Lógica Proposicional

Asignatura: Lógica

Prof. Dylan Soto Umaña & Prof. Jordan Carvajal Ruiz

Simbología básica de lógica

$\mathcal{V}$	Valor de verdad: verdadero.
$\mathcal{F}$	Valor de verdad: falso.
$\equiv$	"Idéntico a" o equivalencia.
$\neg$	Negación.

$\wedge$	Conjunción.
$\vee$	Disyunción inclusiva.
$\veebar$	Disyunción exclusiva.
$\rightarrow$	Condicional o implicación.
$\leftrightarrow$	Bicondicional o doble implicación.
$\mathcal{V}_0$	Tautología.
$\mathcal{F}_0$	Falacia o contradicción.
$\Rightarrow$	Implicación tautológica.
$\Leftrightarrow$	Equivalencia tautológica.
$\therefore$	"Por lo tanto".

Definición de una proposición lógica

Definición 1.1. Se le conoce como **proposición** a una afirmación que es cierta o falsa. Más precisamente, es una colección de símbolos del lenguaje a la cual se le puede asignar un valor de verdad: falso ($\mathcal{F}$) o verdadero ($\mathcal{V}$).

Las proposiciones se representan con letras mayúsculas, donde usualmente se utilizan por ejemplo: P, Q, R, entre otras.

Ejemplo 1.1. Considere las siguientes proposiciones:

1) "Todos los individuos que respiran están vivos" $\equiv \mathcal{V}$
2) "Todos los individuos que respiran están sanos" $\equiv \mathcal{F}$
3) "Tráigame el cuaderno" $\equiv \varnothing$ (no es proposición)

Ejemplo 1.2.

4) $P : 5 - 2 = 4 \equiv \mathcal{F}$

5) $Q :$ El hielo es caliente o $1 + 1 = 2 \equiv \mathcal{V}$

6) $R :$ El hielo es caliente y $1 + 1 = 2 \equiv \mathcal{F}$

7) $T : 5 - 2 \neq 4 \equiv \mathcal{V}$

8) $U : 3 < 2 \equiv \mathcal{F}$

9) "$3 > 2$ o $3 = 2$" $\equiv \mathcal{V}$

10) "$a^0 = 1$" $\equiv \mathcal{F}$

Ley del tercero excluido

Una proposición es Falsa (F) o Verdadera (V), pero no puede ser ambas.

Conectivas Lógicas

1) Negación: Consiste en el valor de verdad opuesto. La negación de P se denota por: $\neg P$ y se lee como "no P".

P	$\neg P$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Por ejemplo, si $P : 3 > 2 \equiv \mathcal{V}$, entonces $\neg P : 3 \leq 2 \equiv \mathcal{F}$. Por otro lado, si $P : 2 + 1 = 5 \equiv \mathcal{F}$, entonces $\neg P : 2 + 1 \neq 5 \equiv \mathcal{V}$.

Con respecto a los ejemplos previos, nótese que:

P	$=$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$
$\neg P$	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$

Ejemplo 1.3. Observe lo siguiente:

- La negación de la proposición "La matemática es fácil", es "La matemática no es fácil".
- La negación de la proposición "Heredia es más grande que Alajuela", es "Heredia no es más grande que Alajuela".

Ahora, empleando la notación $\neg$, se puede notar que:

- Si $P : 3 > 2$, entonces $\neg P : 3 \not> 2$.
- Si $P : 2 + 1 = 5$, entonces $\neg P : 2 + 1 \neq 5$.

2) Conjunción: Une dos proposiciones, donde si alguna de ellas es falsa, se obtiene que la proposición resultante también es falsa. La conjunción entre P y Q se denota por: $P \wedge Q$ y se lee como "P y Q".

P	Q	$P \wedge Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Por ejemplo, si $P : 3 > 0 \equiv \mathcal{V}$ y $Q : 2 + 2 = 3 \equiv \mathcal{F}$, entonces $P \wedge Q$ es falsa.

Ejemplo 1.4.

- Si P : Todo cuadrado es un rectángulo y $Q : \pi \geq e$, entonces $P \wedge Q \equiv \mathcal{V}$.
- Si P : El hielo es caliente y $Q : 1 + 1 = 2$, entonces $P \wedge Q \equiv \mathcal{F}$.
- Si P : El cuadrado de todo número real es no negativo y $Q : \frac{0}{0} = 1$, entonces $\neg(P \wedge Q) \equiv \mathcal{V}$.

3) Disyunción: Une dos proposiciones, donde si alguna de ellas es verdadera, se obtiene que la proposición resultante también es verdadera. La disyunción entre P y Q se denota por: $P \vee Q$ y se lee como "P o Q".

P	Q	$P \vee Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Por ejemplo, si $P : 2^3 = 6 \equiv \mathcal{F}$ y $Q : 2 + 2 = 4 \equiv \mathcal{V}$, entonces $P \vee Q$ es verdadera.

Ejemplo 1.5.

- Si P : Todo triángulo rectángulo posee un ángulo interno agudo y Q : La capital de Costa Rica es Heredia, entonces $P \vee Q \equiv \mathcal{V}$.

- Si P : El hielo es caliente y $Q : 1 + 1 = 2$, entonces $P \vee Q \equiv \mathcal{V}$.

- Si $P : 3 + 4 \cdot 5 = 35$ y $Q : a - (b + c) = a - b + c$, entonces $P \vee Q \equiv \mathcal{F}$.

- Si P : Existe un número más grande que todos los otros y Q : π es un número racional, entonces $P \vee \neg(P \wedge Q) \equiv \mathcal{V}$.

4) **Disyunción exclusiva:** Une dos proposiciones, donde si ambos valores de verdad difieren, se obtiene que la proposición resultante es verdadera. La disyunción exclusiva entre P y Q se denota por: $P \veebar Q$ y se lee como "P o Q, pero no ambas".

P	Q	$P \veebar Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Por ejemplo, si $P : 2 \div 2 = 1 \equiv \mathcal{V}$ y $Q : 2 \times 2 = 4 \equiv \mathcal{V}$, entonces $P \veebar Q$ es falsa.

Ejemplo 1.6.

- El sábado puedo irme de fiesta o estudiar, pero no ambas.
- Un número distinto de cero, es o positivo o negativo.

5) Condicional o implicación: Relaciona dos proposiciones, tomando una de ellas como hipótesis o premisa y la otra como conclusión. Una implicación es falsa sólo cuando siendo verdadera la hipótesis, la conclusión es falsa, es decir, no se debe deducir una conclusión falsa a partir de una hipótesis verdadera. La implicación de P por Q se denota por: $P \to Q$ y se lee como: "si P entonces Q" ó "P implica Q" ó "P solo si Q".

P	Q	$P \to Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Por ejemplo, si $P : 1 + 1 = 3 \equiv \mathcal{F}$ y $Q : 5$ es impar $\equiv \mathcal{V}$, entonces $P \to Q$ es verdadera.

Observación:

1. Un condicional es falso solo cuando siendo verdadera la hipótesis, la conclusión es falsa, es decir, no se puede deducir una conclusión falsa a partir de una hipótesis verdadera.

2. Es usual escribir un condicional de forma alternativa, por ejemplo, para $P \to Q$ algunas de ellas (aunque no todas) corresponden a:

   - P causa Q
   - P por tanto Q
   - P es suficiente para Q
   - Q es necesario para P
   - Q si P
   - Q con la condición de P
   - Q cuando P
   - Q siempre que P
   - Q a consecuencia de P

Ejemplo 1.7.

- P : Si estudio mucho entonces pasaré el curso.
- Q : No llueve solo si voy a clases.
- R : Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $a^0 = 1$.
- S : Ir a clases y poner atención, implica que entenderé la materia.

6) Equivalencia o doble implicación: Relaciona dos proposiciones, donde la proposición resultante es verdadera, únicamente cuando ambas proposiciones originales posean el mismo valor de verdad. La doble implicación de P y Q se denota por: $P \leftrightarrow Q$ y se lee como: "P si y sólo si Q" ó "P es necesario y suficiente para Q".

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Por ejemplo, si $P : 4$ es impar $\equiv \mathcal{F}$ y $Q : 1+1=3 \equiv \mathcal{F}$, entonces $P \leftrightarrow Q$ es verdadera. Además, nótese que

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)\,.$$

Simbolización de proposiciones

En lógica matemática, el proceso de simbolización de una proposición consiste en re-expresarla utilizando letras mayúsculas y los símbolos de las conectivas, con el fin de simplificar su escritura y realizar operaciones de manera sencilla, tales como determinar su valor de verdad. Por ejemplo, considere la proposición

"No descansaré mañana, si no estudio la materia o no hago la tarea",

la cual puede ser simbolizada como

$$(\neg Q \vee \neg R) \rightarrow \neg P\,,$$

donde

P : Descansaré mañana.

Q : Estudio la materia.

R : Hago la tarea.

Es importante notar del ejemplo anterior lo siguiente:

1. Se utilizan los paréntesis para establecer el orden de prioridad entre las conectivas lógicas. Es claro que $(\neg Q \vee \neg R)$ es la hipótesis y $\neg P$, la conclusión. En el caso de no usar paréntesis no sería clara dicha distinción.

2. En este escrito las proposiciones se definirán de manera positiva, utilizando el símbolo $\neg$ para escribir su negación.

Ejemplo 1.9. Considere las proposiciones:

$$P: \text{ El perro es negro}, \qquad Q: \text{ El caballo es blanco}, \qquad R: \text{ El gato es gris},$$

y nótese que:

- "Si el perro es negro y el caballo es blanco, entonces el gato es gris", se simboliza:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

- "El perro es negro y, si el caballo es blanco entonces el gato es gris", se simboliza:

$$P \wedge (Q \rightarrow R)$$

- "El perro es negro y el caballo es blanco, si el gato es gris", se simboliza:

$$R \rightarrow (P \wedge Q)$$

- “El perro no es negro o, el gato es gris y el caballo es blanco”, se simboliza:

$$\neg P \vee (R \wedge Q)$$

- “El perro no es negro o el gato es gris, y el caballo es blanco”, se simboliza:

$$(\neg P \vee R) \wedge Q$$

- “Es falso que, el perro es negro ó el caballo no es blanco”, se simboliza:

$$\neg (P \veebar \neg Q)$$

Ejercicio 1.4. Considere las siguientes proposiciones simples:

$$P: \text{Randall sale a dar un paseo.}$$
$$Q: \text{La luna está brillando.}$$
$$R: \text{Está nevando.}$$

Utilizando proposiciones compuestas, escriba los siguientes enunciados en forma simbólica:

a) Si la luna está brillando y no está nevando, entonces Randall sale a dar un paseo.

b) Si la luna está brillando, entonces no está nevando solo si Randall sale a dar un paseo.

c) No ocurre que, Randall salga a dar un paseo si y solo si está nevando o la luna brilla.

d) Si está nevando y la luna no está brillando, entonces Randall no saldrá a dar un paseo.

Construcción de tablas de verdad

Ejemplo 1.10. Construya una tabla para determinar el valor de verdad de la proposición:

$$(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q).$$

Solución. Una tabla de verdad de $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$, viene dada por:

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

De ella, se puede apreciar que la proposición es falsa, independientemente de los valores de verdad de P y Q. $\square$

Ejemplo 1.11. Hallar el valor de verdad de la proposición:

$$[(Q \to R) \vee \neg P] \leftrightarrow [\neg(P \wedge Q) \vee R].$$

Solución. Similar al ejemplo anterior, se construye una tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \to R$	$\neg P$	(1) $(Q \to R) \vee \neg P$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	(2) $\neg(P \wedge Q) \vee R$	(1) $\leftrightarrow$ (2)
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

de ella, se obtiene que la proposición es verdadera sin importar los valores de verdad de P, Q, R. □

Ejemplo 1.12. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$(P \vee R) \to [(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow (R \veebar P)]\,.$$

Solución. Considere la tabla de verdad:

P	Q	R	$P \vee R$	$\neg P$	(1) $\neg P \wedge Q$	$R \veebar P$	(2) $(1) \leftrightarrow (R \veebar P)$	$(P \vee R) \to (2)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Definición 1.8. Si una proposición compuesta es falsa para todos los posibles valores de las proposiciones simples que la forman, se denomina **falacia** o **contradicción** y se denota por $\mathcal{F}_0$. Por otro lado, si es siempre verdadera se llama **tautología** y se denota por $\mathcal{V}_0$. En cualquier otro caso se llama **contingencia** o **eventualidad**.

Ejemplo 1.14. Considere la siguiente proposición:

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)\,.$$

Construya la tabla de verdad correspondiente y determine si la expresión representa una tautología, contradicción o contingencia.

Solución. Para determinar el valor de verdad de la proposición, se construye la tabla de verdad:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

de la cual se puede apreciar que la proposición es una tautología. Es decir, se tiene que $P \to Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$, o simplemente $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. $\square$

Ejercicio 1.5. Clasifique como tautología, falacia o contingencia las siguientes proposiciones:

a) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

b) $[(Q \wedge P) \to \neg R] \leftrightarrow [\neg Q \vee (P \to R)]$

c) $[P \to (Q \vee R)] \wedge [\neg (P \to Q) \wedge \neg R]$

Leyes de la lógica

Implicación y disyunción (ID)	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
Doble negación (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan (DM)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutativa (Con.)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociativa (Aso.)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva (Dis.)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Idempotencia (Ide.)	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Neutro (Ne.)	$P \vee F_0 \equiv P$ $P \wedge V_0 \equiv P$
Inversos (Inv.)	$P \vee \neg P \equiv V_0$ $P \wedge \neg P \equiv F_0$
Dominación (Dom.)	$P \wedge F_0 \equiv F_0$ $P \vee V_0 \equiv V_0$
Absorción (Abs.)	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Exportación (Exp.)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$

Ejercicio 1.7. Dé las razones (leyes de la lógica) que justifican cada uno de los pasos realizados a continuación:

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) \wedge [\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)] &\equiv (P \to Q) \wedge \neg Q && (\qquad\qquad) \\
&\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q && (\qquad\qquad) \\
&\equiv \neg Q \wedge (\neg P \vee Q) && (\qquad\qquad) \\
&\equiv (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q) && (\qquad\qquad) \\
&\equiv (\neg Q \wedge \neg P) \vee \mathcal{F}_0 && (\qquad\qquad) \\
&\equiv \neg Q \wedge \neg P && (\qquad\qquad) \\
&\equiv \neg (Q \vee P) && (\qquad\qquad)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3. Simplifique la proposición $[(\neg P \vee Q) \wedge P] \rightarrow Q$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
[(\neg P \vee Q) \wedge P] \rightarrow Q &\equiv [P \wedge (\neg P \vee Q)] \rightarrow Q && \text{(Con)} \\
&\equiv [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)] \rightarrow Q && \text{(Dis)} \\
&\equiv [\mathcal{F}_0 \vee (P \wedge Q)] \rightarrow Q && \text{(Inv)} \\
&\equiv (P \wedge Q) \rightarrow Q && \text{(Con)} + \text{(Ne)} \\
&\equiv \neg (P \wedge Q) \vee Q && \text{(ID)} \\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee Q && \text{(DM)} \\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee Q) && \text{(Aso)} \\
&\equiv \neg P \vee \mathcal{V}_0 && \text{(Inv)} \\
&\equiv \mathcal{V}_0 && \text{(Dom)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene que la proposición es una tautología. $\square$

Haciendo uso de las leyes de lógica, simplifique al máximo la proposición compuesta:

$$\neg\left[P \wedge \neg(Q \wedge R)\right] \wedge (Q \rightarrow \neg P)$$

Solución

$$
\begin{aligned}
& \neg\left[P \wedge \neg(Q \wedge R)\right] \wedge (Q \rightarrow \neg P)\\
\equiv\ & [\neg P \vee \neg\neg(Q \wedge R)] \wedge (\neg Q \vee \neg P)\\
\equiv\ & [\neg P \vee (Q \wedge R)] \wedge (\neg Q \vee \neg P)\\
\equiv\ & [\neg P \vee (Q \wedge R)] \wedge (\neg P \vee \neg Q)\\
\equiv\ & \neg P \vee [(Q \wedge R) \wedge \neg Q]\\
\equiv\ & \neg P \vee [(R \wedge Q) \wedge \neg Q]\\
\equiv\ & \neg P \vee [R \wedge (Q \wedge \neg Q)]\\
\equiv\ & \neg P \vee [R \wedge F_0]\\
\equiv\ & \neg P \vee F_0\\
\equiv\ & \neg P
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.4. Simplifique la expresión $[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R] \to [(\neg Q \wedge R) \vee P]$.

Solución.

$$\begin{aligned}
&[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R] \to [(\neg Q \wedge R) \vee P] \\
&\quad \equiv \neg [(\neg P \vee Q) \wedge \neg R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee P] && \text{(ID)} \\
&\quad \equiv [\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg\neg R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee P] && \text{(DM)} \\
&\quad \equiv [(P \wedge \neg Q) \vee R] \vee [(\neg Q \wedge R) \vee P] && \text{(DM) + (DN)} \\
&\quad \equiv (P \wedge \neg Q) \vee \big(R \vee [(\neg Q \wedge R) \vee P]\big) && \text{(Aso)} \\
&\quad \equiv (P \wedge \neg Q) \vee [(\neg Q \wedge R) \vee (P \vee R)] && \text{(Con) + (Aso)} \\
&\quad \equiv [(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg Q)] \vee (P \vee R) && \text{(Con) + (Aso)} \\
&\quad \equiv [(P \vee R) \wedge \neg Q)] \vee (P \vee R) && \text{(Dis)} \\
&\quad \equiv (P \vee R) \vee [(P \vee R) \wedge \neg Q)] && \text{(Con)} \\
&\quad \equiv P \vee R && \text{(Abs)}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ [(\neg P \vee Q) \wedge \neg R] \to [(\neg Q \wedge R) \vee P] \equiv P \vee R\,.$$

□

Leyes de inferencia

Regla de inferencia	**Premisas**	**Conclusión**
Simplificación (Simp.)	$P \wedge Q$	P Q
Adjunción (Adj.)	P Q	$P \wedge Q$
Adición (Adi.) para cualquier proposición Q	P	$P \vee Q$
Separación (Sep.) o **Modus ponens** (MP)	P $P \rightarrow Q$	Q
Contraposición o **Modus tollens** (MT)	$P \rightarrow Q$ $\neg Q$	$\neg P$
Silogismo disyuntivo (SD)	$P \vee Q$ $\neg P$	Q

Silogismo hipotético (SH)	$P \to Q$ $Q \to R$	$P \to R$
Dilema constructivo (DC)	$P \vee Q$ $P \to R$ $Q \to S$	$R \vee S$
Dilema destructivo (DD)	$\neg R \vee \neg S$ $P \to R$ $Q \to S$	$\neg P \vee \neg Q$
Ley de casos (LC)	$P \to Q$ $\neg P \to R$	$Q \vee R$

Ejemplo 3.2. Demuestre $P \wedge Q$ a partir de $Q \to \neg R$, $P \vee R$, Q.

Solución.

1.	$Q \to \neg R$	(Premisa)
2.	$P \vee R$	(Premisa)
3.	Q	(Premisa)
4.	$\neg R$	(MP a 1 y 3)
5.	P	(SD a 2 y 4)
6.	$P \wedge Q$	(Adj a 3 y 5)

$\square$

Ejemplo 3.3. Demuestre P a partir de $\left\{\begin{array}{r}(\neg P \vee Q) \rightarrow R \\ R \rightarrow (S \vee T) \\ \neg S \wedge \neg U \\ \neg U \rightarrow \neg T\end{array}\right.$.

Solución.

1.	$(\neg P \vee Q) \rightarrow R$	(Premisa)
2.	$R \rightarrow (S \vee T)$	(Premisa)
3.	$\neg S \wedge \neg U$	(Premisa)
4.	$\neg U \rightarrow \neg T$	(Premisa)
5.	$\neg U$	(Simp 3)
6.	$\neg T$	(MP a 5 y 4)
7.	$\neg S$	(Simp 3)
8.	$\neg S \wedge \neg T$	(Adj 6 y 7)
9.	$\neg (S \vee T)$	(D.Morgan a 8)
10.	$\neg R$	(MT a 2 y 9)
11.	$\neg (\neg P \vee Q)$	(MT a 1 y 10)
12.	$P \wedge \neg Q$	(D.Morgan+DN a 11)
13.	P	(Simp 12)

$\square$

Ejercicio 3.2. Demuestre $(A \wedge R) \vee (A \wedge S)$ a partir de $\left\{ \begin{array}{r} C \to (R \vee S) \\ A \to (B \vee C) \\ B \to \neg A \\ \neg D \\ A \vee D \end{array} \right.$.

Ejemplo 3.4. Considere el siguiente argumento y establezca su validez: "Si no compro el boleto del tren o no me gusta el arte moderno, entonces me quedaré en la ciudad y le obsequiaré flores a mi esposa. Si me hubiera quedado en la ciudad, habría asistido a la recepción. Pero no asistí a la recepción. Por lo tanto, compré el boleto del tren".

Solución. Consideremos primero la siguiente notación:

$$\begin{aligned} P &: \text{ compro el boleto del tren} \\ Q &: \text{ me gusta el arte moderno} \\ R &: \text{ me quedaré en la ciudad} \\ S &: \text{ le obsequiaré flores a mi esposa} \\ T &: \text{ asisto a la recepción} \end{aligned}$$

Ahora, el argumento se puede traducir de la forma:

$$\begin{array}{r} (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S) \\ R \rightarrow T \\ \neg T \\ \hline \therefore\ P \end{array}$$

con el cual nótese que

1.	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$	(Premisa)
2.	$R \rightarrow T$	(Premisa)
3.	$\neg T$	(Premisa)
4.	$\neg R$	(MT a 2 y 3)
5.	$\neg R \vee \neg S$	(Adi $\neg S$ a 4)
6.	$\neg (R \wedge S)$	(DM a 5)
7.	$\neg (\neg P \vee \neg Q)$	(MT a 1 y 6)
8.	$P \wedge Q$	(DM+DN a 7)
9.	P	(Simp 8)

Por lo tanto, el argumento es válido.

Ejercicio 3.4. Establezca la validez del argumento: "Si José gana la carrera, entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José no ganó la carrera. Si Carlos fue el segundo, entonces Ramón no fue el segundo. José ganó la carrera. Por lo tanto, Carlos no fue el segundo".