Plan semanal del taller T2_CDI_Virtual_Horario: Miércoles 5:00pm a 7:00pm

1. Nombre del tutor	Marco Guillermo Salazar Vega
2. Taller	T2: CDI Virtual Miércoles 5:00pm a 7:00pm
3. Horario a) Fecha b) Semana c) Sesión	 Miércoles 02 de agosto del 2023 Semana #2 (del 31 de julio al 04 de agosto) Sesión 01
4. Contenido	a) Límite de una función en un punto. b) Teoremas sobre límites. c) Cálculo de límites (algebraicos)
5. Referencias	Material propio (Libro Límites Marco Salazar Vega)
6. Descripción general de las actividades a realizar	Se realiza un pequeño repaso de los temas vistos en la semana anterior para aclarar dudas. Seguidamente, se realizará una serie de ejercicios relacionados con los temas indicados en el punto 4. Finalmente, se asignan dos ejercicios para que los estudiantes resuelvan en un horario fuera del taller.
7. Apoyos educativos	No aplica.

① Propiedades de límites:

Sean a, b, L y M números reales y se definen a f y g como funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces:

1. **Unicidad del límite**

   Sea a en el interior de un intervalo abierto I y sea f una función definida en I, salvo la única posible excepción en $x = a$. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces este es único.

2. **Límite de una función constante**

$$\lim_{x\to a} k = k \quad \text{con } k \text{ constante}$$

3. **Límite de la función identidad**

$$\lim_{x\to a} x = a$$

$$\lim_{x\to 3} 5x \cdot 9$$

$$= \lim_{x\to 3} 5x \cdot \lim_{x\to 3} 9$$

4. **Límite de una suma**

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L+M$$

5. **Límite de una resta**

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L-M$$

6. **Límite de un producto**

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M$$

7. **Límite de un cociente**

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{con } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

8. **Límite de constante por función**

$$\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x) = k\cdot L \quad \text{con } k \neq 0$$

9. **Límite de una función exponencial**

$$\lim_{x\to b} a^x = a^b \quad \text{con } a>0 \text{ y } a\neq 1$$

10. **Límite de una función logarítmica**

$$\lim_{x\to b} log_a(x) = log_a(b) \quad \text{con } a>0,\ a\neq 1 \text{ y } b>0$$

11. **Límite de una potencia**

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \text{ y } a \neq 0$$

12. **Límite de la potencia *n*-ésima**

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

siempre que la *n-ésima* potencia esté bien definida.

13. **Límite de una raíz *n*-ésima**

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ y } L > 0$$

14. **Límite de una función polinomial**

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a) \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \text{ y } p \text{ una función polinomial}$$

15. **Límite de una función racional**

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \quad \text{con } q(a) \neq 0 \text{ y } f \text{ una función racional}$$

2 Formas indeterminadas

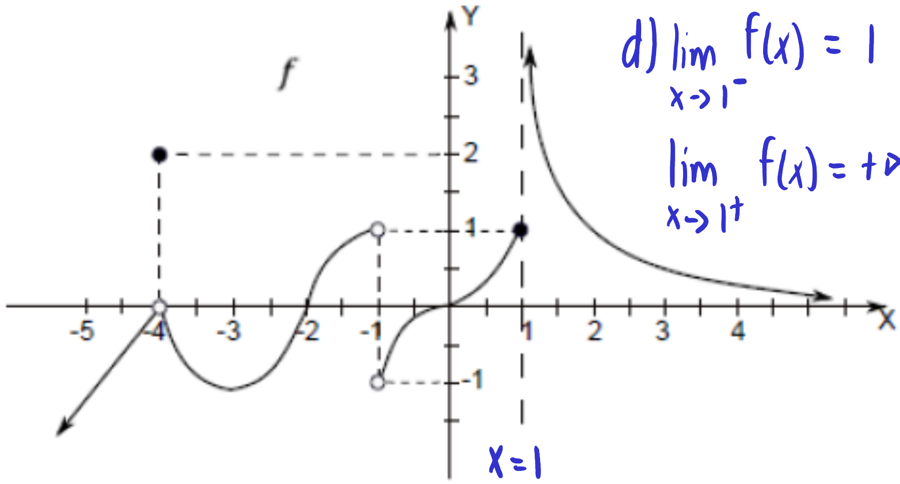
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $+\infty - +\infty$
- $+\infty + -\infty$
- $-\infty + +\infty$
- $-\infty - -\infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\pm\infty \cdot 0$
- 0^0
- $1^{\pm\infty}$
- $(\pm\infty)^0$

③ Análisis de Gráficas

Sea f una función cuya gráfica es la dada. Utilice la gráfica para evaluar cada límite si es que existe. Si no existe, justifique.

c) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$



d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to -4} f(x) = 2$

c) $\lim_{x\to -1} f(x) =$ no existe

d) $\lim_{x\to 1} f(x) =$ no existe

e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Cálculo de límites

Límites por factorización

Son límites de la forma $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ con $q(x) \neq 0$ tales que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a) = 0$ y $\lim_{x\to a} q(x) = q(a) = 0$.

En este caso, se tiene que la expresión $x = a$ es un cero de $p(x)$ y de $q(x)$, por lo cual, se procede a factorizar ambos polinomios, esto con el fin de simplificar el factor $(x - a)$

$x \to 2$

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow \underline{x-2} = 0$

Ejemplo: $\lim_{x\to 2} \frac{2x^4 + 11x^3 - 29x^2 - 44x + 84}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$ R/ 6

$>$ FI $0/0$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
2	11	-29	-44	84	2
↓	4	30	2	-84	
2	15	1	-42	0	

$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	1	-10	8	2
↓	2	6	-8	
1	3	-4	0	

$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x^3 + 15x^2 + x - 42)}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 3x - 4)} = \frac{36}{6} = 6$$

Límites por racionalización

Este tipo de resolución de límites se recomienda cuando en el límite se presentan funciones radicales de grado 2 o 3. Como se deben racionalizar expresiones, es conveniente utilizar la siguientes fórmulas:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ✓
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

FI $0/0$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^2+5}-3}$ R/ $\dfrac{-1}{2}$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{2-\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^2+5}-3} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} \cdot \frac{\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}{\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\left[2^3-\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^3\right]\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left[\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-3^2\right]\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\left[8-\left(x^2+4\right)\right]\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left[x^2+5-9\right]\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\left[8-x^2-4\right]\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left[x^2-4\right]\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}$$

$x\to-2$

$\Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow x+2=0$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\left[4-x^2\right]\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left[x^2-4\right]\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{-\cancel{\left[x^2-4\right]}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\cancel{\left[x^2-4\right]}\left(2^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2\right)}$$

$$= -\frac{6}{4+4+4}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

Límites por cambio de variable

Note que en el método de racionalización, se contemplan funciones radicales de grado 2 o 3, sin embargo, cuando el grado de las funciones radicales es mayor a 3, muchas veces resulta difícil conocer las fórmulas para efectuar una racionalización, por lo cual este método contempla aquellas funciones de grado mayor a 3, esto para simplificar la resolución del límite.

En este caso, tome el cambio de variable $u = \sqrt[n]{f(x)}$, así, la variable del nuevo límite es u. No obstante, si la tendencia del límite original es $x \to a$, entonces la tendencia del nuevo límite será $u \to \sqrt[n]{f(x)}$

FI 0/0

Ejemplo #1:

$$\lim_{y\to 3} \frac{5y-15}{1-\sqrt[9]{2y-5}}$$

R/ $\frac{-45}{2}$

Sea $\boxed{u = \sqrt[9]{2y-5}}$

$\Rightarrow u^9 = 2y-5$

$\Rightarrow u^9+5 = 2y$

$\Rightarrow \boxed{\frac{u^9+5}{2} = y}$

Como $y \to 3$ entonces $u \to \sqrt[9]{2\cdot 3-5}$

$\Rightarrow u \to 1$

$u \to 1$

$\Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow u-1 = 0$

$$\lim_{u\to 1} \frac{5\left(\frac{u^9+5}{2}\right)-15}{1-u} = \lim_{u\to 1} \frac{\frac{5u^9}{2}+\frac{25}{2}-15}{-(u-1)}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{\frac{5u^9}{2}-\frac{5}{2}\cdot 1}{-(u-1)}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{\frac{5}{2}(u^9-1)}{-(u-1)}$$

$$= \frac{-5}{2} \lim_{u \to 1} \frac{u^9 - 1}{u - 1}$$

$$= \frac{-5}{2} \lim_{u \to 1} \frac{\cancel{(u-1)}(u^8 + u^7 + u^6 + \ldots + u + 1)}{\cancel{(u-1)}}$$

$$= \frac{-5}{2} \cdot 9$$

$$= \frac{-45}{2}$$

FI $0/0$

Ejemplo #2: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{16x-8}+2}{\sqrt{1-2x}-1}$ R/ $\dfrac{-4}{3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{-8\cdot(1-2x)}+2}{\sqrt{1-2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{1-2x}+2}{\sqrt{1-2x}-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sqrt[3]{1-2x}+2}{\sqrt{1-2x}-1}$$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ & & 6 \end{array}$$

Sea $u = \sqrt[6]{1-2x}$

$\Rightarrow u^2 = \sqrt[3]{1-2x}$

$\Rightarrow u^3 = \sqrt{1-2x}$

Como $x \to 0$, entonces $u \to \sqrt[6]{1-2\cdot 0}$

$\Rightarrow u \to 1$

$u \to 1$

$\Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow u - 1 = 0$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{-2u^2+2}{u^3-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{-2(u^2-1)}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{-2\cancel{(u-1)}(u+1)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}$$

$$= \frac{-2\cdot 2}{3}$$

$$= \frac{-4}{3}$$

Límites por valor absoluto

La propiedad utilizada para resolver este tipo de límites es:

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = L, \text{ entonces } \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$$

Ahora, para calcular límites que involucran uno o varios valores absolutos, es necesario aplicar la definición de cada uno de estos, es decir:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

$y \to 2$
$\Rightarrow y = 2$
$\Rightarrow y - 2 = 0$

FI $0/0$

Ejemplo: $\lim_{y\to 2} \frac{|y+3| - |2y+1|}{y^2 - 4}$ R/ $\frac{-1}{4}$

$2y+1 \geq 0 \Rightarrow 2y \geq -1$
$\Rightarrow y \geq \frac{-1}{2}$

$y+3 \geq 0$
$\Rightarrow y \geq -3$

$$|y+3| \begin{cases} y+3 & \text{si} \quad y \geq -3 \ ✓ \\ -(y+3) & \text{si} \quad y < -3 \end{cases} \qquad |2y+1| \begin{cases} 2y+1 & \text{si} \quad y \geq -1/2 \ ✓ \\ -(2y+1) & \text{si} \quad y < -1/2 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 2} \frac{y+3-(2y+1)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y\to 2} \frac{y+3-2y-1}{(y-2)(y+2)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{-y+2}{(y-2)(y+2)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{-\cancel{(y-2)}}{\cancel{(y-2)}(y+2)}$$

$$= \frac{-1}{2+2}$$

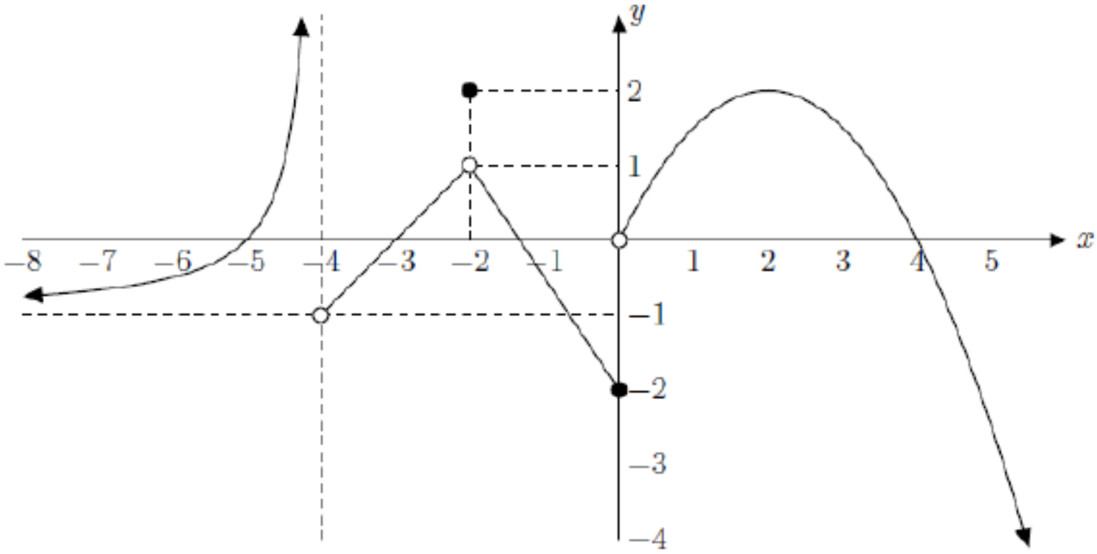
$$= \frac{-1}{4}$$

Ejercicios Adicionales

Como tarea, realice los siguientes ejercicios:

Ejercicio #1:

Sea p una función cuya gráfica es la dada. Utilice la gráfica para evaluar cada límite si es que existe. Si no existe, justifique.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to-4} p(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to-2} p(x) =$

e) $\lim\limits_{x\to0} p(x) =$

Ejercicio #2: calcule el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3+x^2-4x-4}$ R/ $\dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{t\to-2} \dfrac{\sqrt{1-4t}-3}{1+\sqrt[3]{2t+3}}$ R/ -1

c) $\lim\limits_{h\to1} \dfrac{\sqrt{8-4h}-2}{1+\sqrt[5]{h-2}}$ R/ -5

d) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{|3x-x^2|}{2x-6}$ R/ $\dfrac{3}{2}$