INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
MA1103 CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ESCUELA DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

I SEMESTRE, 2024
TIEMPO: 2 HORAS Y 15 MINUTOS
PUNTAJE TOTAL: 29 pts

Tercer Examen Parcial Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **8** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Indique el número (y la letra, si la hay) de cada ejercicio que resuelva.
3. Tiene dos horas y quince minutos para contestar las preguntas del examen.
4. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
5. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. **[3 pts]** Sean A, B y C matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = \dfrac{1}{2}$, $|B| = -1$ y $|C| = 5$. Calcule $|2A^T \cdot B^2 \cdot C^{-1}|$.

2. **[3 pts]** Determine el valor o valores de x para que la matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sea una matriz invertible.

3. **[3 pts]** Sean $u = (-2, k, 2)$, $v = (-4, 0, -6)$ y $w = (1, 3, -2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine, el valor de k (en caso de existir) para que el vector u se pueda escribir como combinación lineal de los vectores v y w.

4. **[4 puntos]** Sean $u = (x, y, z), v = (1, 0, 1)$ y $w = (-1, 1, 1)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine el vector u que satisface de manera simultánea las siguientes condiciones:

   - u forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$ rad con v.
   - $u \times v = w$.
   - $||u|| = \sqrt{6}$

$(-2,k,2) = a(-4,0,-6) + b(1,3,-2)$

$(-4a+b,\ 3b,\ -6a-2b)$

$-4a+b=-2$
$3b=k$
$-6a-2b=2$

Continúa en la página siguiente

5. **[4 pts]** Considere los vectores $w = (-2,-2,1)$ y $r = (-1,2,1)$ en $\mathbb{R}^3$. Determine los vectores u y v que cumplan de manera simultánea las siguientes condiciones:

- u es paralelo a r.
- $2w + v = u$.
- v es ortogonal a w.

6. **[4 pts]** Halle la ecuación de un plano π que satisfaga simultáneamente las condiciones siguientes:

- Es paralelo al plano α que contiene a los puntos $A(1,3,0)$, $B(-2,0,4)$ y $C(0,1,1)$
- Contiene el punto $D(3,3,3)$

7. Considere la recta $L : (x,y,z) = (0,-3,2)+t(2,1,1)$ con $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi : 4x-3y+5z = 9$.

   a) **[3 pts]** Encuentre el punto P_0 de intersección entre L y π.

   b) **[2 pts]** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta N que es perpendicular al plano π y que contiene a P_0 .

8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

   a) **[2 pts]** Verifique que el vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz A.

   b) **[1 pto]** ¿A cuál valor propio de la matriz A, está asociado el vector propio v?