Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 2404 Probabilidades

Tiempo máximo: 40 minutos
Puntaje máximo: 13 puntos
II semestre 2024

V Prueba Corta

Instrucciones Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable. No se permite el uso de dispositivos electrónicos con conectividad

1. [**5 puntos**] Calcule el valor de la constante K y la esperanza de la variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{K}{x^5},\ x \geq 1$$

Solución

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{K}{x^5}dx = 1 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \frac{-K}{4x^4} \Big|_1^p = 1 \Rightarrow \frac{K}{4} = 1 \Rightarrow K = 4.$$

$$\mu_x = \int_{1}^{+\infty} \frac{4}{x^4}dx = \lim_{p\to\infty} \frac{-4}{3x^3}\Big|_1^p = \frac{4}{3}$$

$\ltimes \wr \rtimes$

2. El peso de una pequeña pieza decorativa en una lámpara de techo sigue una distribución normal con media 20 gramos y desviación estándar 2 gramos.

   a) [**4 puntos**] Si las lámparas son todas iguales y se decoran con 50 de estas piezas, ¿cuál es el menor peso aportado a las lámparas por las piezas en el 10 % de las lámparas decoradas más pesadas?

   Solución

   Defina X : peso de cada pieza decorativa, $X \sim N(20, 4)$. Con esto S_{50} : suma de los pesos de 50 piezas decorativas, $S_{50} \sim N(1000, 200)$ por ser suma de normales.

   Con la app se obtiene un peso mínimo de 1018.12386 gramos.

   Otra forma, $z_{0.9} = 1.281552 = \dfrac{S - 1000}{19\sqrt{2}} \Rightarrow S \approx 1018.123882$ $\ltimes \wr \rtimes$

b) [**4 puntos**] Si estas lámparas pesan 500 gramos y se ha establecido que el peso total no puede sobrepasar los 750 gramos, ¿cuál es el número máximo de piezas con las que se pueden decorar para asegurarse que las lámparas cumplan la condición establecida en el 95 % de los casos?

Solución

Similar al anterior si $X \sim N(20, 4) \Rightarrow S_n \sim N(20n, 4n)$

Debe resolverse la ecuación $z_{0.95} = 1.644854 = \dfrac{250 - 20n}{2\sqrt{n}} \Rightarrow n \approx 11.9318267$. Por tanto, debe usarse 11 piezas para decorar. $\ltimes \wr \rtimes$