Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Tercer examen parcial
II semestre - 2023

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable y las tablas dispuestas por la Cátedra. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. [**3 puntos**] Determine el valor de a, de forma que la distribución de probabilidad para la variable aleatoria continua X tenga criterio:
$$f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{\left(ak^2+1\right)^2} & , \text{ si } \quad k \geq 0 \\ \\ 0 & , \text{ si } \quad k < 0 \end{cases}$$

   Solución.

   Se sabe que:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(k)\; dk = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{k}{\left(ak^2+1\right)^2}\, dk = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1/2}{u^2}\, du = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

2. El peso de las piñas de una cierta finca sigue una distribución desconocida, con un media de 1.85 kilogramos y una desviación estándar de 0.2 kilogramos.

   a) [**3 puntos**] Si se empacan en paquetes de 50 piñas para la exportación, ¿cuál es la probabilidad de que, en un paquete escogido al azar, el peso sea inferior a los 90 kilogramos?

   b) [**3 puntos**] Si se empacan en paquetes de 50 piñas para la exportación, ¿cuál es la probabilidad de que, en un paquete escogido al azar, el peso promedio por piña sea de por lo menos 1.89 kilogramos?

   Solución.

   a) Tomando $S_{50} = X_1 + \ldots + X_{50}$, con $\mu_i = 1.85$ y $\sigma_i = 0.2$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, 50\}$:
$$P\left[S_{50} < 90\right] = P\left[\frac{S_{50} - 1.85 \cdot 50}{0.2 \cdot \sqrt{50}} < \frac{90 - 1.85 \cdot 50}{0.2 \cdot \sqrt{50}}\right] = \Phi(-1.77) = 0.0384.$$
   Por lo tanto, la probabilidad solicitada es de , aproximadamente, 3.84 %.

   b) Tomando $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_{50}}{50}$, con $\mu_i = 1.85$ y $\sigma_i = 0.2$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, 50\}$:
$$P\left[\overline{X} \geq 1.89\right] = 1 - P\left[\overline{X} < \frac{1.89 - 1.85}{0.2/\sqrt{50}}\right] = 1 - \Phi(1.41) = 0.0793.$$
   Por lo tanto, la probabilidad solicitada es de, aproximadamente, 7.93 %.

3. Considere la variable aleatoria continua Y, la cual sigue una distribución normal, con media μ_Y desconocida y varianza $\sigma_Y^2 = 400$.

   a) **[3 puntos]** Si se sabe que $P[Y > 20] = 0.3$, determine μ_Y.

   b) **[5 puntos]** Suponiendo que $\mu_Y = 10$, determine un valor c tal que

$$P[\mu_Y - c < Y < \mu_Y + c] = 0.1 \;.$$

   Solución.

   a) $P[Y > 20] = 0.3 \Rightarrow P\left[\frac{Y - \mu_Y}{20} \leq \frac{20 - \mu_Y}{20}\right] = 0.7 \Rightarrow \frac{20 - \mu_Y}{20} = \Phi^{-1}(0.7)$

   $\Rightarrow 20 - \mu_Y = 20 \cdot 0.525 \Rightarrow \mu_Y = \frac{19}{2} = 9.5.$

   b) Por simetría, $P[\mu_Y - c < Y < \mu_Y + c] = 0.1 \Rightarrow P[Y < \mu_Y - c] = \frac{0.9}{2}.$

   $\Rightarrow \Phi\left(-\frac{c}{20}\right) = 0.45 \Rightarrow \frac{c}{20} = 0.125 \Rightarrow c = \frac{5}{2} = 2.5.$

4. **[4 puntos]** Se sabe que el número de artículos producidos en una fábrica durante una semana es una variable aleatoria con media 500 artículos y varianza de 25 artículos^2. Utilizando la desigualdad de Chebyshev, acote inferiormente la probabilidad de que la producción de esta semana esté entre 490 y 510 artículos.

   Solución.

   Suponga que X es la variable aleatoria correspondiente al número de artículos producidos por semana. Se sabe que $\mu_X = 500$ y $\sigma_X^2 = 25$.

   Se solicita una cota inferior para $P[490 < X < 510]$.

   $P[490 < X < 510] = P[|X - 500| < 10] > 1 - \frac{25}{10^2} = \frac{3}{4} = 0.75.$

5. **[4 puntos]** Una batería para un dispositivo electrónico tiene una duración que sigue una distribución Gamma, con media 2 meses y varianza 2 meses^2. En un total de 100 de estas baterías, determine la probabilidad de que más de 20 duren menos de 1 mes.

   Solución.

   Si la variable aleatoria continua Z corresponde a duración de la batería del dispositivo electrónico, entonces $Z \sim Gamma(\alpha, \beta)$, donde $\mu_Z = 2$ y $\sigma_Z^2 = 2$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \mu_Z & = & 2 & = & \alpha\beta \\ \sigma_Z^2 & = & 2 & = & \alpha\beta^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & 1 \end{array}\right.$$

   Se necesita la probabilidad de que una batería dure al menos un mes, es decir:

   $P[Z < 1] = F\left(\frac{1}{1}, 2\right) \approx 0.264.$

   Por lo tanto, si la variable aleatoria discreta X corresponde a la cantidad de baterías, de las 100, que duran menos de un mes, se solicita:

$$P[X > 20] = \sum_{i=21}^{100} \binom{100}{i} (0.264)^i (0.736)^{100-i} \approx 0.912324.$$

6. [**5 puntos**] Se quiere estudiar la probabilidad de ganar un peluche en una máquina de garra. Para esto, se realizaron 70 intentos, y se obtuvo que la probabilidad de ganar al menos 10 peluches es de 30 % (suponga que solo se puede ganar un peluche por intento). Determine la probabilidad de ganar un peluche.

   Sugerencia: aproxime la binomial por medio de la normal.

   Solución.

   Si X es la cantidad de peluches que gana, de los 70 intentos, entonces $X \sim Bin\,(70, p)$, donde p es la probabilidad buscada.

   Se sabe que:

$$P\,[X \geq 10] = 0.3 \Rightarrow P\,[X \leq 9] = 0.7 \Rightarrow \Phi\left(\frac{9 - 70 \cdot p + \dfrac{1}{2}}{\sqrt{70 \cdot p \cdot (1-p)}}\right) = 0.7$$

$$\Rightarrow \frac{9 - 70 \cdot p + \dfrac{1}{2}}{\sqrt{70 \cdot p \cdot (1-p)}} = \Phi^{-1}\,(0.7) \Rightarrow 9.5 - 70 \cdot p = 0.525\sqrt{70 \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$\Rightarrow (9.5 - 70p)^2 = (0.525)^2\,(70p - 70p^2) \Rightarrow 90.25 - 1330p + 4900p^2 = 19.29375p - 19.29375p^2$$

$$\Rightarrow 4919.29375p^2 - 1349.29375p + 90.25 = 0 \Rightarrow p = 0.158639 \text{ ó } p = 0.115646$$

   Probando con $P\,[X \geq 10] = 0.3$, el único valor es $p = 0.115646$.