual es el valor del centro del intervalo de confianza hallado?

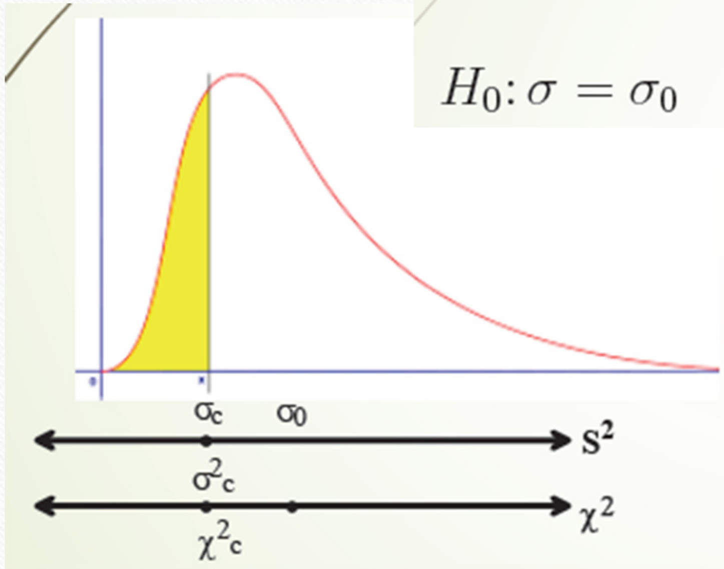
$\approx 45.37057237285.$

Pruebas de Hipótesis: una varianza

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

La varianza poblacional es igual a σ_0^2

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$



$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \text{ con } \nu = n-1$$

$$\chi_c^2 = \frac{(n-1)\,\sigma_c^2}{\sigma_0^2}$$

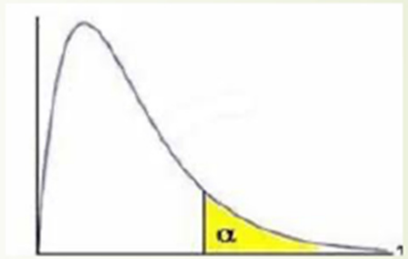
$$\sigma_c^2 = (\sigma_c)^2$$

$$\boxed{\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}}$$

$$\chi^2_c = \chi^2_{1-\alpha,n-1}$$

$$\text{Valor } P = P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs}\right)$$

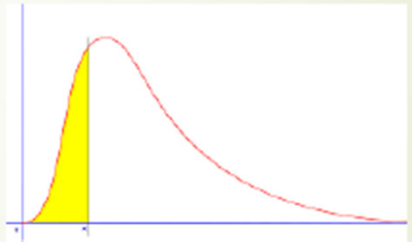
Cola derecha



$$\chi^2_c = \chi^2_{\alpha,n-1}$$

$$P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right)$$

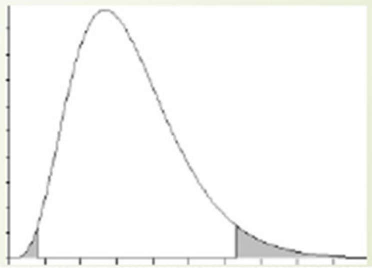
Cola izquierda



$$\chi^2_{c_1} = \chi^2_{\alpha/2,n-1} \quad y \quad \chi^2_{c_2} = \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

Valor[6] $P = \begin{cases} 2P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs}\right) & si \quad \chi^2_{obs} > n-1 \\ 2P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right) & si \quad \chi^2_{obs} < n-1 \end{cases}$

Dos colas



Ejercicios

[4 puntos] Una máquina corta y enrolla cintas adhesivas. Al analizar una muestra de 20 rollos se observa que la longitud de la cinta en cada uno de ellos sigue una distribución normal con una desviación estándar de 5 pulgadas. Indique si ese dato puede tomarse como evidencia significativa (con un nivel de significancia del 10 %) de que la desviación en la longitud de las cintas es menor a 8 pulgadas.

Ejercicios

Suponga que se ha utilizado una muestra de tamaño 26 de una problación normal y un nivel de significancia de 4% para contrastar: $H_0 : \sigma^2 = 16$ contra $H_1 : \sigma^2 > 16$. ¿Para qué valores de la varianza muestral S^2 no se rechaza la hipótesis nula?

Examen

Los siguientes datos corresponden a los tiempos en minutos de una muestra aleatoria de nuevos dispositivos de las computadoras *Peach* sometidos a calentamiento extremo hasta que se destruyen: 19, 10, 7, 6, 6, 4, 16, 11, 10, 9, 6, 5, 8, 5, 7, 12, 18

b) **[5 puntos]** La empresa de computadoras *Peach* necesita tener certeza de que la resistencia de estos dispositivos es similar entre ellos. Se ha establecido como criterio que la desviación estándar de tiempos de resistencia (σ_X) debe ser a lo sumo 3.5 minutos. Según los datos de la muestra, ¿puede concluirse que los dispositivos tienen una resistencia similar?

Ejercicio

La empresa de llantas Mundiales ha sacado un nuevo modelo de llantas para automóviles al mercado asegurando que su duración tiene una desviación estándar menor a 5000 km. Suponga que la duración de las llantas se distribuye normalmente. Se quiere contrastar la afirmación a un nivel de significancia del 10% con una muestra aleatoria de 25 llantas del nuevo modelo.

¿Acote la probabilidad del error tipo II de la prueba si duración de las llantas del nuevo modelo tiene una desviación estándar de 4700 km?

Gracias por su amable atención!!