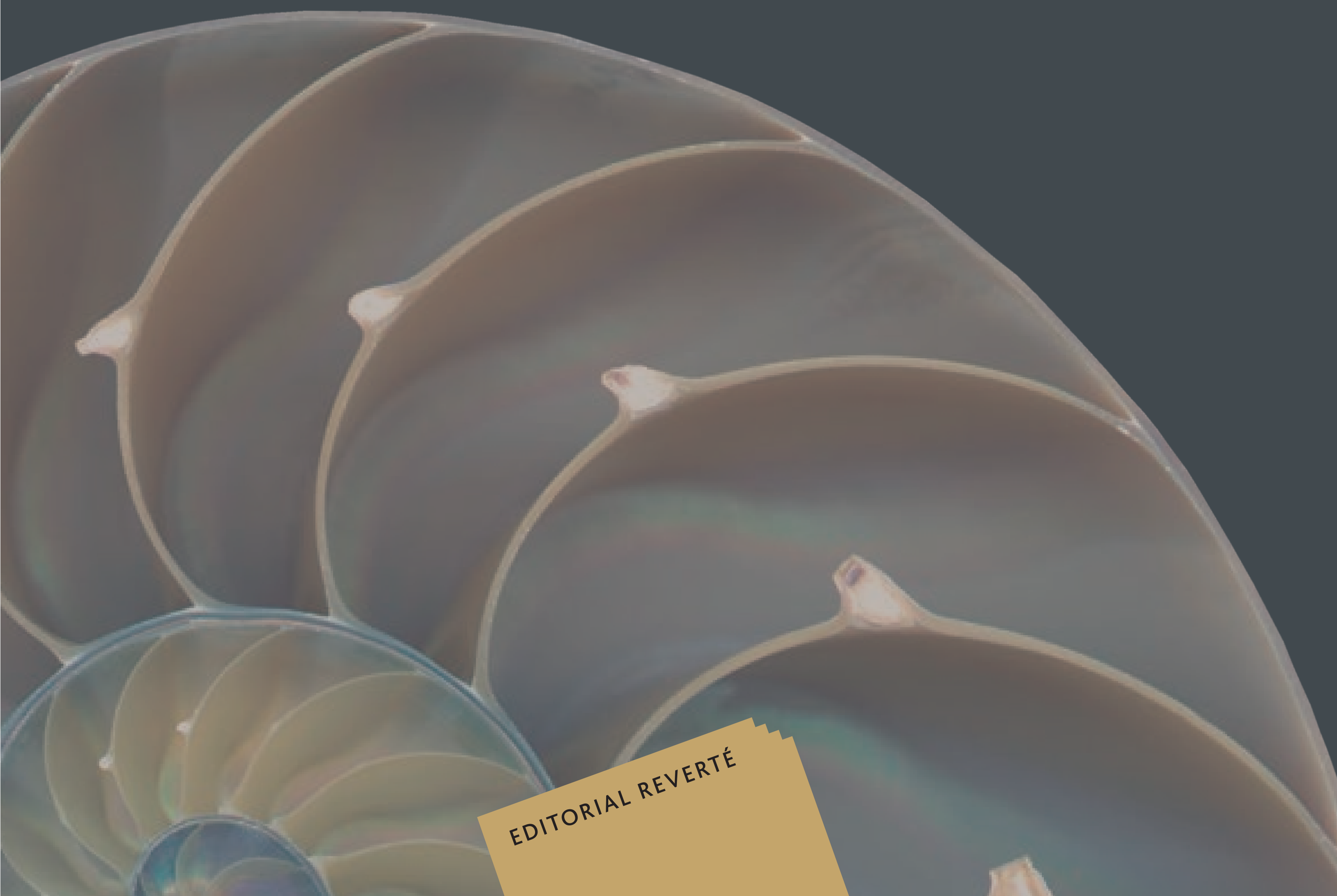
JON ROGAWSKI

CÁLCULO

UNA VARIABLE

Segunda edición



EDITORIAL REVERTÉ

CÁLCULO

UNA VARIABLE

Segunda edición

CÁLCULO

UNA VARIABLE

Segunda edición

JON ROGAWSKI

Universidad de California, Los Ángeles

Versión española traducida por:
Gloria García García
Doctora en Matemáticas

Revisada por:
Martín Jimeno Jiménez
Licenciado en Matemáticas
Profesor Asociado en la
Universitat Politècnica de Catalunya

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:
Calculus. Single Variable. Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada en los Estados Unidos por:
W. H. Freeman and Company, New York and Basingstoke

Edición en español:

Edición en papel:
ISBN: 978-84-291-5194-7

Edición e-book (PDF):
ISBN: 978-84-291-9419-7

Versión española traducida por:
Gloria García García
Doctora en Matemáticas

Revisada por:
Martín Jimeno Jiménez
Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona.
Profesor Asociado en la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

1381

A Julie

CONTENIDO RESUMIDO | CÁLCULO

UNA VARIABLE

Capítulo 1	REPASO DE CONCEPTOS PREVIOS	1
Capítulo 2	LÍMITES	40
Capítulo 3	DERIVACIÓN	101
Capítulo 4	APLICACIONES DE LA DERIVADA	175
Capítulo 5	LA INTEGRAL	244
Capítulo 6	APLICACIONES DE LA INTEGRAL	296
Capítulo 7	FUNCIONES EXPONENCIALES	339
Capítulo 8	TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN	413
Capítulo 9	OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL Y POLINOMIOS DE TAYLOR	478
Capítulo 10	INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	513
Capítulo 11	SERIES INFINITAS	543
Capítulo 12	ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS	613

APÉNDICES	A1
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES	A27
REFERENCIAS	A99
CRÉDITOS DE LAS FOTOS	A103
ÍNDICE DE MATERIAS	I1

VARIAS VARIABLES

Capítulo 12	ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS	613
Capítulo 13	GEOMETRÍA VECTORIAL	663
Capítulo 14	CÁLCULO PARA FUNCIONES VECTORIALES	729
Capítulo 15	DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES	780
Capítulo 16	INTEGRACIÓN MÚLTIPLE	866
Capítulo 17	INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE	945
Capítulo 18	TEOREMAS FUNDAMENTALES DE ANÁLISIS VECTORIAL	1009

APÉNDICES	A1
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES	A27
REFERENCIAS	A51
CRÉDITOS DE LAS FOTOS	A53
ÍNDICE DE MATERIAS	I1

CONTENIDO | UNA VARIABLE

Capítulo 1 REPASO DE CONCEPTOS PREVIOS 1

1.1 Números reales, funciones y gráficas 1
1.2 Funciones lineales y cuadráticas 13
1.3 Tipos básicos de funciones 21
1.4 Funciones trigonométricas 25
1.5 Tecnología: calculadoras y ordenadores 33

Capítulo 2 LÍMITES 40

2.1 Límites, tasas de cambio y rectas tangentes 40
2.2 Interpretación numérica y gráfica de los límites 48
2.3 Reglas básicas de los límites 58
2.4 Límites y continuidad 62
2.5 Cálculo algebraico de límites 71
2.6 Límites trigonométricos 76
2.7 Límites en el infinito 81
2.8 Teorema de los valores intermedios 87
2.9 Definición formal de límite 91

Capítulo 3 DERIVACIÓN 101

3.1 Definición de la derivada 101
3.2 La derivada como una función 110
3.3 Reglas del producto y del cociente 122
3.4 Tasas de variación 128
3.5 Derivadas de orden superior 138
3.6 Funciones trigonométricas 144
3.7 La regla de la cadena 148
3.8 Derivación implícita 157
3.9 Tasas relacionadas 163

Capítulo 4 APLICACIONES DE LA DERIVADA 175

4.1 Aproximación lineal y aplicaciones 175
4.2 Valores extremos 183
4.3 El teorema del valor medio y monotonía 194
4.4 La forma de una gráfica 201
4.5 Dibujo de gráficas y asíntotas 208
4.6 Optimización aplicada 216
4.7 Método de Newton 228
4.8 Primitivas 234

Capítulo 5 LA INTEGRAL 244

5.1 Aproximación y cálculo de áreas 244
5.2 Integral definida 257
5.3 El teorema fundamental del cálculo (TFC), 1ª parte 267
5.4 El teorema fundamental del cálculo (TFC), 2ª parte 273
5.5 Variación neta como la integral de una tasa 279
5.6 Método de sustitución 285

Capítulo 6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL 296

6.1 Área limitada por dos curvas 296
6.2 Cálculo con integrales: volumen, densidad, valor medio 304
6.3 Volúmenes de revolución 314
6.4 El método de las capas cilíndricas 323
6.5 Trabajo y energía 330

Capítulo 7 FUNCIONES EXPONENCIALES 339

7.1 Derivada de $f(x)=b^x$ y el número e 339
7.2 Funciones inversas 347
7.3 Logaritmos y sus derivadas 355
7.4 Crecimiento y decrecimiento exponencial 364
7.5 Interés compuesto y valor actual 371
7.6 Modelos que involucran $y'=k(y-b)$ 377
7.7 Regla de L'Hôpital 382
7.8 Funciones trigonométricas inversas 390
7.9 Funciones hiperbólicas 399

Capítulo 8 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN 413

8.1 Integración por partes 413
8.2 Integrales trigonométricas 418
8.3 Sustitución trigonométrica 426
8.4 Integrales involucrando funciones hiperbólicas y funciones hiperbólicas inversas 433
8.5 El método de las fracciones parciales 438
8.6 Integrales impropias 447
8.7 Probabilidad e integración 459
8.8 Integración numérica 465

Capítulo 9 OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL Y POLINOMIOS DE TAYLOR 478

9.1 Longitud de arco y área de una superficie 478
9.2 Presión en un fluido y fuerza 485
9.3 Centro de masa 491
9.4 Polinomios de Taylor 499

Capítulo 10 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES 513

10.1 Resolución de ecuaciones diferenciales 513
10.2 Métodos gráficos y numéricos 522
10.3 La ecuación logística 529
10.4 Ecuaciones lineales de primer orden 534

Capítulo 11 SERIES INFINITAS 543

11.1 Sucesiones 543
11.2 Suma de una serie infinita 554
11.3 Convergencia de series de términos positivos 565
11.4 Convergencia absoluta y convergencia condicional 575
11.5 El criterio de la razón y el de la raíz 581
11.6 Series de potencias 585
11.7 Series de Taylor 597

Capítulo 12 ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS 613

12.1 Ecuaciones paramétricas 613
12.2 La longitud de arco y la velocidad 626
12.3 Coordenadas polares 632
12.4 El área y la longitud de arco en coordenadas polares 640
12.5 Secciones cónicas 647

APÉNDICES A1

A. El lenguaje de las matemáticas A1
B. Propiedades de los números reales A8
C. Inducción y el teorema del binomio A13
D. Demostraciones adicionales A18

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES A27
REFERENCIAS A99
CRÉDITOS DE LAS FOTOS A103
ÍNDICE DE MATERIAS I1

SOBRE JON ROGAWSKI

Como reconocido profesor, con una trayectoria de más de 30 años, Jon Rogawski ha tenido la oportunidad de escuchar y aprender de sus propios estudiantes. Estas valiosas enseñanzas forman ya parte de su pensamiento, manera de escribir y de diseñar un libro de cálculo infinitesimal.

Jon Rogawski obtuvo su licenciatura y máster en matemáticas de forma simultánea por la Universidad de Yale y su doctorado en matemáticas por la Universidad de Princeton, donde estudió con Robert Langlands. Antes de unirse al Departamento de Matemáticas de la UCLA en 1986, donde actualmente es catedrático de matemáticas, fue profesor visitante en el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Bonn y en la Universidad de París en Jussieu y Orsay.

Las áreas de interés de Jon son teoría de números, formas automórficas y el análisis armónico sobre grupos semisimples. Ha publicado numerosos artículos de investigación en revistas matemáticas de primera línea, incluyendo el monográfico *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables* (Princeton University Press). Ha recibido una Beca Sloan y es editor del *Pacific Journal of Mathematics* y del *Transactions of the AMS*.

Jon y su esposa, Julie, médico de familia, tienen cuatro hijos. Gozan de una vida familiar activa y, siempre que pueden, disfrutan de las vacaciones familiares en las montañas de California. Jon es un apasionado de la música clásica y toca el violín y la guitarra clásica.

PREÁMBULO

SOBRE *CÁLCULO* por Jon Rogawski

Sobre la enseñanza de las matemáticas

En los inicios de mi carrera como profesor, me gustaba enseñar pero no me di cuenta de lo difícil que es comunicar con ef cacia las matemáticas. Al poco tiempo, en mi carrera como docente, tuve que enfrentarme a una rebelión estudiantil cuando mis esfuerzos para explicar las demostraciones epsilon-delta no fueron recibidos con el entusiasmo que yo esperaba. Experiencias de este tipo me enseñaron dos principios básicos:

1. Se debe intentar enseñar a los estudiantes tanto como sea posible, pero no más.
2. Como profesores de matemáticas, lo que decimos es tan importante como la manera en que lo decimos.

El lenguaje formal de las matemáticas puede intimidar a los no iniciados. Al presentar los conceptos mediante el lenguaje cotidiano, que es más familiar aunque no menos preciso, se abre el camino para que los estudiantes entiendan las ideas fundamentales e integrarlas en su forma de pensar. Los estudiantes se encuentran entonces en una posición más favorable para apreciar la necesidad de las def niciones formales y las demostraciones, y para comprender su lógica.

Sobre la confección de un libro de cálculo

Empecé a escribir *Cálculo* con el objetivo de crear un texto en el que la exposición, los gráf cos y el diseño se unieran para mejorar el entendimiento del cálculo para el estudiante: el dominio de las destrezas básicas, la comprensión conceptual y una apreciación de la amplia gama de aplicaciones. También quise que los estudiantes fueran conscientes, ya desde el inicio del curso, de la belleza de la materia y del importante papel que desempeñará, tanto en sus estudios como en su comprensión del mundo en general. Presté especial atención a los siguientes aspectos del texto:

(a) Claridad, explicación asequible que se anticipe y aborde las dif cultades de los estudiantes.
(b) Diseño y f guras que relacionen el f ujo de ideas.
(c) Elementos destacados en el texto que enfaticen los conceptos y el razonamiento matemático: Apunte conceptual, Apunte gráf co, Las hipótesis son importantes, Recordatorio y Perspectiva histórica.
(d) Una amplia colección de ejemplos y ejercicios de dif cultad gradual que enseñen las destrezas básicas y técnicas de resolución de problemas, refuercen la comprensión conceptual, y motiven el cálculo a través de aplicaciones interesantes. Cada sección contiene ejercicios en que se tratan nuevas ideas y retos para los estudiantes que les ayuden a desarrollar sus capacidades.

Animado por la respuesta entusiasta a la primera edición, en esta nueva edición me planteé el objetivo de desarrollar aún más estos puntos fuertes. Cada sección del texto ha sido revisada cuidadosamente. Durante el proceso de revisión, presté especial atención a los comentarios de los revisores y los estudiantes que han utilizado el libro. Sus ideas y creativas sugerencias han dado lugar a numerosas mejoras en el texto.

El cálculo inf nitesimal tiene un merecido papel central en la educación superior. No sólo es la clave para una amplia gama de disciplinas cuantitativas, sino que también es una componente crucial en el desarrollo intelectual del estudiante. Espero que esta nueva edición continúe siendo relevante en la apertura a los estudiantes al polifacético mundo del cálculo.

Mi libro de texto sigue una organización mayormente tradicional, aunque con algunas excepciones. Una de esas excepciones es la disposición de los polinomios de Taylor en el Capítulo 9.

Disposición de los polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor se encuentran el el capítulo 9, antes de las series inf nitas en el capítulo 11. Mi objetivo es introducir los polinomios de Taylor como una extensión natural de la aproximación lineal. Cuando explico las series inf nitas, me centro en la convergencia, un tema que muchos estudiantes encuentran estimulante. Después de estudiar los criterios de convergencia básicos y la convergencia de las series de potencias, los estudiantes se encuentran preparados para abordar las cuestiones derivadas de la representación de una función por su serie de Taylor. Pueden utilizar entonces sus conocimientos previos sobre polinomios de Taylor y sobre la cota de error del capítulo 9. Aún así, la sección sobre los polinomios de Taylor se ha diseñado de tal manera que se pueda tratar de forma conjunta con el material sobre series de potencias y series de Taylor del capítulo 11 si se pref ere este orden.

DESARROLLO ESMERADO Y METICULOSO

W. H. Freeman es conocida por sus libros de texto, y materiales adicionales, de gran calidad. Desde el inicio de este proyecto y a lo largo de su desarrollo y producción, se ha dado prioridad importante a la calidad y exactitud. Tenemos en marcha procedimientos sin precedentes para garantizar la precisión de todos los aspectos del texto:

- Ejercicios y ejemplos
- Exposición
- Figuras
- Edición
- Composición

En conjunto, estos procedimientos superan con creces los estándares previos de la industria para salvaguardar la calidad y la precisión de un libro de cálculo.

Nuevo en la segunda edición

Listas de problemas mejoradas... con aproximadamente un 25 % de problemas nuevos y de problemas revisados: Para matizar este destacado elemento del texto, las listas de problemas fueron revisadas extensamente por colaboradores externos. Basándose en parte en sus comentarios, el autor revisó cuidadosamente los problemas para mejorar su calidad y cantidad. Esta segunda edición presenta miles de nuevos y actualizados problemas.

Nueva y mayor variedad de aplicaciones: La segunda edición contiene muchos ejemplos y problemas nuevos centrados en aplicaciones innovadoras y contemporáneas de la ingeniería, la biología, la física, la administración de empresas, la economía, la medicina y las ciencias sociales.

Cambios en el contenido en respuesta a los usuarios y revisores, incluyendo:

- Capítulo 2: el tema "Límites en el inf nito" se ha movido del capítulo 4 a la sección 2.7.
- Capítulo 3: diferenciación –se ha ampliado el tratamiento de los diferenciales.
- Capítulo 8: se ha movido la integración numérica al f nal del capítulo, después de tratar todas las técnicas de integración.

- Nueva sección 8.7: Probabilidad e integración. En esta sección se presenta una aplicación básica de integración, de suma importancia en las ciencias físicas, así como en la administración de empresas y en las ciencias sociales.
- Los capítulos multivariables, elogiados por su intensidad en la primera edición, se han revisado y pulido.
- Nueva sección 16.5: Aplicaciones de las integrales múltiples.
- Revisión y mejora de los gráf cos en todo el libro.

MATERIALES ADICIONALES

Para el profesor

- Instructor's Solutions Manual
  Brian Bradie, Christopher Newport University; y Greg Dresden, Washington y Lee University
  Single Variable ISBN: 1-4292-4313-9
  Multivariable ISBN: 1-4292-5501-3
  Contiene soluciones desarrolladas para todos los problemas del libro.

- Test Bank
  Impreso, ISBN: 1-4292-4311-2
  CD-ROM, ISBN: 1-4292-4310-4
  Incluye preguntas de opción múltiple y de respuesta breve.

- Instructor's Resource Manual
  ISBN: 1-4292-4315-5
  Facilita la temporización sugerida, los elementos clave, material para las clases, temas de discusión, actividades de clase, hojas de trabajo y proyectos de grupo correspondientes a cada sección del texto.

- Instructor's Resource CD-ROM
  ISBN: 1-4292-4314-7
  Permite realizar búsquedas y exportar todos los recursos por concepto clave o por capítulo. Incluye el Instructor's Solutions Manual, Instructor's Resource Manual y el Test Bank.

Para el estudiante

- Free & Open Resources: bcs.whfreeman.com/calculus2e

- Software Manuals
  A través de CalcPortal se pueden obtener manuales de software para Maple y Mathematica. Estos manuales están disponibles en versiones impresas a través de publicaciones a medida. Sirven como introducción a estas populares opciones de software matemático y como guías para su uso con *Cálculo*, Segunda Edición.

- Sitio web de soporte **www.whfreeman.com/rogawski2e**

CARACTERÍSTICAS

Apuntes conceptuales fomentan la comprensión conceptual del cálculo explicando ideas importantes de manera clara pero informal.

UN APUNTE CONCEPTUAL La notación de Leibniz se usa por diferentes motivos. En primer lugar, recuerda que la derivada df/dx, aunque no es un cociente propiamente dicho, es un *límite* de cocientes $\Delta f/\Delta x$. En segundo lugar, esta notación especifica la variable independiente. Esto resulta útil cuando se emplean otras variables además de x. Por ejemplo, si la variable independiente es t, se escribe df/dt. En tercer lugar, se suele pensar en d/dx como en un "operador" que aplica la operación de derivación sobre las funciones. En otras palabras, se aplica el operador d/dx a f para obtener la derivada df/dx. Otras ventajas de la notación de Leibniz se pondrán de manifiesto cuando se trate la regla de la cadena en la sección 3.7.

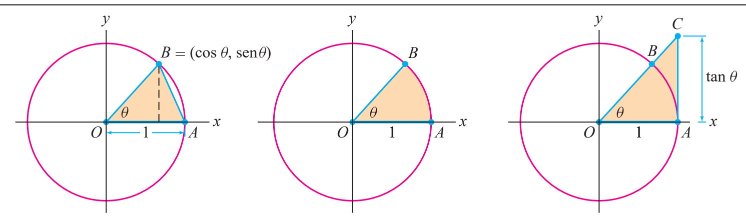
Cap. 3, p. 111

Apuntes gráficos mejoran la comprensión visual de los estudiantes poniendo de manifiesto las conexiones entre las propiedades gráficas y los conceptos subyacentes.

UN APUNTE GRÁFICO Tenga presente la interpretación gráfica de los límites. En la figura 4(A), $f(x)$ se aproxima a L cuando $x \to c$, porque para cada $\epsilon > 0$ se puede reducir la desviación por debajo de ϵ eligiendo δ suficientemente pequeño. Por el contrario, la función de la figura 4(B) presenta una discontinuidad de salto en $x = c$. La desviación no puede reducirse, sin importar lo pequeña que se escoja δ. Por este motivo, el límite no existe.

Cap. 2, p. 95

Recordatorios son notas al margen que enlazan la discusión que se lleva a cabo en ese momento con conceptos importantes que se han introducido previamente en el texto, para proporcionar a los estudiantes una revisión rápida y realizar conexiones entre ideas afines.



Área del triángulo $= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ Área del sector circular $= \frac{1}{2}\theta$ Área del triángulo $= \frac{1}{2}\tan\theta$

FIGURA 5

Demostración Suponga en primer lugar que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La demostración se va a basar en la siguiente relación entre las áreas de la figura 5:

$$\text{área de }\triangle OAB < \text{área del sector circular } BOA < \text{área de }\triangle OAC \qquad \boxed{2}$$

A continuación se van a calcular estas tres áreas. En primer lugar, la base de $\triangle OAB$ es 1 y su altura es $\operatorname{sen}\theta$, por lo que su área es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$. Ahora, recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ es $\frac{1}{2}\theta$. Finalmente, para calcular el área del triángulo $\triangle OAC$, observe que:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} = AC$$

Por tanto, como la base del triángulo $\triangle OAC$ es 1, y su altura es $\tan\theta$, su área será $\frac{1}{2}\tan\theta$. De esta manera, se ha demostrado que:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta}_{\text{Área }\triangle OAB} \le \underbrace{\frac{1}{2}\theta}_{\text{Área del sector}} \le \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}_{\text{Área }\triangle OAC} \qquad \boxed{3}$$

Según la primera desigualdad $\operatorname{sen}\theta \le \theta$ y, como $\theta > 0$, se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \le 1 \qquad \boxed{4}$$

← **RECORDATORIO** *Recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ en una circunferencia de radio r es $\frac{1}{2}r^2\theta$. La razón es la siguiente: un sector circular de ángulo θ representa una fracción de $\frac{\theta}{2\pi}$ de la circunferencia. El área de la circunferencia es πr^2, por lo que el área del sector circular es $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. Para la circunferencia unitaria ($r = 1$), el área del sector es $\frac{1}{2}\theta$.*

***Nota:** La demostración del teorema 3 utiliza la fórmula $\frac{1}{2}\theta$ para el área de un sector circular, pero ésta, a su vez, está basada en la fórmula πr^2 para el área de un círculo, cuya demostración completa requiere del cálculo integral.*

Cap. 2, p. 78

Atención estas anotaciones advierten a los estudiantes sobre escollos habituales con los que se pueden encontrar en la comprensión del material.

*ATENCIÓN La regla de la potencia se puede aplicar únicamente a las funciones potenciales $y = x^n$. No se puede aplicar a las funciones exponenciales como $y = 2^x$. La derivada de $y = 2^x$ **no es** $x2^{x-1}$. Se estudiarán las derivadas de las funciones exponenciales en esta sección, pero más adelante.*

Antes de continuar, he aquí algunas observaciones:

- Puede ser de ayuda recordar la regla de la potencia en palabras: para derivar x^n, "baje el exponente y reste uno (al exponente)".

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^{\text{exponente}} = (\text{exponente})\, x^{\text{exponente}-1}}$$

- La regla de la potencia es válida para cualquier exponente, ya sea negativo, fraccionario, o irracional:

$$\frac{d}{dx} x^{-3/5} = -\frac{3}{5} x^{-8/5}, \qquad \frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$$

Cap. 3, p. 112

Perspectivas históricas son breves viñetas que sitúan descubrimientos clave y avances conceptuales en su contexto histórico. Facilitan a los estudiantes un vistazo a algunos de los logros de los grandes matemáticos y una apreciación de su importancia.

Esta estatua de Isaac Newton en la Universidad de Cambridge se describe en *El Preludio*, un poema de William Wordsworth (1770-1850):

"Newton con su prisma y cara en silencio, El exponente en mármol de una mente Viajando para siempre a través de los mares extraños del Pensamiento, solo."

PERSPECTIVA HISTÓRICA

La filosofía está escrita en ese gran libro —el universo— que permanece abierto ante nuestros ojos, pero que no podremos entender hasta que no comprendamos el lenguaje... en el que está escrito: el lenguaje de las matemáticas...

GALILEO GALILEI, 1623

La revolución científica de los siglos XVI y XVII alcanzó su punto culminante en la obra de Isaac Newton (1643-1727), el primer científico que demostró que el mundo físico, a pesar de su complejidad y diversidad, está regido por un pequeño número de leyes universales. Una de las grandes intuiciones de Newton fue que las leyes del universo no describen el mundo tal como es, ni en el momento actual ni en ningún otro, sino cómo el mundo *cambia en el tiempo* en respuesta a diversas fuerzas. Estas leyes se expresan mejor en el lenguaje del cálculo infinitesimal, que son las matemáticas del cambio.

Más de cincuenta años antes de los trabajos de Newton, el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) descubrió sus tres leyes del movimiento planetario, una de las cuales postula que la trayectoria de cualquier planeta alrededor del Sol es una elipse. Kepler encontró esas leyes después de un análisis minucioso de muchísimos datos astronómicos, pero no pudo explicar por qué se cumplían. Las leyes de Newton explican el movimiento de cualquier objeto —desde un planeta hasta una canica— en términos de las fuerzas que actúan sobre él.

Según Newton, los planetas, si pudiesen moverse libremente, lo harían en trayectorias rectas. Puesto que sus trayectorias son en realidad elipses, debe existir alguna fuerza —en este caso, la atracción gravitatoria del Sol— que les haga cambiar de dirección continuamente. En su obra magna *Principia Mathematica*, publicada en 1687, Newton demostró que las leyes de Kepler se deducían de sus propias leyes de movimiento y de gravitación.

Por estos descubrimientos, Newton consiguió fama generalizada a lo largo de su vida. Su fama siguió creciendo después de su muerte, llegando a alcanzar una dimensión casi mítica, y sus ideas tuvieron una profunda influencia no sólo en la ciencia, sino también en las artes y la literatura, tal como lo expresa en su epitafio el poeta inglés Alexander Pope: "La Naturaleza y las leyes de la Naturaleza se escondían en la Noche. Dijo Dios, *Sea Newton!* y todo fue Luz".

Cap. 2, p. 41

Las hipótesis son importantes utiliza explicaciones cortas y contraejemplos bien escogidos para que los estudiantes valoren por qué se necesitan las hipótesis en los teoremas.

Resúmenes de la sección resume los puntos clave de una sección de manera concisa y útil para los estudiantes, y hace hincapié en lo que es más importante en cada sección.

Lista de problemas de la sección proporcionan un amplio conjunto de ejercicios en estrecha coordinación con el texto. Estos ejercicios varían en dif cultad desde rutinarios, a moderados y a más difíciles. También se incluyen iconos que indican los problemas que requieren respuesta por escrito o que hacen necesario el uso de tecnología T.

Problemas de repaso del capítulo ofrecen un amplio conjunto de ejercicios en estrecha coordinación con el material del capítulo para proporcionar más problemas para el estudio personal, o para las asignaciones.

AGRADECIMIENTOS

Jon Rogawski y W. H. Freeman and Company quieren agradecer a todos los profesores de Estados Unidos y Canadá que han proporcionado los comentarios que ayudaron en el desarrollo y el perfeccionamiento de este libro. Estas contribuciones incluyen pruebas en la clase, la revisión del manuscrito, la revisión de los problemas y la participación en las encuestas sobre el libro y sobre las necesidades de un curso genérico.

ALABAMA Tammy Potter, *Gadsden State Community College*; David Dempsey, *Jacksonville State University*; Douglas Bailer, *Northeast Alabama Community College*; Michael Hicks, *Shelton State Community College*; Patricia C. Eiland, *Troy University, Montgomery Campus*; James L. Wang, *The University of Alabama*; Stephen Brick, *University of South Alabama*; Joerg Feldvoss, *University of South Alabama* **ALASKA** Mark A. Fitch, *University of Alaska Anchorage*; Kamal Narang, *University of Alaska Anchorage*; Alexei Rybkin, *University of Alaska Fairbanks*; Martin Getz, *University of Alaska Fairbanks* **ARIZONA** Stefania Tracogna, *Arizona State University*; Bruno Welfert, *Arizona State University*; Light Bryant, *Arizona Western College*; Daniel Russow, *Arizona Western College*; Jennifer Jameson, *Coconino College*; George Cole, *Mesa Community College*; David Schultz, *Mesa Community College*; Michael Bezusko, *Pima Community College, Desert Vista Campus*; Garry Carpenter, *Pima Community College, Northwest Campus*; Paul Flasch, *Pima County Community College*; Jessica Knapp, *Pima Community College, Northwest Campus*; Roger Werbylo, *Pima County Community College*; Katie Louchart, *Northern Arizona University*; Janet McShane, *Northern Arizona University*; Donna M. Krawczyk, *The University of Arizona* **ARKANSAS** Deborah Parker, *Arkansas Northeastern College*; J. Michael Hall, *Arkansas State University*; Kevin Cornelius, *Ouachita Baptist University*; Hyungkoo Mark Park, *Southern Arkansas University*; Katherine Pinzon, *University of Arkansas at Fort Smith*; Denise LeGrand, *University of Arkansas at Little Rock*; John Annulis, *University of Arkansas at Monticello*; Erin Haller, *University of Arkansas, Fayetteville*; Daniel J. Arrigo, *University of Central Arkansas* **CALIFORNIA** Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Charles Hale, *California Polytechnic State University*; John M. Alongi, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; John Hagen, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Colleen Margarita Kirk, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Lawrence Sze, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Raymond Terry, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; James R. McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*; Robin Wilson, *California State Polytechnic University, Pomona*; Charles Lam, *California State University, Bakersf eld*; David McKay, *California State University, Long Beach*; Melvin Lax, *California State University, Long Beach*; Wallace A. Etterbeek, *California State University, Sacramento*; Mohamed Allali, *Chapman University*; George Rhys, *College of the Canyons*; Janice Hector, *DeAnza College*; Isabelle Saber, *Glendale Community College*; Peter Stathis, *Glendale Community College*; Douglas B. Lloyd, *Golden West College*; Thomas Scardina, *Golden West College*; Kristin Hartford, *Long Beach City College*; Eduardo Arismendi-Pardi, *Orange Coast College*; Mitchell Alves, *Orange Coast College*; Yenkanh Vu, *Orange Coast College*; Yan Tian, *Palomar College*; Donna E. Nordstrom, *Pasadena City College*; Don L. Hancock, *Pepperdine University*; Kevin Iga, *Pepperdine University*; Adolfo J. Rumbos, *Pomona College*; Carlos de la Lama, *San Diego City College*; Matthias Beck, *San Francisco State University*; Arek Goetz, *San Francisco State University*; Nick Bykov, *San Joaquin Delta College*; Eleanor Lang Kendrick, *San Jose City College*; Elizabeth Hodes, *Santa Barbara City College*; William Konya, *Santa Monica College*; John Kennedy, *Santa Monica College*; Peter Lee, *Santa Monica College*; Richard Salome, *Scotts Valley High School*; Norman Feldman, *Sonoma State University*; Elaine McDonald, *Sonoma State University*; John D. Eggers, *University of California, San Diego*; Bruno Nachtergaele, *University of California, Davis*; Boumediene Hamzi, *University of California, Davis*; Richard Leborne, *University of California, San Diego*; Peter Stevenhagen, *University of California, San Diego*; Jeffrey Stopple, *University of California, Santa Barbara*; Guofang Wei, *University of California, Santa Barbara*; Rick A. Simon, *University of La Verne*; Mohamad A. Alwash, *West Los Angeles College*; Calder Daenzer, *University of California, Berkeley*; Jude Thaddeus Socrates, *Pasadena City College*; Cheuk Ying Lam, *California State University Bakersf eld*; Borislava Gutarts, *California State University, Los Angeles*; Daniel Rogalski, *University of California, San Diego*; Don Hartig, *California Polytechnic State University*; Anne Voth, *Palomar College*; Jay Wiestling, *Palomar College*; Lindsey Bramlett-Smith, *Santa Barbara City College*; Dennis Morrow, *College of the Canyons*; Sydney Shanks, *College of the Canyons*; Bob Tolar, *College of the Canyons*; Gene W. Majors, *Fullerton College*; Robert Diaz, *Fullerton College*; Gregory Nguyen, *Fullerton College*; Paul Sjoberg, *Fullerton College*; Deborah Ritchie, *Moorpark College*; Maya Rahnamaie, *Moorpark College*; Kathy Fink, *Moorpark College*; Christine Cole, *Moorpark College*; K. Di Passero, *Moorpark College*; Sid Kolpas, *Glendale Community College*; Miriam Castrconde, *Irvine Valley College*; Ilkner Erbas-White, *Irvine Valley College*; Corey

Manchester, *Grossmont College*; Donald Murray, *Santa Monica College*; Barbara McGee, *Cuesta College*; Marie Larsen, *Cuesta College*; Joe Vasta, *Cuesta College*; Mike Kinter, *Cuesta College*; Mark Turner, *Cuesta College*; G. Lewis, *Cuesta College*; Daniel Kleinfelter, *College of the Desert*; Esmeralda Medrano, *Citrus College*; James Swatzel, *Citrus College*; Mark Littrell, *Rio Hondo College*; Rich Zucker, *Irvine Valley College*; Cindy Torigison, *Palomar College*; Craig Chamberline, *Palomar College*; Lindsey Lang, *Diablo Valley College*; Sam Needham, *Diablo Valley College*; Dan Bach, *Diablo Valley College*; Ted Nirgiotis, *Diablo Valley College*; Monte Collazo, *Diablo Valley College*; Tina Levy, *Diablo Valley College*; Mona Panchal, *East Los Angeles College*; Ron Sandvick, *San Diego Mesa College*; Larry Handa, *West Valley College*; Frederick Utter, *Santa Rose Junior College*; Farshod Mosh, *DeAnza College*; Doli Bambhania, *DeAnza College*; Charles Klein, *DeAnza College*; Tammi Marshall, *Cauyamaca College*; Inwon Leu, *Cauyamaca College*; Michael Moretti, *Bakersf eld College*; Janet Tarjan, *Bakersf eld College*; Hoat Le, *San Diego City College*; Richard Fielding, *Southwestern College*; Shannon Gracey, *Southwestern College*; Janet Mazzarella, *Southwestern College*; Christina Soderlund, *California Lutheran University*; Rudy Gonzalez, *Citrus College*; Robert Crise, *Crafton Hills College*; Joseph Kazimir, *East Los Angeles College*; Randall Rogers, *Fullerton College*; Peter Bouzar, *Golden West College*; Linda Ternes, *Golden West College*; Hsiao-Ling Liu, *Los Angeles Trade Tech Community College*; Yu-Chung Chang-Hou, *Pasadena City College*; Guillermo Alvarez, *San Diego City College*; Ken Kuniyuki, *San Diego Mesa College*; Laleh Howard, *San Diego Mesa College*; Sharareh Masooman, *Santa Barbara City College*; Jared Hersh, *Santa Barbara City College*; Betty Wong, *Santa Monica College*; Brian Rodas, *Santa Monica College* **COLORADO** Tony Weathers, *Adams State College*; Erica Johnson, *Arapahoe Community College*; Karen Walters, *Arapahoe Community College*; Joshua D. Laison, *Colorado College*; G. Gustave Greivel, *Colorado School of Mines*; Jim Thomas, *Colorado State University*; Eleanor Storey, *Front Range Community College*; Larry Johnson, *Metropolitan State College of Denver*; Carol Kuper, *Morgan Community College*; Larry A. Pontaski, *Pueblo Community College*; Terry Chen Reeves, *Red Rocks Community College*; Debra S. Carney, *University of Denver*; Louis A. Talman, *Metropolitan State College of Denver*; Mary A. Nelson, *University of Colorado at Boulder*; J. Kyle Pula, *University of Denver*; Jon Von Stroh, *University of Denver*; Sharon Butz, *University of Denver*; Daniel Daly, *University of Denver*; Tracy Lawrence, *Arapahoe Community College*; Shawna Mahan, *University of Colorado Denver*; Adam Norris, *University of Colorado at Boulder*; Anca Radulescu, *University of Colorado at Boulder*; Mike Kawai, *University of Colorado Denver*; Janet Barnett, *Colorado State University–Pueblo*; Byron Hurley, *Colorado State University–Pueblo*; Jonathan Portiz, *Colorado State University–Pueblo*; Bill Emerson, *Metropolitan State College of Denver*; Suzanne Caulk, *Regis University*; Anton Dzhamay, *University of Northern Colorado* **CONNECTICUT** Jeffrey McGowan, *Central Connecticut State University*; Ivan Gotchev, *Central Connecticut State University*; Charles Waiveris, *Central Connecticut State University*; Christopher Hammond, *Connecticut College*; Kim Ward, *Eastern Connecticut State University*; Joan W. Weiss, *Fairf eld University*; Theresa M. Sandifer, *Southern Connecticut State University*; Cristian Rios, *Trinity College*; Melanie Stein, *Trinity College*; Steven Orszag, *Yale University* **DELAWARE** Patrick F. Mwerinde, *University of Delaware* **DISTRICT OF COLUMBIA** Jeffrey Hakim, *American University*; Joshua M. Lansky, *American University*; James A. Nickerson, *Gallaudet University* **FLORIDA** Abbas Zadegan, *Florida International University*; Gerardo Aladro, *Florida International University*; Gregory Henderson, *Hillsborough Community College*; Pam Crawford, *Jacksonville University*; Penny Morris, *Polk Community College*; George Schultz, *St. Petersburg College*; Jimmy Chang, *St. Petersburg College*; Carolyn Kistner, *St. Petersburg College*; Aida Kadic-Galeb, *The University of Tampa*; Constance Schober, *University of Central Florida*; S. Roy Choudhury, *University of Central Florida*; Kurt Overhiser, *Valencia Community College*; Jiongmin Yong, *University of Central Florida*; Giray Okten, *The Florida State University*; Frederick Hoffman, *Florida Atlantic University*; Thomas Beatty, *Florida Gulf Coast University*; Witny Librun, *Palm Beach Community College North*; Joe Castillo, *Broward County College*; Joann Lewin, *Edison College*; Donald Ransford, *Edison College*; Scott Berthiaume, *Edison College*; Alexander Ambrioso, *Hillsborough Community College*; Jane Golden, *Hillsborough Community College*; Susan Hiatt, *Polk Community College–Lakeland Campus*; Li Zhou, *Polk Community College–Winter Haven Campus*; Heather Edwards, *Seminole Community College*; Benjamin Landon, *Daytona State College*; Tony Malaret, *Seminole Community College*; Lane Vosbury, *Seminole Community College*; William Rickman, *Seminole Community College*; Cheryl Cantwell, *Seminole Community College*; Michael Schramm, *Indian River State*

College; Janette Campbell, *Palm Beach Community College–Lake Worth* **GEORGIA** Thomas T. Morley, *Georgia Institute of Technology*; Ralph Wildy, *Georgia Military College*; Shahram Nazari, *Georgia Perimeter College*; Alice Eiko Pierce, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Susan Nelson, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Laurene Fausett, *Georgia Southern University*; Scott N. Kersey, *Georgia Southern University*; Jimmy L. Solomon, *Georgia Southern University*; Allen G. Fuller, *Gordon College*; Marwan Zabdawi, *Gordon College*; Carolyn A. Yackel, *Mercer University*; Shahryar Heydari, *Piedmont College*; Dan Kannan, *The University of Georgia*; Abdelkrim Brania, *Morehouse College*; Ying Wang, *Augusta State University*; James M. Benedict, *Augusta State University*; Kouong Law, *Georgia Perimeter College*; Rob Williams, *Georgia Perimeter College*; Alvina Atkinson, *Georgia Gwinnett College*; Amy Erickson, *Georgia Gwinnett College* **HAWAII** Shuguang Li, *University of Hawaii at Hilo*; Raina B. Ivanova, *University of Hawaii at Hilo* **IDAHO** Charles Kerr, *Boise State University*; Otis Kenny, *Boise State University*; Alex Feldman, *Boise State University*; Doug Bullock, *Boise State University*; Ed Korntved, *Northwest Nazarene University* **ILLINOIS** Chris Morin, *Blackburn College*; Alberto L. Delgado, *Bradley University*; John Haverhals, *Bradley University*; Herbert E. Kasube, *Bradley University*; Marvin Doubet, *Lake Forest College*; Marvin A. Gordon, *Lake Forest Graduate School of Management*; Richard J. Maher, *Loyola University Chicago*; Joseph H. Mayne, *Loyola University Chicago*; Marian Gidea, *Northeastern Illinois University*; Miguel Angel Lerma, *Northwestern University*; Mehmet Dik, *Rockford College*; Tammy Voepel, *Southern Illinois University Edwardsville*; Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*; Thomas Smith, *University of Chicago*; Laura DeMarco, *University of Illinois*; Jennifer McNeilly, *University of Illinois at Urbana-Champaign*; Manouchehr Azad, *Harper College*; Minhua Liu, *Harper College*; Mary Hill, *College of DuPage*; Arthur N. DiVito, *Harold Washington College* **INDIANA** Julie A. Killingbeck, *Ball State University*; John P. Boardman, *Franklin College*; Robert N. Talbert, *Franklin College*; Robin Symonds, *Indiana University Kokomo*; Henry L. Wyzinski, *Indiana University Northwest*; Melvin Royer, *Indiana Wesleyan University*; Gail P. Greene, *Indiana Wesleyan University*; David L. Finn, *Rose-Hulman Institute of Technology* **IOWA** Nasser Dastrange, *Buena Vista University*; Mark A. Mills, *Central College*; Karen Ernst, *Hawkeye Community College*; Richard Mason, *Indian Hills Community College*; Robert S. Keller, *Loras College*; Eric Robert Westlund, *Luther College*; Weimin Han, *The University of Iowa* **KANSAS** Timothy W. Flood, *Pittsburg State University*; Sarah Cook, *Washburn University*; Kevin E. Charlwood, *Washburn University*; Conrad Uwe, *Cowley County Community College* **KENTUCKY** Alex M. McAllister, *Center College*; Sandy Spears, *Jefferson Community & Technical College*; Leanne Faulkner, *Kentucky Wesleyan College*; Donald O. Clayton, *Madisonville Community College*; Thomas Riedel, *University of Louisville*; Manabendra Das, *University of Louisville*; Lee Larson, *University of Louisville*; Jens E. Harlander, *Western Kentucky University*; Philip McCartney, *Northern Kentucky University*; Andy Long, *Northern Kentucky University*; Omer Yayenie, *Murray State University*; Donald Krug, *Northern Kentucky University* **LOUISIANA** William Forrest, *Baton Rouge Community College*; Paul Wayne Britt, *Louisiana State University*; Galen Turner, *Louisiana Tech University*; Randall Wills, *Southeastern Louisiana University*; Kent Neuerburg, *Southeastern Louisiana University*; Guoli Ding, *Louisiana State University*; Julia Ledet, *Louisiana State University* **MAINE** Andrew Knightly, *The University of Maine*; Sergey Lvin, *The University of Maine*; Joel W. Irish, *University of Southern Maine*; Laurie Woodman, *University of Southern Maine*; David M. Bradley, *The University of Maine*; William O. Bray, *The University of Maine* **MARYLAND** Leonid Stern, *Towson University*; Mark E. Williams, *University of Maryland Eastern Shore*; Austin A. Lobo, *Washington College*; Supawan Lertskrai, *Harford Community College*; Fary Sami, *Harford Community College*; Andrew Bulleri, *Howard Community College* **MASSACHUSETTS** Sean McGrath, *Algonquin Regional High School*; Norton Starr, *Amherst College*; Renato Mirollo, *Boston College*; Emma Previato, *Boston University*; Richard H. Stout, *Gordon College*; Matthew P. Leingang, *Harvard University*; Suellen Robinson, *North Shore Community College*; Walter Stone, *North Shore Community College*; Barbara Loud, *Regis College*; Andrew B. Perry, *Springf eld College*; Tawanda Gwena, *Tufts University*; Gary Simundza, *Wentworth Institute of Technology*; Mikhail Chkhenkeli, *Western New England College*; David Daniels, *Western New England College*; Alan Gorf n, *Western New England College*; Saeed Ghahramani, *Western New England College*; Julian Fleron, *Westf eld State College*; Brigitte Servatius, *Worcester Polytechnic Institute*; John Goulet, *Worcester Polytechnic Institute*; Alexander Martsinkovsky, *Northeastern University*; Marie Clote, *Boston College* **MICHIGAN** Mark E. Bollman, *Albion College*; Jim Chesla, *Grand*

Rapids Community College; Jeanne Wald, *Michigan State University*; Allan A. Struthers, *Michigan Technological University*; Debra Pharo, *Northwestern Michigan College*; Anna Maria Spagnuolo, *Oakland University*; Diana Faoro, *Romeo Senior High School*; Andrew Strowe, *University of Michigan–Dearborn*; Daniel Stephen Drucker, *Wayne State University*; Christopher Cartwright, *Lawrence Technological University*; Jay Treiman, *Western Michigan University* **MINNESOTA** Bruce Bordwell, *Anoka-Ramsey Community College*; Robert Dobrow, *Carleton College*; Jessie K. Lenarz, *Concordia College–Moorhead Minnesota*; Bill Tomhave, *Concordia College*; David L. Frank, *University of Minnesota*; Steven I. Sperber, *University of Minnesota*; Jeffrey T. McLean, *University of St. Thomas*; Chehrzad Shakiban, *University of St. Thomas*; Melissa Loe, *University of St. Thomas*; Nick Christopher Fiala, *St. Cloud State University*; Victor Padron, *Normandale Community College*; Mark Ahrens, *Normandale Community College*; Gerry Naughton, *Century Community College*; Carrie Naughton, *Inver Hills Community College* **MISSISSIPPI** Vivien G. Miller, *Mississippi State University*; Ted Dobson, *Mississippi State University*; Len Miller, *Mississippi State University*; Tristan Denley, *The University of Mississippi* **MISSOURI** Robert Robertson, *Drury University*; Gregory A. Mitchell, *Metropolitan Community College–Penn Valley*; Charles N. Curtis, *Missouri Southern State University*; Vivek Narayanan, *Moberly Area Community College*; Russell Blyth, *Saint Louis University*; Blake Thornton, *Saint Louis University*; Kevin W. Hopkins, *Southwest Baptist University*; Joe Howe, *St. Charles Community College*; Wanda Long, *St. Charles Community College*; Andrew Stephan, *St. Charles Community College* **MONTANA** Kelly Cline, *Carroll College*; Richard C. Swanson, *Montana State University*; Nikolaus Vonessen, *The University of Montana* **NEBRASKA** Edward G. Reinke Jr., *Concordia University*; Judith Downey, *University of Nebraska at Omaha* **NEVADA** Rohan Dalpatadu, *University of Nevada, Las Vegas*; Paul Aizley, *University of Nevada, Las Vegas* **NEW HAMPSHIRE** Richard Jardine, *Keene State College*; Michael Cullinane, *Keene State College*; Roberta Kieronski, *University of New Hampshire at Manchester*; Erik Van Erp, *Dartmouth College* **NEW JERSEY** Paul S. Rossi, *College of Saint Elizabeth*; Mark Galit, *Essex County College*; Katarzyna Potocka, *Ramapo College of New Jersey*; Nora S. Thornber, *Raritan Valley Community College*; Avraham Soffer, *Rutgers, The State University of New Jersey*; Chengwen Wang, *Rutgers, The State University of New Jersey*; Stephen J. Greenf eld, *Rutgers, The State University of New Jersey*; John T. Saccoman, *Seton Hall University*; Lawrence E. Levine, *Stevens Institute of Technology*; Barry Burd, *Drew University*; Penny Luczak, *Camden County College*; John Climent, *Cecil Community College*; Kristyanna Erickson, *Cecil Community College*; Eric Compton, *Brookdale Community College*; John Atsu-Swanzy, *Atlantic Cape Community College* **NEW MEXICO** Kevin Leith, *Central New Mexico Community College*; David Blankenbaker, *Central New Mexico Community College*; Joseph Lakey, *New Mexico State University*; Kees Onneweer, *University of New Mexico*; Jurg Bolli, *The University of New Mexico* **NEW YORK** Robert C. Williams, *Alfred University*; Timmy G. Bremer, *Broome Community College State University of New York*; Joaquin O. Carbonara, *Buffalo State College*; Robin Sue Sanders, *Buffalo State College*; Daniel Cunningham, *Buffalo State College*; Rose Marie Castner, *Canisius College*; Sharon L. Sullivan, *Catawba College*; Camil Muscalu, *Cornell University*; Maria S. Terrell, *Cornell University*; Margaret Mulligan, *Dominican College of Blauvelt*; Robert Andersen, *Farmingdale State University of New York*; Leonard Nissim, *Fordham University*; Jennifer Roche, *Hobart and William Smith Colleges*; James E. Carpenter, *Iona College*; Peter Shenkin, *John Jay College of Criminal Justice/CUNY*; Gordon Crandall, *LaGuardia Community College/CUNY*; Gilbert Traub, *Maritime College, State University of New York*; Paul E. Seeburger, *Monroe Community College Brighton Campus*; Abraham S. Mantell, *Nassau Community College*; Daniel D. Birmajer, *Nazareth College*; Sybil G. Shaver, *Pace University*; Margaret Kiehl, *Rensselaer Polytechnic Institute*; Carl V. Lutzer, *Rochester Institute of Technology*; Michael A. Radin, *Rochester Institute of Technology*; Hossein Shahmohamad, *Rochester Institute of Technology*; Thomas Rousseau, *Siena College*; Jason Hofstein, *Siena College*; Leon E. Gerber, *St. Johns University*; Christopher Bishop, *Stony Brook University*; James Fulton, *Suffolk County Community College*; John G. Michaels, *SUNY Brockport*; Howard J. Skogman, *SUNY Brockport*; Cristina Bacuta, *SUNY Cortland*; Jean Harper, *SUNY Fredonia*; Kelly Black, *Union College*; Thomas W. Cusick, *University at Buffalo/The State University of New York*; Gino Biondini, *University at Buffalo/The State University of New York*; Robert Koehler, *University at Buffalo/The State University of New York*; Robert Thompson, *Hunter College*; Ed Grossman, *The City College of New York* **NORTH CAROLINA** Jeffrey Clark, *Elon University*; William L. Burgin, *Gaston College*; Manouchehr H. Misaghian, *Johnson C. Smith University*; Legunchim

L. Emmanwori, *North Carolina A&T State University*; Drew Pasteur, *North Carolina State University*; Demetrio Labate, *North Carolina State University*; Mohammad Kazemi, *The University of North Carolina at Charlotte*; Richard Carmichael, *Wake Forest University*; Gretchen Wilke Whipple, *Warren Wilson College*; John Russell Taylor, *University of North Carolina at Charlotte*; Mark Ellis, *Piedmont Community College* **NORTH DAKOTA** Anthony J. Bevelacqua, *The University of North Dakota*; Richard P. Millspaugh, *The University of North Dakota*; Thomas Gilsdorf, *The University of North Dakota*; Michele Iiams, *The University of North Dakota* **OHIO** Christopher Butler, *Case Western Reserve University*; Pamela Pierce, *The College of Wooster*; Tzu-Yi Alan Yang, *Columbus State Community College*; Greg S. Goodhart, *Columbus State Community College*; Kelly C. Stady, *Cuyahoga Community College*; Brian T. Van Pelt, *Cuyahoga Community College*; David Robert Ericson, *Miami University*; Frederick S. Gass, *Miami University*; Thomas Stacklin, *Ohio Dominican University*; Vitaly Bergelson, *The Ohio State University*; Robert Knight, *Ohio University*; John R. Pather, *Ohio University, Eastern Campus*; Teresa Contenza, *Otterbein College*; Ali Hajjafar, *The University of Akron*; Jianping Zhu, *The University of Akron*; Ian Clough, *University of Cincinnati Clermont College*; Atif Abueida, *University of Dayton*; Judith McCrory, *The University at Findlay*; Thomas Smotzer, *Youngstown State University*; Angela Spalsbury, *Youngstown State University*; James Osterburg, *The University of Cincinnati*; Frederick Thulin, *University of Illinois at Chicago*; Weimin Han, *The Ohio State University*; Critchton Ogle, *The Ohio State University*; Jackie Miller, *The Ohio State University*; Walter Mackey, *Owens Community College*; Jonathan Baker, *Columbus State Community College* **OKLAHOMA** Michael McClendon, *University of Central Oklahoma*; Teri Jo Murphy, *The University of Oklahoma*; Shirley Pomeranz, *University of Tulsa* **OREGON** Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*; Angela Martinek, *Linn-Benton Community College*; Tevian Dray, *Oregon State University*; Mark Ferguson, *Chemekata Community College*; Andrew Flight, *Portland State University* **PENNSYLVANIA** John B. Polhill, *Bloomsburg University of Pennsylvania*; Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*; Jon A. Beal, *Clarion University of Pennsylvania*; Kathleen Kane, *Community College of Allegheny County*; David A. Santos, *Community College of Philadelphia*; David S. Richeson, *Dickinson College*; Christine Marie Cedzo, *Gannon University*; Monica Pierri-Galvao, *Gannon University*; John H. Ellison, *Grove City College*; Gary L. Thompson, *Grove City College*; Dale McIntyre, *Grove City College*; Dennis Benchoff, *Harrisburg Area Community College*; William A. Drumin, *King's College*; Denise Reboli, *King's College*; Chawne Kimber, *Lafeyette College*; David L. Johnson, *Lehigh University*; Zia Uddin, *Lock Haven University of Pennsylvania*; Donna A. Dietz, *Mansf eld University of Pennsylvania*; Samuel Wilcock, *Messiah College*; Neena T. Chopra, *The Pennsylvania State University*; Boris A. Datskovsky, *Temple University*; Dennis M. DeTurck, *University of Pennsylvania*; Jacob Burbea, *University of Pittsburgh*; Mohammed Yahdi, *Ursinus College*; Timothy Feeman, *Villanova University*; Douglas Norton, *Villanova University*; Robert Styer, *Villanova University*; Peter Brooksbank, *Bucknell University*; Larry Friesen, *Butler County Community College*; Lisa Angelo, *Bucks County College*; Elaine Fitt, *Bucks County College*; Pauline Chow, *Harrisburg Area Community College*; Diane Benner, *Harrisburg Area Community College*; Emily B. Dryden, *Bucknell University* **RHODE ISLAND** Thomas F. Banchoff, *Brown University*; Yajni Warnapala-Yehiya, *Roger Williams University*; Carol Gibbons, *Salve Regina University*; Joe Allen, *Community College of Rhode Island*; Michael Latina, *Community College of Rhode Island* **SOUTH CAROLINA** Stanley O. Perrine, *Charleston Southern University*; Joan Hoffacker, *Clemson University*; Constance C. Edwards, *Coastal Carolina University*; Thomas L. Fitzkee, *Francis Marion University*; Richard West, *Francis Marion University*; John Harris, *Furman University*; Douglas B. Meade, *University of South Carolina*; George Androulakis, *University of South Carolina*; Art Mark, *University of South Carolina Aiken*; Sherry Biggers, *Clemson University*; Mary Zachary Krohn, *Clemson University*; Andrew Incognito, *Coastal Carolina University*; Deanna Caveny, *College of Charleston* **SOUTH DAKOTA** Dan Kemp, *South Dakota State University* **TENNESSEE** Andrew Miller, *Belmont University*; Arthur A. Yanushka, *Christian Brothers University*; Laurie Plunk Dishman, *Cumberland University*; Beth Long, *Pellissippi State Technical Community College*; Judith Fethe, *Pellissippi State Technical Community College*; Andrzej Gutek, *Tennessee Technological University*; Sabine Le Borne, *Tennessee Technological University*; Richard Le Borne, *Tennessee Technological University*; Jim Conant, *The University of Tennessee*; Pavlos Tzermias, *The University of Tennessee*; Jo Ann W. Staples, *Vanderbilt University*; Dave Vinson, *Pellissippi State Community College*; Jonathan Lamb, *Pellissippi State Community College* **TEXAS** Sally Haas, *Angelina*

College; Michael Huff, *Austin Community College*; Scott Wilde, *Baylor University and The University of Texas at Arlington*; Rob Eby, *Blinn College*; Tim Sever, *Houston Community College–Central*; Ernest Lowery, *Houston Community College–Northwest*; Shirley Davis, *South Plains College*; Todd M. Steckler, *South Texas College*; Mary E. Wagner-Krankel, *St. Mary's University*; Elise Z. Price, *Tarrant County College, Southeast Campus*; David Price, *Tarrant County College, Southeast Campus*; Michael Stecher, *Texas A&M University*; Philip B. Yasskin, *Texas A&M University*; Brock Williams, *Texas Tech University*; I. Wayne Lewis, *Texas Tech University*; Robert E. Byerly, *Texas Tech University*; Ellina Grigorieva, *Texas Woman's University*; Abraham Haje, *Tomball College*; Scott Chapman, *Trinity University*; Elias Y. Deeba, *University of Houston Downtown*; Jianping Zhu, *The University of Texas at Arlington*; Tuncay Aktosun, *The University of Texas at Arlington*; John E. Gilbert, *The University of Texas at Austin*; Jorge R. Viramontes-Olivias, *The University of Texas at El Paso*; Melanie Ledwig, *The Victoria College*; Gary L. Walls, *West Texas A&M University*; William Heierman, *Wharton County Junior College*; Lisa Rezac, *University of St. Thomas*; Raymond J. Cannon, *Baylor University*; Kathryn Flores, *McMurry University*; Jacqueline A. Jensen, *Sam Houston State University*; James Galloway, *Collin County College*; Raja Khoury, *Collin County College*; Annette Benbow, *Tarrant County College–Northwest*; Greta Harland, *Tarrant County College–Northeast*; Doug Smith, *Tarrant County College–Northeast*; Marcus McGuff, *Austin Community College*; Clarence McGuff, *Austin Community College*; Steve Rodi, *Austin Community College*; Vicki Payne, *Austin Community College*; Anne Pradera, *Austin Community College*; Christy Babu, *Laredo Community College*; Deborah Hewitt, *McLennan Community College*; W. Duncan, *McLennan Community College*; Hugh Griff th, *Mt. San Antonio College* **UTAH** Jason Isaac Preszler, *The University of Utah*; Ruth Trygstad, *Salt Lake City Community College* **VIRGINIA** Verne E. Leininger, *Bridgewater College*; Brian Bradie, *Christopher Newport University*; Hongwei Chen, *Christopher Newport University*; John J. Avioli, *Christopher Newport University*; James H. Martin, *Christopher Newport University*; Mike Shirazi, *Germanna Community College*; Ramon A. Mata-Toledo, *James Madison University*; Adrian Riskin, *Mary Baldwin College*; Josephine Letts, *Ocean Lakes High School*; Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*; Deborah Denvir, *Randolph-Macon Woman's College*; Linda Powers, *Virginia Tech*; Gregory Dresden, *Washington and Lee University*; Jacob A. Siehler, *Washington and Lee University*; Nicholas Hamblet, *University of Virginia*; Lester Frank Caudill, *University of Richmond* **VERMONT** David Dorman, *Middlebury College*; Rachel Repstad, *Vermont Technical College* **WASHINGTON** Jennifer Laveglia, *Bellevue Community College*; David Whittaker, *Cascadia Community College*; Sharon Saxton, *Cascadia Community College*; Aaron Montgomery, *Central Washington University*; Patrick Averbeck, *Edmonds Community College*; Tana Knudson, *Heritage University*; Kelly Brooks, *Pierce College*; Shana P. Calaway, *Shoreline Community College*; Abel Gage, *Skagit Valley College*; Scott MacDonald, *Tacoma Community College*; Martha A. Gady, *Whitworth College*; Wayne L. Neidhardt, *Edmonds Community College*; Simrat Ghuman, *Bellevue College*; Jeff Eldridge, *Edmonds Community College*; Kris Kissel, *Green River Community College*; Laura Moore-Mueller, *Green River Community College*; David Stacy, *Bellevue College*; Eric Schultz, *Walla Walla Community College*; Julianne Sachs, *Walla Walla Community College* **WEST VIRGINIA** Ralph Oberste-Vorth, *Marshall University*; Suda Kunyosying, *Shepard University*; Nicholas Martin, *Shepherd University*; Rajeev Rajaram, *Shepherd University*; Xiaohong Zhang, *West Virginia State University*; Sam B. Nadler, *West Virginia University* **WYOMING** Claudia Stewart, *Casper College*; Pete Wildman, *Casper College*; Charles Newberg, *Western Wyoming Community College*; Lynne Ipina, *University of Wyoming*; John Spitler, *University of Wyoming* **WISCONSIN** Paul Bankston, *Marquette University*; Jane Nichols, *Milwaukee School of Engineering*; Yvonne Yaz, *Milwaukee School of Engineering*; Terry Nyman, *University of Wisconsin–Fox Valley*; Robert L. Wilson, *University of Wisconsin–Madison*; Dietrich A. Uhlenbrock, *University of Wisconsin–Madison*; Paul Milewski, *University of Wisconsin–Madison*; Donald Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*; Kandasamy Muthuvel, *University of Wisconsin–Oshkosh*; Sheryl Wills, *University of Wisconsin–Platteville*; Kathy A. Tomlinson, *University of Wisconsin–River Falls*; Joy Becker, *University of Wisconsin-Stout*; Jeganathan Sriskandarajah , *Madison Area Tech College*; Wayne Sigelko, *Madison Area Tech College* **CANADA** Don St. Jean, *George Brown College*; Len Bos, *University of Calgary*; Tony Ware, *University of Calgary*; Peter David Papez, *University of Calgary*; John O'Conner, *Grant MacEwan University*; Michael P. Lamoureux, *University of Calgary*; Yousry Elsabrouty, *University of Calgary*; Douglas Farenick, *University of Regina*

Es una tarea agradable agradecer a las personas cuya orientación y apoyo fue crucial para poder llevar esta nueva edición a buen término. Tuve la suerte de que Tony Palermino continuó siendo mi editor. Estoy contento de poder darle las gracias de nuevo por sus conocimientos, por su dedicación al proyecto y por las mejoras que propuso, demasiado numerosas para ser detalladas en este momento.

Quiero agradecer a los muchos matemáticos que generosamente han compartido sus valiosas ideas, crítica constructiva y problemas innovadores. Estoy particularmente agradecido a los profesores Elka Block, Brian Bradie, C. K. Cheung, Greg Dresden, Stephen Greenf eld, John Kennedy, Frank Purcell y Jude Socrates y a Frances Hammock, Don Larson, Nikki Meshkat y Jane Sherman por su valiosa ayuda. También quiero agradecer a Ricardo Chavez y a los Profesores Elena Galaktionova, Istvan Kovacs y Jiri Lebl por sus valiosos y perspicaces comentarios.

Mi más sincero agradecimiento a Terri Ward por la gestión de esta Segunda Edición con gran habilidad y gracia, y a Julie Lindstrom por supervisar el proceso de revisión. Estoy en deuda con Craig Bleyer por la f rma de este proyecto y continuar creyendo en él con los años. Agradezco a Ruth Baruth por aprotar su amplio conocimiento y experiencia en publicación al proyecto, a Steve Rigolosi por un desarrollo de mercado experto y a Katrina Wilhelm por su asistencia editorial. También debo mi agradecimiento al excelente equipo de producción de W. H. Freeman: Blake Logan, Bill Page, Paul Rohloff, Ted Szczepanski y Vivien Weiss y también a John Rogosich y Carol Sawyer en Techsetters, Inc. por su experta maquetación y a Ron Weickart de Network Graphics por su ejecución hábil y creativa del programa de arte.

A mi querida esposa, Julie, le debo mucho más de lo que puedo expresar con palabras. Gracias por todo. A nuestros maravillosos hijos Rivkah, Dvora, Hannah y Akiva, gracias por aguantar el libro de cálculo durante todos estos años. Y a mi madre Elise y mi difunto padre Alexander Rogawski, MD ז"ל, gracias por vuestro amor y apoyo desde el principio.

AL ESTUDIANTE

Aunque he enseñado cálculo durante más de 30 años, cada vez que entro en el aula el primer día de un nuevo semestre tengo un sentimiento de excitación, como si un gran drama estuviera a punto de tener lugar. ¿Está fuera de lugar la palabra *drama* en una discusión sobre matemáticas?

Muchas personas estarían de acuerdo en que el cálculo es útil –se aplica desde las ciencias y a la ingeniería a todo, desde los vuelos espaciales y la predicción del tiempo a la nanotecnología y a los modelos f nancieros. Pero ¿qué es lo que resulta dramático?

Para mi, una parte del drama reside en el desarrollo conceptual y lógico del cálculo. El cálculo inf nitesimal está basado en unos pocos conceptos fundamentales (como límites, rectas tangentes y aproximaciones). Pero a medida que la materia se desarrolla, se tiene que estos conceptos son adecuados para construir, paso a paso, una disciplina matemática capaz de resolver innumerables problemas de gran importancia práctica. En este camino hay puntos álgidos y momentos de suspense –por ejemplo, el cálculo de la derivada mediante límites por primera vez, o aprender, a través del teorema fundamental del cálculo, que las dos ramas del cálculo (diferencial e integral) están mucho más relacionadas de lo que se podía esperar. También se descubre que el cálculo proporciona el lenguaje correcto para expresar las leyes más fundamentales y universales de la naturaleza, no únicamente las leyes de Newton del movimiento, sino también las leyes del electromagnetismo e incluso las leyes cuánticas de la estructura atómica.

Otra parte del drama es el proceso de aprendizaje propiamente dicho –el viaje personal de descubrimiento. Sin duda, uno de los aspectos a tener en cuenta en el aprendizaje del cálculo es el desarrollo de diversas habilidades técnicas. Aprenderá cómo calcular derivadas e integrales, resolver problemas de optimización y así con muchos otros temas.

Estas habilidades son necesarias para la aplicación del cálculo en situaciones prácticas y para sentar las bases del estudio para varias ramas de las matemáticas avanzadas. Pero quizás más importante, usted se familiarizará con las ideas fundamentales en que se basa el cálculo. Estas ideas son fundamentales en las ciencias y en todas las disciplinas cuantitativas, por lo que se abrirá para usted un mundo de nuevas oportunidades. El distinguido matemático I. M. Gelfand lo dijo de este modo: "Lo más importante que un estudiante puede obtener a partir del estudio de las matemáticas es el logro de un mayor nivel intelectual".

Este texto está diseñado para desarrollar tanto las habilidades como la comprensión conceptual. De hecho, los dos van de la mano. A medida que se es competente en la resolución de problemas, se llega a apreciar las ideas subyacentes. Y es igualmente cierto que una sólida comprensión de los conceptos le capacitará para realizar una resolución de problemas más ef caz. Es probable que tenga que dedicar gran parte de su tiempo al estudio de los ejemplos en el texto y a trabajar sobre los problemas. Sin embargo, el texto también contiene numerosas explicaciones de los conceptos básicos, ideas y motivaciones (en ocasiones bajo el título "Apunte conceptual" o "Apunte gráf co"). Le insto a invertir tiempo en leer estas explicaciones y ref exionar sobre ellas.

El aprendizaje del cálculo siempre será un desafío y siempre va a requerir esfuerzo. Según la leyenda, Alejandro Magno le pidió al matemático Menecmo en una ocasión que le mostrara una manera fácil de aprender geometría. Menecmo le respondió: "No hay ningún camino real hacia la geometría". Incluso los reyes deben trabajar duro para aprender geometría, y lo mismo es cierto para el cálculo.

Uno de los principales retos al escribir este libro fue encontrar una manera de presentar el cálculo con la mayor claridad posible, en un estilo que los estudiantes encontraran comprensible e interesante. Mientras escribía, me preguntaba continuamente: ¿puede ser más sencillo? ¿he asumido algo que el estudiante puede no tener en cuenta? ¿puedo explicar el signif cado de un concepto básico, sin confundir a un estudiante que está aprendiendo la materia por primera vez?

Espero que mis esfuerzos hayan dado lugar a un libro de texto que sea no sólo atractivo para el estudiante, sino que también le anime a ver todo el conjunto –las bellas y elegantes ideas que sostienen toda la estructura del cálculo de forma conjunta. Si tiene algún comentario o sugerencia para la mejora del texto, no dude en hacérmelo saber. Espero sus aportaciones con interés.

¡Mis mejores deseos y buena suerte!

Jon Rogawski

Las funciones son de gran utilidad para analizar fenómenos muy diversos. Por ejemplo, los biólogos han estudiado el peso de la cornamenta de los ciervos en función de su edad (pág. 6).

1 REPASO DE CONCEPTOS PREVIOS

El cálculo inf nitesimal se alza sobre los fundamentos del álgebra, la geometría analítica y la trigonometría. En este capítulo se recogen algunos de los conceptos, expresiones y resultados más básicos que van a ser utilizados a lo largo del libro. En la última sección se describen varias maneras de recurrir a la tecnología, con el f n de mejorar la comprensión visual de las funciones y de sus propiedades.

1.1 Números reales, funciones y gráficas

Empezaremos con un breve repaso de los números reales, que nos permitirá recordar algunas de sus propiedades básicas y terminología estándar.

Un **número real** es un número que se representa por un decimal o, mejor dicho, mediante un "desarrollo decimal". Hay tres tipos de desarrollos decimales: f nitos, inf nitos periódicos e inf nitos no periódicos. Por ejemplo,

$$\frac{3}{8} = 0{,}375, \qquad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$$

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

El número $\frac{3}{8}$ admite un desarrollo decimal f nito mientras que el desarrollo decimal de $\frac{1}{7}$ es *periódico*. La línea horizontal sobre 142857 indica que este grupo de cifras se repite indef nidamente. El desarrollo decimal de π es inf nito pero no periódico.

El conjunto de todos los números reales se denota mediante la letra $\mathbb{R}$. Cuando no exista riesgo de confusión, nos referiremos a un número real simplemente como un *número*. El símbolo $\in$ debe leerse como "pertenece a." Así,

$$a \in \mathbb{R} \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}a \text{ pertenece a } \mathbb{R}\text{”}$$

En el apéndice B se enuncian propiedades adicionales de los números reales.

El conjunto de los números enteros se suele denotar con la letra $\mathbb{Z}$ (la primera letra de *Zahl*, que en alemán signif ca "número"). De esta manera, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Un **número natural** es un entero no negativo, es decir uno de los números $0, 1, 2, \ldots$.

Diremos que un número real es **racional** si se puede representar mediante una fracción de la forma p/q, siendo p y q enteros y, además, $q \neq 0$. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ (la primera letra de "cociente" en muchos idiomas. Los números que no son racionales, como π y $\sqrt{2}$, se denominan **irracionales**.

Se puede saber si un número es racional en base a su desarrollo decimal: si éste es f nito o periódico, se trata de un número racional, mientras que el desarrollo decimal de los números irracionales es inf nito no periódico. El desarrollo decimal de cualquier número es único, con la siguiente salvedad: todo desarrollo decimal f nito es igual a un desarrollo inf nito en el que el dígito 9 se repite indef nidamente. Por ejemplo:

$$1 = 0{,}999\ldots, \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375 = 0{,}374999\ldots, \qquad \frac{47}{20} = 2{,}35 = 2{,}34999\ldots$$

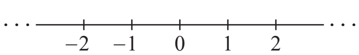


FIGURA 1 El conjunto de los números reales se representa mediante una recta.

Los números reales se representan mediante puntos en una recta (f gura 1). Por este motivo, los números reales se denominan, a menudo, **puntos** y el punto correspondiente al 0 se llama **origen**.

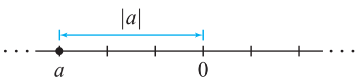


FIGURA 2 $|a|$ es la distancia de a al origen.

El **valor absoluto** de un número real a se denota por $|a|$ y se define de la siguiente manera (figura 2):

$$|a| = \textit{distancia de } a \textit{ al origen} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|1{,}2| = 1{,}2$ y $|-8{,}35| = 8{,}35$. El valor absoluto verifica:

$$\boxed{|a| = |-a|, \qquad |ab| = |a|\,|b|}$$

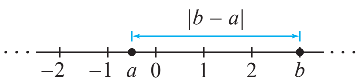


FIGURA 3 La distancia entre a y b es $|b-a|$.

La **distancia** entre dos números reales a y b es igual a $|b-a|$, es decir, la longitud del segmento que une a y b (figura 3).

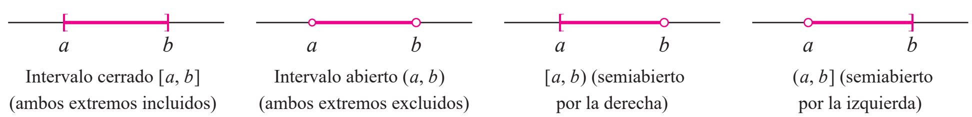
Dos números reales a y b están próximos entre sí cuando $|b-a|$ es pequeño, lo que ocurre si sus expansiones decimales coinciden en los primeros dígitos. Dicho de modo más preciso, *si los k primeros dígitos (después de la coma decimal) de los desarrollos decimales de a y b son iguales, entonces la distancia $|b-a|$ es menor que* 10^{-k}. Por ejemplo, la distancia entre $a = 3{,}1415$ y $b = 3{,}1478$ es menor que 10^{-2}, puesto que las dos primeras cifras decimales de a y b coinciden. De hecho, la distancia exacta entre ellos es $|3{,}1478 - 3{,}1415| = 0{,}0063$.

Debe tenerse presente que $|a+b|$ es diferente de $|a|+|b|$ salvo si a y b tienen el mismo signo o en el caso en que alguno de ellos sea cero. Si a y b tienen signos distintos, se sustraen al sumar $a+b$ y, en consecuencia, $|a+b| < |a|+|b|$. Por ejemplo, $|2+5| = |2|+|5|$ pero $|-2+5| = 3$, que es inferior a $|-2|+|5| = 7$. En cualquier caso, $|a+b|$ nunca supera a $|a|+|b|$ lo que se expresa mediante la sencilla, aunque no por ello menos importante **desigualdad triangular**:

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|} \qquad \boxed{1}$$

Utilizaremos la notación habitual para los intervalos. Dados dos números reales $a < b$, existen cuatro intervalos limitados por a y b (figura 4). Todos estos intervalos tienen longitud $b-a$ pero difieren en función de la inclusión de sus extremos.

FIGURA 4 Los cuatro intervalos limitados por a y b.



El **intervalo cerrado** $[a, b]$ es el conjunto formado por los números reales x tales que $a \leq x \leq b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Escribiremos únicamente $\{x : a \leq x \leq b\}$, dando por sobrentendido que x pertenece a $\mathbb{R}$. El **intervalo abierto** y los **intervalos semiabiertos** son los conjuntos:

$$\underbrace{(a, b) = \{x : a < x < b\}}_{\text{Intervalo abierto (no incluye los extremos)}} \qquad \underbrace{[a, b) = \{x : a \leq x < b\}}_{\text{Intervalo semiabierto por la derecha}} \qquad \underbrace{(a, b] = \{x : a < x \leq b\}}_{\text{Intervalo semiabierto por la izquierda}}$$

El intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ es la recta real $\mathbb{R}$. Una semirrecta se denomina cerrada si contiene a su extremo finito (figura 5), y abierta en caso contrario:

$$[a, \infty) = \{x : a \leq x < \infty\}, \qquad (-\infty, b] = \{x : -\infty < x \leq b\}$$

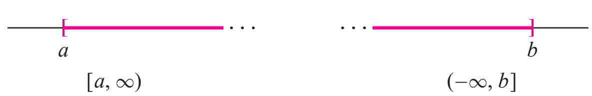


FIGURA 5 Semirrectas cerradas.

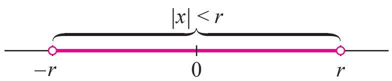


FIGURA 6 El intervalo $(-r, r) = \{x : |x| < r\}$.

Los intervalos, tanto abiertos como cerrados, se pueden expresar mediante desigualdades. Por ejemplo, el intervalo $(-r, r)$ se describe mediante la desigualdad $|x| < r$ (figura 6):

$$\boxed{|x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-r, r)} \qquad \boxed{2}$$

De manera general, para cualquier intervalo simétrico respecto a un punto c (figura 7),

$$\boxed{|x - c| < r \quad \Leftrightarrow \quad c - r < x < c + r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (c - r, c + r)} \qquad \boxed{3}$$

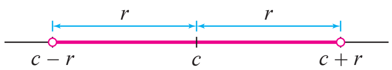


FIGURA 7 $(a, b) = (c - r, c + r)$, donde

$$c = \frac{a+b}{2}, \qquad r = \frac{b-a}{2}$$

Se puede hacer lo mismo con intervalos cerrados, reemplazando $<$ por $\leq$. Diremos que r es el **radio** del intervalo y que c es el **punto medio** o el **centro**. El punto medio de los intervalos (a, b) y $[a, b]$ es $c = \frac{1}{2}(a + b)$ y su radio es $r = \frac{1}{2}(b - a)$ (figura 7).

■ **EJEMPLO 1** Exprese el intervalo $[7, 13]$ por medio de desigualdades.

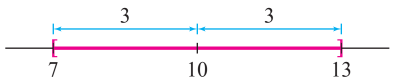


FIGURA 8 El intervalo $[7, 13]$ se expresa mediante $|x - 10| \leq 3$.

Solución El punto medio del intervalo $[7, 13]$ es $c = \frac{1}{2}(7 + 13) = 10$ y su radio es $r = \frac{1}{2}(13 - 7) = 3$ (figura 8). Por tanto,

$$[7, 13] = \{x \in \mathbb{R} : |x - 10| \leq 3\}$$ ■

■ **EJEMPLO 2** Exprese el conjunto $S = \{x : \left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 4\}$ usando intervalos.

En el ejemplo 2 se usa el símbolo $\cup$ para designar la "unión": la unión de dos conjuntos A y B, $A \cup B$, es el conjunto que está formado por todos los elementos que pertenecen o bien a A o a B (o a ambos).

Solución Es más sencillo empezar considerando la desigualdad contraria $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \leq 4$. En base a (2),

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad & -4 \leq \frac{1}{2}x - 3 \leq 4 \\
& -1 \leq \frac{1}{2}x \leq 7 \qquad \text{(sumando 3)} \\
& -2 \leq x \leq 14 \qquad \text{(multiplicando por 2)}
\end{aligned}$$

Así, $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \leq 4$ se cumple cuando x pertenece a $[-2, 14]$. El conjunto S es su *complementario*, formado por todos los números x que *no pertenecen* a $[-2, 14]$. Podemos expresar S como la unión de dos intervalos: $S = (-\infty, -2) \cup (14, \infty)$ (figura 9). ■

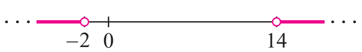


FIGURA 9 El conjunto $S = \{x : \left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 4\}$.

Representación gráfica

La representación gráfica es una herramienta esencial tanto en el cálculo infinitesimal como en el álgebra y la trigonometría. Recordemos que un sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas) en el plano se definen escogiendo dos ejes perpendiculares, llamado eje x y eje y. A cada par de números (a, b) le asociamos el punto P que se encuentra en la intersección de la recta perpendicular al eje x y que pasa por a con la recta perpendicular al eje y y que pasa por b [figura 10(A)]. Los números a y b son las **coordenadas** de P en los ejes x e y. La coordenada en el eje x se suele denominar "abscisa" y la coordenada en el eje y, "ordenada." El **origen** es el punto con coordenadas $(0, 0)$.

El término "cartesianas" se refiere al filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), cuyo nombre en latín era Cartesius. A él se le atribuye (junto con Pierre de Fermat) la invención de la geometría analítica. En su gran obra La Géométrie, *Descartes utilizó las letras x, y, z para designar incógnitas y a, b, c para constantes, una convención que se ha mantenido hasta la actualidad.*

Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes que se etiquetan como I-IV, y que quedan determinados por los signos de las coordenadas [figura 10(B)]. Por ejemplo, el cuadrante III está formado por los puntos (x, y) tales que $x < 0$ e $y < 0$.

La distancia d entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se calcula mediante el teorema de Pitágoras. En la figura 11, se observa que $\overline{P_1P_2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $a = |x_2 - x_1|$ y $b = |y_2 - y_1|$. Por tanto,

$$d^2 = a^2 + b^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

La fórmula de la distancia se obtiene aplicando raíces cuadradas a ambos lados de la igualdad.

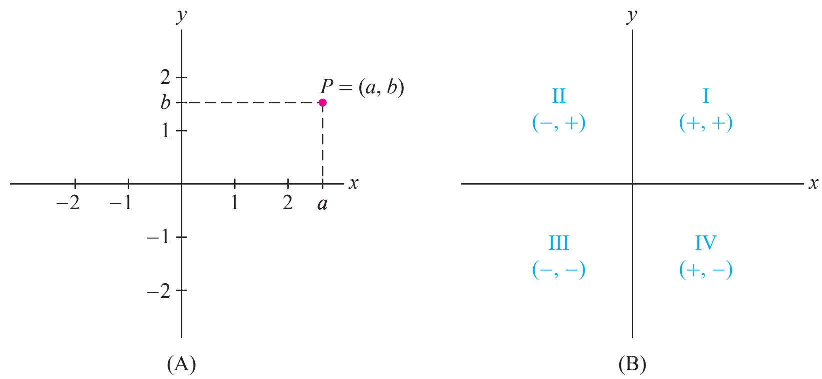


FIGURA 10 Sistema de coordenadas rectangulares.

Fórmula de la distancia La distancia entre $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es igual a:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

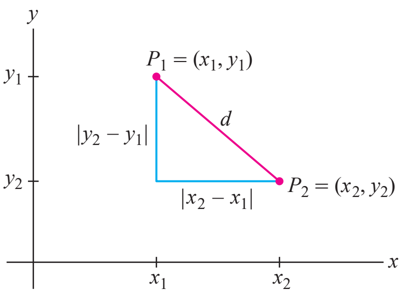


FIGURA 11 La distancia d viene dada por la fórmula de la distancia.

Una vez que hemos obtenido la fórmula de la distancia, podemos deducir la fórmula de la ecuación de una circunferencia de radio r y centro (a, b) (f gura 12). Un punto (x, y) se encuentra en la circunferencia si la distancia de (x, y) a (a, b) es igual a r:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado, se obtiene la ecuación de la circunferencia:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

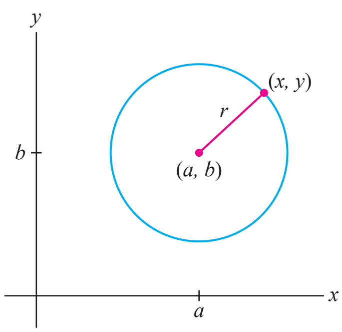


FIGURA 12 Circunferencia de ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

A continuación repasaremos algunas def niciones y notaciones referentes a funciones.

DEFINICIÓN Una **función** f entre dos conjuntos D e Y es una regla que asigna a cada elemento x de D un único elemento $y = f(x)$ que pertenece a Y. Se denota:

$$f : D \to Y$$

Una función $f : D \to Y$ se denomina también "aplicación." Los conjuntos D e Y pueden ser cualesquiera. Por ejemplo, se puede definir una aplicación del conjunto de personas que se encuentran vivas en la actualidad al conjunto de todos los números naturales asignando a cada persona su año de nacimiento. El recorrido de esta aplicación es el conjunto de los años que comprenden los de nacimiento de una persona viva. En cálculo infinitesimal de varias variables, el dominio puede ser entendido como un conjunto de puntos en un espacio de tres dimensiones y el rango como un conjunto de números, puntos o vectores.

El conjunto D, que se denomina **dominio** de f, es el conjunto de todos los "elementos para los que es admisible obtener $f(x)$. Si $x \in D$, $f(x)$ es la **imagen** de x por f (f gura 13). El **rango**, o recorrido, R de f es el subconjunto de Y formado por todos los valores $f(x)$:

$$R = \{y \in Y : f(x) = y \text{ para algún } x \in D\}$$

De manera informal, podemos considerar f como una "máquina" que da y como resultado cuando se le introduce un número x del dominio D (f gura 14).

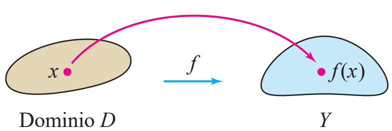


FIGURA 13 Una función asigna a cada $x \in D$ un elemento $f(x)$ en Y.

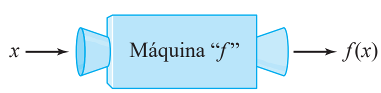


FIGURA 14 f puede entenderse como una "máquina" donde se introduce x y se obtiene $f(x)$.

La primera parte de este libro trata sobre funciones *numéricas* f, aquellas en las que tanto el dominio como el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones serán denotadas indistintamente por f o $f(x)$. La letra x se suele utilizar para designar la **variable independiente** que puede tomar cualquier valor del dominio D. Escribiremos $y = f(x)$ y diremos que y es la **variable dependiente** (ya que su valor depende de x).

Cuando f venga dada por una fórmula, su dominio natural es el conjunto de los números reales x para los que la fórmula tenga sentido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{9-x}$ es $D = \{x : x \le 9\}$, ya que $\sqrt{9-x}$ se puede calcular si $9 - x \ge 0$. Estos son otros ejemplos de dominios y rangos:

$f(x)$	**Dominio** D	**Rango** R
x^2	$\mathbb{R}$	$\{y : y \ge 0\}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\{y : -1 \le y \le 1\}$
$\dfrac{1}{x+1}$	$\{x : x \ne -1\}$	$\{y : y \ne 0\}$

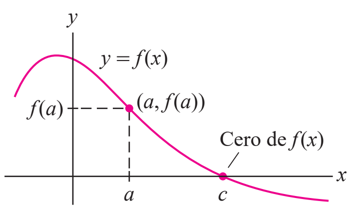


FIGURA 15

La **gráf ca** de una función $y = f(x)$ se obtiene representando los puntos $(a, f(a))$ al variar a en el dominio D (f gura 15).

Si salimos de $x = a$ en el eje x, nos desplazamos en vertical hacia la gráf ca de f y giramos hacia el eje y, llegamos al valor $f(a)$. El valor absoluto $|f(a)|$ es la distancia del punto $(a, f(a))$ de la gráf ca al eje x.

Un **cero** o **raíz** de una función $f(x)$ es un número c tal que $f(c) = 0$. Los ceros son los valores de x para los que la gráf ca corta el eje x.

En el capítulo 4, utilizaremos técnicas de cálculo inf nitesimal para dibujar y analizar gráf cas. De momento, para esbozar una gráf ca a mano, podemos obtener una tabla de valores para la función, representar los puntos correspondientes (incluidos los ceros si los hubiere) y unirlos mediante una curva suave.

■ **EJEMPLO 3** Encuentre las raíces y representa gráf camente la función $f(x) = x^3 - 2x$.

Solución En primer lugar resolvemos la ecuación:

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$$

Las raíces de $f(x)$ son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$. Para dibujar la gráf ca , representamos las raíces junto con unos cuantos valores más que se encuentran recogidos en la tabla 1 y unimos estos puntos mediante una curva (f gura 16). ■

TABLA 1

x	$x^3 - 2x$
-2	-4
-1	1
0	0
1	-1
2	4

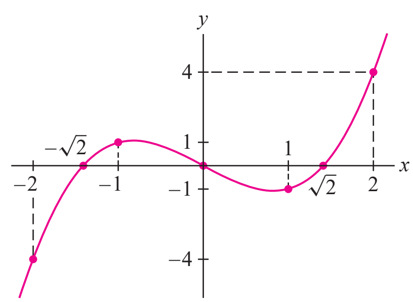


FIGURA 16 Gráf ca de $f(x) = x^3 - 2x$.

Las funciones que se utilizan en las aplicaciones prácticas no siempre están def nidas por fórmulas. Por ejemplo, los datos recogidos de una observación o un experimento def nen funciones para las que puede que no exista una fórmula explícita. Estas funciones pueden ser examinadas o bien gráf camente, o mediante una tabla de valores. La f gura 17 y la tabla 2 muestran los datos obtenidos por el biólogo Julian Huxley (1887-1975) en un estudio sobre el peso W de la cornamenta de los ciervos machos en función de su edad t. Veremos que gran parte de las herramientas del cálculo inf nitesimal pueden ser aplicadas a funciones obtenidas de esta forma a partir de datos experimentales.

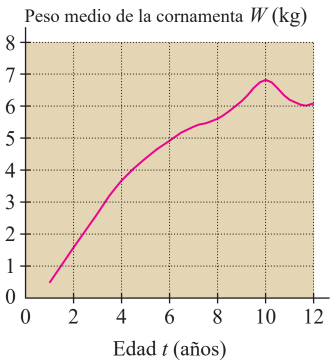


FIGURA 17 Cada invierno, el ciervo rojo macho muda su cornamenta; ésta vuelve a crecer en primavera. Esta gráfica muestra el peso medio de la cornamenta en función de la edad.

TABLA 2

t (años)	W (kg)	t (años)	W (kg)
1	0,48	7	5,34
2	1,59	8	5,62
3	2,66	9	6,18
4	3,68	10	6,81
5	4,35	11	6,21
6	4,92	12	6,1

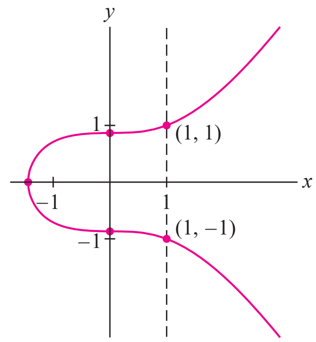


FIGURA 18 Gráfica de $4y^2 - x^3 = 3$. No se cumple el criterio de la recta vertical por lo que no es la gráfica de una función.

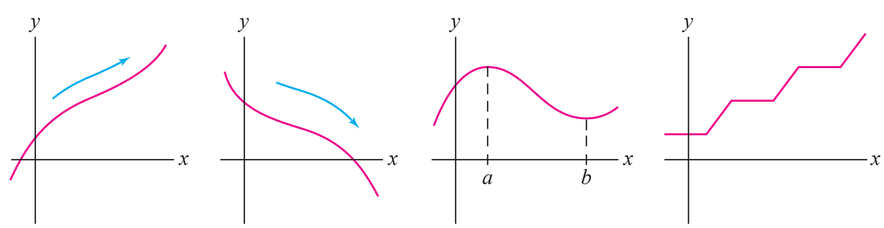
Podemos representar gráficamente funciones pero también, de manera más general, cualquier ecuación que relacione y con x. En la figura 18 se muestra la gráfica de la ecuación $4y^2 - x^3 = 3$; está formada por todos los pares (x, y) que cumplen la ecuación. Esta curva no corresponde a la gráfica de ninguna función porque algunos valores de x están asociados con dos valores de y. Por ejemplo, $x = 1$ está asociado con $y = \pm 1$. Una curva es la gráfica de una función si y sólo si cumple el **Criterio de la recta vertical**, que afirma que toda recta vertical $x = a$ corta la curva en un punto o en ninguno.

Es relevante saber determinar si una función es creciente o decreciente. De manera informal se dice que una función $f(x)$ es creciente si su gráfico asciende al desplazarnos hacia la derecha y decreciente si desciende [figuras 19(A) y (B)]. De un modo formal, se define el concepto de crecimiento/decrecimiento de una función f en un intervalo abierto:

- **Estrictamente creciente** en (a, b) si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$
- **Estrictamente decreciente** en (a, b) si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$

Diremos que $f(x)$ es **monótona** si es o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente. La función representada en la figura 19(C) no es monótona, porque no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente para todo x.

Una función $f(x)$ se denomina **creciente** si y sólo si $f(x_1) \le f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$ (escribimos $\le$ en lugar de la desigualdad estricta $<$). Las funciones **decrecientes** se definen de manera análoga. La función representada en la figura 19(D) es creciente; sin embargo, no lo es estrictamente en los intervalos en los que la gráfica es horizontal.



(A) Estrictamente creciente.

(B) Estrictamente decreciente.

(C) Estrictamente decreciente en (a, b) pero no en todo x.

(D) Creciente pero no estrictamente creciente.

FIGURA 19

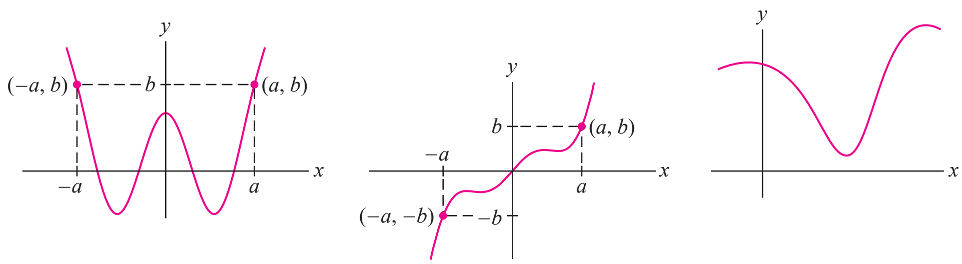
Otra propiedad importante de las funciones es la **paridad**, referente a si una función es par o impar:

- $f(x)$ es **par** si y sólo si $f(-x) = f(x)$
- $f(x)$ es **impar** si y sólo si $f(-x) = -f(x)$

La paridad en una función comporta una simetría determinada en su gráf ca:

- **Función par:** su gráf ca es simétrica respecto al eje y. Esto quiere decir que si $P = (a, b)$ es un punto de la gráf ca, entonces $Q = (-a, b)$ también lo será [f gura 20(A)].
- **Función impar:** su gráf ca es simétrica respecto al origen. Esto quiere decir que si $P = (a, b)$ es un punto de la gráf ca, entonces $Q = (-a, -b)$ también lo será [f gura 20(B)].

Una función no tiene por qué ser par o impar [f gura 20(C)].



(A) Función par: $f(-x) = f(x)$ Su gráfica es simétrica respecto al eje y.

(B) Función impar: $f(-x) = -f(x)$ Su gráfica es simétrica respecto al origen.

(C) Función que no es ni par ni impar.

FIGURA 20

■ **EJEMPLO 4** Determine si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = x^4$ **(b)** $g(x) = x^{-1}$ **(c)** $h(x) = x^2 + x$

Solución

(a) $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Entonces, $f(x) = f(-x)$ y $f(x)$ es par.

(b) $g(-x) = (-x)^{-1} = -x^{-1}$. Por tanto, $g(-x) = -g(x)$ y $g(x)$ es impar.

(c) $h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$. Como $h(-x)$ no es igual a $h(x)$ ni a $-h(x) = -x^2 - x$, la función $h(x)$ no es ni par ni impar. ■

■ **EJEMPLO 5** **Uso de la simetría en el trazado de gráficas** Dibuje la gráf ca de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Solución La función $f(x)$ es positiva [$f(x) > 0$] y par [$f(-x) = f(x)$]. En consecuencia, la gráf ca de f queda por encima del eje x y es simétrica respecto al eje y. Además, $f(x)$ es estrictamente decreciente para $x > 0$ (ya que al aumentar x el denominador también aumenta). Usando esta información junto con una pequeña tabla de valores (tabla 3) se puede dibujar la gráf ca (f gura 21). Observemos que la gráf ca se acerca al eje x a medida que nos desplazamos hacia la derecha o la izquierda, pues $f(x)$ disminuye al aumentar $|x|$. ■

TABLA 3

x	$\dfrac{1}{x^2+1}$
0	1
± 1	$\frac{1}{2}$
± 2	$\frac{1}{5}$

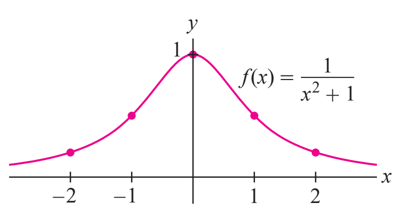


FIGURA 21

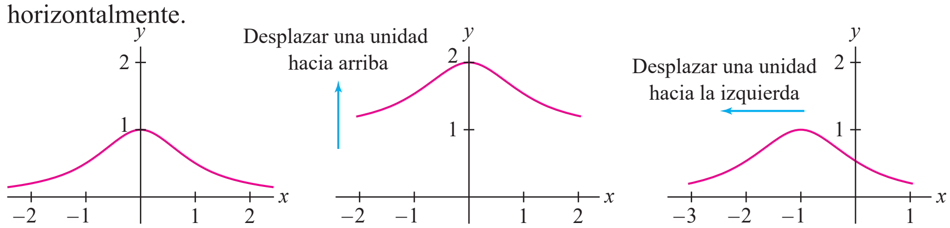
Hay dos maneras importantes de modificar una gráfica: mediante una **traslación** (o **desplazamiento**) y mediante **reescalado**. Una traslación consiste en desplazar la gráfica horizontal o verticalmente:

Recordar que $f(x) + c$ y $f(x + c)$ son distintas. La gráfica de $y = f(x) + c$ es una traslación vertical de $y = f(x)$ mientras que $y = f(x + c)$ es una traslación horizontal de $y = f(x)$.

DEFINICIÓN Traslación (Desplazamiento)

- **Traslación vertical** $y = f(x) + c$: desplaza la gráfica en $|c|$ unidades *verticalmente*, hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.
- **Traslación horizontal** $y = f(x + c)$: desplaza el gráfico en $|c|$ unidades *horizontalmente*, hacia la derecha si $c < 0$ y hacia la izquierda si $c > 0$.

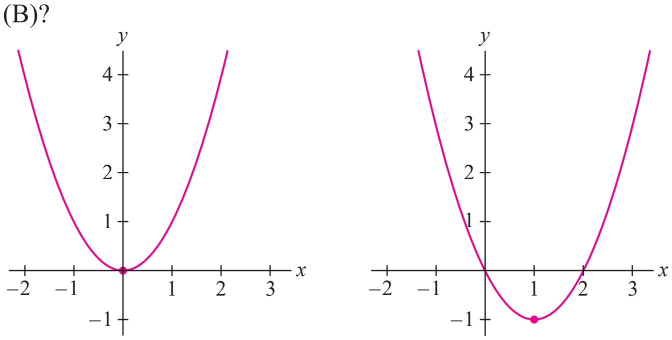
La figura 22 muestra el efecto de desplazar la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ vertical y horizontalmente.



(A) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (B) $y = f(x) + 1 = \dfrac{1}{x^2+1} + 1$ (C) $y = f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2+1}$

FIGURA 22

■ **EJEMPLO 6** La figura 23(A) es la gráfica de $f(x) = x^2$ y la figura 23(B) corresponde a un desplazamiento horizontal y vertical de (A). ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la gráfica en (B)?



(A) $f(x) = x^2$ (B)

FIGURA 23

Solución La gráfica en (B) ha sido obtenida desplazando la gráfica en (A) una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo. Podemos verificarlo considerando el punto $(0, 0)$, que pertenece a la gráfica de $f(x)$ y observando que ha quedado transformado en $(1, -1)$. Por tanto, (B) es la gráfica de $g(x) = (x - 1)^2 - 1$. ■

Reescalado (o cambio de escala) consiste en comprimir o dilatar la gráfica en la dirección vertical o en la horizontal:

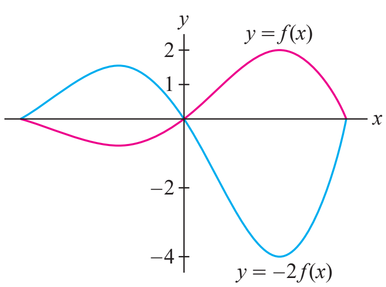


FIGURA 24 Factor de escala negativo $k = -2$.

DEFINICIÓN Reescalado vertical

- **Reescalado vertical** $y = kf(x)$: Si $k > 1$, la gráfica se expande verticalmente en un factor k. Si $0 < k < 1$, la gráfica se comprime verticalmente. Si el factor de escala k es negativo ($k < 0$), la gráfica presenta además una reflexión respecto al eje x (figura 24).
- **Reescalado horizontal** $y = f(kx)$: Si $k > 1$, la gráfica se comprime en la dirección horizontal. Si $0 < k < 1$, la gráfica se expande. Si $k < 0$, entonces la gráfica presenta además una reflexión respecto al eje y.

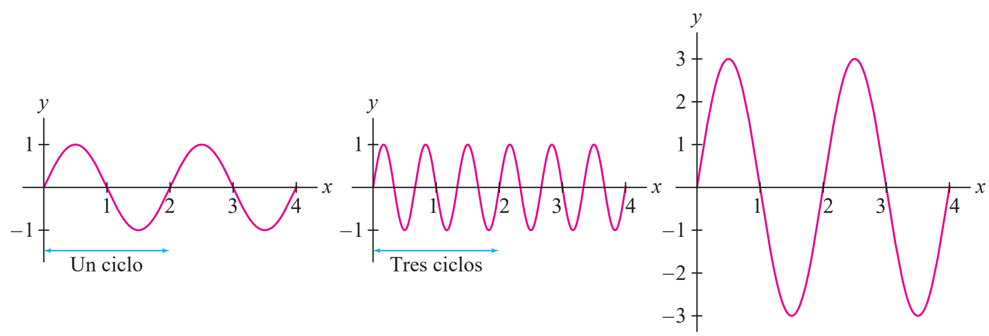
La extensión vertical de una gráf ca es su **amplitud**. Así, el reescalado vertical cambia la amplitud en un factor igual a $|k|$.

Recordar que $kf(x)$ y $f(kx)$ son distintas. La gráfica de $y = kf(x)$ es un reescalado vertical de $y = f(x)$, mientras que $y = f(kx)$ es un reescalado horizontal de $y = f(x)$.

■ **EJEMPLO 7** Dibuje las gráf cas de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ y las de sus reescaladas $f(3x)$ y $3f(x)$.

Solución La gráf ca de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ es una curva sinusoidal de periodo 2. Se completa un ciclo en cada intervalo de longitud 2 –véase la f gura 25(A).

- La gráf ca de $f(3x) = \text{sen}(3\pi x)$ es una versión comprimida de $y = f(x)$, donde se completan tres ciclos, en lugar de uno, en cada intervalo de longitud 2 [f gura 25(B)].
- La gráf ca $y = 3f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x)$ dif ere de $y = f(x)$ únicamente en su amplitud: se ha dilatado en la dirección vertical en un factor de 3 [f gura 25(C)]. ■



(A) $y = f(x) = \text{sen}(\pi x)$

(B) Compresión horizontal: $y = f(3x) = \text{sen}(3\pi x)$

(C) Expansión vertical: $y = 3f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x)$

FIGURA 25 Reescalado horizontal y vertical de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

1.1 RESUMEN

- Valor absoluto: $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Cuatro intervalos de extremos a y b:

$$(a, b) \qquad [a, b] \qquad [a, b) \qquad (a, b]$$

- Descripción de intervalos mediante desigualdades:

$$(a, b) = \{x : |x - c| < r\}, \qquad [a, b] = \{x : |x - c| \leq r\}$$

donde $c = \frac{1}{2}(a + b)$ es el punto medio y $r = \frac{1}{2}(b - a)$ es el radio.

- Distancia d entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Ecuación de la circunferencia de radio r y centro (a, b):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Un *cero* o *raíz* de una función $f(x)$ es un número c tal que $f(c) = 0$.

- Criterio de la recta vertical: una curva en el plano es la gráf ca de una función si y sólo si cada recta vertical $x = a$ corta la curva en un punto o en ninguno.

-

Estrictamente creciente:	$f(x_1) < f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
Creciente:	$f(x_1) \leq f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
Estrictamente decreciente:	$f(x_1) > f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
Decreciente:	$f(x_1) \geq f(x_2)$ si $x_1 < x_2$

- Función par: $f(-x) = f(x)$ (su gráf ca es simétrica respecto al eje y).
- Función impar: $f(-x) = -f(x)$ (su gráf ca es simétrica respecto al origen).
- Cuatro maneras de transformar la gráf ca de $f(x)$:

$f(x) + c$	Desplazamiento vertical de la gráf ca en $\lvert c\rvert$ unidades (hacia arriba si $c > 0$, hacia abajo si $c < 0$)
$f(x + c)$	Desplazamiento horizontal de la gráf ca en $\lvert c\rvert$ unidades (hacia la derecha si $c < 0$, hacia la izquierda si $c > 0$)
$kf(x)$	Reescalado vertical de la gráf ca en un factor k: si $k > 1$, la gráf ca se expande verticalmente; si $0 < k < 1$, la gráf ca se comprime verticalmente. Si $k < 0$, la gráf ca presenta además una ref exión respecto al eje x
$f(kx)$	Reescalado horizontal de la gráf ca en un factor k: si $k > 1$, la gráf ca se comprime en la dirección horizontal. Si $0 < k < 1$, la gráf ca se expande. Si $k < 0$, la gráf ca presenta además una ref exión respecto al eje y

1.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dé un ejemplo de dos números a y b tales que $a < b$ y $|a| > |b|$.

2. ¿Para qué números se verif ca $|a| = a$? ¿Qué números cumplen $|a| = -a$? ¿Y $|-a| = a$?

3. Dé un ejemplo de dos números a y b tales que $|a + b| < |a| + |b|$.

4. ¿Qué coordenadas tiene el punto que se encuentra en la intersección de las rectas $x = 9$ e $y = -4$?

5. ¿En qué cuadrante se encuentran los siguientes puntos?

(a) $(1, 4)$ **(b)** $(-3, 2)$ **(c)** $(4, -3)$ **(d)** $(-4, -1)$

6. ¿Cuál es el radio y el centro de la circunferencia de ecuación $(x - 9)^2 + (y - 9)^2 = 9$?

7. La ecuación $f(x) = 5$ tiene solución si (escoger una opción):

(a) 5 pertenece al dominio de f.

(b) 5 pertenece al rango de f.

8. Si $f(-x) = -f(x)$, ¿que tipo de simetría presenta la gráf ca de f?

Problemas

1. Utilice una calculadora para determinar un número racional r tal que $|r - \pi^2| < 10^{-4}$.

2. Si $a = -3$ y $b = 2$, ¿qué af rmaciones son ciertas?

(a) $a < b$ **(b)** $|a| < |b|$ **(c)** $ab > 0$

(d) $3a < 3b$ **(e)** $-4a < -4b$ **(f)** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

En los problemas 3-8, exprese el intervalo mediante una desigualdad que involucre el valor absoluto.

3. $[-2, 2]$ **4.** $(-4, 4)$ **5.** $(0, 4)$

6. $[-4, 0]$ **7.** $[1, 5]$ **8.** $(-2, 8)$

En los problemas 9-12, escriba la desigualdad como $a < x < b$.

9. $|x| < 8$ **10.** $|x - 12| < 8$

11. $|2x + 1| < 5$ **12.** $|3x - 4| < 2$

En los problemas 13-18, exprese en forma de intervalo el conjunto de números x que cumplen la condición dada.

13. $|x| < 4$ **14.** $|x| \leq 9$

15. $|x - 4| < 2$ **16.** $|x + 7| < 2$

17. $|4x - 1| \leq 8$ **18.** $|3x + 5| < 1$

En los problemas 19-22, describa el conjunto como unión de intervalos o de semirrectas.

19. $\{x : |x - 4| > 2\}$ **20.** $\{x : |2x + 4| > 3\}$

21. $\{x : |x^2 - 1| > 2\}$ **22.** $\{x : |x^2 + 2x| > 2\}$

23. Relacione (a)-(f) con (i)-(vi).

(a) $a > 3$ **(b)** $|a - 5| < \frac{1}{3}$

(c) $\left|a - \frac{1}{3}\right| < 5$ **(d)** $|a| > 5$

(e) $|a - 4| < 3$ **(f)** $1 \leq a \leq 5$

(i) a se encuentra a la derecha de 3.

(ii) a se encuentra entre 1 y 7.

(iii) La distancia de a a 5 es menor que $\frac{1}{3}$.

(iv) La distancia de a a 3 es como máximo 2.

(v) a se encuentra a menos de 5 unidades de $\frac{1}{3}$.

(vi) a se encuentra o bien a la izquierda de -5 o bien a la derecha de 5.

24. Describa el conjunto $\left\{x : \dfrac{x}{x+1} < 0\right\}$ como un intervalo.

25. Describa el conjunto $\{x : x^2 + 2x < 3\}$ como un intervalo. *Indicación:* Represente $y = x^2 + 2x - 3$.

26. Describa como una semirrecta el conjunto de los números reales que cumplen $|x - 3| = |x - 2| + 1$.

27. Demuestre que si $a > b$, entonces $b^{-1} > a^{-1}$, siempre que a y b tengan el mismo signo. ¿Qué ocurre si $a > 0$ y $b < 0$?

28. ¿Qué números x verif can simultáneamente $|x-3| < 2$ y $|x-5| < 1$?

29. Demuestre que si $|a-5| < \frac{1}{2}$ y $|b-8| < \frac{1}{2}$, entonces $|(a+b)-13| < 1$. *Indicación:* Use la desigualdad triangular.

30. Supongamos que $|a| \le 2$ y $|b| \le 3$.

(a) ¿Cuál es el mayor valor posible para $|a + b|$?

(b) ¿Cuál es el mayor valor posible para $|a + b|$, si a y b tienen signos distintos?

31. Supongamos que $|x - 4| \le 1$.

(a) ¿Cuál es el mayor valor posible de $|x + 4|$?

(b) Demuestre que $|x^2 - 16| \le 9$.

32. Demuestre que $|x| - |y| \le |x - y|$. *Indicación:* Aplique la desigualdad triangular a y y $x - y$.

33. Exprese $r_1 = 0{,}\overline{27}$ en forma de fracción. *Indicación:* $100\,r_1 - r_1$ es un entero. Exprese a continuación $r_2 = 0{,}2\overline{666}\ldots$ en forma de fracción.

34. Represente $1/7$ y $4/27$ como decimales inf nitos periódicos.

35. En el texto se af rma lo siguiente: *si los k primeros dígitos decimales de dos números reales a y b coinciden, entonces* $|a - b| \le 10^{-k}$. Demuestre que el recíproco es falso; es decir, para cada k existen números reales a y b cuyos desarrollos decimales *son completamente distintos* pese a que $|a - b| \le 10^{-k}$.

36. Represente cada uno de los siguientes pares de puntos y calcule la distancia que los separa:

(a) $(1, 4)$ y $(3, 2)$ **(b)** $(2, 1)$ y $(2, 4)$

(c) $(0, 0)$ y $(-2, 3)$ **(d)** $(-3, -3)$ y $(-2, 3)$

37. Determine la ecuación de la circunferencia de centro $(2, 4)$:

(a) con radio $r = 3$.

(b) que pasa por $(1, -1)$

38. Halle todos los puntos de coordenadas enteras situados a distancia 5 del origen. A continuación, halle todos los puntos de coordenadas enteras situados a distancia 5 de $(2, 3)$.

39. Determine el dominio y el recorrido de la función

$$f : \{r, s, t, u\} \to \{A, B, C, D, E\}$$

def nida por $f(r) = A$, $f(s) = B$, $f(t) = B$, $f(u) = E$.

40. Dé un ejemplo de una función cuyo dominio D tenga tres elementos y cuyo recorrido R tenga dos elementos. ¿Existe alguna función cuyo dominio D tenga dos elementos y cuyo recorrido tenga tres elementos?

En los problemas 41-48, halle el dominio y el recorrido de la función dada.

41. $f(x) = -x$ **42.** $g(t) = t^4$

43. $f(x) = x^3$ **44.** $g(t) = \sqrt{2 - t}$

45. $f(x) = |x|$ **46.** $h(s) = \dfrac{1}{s}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **48.** $g(t) = \cos \dfrac{1}{t}$

En los problemas 49-52, determine el intervalo en el cual la función es creciente.

49. $f(x) = |x + 1|$ **50.** $f(x) = x^3$

51. $f(x) = x^4$ **52.** $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

En los problemas 53-58, halle los ceros de la función dada y esbozar su gráf ca representando algunos puntos de la misma. Use las posibles simetrías, junto con la información disponible sobre el crecimiento o decrecimiento de la función.

53. $f(x) = x^2 - 4$ **54.** $f(x) = 2x^2 - 4$

55. $f(x) = x^3 - 4x$ **56.** $f(x) = x^3$

57. $f(x) = 2 - x^3$ **58.** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2 + 1}$

59. ¿Cuál de las curvas de la f gura 26 es la gráf ca de una función?

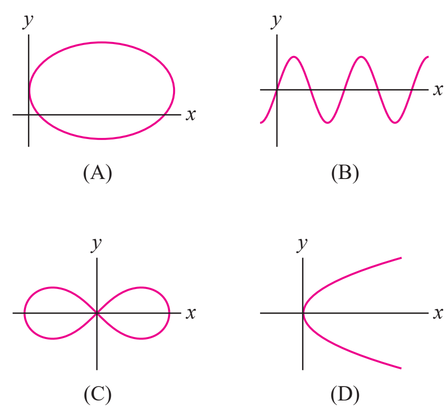


FIGURA 26

60. Decida si la función dada es creciente, decreciente, o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = x^5$ **(b)** $g(t) = t^3 - t^2$

(c) $F(t) = \dfrac{1}{t^4 + t^2}$

61. Determine si la función es par, impar, o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(t) = \dfrac{1}{t^4+t+1} - \dfrac{1}{t^4-t+1}$ **(b)** $g(t) = 2^t - 2^{-t}$

(c) $G(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ **(d)** $H(\theta) = \operatorname{sen}(\theta^2)$

62. Escriba $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 3x + 4$ como la suma de una función par y de una impar.

63. Determine el intervalo en el cual $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ es creciente o decreciente.

64. Decida si la función dada es creciente, decreciente, o ninguna de las dos cosas.

(a) La superf cie de una esfera en función del radio

(b) La temperatura en un punto del ecuador terrestre en función del tiempo.

(c) El precio de un billete de avión en función del precio del combustible.

(d) La presión del gas en un émbolo en función del volumen.

En los problemas 65-70, sea $f(x)$ la función cuya gráf ca se muestra en la f gura 27.

65. Determine el dominio y el recorrido de $f(x)$.

66. Dibuje las gráf cas de $f(x+2)$ y $f(x)+2$.

67. Dibuje las gráf cas de $f(2x)$, $f(\frac{1}{2}x)$ y $2f(x)$.

68. Dibuje las gráf cas de $f(-x)$ y $-f(-x)$.

69. Prolongue la gráf ca de $f(x)$ a $[-4, 4]$ de manera que sea una función par.

70. Prolongue la gráf ca de $f(x)$ a $[-4, 4]$ de manera que sea una función impar.

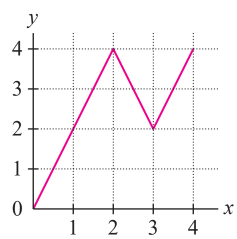


FIGURA 27

71. Supongamos que $f(x)$ tiene dominio $[4, 8]$ y recorrido $[2, 6]$. Determine el dominio y el recorrido de:

(a) $f(x)+3$ **(b)** $f(x+3)$

(c) $f(3x)$ **(d)** $3f(x)$

72. Sea $f(x) = x^2$. Dibuje las gráf cas de las siguientes funciones en $[-2, 2]$:

(a) $f(x+1)$ **(b)** $f(x)+1$

(c) $f(5x)$ **(d)** $5f(x)$

73. Supongamos que la gráf ca de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se comprime horizontalmente a la mitad y después se desplaza 5 unidades a la derecha.

(a) ¿Cuál es la ecuación de la nueva gráf ca?

(b) ¿Cuál sería la ecuación si se desplazase primero 5 unidades y después se comprimiese a la mitad?

(c) $\boxed{\text{GU}}$ Verif que las respuestas representando gráf camente las ecuaciones.

74. La f gura 28 muestra la gráf ca de $f(x) = |x| + 1$. Empareje las funciones (a)-(e) con sus gráf cas (i)-(v).

(a) $f(x-1)$ **(b)** $-f(x)$ **(c)** $-f(x)+2$

(d) $f(x-1)-2$ **(e)** $f(x+1)$

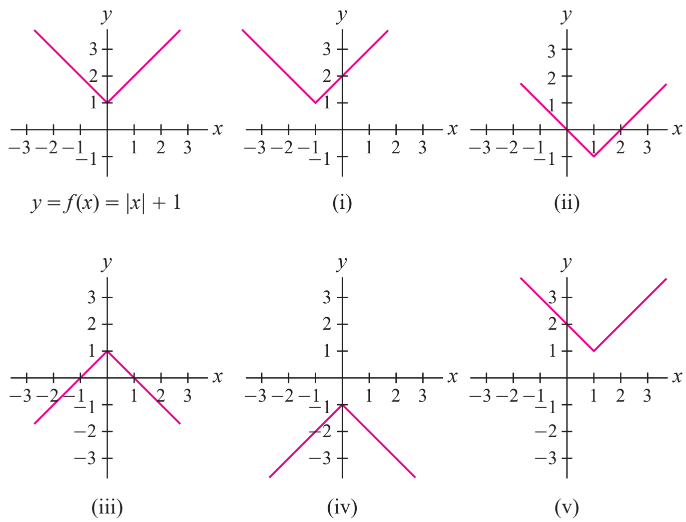


FIGURA 28

75. Esboce la gráf ca de $f(2x)$ y $f\left(\frac{1}{2}x\right)$, donde $f(x) = |x|+1$ (f gura 28).

76. Halle la función $f(x)$ cuya gráf ca se obtiene desplazando la parábola $y = x^2$ tres unidades a la derecha y cuatro unidades hacia abajo, como en la f gura 29.

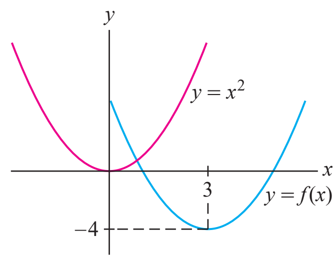


FIGURA 29

77. Defínase $f(x)$ como el mayor de los valores x y $2 - x$. Dibuje la gráf ca de $f(x)$. Halle el dominio y el recorrido. Exprese $f(x)$ en términos de la función valor absoluto.

78. Decida si cada una de las curvas de la f gura 30 es simétrica respecto al eje de ordenadas, simétrica respecto al origen, o ninguna de las dos cosas.

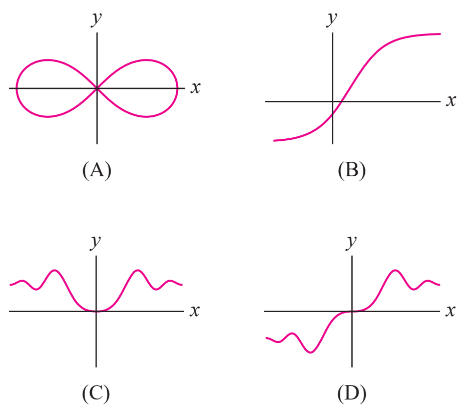


FIGURA 30

79. Demuestre que la suma de dos funciones pares es par y la suma de dos funciones impares es impar.

80. Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son ambas impares. ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares? ¿Cuáles son impares?

(a) $f(x)g(x)$ **(b)** $f(x)^3$ **(c)** $f(x) - g(x)$ **(d)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

81. Demuestre que la única función cuya gráfica es simétrica, tanto respecto al eje y como al origen, es $f(x) = 0$.

Problemas avanzados

82. Demuestre la desigualdad triangular sumando las dos desigualdades siguientes:

$$-|a| \le a \le |a|, \qquad -|b| \le b \le |b|$$

83. Demuestre que si $r = a/b$ es una fracción irreducible, entonces r admite un desarrollo decimal *finito* si y sólo si

$$b = 2^n 5^m \quad \text{con} \quad n, m \ge 0.$$

Indicación: Observe que r admite un desarrollo decimal finito cuando $10^N r$ es un número entero para algún $N \ge 0$ (y por tanto b divide a 10^N).

84. Sea $p = p_1 \dots p_s$ un entero cuyos dígitos son $p_1, \dots, p_s$. Demuestre que

$$\frac{p}{10^s - 1} = 0,\overline{p_1 \dots p_s} \dots$$

Use este hecho para hallar el desarrollo decimal de $r = \dfrac{2}{11}$. Observe que

$$r = \frac{2}{11} = \frac{18}{10^2 - 1}$$

85. Una función $f(x)$ es simétrica respecto a la recta vertical $x = a$, si $f(a - x) = f(a + x)$.

(a) Dibuje la gráfica de una función simétrica respecto a $x = 2$.

(b) Demuestre que si $f(x)$ es simétrica respecto a $x = a$, entonces $g(x) = f(x + a)$ es par.

86. Enuncie una condición para que $f(x)$ sea simétrica respecto al punto $(a, 0)$ del eje de abscisas.

1.2 Funciones lineales y cuadráticas

Las funciones lineales son las funciones más sencillas que existen y sus gráficas (rectas) son a su vez las curvas más sencillas que existen. No obstante, las funciones lineales y las rectas son sumamente importantes para el cálculo infinitesimal. Por este motivo, es crucial familiarizarse con las propiedades básicas de las funciones lineales y con las distintas maneras de escribir la ecuación de una recta.

Recordemos que una **función lineal** es una función de la forma:

$$\boxed{f(x) = mx + b \quad (m \text{ y } b \text{ constantes})}$$

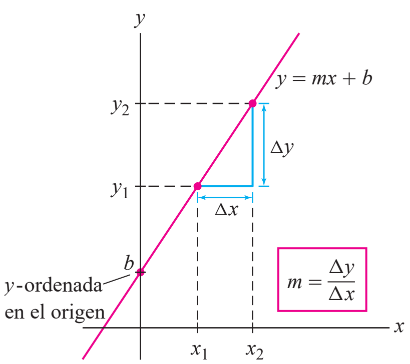


FIGURA 1 La pendiente m es el cociente entre el "ascenso" y el "avance".

La gráfica de $f(x)$ es una recta de pendiente m. Puesto que $f(0) = b$, la gráfica corta el eje de ordenadas en el punto $(0, b)$ (figura 1). El número b se llama ordenada en el origen o intersección con el eje de ordenadas, y se dice que la ecuación $y = mx + b$ de la recta está en la **forma pendiente-ordenada** (o forma explícita).

Se usan los símbolos Δx y Δy para denotar el *cambio* (o *incremento*) de x e $y = f(x)$ a lo largo de un intervalo $[x_1, x_2]$ (figura 1):

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)}$$

La pendiente m de una recta es el cociente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{\text{ascenso}}{\text{avance}}$$

Se llega a esta conclusión a partir de la fórmula $y = mx + b$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

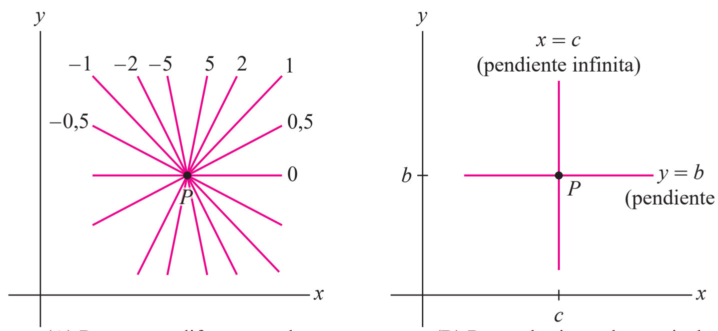
La pendiente m mide la *tasa de variación* de y respecto a x. En efecto, si se escribe

$$\Delta y = m\Delta x$$

se observa que un incremento de una unidad en x (es decir, $\Delta x = 1$) produce un cambio Δy de m unidades en y. Por ejemplo, si $m = 5$, entonces y aumenta en cinco unidades por cada incremento de una unidad en x. Esta interpretación de la pendiente como una tasa de variación es fundamental en el cálculo infinitesimal. Se analizará con más detalle en la sección 2.1.

Gráficamente, la pendiente m mide la inclinación de la recta $y = mx+b$. La figura 2(A) muestra rectas que pasan por un punto con distintos valores de la pendiente m. Cabe observar las siguientes propiedades:

- **Inclinación**: cuanto mayor es el valor absoluto $|m|$, más inclinada es la recta.
- **Pendiente negativa**: si $m < 0$, la recta desciende de izquierda a derecha.
- $f(x) = mx + b$ es estrictamente creciente si $m > 0$ y estrictamente decreciente si $m < 0$.
- Una **recta horizontal** $y = b$ tiene pendiente $m = 0$ [figura 2(B)].
- Una **recta vertical** tiene ecuación $x = c$, donde c es una constante. La pendiente de una recta vertical no está bien definida. No es posible escribir la ecuación de una recta vertical en la forma pendiente-ordenada $y = mx + b$.



(A) Rectas con diferentes valores de la pendiente, pasando por P

(B) Rectas horizontal y vertical pasando por P

FIGURA 2

PRECAUCIÓN: A menudo las gráficas se dibujan empleando escalas diferentes en los dos ejes de coordenadas. Esto es necesario para mantener el tamaño de las gráficas dentro de unos límites razonables. Sin embargo, cuando esas escalas son diferentes, las rectas no se visualizan con sus verdaderas pendientes.

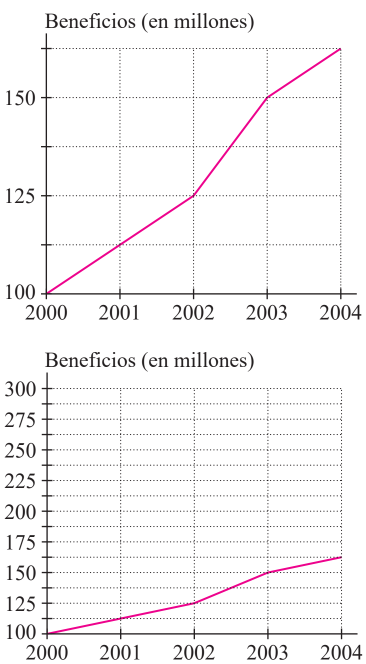


FIGURA 3 Crecimiento de los beneficios de una empresa.

La escala es especialmente importante de cara a las aplicaciones, puesto que la inclinación de una gráfica depende de la elección de unidades en los ejes de coordenadas. Se pueden crear impresiones *subjetivas* muy distintas mediante un cambio de escala. La figura 3 muestra el crecimiento de los beneficios de una empresa durante un período de cuatro años. Aunque los dos dibujos ofrecen la misma información, el dibujo superior hace que el crecimiento parezca más espectacular.

A continuación se repasa la relación existente entre las pendientes de dos rectas paralelas y de dos rectas perpendiculares (figura 4):

- Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$.
- Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 son **perpendiculares** si y sólo si

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad (\text{o } m_1 m_2 = -1).$$

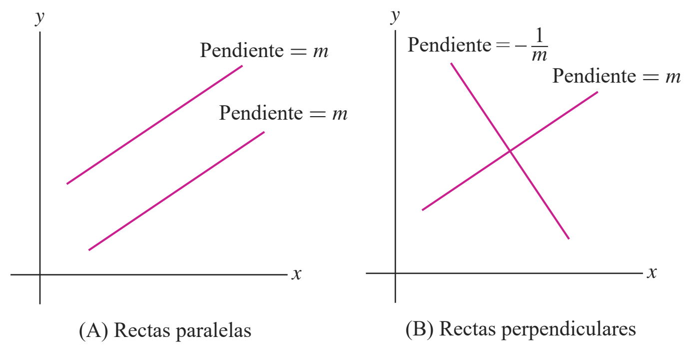
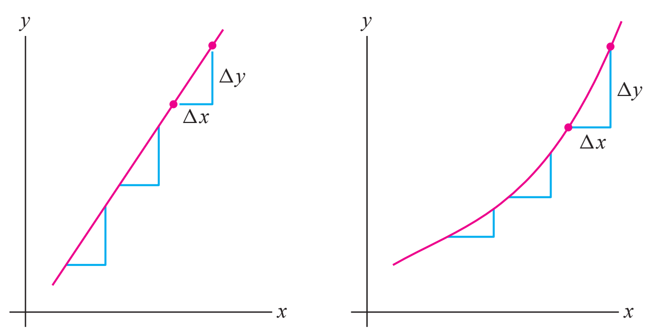


FIGURA 4 Rectas paralelas y rectas perpendiculares.

UN APUNTE CONCEPTUAL Los incrementos sobre un intervalo $[x_1, x_2]$:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

pueden def nirse para cualquier función $f(x)$ (ya sea lineal o no), pero el resultado cociente $\Delta y/\Delta x$ puede depender entonces del intervalo considerado (f gura 5). Las funciones lineales $f(x) = mx + b$ cumplen la propiedad (característica) de que $\Delta y/\Delta x$ tiene el mismo valor, m, para cualquier intervalo. En otras palabras, la tasa de variación de y respecto a x es constante. Esta propiedad puede usarse para determinar si dos cantidades variables están relacionadas por una ecuación lineal.



Función lineal: el cociente $\Delta y/\Delta x$ es el mismo para cualquier intervalo.

Función no lineal: el cociente $\Delta y/\Delta x$ varía, en función del intervalo considerado.

FIGURA 5

■ **EJEMPLO 1 Criterio de relación lineal** La tabla 1 muestra la presión P de un gas a diferentes temperaturas T. ¿Sugieren estos datos la existencia de una relación lineal entre P y T?

TABLA 1

Temperatura (°C)	**Presión** (kPa)
40	1365,80
45	1385,40
55	1424,60
70	1483,40
80	1522,60

Solución Debe calcularse $\dfrac{\Delta P}{\Delta T}$ para puntos sucesivos y estudiar si esa razón es constante:

Es poco probable que un conjunto de datos experimentales muestre una linealidad perfecta, incluso cuando los puntos obtenidos se alinean en una recta. El método de la "regresión lineal" se utiliza para hallar la función lineal que se ajusta mejor a los datos obtenidos.

(T_1, P_1)	(T_2, P_2)	$\dfrac{\Delta P}{\Delta T}$
(40, 1365,80)	(45, 1385,40)	$\dfrac{1385{,}40 - 1365{,}80}{45 - 40} = 3{,}92$
(45, 1385,40)	(55, 1424,60)	$\dfrac{1424{,}60 - 1385{,}40}{55 - 45} = 3{,}92$
(55, 1424,60)	(70, 1483,40)	$\dfrac{1483{,}40 - 1424{,}60}{70 - 55} = 3{,}92$
(70, 1483,40)	(80, 1522,60)	$\dfrac{1522{,}60 - 1483{,}40}{80 - 70} = 3{,}92$

Como $\Delta P/\Delta T$ es constante e igual a 3,92, los puntos se encuentran en una recta de pendiente $m = 3{,}92$ (que queda conf rmado por la representación gráf ca de la f gura 6). ■

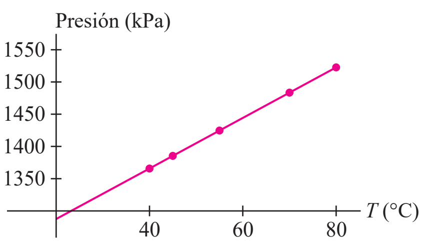


FIGURA 6 Recta para los datos de presión y temperatura.

Como ya se ha dicho, es importante familiarizarse con las maneras habituales de expresar la ecuación de una recta. La **ecuación lineal** general es

$$\boxed{ax + by = c} \qquad (1)$$

donde a y b no son *simultáneamente* cero. Cuando $b = 0$, se obtiene la recta vertical $ax = c$. Cuando $b \neq 0$, se puede reescribir la ec. (1) en la forma pendiente-ordenada. Por ejemplo, $-6x + 2y = 3$ se convierte en $y = 3x + \frac{3}{2}$.

Otras dos ecuaciones de la recta que se utilizarán con frecuencia son las formas **punto-pendiente** y la forma **punto-punto**. Dado un punto $P = (a, b)$ y una pendiente m, la ecuación de la recta que pasa por P con pendiente m es $y - b = m(x - a)$. De manera análoga, la pendiente de la recta que pasa por dos puntos distintos $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$ es igual a (f gura 7):

$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

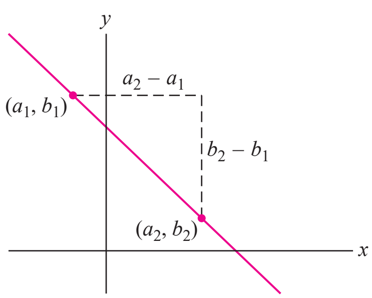


FIGURA 7 La pendiente de la recta que pasa por $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$ es $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

Por tanto, se puede escribir su ecuación como $y - b_1 = m(x - a_1)$.

Ecuaciones de las rectas

1. Ecuación punto-pendiente: la recta que pasa por $P = (a, b)$ con pendiente m tiene por ecuación

$$\boxed{y - b = m(x - a)}$$

2. Ecuación punto-punto: la recta que pasa por $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$ tiene por ecuación

$$\boxed{y - b_1 = m(x - a_1) \qquad \text{donde } m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}}$$

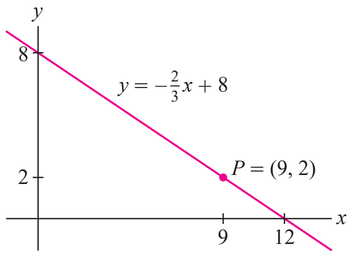


FIGURA 8 Recta que pasa por $P = (9, 2)$ con pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

■ **EJEMPLO 2 Recta de pendiente dada que pasa por un punto dado** Halle la ecuación de la recta que pasa por $(9, 2)$ con pendiente $-\frac{2}{3}$.

Solución Se puede escribir la ecuación directamente en la forma punto-pendiente:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 9)$$

En la forma pendiente-ordenada: $y = -\frac{2}{3}(x-9)+2$, o bien $y = -\frac{2}{3}x+8$. Véase la figura 8. ■

■ **EJEMPLO 3 Recta que pasa por dos puntos** Halle la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y $(9, 5)$.

Solución La pendiente de la recta es igual a:

$$m = \frac{5-1}{9-2} = \frac{4}{7}$$

Como $(2, 1)$ pertenece a la recta, la ecuación pedida, en la forma punto-pendiente, es $y - 1 = \frac{4}{7}(x - 2)$. ■

Una **función cuadrática** es una función definida por un polinomio de segundo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c, \text{ constantes con } a \neq 0)$$

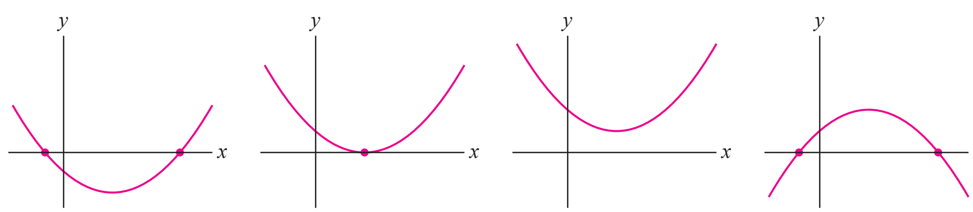
La gráfica de $f(x)$ es una **parábola** (figura 9). La parábola se abre hacia arriba si el coeficiente a del término de grado máximo es positivo, y hacia abajo si a es negativo. El **discriminante** de $f(x)$ es la cantidad

$$D = b^2 - 4ac$$

Las raíces de $f(x)$ vienen dadas por la **fórmula cuadrática** (ver el problema 56):

$$\boxed{\text{Raíces de } f(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

El signo de D determina si $f(x)$ posee o no raíces reales (figura 9). Si $D > 0$, entonces $f(x)$ tiene dos raíces reales, mientras que si $D = 0$, entonces tiene una única raíz real (llamada "raíz doble"). Si $D < 0$, entonces $\sqrt{D}$ es un número imaginario y $f(x)$ no tiene raíces reales.



Dos raíces reales
$a > 0$ y $D > 0$

Una raíz doble
$a > 0$ y $D = 0$

Ninguna raíz real
$a > 0$ y $D < 0$

Dos raíces reales
$a < 0$ y $D > 0$

FIGURA 9 Gráficas de funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cuando $f(x)$ tiene dos raíces reales r_1 y r_2, la función $f(x)$ se puede factorizar como:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Por ejemplo, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ tiene por discriminante $D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$. Según la fórmula cuadrática, sus raíces son $(3 \pm 1)/4$, es decir 1 y $\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

La técnica de **completar cuadrados** consiste en escribir un polinomio de segundo grado como un múltiplo de un cuadrado perfecto más una constante:

$$ax^2 + bx + c = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{Cuadrado perfecto}} + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{\text{Constante}} \qquad \boxed{1}$$

No hace falta memorizar esta fórmula: lo que debe recordarse es cómo se lleva a cabo el proceso de completar cuadrados.

Se han hallado textos cuneiformes escritos en tablas de arcilla que demuestran que el método de completar cuadrados era conocido por matemáticos babilonios que vivieron hace unos 4.000 años.

■ **EJEMPLO 4 Completar cuadrados** Use el método de completar cuadrados con el polinomio $4x^2 - 12x + 3$.

Solución En primer lugar sacamos factor común el coeficiente del término de grado máximo:

$$4x^2 - 12x + 3 = 4\left(x^2 - 3x + \frac{3}{4}\right)$$

A continuación se completa el cuadrado para el término $x^2 - 3x$:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Por tanto,

$$4x^2 - 12x + 3 = 4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6 \qquad ■$$

La técnica de completar cuadrados puede usarse para hallar el valor mínimo o el valor máximo de una función cuadrática.

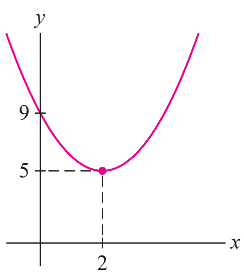


FIGURA 10 Gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

■ **EJEMPLO 5 Halle el valor mínimo de una función cuadrática** Halle el valor mínimo de $f(x) = x^2 - 4x + 9$ por el método de completar cuadrados.

Solución Se puede expresar

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2 - 4 + 9 = \overbrace{(x - 2)^2}^{\text{Este término es} \geq 0} + 5$$

En consecuencia, $f(x) \geq 5$ para todo x y el valor mínimo de $f(x)$ es $f(2) = 5$ (figura 10). ■

1.2 RESUMEN

- Una función de la forma $f(x) = mx + b$ se llama lineal.
- La ecuación general de una recta es $ax + by = c$. La recta $y = c$ es horizontal y la recta $x = c$ es vertical.
- Hay tres maneras útiles de escribir la ecuación de una recta no vertical:
  - Forma pendiente-ordenada: $y = mx + b$ (pendiente m y ordenada en el origen b)
  - Forma punto-pendiente: $y - b = m(x - a)$ [pendiente m y pasa por (a, b)]
  - Forma punto-punto: la recta que pasa por dos puntos $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$ tiene pendiente $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ y su ecuación es $y - b_1 = m(x - a_1)$.
- Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$, y son perpendiculares si y sólo si $m_1 = -1/m_2$.

- Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se denomina cuadrática. Sus raíces son $x = (-b \pm \sqrt{D})/2a$, donde $D = b^2 - 4ac$ es el discriminante. Las raíces son reales y diferentes si $D > 0$, hay una raíz doble si $D = 0$, y no existen raíces reales si $D < 0$.
- La técnica de completar cuadrados consiste en escribir una función cuadrática como un múltiplo de un cuadrado perfecto más una constante.

1.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta $y = -4x - 9$?

2. ¿Son perpendiculares las rectas $y = 2x + 1$ e $y = -2x - 4$?

3. ¿Cuándo es la recta $ax + by = c$ paralela al eje y? ¿Y al eje de abscisas?

4. Sea $y = 3x + 2$. ¿Cuál es el valor de Δy si x se incrementa en 3 unidades?

5. ¿Cuál es el valor mínimo de $f(x) = (x + 3)^2 - 4$?

6. ¿Qué resultado da el método de completar cuadrados aplicado a $f(x) = x^2 + 1$?

Problemas

En los problemas 1-4, halle la pendiente, la ordenada en el origen (o intersección con el eje y) y la intersección con el eje x de la recta correspondiente a la ecuación dada.

1. $y = 3x + 12$

2. $y = 4 - x$

3. $4x + 9y = 3$

4. $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$

En los problemas 5-8, hallar la pendiente de la recta dada.

5. $y = 3x + 2$

6. $y = 3(x - 9) + 2$

7. $3x + 4y = 12$

8. $3x + 4y = -8$

En los problemas 9-20, hallar la ecuación de la recta descrita.

9. Pendiente 3, ordenada en el origen 8

10. Pendiente -2, ordenada en el origen 3

11. Pendiente 3, pasa por $(7, 9)$

12. Pendiente -5, pasa por $(0, 0)$

13. Horizontal, pasa por $(0, -2)$

14. Pasa por $(-1, 4)$ y $(2, 7)$

15. Paralela a $y = 3x - 4$, pasa por $(1, 1)$

16. Pasa por $(1, 4)$ y $(12, -3)$

17. Perpendicular a $3x + 5y = 9$, pasa por $(2, 3)$

18. Vertical, pasa por $(-4, 9)$

19. Horizontal, pasa por $(8, 4)$

20. Pendiente 3, la intersección con el eje x es 6

21. Halle la ecuación de la mediatriz del segmento que une $(1, 2)$ y $(5, 4)$ (f gura 11). *Indicación:* El punto medio Q del segmento que une (a, b) y (c, d) es $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$.

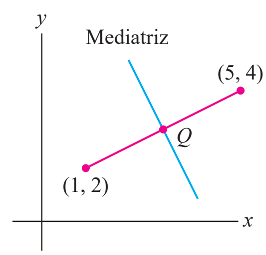


FIGURA 11

22. Ecuación segmentaria Demuestre que la recta que corta el eje x en $x = a$ y el eje y en $y = b$ tiene por ecuación (f gura 12):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

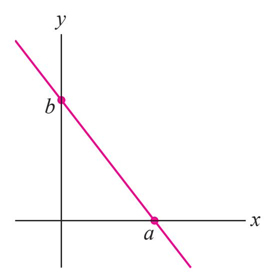


FIGURA 12

23. Halle la ecuación de la recta que corta el eje x en $x = 4$ y el eje y en $y = 3$.

24. Una recta de pendiente $m = 2$ pasa por $(1, 4)$. Halle y para que $(3, y)$ pertenezca a la recta.

25. Determine si existe una constante c tal que la recta $x + cy = 1$:

(a) Tenga pendiente 4

(b) Pase por $(3, 1)$

(c) Sea horizontal

(d) Sea vertical

26. Supongamos que el número N de entradas para un concierto, que se venderán a un precio de P euros por entrada, es una función lineal $N(P)$

para $10 \leq P \leq 40$. Determine $N(P)$ (llamada función de demanda) si $N(10) = 500$ y $N(40) = 0$. ¿Qué disminución ΔN cabe esperar en el número de entradas vendidas si el precio se incrementa en $\Delta P =$ $= 5$ euros?

27. Los cuerpos se dilatan al calentarse. Consideremos una varilla metálica de longitud L_0 que se encuentra a una temperatura T_0. Si la temperatura varía en una cantidad ΔT, entonces la longitud de la varilla cambia en $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$, donde α es el coef ciente de dilatación térmica. Para el acero, $\alpha = 1{,}24 \times 10^{-5}\,°\mathrm{C}^{-1}$.

(a) Una varilla de acero mide $L_0 = 40$ cm a una temperatura $T_0 = 40\,°\mathrm{C}$. ¿Qué longitud adquirirá a $T = 90\,°\mathrm{C}$?

(b) Halle su longitud a $T = 50\,°\mathrm{C}$ sabiendo que cuando $T_0 = 100\,°\mathrm{C}$ mide 65 cm.

(c) Exprese la longitud L en función de T si $L_0 = 65$ cm cuando $T_0 = 100\,°\mathrm{C}$.

28. ¿Pertenecen los puntos (0,5, 1), (1, 1,2), (2, 2) a una misma recta?

29. Halle b para que $(2, -1)$, $(3, 2)$ y $(b, 5)$ estén alineados.

30. Halle una expresión para la velocidad v como función lineal de t que concuerde con los siguientes datos:

t (s)	0	2	4	6
v (m/s)	39,2	58,6	78	97,4

31. Se ha medido el período T de un péndulo para distintos valores de su longitud L. A partir de los datos obtenidos, ¿hay evidencia de que T sea una función lineal de L?

L (cm)	20	30	40	50
T (s)	0,9	1,1	1,27	1,42

32. Demuestre que $f(x)$ es lineal de pendiente m si y sólo si

$$f(x+h) - f(x) = mh \quad \text{(para todo } x \text{ y } h\text{)}$$

33. Halle las raíces de los siguientes polinomios de segundo grado:

(a) $4x^2 - 3x - 1$ **(b)** $x^2 - 2x - 1$

En los problemas 34-41, complete cuadrados y encuentre el valor mínimo o máximo de la función cuadrática dada.

34. $y = x^2 + 2x + 5$

35. $y = x^2 - 6x + 9$

36. $y = -9x^2 + x$

37. $y = x^2 + 6x + 2$

38. $y = 2x^2 - 4x - 7$

39. $y = -4x^2 + 3x + 8$

40. $y = 3x^2 + 12x - 5$

41. $y = 4x - 12x^2$

42. Dibuje la gráf ca de $y = x^2 - 6x + 8$ localizando las raíces y el punto mínimo.

43. Dibuje la gráf ca de $y = x^2 + 4x + 6$ hallando el punto mínimo, la ordenada en el origen y otro punto cualquiera.

44. Si los alelos A y B del gen de la f brosis cística se encuentran en una población con frecuencias p y $1 - p$ (donde p está comprendido entre 0 y 1), entonces la frecuencia de portadores heterocigóticos (portadores con ambos alelos) es $2p(1 - p)$. ¿Qué valor de p da lugar a una mayor frecuencia de portadores heterocigóticos?

45. ¿Para qué valores de c tiene $f(x) = x^2 + cx + 1$ una raíz doble? ¿Para qué valores no tiene ninguna raíz real?

46. Sea $f(x)$ una función cuadrática y c una constante. ¿Cuál de las af rmaciones siguientes es correcta? Explíquelo gráf camente.

(a) Existe un único valor de c tal que $y = f(x) - c$ tiene una raíz doble.

(b) Existe un único valor de c tal que $y = f(x - c)$ tiene una raíz doble.

47. Demuestre que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$. *Indicación:* Considere $(x^{1/2} - x^{-1/2})^2$.

48. Sean $a, b > 0$. Demuestre que la *media geométrica* $\sqrt{ab}$ es menor o igual que la *media aritmética* $(a + b)/2$. *Indicación:* Use una variante de la indicación ofrecida en el problema 47.

49. Si dos objetos de pesos x y w_1 se cuelgan de las balanzas representadas en la f gura 13(A), la barra queda en posición horizontal cuando $bx = aw_1$. Si las longitudes a y b son conocidas, entonces se puede usar la igualdad anterior para determinar un peso x desconocido, seleccionando w_1 de manera que la barra quede horizontal. Si a y b no se conocen con precisión, entonces se puede emplear el procedimiento siguiente. En primer lugar, equilibrar x con w_1 a la izquierda tal como se muestra en (A). A continuación, permutar las posiciones de los dos objetos y equilibrar x con w_2 a la derecha, como en (B). El promedio $\bar{x} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ da un valor aproximado de x. Demostrar que $\bar{x}$ es mayor o igual que el verdadero peso de x.

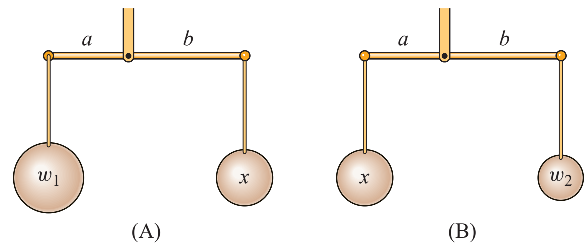


FIGURA 13

50. Halle dos números x e y cuya suma sea 10 y cuyo producto sea 24. *Indicación:* Halle un polinomio cuadrático del cual x sea una raíz.

51. Halle dos números cuya suma y cuyo producto sean ambos iguales a 8.

52. Demuestre que la gráf ca de la parábola $y = x^2$ está formada por todos los puntos P tales que $d_1 = d_2$, donde d_1 es la distancia de P a $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y d_2 es la distancia de P a la recta horizontal $y = -\frac{1}{4}$ (f gura 14).

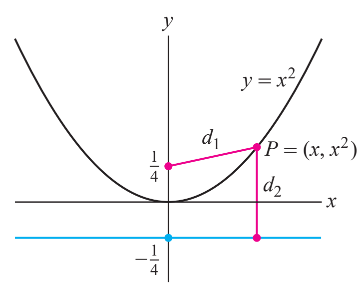


FIGURA 14

Problemas avanzados

53. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son ambas lineales, entonces $f(x)+g(x)$ también lo es. ¿Ocurre lo mismo con $f(x)g(x)$?

54. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones lineales tales que $f(0)=g(0)$ y $f(1)=g(1)$, entonces $f(x)=g(x)$.

55. Demuestre que el cociente $\Delta y/\Delta x$ para la función $f(x)=x^2$ en un intervalo $[x_1,x_2]$ no es constante, sino que depende del intervalo considerado. Determine de qué manera depende $\Delta y/\Delta x$ de los valores x_1 y x_2.

56. Use la ec. (2) para deducir la fórmula cuadrática para las raíces de $ax^2+bx+c=0$.

57. Sean $a, c \neq 0$. Demuestre que las raíces de

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{y} \qquad cx^2+bx+a=0$$

son recíprocas unas de las otras.

58. Mediante la técnica de completar cuadrados, demuestre que la parábola

$$y=ax^2+bx+c$$

es congruente a $y=ax^2$ (es decir, se obtiene a partir de esta parábola) a través de una traslación vertical y otra horizontal.

59. Demuestre las **fórmulas de Viète**: Un polinomio de segundo grado que tiene raíces α y β es x^2+bx+c, donde $b=-\alpha-\beta$ y $c=\alpha\beta$.

1.3 Tipos básicos de funciones

Sería inviable (e inútil) querer describir todas las posibles funciones $f(x)$. Puesto que los valores que toma una función pueden asignarse de manera arbitraria, una función elegida al azar sería probablemente tan complicada que no podríamos dibujar su gráfica ni describirla de ninguna manera razonable. Ahora bien, el cálculo infinitesimal no pretende estudiar todas las funciones: sus técnicas, muy poderosas y generales, se aplican solamente a funciones que "se comporten suficientemente bien" (aclararemos el significado de "comportarse bien" cuando estudiemos la derivada en el capítulo 3). Afortunadamente, tales funciones son adecuadas para un amplio abanico de aplicaciones.

En este libro se estudian principalmente las siguientes clases de funciones, importantes, muy conocidas y que presentan un buen comportamiento:

polinomios funciones racionales funciones algebraicas
funciones exponenciales funciones trigonométricas
funciones logarítmicas funciones trigonométricas inversas

Nos referiremos a este grupo como el de las **funciones básicas**.

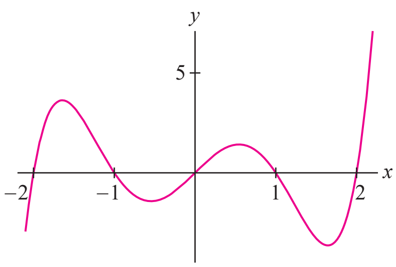


FIGURA 1 El polinomio $y=x^5-5x^3+4x$.

- **Polinomios:** la función $f(x)=x^m$ se llama **función potencial** de exponente m. Un polinomio es una suma de múltiplos de funciones potenciales con exponentes naturales (figura 1):

$$f(x)=x^5-5x^3+4x, \qquad g(t)=7t^6+t^3-3t-1$$

La función $f(x)=x+x^{-1}$ no es un polinomio, puesto que contiene una función potencial x^{-1} de exponente negativo. Un polinomio genérico en la variable x se puede escribir como

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

 – Los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes**.
 – El **grado** de $P(x)$ es n (siempre que $a_n \neq 0$).
 – El coeficiente a_n se denomina **coeficiente principal**.
 – El dominio de $P(x)$ es **R**.

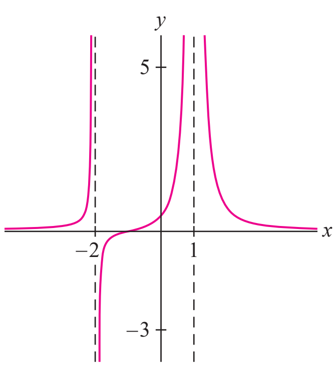


FIGURA 2 La función racional $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-3x+2}$.

- Una **función racional** es un *cociente* de dos polinomios (figura 2):

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad [P(x) \text{ y } Q(x) \text{ polinomios}]$$

El dominio de $f(x)$ es el conjunto de números x tales que $Q(x) \neq 0$. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{dominio } \{x : x \neq 0\}$$

$$h(t) = \frac{7t^6 + t^3 - 3t - 1}{t^2 - 1} \qquad \text{dominio } \{t : t \neq \pm 1\}$$

Cualquier polinomio es también una función racional [con $Q(x) = 1$].

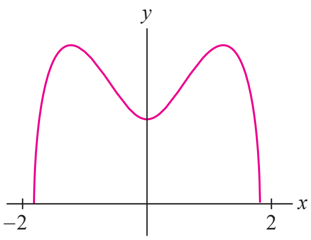


FIGURA 3 La función algebraica $f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}$.

- Una **función algebraica** se obtiene combinando sumas, productos y cocientes de raíces de polinomios y funciones racionales (f gura 3):

$$f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}, \qquad g(t) = (\sqrt{t} - 2)^{-2}, \qquad h(z) = \frac{z + z^{-5/3}}{5z^3 - \sqrt{z}}$$

Un número x pertenece al dominio de f si todos los términos de la expresión de f están def nidos y el resultado no incluye ninguna división por cero. Así, $g(t)$ está def nido si $t \geq 0$ y $\sqrt{t} \neq 2$, por lo que el dominio de $g(t)$ es $D = \{t : t \geq 0 \text{ y } t \neq 4\}$. De manera más general, las funciones algebraicas se def nen por ecuaciones polinómicas en las variables x e y. En tal caso, diremos que y está **def nida implícitamente** como función de x. Por ejemplo, la ecuación $y^4 + 2x^2y + x^4 = 1$ def ne y implícitamente como función de x.

Cualquier función que no sea algebraica se llama ***trascendente****. Las funciones exponenciales y trigonométricas son ejemplos de funciones trascendentes. Existen otras funciones trascendentes, como la función gamma o las funciones de Bessel, que se usan en ingeniería y estadística. El término "trascendente" fue utilizado en la década de 1670 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) para designar las funciones de este tipo.*

- **Funciones exponenciales:** la función $f(x) = b^x$, donde $b > 0$, se llama función exponencial de base b. Algunos ejemplos son:

$$f(x) = 2^x, \qquad g(t) = 10^t, \qquad h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \qquad p(t) = (\sqrt{5})^t$$

Las funciones exponenciales y sus *inversas*, las **funciones logarítmicas**, se estudian con detalle en el capítulo 7.

- Las **funciones trigonométricas** son funciones construidas a partir de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Estas funciones se estudian en la próxima sección.

Construcción de nuevas funciones

Si f y g son funciones, se pueden construir nuevas funciones a partir de ellas mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, es decir:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{donde } g(x) \neq 0)$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, entonces se tiene:

$$(f + g)(x) = x^2 + \operatorname{sen} x, \quad (f - g)(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$$

$$(fg)(x) = x^2 \operatorname{sen} x, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$$

También se pueden multiplicar funciones por constantes. Una función de la forma

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) \qquad (c_1, c_2 \text{ constantes})$$

se denomina una **combinación lineal** de $f(x)$ y $g(x)$.

La **composición** es otro recurso importante para construir nuevas funciones. La composición de g y f es la función $f \circ g$ def ned by $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de valores de x del dominio de g para los que $g(x)$ pertenece al dominio de f.

El ejemplo 1 muestra que la composición de funciones no *es conmutativa: las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ pueden (y habitualmente así ocurre) ser diferentes.*

■ **EJEMPLO 1** Obtenga las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ y estudiar sus dominios, siendo:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = 1 - x$$

Solución Se tiene que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x) = \sqrt{1 - x}$$

La raíz cuadrada $\sqrt{1-x}$ está def nida si $1 - x \geq 0$, es decir $x \leq 1$, por lo que el dominio de $f \circ g$ es $\{x : x \leq 1\}$. Por otra parte,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$$

El dominio de $g \circ f$ is $\{x : x \geq 0\}$. ■

Funciones elementales

La funciones inversas se estudiarán en la sección 7.2.

Tal y como hemos mencionado, se pueden obtener nuevas funciones mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, así como la composición. Resulta conveniente referirse a las funciones construidas de este modo a partir de las funciones básicas, descritas anteriormente, como **funciones elementales**. Las siguientes funciones son elementales:

$$f(x) = \sqrt{2x + \operatorname{sen} x}, \qquad f(x) = 10^{\sqrt{x}}, \qquad f(x) = \frac{1 + x^{-1}}{1 + \cos x}$$

1.3 RESUMEN

- Sea m un número real; la función $f(x) = x^m$ se llama función potencial de exponente m. Un polinomio $P(x)$ es una suma de múltiplos de funciones x^m, donde m es un número natural:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Este polinomio tiene grado n (si suponemos que $a_n \neq 0$), y a_n se llama coef ciente principal.
- Una función racional es un cociente $P(x)/Q(x)$ de dos polinomios.
- Una función algebraica se construye mediante sumas, productos y raíces enésimas de polinomios y funciones racionales.
- Función exponencial: $f(x) = b^x$, donde $b > 0$ (el número b se denomina base).
- La función compuesta $f \circ g$ se def ne como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de x del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f.

1.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dé un ejemplo de una función racional.
2. ¿Es $|x|$ una función polinómica? ¿Y $|x^2 + 1|$?
3. ¿Qué hay de raro en el dominio de $f \circ g$, si $f(x) = x^{1/2}$ y $g(x) = -1 - |x|$?
4. ¿Es $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ creciente o decreciente?
5. Dé un ejemplo de una función trascendente.

Problemas

En los problemas 1-12, determine el dominio de la función dada.

1. $f(x) = x^{1/4}$

2. $g(t) = t^{2/3}$

3. $f(x) = x^3 + 3x - 4$

4. $h(z) = z^3 + z^{-3}$

5. $g(t) = \dfrac{1}{t+2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

7. $G(u) = \dfrac{1}{u^2-4}$

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-9}$

9. $f(x) = x^{-4} + (x-1)^{-3}$

10. $F(s) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{s}{s+1}\right)$

11. $g(y) = 10^{\sqrt{y}+y^{-1}}$

12. $f(x) = \dfrac{x + x^{-1}}{(x-3)(x+4)}$

En los problemas 13-24, clasifque cada una de las funciones dadas como polinómica, racional, algebraica o trascendente.

13. $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 8$

14. $f(x) = x^{-4}$

15. $f(x) = \sqrt{x}$

16. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + \operatorname{sen} x}$

18. $f(x) = 2^x$

19. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x}{9 - 7x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{3x - 9x^{-1/2}}{9 - 7x^2}$

21. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

22. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$

23. $f(x) = x^2 + 3x^{-1}$

24. $f(x) = \operatorname{sen}(3^x)$

25. ¿Es $f(x) = 2^{x^2}$ una función trascendente?

26. Demuestre que $f(x) = x^2 + 3x^{-1}$ y $g(x) = 3x^3 - 9x + x^{-2}$ son funciones racionales (expréselas como cocientes de polinomios).

En los problemas 27-34, calcule las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ y determine sus dominios respectivos.

27. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 1$

28. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^{-4}$

29. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = x^2$

30. $f(x) = |x|, \quad g(\theta) = \operatorname{sen}\theta$

31. $f(\theta) = \cos\theta, \quad g(x) = x^3 + x^2$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad g(x) = x^{-2}$

33. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad g(t) = -t^2$

34. $f(t) = \sqrt{t}, \quad g(t) = 1 - t^3$

35. La población de un país (en millones de habitantes) expresada como función del tiempo t (en años) es $P(t) = 30 \cdot 2^{kt}$, con $k = 0,1$. Demuestre que la población se duplica cada 10 años. Demuestre que, más generalmente, dadas dos constantes a y k no nulas cualesquiera, la función $g(t) = a2^{kt}$ duplica su valor cada $1/k$ años.

36. Halle todos los valores de c para los que el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2cx + 4}$ es $\mathbb{R}$.

Problemas avanzados

En los problemas 37-43, se defne la primera diferencia *δf de una función $f(x)$ como $\delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.*

37. Demuestre que si $f(x) = x^2$, entonces $\delta f(x) = 2x + 1$. Calcule δf para $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$.

38. Demuestre que $\delta(10^x) = 9 \cdot 10^x$ y, en general, que $\delta(b^x) = (b-1)b^x$.

39. Demuestre que, si f y g son dos funciones cualesquiera, $\delta(f+g) = \delta f + \delta g$ y $\delta(cf) = c\delta(f)$, donde c es una constante arbitraria.

40. Supongamos que existe una función $P(x)$ tal que $\delta P = (x+1)^k$ y $P(0) = 0$. Demuestre que $P(1) = 1^k$, $P(2) = 1^k + 2^k$ y, en general, que para todo entero positivo n,

$$P(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \qquad \boxed{1}$$

41. Demuestre que

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

cumple $\delta P = x+1$. A continuación, aplique el problema 40 para deducir que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

42. Calcule $\delta(x^3)$, $\delta(x^2)$ y $\delta(x)$. A continuación, halle un polinomio $P(x)$ de grado 3 tal que $\delta P = (x+1)^2$ y $P(0) = 0$. Deduzca que $P(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

43. Este problema, combinado con el problema 40, demuestra que para todo número natural k existe un polinomio $P(x)$ verifcando la ec. (1). La solución requiere usar inducción y el teorema del binomio (ver el apéndice C).

(a) Demuestre que $\delta(x^{k+1}) = (k+1)x^k + \cdots$, donde los puntos suspensivos corresponden a potencias de x de grado menor que k.

(b) Demuestre, por inducción, que existe un polinomio de grado $k+1$ con coefciente principal $1/(k+1)$:

$$P(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + \cdots$$

tal que $\delta P = (x+1)^k$ y $P(0) = 0$.

1.4 Funciones trigonométricas

Empezaremos nuestro repaso trigonométrico recordando que hay dos maneras de medir los ángulos: en **radianes** y en **grados**. Se pueden describir más fácilmente teniendo en cuenta la relación existente entre los ángulos y las rotaciones. Usaremos, como es habitual, la letra griega θ ("theta") minúscula para denotar ángulos y rotaciones.

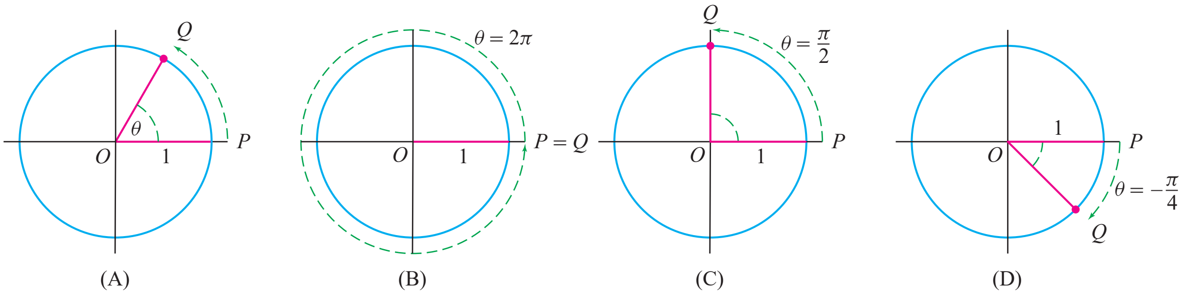


FIGURA 1 La medida en radianes θ de una rotación, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, es la longitud en la circunferencia unidad del arco recorrido por P al girar hasta Q.

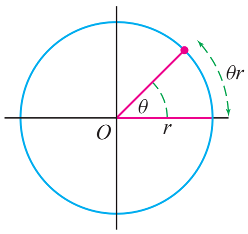


FIGURA 2 En una circunferencia de radio r, el arco correspondiente a una rotación de θ radianes en el sentido contrario al de las agujas del reloj, tiene longitud θr.

TABLA 1

Rotación	Medida en radianes
Dos giros completos	4π
Un giro completo	2π
Medio giro	π
Un cuarto de giro	$2\pi/4 = \pi/2$
Un sexto de giro	$2\pi/6 = \pi/3$

Radianes	Grados
0	$0°$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$
$\frac{\pi}{3}$	$60°$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$

La f gura 1(A) muestra una circunferencia de radio 1 en la cual el segmento $\overline{OP}$ gira en sentido contrario al de las agujas del reloj hasta $\overline{OQ}$. *La medida en radianes θ de esta rotación es la longitud del arco de circunferencia recorrido por P al girar hasta Q.* En una circunferencia de radio r, el arco correspondiente a una rotación de θ radianes en el sentido contrario al de las agujas del reloj, tiene longitud θr (f gura 2).

La circunferencia unidad tiene longitud 2π. Por tanto, un giro completo mide $\theta = 2\pi$ radianes [f gura 1(B)]. La medida en radianes de una rotación de un cuarto de giro es $\theta = 2\pi/4 = \pi/2$ [f gura 1(C)] y, en general, una rotación de una parte enésima de un giro completo mide $2\pi/n$ radianes (tabla 1). Una rotación negativa (con $\theta < 0$) es una rotación *en el sentido de las agujas del reloj* [f gura 1(D)]. El giro completo de la circunferencia unidad mide 2π (por def nición del número π).

La medida en radianes del ángulo $\angle POQ$ descrito en la f gura 1(A) se def ne como la medida en radianes de la rotación que transporta $\overline{OP}$ hasta $\overline{OQ}$. Observar que cada rotación tiene una única medida en radianes, pero la medida en radianes de un ángulo no es única. Por ejemplo, las rotaciones de θ y de $\theta + 2\pi$ transportan ambas $\overline{OP}$ hasta $\overline{OQ}$. Por tanto, θ y $\theta + 2\pi$ representan el mismo ángulo, pese a que la rotación de $\theta + 2\pi$ supone un giro completo adicional a la circunferencia. En general, *dos ángulos coinciden si las rotaciones correspondientes dif eren en un múltiplo entero de* 2π. Por ejemplo, $\pi/4$, $9\pi/4$, y $-15\pi/4$ representan el mismo ángulo porque todos dif eren en múltiplos de 2π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} - 2\pi = -\frac{15\pi}{4} + 4\pi$$

Todo ángulo admite una única medida en radianes tal que $0 \le \theta < 2\pi$. Con esta elección, el ángulo θ abarca un arco de longitud θr en una circunferencia de radio r (f gura 2).

Los grados se def nen dividiendo la circunferencia (no necesariamente de radio uno) en 360 partes. Un grado es igual a $\frac{1}{360}$ de una circunferencia. Una rotación de θ grados (que se denota por $\theta°$) corresponde a una rotación de una fracción de $\theta/360$ de la circunferencia completa. Por ejemplo, una rotación de $90°$ corresponde a una fracción de $\frac{90}{360}$, es decir de $\frac{1}{4}$ de la circunferencia.

Tal y como ocurre con los radianes, la medida en grados de un ángulo no es única. Dos medidas en grados representan el mismo ángulo, si dif eren en un múltiplo entero de 360. Por ejemplo, los ángulos $-45°$ y $675°$ coinciden porque $675° = -45° + 2(360°)$. Todo ángulo posee una única medida en grados θ tal que $0° \le \theta < 360°$.

Para convertir radianes en grados, o viceversa, se debe tener presente que 2π radianes es igual a $360°$. Por tanto, 1 radián es igual a $360/2\pi$ o a $180/\pi$ grados.

La medida en radianes es, casi siempre, la mejor elección en un contexto matemático, pero existen buenas razones de tipo práctico para usar los grados. El número 360 tiene muchos divisores $(360 = 8 \cdot 9 \cdot 5)$ *y, por consiguiente, muchas partes fraccionarias de la circunferencia pueden expresarse mediante un número entero de grados. Por ejemplo, una quinta parte de la circunferencia es igual a* $72°$*, dos novenos son* $80°$*, tres octavos son* $135°$*, etc.*

- Para pasar de radianes a grados, hay que multiplicar por $180/\pi$.
- Para pasar de grados a radianes, hay que multiplicar por $\pi/180$.

EJEMPLO 1 Convierta **(a)** $55°$ a radianes y **(b)** 0,5 radianes a grados.

Solución

(a) $55° \times \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} \approx 0{,}9599 \text{ rad}$ **(b)** $0{,}5 \text{ rad} \times \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} \approx 28{,}648°$ ■

Convenio: *Si no se indica lo contrario, siempre se medirán los ángulos en radianes.*

Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ pueden ser definidas en términos de triángulos rectángulos. Sea θ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y denotemos los lados del triángulo como se indica en la figura 3. Entonces se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

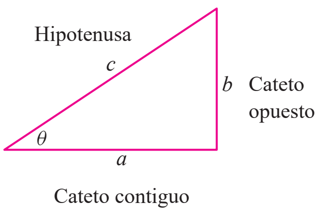


FIGURA 3

Esta definición tiene el inconveniente de que sólo tiene sentido si θ está comprendido entre 0 y $\pi/2$ (porque un ángulo de un triángulo rectángulo no puede ser superior a $\pi/2$). Sin embargo, el seno y el coseno también pueden definirse en términos de la circunferencia unidad, y esa definición es válida para cualquier ángulo. Sea $P = (x, y)$ el punto de la circunferencia unidad correspondiente a un ángulo θ como se muestra en las figuras 4(A) y (B). Se define:

$$\cos\theta = \text{coordenada } x \text{ de } P, \qquad \operatorname{sen}\theta = \text{coordenada } y \text{ de } P$$

Esto coincide con la definición dada mediante un triángulo rectángulo siempre que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Sobre la circunferencia de radio r (y centro en el origen), el punto correspondiente al ángulo θ tiene coordenadas

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Además, tal como se observa en la figura 4(C), el $\operatorname{sen}\theta$ es una función impar y $\cos\theta$ es una función par:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

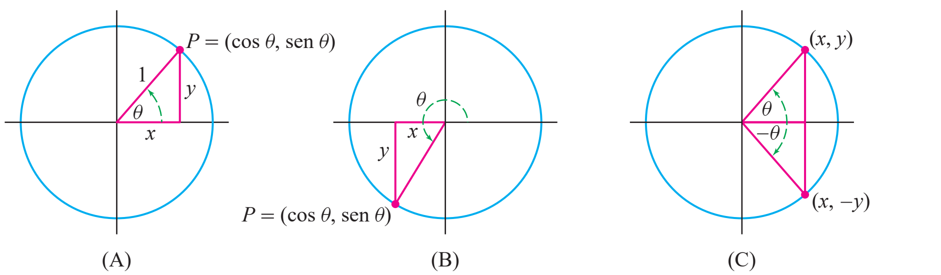


FIGURA 4 La definición del seno y coseno en base a la circunferencia unidad es válida para cualquier ángulo θ.

Aunque lo habitual es usar una calculadora para obtener los valores del seno y el coseno de un ángulo dado, los valores indicados en la figura 5 y en la tabla 2 aparecen con mucha frecuencia en la práctica y deberían memorizarse.

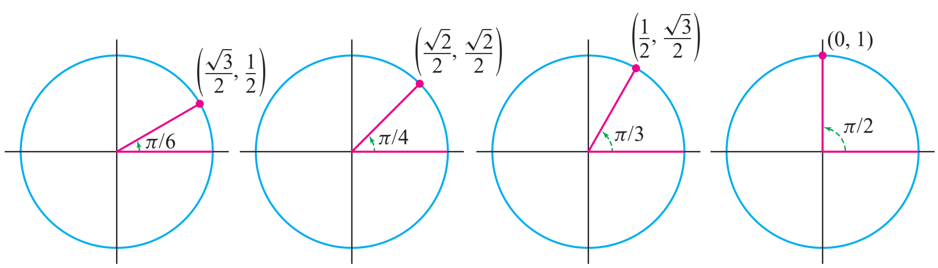


FIGURA 5 Cuatro ángulos frecuentes: las coordenadas x e y de los puntos son $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

TABLA 2

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

La gráf ca de $y = \operatorname{sen}\theta$ es la conocida "onda sinusoidal", que se muestra en la f gura 6. Cabe observar cómo la gráf ca está generada por la coordenada y del punto $P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ que va recorriendo la circunferencia unidad.

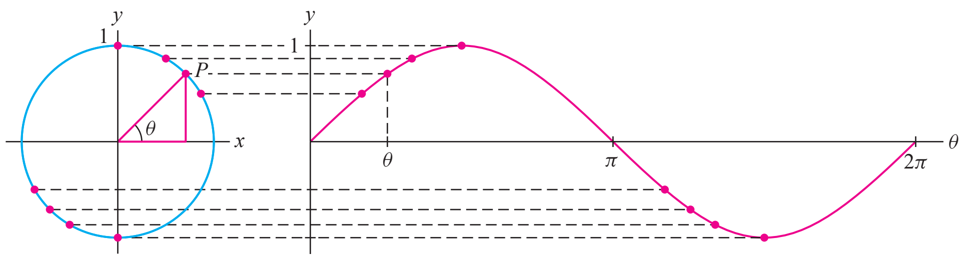


FIGURA 6 La gráf ca de $y = \operatorname{sen}\theta$ se obtiene cuando el punto $P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ se mueve sobre la circunferencia unidad.

La gráf ca de $y = \cos\theta$ tiene la misma forma, pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda (f gura 7). Los signos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ van variando a medida que el punto $P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ cambia de cuadrante.

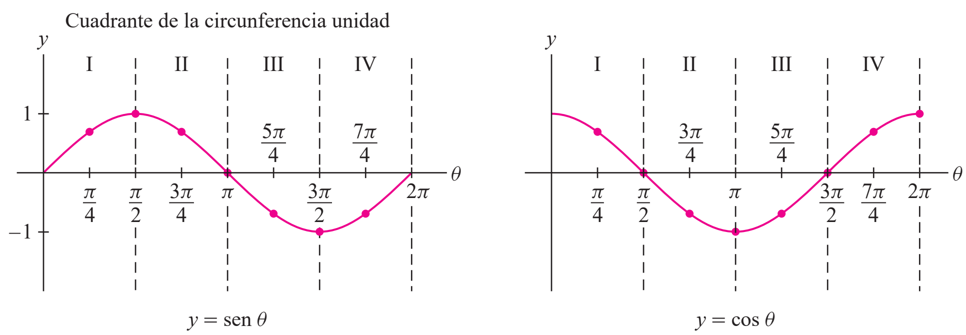


FIGURA 7 Gráf cas de $y = \operatorname{sen}\theta$ e $y = \cos\theta$ en un *período* de longitud 2π.

A menudo se escribe $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$*, es decir usando* x *en lugar de* θ*. En función de la aplicación, se puede considerar* x *como un ángulo o, simplemente, como un número real.*

Una función $f(x)$ se llama **periódica** de período T, si $f(x + T) = f(x)$ (para todo x) y T es el menor número positivo con esta propiedad. Las funciones seno y coseno son son periódicas de período $T = 2\pi$ (f gura 8), pues los valores (en radianes) x y $x + 2\pi k$ corresponden al mismo punto de la circunferencia unidad, para cualquier entero k:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi k) \qquad \cos x = \cos(x + 2\pi k)$$

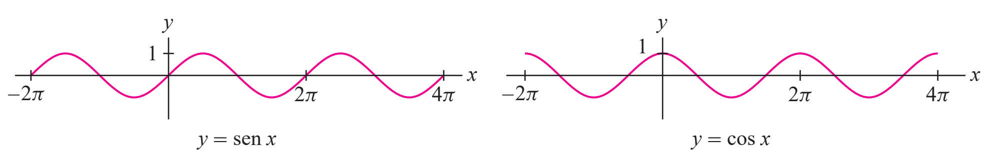


FIGURA 8 El seno y el coseno tienen período 2π.

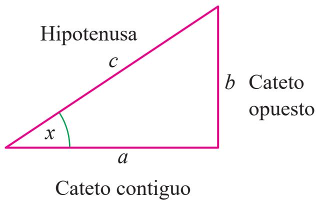


FIGURA 9

Hay otras cuatro funciones trigonométricas muy conocidas, cada una de las cuales se puede definir en términos de sen x y cos x, o bien como una cierta razón de los lados de un triángulo rectángulo (figura 9):

Tangente:	$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{b}{a},$	Cotangente:	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{a}{b}$
Secante:	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{c}{a},$	Cosecante:	$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{c}{b}$

Estas funciones son periódicas (figura 10): $y = \tan x$ e $y = \cot x$ tienen periodo π; $y = \sec x$ e $y = \csc x$ tienen periodo 2π (ver el problema 55).

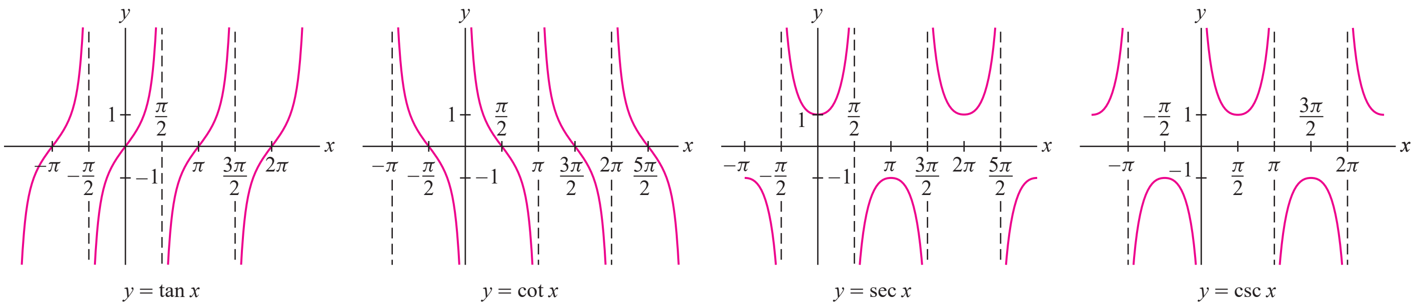


FIGURA 10 Gráficas de las funciones trigonométricas usuales.

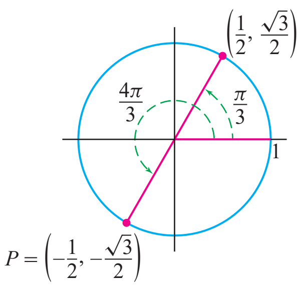


FIGURA 11

■ **EJEMPLO 2 Cálculo de valores de funciones trigonométricas** Halle los valores de las seis funciones trigonométricas en $x = 4\pi/3$.

Solución El punto P de la circunferencia unidad correspondiente al ángulo $x = 4\pi/3$ es opuesto al punto de ángulo $\pi/3$ (figura 11). Por tanto, vemos que (según la tabla 2)

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Los restantes valores son

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen} 4\pi/3}{\cos 4\pi/3} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}, \qquad \cot\frac{4\pi}{3} = \frac{\cos 4\pi/3}{\operatorname{sen} 4\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\cos 4\pi/3} = \frac{1}{-1/2} = -2, \qquad \csc\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen} 4\pi/3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$ ■

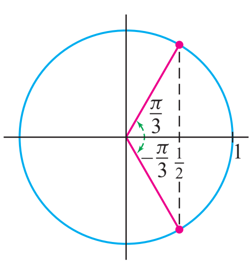


FIGURA 12 $\cos x = \frac{1}{2}$ para $x = \pm\frac{\pi}{3}$.

■ **EJEMPLO 3** Halle los ángulos x tales que $\sec x = 2$.

Solución Como $\sec x = 1/\cos x$, se debe resolver $\cos x = \frac{1}{2}$. Según la figura 12 los valores $x = \pi/3$ y $x = -\pi/3$ son solución. Se les puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π, por lo que la solución general es $x = \pm\pi/3 + 2\pi k$ para cualquier entero k. ■

■ **EJEMPLO 4 Ecuación trigonométrica** Resuelva $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$ para $x \in [0, 2\pi)$.

Solución Se deben hallar ángulos x tales que $\operatorname{sen} 4x = -\operatorname{sen} 2x$. En primer lugar, examinemos cuándo dos ángulos cualesquiera θ_1 y θ_2 cumplen $\operatorname{sen}\theta_2 = -\operatorname{sen}\theta_1$. En la figura 13 se muestra que esto ocurre si $\theta_2 = -\theta_1$ o bien $\theta_2 = \theta_1 + \pi$. Como la función seno es periódica, de periodo 2π,

$$\operatorname{sen}\theta_2 = -\operatorname{sen}\theta_1 \quad\Leftrightarrow\quad \theta_2 = -\theta_1 + 2\pi k \quad \text{o} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi + 2\pi k$$

siendo k un entero. Asignando $\theta_2 = 4x$ y $\theta_1 = 2x$, se obtiene que

$$\operatorname{sen} 4x = -\operatorname{sen} 2x \quad\Leftrightarrow\quad 4x = -2x + 2\pi k \quad \text{o} \quad 4x = 2x + \pi + 2\pi k$$

Según la primera ecuación $6x = 2\pi k$, es decir $x = (\pi/3)k$; la segunda, da lugar a $2x = \pi + 2\pi k$ o $x = \pi/2 + \pi k$. Se obtienen ocho soluciones en $[0, 2\pi)$ (f gura 14):

$$x = 0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}$$

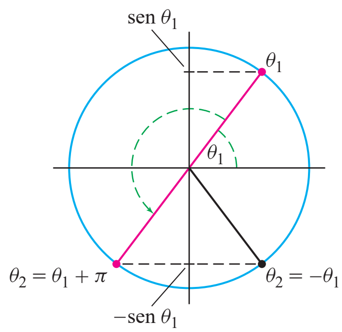


FIGURA 13 sen $\theta_2 = -$ sen θ_1 cuando $\theta_2 = -\theta_1$ o $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

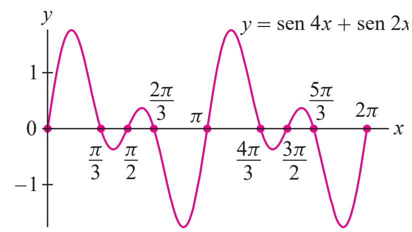


FIGURA 14 Soluciones de sen $4x$ + sen $2x = 0$.

ATENCIÓN *Para desplazar la gráfica de* $y = \cos 2x$ *a la izquierda en* $\pi/2$ *unidades, se debe sustituir* x *por* $x + \frac{\pi}{2}$, *con lo que se obtiene* $\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. *Sería incorrecto considerar* $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

EJEMPLO 5 Dibujar la gráf ca de $f(x) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ en $[0, 2\pi]$.

Solución La gráf ca se obtiene reescalando y desplazando la gráf ca de $y = \cos x$ en tres pasos (f gura 15):

- Comprimir horizontalmente a la mitad: $y = \cos 2x$
- Desplazar a la izquierda $\pi/2$ unidades: $y = \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$
- Ampliar al triple: $y = 3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

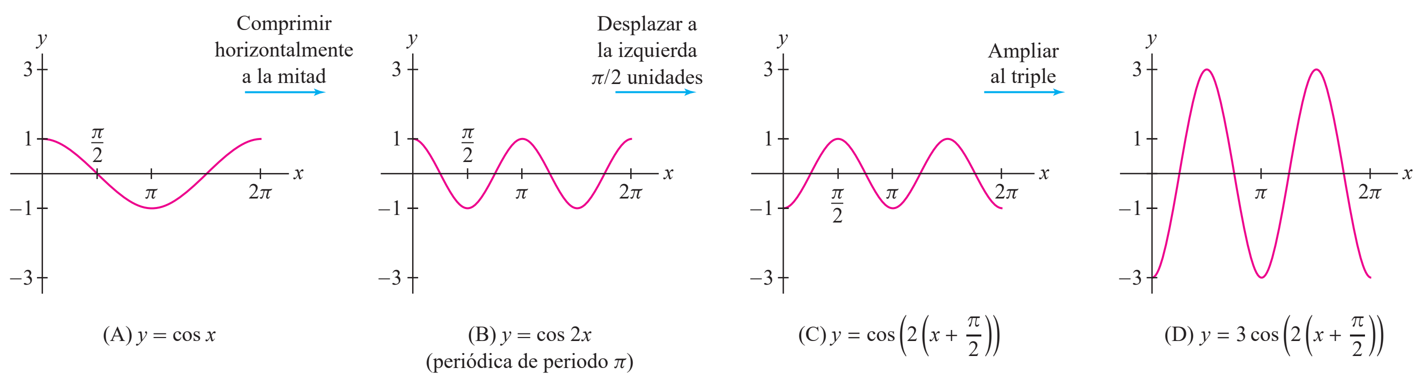


FIGURA 15

Identidades trigonométricas

La expresión $(\text{sen}\, x)^k$ *se suele escribir como* $\text{sen}^k x$. *Por ejemplo,* $\text{sen}^2 x$ *es el cuadrado de* sen x. *Se usa el mismo convenio de notación para las otras funciones trigonométricas.*

Una peculiaridad de las funciones trigonométricas es que satisfacen un gran número de fórmulas. En primer lugar destacado está la identidad fundamental del seno y el coseno, que es equivalente al teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1} \qquad (1)$$

Se obtienen versiones equivalentes dividiendo la ec. (1) por $\cos^2 x$ o por $\text{sen}^2 x$:

$$\boxed{\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x} \qquad (2)$$

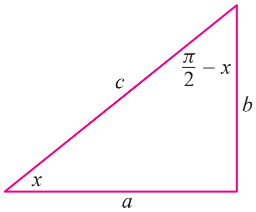


FIGURA 16 Para ángulos complementarios, el seno de uno es igual al coseno del otro.

A continuación se encuentra una lista de otras identidades comunes. La justif cación de las identidades para ángulos complementarios se encuentra en la f gura 16.

Identidades trigonométricas básicas

Ángulos complementarios: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

Fórmulas de adición: $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Fórmulas del ángulo doble: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Fórmulas de desplazamiento: $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

■ **EJEMPLO 6** Supongamos que $\cos\theta = \frac{2}{5}$. Calcular $\tan\theta$ si:

(a) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y **(b)** $\pi < \theta < 2\pi$.

Solución En primer lugar, aplicando la identidad $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

(a) Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen}\theta$ es positivo y escogeremos la determinación positiva de la raíz:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{21}/5}{2/5} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

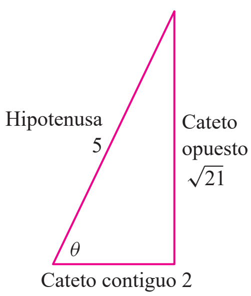


FIGURA 17

Para ilustrar gráf camente este cálculo, dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo θ tal que $\cos\theta = \frac{2}{5}$, como se muestra en la f gura 17. Por el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto tiene longitud $\sqrt{21} = \sqrt{5^2 - 2^2}$.

(b) Si $\pi < \theta < 2\pi$, entonces $\operatorname{sen}\theta$ es negativo y $\tan\theta = -\frac{\sqrt{21}}{2}$. ■

Concluiremos esta sección recordando el **teorema del coseno** (f gura 18), que generaliza el teorema de Pitágoras (ver el problema 58).

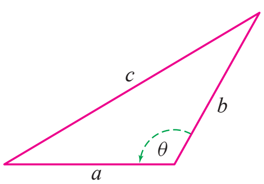


FIGURA 18

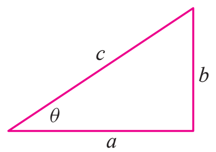
TEOREMA 1 Teorema del coseno Sean a, b y c los lados de un triángulo y sea θ el ángulo opuesto al lado c. Entonces se tiene:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

Si $\theta = 90°$, entonces $\cos\theta = 0$ y el teorema del coseno se reduce al teorema de Pitágoras.

1.4 RESUMEN

- Un ángulo de θ radianes abarca un arco de longitud θr en una circunferencia de radio r.
- Para pasar de radianes a grados, debe multiplicarse por $180/\pi$.
- Para pasar de grados a radianes, debe multiplicarse por $\pi/180$.



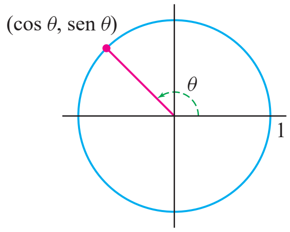


FIGURA 19

- A menos que se indique lo contrario, en este libro todos los ángulos se expresarán en radianes.
- Las funciones $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ se def nen mediante triángulos rectángulos en el caso de ángulos agudos, y como coordenadas de un punto de la circunferencia unidad en el caso general (f gura 19):

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}}$$

- Propiedades básicas del seno y el coseno:
  - Periodicidad: $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$
  - Paridad: $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$
  - Identidad fundamental: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- Las otras cuatro funciones trigonométricas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

1.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cómo es posible que dos rotaciones distintas def nan el mismo ángulo?

2. Dé dos rotaciones positivas distintas que def nan el ángulo $\pi/4$.

3. Dé una rotación negativa que def na el ángulo $\pi/3$.

4. La def nición de $\cos\theta$ mediante triángulos rectángulos se aplica cuando (elija la respuesta correcta):

(a) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **(b)** $0 < \theta < \pi$ **(c)** $0 < \theta < 2\pi$

5. ¿Cómo se def ne $\operatorname{sen}\theta$ a partir de la circunferencia unidad?

6. ¿Cómo se deduce la periodicidad de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ de la def nición dada a partir de la circunferencia unidad?

Problemas

1. Halle un ángulo comprendido entre 0 y 2π que sea equivalente a $13\pi/4$.

2. Describa el ángulo $\theta = \pi/6$ como un ángulo de medida negativa en radianes.

3. Pase de radianes a grados:

(a) 1 **(b)** $\frac{\pi}{3}$ **(c)** $\frac{5}{12}$ **(d)** $-\frac{3\pi}{4}$

4. Pase de grados a radianes:

(a) 1° **(b)** 30° **(c)** 25° **(d)** 120°

5. Halle las longitudes de los arcos abarcados por los ángulos de θ y ϕ radianes en la f gura 20.

6. Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas básicas para el ángulo θ de la f gura 21.

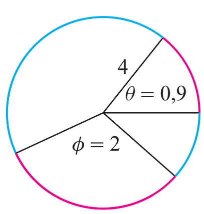


FIGURA 20 Circunferencia de radio 4.

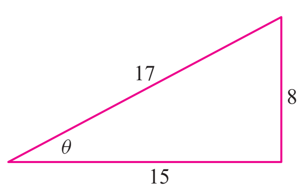


FIGURA 21

7. Complete los valores de $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ para los puntos de la f gura 22.

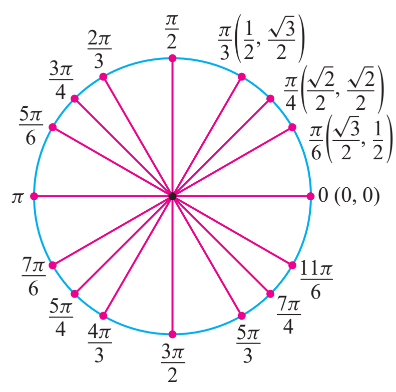


FIGURA 22

8. Halle los valores de las seis funciones trigonométricas básicas en $\theta = 11\pi/6$.

En los problemas 9-14, use la f gura 22 para hallar todos los ángulos comprendidos entre 0 y 2π que cumplan la condición dada.

9. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ **10.** $\tan\theta = 1$

11. $\tan\theta = -1$

12. $\csc\theta = 2$

13. $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

14. $\sec t = 2$

15. Complete la siguiente tabla de valores:

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan\theta$							
$\sec\theta$							

16. Complete la siguiente tabla de signos:

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	+	+				
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$						
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$						
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$						

17. Demuestre que si $\tan\theta = c$ y $0 \le \theta < \pi/2$, entonces $\cos\theta = 1/\sqrt{1+c^2}$. *Indicación:* Dibuje un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan longitudes c y 1.

18. Supongamos que $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

(a) Demuestre que si $0 \le \theta < \pi/2$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{2}/3$ y $\tan\theta = 2\sqrt{2}$.

(b) Halle $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$ si $3\pi/2 \le \theta < 2\pi$.

En los problemas 19-24, suponga que $0 \le \theta < \pi/2$.

19. Halle $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$ si $\cos\theta = \frac{5}{13}$.

20. Halle $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$.

21. Halle $\operatorname{sen}\theta$, $\sec\theta$ y $\cot\theta$ si $\tan\theta = \frac{2}{7}$.

22. Halle $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\sec\theta$ si $\cot\theta = 4$.

23. Halle $\cos 2\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{5}$.

24. Halle $\operatorname{sen} 2\theta$ y $\cos 2\theta$ si $\tan\theta = \sqrt{2}$.

25. Halle $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = 0{,}4$ y $\pi/2 \le \theta < \pi$.

26. Halle $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ si $\tan\theta = 4$ y $\pi \le \theta < 3\pi/2$.

27. Halle $\cos\theta$ si $\cot\theta = \frac{4}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

28. Halle $\tan\theta$ si $\sec\theta = \sqrt{5}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

29. Halle los valores de $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para los ángulos correspondientes a los ocho puntos de la f gura 23(A) y (B).

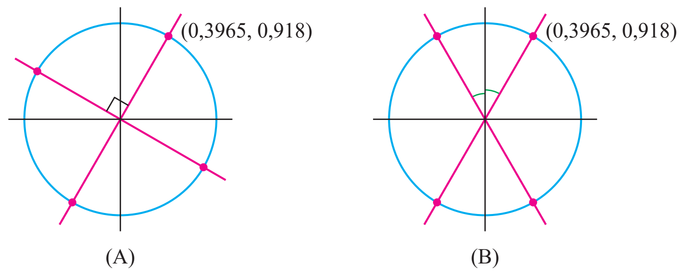


FIGURA 23

30. Observando la f gura 24(A), expresar las funciones $\operatorname{sen}\theta$, $\tan\theta$, y $\csc\theta$ en términos de c.

31. Observando la f gura 24(B), calcular $\cos\psi$, $\operatorname{sen}\psi$, $\cot\psi$ y $\csc\psi$.

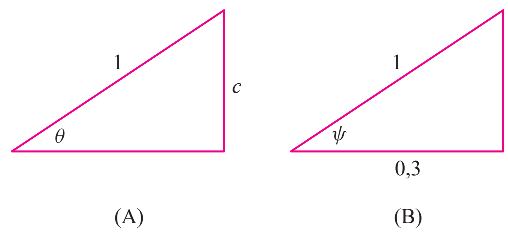


FIGURA 24

32. Exprese $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$. *Indicación:* Halle la relación existente entre las coordenadas (a, b) y (c, d) en la f gura 25.

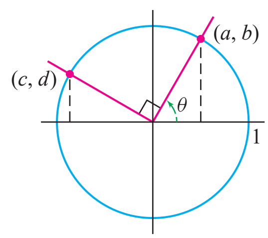


FIGURA 25

33. Aplique la fórmula de adición apropiada para calcular de manera exacta $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

34. Aplique la fórmula de adición apropiada para calcular de manera exacta $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

En los problemas 35-38, dibuje la gráf ca en $[0, 2\pi]$.

35. $2\operatorname{sen} 4\theta$

36. $\cos\left(2\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

37. $\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

38. $\operatorname{sen}\left(2\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) + \pi\right) + 2$

39. ¿En cuántos puntos se cortan la recta horizontal $y = c$ y la gráf ca de $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x < 2\pi$? *Indicación:* La respuesta depende de c.

40. ¿En cuántos puntos se cortan la recta horizontal $y = c$ y la gráf ca de $y = \tan x$ para $0 \le x < 2\pi$?

En los problemas 41-44, halle θ, siendo $0 \le \theta < 2\pi$ (ver el ejemplo 4).

41. $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 3\theta = 0$

42. $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} 2\theta$

43. $\cos 4\theta + \cos 2\theta = 0$

44. $\operatorname{sen} \theta = \cos 2\theta$

En los problemas 45-54, deduzca las fórmulas dadas a partir de las identidades estudiadas en esta sección.

45. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

46. $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$

47. $\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$

48. $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$

49. $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

50. $\tan x = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

51. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

52. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

53. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x}$

54. $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$

55. Use los problemas 48 y 49 para demostrar que $\tan\theta$ y $\cot\theta$ son periódicas de periodo π.

56. Mediante identidades trigonométricas apropiadas, calcule $\cos\frac{\pi}{15}$ teniendo en cuenta que $\frac{\pi}{15} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right)$.

57. Use el teorema del coseno para hallar la distancia de P a Q en la f gura 26.

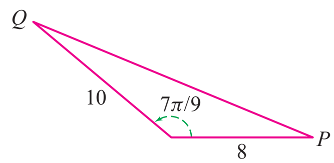


FIGURA 26

Problemas avanzados

58. Use la f gura 27 para deducir el teorema del coseno del teorema de Pitágoras.

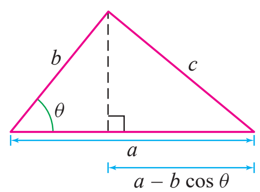


FIGURA 27

59. Use la fórmula de la adición para demostrar:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

60. Use las fórmulas de adición del seno y el coseno para demostrar:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cot(a - b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$

61. Sea θ el ángulo formado por la recta $y = mx + b$ y el eje x [f gura 28(A)]. Demuestre que $m = \tan\theta$.

62. Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes respectivas m_1 y m_2 [f gura 28(B)]. Demuestre que el ángulo θ formado por L_1 y L_2 cumple:

$$\cot\theta = \frac{m_2 m_1 + 1}{m_2 - m_1}$$

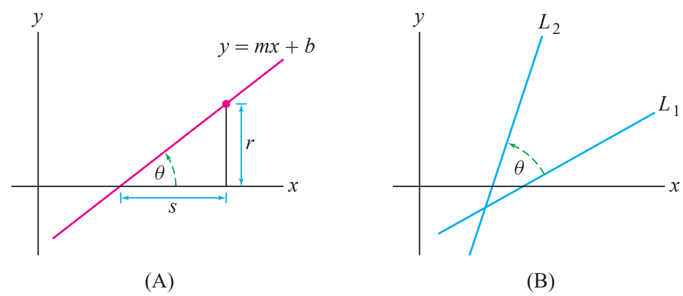


FIGURA 28

63. Rectas perpendiculares Use el problema 62 para demostrar que dos rectas con pendientes respectivas no nulas m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_2 = -1/m_1$.

64. Aplique la fórmula del ángulo doble para demostrar:

(a) $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(b) $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

Conjeture los valores de $\cos\dfrac{\pi}{32}$ y de $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ para todo n.

1.5 Tecnología: calculadoras y ordenadores

La tecnología informática ha aumentado enormemente nuestra capacidad de cálculo y de visualización de relaciones matemáticas. De cara a las aplicaciones, los ordenadores son indispensables para analizar datos y resolver complicados sistemas de ecuaciones, como se requiere, por ejemplo, en los pronósticos meteorológicos o en la generación de imágenes médicas. Los matemáticos usan ordenadores para estudiar estructuras complejas como el conjunto de Mandelbrot (f guras 1 y 2). Vamos a sacar partido a esta tecnología para explorar las ideas del cálculo inf nitesimal visual y numéricamente.

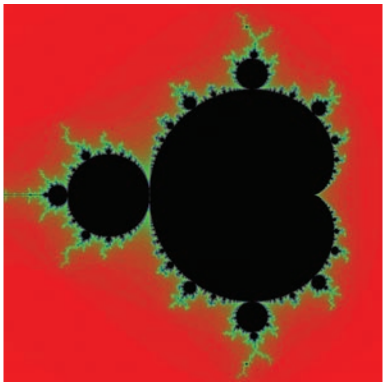


FIGURA 1 Imagen del conjunto de Mandelbrot generada por ordenador, de interés en la teoría matemática del caos y los fractales.

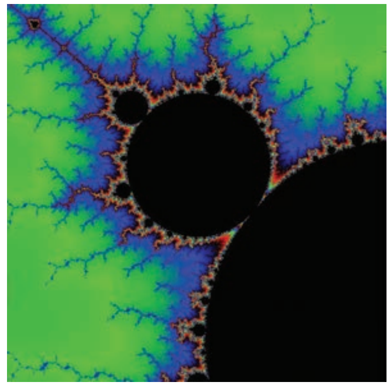
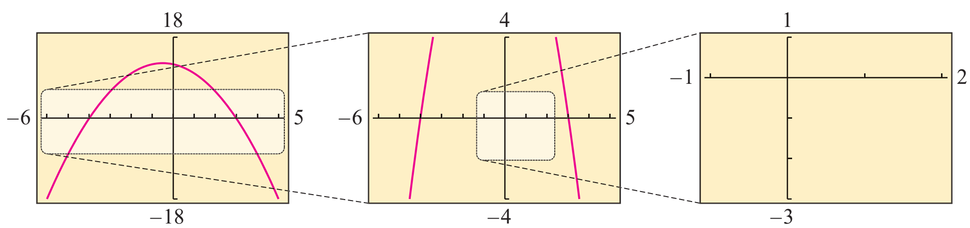


FIGURA 2 Se aprecia una complejidad aún mayor si se amplía una zona del conjunto de Mandelbrot.

Si se representa una función mediante una calculadora gráfica o un programa de cálculo simbólico, la imagen estará contenida en un **rectángulo de visualización**, que es el encuadre determinado por el rango de valores de x e y en el dibujo. Denotaremos como $[a, b] \times [c, d]$ el rectángulo definido por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$.

El aspecto de la gráfica depende en gran medida de la elección del rectángulo de visualización. Al variar esa elección se obtienen sensaciones muy distintas, que a veces resultan engañosas. Comparar los tres rectángulos de visualización que se usan en la figura 3 para la gráfica de $f(x) = 12 - x - x^2$. Solamente (A) refleja eficazmente la forma de parábola de esta gráfica. En (B), la gráfica queda cortada; y en (C) no se ve nada. Debe tenerse presente que las escalas de los ejes cambian según el rectángulo de visualización elegido. Por ejemplo, un incremento de una unidad en el eje y es mayor en (B) que en (A), por lo que la gráfica que aparece en (B) presenta una mayor inclinación.



(A) $[-6, 5] \times [-18, 18]$ (B) $[-6, 5] \times [-4, 4]$ (C) $[-1, 2] \times [-3, 1]$

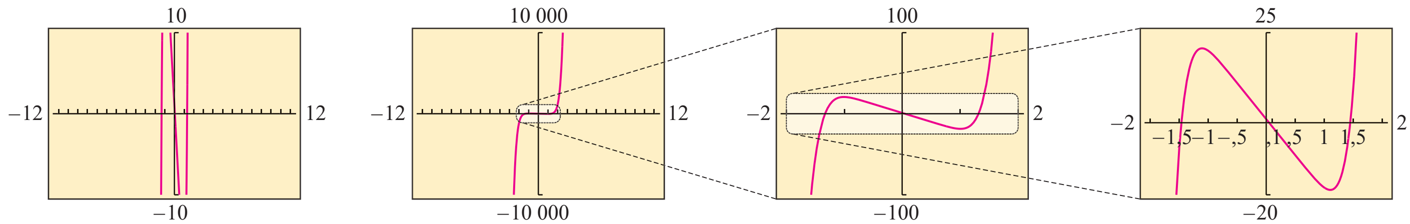
FIGURA 3 Diferentes rectángulos de visualización para la gráfica de $f(x) = 12 - x - x^2$.

No existe ningún rectángulo de visualización "ideal". Hay que seleccionar en cada caso el rectángulo que muestre mejor las propiedades que pretendemos investigar. Esta tarea normalmente requiere varios ensayos.

La tecnología informática es indispensable pero también tiene sus limitaciones. Cuando al premio Nobel de física Eugene Wigner (1902-1995) se le mostraron los resultados, generados por ordenador, de unos complicados cálculos se cuenta que afirmó:
"Está bien saber que el ordenador entiende el problema, pero me gustaría entenderlo a mi también".

■ **EJEMPLO 1** **¿Cuántas raíces hay y dónde están?** ¿Cuántas raíces reales tiene la función $f(x) = x^9 - 20x + 1$? Halle su situación aproximada.

Solución Vamos a ir probando distintos rectángulos de visualización (figura 4). Nuestro primer intento muestra en (A) una gráfica cortada, por lo cual ensayaremos otro rectángulo que incluya un rango mayor de valores de y. La imagen (B) muestra que las raíces de $f(x)$ se hallan en algún lugar del intervalo $[-3, 3]$, aunque no detalla con certeza cuántas raíces reales hay. Por este motivo, usaremos el rectángulo de (C), con el cual se percibe nítidamente que $f(x)$ tiene tres raíces. Ampliando aún más la imagen, podemos situar en (D) esas raíces cerca de $-1{,}5$, $0{,}1$, y $1{,}5$. Mediante ampliaciones sucesivas podríamos lograr una mayor precisión. ■



(A) [−12, 12] × [−10, 10] (B) [−12, 12] × [−10 000, 10 000] (C) [−2, 2] × [−100, 100] (D) [−2, 2] × [−20, 25]

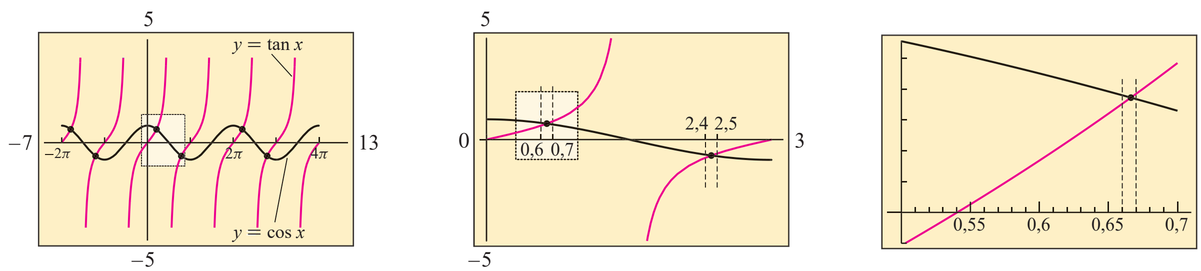
FIGURA 4 Gráf cas de $f(x) = x^9 - 20x + 1$.

■ **EJEMPLO 2 ¿Existe alguna solución?** ¿Tiene $\cos x = \tan x$ alguna solución? En caso af rmativo, describa el conjunto de puntos solución.

Solución Las soluciones de $\cos x = \tan x$ son las coordenadas x de los puntos en los que las gráf cas de $y = \cos x$ e $y = \tan x$ se cortan. En la f gura 5(A) se muestra que hay dos soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Ampliando la gráf ca como en (B), se observa que la primera raíz positiva queda entre 0,6 y 0,7 mientras que la segunda raíz positiva se halla entre 2,4 y 2,5. Ampliando más la imagen se visualiza que la primera raíz es aproximadamente 0,67 [f gura 5(C)]. Repitiendo este proceso se llega a la conclusión de que las primeras dos raíces son $x \approx 0{,}666$ y $x \approx 2{,}475$.

Como $\cos x$ y $\tan x$ son periódicas, el mismo esquema se va repitiendo con período 2π. Así pues, se obtienen todas las soluciones sumando múltiplos de 2π a las dos soluciones halladas en $[0, 2\pi]$:

$$x \approx 0{,}666 + 2\pi k \qquad \text{y} \qquad x \approx 2{,}475 + 2\pi k \quad \text{(para cualquier entero } k\text{)}$$ ■

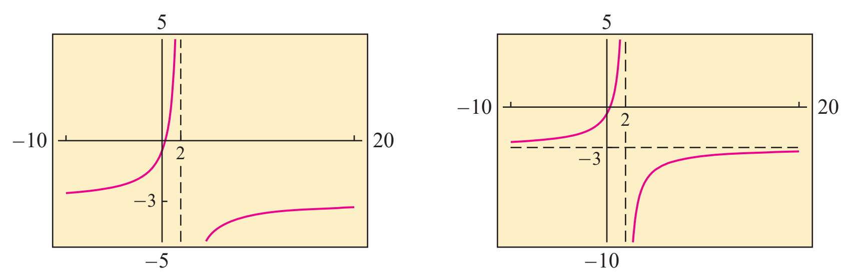


(A) [−7, 13] × [−5, 5] (B) [0, 3] × [−5, 5] (C) [0,5, 0,7] × [0,55, 0,85]

FIGURA 5 Gráf cas de $y = \cos x$ e $y = \tan x$.

■ **EJEMPLO 3 Funciones con asíntotas** Representar gráf camente la función $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{x - 2}$ y describa su comportamiento asintótico.

Solución En primer lugar, representaremos $f(x)$ en el rectángulo de visualización $[-10, 20] \times [-5, 5]$, como se muestra en la f gura 6(A). La recta vertical $x = 2$ se denomina **asíntota vertical**. Muchas calculadoras gráf cas muestran esa recta, aunque *no forme parte* de la gráf ca (y suele desaparecer si se elige un rango menor de valores de y). Se observa:



(A) [−10, 20] × [−5, 5] (B) [−10, 20] × [−10, 5]

FIGURA 6 Gráf cas de $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{x - 2}$.

que $f(x)$ tiende a ∞ cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, y tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 2 por la derecha. Para analizar el comportamiento asintótico horizontal de $f(x)$, usaremos el rectángulo de visualización $[-10, 20] \times [-10, 5]$ [figura 6(B)]. Se observa entonces que la gráfica se aproxima a la recta horizontal $y = -3$, denominada **asíntota horizontal** (que se ha añadido a la figura como una línea horizontal discontinua). ■

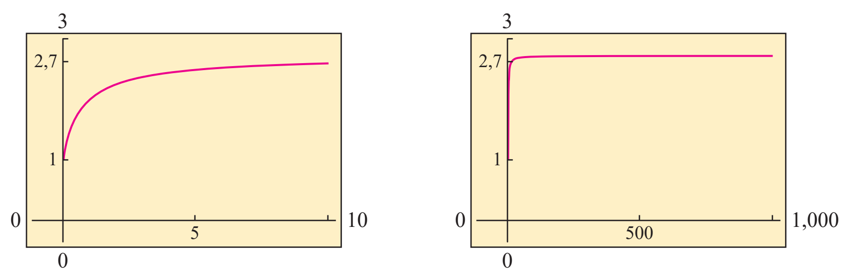
Las calculadoras y los ordenadores nos dan libertad para experimentar numéricamente. Por ejemplo, podemos explorar el comportamiento de una función construyendo una tabla de valores. En el siguiente ejemplo se estudia una función relacionada con las funciones exponenciales y el interés compuesto (ver la sección 7.5).

■ **EJEMPLO 4 Estudio del comportamiento de una función** ¿Cómo se comporta $f(n) = (1 + 1/n)^n$ para valores enteros grandes de n? ¿Tiende $f(n)$ a infinito cuando n crece?

Solución En primer lugar confeccionamos una tabla de valores de $f(n)$ para valores cada vez mayores de n. La tabla 1 sugiere que $f(n)$ no tiende a infinito. De hecho, $f(n)$ parece irse acercando a un valor próximo a 2,718 al aumentar n. Este es un ejemplo de convergencia a un límite, que se estudia en el capítulo 2. A continuación sustituimos n por la variable x y representamos la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$. Las gráficas de la figura 7 confirman que $f(x)$ tiende a un límite cuyo valor aproximado es 2,7. En la sección 7.1 se demostrará que $f(n)$ se aproxima al número e cuando n tiende a infinito. ■

TABLA 1

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10	2,59374
10^2	2,70481
10^3	2,71692
10^4	2,71815
10^5	2,71827
10^6	2,71828

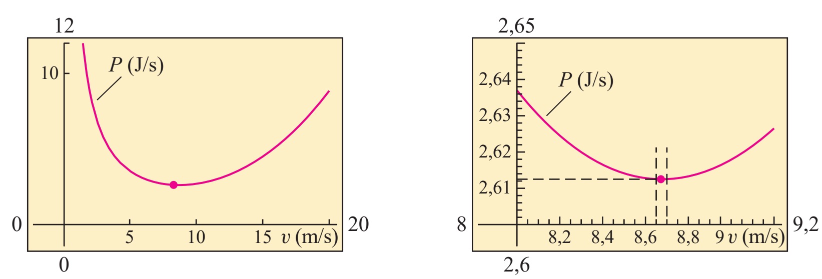


(A) $[0, 10] \times [0, 3]$ (B) $[0, 1000] \times [0, 3]$

FIGURA 7 Gráficas de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

■ **EJEMPLO 5 El vuelo de los pájaros: determinación de un mínimo gráficamente** Según se desprende de un modelo del vuelo de los pájaros, la potencia consumida por una paloma cuando vuela a una velocidad v (en metros por segundo) viene dada por $P(v) = 17v^{-1} + 10^{-3}v^3$ (en julios por segundo). Usando una gráfica de $P(v)$, halle la velocidad a la cual la potencia consumida es mínima.

Solución La velocidad que minimiza el consumo de potencia corresponde al punto más bajo de la gráfica de $P(v)$. Para empezar, dibujaremos $P(v)$ en un rectángulo de visualización grande (figura 8). Esta figura muestra la forma general de la gráfica y en ella se observa que $P(v)$ alcanza un valor mínimo, cuando v está situado en un cierto lugar entre $v = 8$ y $v = 9$. Usando el rectángulo de visualización $[8, 9{,}2] \times [2{,}6, 2{,}65]$, vemos que este mínimo se localiza aproximadamente en $v = 8{,}65$ m/s. ■



(A) $[0, 20] \times [0, 12]$ (B) $[8, 9{,}2] \times [2{,}6, 2{,}65]$

FIGURA 8 Consumo de potencia $P(v)$ como función de la velocidad v.

El concepto de **linealidad local** es importante en el cálculo infinitesimal. Consiste en la idea de que muchas funciones son *casi lineales* en intervalos pequeños. La linealidad local puede ilustrarse de manera efectiva mediante una calculadora gráfica.

EJEMPLO 6 Revelando la linealidad local Verifique la linealidad local de la función $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ en $x = 1$.

Solución Dibujaremos en primer lugar $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ en la ventana de visualización de la figura 9(A). La gráfica va subiendo y bajando, y presenta un aspecto muy ondulatorio. No obstante, a medida que vamos ampliando la imagen, la gráfica va volviéndose recta. Las figuras (B)-(D) muestran el resultado de una ampliación centrada en el punto $(1, f(1))$. Cuando se puede observar muy de cerca, la gráfica parece una recta. De esta manera queda ilustrada la linealidad local de $f(x)$ en $x = 1$.

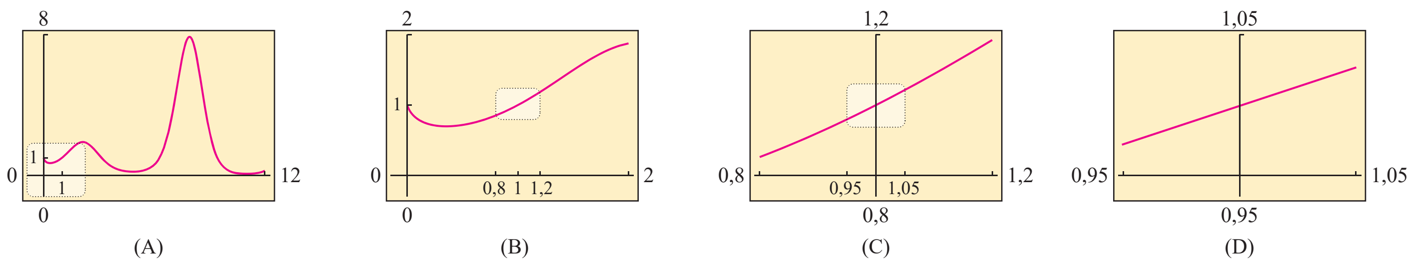


FIGURA 9 Ampliación de la gráfica de $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ alrededor de $x = 1$.

1.5 RESUMEN

- El aspecto de una imagen en una calculadora gráfica depende de la elección del rectángulo de visualización. Debe experimentarse con varios rectángulos distintos hasta que se encuentre uno que muestre la información deseada. Téngase presente que las escalas de los ejes pueden modificarse cuando se cambia el rectángulo de visualización.
- Las calculadoras gráficas y los programas de cálculo simbólico pueden usarse en el cálculo infinitesimal de las siguientes maneras:
  - Visualizar el comportamiento de una función.
  - Hallar soluciones en modo gráfico o numérico.
  - Realizar experimentos numéricos o gráficos.
  - Ilustrar ideas teóricas (como la linealidad local).

1.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Hay alguna manera concreta de elegir un rectángulo de visualización óptimo, o es mejor ir probando hasta que se encuentre un rectángulo de visualización adecuado al problema que se esté considerando?

2. Describa la imagen que aparece en la pantalla de la calculadora cuando se representa la función $y = 3+x^2$ con cada uno de los rectángulos de visualización siguientes:

(a) $[-1, 1] \times [0, 2]$ **(b)** $[0, 1] \times [0, 4]$

3. Según se ha puesto de manifiesto en el ejemplo 4, parece ser que $f(n) = (1 + 1/n)^n$ nunca es superior a 3 para $n > 0$. ¿*Prueban* estos datos que $f(n) \le 3$ para $n > 0$?

4. ¿Cómo puede usarse una calculadora gráfica para hallar el valor mínimo de una función?

Problemas

Los ejercicios de esta sección deben resolverse usando una calculadora gráfica o un programa informático de cálculo simbólico.

1. Represente $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 9x + 18$ empleando rectángulos de visualización apropiados y determinar sus raíces.

2. ¿Cuántas soluciones tiene $x^3 - 4x + 8 = 0$?

3. ¿Cuántas soluciones *positivas* tiene $x^3 - 12x + 8 = 0$?

4. ¿Tiene solución $\cos x + x = 0$? ¿Tiene alguna solución positiva?

5. Halle todas las soluciones de $\operatorname{sen} x = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

6. ¿Cuántas soluciones tiene $\cos x = x^2$?

7. Sea $f(x) = (x - 100)^2 + 1000$. ¿Qué mostrará la pantalla, si se representa $f(x)$ en el rectángulo de visualización $[-10, 10] \times [-10, 10]$? Halle un rectángulo de visualización apropiado.

8. Represente $f(x) = \dfrac{8x+1}{8x-4}$ en un rectángulo de visualización apropiado. Determine las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.

9. Dibuje la gráfica de $f(x) = x/(4 - x)$ usando un rectángulo de visualización que muestre claramente las asíntotas verticales y horizontales.

10. Compruebe la linealidad local de $f(x) = x^2$ ampliando su gráfica alrededor de $x = 0{,}5$ (ver el ejemplo 6).

11. Represente $f(x) = \cos(x^2)\operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le 2\pi$. A continuación, compruebe la linealidad local en $x = 3{,}8$ eligiendo rectángulos de visualización adecuados.

12. Un banco paga un interés compuesto del 5 % mensual. Si depositamos P_0 euros en un cierto momento $t = 0$, entonces el valor de la cuenta después de N meses será $P_0\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^N$. Halle, redondeado al entero más próximo N, el número de meses necesarios para que el valor de la cuenta se duplique.

En los problemas 13-18, examine el comportamiento de la función a medida que n y x van creciendo, confeccionando una tabla de valores de la función y dibujando una gráfica (ver el ejemplo 4). Describa con palabras este comportamiento.

13. $f(n) = n^{1/n}$

14. $f(n) = \dfrac{4n+1}{6n-5}$

15. $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

16. $f(x) = \left(\dfrac{x+6}{x-4}\right)^x$

17. $f(x) = \left(x \tan \dfrac{1}{x}\right)^x$

18. $f(x) = \left(x \tan \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

19. La gráfica de $f(\theta) = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta$ es una onda sinusoidal para constantes A y B cualesquiera. Corrobore esta afirmación para $(A, B) = (1, 1), (1, 2)$ y $(3, 4)$ representando gráficamente $f(\theta)$.

20. Halle el valor máximo de $f(\theta)$ para las gráficas obtenidas en el problema 19. Conjeture una fórmula para este valor máximo en términos de A y de B.

21. Halle los intervalos en los que $f(x) = x(x + 2)(x - 3)$ es positiva mediante una representación gráfica adecuada.

22. Halle, mediante una representación gráfica adecuada, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $(x^2 - 4)(x^2 - 1) < 0$

Problemas avanzados

23. SAC Sea $f_1(x) = x$ e introducimos recursivamente la sucesión de funciones $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + x/f_n(x))$. Por ejemplo, $f_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$. Use un programa de cálculo simbólico para determinar $f_n(x)$ para $n = 3$, 4, 5 y represente de forma conjunta $f_n(x)$ y $\sqrt{x}$ para $x \ge 0$. ¿Qué se observa?

24. Sean $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$. Los **polinomios de Chebyshev** (usados en la teoría de la aproximación) se definen recursivamente por la fórmula $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$.

(a) Demuestre que $P_2(x) = 2x^2 - 1$.

(b) Calcule $P_n(x)$ para $3 \le n \le 6$ mediante un programa de cálculo simbólico o a mano, y represente $P_n(x)$ en $[-1, 1]$.

(c) Compruebe que las representaciones gráficas confirman dos propiedades interesantes de los polinomios de Chebyshev: (a) $P_n(x)$ tiene n raíces reales en $[-1, 1]$ y (b) para $x \in [-1, 1]$, $P_n(x)$ se encuentra entre -1 y 1.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Exprese $(4, 10)$ como un conjunto de la forma $\{x : |x - a| < c\}$ para a y c apropiados.

2. Exprese como un intervalo:

(a) $\{x : |x - 5| < 4\}$ **(b)** $\{x : |5x + 3| \le 2\}$

3. Exprese $\{x : 2 \le |x - 1| \le 6\}$ como una unión de dos intervalos.

4. Dé un ejemplo de dos números x, y tales que $|x| + |y| = x - y$.

5. Describa los pares de números x, y tales que $|x + y| = x - y$.

6. Dibuje la gráfica de $y = f(x + 2) - 1$, donde $f(x) = x^2$ para $-2 \le x \le 2$.

En los problemas 7-10, sea $f(x)$ la función cuya gráfica se muestra en la figura 1.

7. Dibuje las curvas $y = f(x) + 2$ e $y = f(x + 2)$.

8. Dibuje las curvas $y = \frac{1}{2}f(x)$ e $y = f(\frac{1}{2}x)$.

9. Prolongue la gráfica de $f(x)$ al intervalo $[-4, 4]$ como una función par.

10. Prolongue la gráfica de $f(x)$ al intervalo $[-4, 4]$ como una función impar.

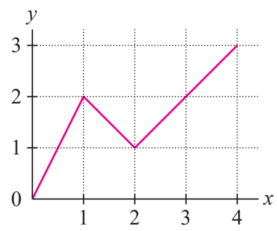


FIGURA 1

En los problemas 11-14, halle el dominio y el recorrido de la función dada.

11. $f(x) = \sqrt{x+1}$ **12.** $f(x) = \dfrac{4}{x^4+1}$

13. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ **14.** $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 5}$

15. Determine si la función dada es creciente, decreciente, o ninguna de las dos cosas:

(a) $f(x) = 3^{-x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(c) $g(t) = t^2 + t$ **(d)** $g(t) = t^3 + t$

16. Determine si la función dada es par, impar, o ninguna de las dos cosas:

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2$

(b) $g(x) = \operatorname{sen}(x+1)$

(c) $f(x) = 2^{-x^2}$

En los problemas 17-22, halle la ecuación de la recta.

17. Recta que pasa por $(-1, 4)$ y $(2, 6)$.

18. Recta que pasa por $(-1, 4)$ y $(-1, 6)$.

19. Recta de pendiente 6 que pasa por $(9, 1)$.

20. Recta de pendiente $-\frac{3}{2}$ que pasa por $(4, -12)$.

21. Recta que pasa por $(2, 3)$ y es paralela a $y = 4 - x$.

22. Recta horizontal que pasa por $(-3, 5)$.

23. ¿Sugiere la siguiente tabla de datos del mercado inmobiliario una relación lineal entre el precio y el número de viviendas vendidas durante un período de un año? Justif que la respuesta.

Precio (miles de euros)	180	195	220	240
N° de viviendas vendidas	127	118	103	91

24. ¿Sugiere la siguiente tabla de datos de ganancias anuales de un fabricante de ordenadores una relación lineal entre las ganancias y el tiempo? Justif que la respuesta.

Año	2001	2005	2007	2010
Ganancias (billones de euros)	13	18	15	11

25. Halle las raíces de $f(x) = x^4 - 4x^2$ y dibujar su gráf ca. ¿En qué intervalos es $f(x)$ estrictamente decreciente?

26. Sea $h(z) = 2z^2 + 12z + 3$. Halle el valor mínimo de $h(z)$ mediante la técnica de completar cuadrados.

27. Sea $f(x)$ el cuadrado de la distancia del punto $(2, 1)$ al punto $(x, 3x+2)$ de la recta $y = 3x+2$. Demuestre que $f(x)$ es una función cuadrática y halle su valor mínimo mediante la técnica de completar cuadrados.

28. Demuestre que $x^2 + 3x + 3 \geq 0$ para todo x.

En los problemas 29-34, dibuje la gráf ca a mano.

29. $y = t^4$ **30.** $y = t^5$

31. $y = \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}$ **32.** $y = 10^{-x}$

33. $y = x^{1/3}$ **34.** $y = \dfrac{1}{x^2}$

35. Pruebe que la gráf ca de $y = f(\frac{1}{3}x - b)$ se obtiene desplazando la gráf ca de $y = f(\frac{1}{3}x)$ hacia la derecha en $3b$ unidades. Use esta observación para dibujar la gráf ca de $y = \left|\frac{1}{3}x - 4\right|$.

36. Sean $h(x) = \cos x$ y $g(x) = x^{-1}$. Calcule las funciones compuestas $h(g(x))$ y $g(h(x))$ y halle sus dominios.

37. Encuentre dos funciones f y g tales que la función $f \circ g$ sea:

$$f(g(t)) = (12t + 9)^4$$

38. Marque sobre la circunferencia unidad los puntos correspondientes a los tres ángulos siguientes y halle los valores de las seis funciones trigonométricas básicas para cada uno de estos ángulos:

(a) $\dfrac{2\pi}{3}$ **(b)** $\dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $\dfrac{7\pi}{6}$

39. ¿Cuál es el período de la función $g(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$?

40. Supongamos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, donde $\pi/2 < \theta < \pi$. Halle:

(a) $\tan\theta$ **(b)** $\operatorname{sen} 2\theta$ **(c)** $\csc \dfrac{\theta}{2}$

41. Dé un ejemplo de dos valores a, b tales que:

(a) $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$ **(b)** $\cos \dfrac{a}{2} \neq \dfrac{\cos a}{2}$

42. Sea $f(x) = \cos x$. Dibuje la gráf ca de $y = 2f\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ para $0 \leq x \leq 6\pi$.

43. Resuelva $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

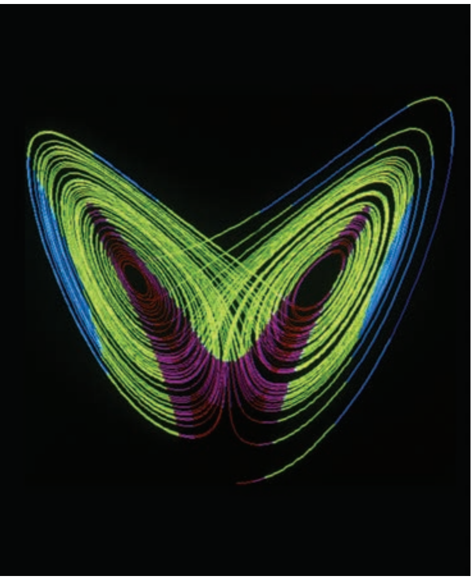
44. ¿Cómo se comporta $h(n) = n^2/2^n$ para valores enteros grandes de n? ¿Tiende $h(n)$ a inf nito?

45. GU Use una calculadora gráf ca para determinar si la ecuación $\cos x = 5x^2 - 8x^4$ admite soluciones.

46. GU Usando una calculadora gráf ca, determine cuántas raíces reales tienen las funciones siguientes, y localice la raíz mayor de cada función con dos cifras decimales de precisión:

(a) $f(x) = 1{,}8x^4 - x^5 - x$

(b) $g(x) = 1{,}7x^4 - x^5 - x$



Este “atractor extraño” representa el comportamiento límite que apareció por primera vez en los modelos de predicción meteorológica estudiados por el meteorólogo E. Lorenz en 1963.

2 LÍMITES

El cálculo infinitesimal se suele dividir en dos ramas: diferencial e integral, en parte por motivos históricos. Esta disciplina se desarrolló en el siglo XVII para resolver dos problemas geométricos importantes: hallar rectas tangentes a curvas (cálculo diferencial) y calcular áreas bajo curvas (cálculo integral). Sin embargo, el cálculo infinitesimal es un campo muy amplio sin fronteras bien definidas. Incluye otros temas, como la teoría de series infinitas, y admite un abanico enorme de aplicaciones, particularmente en las ciencias y la ingeniería. Tales métodos y aplicaciones forman parte del cálculo infinitesimal porque dependen en última instancia del concepto de límite. A lo largo del libro iremos viendo cómo los límites nos permiten realizar cálculos y resolver problemas para los cuales los recursos del álgebra no son suficientes.

En este capítulo se introduce el concepto de límite, y se destacan las propiedades de los límites que se usarán luego en el capítulo 3 para desarrollar el cálculo diferencial. En la primera sección, que pretende servir de motivación, se explica cómo surgen los límites en el estudio de tasas de variación y rectas tangentes.

2.1 Límites, tasas de cambio y rectas tangentes

Las tasas de variación son importantes para el estudio de la relación existente entre dos cantidades variables. La velocidad es un ejemplo común (es la tasa de variación de la posición respecto al tiempo), pero se pueden citar muchos más:

- La tasa de infección de una epidemia (*nuevos casos mensuales de individuos infectados*).
- Tasa de inflación (*cambio en el índice de precios al consumo por año*).
- Tasa de cambio de la temperatura atmosférica con respecto a la altitud.

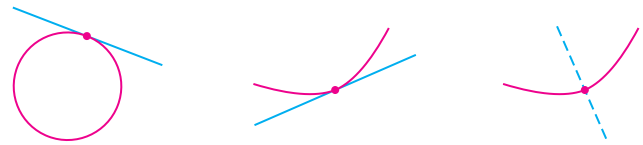
En términos generales, si y y x son magnitudes relacionadas, la tasa de variación describe cuánto cambia y como respuesta a un cambio de una unidad en x. Por ejemplo, si un coche viaja a una velocidad constante de 80 km/h, entonces su posición varía en 80 kilómetros por cada cambio de una unidad en el tiempo (si una unidad es 1 hora). Si el recorrido sólo dura media hora, entonces su posición varía en 40 kilómetros y, en general, la variación en la posición es de $80t$ km, donde t es la variación en el tiempo (es decir, el tiempo que se ha invertido, en horas). En otras palabras:

$$\boxed{\text{Cambio en la posición} = \text{velocidad} \times \text{cambio en el tiempo}}$$

Sin embargo, esta fórmula no es válida, o incluso no tiene sentido, si la velocidad no es constante. En realidad, si el automóvil estuviera acelerando o desacelerando, ¿qué velocidad se consideraría en la fórmula?

El problema de extender esta fórmula para tener en cuenta una velocidad variable se encuentra en la esencia del cálculo infinitesimal. Tal y como se verá, el cálculo infinitesimal utiliza el concepto de límite para definir la *velocidad instantánea*, y el cálculo integral proporciona las herramientas para calcular el cambio en la posición en términos de la velocidad instantánea. Pero estas ideas son muy generales. Se aplican a todo tipo de tasas de variación, haciendo del cálculo infinitesimal una herramienta indispensable para modelar una increíble variedad de fenómenos del mundo real.

En esta sección se estudian la velocidad y otras tasas de variación, haciendo énfasis en su interpretación gráfica en términos de *rectas tangentes*. Aunque en estos momentos todavía no podemos definir las rectas tangentes con precisión —habrá que esperar hasta el capítulo 3— se puede pensar en una recta tangente como en una recta que *roza* a una curva en un punto, como en las figuras 1(A) y (B) pero no (C).



(A) (B) (C)

FIGURA 1 La recta es tangente en (A) y (B) pero no en (C).

PERSPECTIVA HISTÓRICA

La filosofía está escrita en ese gran libro —el universo— que permanece abierto ante nuestros ojos, pero que no podremos entender hasta que no comprendamos el lenguaje... en el que está escrito: el lenguaje de las matemáticas...

GALILEO GALILEI, 1623

La revolución científica de los siglos XVI y XVII alcanzó su punto culminante en la obra de Isaac Newton (1643-1727), el primer científico que demostró que el mundo físico, a pesar de su complejidad y diversidad, está regido por un pequeño número de leyes universales. Una de las grandes intuiciones de Newton fue que las leyes del universo no describen el mundo tal como es, ni en el momento actual ni en ningún otro, sino como el mundo *cambia en el tiempo* en respuesta a diversas fuerzas. Estas leyes se expresan mejor en el lenguaje del cálculo infinitesimal, que son las matemáticas del cambio.

Más de cincuenta años antes de los trabajos de Newton, el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) descubrió sus tres leyes del movimiento planetario, una de las cuales postula que la trayectoria de cualquier planeta alrededor del Sol es una elipse. Kepler encontró esas leyes después de un análisis minucioso de muchísimos datos astronómicos, pero no pudo explicar por qué se cumplían. Las leyes de Newton explican el movimiento de cualquier objeto —desde un planeta hasta una canica— en términos de las fuerzas que actúan sobre él.

Según Newton, los planetas, si pudiesen moverse libremente, lo harían en trayectorias rectas. Puesto que sus trayectorias son en realidad elipses, debe existir alguna fuerza —en este caso, la atracción gravitatoria del Sol— que les haga cambiar de dirección continuamente. En su obra magna *Principia Mathematica*, publicada en 1687, Newton demostró que las leyes de Kepler se deducían de sus propias leyes de movimiento y de gravitación.

Por estos descubrimientos, Newton consiguió fama generalizada a lo largo de su vida. Su fama siguió creciendo después de su muerte, llegando a alcanzar una dimensión casi mítica, y sus ideas tuvieron una profunda influencia no sólo en la ciencia, sino también en las artes y la literatura, tal como lo expresa en su epitafio el poeta inglés Alexander Pope: "La Naturaleza y las leyes de la Naturaleza se escondían en la Noche. Dijo Dios, *Sea Newton!* y todo fue Luz".

Esta estatua de Isaac Newton en la Universidad de Cambridge se describe en *El Preludio*, un poema de William Wordsworth (1770-1850):

"Newton con su prisma y cara en silencio, El exponente en mármol de una mente Viajando para siempre a través de los mares extraños del Pensamiento, solo."

Velocidad

En el movimiento rectilíneo, la velocidad puede ser positiva o negativa (lo cual indica el sentido del movimiento). La rapidez es el valor absoluto de la velocidad y es siempre positiva.

Cuando se habla de velocidad, normalmente nos referimos a su velocidad *instantánea*, que nos indica la rapidez y la dirección del movimiento en cada instante concreto. No obstante, tal como ya se ha advertido, la velocidad instantánea no es fácil de definir.

Considérese un objeto que se desplaza siguiendo una línea recta (movimiento rectilíneo). La **velocidad media** sobre un intervalo de tiempo se define de manera inmediata:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{cambio de posición}}{\text{longitud del intervalo de tiempo}}$$

Por ejemplo, si un coche recorre 200 km en 4 horas, entonces su velocidad media durante ese período será $\frac{200}{4} = 50$ km/h. Pero en algún momento el coche irá, seguramente, más deprisa o más despacio que esta media.

A diferencia de la velocidad media, no se puede definir la velocidad instantánea como un cociente, puesto que no se puede dividir por la longitud del intervalo de tiempo (que es cero). No obstante, la velocidad instantánea puede aproximarse calculando velocidades medias en intervalos de tiempo cada vez más cortos. Esto se basa en el siguiente principio: *la velocidad media en un intervalo de tiempo muy corto se aproxima mucho a la velocidad instantánea*. Para explorar esta idea, se introduce la siguiente terminología.

La letra griega Δ (delta) se usa habitualmente para denotar la *variación* de una función o una variable. Si $s(t)$ es la posición de un objecto (su distancia al origen) en cada instante t y $[t_0, t_1]$ es un intervalo de tiempo, se define

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \text{variación de posición}$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 \quad = \text{variación temporal (longitud del intervalo)}$$

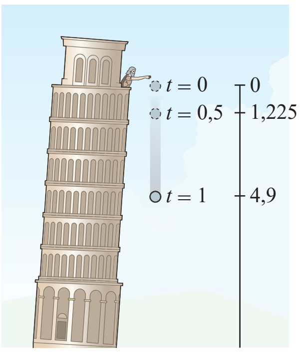


FIGURA 2 La distancia recorrida por un objeto que, partiendo del reposo, cae durante t segundos es $s(t) = 4{,}9t^2$ metros.

La variación de posición Δs también se llama **desplazamiento,** o **cambio neto** en la posición. Para $t_1 \neq t_0$,

$$\boxed{\text{Velocidad media en } [t_0, t_1] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}}$$

Un tipo de movimiento que se va a estudiar es el de un objeto que cae hacia el suelo bajo el efecto de la gravedad (suponiendo que no hay resistencia del aire). Galileo descubrió que, si el objeto se deja caer en el instante $t = 0$ desde un estado de reposo (figura 2), la distancia que recorrerá al cabo de t segundos viene dada por la fórmula siguiente:

$$s(t) = 4{,}9t^2 \text{ m}$$

EJEMPLO 1 Se deja caer al suelo una piedra que estaba en reposo. Estime la velocidad instantánea para $t = 0{,}8$ s.

TABLA 1

Intervalos de tiempo	Velocidad media
[0,8, 0,81]	7,889
[0,8, 0,805]	7,8645
[0,8, 0,8001]	7,8405
[0,8, 0,80005]	7,84024
[0,8, 0,800001]	7,840005

Solución Se utilizará la fórmula de Galileo, $s(t) = 4{,}9t^2$ para calcular la velocidad media sobre los cinco intervalos de tiempo detallados en la tabla 1. Considere el primer intervalo $[t_0, t_1] = [0{,}8, 0{,}81]$:

$$\Delta s = s(0{,}81) - s(0{,}8) = 4{,}9(0{,}81)^2 - 4{,}9(0{,}8)^2 \approx 3{,}2149 - 3{,}1360 = 0{,}7889 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0{,}81 - 0{,}8 = 0{,}01 \text{ s}$$

La velocidad media en $[0{,}8, 0{,}81]$ es el cociente

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(0{,}81) - s(0{,}8)}{0{,}81 - 0{,}8} = \frac{0{,}07889}{0{,}01} = 7{,}889 \text{ m/s}$$

Observe que no hay nada especial en los intervalos de tiempo concretos que se han considerado en la tabla 1. Se está examinando una tendencia y se podría haber elegido cualesquiera intervalos $[0{,}8, t]$ *para valores de* t *próximos a* $0{,}8$*. También se podrían haber considerado intervalos de la forma* $[t, 0{,}8]$ *para* $t < 0{,}8$.

La tabla 1 muestra los resultados de estos mismos cálculos en intervalos cada vez más cortos. Se hace patente que las velocidades medias se aproximan a 7,84 m/s a medida que el intervalo de tiempo se reduce:

7,889, 7,8645, **7,840**5, **7,840**24, **7,840**005

Así, parece ser que 7,84 m/s es un buen candidato para la velocidad instantánea en $t = 0{,}8$. ■

La conclusión del ejemplo previo, se expresa diciendo que la *velocidad media converge a la velocidad instantánea*, o que la *velocidad instantánea es el* **límite** *de la velocidad media* cuando la longitud del intervalo de tiempo se reduce a cero.

Interpretación gráfica de la velocidad

La idea de que la velocidad media converge a la velocidad instantánea cuando reducimos el intervalo de tiempo, admite una interpretación muy clara en términos de rectas secantes. Por def nición, una **recta secante** es una recta que corta a una curva en, al menos, dos puntos.

Considere la gráf ca de la posición $s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta (f gura 3). El cociente que se utiliza para def nir la velocidad media en $[t_0, t_1]$ es justamente la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(t_0, s(t_0))$ y $(t_1, s(t_1))$. Si $t_1 \neq t_0$,

$$\boxed{\text{Velocidad media} = \text{pendiente de la recta secante} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}}$$

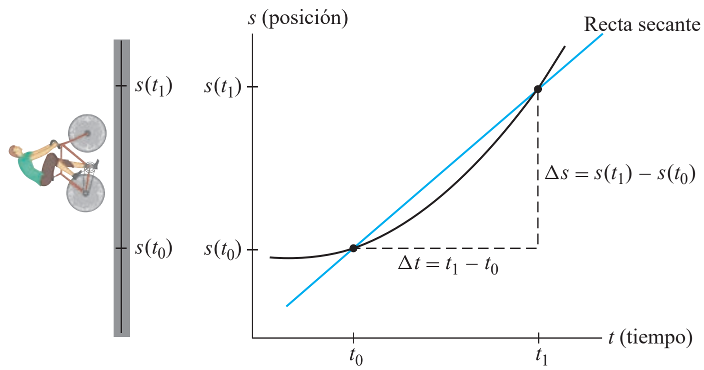


FIGURA 3 La velocidad media en $[t_0, t_1]$ es igual a la pendiente de la recta secante.

Esta interpretación de la velocidad media como una pendiente permite visualizar lo que ocurre a medida que el intervalo de tiempo se va reduciendo. La f gura 4 muestra la gráf ca de la posición para la piedra en caída del ejemplo 1, donde $s(t) = 4{,}9t^2$. A medida que el intervalo de tiempo disminuye, las rectas secantes se van aproximando, de hecho parece que van girando hacia ella, a la recta tangente en $t = 0{,}8$.

Intervalos de tiempo	Velocidad media
$[0{,}8, 0{,}805]$	7,8645
$[0{,}8, 0{,}8001]$	7,8405
$[0{,}8, 0{,}80005]$	7,84024

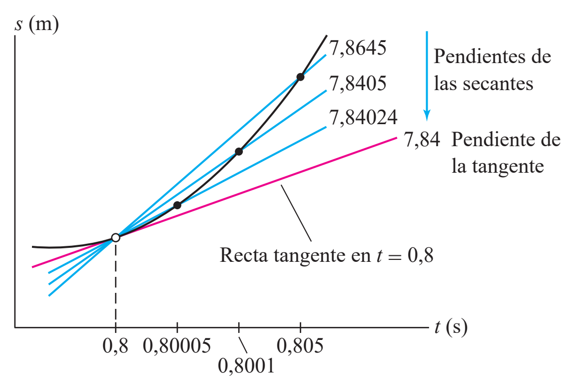


FIGURA 4 Las rectas secantes “giran hacia” la recta tangente a medida que el intervalo de tiempo disminuye. *Nota:* las f guras no se han dibujado a escala.

Puesto que las rectas secantes se acercan a la recta tangente, las pendientes de las secantes se van aproximando cada vez más a la pendiente de la recta tangente. En otras palabras, la af rmación:

> Cuando el intervalo de tiempo se reduce a cero, la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea.

admite la siguiente interpretación gráf ca:

> Cuando el intervalo de tiempo se reduce a cero, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

Se concluye que *la velocidad instantánea es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la posición como función del tiempo*. Esta conclusión y su generalización a otras tasas de variación son fundamentales para casi todos los aspectos del cálculo diferencial.

Otras tasas de variación

La velocidad es sólo uno de una gran variedad de ejemplos de tasas de variación (TV). El razonamiento que se ha seguido, se aplica a cualquier magnitud y que sea una función de una variable x; es decir, $y = f(x)$. Dado un intervalo $[x_0, x_1]$ cualquiera, sea:

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0), \qquad \Delta x = x_1 - x_0$$

Si $x_1 \neq x_0$, la **tasa de variación media** de y respecto a x en $[x_0, x_1]$ es el cociente

En ocasiones, se escribe Δy y $\Delta y/\Delta x$ en lugar de Δf y $\Delta f/\Delta x$.

$$\text{Tasa de variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Pendiente de la recta secante}}$$

La **tasa de variación instantánea** en $x = x_0$ es el límite de las tasas de variación media. Se estima calculando la tasa de variación media sobre intervalos cada vez menores.

En el ejemplo 1 anterior se consideraron solamente intervalos $[x_0, x_1]$ a la derecha de x_0. En el siguiente ejemplo, calcularemos la tasa de variación media correspondiente a intervalos situados tanto a la izquierda como a la derecha de x_0.

El término "instantánea" se suele omitir: cuando usamos la expresión "tasa de variación", se sobreentiende que nos referimos a la tasa instantánea.

■ **EJEMPLO 2** **Velocidad del sonido en el aire** La fórmula $v = 20\sqrt{T}$ proporciona una buena aproximación a la velocidad del sonido v en un ambiente seco (en m/s) como una función de la temperatura T del aire (en grados Kelvin). Estime la tasa instantánea de variación de v respecto a T cuando $T = 273$ K. ¿En qué unidades se expresa esta tasa?

Solución Para estimar esta tasa instantánea de cambio en $T = 273$, se calcula la tasa media de cambio para diferentes intervalos a la derecha y a la izquierda de $T = 273$. Por ejemplo, la tasa media de cambio en el intervalo $[272{,}5, 273]$ es:

$$\frac{v(273) - v(272{,}5)}{273 - 272{,}5} = \frac{20\sqrt{273} - 20\sqrt{272{,}5}}{0{,}5} \approx 0{,}60550$$

TABLA 2 Intervalos a la izquierda

Intervalo de temperatura	Tasa media de variación
$[272{,}5, 273]$	0,60550
$[272{,}8, 273]$	0,60534
$[272{,}9, 273]$	0,60528
$[272{,}99, 273]$	0,60523

TABLA 3 Intervalos a la derecha

Intervalo de temperatura	Tasa media de variación
$[273, 273{,}5]$	0,60495
$[273, 273{,}2]$	0,60512
$[273, 273{,}1]$	0,60517
$[273, 273{,}01]$	0,60522

Las tablas 2 y 3 sugieren que la tasa instantánea es aproximadamente igual a 0,605. Se trata de la tasa de incremento de la velocidad por grado de incremento en la temperatura, por lo que las unidades son de m/s-K, o de *metros por segundo por kelvin*. Las rectas secantes correspondientes a los valores de las tablas se muestran en las figuras 5 y 6. ■

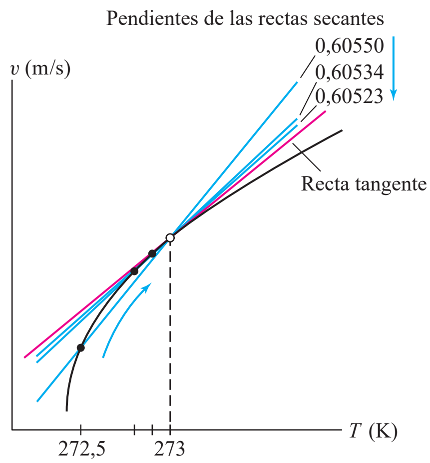


FIGURA 5 Rectas secantes para intervalos a la izquierda de $T = 273$.

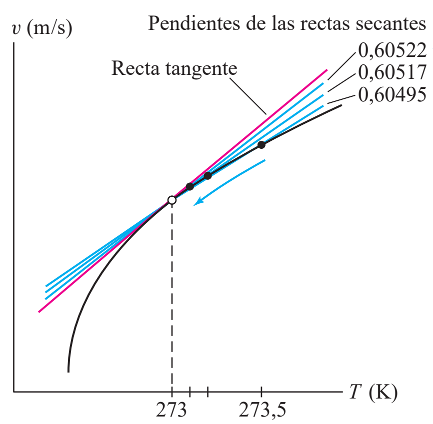


FIGURA 6 Rectas secantes para intervalos a la derecha de $T = 273$.

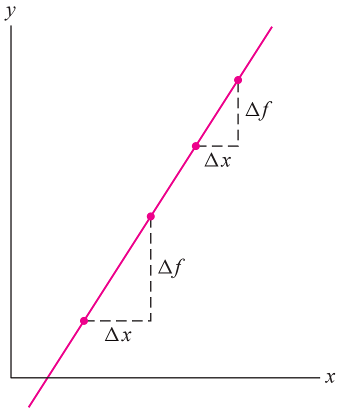


FIGURA 7 Para una función lineal $f(x) = mx + b$, el cociente $\Delta f/\Delta x$ es igual a la pendiente m para cualquier intervalo.

Para finalizar esta sección, recuerde un punto importante que se comentó en la sección 1.2: para toda función lineal $f(x) = mx + b$, *la tasa de variación media en un intervalo cualquiera es igual a la pendiente m* (figura 7), lo que se puede verificar de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + b) - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m$$

La tasa instantánea de variación en $x = x_0$, que es igual al límite de estas tasas de variación media, es también igual a m. Este resultado se visualiza gráficamente en la coincidencia de todas las rectas secantes y todas las rectas tangentes con la gráfica de $f(x)$.

2.1 RESUMEN

- La *tasa de variación media* de $y = f(x)$ sobre un intervalo $[x_0, x_1]$ es:

$$\text{Tasa de variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (x_1 \neq x_0)$$

- La *tasa de variación instantánea* es el límite de las tasas de variación media.
- Interpretación gráfica:
  – La tasa de variación media de f en $[x_0, x_1]$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ de la gráfica de $f(x)$.
  – La tasa de variación instantánea en x_0 es la pendiente de la recta tangente en x_0.
- Para estimar la tasa de variación instantánea en $x = x_0$ calcule la tasa de variación media sobre diferentes intervalos $[x_0, x_1]$ (o bien $[x_1, x_0]$) donde x_1 esté próximo a x_0.
- La velocidad de un objeto que se desplaza en una trayectoria rectilínea es la tasa de variación de la posición $s(t)$.
- Función lineal $f(x) = mx + b$: la tasa de variación media sobre cualquier intervalo y la instantánea en cualquier punto son la misma e igual a la pendiente m.

2.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. La velocidad media es igual a la pendiente de la recta secante por dos puntos de una gráfica. ¿De qué gráfica?

2. ¿Puede definirse la velocidad instantánea como un cociente? En caso negativo, ¿cómo se calcula la velocidad instantánea?

3. ¿Cuál es la interpretación gráfica de la velocidad instantánea en un instante $t = t_0$?

4. Explicar la interpretación gráfica del siguiente enunciado: la tasa de variación media se aproxima a la tasa de variación instantánea a medida que el intervalo $[x_0, x_1]$ se va reduciendo a x_0.

5. La tasa de variación de la temperatura atmosférica respecto a la altitud es igual a la pendiente de la recta tangente a una gráfica. ¿A qué gráfica? ¿Cuáles son las posibles unidades de esta tasa?

Problemas

1. Se deja caer una pelota que estaba en reposo en el instante $t = 0$. La distancia recorrida después de t segundos es $s(t) = 4{,}9t^2$ m.

(a) ¿Cuántos metros desciende la pelota durante el intervalo de tiempo $[2, 2{,}5]$?

(b) Calcule la velocidad media en $[2, 2{,}5]$.

(c) Calcule la velocidad media en los intervalos de tiempo detallados en la tabla y use los resultados para estimar la velocidad instantánea de la pelota cuando $t = 2$.

Intervalo	$[2, 2{,}01]$	$[2, 2{,}005]$	$[2, 2{,}001]$	$[2, 2{,}00001]$
Velocidad media				

2. Una llave inglesa, inicialmente en reposo, se deja caer en el instante $t = 0$. Estime su velocidad instantánea cuando $t = 3$, suponiendo que la distancia que habrá recorrido después de t segundos es $s(t) = 4{,}9t^2$ m.

3. Sea $v = 20\sqrt{T}$ como en el ejemplo 2. Estimar la tasa de variación instantánea de v respecto a T cuando $T = 300$ K.

4. Calcule $\Delta y/\Delta x$ para el intervalo $[2, 5]$, donde $y = 4x - 9$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de y respecto a x en $x = 2$?

En los problemas 5-6, se lanza una piedra hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 15 m/s. *Su altura en el instante t es* $h(t) = 15t - 4{,}9t^2$ m.

5. Calcule la velocidad media de la piedra en el intervalo de tiempo $[0{,}5, 2{,}5]$, y represente la recta secante correspondiente en un dibujo de la gráf ca de $h(t)$.

6. Calcule la velocidad media de la piedra en los intervalos de tiempo $[1, 1{,}01]$, $[1, 1{,}001]$, $[1, 1{,}0001]$ y $[0{,}99, 1]$, $[0{,}999, 1]$, $[0{,}9999, 1]$. Use los resultados para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. Para un depósito inicial de 100 euros, el saldo en una cuenta bancaria después de t años es de $f(t) = 100(1{,}08)^t$ euros.

(a) ¿Cuáles son las unidades de la tasa de variación de $f(t)$?

(b) Halle la tasa de variación media en $[0, 0{,}5]$ y $[0, 1]$.

(c) Estime la tasa de variación instantánea cuando $t = 0{,}5$ calculando la tasa de variación media en intervalos a izquierda y derecha de $t = 0{,}5$.

8. La distancia recorrida por una partícula en cada instante t es $s(t) = t^3 + t$. Calcule la velocidad media en el intervalo de tiempo $[1, 4]$ y estime la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

9. La f gura 8 muestra el número estimado N de usuarios de Internet en Chile, según los datos publicados por la división de estadística de las Naciones Unidas.

(a) Estime la tasa de variación de N en $t = 2003{,}5$.

(b) Cuando t aumenta, ¿esta tasa de variación aumenta o disminuye? Justif que su respuesta gráf camente.

(c) Sea R la tasa de variación media en $[2001, 2005]$. Calcule R.

(d) La tasa de variación en $t = 2002$, ¿es mayor o menor que la tasa de variación media R? Justif que su respuesta gráf camente.

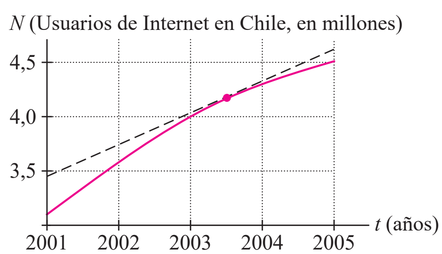


FIGURA 8

10. La **temperatura atmosférica** T (en °C) a una altitud h por encima de un cierto punto de la Tierra es $T = 15 - 0{,}0065h$ para $h \leq 12\ 000$ m. ¿Cuáles son las tasas de variación media e instantánea de T respecto a h? ¿Por qué son la misma? Dibuje la gráf ca de T para $h \leq 12\ 000$.

En los problemas 11-18, estime la tasa de variación instantánea en el punto indicado.

11. $P(x) = 3x^2 - 5;\quad x = 2$

12. $f(t) = 12t - 7;\quad t = -4$

13. $y(x) = \dfrac{1}{x+2};\quad x = 2$

14. $y(t) = \sqrt{3t+1};\quad t = 1$

15. $f(x) = 3^x;\quad x = 0$

16. $f(x) = 3^x;\quad x = 3$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x;\quad x = \dfrac{\pi}{6}$

18. $f(x) = \tan x;\quad x = \dfrac{\pi}{4}$

19. La altura (en centímetros) en el instante t (en segundos) de un pequeño peso que oscila en el extremo de un muelle es $h(t) = 8\cos(12\pi t)$.

(a) Calcule la velocidad media del peso en los intervalos de tiempo $[0, 0{,}1]$ y $[3, 3{,}5]$.

(b) Estime su velocidad instantánea en $t = 3$.

20. El número $P(t)$ de células de *E. coli* en cada instante t (horas) en una placa de Petri está representado en la f gura 9.

(a) Calcule la tasa de variación media de $P(t)$ en el intervalo de tiempo $[1, 3]$ y dibuje la correspondiente recta secante.

(b) Estime la pendiente m de la recta de la f gura 9. ¿Cuál es el signif cado de m?

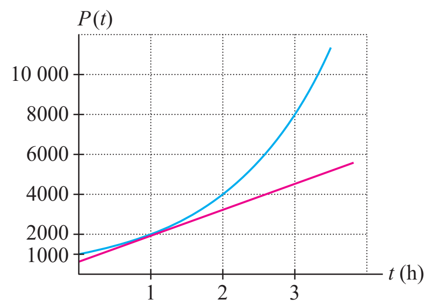


FIGURA 9 Número de células de *E. coli* en el instante t.

21. Suponga que el período T (en segundos) de un péndulo (es decir, el tiempo necesario para completar una oscilación volviendo al punto inicial) es $T = \frac{3}{2}\sqrt{L}$, donde L es la longitud del péndulo (en metros).

(a) ¿Cuáles son las unidades de la tasa de variación de T respecto a L? Explique qué mide esta tasa.

(b) ¿Qué cantidades representan las pendientes de las rectas A y B de la f gura 10?

(c) Estime la tasa de variación instantánea de T respecto a L cuando $L = 3$ m.

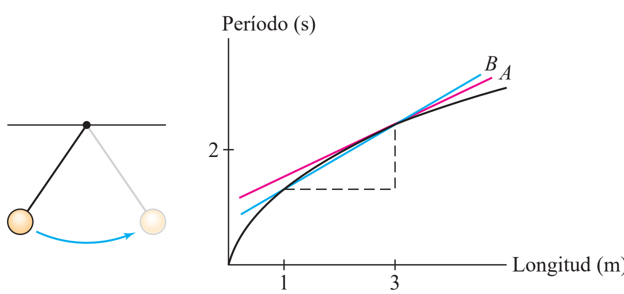


FIGURA 10 El período T es el tiempo que invierte el péndulo en ir y volver.

22. Las gráf cas de la f gura 11 representan las posiciones de partículas móviles en función del tiempo.

(a) Las velocidades instantáneas en los instantes de tiempo t_1, t_2, t_3 en (A), ¿forman una sucesión creciente o decreciente?

(b) ¿Está la partícula acelerando o desacelerando en (A)?

(c) ¿Está la partícula acelerando o desacelerando en (B)?

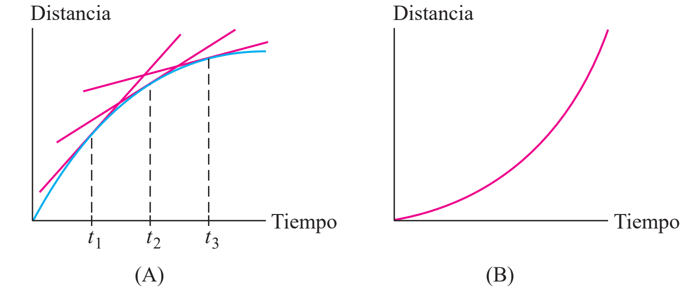


FIGURA 11

23. GU Una campaña de publicidad impulsó las ventas de la pizza congelada de la Corteza Crujiente a un nivel máximo de S_0 dólares al mes. En un estudio de marketing puso de manifiesto que, pasados t meses, las ventas mensuales bajaron hasta:

$$S(t) = S_0 g(t), \quad \text{donde } g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

¿Las ventas disminuyen más lentamente o más rápidamente de lo que aumenta el tiempo? Responda haciendo referencia la una representación de la gráfica de $g(t)$ junto con algunas rectas tangentes.

24. La fracción de población de una ciudad que está infectada por un virus de la gripe se representa como función del tiempo (en semanas) en la figura 12.

(a) ¿Qué cantidades representan las pendientes de las rectas A y B? Estime estas pendientes.

(b) ¿Cuándo se propaga más rápido la gripe, en $t = 1$, 2 o en 3?

(c) ¿Cuándo se propaga más rápido la gripe, en $t = 4$, 5 o en 6?

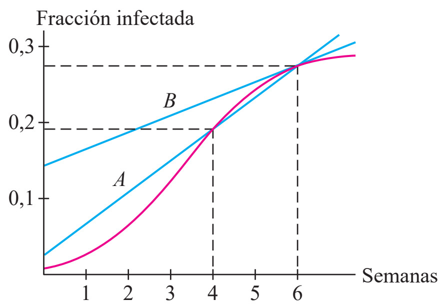


FIGURA 12

25. Las gráficas de la figura 13 representan la posición s de una partícula en función del tiempo t. Relacione cada gráfica con una descripción:

(a) Acelera.

(b) Acelera y después desacelera.

(c) Desacelera.

(d) Desacelera y después acelera.

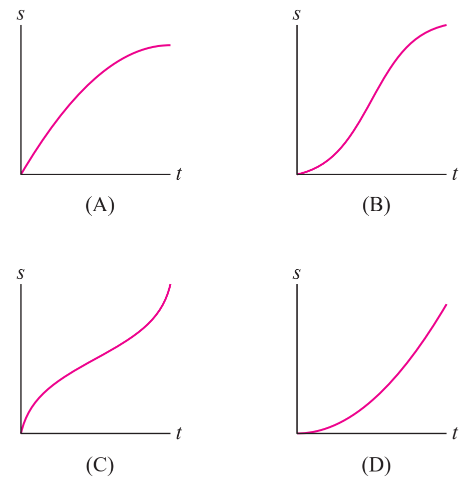


FIGURA 13

26. Un epidemiólogo descubre que el porcentaje $N(t)$ de niños expuestos que se infectaron el día t durante las primeras tres semanas de una epidemia de rubeola viene dado, con una buena aproximación, por la fórmula (figura 14)

$$N(t) = \frac{100t^2}{t^3 + 5t^2 - 100t + 380}$$

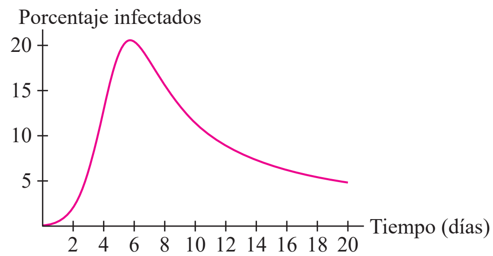


FIGURA 14 Gráfica de $N(t)$.

(a) Dibuje la recta secante cuya pendiente es la tasa media de incremento de niños infectados en los intervalos [4, 6] y [12, 14]. A continuación, calcule esas tasas medias (en unidades de porcentaje por día).

(b) ¿Es la tasa de disminución mayor en $t = 8$ o en $t = 16$?

(c) Estime la tasa de variación de $N(t)$ en el día 12.

27. El hongo *Fusarium exosporium* infecta un campo de lino a través de las raíces y provoca que las plantas se marchiten. Al cabo de un cierto tiempo, el campo entero se encuentra infectado. El porcentaje $f(t)$ de plantas infectadas en función del tiempo t (en días) desde que fueron plantadas, se muestra en la figura 15.

(a) ¿Cuáles son las unidades de la tasa de variación de $f(t)$ respecto a t? ¿Qué mide esta tasa?

(b) Use la gráfica para ordenar (de menor a mayor) las tasas de infección media en los intervalos [0, 12], [20, 32] y [40, 52].

(c) Use la siguiente tabla para calcular las tasas medias de infección en los intervalos [30, 40], [40, 50] y [30, 50].

Días	0	10	20	30	40	50	60
Porcentaje infectados	0	18	56	82	91	96	98

(d) Dibuje la recta tangente para $t = 40$ y estime su pendiente.

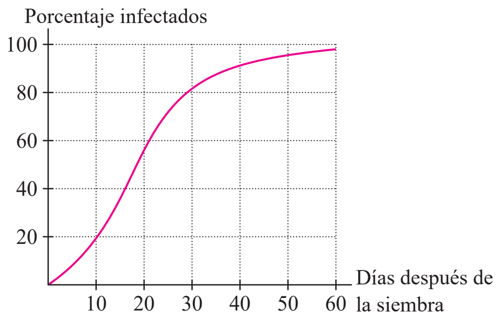


FIGURA 15

28. Sea $v = 20\sqrt{T}$ como en el ejemplo 2. ¿Es la tasa de variación de v respecto a T mayor en temperaturas bajas o en temperaturas altas? Justif que su respuesta a partir de la gráf ca.

29. Si un objeto que se desplaza siguiendo una línea recta (pero con velocidad variable) recorre Δs metros en Δt segundos, su velocidad media será $v_0 = \Delta s/\Delta t$ m/s. Demuestre que recorrería la misma distancia si se desplazase a una velocidad constante v_0 durante el mismo intervalo de tiempo de Δt segundos. Este hecho justif ca que se llame *velocidad media* a $\Delta s/\Delta t$.

30. Dibuje la gráf ca de $f(x) = x(1-x)$ en $[0, 1]$. Observando la gráf ca, y sin efectuar ningún cálculo, halle:

(a) La tasa de variación media en $[0, 1]$

(b) La tasa de variación instantánea para $x = \frac{1}{2}$.

(c) Los valores de x para los cuales la tasa de variación es positiva.

31. Determine cuál de las gráf cas de la f gura 16 tiene la propiedad siguiente: para todo x, la tasa de variación media en $[0, x]$ es mayor que la tasa de variación instantánea en x. Justif que su respuesta.

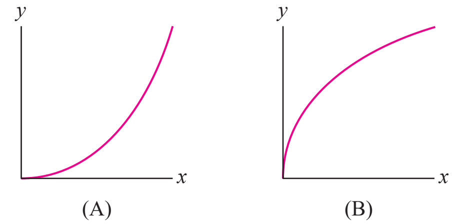


FIGURA 16

Problemas avanzados

32. La altura alcanzada por un proyectil disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 25 m/s es:

$$h(t) = 25t - 4{,}9t^2 \text{ m}$$

(a) Calcule $h(1)$. Demuestre que $h(t) - h(1)$ se puede factorizar de modo que $(t-1)$ sea un factor.

(b) Utilizando el apartado (a), pruebe que la velocidad media en el intervalo $[1, t]$ es $20{,}1 - 4{,}9t$.

(c) Utilice esta fórmula para hallar la velocidad media en varios intervalos $[1, t]$ con t próximo a 1. A continuación, estime la velocidad instantánea en $t = 1$.

33. Sea $Q(t) = t^2$. Como en el ejercicio anterior, halle una fórmula para la tasa de variación media de Q en el intervalo $[1, t]$, y use esta fórmula para estimar la tasa de variación instantánea en $t = 1$. Repita el cálculo con el intervalo $[2, t]$ y estime la tasa de variación en $t = 2$.

34. Demuestre que la tasa de variación media de $f(x) = x^3$ en $[1, x]$ es igual a:

$$x^2 + x + 1$$

Use este resultado para estimar la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en $x = 1$.

35. Halle una fórmula para la tasa de variación media de $f(x) = x^3$ en $[2, x]$ y use su resultado para estimar la tasa de variación instantánea en $x = 2$.

36. Sea $T = \frac{3}{2}\sqrt{L}$ como en el problema 21. Los números de la segunda columna de la tabla 4 van aumentando y los de la última columna van disminuyendo. Explique el motivo a partir de la gráf ca de T como función de L. Explique también gráf camente por qué la tasa de variación instantánea en $L = 3$ queda entre 0,4329 y 0,4331.

TABLA 4 Tasas de variación media de T respecto a L

Intervalo	Tasa de variación media	Intervalo	Tasa de variación media
$[3, 3{,}2]$	0,42603	$[2{,}8, 3]$	0,44048
$[3, 3{,}1]$	0,42946	$[2{,}9, 3]$	0,43668
$[3, 3{,}001]$	0,43298	$[2{,}999, 3]$	0,43305
$[3, 3{,}0005]$	0,43299	$[2{,}9995, 3]$	0,43303

2.2 Interpretación numérica y gráfica de los límites

El objetivo de esta sección es def nir los límites y estudiarlos mediante técnicas numéricas y gráf cas. Empezaremos con la siguiente pregunta: *¿cómo se comportan los valores de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un número c, tanto si $f(c)$ está def nido como si no lo está?*

Para responder a esta pregunta, se va a experimentar con la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad (x \text{ en radianes})$$

Nos referiremos a la expresión indefinida 0/0 como a una "forma indeterminada."

Observe que $f(0)$ no está definido. De hecho, cuando se asigna $x = 0$ en

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

se obtiene la expresión indefinida $0/0$, ya que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Sin embargo, $f(x)$ puede calcularse para valores de x *cercanos* a 0. Al hacerlo, se observa una pauta clara.

Para describir esta pauta, se usan frases como "x se aproxima a 0" o bien "x tiende a 0" para indicar que x toma valores (tanto positivos como negativos) que se acercan a 0 tanto como se desee. La notación que se utiliza es $x \to 0$ y más concretamente se escribe:

- $x \to 0+$ si x se aproxima a 0 por la derecha (tomando valores positivos).
- $x \to 0-$ si x se aproxima a 0 por la izquierda (tomando valores negativos).

Considere ahora los valores indicados en la tabla 1. Esa tabla da evidencia inequívoca de que $f(x)$ se va acercando cada vez más a 1 a medida que $x \to 0+$ y que $x \to 0-$.

Esta conclusión se reafirma al ver la gráfica de $f(x)$ en la figura 1. El punto $(0, 1)$ no es de la gráfica, puesto que $f(x)$ no está definida en $x = 0$. No obstante, la gráfica se va acercando a este punto ausente cuando x tiende a 0 por la derecha y por la izquierda. Se dice que el *límite* de $f(x)$ cuando $x \to 0$ es igual a 1 y se escribe:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

También se dice que $f(x)$ *tiende* o *converge* a 1 cuando $x \to 0$.

TABLA 1

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
1	0,841470985	−1	0,841470985
0,5	0,**9**58851077	−0,5	0,**9**58851077
0,1	0,**99**8334166	−0,1	0,**99**8334166
0,05	0,**999**583385	−0,05	0,**999**583385
0,01	0,**9999**83333	−0,01	0,**9999**83333
0,005	0,**99999**5833	−0,005	0,**99999**5833
0,001	0,**999999**833	−0,001	0,**999999**833
$x \to 0+$	$f(x) \to 1$	$x \to 0-$	$f(x) \to 1$

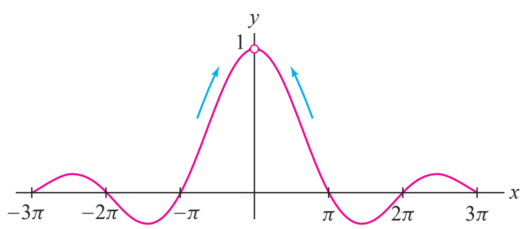


FIGURA 1 Gráfica de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Toda esta evidencia numérica y gráfica debe haber convencido de que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ converge a 1 cuando $x \to 0$. Sin embargo, puesto que $f(0)$ da lugar a la expresión indefinida $0/0$, ¿no se habría llegado antes a esa misma conclusión afirmando sencillamente que $0/0$ es igual a 1? La respuesta es no. *El álgebra no permite dividir por* 0 *bajo ninguna circunstancia*, por lo que no es correcto afirmar que $0/0$ sea igual a 1 o a cualquier otro número.

Lo que hemos aprendido, sin embargo, es que una función $f(x)$ puede aproximarse a un límite cuando $x \to c$, incluso si la fórmula para $f(c)$ produce la expresión indefinida $0/0$. El límite de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ resulta ser 1. Se encontrarán otros ejemplos en que la fórmula de una función $f(x)$ conduce a $0/0$ y, no obstante, el límite es un número diferente de 1 (o bien el límite no existe).

Definición de límite

Para definir los límites de un modo más formal, recuerde que la distancia entre dos números a y b es el valor absoluto $|a - b|$. De esta manera, puede expresarse la idea de que $f(x)$ es próximo a L afirmando que $|f(x) - L|$ es pequeño.

El concepto de límite no fue totalmente clarificado hasta el siglo XIX. El matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que se pronuncia ko-shi) dio la siguiente definición verbal: "Cuando los valores que se asignan sucesivamente a una misma variable se aproximan a un valor fijo de manera que acaben difiriendo de él tan poco como se desee, ese valor final se denomina límite de todos los anteriores. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de las diversas fracciones que proporcionan valores que se aproximan más y más a él."

DEFINICIÓN Límite Suponga que $f(x)$ está definida para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, pero no necesariamente en el propio c. Se dice que:

el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es igual a L

si $|f(x) - L|$ se hace arbitrariamente pequeño cuando x es un número suficientemente cercano (pero no igual) a c. En tal caso, se escribe:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

Se dice también que $f(x)$ *se aproxima* o *converge* a L cuando $x \to c$ (y se escribe $f(x) \to L$).

Si los valores de $f(x)$ no convergen a ningún valor cuando $x \to c$, se dice que $\lim_{x \to c} f(x)$ *no existe*. Es importante observar que el valor $f(c)$, tanto si está definido como si no lo está, no interviene para nada en el límite. Sólo cuentan los valores $f(x)$ para x próximo a c. Además, si $f(x)$ tiende a un valor L cuando $x \to c$, entonces dicho valor es único.

■ **EJEMPLO 1** Usar la definición anterior para comprobar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 7} 5 = 5$ **(b)** $\lim_{x \to 4} (3x + 1) = 13$

Solución

(a) Sea $f(x) = 5$. Para demostrar que $\lim_{x \to 7} f(x) = 5$, hay que verificar que $|f(x) - 5|$ se hace arbitrariamente pequeño cuando x está suficientemente próximo (pero no es igual) a 7. Puesto que $|f(x) - 5| = |5 - 5| = 0$ *para todo* x, lo que queríamos probar se cumple automáticamente (incluso si x no está cerca de 7).

(b) Sea $f(x) = 3x + 1$. Para demostrar que $\lim_{x \to 4} (3x + 1) = 13$, hay que verificar que $|f(x) - 13|$ se hace arbitrariamente pequeño cuando x está suficientemente próximo (pero no es igual) a 4. Se tiene:

$$|f(x) - 13| = |(3x + 1) - 13| = |3x - 12| = 3|x - 4|$$

Puesto que $|f(x) - 13|$ es un múltiplo de $|x - 4|$, podemos conseguir que $|f(x) - 13|$ disminuya tanto como se desee considerando x suficientemente próximo a 4. ■

Razonando como en el ejemplo 1, pero con constantes arbitrarias, se obtienen los siguientes resultados sencillos pero importantes:

TEOREMA 1 Para constantes k y c cualesquiera, (a) $\lim_{x \to c} k = k$, (b) $\lim_{x \to c} x = c$.

La definición de límite se puede formular con precisión de la siguiente manera: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si, para todo número n, se puede determinar un valor de m tal que $|f(x) - L| < 10^{-n}$ para todo x tal que $0 < |x - c| < 10^{-m}$.

Para tratar límites más complicados y especialmente para proporcionar demostraciones matemáticas rigurosas, se necesita una versión más precisa de la definición de límite que se acaba de dar. Esta versión más precisa se trata en la sección 2.9, donde se utilizan desigualdades para precisar el significado exacto de las frases "arbitrariamente pequeño" y "suficientemente cercano."

Investigación gráfica y numérica

El objetivo para el resto de esta sección es lograr una mejor comprensión intuitiva de los límites investigándolos gráfica y numéricamente.

Investigación gráfica Utilice un instrumento gráfico para representar la gráfica de $f(x)$ de modo que se pueda visualizar si el límite existe o no. A menudo se puede utilizar esta representación gráfica para estimar el valor del límite.

Investigación numérica Se escribe $x \to c-$ para indicar que x se aproxima a c con valores más pequeños que c, y se escribe $x \to c+$ para indicar que x se aproxima a c con valores más grandes que c. Para investigar $\lim_{x\to c} f(x)$:

(i) Se confeccionará una tabla de valores de $f(x)$ para x próximos a c pero menores que c, es decir, cuando $x \to c-$.

(ii) Se confeccionará una segunda tabla de valores de $f(x)$ para x próximos a c pero mayores que c, es decir, cuando $x \to c+$.

(iii) Si ambas tablas apuntan a una convergencia al mismo número L, entonces se considerará L como la estimación del límite.

Debe tenerse presente que la experimentación gráfica y numérica proporciona evidencia sobre el valor de un límite, pero no demuestra que el límite exista o tome un valor concreto. Esto se logra usando las propiedades de los límites descritas en las secciones siguientes.

Las tablas deben contener un número suficiente de valores para revelar una tendencia clara de convergencia a un valor L. Si $f(x)$ tiende a un límite, entonces generalmente los sucesivos valores de $f(x)$ irán coincidiendo en más y más cifras decimales, a medida que x se escoja más próximo a c. Si no aparece ninguna pauta de este tipo, entonces puede ocurrir que el límite no exista

■ **EJEMPLO 2** Investigue $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ gráfica y numéricamente.

Solución La función $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ no está definida en $x = 9$, pues la fórmula para $f(9)$ da lugar a la expresión indefinida 0/0. Por tanto, la gráfica de la figura 9 tiene un agujero en $x = 9$. Sin embargo, la gráfica sugiere que $f(x)$ tiende a 6 cuando $x \to 9$.

Para recoger evidencia numérica de este hecho, consideraremos una tabla de valores de $f(x)$ en la cual x se aproxime a 9 tanto por la izquierda como por la derecha. Los valores obtenidos en la tabla 2 confirman la impresión de que:

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6 \quad ■$$

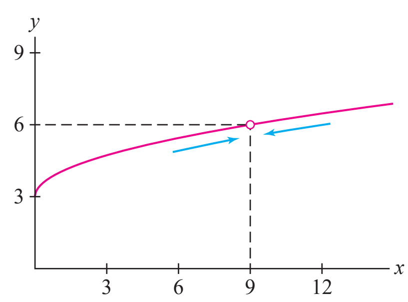


FIGURA 2 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

TABLA 2

$x \to 9-$	$\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$	$x \to 9+$	$\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$
8,9	**5,98**329	9,1	**6,01**662
8,99	**5,99**833	9,01	**6,00**1666
8,999	**5,99**83	9,001	**6,000**167
8,9999	**5,9999**833	9,0001	**6,0000**167

■ **EJEMPLO 3 El límite coincide con el valor de la función** Investigue $\lim_{x\to 4} x^2$.

Solución La figura 3 y la tabla 3 sugieren que $\lim_{x\to 4} x^2 = 16$. En este caso $f(x) = x^2$ está definida en $x = 4$ siendo $f(4) = 16$, por lo que *el límite coincide con el valor de la función*. Se llega a esta satisfactoria conclusión siempre que $f(x)$ sea una función *continua*, un concepto que se estudiará en la sección 2.4. ■

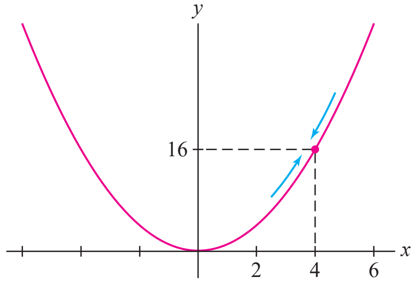


FIGURA 3 Gráf ca de $f(x) = x^2$. El límite cuando $x \to 4$ coincide con el valor de la función $f(4) = 16$.

TABLA 3

$x \to 4-$	x^2	$x \to 4+$	x^2
3,9	15,21	4,1	16,81
3,99	**15,9**201	4,01	**16,0**801
3,999	**15,99**2001	4,001	**16,00**8001
3,9999	**15,999**20001	4,0001	**16,000**80001

■ **EJEMPLO 4** Investigue $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

Solución La función $f(h) = (2^h - 1)/h$ no está def nida en $h = 0$, pero tanto la f gura 4 como la tabla 4 sugieren que $\lim_{h \to 0} (2^h - 1)/h \approx 0{,}693$. ■

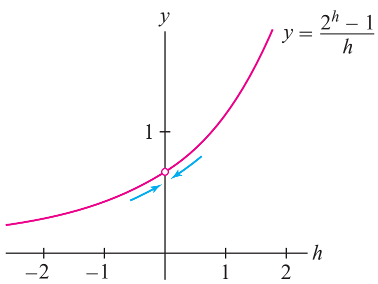


FIGURA 4

TABLA 4

$h \to 0-$	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$h \to 0+$	$\dfrac{2^h - 1}{h}$
−0, 005	0,69195	0, 005	0,69435
−0, 001	0,69291	0, 001	0,69339
−0, 0001	0,69312	0, 0001	0,69317
−0, 00001	0,69314	0, 00001	0,69315

ATENCIÓN *Las investigaciones numéricas son a menudo sugerentes, pero pueden ser engañosas en algunos casos. Si, en el ejemplo 5, se hubiera escogido evaluar* $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ *en los puntos* $x = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots,$ *se podría haber concluido de forma errónea que* $f(x)$ *tiende a* 0 *cuando* $x \to 0$. *El problema es que* $f(10^{-n}) = \operatorname{sen}(10^n \pi) = 0$ *para todo número natural* n, *pero* $f(x)$ *propiamente no se aproxima a ningún límite.*

■ **EJEMPLO 5** **Un límite que no existe** Investigue $\displaystyle\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ gráf ca y numéricamente.

Solución La función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ no está def nida en $x = 0$, pero la f gura 5 sugiere que oscila entre $+1$ y -1 inf nitas veces cuando $x \to 0$. Así, parece que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ no existe. La tabla 5 conf rma esta sospecha, pues muestra que los valores de $f(x)$ oscilan y no tienden hacia un límite L cuando $x \to 0$. ■

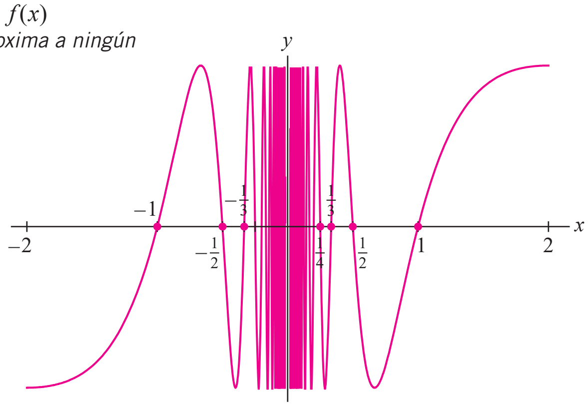


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

TABLA 5 **La función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ no tiende a ningún límite cuando $x \to 0$**

$x \to 0-$	$\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$	$x \to 0+$	$\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$
−0, 1	0	0, 1	0
−0, 03	0, 866	0, 03	−0, 866
−0, 007	−0, 434	0, 007	0, 434
−0, 0009	0, 342	0, 0009	−0, 342
−0, 00065	−0, 935	0, 00065	0, 935

Límites laterales

Los límites que se han examinado hasta ahora eran *bilaterales*. Para demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, hay que comprobar que $f(x)$ converge a L cuando x tiende a c con valores tanto menores como mayores que c. En algunos casos, puede ocurrir que $f(x)$ se aproxime a L por un lado de c sin que necesariamente lo haga por el otro, y puede también ocurrir que $f(x)$ sólo esté def nida a un lado de c. Por esta razón, se def nen los límites laterales:

$$\lim_{x\to c-} f(x) \quad \text{(límite por la izquierda)} \qquad \lim_{x\to c+} f(x) \quad \text{(límite por la derecha)}$$

El límite propiamente dicho existe si ambos límites laterales existen y son iguales.

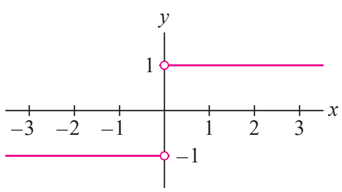


FIGURA 6 Gráf ca de $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

■ **EJEMPLO 6 Límites laterales no coincidentes** Investigue los límites laterales de $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ cuando $x \to 0$. ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Solución La gráf ca de la f gura 6 ilustra lo que ocurre. Para $x < 0$,

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

Por tanto, el límite por la izquierda es $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$. Pero para $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

Así, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$. Estos límites laterales no son iguales, por lo que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. ■

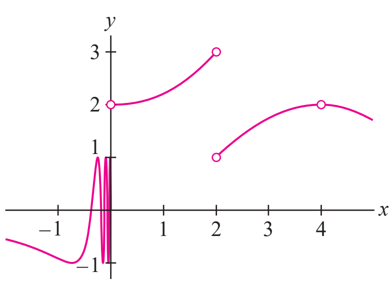


FIGURA 7

■ **EJEMPLO 7** La función $f(x)$ de la f gura 7 no está def nida en $c = 0, 2, 4$. Investigue los límites laterales y bilaterales en estos puntos.

Solución

- $c = 0$: el límite lateral por la izquierda $\lim_{x\to 0-} f(x)$ no parece que exista pues da la sensación de que $f(x)$ oscila inf nitas veces a la izquierda de $x = 0$. Por otra parte, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 2$.
- $c = 2$: los límites laterales existen pero no son iguales

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2+} f(x) = 1$$

  Por tanto, $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.
- $c = 4$: los límites laterales existen y ambos son iguales a 2. Así, los dos límites laterales existen y $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$. ■

Límites infinitos

Algunas funciones $f(x)$ tienden a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando x tiende a un valor c. En tal caso, aunque el $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, se dice que $f(x)$ tiene *límite inf nito*. Con más precisión, se dice que:

- $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ crece por encima de cualquier valor cuando $x \to c$.
- $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ decrece por debajo de cualquier valor cuando $x \to c$.

Aquí, “decrecer por debajo de cualquier valor cuando” quiere decir que $f(x)$ es negativa y que $|f(x)| \to +\infty$. Los límites laterales inf nitos se def nen de forma análoga. Cuando utilice esta notación, tenga presente que $+\infty$ y $-\infty$ no son números.

Si $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando x tiende a c por uno o ambos lados, la recta $x = c$ se denomina **asíntota vertical**. En la f gura 8, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical en (A) y $x = 0$ es una asíntota vertical tanto en (B) como en (C).

En el siguiente ejemplo, la notación $x \to c\pm$ se utiliza para indicar que los límites a la derecha y a la izquierda se considerarán de manera separada.

EJEMPLO 8 GU Investigue gráf camente los siguientes límites laterales:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pm} \frac{1}{x-2}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x^2}$

Solución

(a) Según la f gura 8(A)

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical. ¿Por qué son diferentes los límites laterales? La respuesta es que $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ es negativa para $x < 2$ (por lo que el límite por la izquierda es $-\infty$) y $f(x)$ es positiva para $x > 2$ (por lo que el límite por la derecha es $+\infty$).

(b) La f gura 8(B) sugiere que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. De hecho, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es positiva para todo $x \neq 0$, y resulta arbitrariamente grande para $x \to 0$, por ambos lados. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. ■

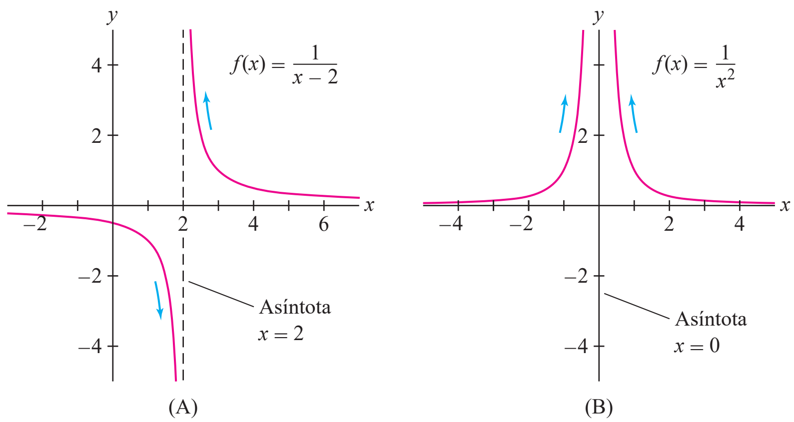


FIGURA 8

UN APUNTE CONCEPTUAL No debe pensarse un límite inf nito como un verdadero límite. La notación $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ es simplemente una manera de af rmar que $f(x)$ crece por encima de cualquier valor a medida que x se aproxima a c. El límite propiamente dicho no existe. Hay que ser cuidadoso con esta notación porque $+\infty$ y $-\infty$ *no son números*, pueden aparecer contradicciones si se intentan manipular como números. Por ejemplo, si $+\infty$ fuese un número, sería mayor que cualquier número f nito y, es de suponer, que $+\infty + 1 = +\infty$. Pero entonces

$$\begin{aligned} +\infty + 1 &= +\infty \\ (+\infty + 1) - \infty &= +\infty - \infty \\ 1 &= 0 \qquad \text{(¡contradicción!)} \end{aligned}$$

Para evitar errores, recuerde que ∞ no es un número sino que es una notación abreviada.

2.2 RESUMEN

- Por def nición, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si $|f(x) - L|$ es arbitrariamente pequeño cuando x está suf cientemente próximo (pero no es igual) a c. Se dice que:

  – *El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L*, o
  – *$f(x)$ se aproxima (o converge) a L cuando x se aproxima a c.*

- Si $f(x)$ se aproxima a un límite cuando $x \to c$, entonces el valor límite L es único.
- Si $f(x)$ no se aproxima a un límite cuando $x \to c$, se dice que $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.
- El límite puede existir incluso si $f(c)$ no está def nida.
- *Límites laterales*:

  – $\lim_{x\to c-} f(x) = L$ si $f(x)$ converge a L cuando x se aproxima a c con valores menores que c.
  – $\lim_{x\to c+} f(x) = L$ si $f(x)$ converge a L cuando x se aproxima a c con valores mayores que c.

- El límite existe si y sólo si los dos límites laterales existen y son iguales.
- *Límites inf nitos*: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ si $f(x)$ crece más allá de cualquier número cuando x se aproxima a c y $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ se hace arbitrariamente grande (en valor absoluto) pero negativa cuando x se aproxima a c.
- Tanto en el caso de límites laterales como en el de bilaterales, si el límite cuando $x \to c$ es $+\infty$ o $-\infty$, la recta vertical $x = c$ se denomina una *asíntota vertical*.

2.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es el límite de $f(x) = 1$ cuando $x \to \pi$?

2. ¿Cuál es el límite de $g(t) = t$ cuando $t \to \pi$?

3. ¿Es $\lim_{x\to 10} 20$ igual a 10 o a 20?

4. ¿Puede $f(x)$ tender a algún límite cuando $x \to c$ si $f(c)$ no está def nida? En caso af rmativo, dé un ejemplo.

5. ¿Qué sugiere la siguiente tabla acerca de $\lim_{x\to 1-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1+} f(x)$?

x	0,9	0,99	0,999	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	7	25	4317	3,0126	3,0047	3,00011

6. ¿Es posible decidir si $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe examinando la gráf ca de $f(x)$ para $x > 5$? Justif que su respuesta.

7. Si se supone cierto que $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe, ¿puede determinarse su valor a partir de una gráf ca de $f(x)$ para todo $x > 5$?

Problemas

En los problemas 1-4, complete las tablas y conjeture el valor del límite.

1. $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,002		0,998	
1,001		0,999	
1,0005		0,9995	
1,00001		0,99999	

2. $\lim_{t\to 0} h(t)$, donde $h(t) = \dfrac{\cos t - 1}{t^2}$. Observe que $h(t)$ es par; es decir, $h(t) = h(-t)$.

t	$\pm 0{,}002$	$\pm 0{,}0001$	$\pm 0{,}00005$	$\pm 0{,}00001$
$h(t)$				

3. $\lim_{y\to 2} f(y)$, donde $f(y) = \dfrac{y^2 - y - 2}{y^2 + y - 6}$.

y	$f(y)$	y	$f(y)$
2,002		1,998	
2,001		1,999	
2,0001		1,9999	

4. $\lim_{\theta \to 0} f(\theta)$, donde $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \theta}{\theta^3}$.

θ	$\pm 0{,}002$	$\pm 0{,}0001$	$\pm 0{,}00005$	$\pm 0{,}00001$
$f(\theta)$				

5. Determine $\lim_{x \to 0{,}5} f(x)$ para $f(x)$ dada por la figura 9.

6. Determine $\lim_{x \to 0{,}5} g(x)$ para $g(x)$ dada por la figura 10.

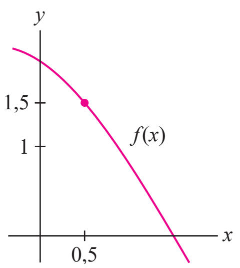


FIGURA 9

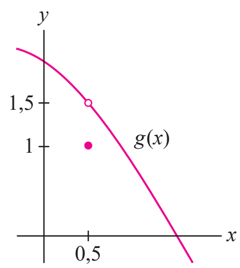


FIGURA 10

En los problemas 7-8, evalúe el límite.

7. $\lim_{x \to 21} x$ **8.** $\lim_{x \to 4{,}2} \sqrt{3}$

En los problemas 9-16, compruebe cada límite utilizando la definición. Por ejemplo, en el problema 9, pruebe que $|3x - 12|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño considerando x suficientemente cercano a 4.

9. $\lim_{x \to 4} 3x = 12$

10. $\lim_{x \to 5} 3 = 3$

11. $\lim_{x \to 3} (5x + 2) = 17$

12. $\lim_{x \to 2} (7x - 4) = 10$

13. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

14. $\lim_{x \to 0} (3x^2 - 9) = -9$

15. $\lim_{x \to 0} (4x^2 + 2x + 5) = 5$

16. $\lim_{x \to 0} (x^3 + 12) = 12$

En los problemas 17-36, estime el límite numéricamente o establezca que el límite no existe. En el caso de límites infinitos, determine si los límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$.

17. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

18. $\lim_{x \to -4} \dfrac{2x^2 - 32}{x + 4}$

19. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$

20. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$

21. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

23. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

25. $\lim_{x \to 4} \dfrac{1}{(x - 4)^3}$

26. $\lim_{x \to 1-} \dfrac{3 - x}{x - 1}$

27. $\lim_{x \to 3+} \dfrac{x - 4}{x^2 - 9}$

28. $\lim_{h \to 0} \dfrac{3^h - 1}{h}$

29. $\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h \cos \dfrac{1}{h}$

30. $\lim_{h \to 0} \cos \dfrac{1}{h}$

31. $\lim_{x \to 0} |x|^x$

32. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$

33. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

34. $\lim_{r \to 0} (1 + r)^{1/r}$

35. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

36. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^3}$

37. La **función parte entera** se define como $[x] = n$, donde n es el único entero tal que $n \le x < n + 1$. Dibuje la gráfica de $y = [x]$. Calcule, para un número entero c:

(a) $\lim_{x \to c-} [x]$

(b) $\lim_{x \to c+} [x]$

38. Determine los límites laterales en $c = 1$, 2 y 4 de la función $g(x)$ que se muestra en la figura 11, y establezca si existe el límite en estos puntos.

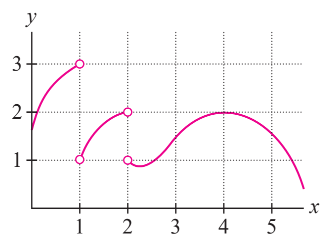


FIGURA 11

En los problemas 39-46, determine los límites laterales numérica o gráficamente. En el caso de límites infinitos, determine si los límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$ y describa la correspondiente asíntota. En el problema 46, $[x]$ es la función parte entera que se ha definido en el problema 37.

39. $\lim_{x \to 0\pm} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

40. $\lim_{x \to 0\pm} |x|^{1/x}$

41. $\lim_{x \to 0\pm} \dfrac{x - \operatorname{sen}|x|}{x^3}$

42. $\lim_{x \to 4\pm} \dfrac{x + 1}{x - 4}$

43. $\lim_{x \to -2\pm} \dfrac{4x^2 + 7}{x^3 + 8}$

44. $\lim_{x \to -3\pm} \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

45. $\lim_{x \to 1\pm} \dfrac{x^5 + x - 2}{x^2 + x - 2}$

46. $\lim_{x \to 2\pm} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(x - [x])\right)$

47. Determine los límites laterales en $c = 2$ y 4 de la función $f(x)$ de la figura 12. ¿Cuáles son las asíntotas verticales de $f(x)$?

48. Determine el límite o los límites laterales infinitos en la figura 13.

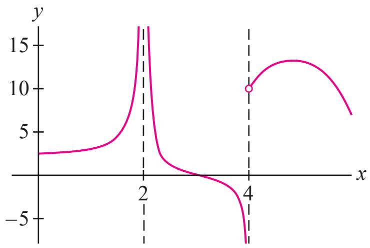


FIGURA 12

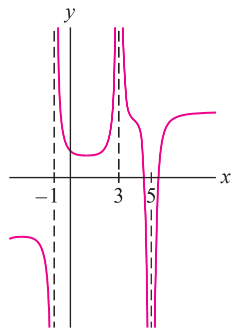


FIGURA 13

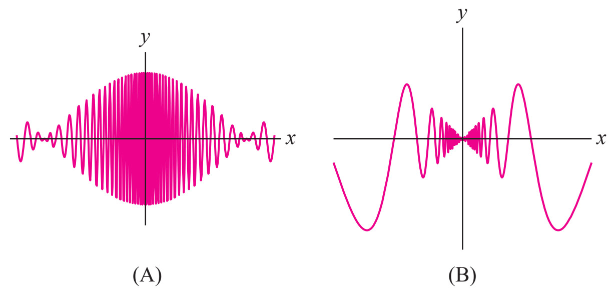


FIGURA 15

En los problemas 49-52, dibuje la gráf ca de una función con los límites dados.

49. $\lim_{x\to 1} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 3-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 3+} f(x) = 4$

50. $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 3-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 3+} f(x) = -\infty$

51. $\lim_{x\to 2+} f(x) = f(2) = 3, \quad \lim_{x\to 2-} f(x) = -1,$

$\lim_{x\to 4} f(x) = 2 \neq f(4)$

52. $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4} f(x) = -\infty$

53. Determine los límites laterales de la función $f(x)$ de la f gura 14, en los puntos $c = 1, 3, 5$ y 6.

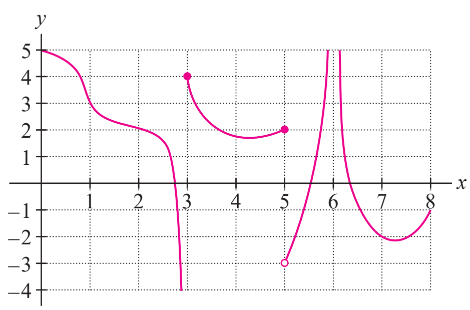


FIGURA 14 Gráf ca de $f(x)$.

54. ¿Considera que alguna de las dos funciones oscilantes de la f gura 15 tiene límite cuando $x \to 0$?

GU *En los problemas 55-60, represente gráf camente la función y utilice la gráf ca para estimar el valor del límite.*

55. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

56. $\lim_{x\to 0} \dfrac{12^x - 1}{4^x - 1}$

57. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - \cos x}{x}$

58. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 4\theta}{\cos\theta - 1}$

59. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cos 7\theta - \cos 5\theta}{\theta^2}$

60. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2\theta - \theta \operatorname{sen} 4\theta}{\theta^4}$

61. Sea n un entero positivo. ¿Para qué valor de n son los dos límites laterales inf nitos $\lim_{x\to 0\pm} 1/x^n$ iguales?

62. Sea $L(n) = \lim_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{1 - x^n} - \dfrac{1}{1 - x} \right)$ con n un entero positivo. Investigue numéricamente $L(n)$ para diferentes valores de n y, a continuación, conjeture el valor de $L(n)$ en general.

63. GU En algunos casos, las investigaciones numéricas pueden llevar a errores. Represente gráf camente $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$.

(a) ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

(b) Pruebe, evaluando $f(x)$ en $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$, que podría engañar a sus amigos haciéndoles creer que el límite existe y que es igual a 1.

(c) ¿Qué sucesión de evaluaciones podría conducir a la conclusión errónea de que $L = -1$?

Problemas avanzados

64. Las ondas lumínicas de frecuencia λ, que pasan a través de una rendija de anchura a, producen un **patrón de difracción de Fraunhofer** formado por franjas claras y oscuras (f gura 16). La intensidad viene dada en función del ángulo θ por:

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\operatorname{sen}(R \operatorname{sen} \theta)}{R \operatorname{sen} \theta} \right)^2$$

donde $R = \pi a/\lambda$ e I_m es una constante. Demuestre que la función intensidad no está def nida para $\theta = 0$. A continuación, seleccione dos valores cualesquiera para R y compruebe numéricamente que $I(\theta)$ tiende a I_m cuando $\theta \to 0$.

65. Investigue $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} n\theta}{\theta}$ numéricamente para diferentes valores de n. A continuación, conjeture el valor del límite en general.

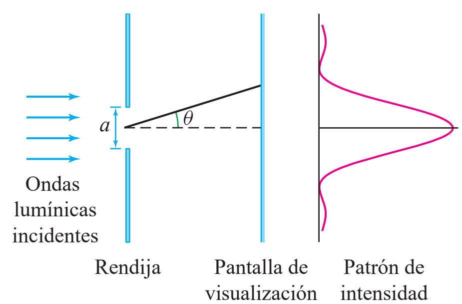


FIGURA 16 Patrón de difracción de Fraunhofer.

66. Pruebe numéricamente que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b^x - 1}{x}$ para $b = 3$ y 5 parece ser igual a $\ln 3$ y $\ln 5$, respectivamente, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano. A continuación, conjeture el valor general y verif que su conjetura con dos valores más de b.

67. Investigue el $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$ para (m, n) igual a $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 2)$. A continuación, conjeture el valor general y verif que su conjetura con dos pares adicionales.

68. Halle por experimentación numérica los enteros positivos k para los que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)}{x^k}$ exista.

69. GU Represente gráf camente $f(x) = \dfrac{2^x - 8}{x - 3}$.

(a) Amplíe la gráf ca para estimar $L = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

(b) Explique por qué se cumple:

$$f(2{,}99999) \le L \le f(3{,}00001)$$

Use este resultado para determinar L con tres dígitos decimales exactos.

70. GU La función $f(x) = \dfrac{2^{1/x} - 2^{-1/x}}{2^{1/x} + 2^{-1/x}}$ está def nida para $x \neq 0$.

(a) Investigue $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ numéricamente.

(b) Represente gráf camente f y describa su comportamiento alrededor de $x = 0$.

2.3 Reglas básicas de los límites

La sección 2.2 se ha basado en métodos gráf cos y numéricos para investigar los límites y estimar sus valores. En las próximas cuatro secciones se irá más allá de este enfoque intuitivo y se desarrollarán herramientas para calcular límites de modo preciso. El siguiente teorema proporciona el primer conjunto de herramientas.

La demostración del teorema 1 se trata en la sección 2.9 y en el apéndice D. Para ilustrar la idea subyacente, considere dos números como por ejemplo $2{,}99$ y $5{,}001$. Observe que $2{,}99$ está cercano a 3 y que $5{,}0001$ lo está a 5, por lo que la suma $2{,}99 + 5{,}0001$ está cercana a $3 + 5$ y el producto $2{,}99 \cdot 5{,}0001$ está cercano a $3 \cdot 5$. De la misma forma, si $f(x)$ se aproxima a L y $g(x)$ se aproxima a M cuando $x \to c$, entonces $f(x) + g(x)$ se aproxima a la suma $L + M$ y $f(x) \cdot g(x)$ se aproxima al producto $L \cdot M$. Las otras propiedades son análogas.

TEOREMA 1 Propiedades básicas de los límites Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existen, entonces:

(i) Propiedad de la suma: $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x))$ existe y

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

(ii) Propiedad del múltiplo constante: Para cualquier número k, $\lim\limits_{x\to c} kf(x)$ existe y

$$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$$

(iii) Propiedad del producto: $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$ existe y

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

(iv) Propiedad del cociente: si $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

(v) Potencias y raíces: si p, q son enteros con $q \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^{p/q}$ existe y

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{p/q} = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^{p/q}$$

donde se supone que $\lim\limits_{x\to c} f(x) \ge 0$ si q es par, y que $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq 0$ si $p/q < 0$. En particular, si n es un entero positivo,

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n \qquad \lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

En el segundo límite se supone que $\lim\limits_{x\to c} f(x) \ge 0$ si n es par.

Antes de pasar a los ejemplos, he aquí algunas observaciones útiles.

- Las propiedades de la suma y el producto son válidas para cualquier número de funciones. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to c}(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)) = \lim_{x\to c} f_1(x) + \lim_{x\to c} f_2(x) + \lim_{x\to c} f_3(x)$$

- La propiedad de la suma tiene una homóloga para la resta:

$$\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

Este resultado se deduce la propiedad de la suma y la propiedad del múltiplo constante (con $k = -1$):

$$\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c}(-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

- Recuerde dos límites básicos del teorema 1 en la sección 2.2:

$$\lim_{x\to c} k = k, \qquad \lim_{x\to c} x = c$$

Según la propiedad (v) aplicada a $f(x) = x$, se obtiene

$$\boxed{\lim_{x\to c} x^{p/q} = c^{p/q}} \qquad \mathbf{1}$$

para p, q enteros. Suponga aquí que $c \geq 0$ si q es par y que $c > 0$ si $p/q < 0$.

EJEMPLO 1 Use las propiedades básicas de los límites para calcular:

(a) $\lim_{x\to 2} x^3$ **(b)** $\lim_{x\to 2}(x^3 + 5x + 7)$ **(c)** $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3 + 5x + 7}$

Solución

(a) Según la ec. (1), $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$.

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(x^3 + 5x + 7) &= \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 5x + \lim_{x\to 2} 7 && \text{(Propiedad de la suma)}\\
&= \lim_{x\to 2} x^3 + 5\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7 && \text{(Propiedad del múltiplo constante)}\\
&= 8 + 5\cdot 2 + 7 = 25
\end{aligned}$$

(c) Según la propiedad (v) para raíces y (b),

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3 + 5x + 7} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^3 + 5x + 7)} = \sqrt{25} = 5$$ ■

Se puede haber dado cuenta de que cada uno de los límites de los ejemplos 1 y 2 se podría haber evaluado por simple sustitución. Por ejemplo, asigne $t = -1$ para calcular

$$\lim_{t\to -1}\frac{t+6}{2t^4} = \frac{-1+6}{2(-1)^4} = \frac{5}{2}$$

*La sustitución es válida cuando la función es **continua**, un concepto que se estudiará en la siguiente sección.*

EJEMPLO 2 Calcule **(a)** $\lim_{t\to -1}\dfrac{t+6}{2t^4}$ y **(b)** $\lim_{t\to 3} t^{-1/4}(t+5)^{1/3}$.

Solución

(a) Utilice las propiedades del cociente, de la suma y del múltiplo constante:

$$\lim_{t\to -1}\frac{t+6}{2t^4} = \frac{\lim_{t\to -1}(t+6)}{\lim_{t\to -1} 2t^4} = \frac{\lim_{t\to -1} t + \lim_{t\to -1} 6}{2\lim_{t\to -1} t^4} = \frac{-1+6}{2(-1)^4} = \frac{5}{2}$$

(b) Utilice las propiedades del producto, de las potencias y de la suma:

$$\lim_{t\to 3} t^{-1/4}(t+5)^{1/3} = \left(\lim_{t\to 3} t^{-1/4}\right)\left(\lim_{t\to 3} \sqrt[3]{t+5}\right) = \left(3^{-1/4}\right)\left(\sqrt[3]{\lim_{t\to 3} t+5}\right)$$

$$= 3^{-1/4}\sqrt[3]{3+5} = 3^{-1/4}\cdot 2 = \frac{2}{3^{1/4}}$$ ■

En el siguiente ejemplo se recuerda que la propiedad del producto sólo se puede aplicar cuando tanto el límite de $f(x)$ como el de $g(x)$ existen.

■ **EJEMPLO 3 Las hipótesis son importantes** Pruebe que la propiedad del producto no se puede aplicar a $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ si $f(x) = x$ y $g(x) = x^{-1}$.

Solución Para todo $x \neq 0$ se tiene $f(x)g(x) = x\cdot x^{-1} = 1$, por lo que el límite del producto existe:

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Sin embargo, $\lim_{x\to 0} x^{-1}$ no existe porque $g(x) = x^{-1}$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to 0+$, y tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0-$. Por tanto, la propiedad del producto no se puede aplicar y su conclusión no se cumple:

$$\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right) = \left(\lim_{x\to 0} x\right)\underbrace{\left(\lim_{x\to 0} x^{-1}\right)}_{\text{No existe}}$$ ■

2.3 RESUMEN

- Las propiedades básicas de los límites: si $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen, entonces

(i) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)\,g(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$

(iv) Si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$

(v) Si p, q son enteros con $q \neq 0$,

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{p/q} = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^{p/q}$$

Si n es un entero positivo,

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n, \qquad \lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

- Si $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$ no existen, entonces las propiedades básicas de los límites no se pueden aplicar.

2.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Enuncie la propiedad de la suma y la del cociente.

2. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones parafrasea la propiedad del producto? (suponiendo que los límites existan):

(a) El producto de dos funciones tiene un límite.

(b) El límite de un producto es el producto de los límites.

(c) El producto de un límite es un producto de funciones.

(d) Un límite produce un producto de funciones.

3. ¿Qué af rmación es correcta? La propiedad del cociente no se cumple si:

(a) El límite del denominador es cero.

(b) El límite del numerador es cero.

Problemas

En los problemas 1-24, evalúe el límite utilizando las propiedades básicas de los límites y los límites $\lim_{x\to c} x^{p/q} = c^{p/q}$ *y* $\lim_{x\to c} k = k$.

1. $\lim_{x\to 9} x$

2. $\lim_{x\to -3} 14$

3. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} x^4$

4. $\lim_{z\to 27} z^{2/3}$

5. $\lim_{t\to 2} t^{-1}$

6. $\lim_{x\to 5} x^{-2}$

7. $\lim_{x\to 0,2} (3x+4)$

8. $\lim_{x\to \frac{1}{3}} (3x^3+2x^2)$

9. $\lim_{x\to -1} (3x^4-2x^3+4x)$

10. $\lim_{x\to 8} (3x^{2/3}-16x^{-1})$

11. $\lim_{x\to 2} (x+1)(3x^2-9)$

12. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (4x+1)(6x-1)$

13. $\lim_{t\to 4} \dfrac{3t-14}{t+1}$

14. $\lim_{z\to 9} \dfrac{\sqrt{z}}{z-2}$

15. $\lim_{y\to \frac{1}{4}} (16y+1)(2y^{1/2}+1)$

16. $\lim_{x\to 2} x(x+1)(x+2)$

17. $\lim_{y\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{6y+1}}$

18. $\lim_{w\to 7} \dfrac{\sqrt{w+2}+1}{\sqrt{w-3}-1}$

19. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x}{x^3+4x}$

20. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^2+1}{(t^3+2)(t^4+1)}$

21. $\lim_{t\to 25} \dfrac{3\sqrt{t}-\frac{1}{5}t}{(t-20)^2}$

22. $\lim_{y\to \frac{1}{3}} (18y^2-4)^4$

23. $\lim_{t\to \frac{3}{2}} (4t^2+8t-5)^{3/2}$

24. $\lim_{t\to 7} \dfrac{(t+2)^{1/2}}{(t+1)^{2/3}}$

25. Aplique la propiedad del cociente para demostrar que si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es diferente de cero, entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to c} f(x)}$$

26. Suponiendo que $\lim_{x\to 6} f(x) = 4$, calcule:

(a) $\lim_{x\to 6} f(x)^2$ **(b)** $\lim_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **(c)** $\lim_{x\to 6} x\sqrt{f(x)}$

En los problemas 27-30, evalúe el límite suponiendo que $\lim_{x\to -4} f(x) = 3$ *y que* $\lim_{x\to -4} g(x) = 1$.

27. $\lim_{x\to -4} f(x)g(x)$

28. $\lim_{x\to -4} (2f(x)+3g(x))$

29. $\lim_{x\to -4} \dfrac{g(x)}{x^2}$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{f(x)+1}{3g(x)-9}$

31. ¿Se puede aplicar la propiedad del cociente para evaluar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$? Justif que su respuesta.

32. Muestre que la propiedad del producto no se puede utilizar para evaluar el límite $\lim_{x\to \pi/2} (x-\frac{\pi}{2}) \tan x$.

33. Proporcione un ejemplo en el que $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ exista, pero ni $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$ existan.

Problemas avanzados

34. Pruebe que si $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen, y $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe. *Indicación:* exprese $f(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{g(x)}$.

35. Suponga que $\lim_{t\to 3} tg(t) = 12$. Pruebe que $\lim_{t\to 3} g(t)$ existe y es igual a 4.

36. Demuestre que si $\lim_{t\to 3} \frac{h(t)}{t} = 5$, entonces $\lim_{t\to 3} h(t) = 15$.

37. Suponiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, ¿cuál de las siguientes af rmaciones es necesariamente cierta? ¿Por qué?

(a) $f(0) = 0$ **(b)** $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

38. Demuestre que si $\lim_{x\to c} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

39. Suponga que $\lim_{h\to 0} g(h) = L$.

(a) Explique por qué $\lim_{h\to 0} g(ah) = L$ para cualquier constante $a \neq 0$.

(b) Si la suposición fuera que $\lim_{h\to 1} g(h) = L$, ¿continúa siendo necesariamente cierto que $\lim_{h\to 1} g(ah) = L$?

(c) Ilustre (a) y (b) con la función $f(x) = x^2$.

40. Suponga que $L(a) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ existe para todo $a > 0$. Suponga también que $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.

(a) Demuestre que $L(ab) = L(a) + L(b)$ para $a, b > 0$. *Indicación:* $(ab)^x - 1 = a^x(b^x - 1) + (a^x - 1)$. Esto prueba que $L(a)$ "se comporta" como un logaritmo. En la sección 7.3 se verá que $L(a) = \ln a$.

(b) Compruebe numéricamente que $L(12) = L(3) + L(4)$.

2.4 Límites y continuidad

En el lenguaje cotidiano, el adjetivo "continuo" se aplica a algo que no sufre rupturas ni interrupciones. En el cálculo diferencial, la continuidad se usa para describir funciones cuyas gráficas no presentan cortes. Si imaginamos la gráfica de una función f como un alambre metálico ondulado, entonces f es continua si su gráfica está formada por una sola pieza de alambre, como en la figura 1. Un corte en el alambre como en la figura 2 se llama una **discontinuidad**.

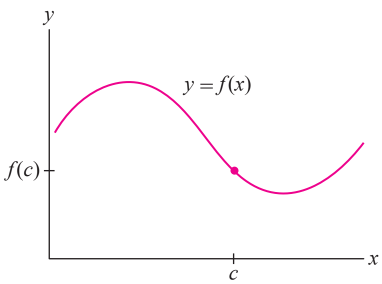


FIGURA 1 $f(x)$ es continua en $x = c$.

Observe ahora en la figura 2 que el salto en la gráfica ocurre porque los límites laterales cuando x tiende a c no son iguales y, por tanto, $\lim_{x\to c} g(x)$ no existe. Por el contrario, en la figura 1, $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual al valor de la función, $f(c)$. Esto sugiere la siguiente definición de continuidad en términos de límites.

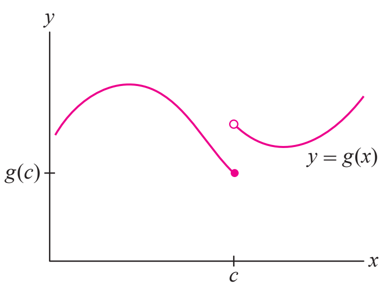


FIGURA 2 Discontinuidad en $x = c$: los límites laterales cuando $x \to c$ no son iguales.

DEFINICIÓN Continuidad en un punto Suponga que $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $x = c$. Entonces f es **continua** en $x = c$ si

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = f(c)}$$

Si el límite no existe, o bien existe pero no coincide con $f(c)$, se dice que f presenta una discontinuidad (o es **discontinua**) en $x = c$.

Una función $f(x)$ puede ser continua en algunos puntos y discontinua en otros. Si $f(x)$ es continua en todos los puntos de un intervalo I, entonces se dice que $f(x)$ es continua en I. Si I es un intervalo de la forma $[a, b]$ o bien $[a, b)$, que incluye el punto a como extremo inferior, entonces se exigirá que $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$. Análogamente, se exigirá que $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$ si I incluye a b como extremo superior. Si $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio, entonces $f(x)$ se denomina continua.

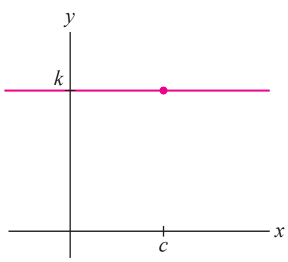


FIGURA 3 La función $f(x) = k$ es continua.

■ **EJEMPLO 1** Pruebe que las siguientes funciones son continuas:

(a) $f(x) = k$ (k una constante cualquiera)
(b) $g(x) = x^n$ (n un número entero positivo)

Solución

(a) Se tiene $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$ y $f(c) = k$. El límite existe y es igual al valor de la función para todo c, por lo que $f(x)$ es continua (figura 3).

(b) Según la ec. (1) de la sección 2.3, $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} x^n = c^n$ para todo c. Además $g(c) = c^n$ por lo que, de nuevo, el límite existe y es igual al valor de la función. De esta manera, $g(x)$ es continua. (La figura 4 ilustra el caso $n = 1$). ■

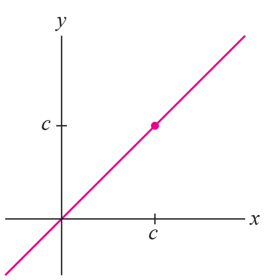


FIGURA 4 La función $g(x) = x$ es continua.

Ejemplos de discontinuidades

Para comprender mejor la continuidad, vamos a analizar diversas maneras en las que una función puede dejar de ser continua. Tenga presente que la continuidad en un punto requiere algo más que la existencia de un límite. Para que $f(x)$ sea continua en $x = c$, deben cumplirse tres condiciones:

1. $f(c)$ esté definida. **2.** $\lim_{x\to c} f(x)$ exista. **3.** Sean iguales.

Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe pero no es igual a $f(c)$, se dice que f presenta una **discontinuidad evitable** en $x = c$. La función de la figura 5(A) representa una discontinuidad evitable en $c = 2$ porque

$$\underbrace{f(2) = 10 \qquad \text{pero} \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 5}_{\text{El límite existe pero no es igual al valor de la función en el punto}}$$

Las discontinuidades evitables son "leves" en el sentido siguiente: se puede conseguir que f sea una función continua en $x = c$ redefiniendo $f(c)$. En la figura 5(B), el valor $f(2)$ ha sido redefinido como $f(2) = 5$ consiguiendo así que f sea continua en $x = 2$.

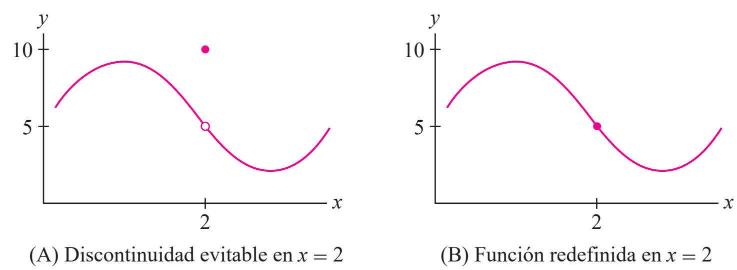


FIGURA 5 Función con una discontinuidad evitable: la discontinuidad puede eliminarse redefiniendo $f(2)$.

El "peor" tipo de discontinuidad es la **discontinuidad de salto**, que aparece cuando los límites laterales $\lim_{x \to c-} f(x)$ y $\lim_{x \to c+} f(x)$ existen pero no son iguales. La figura 6 muestra dos funciones con discontinuidades de salto en $c = 2$. Contrariamente al caso evitable, no es posible hacer $f(x)$ continua eligiendo un valor distinto para $f(c)$.

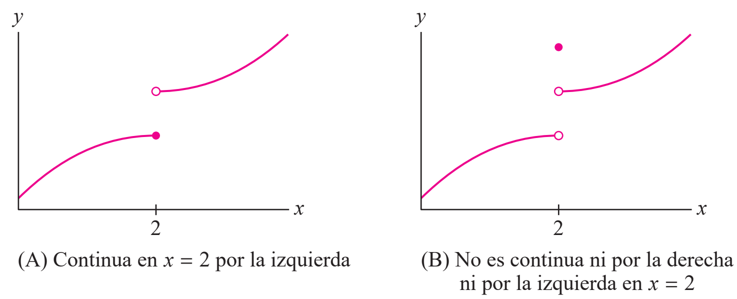


FIGURA 6 Discontinuidades de salto.

Al estudiar discontinuidades de salto, resulta conveniente definir la *continuidad lateral*.

DEFINICIÓN Continuidad lateral Se dice que una función $f(x)$ es:

- **Continua por la izquierda** en $x = c$ sii $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$
- **Continua por la derecha** en $x = c$ sii $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$

En la figura 6 anterior, la función representada en (A) es continua por la izquierda, pero la función representada en (B) no es continua por ninguno de los dos lados. El siguiente ejemplo analiza la continuidad lateral usando una función definida a trozos; es decir, una función definida por expresiones diferentes en intervalos diferentes.

EJEMPLO 2 Función definida a trozos Analice la continuidad de:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

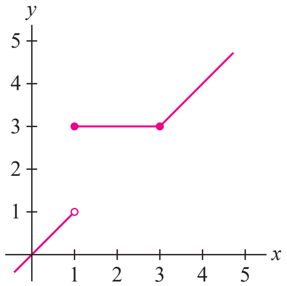


FIGURA 7 La función $F(x)$ definida a trozos en el ejemplo 2.

Solución Puesto que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3$ son continuas, $F(x)$ también es continua, excepto quizás en los puntos de transición $x = 1$ y $x = 3$, donde cambia la expresión que define $F(x)$ (figura 7).

- En $x = 1$, los límites laterales existen pero no son iguales:

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = \lim_{x\to 1-} x = 1, \qquad \lim_{x\to 1+} F(x) = \lim_{x\to 1+} 3 = 3$$

  Por tanto $F(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$. Sin embargo, el límite lateral por la derecha es igual al valor de la función $F(1) = 3$, por lo que $F(x)$ es *continua por la derecha* en $x = 1$.

- En $x = 3$, los límites laterales existen y son ambos iguales e iguales a $F(3)$, por lo que $F(x)$ es *continua* en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3-} F(x) = \lim_{x\to 3-} 3 = 3, \qquad \lim_{x\to 3+} F(x) = \lim_{x\to 3+} x = 3$$ ■

Se dice que $f(x)$ presenta una **discontinuidad infinita** en $x = c$ si uno o ambos límites laterales son infinitos (incluso si $f(x)$ no está definido en $x = c$). La figura 8 ilustra tres tipos de discontinuidades infinitas en $x = 2$. Observe que $x = 2$ no pertenece al dominio de la función en los casos (A) y (B).

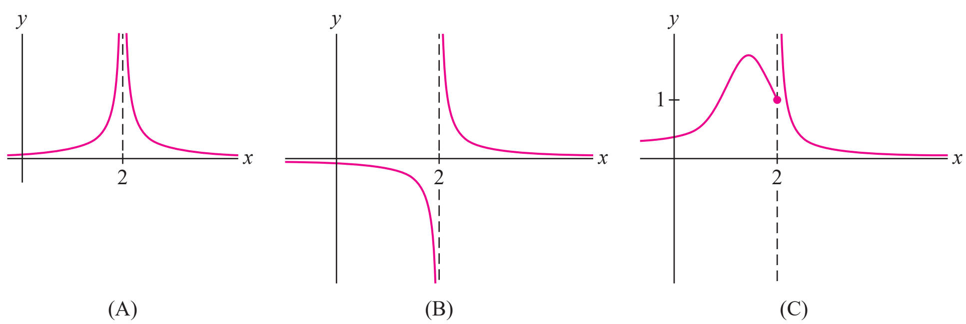


FIGURA 8 Funciones con una discontinuidad infinita en $x = 2$.

Algunas funciones presentan tipos de discontinuidades "peores" que las que se acaban de describir. Por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ oscila infinitas veces entre $+1$ y -1 cuando $x \to 0$ (figura 9). Ninguno de los dos límites laterales existe en $x = 0$; por este motivo, la discontinuidad no es de salto. Vea los problemas 88 y 89 para ejemplos todavía más extraños. Tales ejemplos de discontinuidades, pese a su interés teórico, no suelen darse en la práctica.

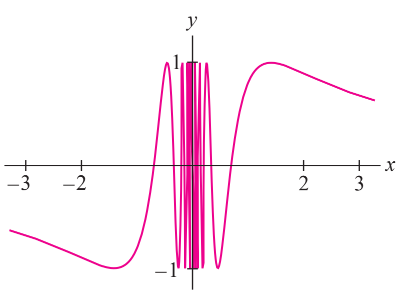


FIGURA 9 Gráfica de $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. La discontinuidad en $x = 0$ ni es de salto, ni evitable, ni infinita.

Construcción de funciones continuas

Después de haber visto algunos ejemplos de discontinuidades, se retoma el estudio de las funciones continuas. ¿Cómo se puede demostrar que una función es continua? Una manera de hacerlo es usar las siguientes **propiedades de la continuidad**, según las cuales, y dicho de modo informal, una función es continua si está construida a partir de funciones cuya continuidad es conocida.

TEOREMA 1 Propiedades de la continuidad Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en $x = c$:

(i) $f(x) + g(x)$ y $f(x) - g(x)$ **(iii)** $f(x)\,g(x)$
(ii) $k\,f(x)$ para cualquier constante k **(iv)** $f(x)/g(x)$ si $g(c) \neq 0$

Demostración Estas propiedades se deducen directamente de las propiedades correspondientes de los límites (teorema 1, sección 2.3). Lo ilustraremos demostrando la primera parte de (i) en detalle. Las otras propiedades se demuestran de manera similar. Por definición, se debe demostrar que $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = f(c) + g(c)$. Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = c$, se tiene

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c), \qquad \lim_{x\to c} g(x) = g(c)$$

La propiedad de la suma para límites proporciona el resultado:

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = f(c) + g(c)$$ ■

En la sección 2.3 se comentó que la propiedad de la suma y la del producto para límites son válidas para sumas y productos de cualquier número de funciones. Lo mismo sucede con la continuidad; es decir, si $f_1(x), \dots, f_n(x)$ son continuas, entonces también lo son las siguientes funciones:

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \qquad f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$$

Las funciones básicas son continuas sobre sus dominios. Recuerde (sección 1.3) que el término *función básica* se ref ere a los polinomios, las funciones racionales, las raíces n-ésimas y las funciones algebraicas, las funciones trigonométricas y sus inversas, y las funciones exponenciales y logarítmicas.

Cuando una función $f(x)$ está definida y es continua en todos los valores de x, se dice que $f(x)$ es ***continua en la recta real.***

RECORDATORIO *Una "función racional" es un cociente de dos polinomios $P(x)/Q(x)$.*

TEOREMA 2 Continuidad de las funciones polinómicas y racionales Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Entonces:

- $P(x)$ es continua en la recta real.
- $P(x)/Q(x)$ es continua en su dominio (todos aquellos valores $x = c$ tales que $Q(c) \neq 0$).

Demostración La función x^m es continua para todo entero positivo m según el ejemplo 1. Por la propiedad (ii) de continuidad, ax^m es continua para cualquier constante a. Un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es una suma de funciones continuas, por lo que es también continuo. Por la propiedad (iv) de continuidad, un cociente $P(x)/Q(x)$ es continuo en $x = c$, siempre que $Q(c) \neq 0$. ■

Este resultado implica, por ejemplo, que $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 8x$ sea continua para todo x y que

$$g(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

sea continua para $x \neq \pm 1$. Además, si n es un número entero positivo, entonces $f(x) = x^{-n}$ es continua para $x \neq 0$, ya que $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$ es una función racional.

La continuidad de la raíz n-ésima, de las funciones trigonométricas y de las funciones exponenciales no debe resultar sorprendente, porque sus gráf cas no presentan cortes visibles (f gura 10). De manera análoga, las funciones logarítmicas (que se introducirán en la sección 7.2) son continuas. Sin embargo, las demostraciones completas de la continuidad son algo técnicas y se han omitido.

RECORDATORIO *El dominio de $y = x^{1/n}$ es la recta real si n es impar, y la semirecta $[0, \infty)$ si n es par.*

TEOREMA 3 Continuidad de algunas funciones básicas

- $y = x^{1/n}$ es continua sobre su dominio, para n un número entero positivo.
- $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ son continuas sobre la recta real.
- $y = b^x$ es continua sobre la recta real (para $b > 0$, $b \neq 1$).
- $y = \log_b x$ es continua para $x > 0$ (para $b > 0$, $b \neq 1$).

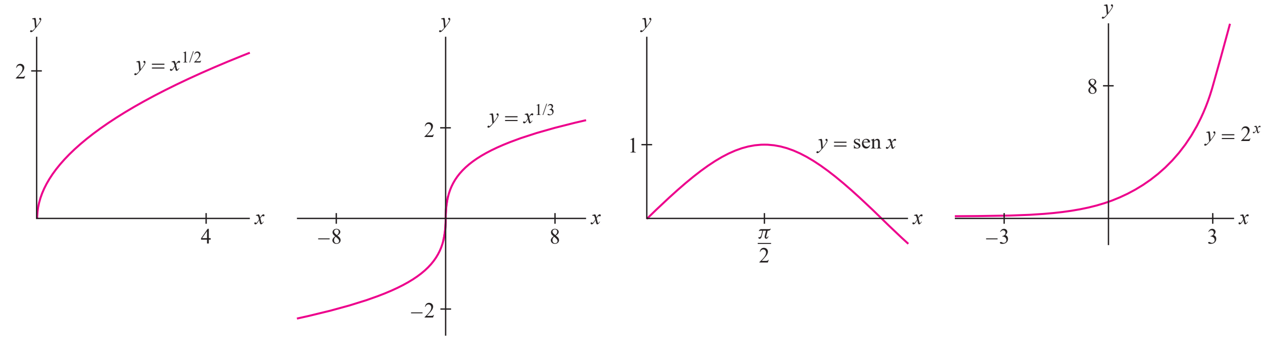


FIGURA 10 Tal como sugieren sus gráf cas, estas funciones son continuas en sus dominios respectivos.

Dado que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas, la propiedad (iv) de la continuidad para los cocientes implica que las otras funciones trigonométricas básicas también son continuas en sus dominios; es decir, en todos los valores de x donde sus denominadores son distintos de cero:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

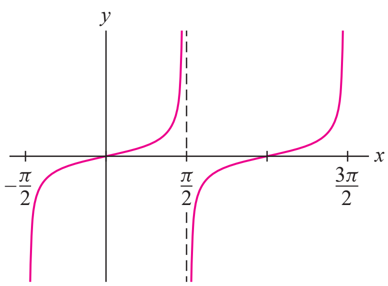


FIGURA 11 Gráf ca de $y = \tan x$.

Aparecen discontinuidades inf nitas en los puntos donde los denominadores se anulan. Por ejemplo, $\tan x$ tiene discontinuidades inf nitas en los puntos (f gura 11):

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\frac{3\pi}{2}, \quad \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Finalmente, es importante saber que la composición de funciones continuas da como resultado funciones continuas. El siguiente teorema se demuestra en el apéndice D.

TEOREMA 4 Continuidad de las funciones compuestas Si g es continua en $x = c$ y f es continua en $x = g(c)$, entonces la función compuesta $F(x) = f(g(x))$ es continua en $x = c$.

Por ejemplo, $F(x) = (x^2 + 9)^{1/3}$ es continua por ser la composición de las funciones continuas $f(x) = x^{1/3}$ y $g(x) = x^2 + 9$. De manera similar, la función $F(x) = \cos(x^{-1})$ es continua para todo $x \neq 0$ y $F(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$ es continua para todo x.

En general, una **función elemental** es una función que se construye a partir de diferentes funciones básicas mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición. Como las funciones básicas son continuas (sobre sus dominios), una función elemental es también continua por las propiedades de continuidad. Un ejemplo de función elemental es:

$$F(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2 + \cos(2^x + 9)}{x - 8}\right)$$

Esta función es continua sobre su dominio $\{x : x \neq 8\}$.

Sustitución: cálculo de límites usando la continuidad

Es muy fácil calcular un límite cuando la función implicada es continua. En ese caso, por def nición, el límite es igual al valor de la función:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Esta operación se llama **método de sustitución**, porque el límite se calcula sustituyendo x por c.

■ **EJEMPLO 3** Calcule **(a)** $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} y$ y **(b)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3^x}{\sqrt{x+5}}$.

Solución

(a) Se puede utilizar el método de sustitución, porque la función $f(y) = \operatorname{sen} y$ es continua.

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) La función $f(x) = 3^x/\sqrt{x+5}$ es continua en $x = -1$ porque su numerador y su denominador son funciones continuas en $x = -1$, y el denominador $\sqrt{x+5}$ es distinto de cero en $x = -1$. Por tanto, se puede calcular ese límite por sustitución:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3^x}{\sqrt{x+5}} = \frac{3^{-1}}{\sqrt{-1+5}} = \frac{1}{6}$$ ■

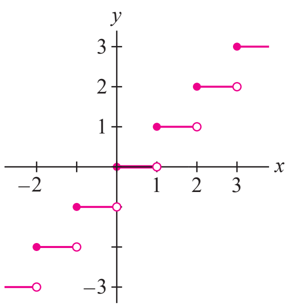


FIGURA 12 Gráf ca de $f(x) = [x]$.

La **función parte entera** $[x]$ es la función que se def ne por $[x] = n$, donde n es el único entero tal que $n \le x < n+1$ [f gura 12]. Por ejemplo, $[4{,}7] = 4$.

■ **EJEMPLO 4** **Las hipótesis son importantes** ¿Se puede usar sustitución para calcular $\lim\limits_{x\to 2}[x]$?

Solución No se puede utilizar sustitución porque $f(x) = [x]$ no es continua en $x = 2$. Aunque $f(2) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ no existe porque los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 2+} [x] = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2-} [x] = 1$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL Modelización mediante funciones continuas Las funciones continuas se usan muy a menudo para representar magnitudes físicas como la velocidad, la temperatura o el voltaje. Este hecho ref eja nuestra experiencia cotidiana de que los cambios de nuestro entorno suelen suceder de modo continuo y no con transiciones abruptas. No obstante, los modelos matemáticos son solamente aproximaciones de la realidad, y es importante ser conscientes de sus limitaciones.

Por ejemplo, en la f gura 13, se representa la temperatura atmosférica como una función continua de la altitud. Esta representación es válida a una escala tan amplia como la atmósfera terrestre, puesto que las lecturas en un termómetro van variando de manera continua a medida que cambia la altitud. Sin embargo, la temperatura es una medida de la energía cinética media de las moléculas. A nivel microscópico, no tendría sentido tratar la temperatura como una cantidad que varía de forma continua de punto a punto.

La población es otra variable que se suele manejar como una función continua del tiempo. El tamaño $P(t)$ de una población en un instante t es un número entero que varía en ± 1 cada vez que una persona nace o muere. Por tanto, en sentido estricto, $P(t)$ no es continua. Ahora bien, si la población es muy grande, entonces el efecto de un nacimiento o una defunción es negligible y, en consecuencia, es razonable tratar $P(t)$ como una función continua del tiempo.

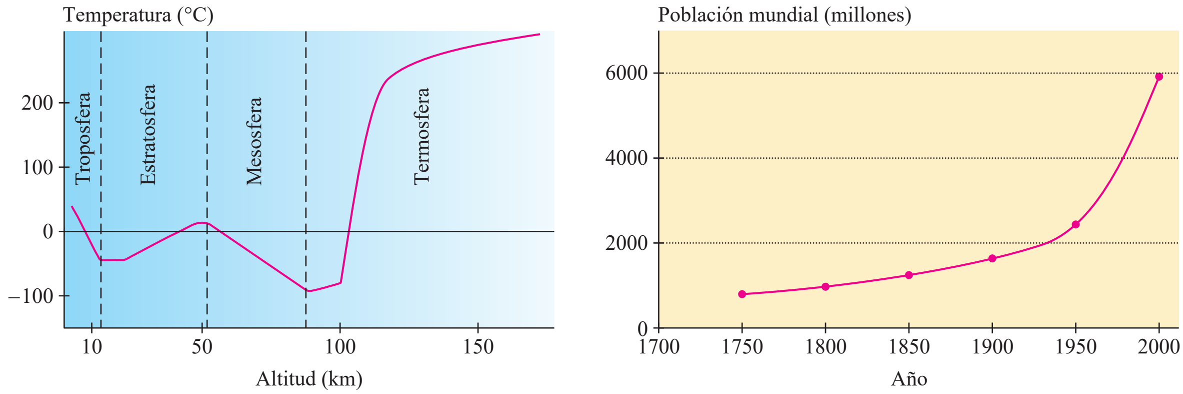


FIGURA 13 La temperatura atmosférica y la población mundial se representan mediante funciones continuas.

2.4 RESUMEN

- Definición: $f(x)$ es *continua* en $x = c$ si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- Si $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, o si existe pero no es igual a $f(c)$, entonces f es *discontinua* en $x = c$.
- Si $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio, se dice simplemente que f es *continua*.
- *Continua por la derecha* en $x = c$: $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$.
- *Continua por la izquierda* en $x = c$: $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$.
- Existen tres tipos frecuentes de discontinuidades: *discontinuidad evitable* $[\lim_{x\to c} f(x)$ existe pero no coincide con $f(c)]$, *discontinuidad de salto* (los límites laterales existen pero son distintos) y *discontinuidad infinita* (el límite es infinito cuando x tiende a c por un lado o por ambos lados).
- Propiedades de la continuidad: sumas, productos, múltiplos y composiciones de funciones continuas son funciones continuas. Lo mismo ocurre para un cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en los puntos donde $g(x) \neq 0$.
- Funciones básicas: polinomios, funciones racionales, raíces n–ésimas y funciones algebraicas, funciones trigonométricas y sus inversas, funciones exponenciales y logarítmicas. Las funciones básicas son continuas en sus dominios.
- Método de sustitución: si $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces el valor del límite $\lim_{x\to c} f(x)$ es $f(c)$.

2.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué propiedad de $f(x) = x^3$ permite afirmar que $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$?

2. ¿Qué se puede decir de $f(3)$ si f es continua y $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{2}$?

3. Suponga que $f(x) < 0$ si x es positivo, y $f(x) > 1$ si x es negativo. ¿Puede ser f continua en $x = 0$?

4. ¿Se puede determinar $f(7)$ si $f(x) = 3$ para todo $x < 7$ y f es continua por la derecha en $x = 7$? ¿Y si f fuera continua por la izquierda?

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Enuncie correctamente las que sean falsas.

(a) $f(x)$ es continua en $x = a$ si los dos límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to a$ existen y son iguales.

(b) $f(x)$ es continua en $x = a$ si los dos límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to a$ existen y son iguales a $f(a)$.

(c) Si existen los dos límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to a$, entonces f tiene una discontinuidad evitable en $x = a$.

(d) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces $f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.

(e) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces $f(x)/g(x)$ es continua en $x = a$.

Problemas

1. En referencia a la figura 14, determine si $f(x)$ es continua por la derecha o por la izquierda (o ninguna de las dos cosas) en cada punto de discontinuidad. ¿Presenta $f(x)$ alguna discontinuidad evitable?

Los problemas 2-4 se refieren a la función $g(x)$ de la figura 15.

2. Determine si $g(x)$es continua por la derecha o por la izquierda (o ninguna de las dos cosas) en cada punto de discontinuidad.

3. ¿En qué punto c presenta $g(x)$ una discontinuidad evitable? ¿Qué valor habría que asignar a $g(c)$ para que g fuese continua en $x = c$?

4. Halle el punto c_1 en que $g(x)$ presenta una discontinuidad de salto pero es continua por la izquierda. ¿Qué valor habría que asignar a $g(c_1)$ para que g fuese continua por la derecha en $x = c_1$?

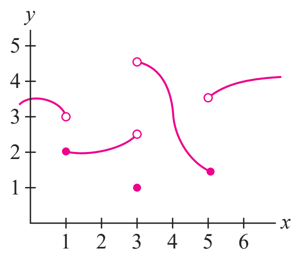


FIGURA 14 Gráfica de $y = f(x)$.

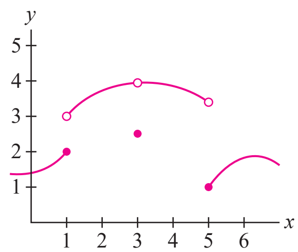


FIGURA 15 Gráfica de $y = g(x)$.

5. En la figura 16, determine los límites laterales en los puntos de discontinuidad. ¿Cuál de esos puntos de discontinuidad es evitable? ¿Cómo habría que redefinir f para que fuese continua en ese punto?

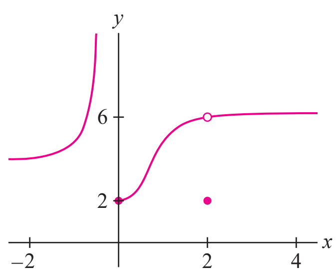


FIGURA 16

6. Suponga que $f(x) = 2$ para $x < 3$ y $f(x) = -4$ para $x > 3$.

(a) ¿A qué es igual $f(3)$ si f es continua por la izquierda en $x = 3$?

(b) ¿A qué es igual $f(3)$ si f es continua por la derecha en $x = 3$?

En los problemas 7-16, aplique las propiedades de la continuidad y los teoremas 2 y 3 para probar que la función es continua.

7. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

8. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

9. $f(x) = 3x + 4 \operatorname{sen} x$

10. $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 20x$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2 - \cos x}{3 + \cos x}$

13. $f(x) = \cos(x^2)$

14. $f(x) = \tan(4^x)$

15. $f(x) = 2^x \cos 3x$

16. $f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$

En los problemas 17-34, determine los puntos de discontinuidad (evitable, salto infinito o ninguna de éstas) y si la función es continua por la derecha o por la izquierda.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

18. $f(x) = |x|$

19. $f(x) = \dfrac{x - 2}{|x - 1|}$

20. $f(x) = [x]$

21. $f(x) = \left[\dfrac{1}{2}x\right]$

22. $g(t) = \dfrac{1}{t^2 - 1}$

23. $f(x) = \dfrac{x + 1}{4x - 2}$

24. $h(z) = \dfrac{1 - 2z}{z^2 - z - 6}$

25. $f(x) = 3x^{2/3} - 9x^3$

26. $g(t) = 3t^{-2/3} - 9t^3$

27. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} & x \neq 2 \\ -1 & x = 2 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

29. $g(t) = \tan 2t$

30. $f(x) = \csc(x^2)$

31. $f(x) = \tan(\operatorname{sen} x)$

32. $f(x) = \cos(\pi[x])$

33. $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 2^{-x}}$

34. $f(x) = 2[x/2] - 4[x/4]$

En los problemas 35-48, determine el dominio de la función y demuestre que es continua en todo su dominio usando las propiedades de la continuidad y los resultados citados en esta sección.

35. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

36. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

37. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

38. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + x^{1/4}}$

39. $f(x) = x^{2/3} 2^x$

40. $f(x) = x^{1/3} + x^{3/4}$

41. $f(x) = x^{-4/3}$

42. $f(x) = \cos^3 x$

43. $f(x) = \tan^2 x$

44. $f(x) = \cos(2^x)$

45. $f(x) = (x^4 + 1)^{3/2}$

46. $f(x) = 3^{-x^2}$

47. $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x^2 - 1}$

48. $f(x) = 9^{\tan x}$

49. Pruebe que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 1 \\ 10 - x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 6x - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es continua para $x \neq 1, 2$. A continuación, calcule los límites laterales por la derecha y por la izquierda en $x = 1$, y en $x = 2$, y establezca si la función $f(x)$ es continua por la izquierda, por la derecha, o continua en estos puntos (figura 17).

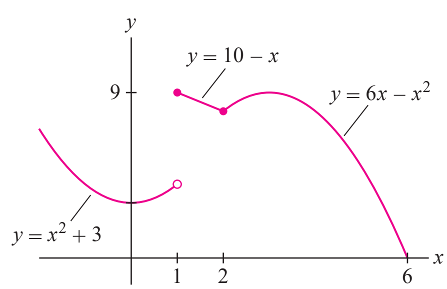


FIGURA 17

50. La función dientes de sierra Dibuje la gráfca de $f(x) = x - [x]$. ¿En qué puntos es f discontinua? En esos puntos, ¿es f continua por la derecha o por la izquierda?

En los problemas 51-54, dibuje la gráfca de $f(x)$. En cada punto de discontinuidad, determine si f es continua por la derecha o por la izquierda.

51. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

53. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 2|} & x \ne 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } -\infty < x \le 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -x^2 + 10x - 15 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

55. Demuestre que la función defnida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & x \ne 4 \\ 10 & x = 4 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad evitable en $x = 4$.

56. GU Sea $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + 2$ para $x \ne 0$. Represente gráfcamente $f(x)$. ¿Cómo se debería defnir $f(0)$para que f sea continua en $x = 0$?

En los problemas 57-59, halle el valor de las constantes (a, b o c) para los que la función sea continua.

57. $f(x) = \begin{cases} x^2 - c & \text{si } x < 5 \\ 4x + 2c & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

58. $f(x) = \begin{cases} 2x + 9x^{-1} & \text{si } x \le 3 \\ -4x + c & \text{si } x > 3 \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x \le \frac{1}{2} \\ x^{-1} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

60. Sea:

$$g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -1 \\ cx & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halle un valor de c para el que $g(x)$ sea:

(a) continua por la izquierda **(b)** continua por la derecha

En cada caso, dibuje la gráfca de $g(x)$.

61. Sea $g(t) = 2^{1/(t-1)}$ para $t \ne 1$. Responda a las siguientes preguntas, utilizando una representación gráfca si fuera necesario:

(a) ¿Se puede defnir $g(1)$ de tal manera que $g(t)$ sea continua en $t = 1$?

(b) ¿Cómo se podría defnir $g(1)$ de tal manera que $g(t)$ fuese continua por la izquierda en $t = 1$?

62. Cada una de las siguientes afrmaciones es *falsa*. Para cada una de ellas, dibuje la gráfca de una función que proporcione un contraejemplo.

(a) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

(b) Si $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = a$, entonces $f(a)$ es igual o bien a $\lim_{x\to a-} f(x)$, o bien a $\lim_{x\to a+} f(x)$.

En los problemas 63-66, dibuje la gráfca de una función en $[0, 5]$ que tenga las propiedades indicadas.

63. $f(x)$ no es continua en $x = 1$, pero $\lim_{x\to 1+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1-} f(x)$ existen y son iguales.

64. $f(x)$ es continua por la izquierda pero no es continua en $x = 2$, y es continua por la derecha pero no es continua en $x = 3$.

65. $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$, una discontinuidad de salto en $x = 2$ y además:

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3+} f(x) = 2$$

66. $f(x)$ es continua por la derecha pero no por la izquierda en $x = 1$, continua por la izquierda pero no por la derecha en $x = 2$, y no es continua por la derecha ni por la izquierda en $x = 3$.

En los problemas 67-80, calcule el límite por el método de sustitución.

67. $\lim_{x\to -1} (2x^3 - 4)$

68. $\lim_{x\to 2} (5x - 12x^{-2})$

69. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x}$

70. $\lim_{x\to \pi} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} - \pi\right)$

71. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan(3x)$

72. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1}{\cos x}$

73. $\lim_{x\to 4} x^{-5/2}$

74. $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^3 + 4x}$

75. $\lim_{x\to -1} (1 - 8x^3)^{3/2}$

76. $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{7x + 2}{4 - x}\right)^{2/3}$

77. $\lim_{x\to 3} 10^{x^2 - 2x}$

78. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} 3^{\operatorname{sen} x}$

79. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2(\pi \operatorname{sen}^2 x)$

80. $\lim_{x\to 1} \tan\left(e^{x-1}\right)$

81. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas en $x = c$. ¿Debe ser, en consecuencia, $f(x) + g(x)$ también discontinua en $x = c$? En caso negativo, proporcione un contraejemplo. ¿Existe contradicción con el teorema 1 (i)?

82. Demuestre que $f(x) = |x|$ es continua para todo x. *Indicación:* para demostrar la continuidad en $x = 0$, considere los límites laterales.

83. Utilice el resultado del problema 82 para demostrar que si $g(x)$ es continua, entonces $f(x) = |g(x)|$ también es continua.

84. ¿Cuál de las siguientes cantidades se representaría mediante una función continua en el tiempo, y cuál presentaría una o más discontinuidades?

(a) Velocidad de un avión durante un vuelo.

(b) Temperatura en una habitación bajo condiciones estándar.

(c) Saldo de una cuenta bancaria con un interés que se abona anualmente.

(d) El salario de un profesor.

(e) La población mundial.

85. En 2009, el impuesto federal sobre la renta $T(x)$ sobre unos ingresos de x dólares (hasta 82 250 \$) se determinaba por la fórmula:

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}10x & \text{si } 0 \le x < 8350 \\ 0{,}15x - 417{,}50 & \text{si } 8350 \le x < 33\ 950 \\ 0{,}25x - 3812{,}50 & \text{si } 33\ 950 \le x < 82\ 250 \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $T(x)$. ¿Presenta $T(x)$ alguna discontinuidad? Explique por qué si $T(x)$ tuviera una discontinuidad de salto, sería ventajoso en determinadas circunstancias ganar *menos* dinero.

Problemas avanzados

86. Si $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = c$, entonces se puede redefinir $f(c)$ de manera que $f(x)$ sea continua en $x = c$. ¿Puede definirse $f(c)$ de más de una manera?

87. Proporcione un ejemplo de funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(g(x))$ sea continua, pero $g(x)$ presente al menos una discontinuidad.

88. Una función que sólo es continua en un punto Pruebe que la siguiente función únicamente es continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ racional} \\ -x & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$$

89. Pruebe que $f(x)$ es una función discontinua para todo x, donde $f(x)$ se define según:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Pruebe que $g(x) = (f(x))^2$ es continua para todo x.

2.5 Cálculo algebraico de límites

El método de sustitución se puede utilizar para evaluar límites cuando la función en cuestión es continua. Por ejemplo, $f(x) = x^{-2}$ es continua en $x = 3$ y por tanto:

$$\lim_{x\to 3} x^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Cuando se estudien las derivadas en el capítulo 3, se considerarán límites $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ donde $f(c)$ no esté definido. En tales casos, no es posible usar la sustitución directamente. No obstante, algunos de esos límites pueden calcularse por sustitución después de llevar a cabo una manipulación algebraica en la expresión de $f(x)$.

Para ilustrar este proceder (figura 1) considere el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

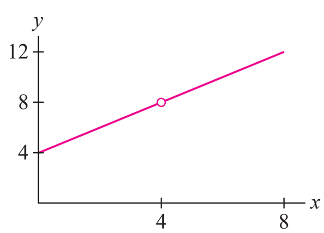


FIGURA 1 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$.
Esta función no está definida en $x = 4$, pero el límite cuando $x \to 4$ existe.

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ no está definida en $x = 4$, pues al sustituir x por 4, se obtiene la expresión indefinida $0/0$. Sin embargo, el numerador de $f(x)$ se puede factorizar:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x - 4} = x + 4 \quad (\text{válida para } x \ne 4)$$

En otras palabras, $f(x)$ coincide con la función *continua* $x + 4$ para todo $x \ne 4$. Puesto que el límite sólo depende de los valores de $f(x)$ para $x \ne 4$, se cumple:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \underbrace{\lim_{x\to 4}(x + 4) = 8}_{\text{Cálculo por sustitución}}$$

Se dice que $f(x)$ presenta una **indeterminación** (o que es **indeterminada**) en $x = c$, si la fórmula para $f(c)$ da lugar a una expresión indefnida del tipo:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty$$

Otras formas indeterminadas son 1^∞, ∞^0 y 0^0. Éstas se tratan en la sección 7.7.

La estrategia será *transformar $f(x)$ algebraicamente, siempre que esto sea posible, en una nueva expresión que esté defnida y sea continua en $x = c$, con el propósito de efectuar el cálculo por sustitución.* Al estudiar los siguientes ejemplos, hay que fjarse en que el paso clave es siempre la simplifcación de un factor común del numerador y del denominador en el momento apropiado, con lo cual se elimina la indeterminación.

■ **EJEMPLO 1** Calcule $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12}$.

Solución Esta función presenta una indeterminación del tipo $0/0$ en $x = 3$, pues:

Numerador en $x = 3$: $\quad 3^2 - 4(3) + 3 = 0$

Denominador en $x = 3$: $\quad 3^2 + 3 - 12 = 0$

Etapa 1. **Transformación algebraica y simplifcación**

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12} = \underbrace{\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+4)}}_{\text{Suprima el factor común}} = \underbrace{\frac{x-1}{x+4}}_{\text{Continua en } x = 3} \quad (\text{si } x \neq 3) \qquad \boxed{1}$$

Etapa 2. **Sustitución (evaluación por continuidad)**

Como la expresión de la derecha en ec. (1) es *continua* en $x = 3$,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12} = \underbrace{\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x+4} = \frac{2}{7}}_{\text{Cálculo por sustitución}}$$ ■

■ **EJEMPLO 2 La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$** Calcule $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\sec x}$.

Solución Tal y como se observa en la fgura 2, tanto $\tan x$ como $\sec x$ presentan una discontinuidad infnita en $x = \frac{\pi}{2}$, por lo que el límite da lugar a una indeterminación del tipo ∞/∞ en $x = \frac{\pi}{2}$.

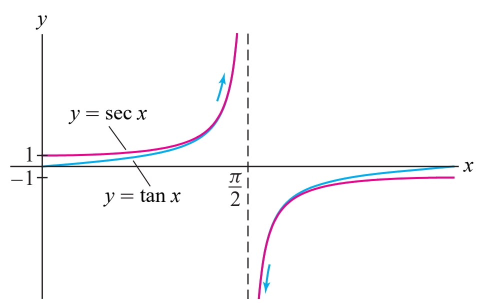


FIGURA 2

Etapa 1. **Transformación algebraica y simplifcación**

$$\frac{\tan x}{\sec x} = \frac{(\operatorname{sen} x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \operatorname{sen} x \quad (\text{si } \cos x \neq 0)$$

Etapa 2. **Sustitución (evaluación por continuidad)**

Como sen x es continua,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$ ■

El siguiente ejemplo ilustra la técnica algebraica de "multiplicar por el conjugado", que se puede utilizar para resolver ciertas indeterminaciones donde aparecen raíces cuadradas.

■ **EJEMPLO 3** **Multiplicación por el conjugado** Calcule $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Solución En primer lugar, se puede comprobar que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ presenta una indeterminación del tipo $0/0$ en $x = 4$:

Observe que, en el paso 1, el conjugado de $\sqrt{x}-2$ es $\sqrt{x}+2$, por lo que $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = x-4$.

Numerador en $x = 4$: $\sqrt{4}-2 = 0$

Denominador en $x = 4$: $4-4 = 0$

Etapa 1. **Multiplicación por el conjugado y simplif cación**

$$\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \qquad (\text{si } x \neq 4)$$

Etapa 2. **Sustitución (evaluación por continuidad)**

Como $1/(\sqrt{x}+2)$ es continua en $x = 4$, tendremos:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$ ■

■ **EJEMPLO 4** Calcule $\lim_{h\to 5} \dfrac{h-5}{\sqrt{h+4}-3}$.

Solución Observe que $f(h) = \dfrac{h-5}{\sqrt{h+4}-3}$ da lugar a la indeterminación $0/0$ en $h = 5$:

Numerador en $h = 5$: $5-5 = 0$

Denominador en $h = 5$: $\sqrt{5+4}-3 = 0$

El conjugado de $\sqrt{h+4}-3$ es $\sqrt{h+4}+3$, luego:

$$\frac{h-5}{\sqrt{h+4}-3} = \left(\frac{h-5}{\sqrt{h+4}-3}\right)\left(\frac{\sqrt{h+4}+3}{\sqrt{h+4}+3}\right) = \frac{(h-5)(\sqrt{h+4}+3)}{(\sqrt{h+4}-3)(\sqrt{h+4}+3)}$$

El denominador es igual a:

$$(\sqrt{h+4}-3)(\sqrt{h+4}+3) = (\sqrt{h+4})^2 - 9 = h-5$$

De esta manera, si $h \neq 5$, se obtiene:

$$f(h) = \frac{h-5}{\sqrt{h+4}-3} = \frac{(h-5)(\sqrt{h+4}+3)}{h-5} = \sqrt{h+4}+3$$

Finalmente:

$$\lim_{h\to 5} \frac{h-5}{\sqrt{h+4}-3} = \lim_{h\to 5} (\sqrt{h+4}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$ ■

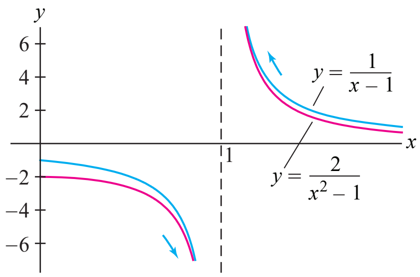


FIGURA 3

■ **EJEMPLO 5 La indeterminación $\infty - \infty$** Calcule $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$.

Solución Tal y como se observa en la figura 3, tanto $\frac{1}{x-1}$ como $\frac{2}{x^2-1}$ presentan una discontinuidad infinita en $x = 1$, por lo que el límite da lugar a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Etapa 1. **Transformación algebraica y simplificación**

Combine las fracciones y simplifique (para $x \neq 1$):

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

Etapa 2. **Sustitución (evaluación por continuidad)**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ ■

En el siguiente ejemplo, la función presenta la expresión indefinida $a/0$, con a diferente de cero. *No* se trata de una indeterminación (no es de la forma $0/0$, ∞/∞, etc.).

■ **EJEMPLO 6 Infinita pero no indeterminada** Calcule $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x + 5}{x-2}$.

Solución La función $f(x) = \frac{x^2-x+5}{x-2}$ no está definida en $x = 2$, porque la expresión para $f(2)$ da lugar a $7/0$:

Numerador en $x = 2$: $2^2 - 2 + 5 = 7$

Denominador en $x = 2$: $2 - 2 = 0$

Pero $f(x)$ *no está indeterminada* en $x = 2$ porque $7/0$ no es una indeterminación. La figura 4 muestra que los límites laterales son infinitos:

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-x+5}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2+}\frac{x^2-x+5}{x-2} = +\infty$$

El límite no existe. ■

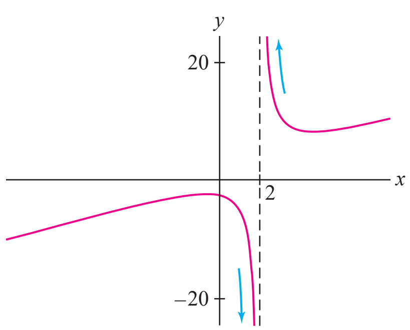


FIGURA 4 Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-x+5}{x-2}$.

Como preparativo para introducir la derivada en el capítulo 3, a continuación se va a calcular un límite que incluya una constante simbólica.

■ **EJEMPLO 7 Constante simbólica** Calcule $\lim_{h\to 0}\frac{(h+a)^2 - a^2}{h}$, donde a es una constante.

Solución Se obtiene una indeterminación del tipo $0/0$ en $h = 0$, ya que:

Numerador en $h = 0$: $(h+a)^2 - a^2 = (0+a)^2 - a^2 = 0$

Denominador en $h = 0$: $h = 0$

Desarrolle el numerador y simplifique (para $h \neq 0$):

$$\frac{(h+a)^2 - a^2}{h} = \frac{(h^2 + 2ah + a^2) - a^2}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} = \frac{h(h+2a)}{h} = h + 2a$$

La función $h + 2a$ es continua (para cualquier constante a), por lo que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(h+a)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(h + 2a) = 2a$$ ■

2.5 RESUMEN

- Si $f(x)$ es continua en $x = c$, se puede calcular el límite por sustitución: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- Se dice que $f(x)$ es *indeterminada* (o que presenta una *indeterminación*) en $x = c$, si al calcular $f(c)$ se obtiene una expresión del tipo:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty$$

- Si $f(x)$ es indeterminada en $x = c$, intente realizar una manipulación algebraica para transformar $f(x)$ en una nueva expresión que esté def nida y sea continua en $x = c$. A continuación, calcule el límite por el método de sustitución.

2.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes funciones presenta una indeterminación en $x = 1$?

$$\frac{x^2+1}{x-1} \qquad \frac{x^2-1}{x+2} \qquad \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad \frac{x^2+1}{\sqrt{x+3}-2}$$

2. Proporcione contraejemplos que evidencien que los siguientes enunciados son falsos:

(a) Si $f(c)$ queda indeterminado, entonces los límites laterales cuando $x \to c$ son distintos.

(b) Si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, entonces $f(c)$ no está indeterminado.

(c) Si $f(x)$ no está def nida en $x = c$, entonces $f(x)$ queda indeterminada en $x = c$.

3. El método de cálculo de límites estudiado en esta sección se denomina, en ocasiones, de "simplif cación y sustitución". Explique por qué, en realidad, depende de la propiedad de continuidad.

Problemas

En los problemas 1-4, pruebe que los límites propuestos conducen a una indeterminación. A continuación lleve a cabo los dos pasos siguientes: transforme algebraicamente la función y evalúe por continuidad.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 6} \frac{x^2-36}{x-6}$

2. $\displaystyle\lim_{h\to 3} \frac{9-h^2}{h-3}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$

4. $\displaystyle\lim_{t\to 9} \frac{2t-18}{5t-45}$

En los problemas 5-34, calcule el límite, si existe. En caso negativo, determine si los límites laterales existen (f nitos o inf nitos).

5. $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{x^2-49}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x^2-64}{x-9}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x^3-64x}{x-8}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$

10. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{h}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2x^2+3x+1}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x}{x^2-9}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-4}{2x^2-8}$

14. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^3-27}{h}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{4^{2t}-1}{4^t-1}$

16. $\displaystyle\lim_{h\to 4} \frac{(h+2)^2-9h}{h-4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

18. $\displaystyle\lim_{t\to -2} \frac{2t+4}{12-3t^2}$

19. $\displaystyle\lim_{y\to 3} \frac{y^2+y-12}{y^3-10y+3}$

20. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(h+2)^2}-\frac{1}{4}}{h}$

21. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-2}{h}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-\sqrt{8-x}}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5-x}-1}{2-\sqrt{x}}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\csc x}$

28. $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot\theta}{\csc\theta}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 2} \frac{2^{2t}+2^t-20}{2^t-4}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\tan x-1}$

32. $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} (\sec\theta-\tan\theta)$

33. $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\tan\theta-1}-\frac{2}{\tan^2\theta-1}\right)$

34. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^2 x+3\cos x-2}{2\cos x-1}$

35. GU Utilice una representación gráf ca de $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - \sqrt{8-x}}$, para estimar $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ con dos decimales de precisión. Compare con la respuesta obtenida algebraicamente en el problema 23.

36. GU Utilice una representación gráf ca de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{4}{x-4}$, para estimar $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ numéricamente. Compare con la respuesta obtenida algebraicamente en el problema 25.

En los problemas 37-42, calcule utilizando la identidad siguiente:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

37. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

38. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

39. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-1}$

40. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+6x+8}$

41. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

42. $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{x^{1/3}-3}$

43. Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+h}-1}{h}$. *Indicación:* considere $x = \sqrt[4]{1+h}$ y reescriba el límite en términos de $x \to 1$.

44. Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+h}-1}{\sqrt[2]{1+h}-1}$. *Indicación:* considere $x = \sqrt[6]{1+h}$ y reescriba el límite en términos de $x \to 1$.

En los problemas 45-54, calcule el límite en términos de la constante a.

45. $\lim\limits_{x\to 0} (2a+x)$

46. $\lim\limits_{h\to -2} (4ah+7a)$

47. $\lim\limits_{t\to -1} (4t-2at+3a)$

48. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3a+h)^2-9a^2}{h}$

49. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(a+h)^2-2a^2}{h}$

50. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x+a)^2-4x^2}{x-a}$

51. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

52. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+2h}-\sqrt{a}}{h}$

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+a)^3-a^3}{x}$

54. $\lim\limits_{h\to a} \dfrac{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}{h-a}$

Problemas avanzados

En los problemas 55-58, halle todos los valores de c para los que el límite existe.

55. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{x^2-5x-6}{x-c}$

56. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x+c}{x-1}$

57. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{c}{x^3-1}\right)$

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+cx^2-\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

59. ¿Para qué signo ± existe el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} \pm \frac{1}{x(x-1)}\right)$$

2.6 Límites trigonométricos

Al estudiar la derivada, se tendrán que calcular ciertos límites donde aparecen funciones trascendentes como el seno y el coseno. Las técnicas algebraicas de la sección anterior no son efectivas para trabajar con esas funciones y se necesitarán otras herramientas. Una de ellas es el "teorema de compresión", que se explica en esta sección y se utiliza para calcular algunos límites trigonométricos necesarios para la sección 3.6.

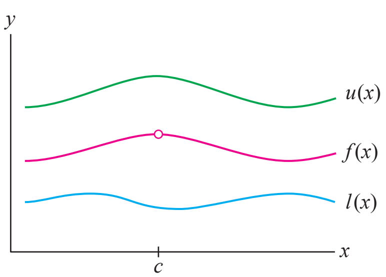


FIGURA 1 $f(x)$ está atrapada entre $l(x)$ y $u(x)$ (pero no comprimida en $x = c$).

El teorema de compresión

Considere una función $f(x)$ que se encuentra "atrapada" entre dos funciones $l(x)$ y $u(x)$ en un intervalo I. En otras palabras,

$$l(x) \le f(x) \le u(x) \quad \text{para todo } x \in I$$

Por tanto, la gráf ca de $f(x)$ se encuentra entre las gráf cas de $l(x)$ y de $u(x)$ (f gura 1).

El teorema de compresión se aplica cuando $f(x)$ no está únicamente atrapada sino que está **comprimida** en un punto $x = c$ (f gura 2). Esto signif ca que, para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contenga a c,

$$l(x) \le f(x) \le u(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} l(x) = \lim_{x\to c} u(x) = L$$

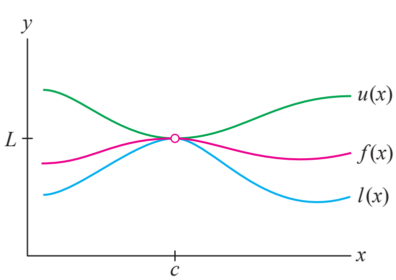


FIGURA 2 $f(x)$ está comprimida por $l(x)$ y $u(x)$ en $x = c$.

No se exige que $f(x)$ esté def nida en $x = c$, pero es gráf camente evidente que $f(x)$ ha de tender al límite L, tal y como se enuncia en el siguiente teorema. La demostración se encuentra en el apéndice D.

TEOREMA 1 Teorema de compresión (o Principio de intercalación) Suponga que para $x \neq c$ (en un intervalo abierto que contiene a c), se verif ca:

$$l(x) \leq f(x) \leq u(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} l(x) = \lim_{x \to c} u(x) = L$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

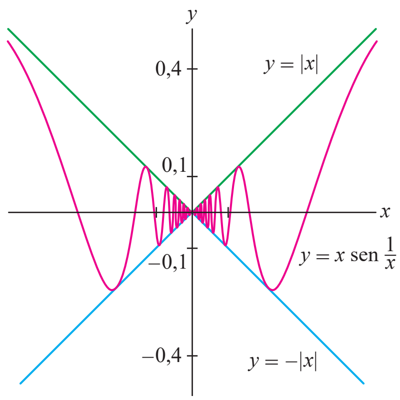


FIGURA 3

■ **EJEMPLO 1** Pruebe que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Solución Aunque $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es el producto de dos funciones, no se puede utilizar la propiedad del producto porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no existe. Sin embargo, la función seno toma valores entre 1 y -1 y, por tanto, $\left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq 1$ para todo $x \neq 0$. Multiplicando por $|x|$, se obtiene $\left|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq |x|$ y se concluye que (f gura 3):

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|$$

Como

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0}(-|x|) = -\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

se puede aplicar el teorema de compresión y concluir que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$. ■

En la sección 2.2, se obtuvo evidencia numérica y gráf ca de que el límite $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$ es igual a 1. Se probará este resultado mediante el teorema de compresión.

Observe que tanto $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$ como $\dfrac{\cos \theta - 1}{\theta}$ presentan una indeterminación en $\theta = 0$, por lo que el teorema 2 no se puede demostrar directamente por sustitución.

TEOREMA 2 Límites trigonométricos importantes

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$$

Para aplicar el teorema de compresión, se deben determinar fuciones que "compriman" a $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$ en $\theta = 0$. Estas funciones se facilitan en el siguiente teorema (f gura 4).

TEOREMA 3

$$\cos \theta \leq \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leq 1 \qquad \text{para} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad \theta \neq 0 \tag{1}$$

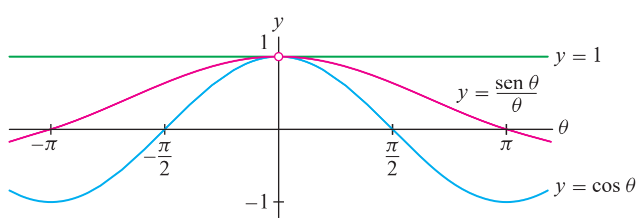
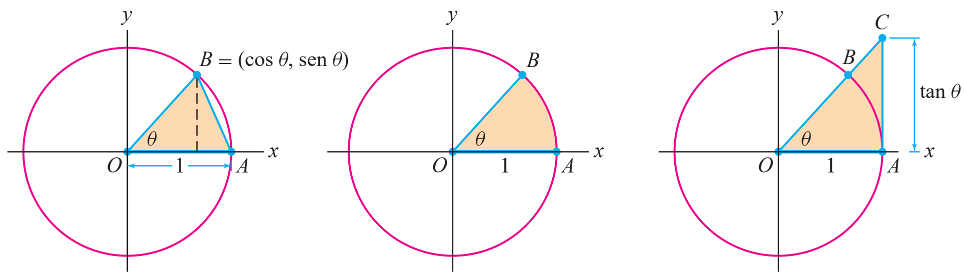


FIGURA 4 Gráf ca que ilustra las desigualdades del teorema 3.



Área del triángulo $= \frac{1}{2}$ sen θ Área del sector circular $= \frac{1}{2}\theta$ Área del triángulo $= \frac{1}{2}$ tan θ

FIGURA 5

Demostración Suponga en primer lugar que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La demostración se va a basar el la siguiente relación entre las áreas de la f gura 5:

$$\text{área de } \triangle OAB < \text{área del sector circular } BOA < \text{área de } \triangle OAC \qquad \boxed{2}$$

RECORDATORIO Recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ en una circunferencia de radio r es $\frac{1}{2}r^2\theta$. La razón es la siguiente: un sector circular de ángulo θ representa una fracción de $\frac{\theta}{2\pi}$ de la circunferencia. El área de la circunferencia es πr^2, por lo que el área del sector circular es $(\frac{\theta}{2\pi})\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. Para la circunferencia unitaria ($r = 1$), el área del sector es $\frac{1}{2}\theta$.

A continuación se van a calcular estas tres áreas. En primer lugar, la base de $\triangle OAB$ es 1 y su altura es sen θ, por lo que su área es igual a $\frac{1}{2}$ sen θ. Ahora, recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ es $\frac{1}{2}\theta$. Finalmente, para calcular el área del triángulo $\triangle OAC$, observe que:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} = AC$$

Por tanto, como la base del triángulo $\triangle OAC$ es 1, y su altura es tan θ, su área será $\frac{1}{2}$ tan θ. De esta manera, se ha demostrado que:

Nota: La demostración del teorema 3 utiliza la fórmula $\frac{1}{2}\theta$ para el área de un sector circular, pero ésta, a su vez, está basada en la fórmula πr^2 para el área de un círculo, cuya demostración completa requiere del cálculo integral.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta}_{\text{Área } \triangle OAB} \le \underbrace{\frac{1}{2}\theta}_{\text{Área del sector}} \le \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}_{\text{Área } \triangle OAC} \qquad \boxed{3}$$

Según la primera desigualdad sen $\theta \le \theta$ y, como $\theta > 0$, se obtiene:

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \le 1 \qquad \boxed{4}$$

Ahora, multiplique la segunda desigualdad en (3) por $\dfrac{2\cos\theta}{\theta}$ y obtendrá:

$$\cos\theta \le \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \qquad \boxed{5}$$

La combinación de (4) y de (5) prueba (1) cuando $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pero las funciones en (1) no cambian cuando θ se reemplaza por $-\theta$, ya que tanto cos θ como $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$ son funciones pares. De hecho, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y

$$\frac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} = \frac{-\,\text{sen}\,\theta}{-\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$$

En consecuencia, (1) se cumple también para $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. Esto f naliza la demostración del teorema 3. ■

Demostración del teorema 2 Según el teorema 3,

$$\cos\theta \le \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \le 1$$

Como $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \cos 0 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$, por el teorema de compresión, $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$, tal y como se quería demostrar. Para la demostración de que $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$, vea los problemas 51 y 58. ■

En el siguiente ejemplo, se calcula otro límite trigonométrico. La idea clave es reescribir la función de h en términos de la nueva variable $\theta = 4h$.

■ **EJEMPLO 2 Cálculo de un límite mediante un cambio de variables** Investigue el valor de $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4h}{h}$ numéricamente, y después calcule su valor exacto.

h	$\dfrac{\operatorname{sen} 4h}{h}$
±1,0	−0,75680
±0,5	1,81859
±0,2	3,58678
±0,1	**3,8** 9 418
±0,05	**3,9** 7 339
±0,01	**3,99** 893
±0,005	**3,999** 73

Solución

La tabla de valores a la izquierda del texto, sugiere que este límite es igual a 4. Para calcular el límite de forma exacta, se reescribe en términos del límite $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ de manera que el teorema 2 se pueda aplicar. De esta manera, sea $\theta = 4h$ y escriba:

$$\frac{\operatorname{sen} 4h}{h} = 4\left(\frac{\operatorname{sen} 4h}{4h}\right) = 4\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

La nueva variable θ tiende a cero cuando $h \to 0$, porque θ es un múltiplo de h. Así, se puede cambiar el límite cuando $h \to 0$ por un límite cuando $\theta \to 0$, y obtener como resultado:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4h}{h} = \lim_{\theta\to 0} 4\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 4\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right) = 4(1) = 4 \qquad \boxed{6}$$

■

2.6 RESUMEN

- Se dice que $f(x)$ está *comprimida* en $x = c$, si existen funciones $l(x)$ y $u(x)$ tales que $l(x) \le f(x) \le u(x)$ para todo $x \ne c$ en un intervalo abierto I que contenga a c, y

$$\lim_{x\to c} l(x) = \lim_{x\to c} u(x) = L$$

El teorema de compresión establece que, en tal caso, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

- Dos límites trigonométricos importantes:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$$

2.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Suponga que $-x^4 \le f(x) \le x^2$. ¿Cuál es el $\lim_{x\to 0} f(x)$? ¿Dispone de suf ciente información para calcular $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$? Justif que su respuesta.

2. Enuncie el teorema de compresión con detalle.

3. Si quiere calcular $\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5h}{3h}$, es una buena idea reescribir el límite en términos de la variable (elija una):

(a) $\theta = 5h$ **(b)** $\theta = 3h$ **(c)** $\theta = \dfrac{5h}{3}$

Problemas

1. Enuncie con precisión las hipótesis y conclusiones del teorema de compresión aplicado a la situación de la f gura 6.

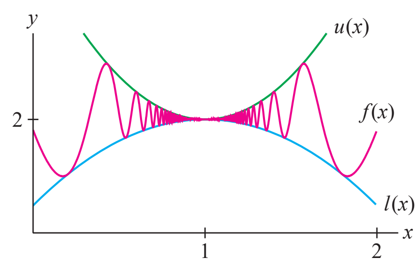


FIGURA 6

2. En la f gura 7, ¿queda comprimida $f(x)$ por $u(x)$ y $l(x)$ en $x = 3$? ¿Y en $x = 2$?

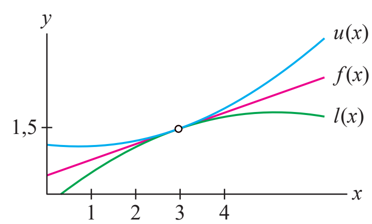


FIGURA 7

3. ¿Qué información proporciona el teorema de compresión sobre $\lim_{x\to 7} f(x)$, si $\lim_{x\to 7} l(x) = \lim_{x\to 7} u(x) = 6$ y $f(x)$, $u(x)$ y $l(x)$ están relacionadas como se muestra en la f gura 8? La desigualdad $f(x) \le u(x)$ no se cumple para todo x. ¿Inf uye en la validez de su conclusión?

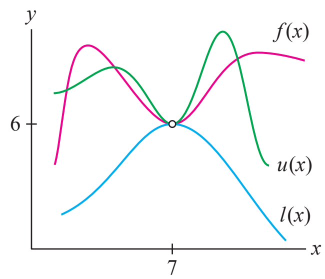


FIGURA 8

4. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$ suponiendo que $\cos x \le f(x) \le 1$.

5. Establezca si la desigualdad dada proporciona suf ciente información para determinar $\lim_{x\to 1} f(x)$. En caso af rmativo, halle ese límite.

(a) $4x - 5 \le f(x) \le x^2$

(b) $2x - 1 \le f(x) \le x^2$

(c) $4x - x^2 \le f(x) \le x^2 + 2$

6. GU Represente gráf camente las funciones $u(x) = 1 + \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$ y $l(x) = \operatorname{sen} x$ sobre los mismos ejes. ¿Qué puede af rmar sobre $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$ si $f(x)$ queda comprimida por $l(x)$ y por $u(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$?

En los problemas 7-16, calcule el límite utilizando el teorema de compresión.

7. $\lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$

8. $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$

9. $\lim_{x\to 1} (x-1) \operatorname{sen} \frac{\pi}{x-1}$

10. $\lim_{x\to 3} (x^2 - 9)\frac{x-3}{|x-3|}$

11. $\lim_{t\to 0} (2^t - 1) \cos \frac{1}{t}$

12. $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\, 4^{\cos(\pi/x)}$

13. $\lim_{t\to 2} (t^2 - 4) \cos \frac{1}{t-2}$

14. $\lim_{x\to 0} \tan x \cos\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$

15. $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \cos\theta \cos(\tan\theta)$

16. $\lim_{t\to 0-} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{t}\right) 3^{(1/t)}$

En los problemas 17-26, calcule el límite propuesto usando el teorema 2 cuando sea necesario.

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \sec x}{x}$

19. $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^3 + 9}\operatorname{sen} t}{t}$

20. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$

22. $\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{t}$

23. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sec\theta - 1}{\theta}$

24. $\lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

25. $\lim_{t\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - \cos^2 t}{t}$

27. Sea $L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 14x}{x}$.

(a) Pruebe, considerando $\theta = 14x$, que $L = \lim_{\theta\to 0} 14 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

(b) Calcule L.

28. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} 9h}{\operatorname{sen} 7h}$. *Indicación:* $\frac{\operatorname{sen} 9h}{\operatorname{sen} 7h} = \frac{9}{7} \cdot \frac{\operatorname{sen} 9h}{9h} \cdot \frac{7h}{\operatorname{sen} 7h}$.

En los problemas 29-48, calcule el límite.

29. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} 9h}{h}$

30. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4h}{4h}$

31. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{5h}$

32. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

33. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7\theta}{\operatorname{sen} 3\theta}$

34. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{9x}$

35. $\lim_{x\to 0} x \csc 25x$

36. $\lim_{t\to 0} \frac{\tan 4t}{t \sec t}$

37. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2h \operatorname{sen} 3h}{h^2}$

38. $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(z^2/3\right)}{\operatorname{sen} z}$

39. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-3\theta)}{\operatorname{sen}(4\theta)}$

40. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{\tan 9x}$

41. $\lim_{t\to 0} \frac{\csc 8t}{\csc 4t}$

42. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}$

43. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x}{x \operatorname{sen} 5x}$

44. $\lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos 2h}{h}$

45. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)(1 - \cos h)}{h^2}$

46. $\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos 2t}{\operatorname{sen}^2 3t}$

47. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos 2\theta - \cos\theta}{\theta}$

48. $\lim_{h\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 3h}{h}$

49. Calcule $\lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$.

50. Utilice la identidad $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$ para calcular $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta - 3\operatorname{sen}\theta}{\theta^3}$.

51. Demuestre el siguiente resultado que se enunció en el teorema 2:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0 \qquad \boxed{7}$$

Indicación: $\frac{1 - \cos\theta}{\theta} = \frac{1}{1 + \cos\theta} \cdot \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta}$.

52. GU Investigue el valor de $\lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}$ numéricamente (y gráf -camente si dispone de una utilidad gráf ca). A continuación, demuestre que el límite es igual a $\frac{1}{2}$. *Indicación:* utilice el problema 51.

En los problemas 53-55, calcule utilizando el resultado del problema 52.

53. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos 3h - 1}{h^2}$ **54.** $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos 3h - 1}{\cos 2h - 1}$ **55.** $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos t}}{t}$

56. Aplique el teorema de compresión para demostrar que si $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

Problemas avanzados

57. Aplique el resultado del problema 52 para demostrar que si $m \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - 1}{x^2} = -\frac{m^2}{2}$$

58. Usando un diagrama sobre la circunferencia unitaria y el teorema de Pitágoras, pruebe que:

$$\operatorname{sen}^2\theta \le (1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \le \theta^2$$

Concluya que $\operatorname{sen}^2\theta \le 2(1-\cos\theta) \le \theta^2$ y use este resultado para demostrar de forma alternativa la ec. (7) en el problema 51. A continuación, proporcione una demostración alternativa del resultado del problema 52.

59. **(a)** Investigue $\lim_{x\to c} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x - c}$ numéricamente para los cinco valores $c = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

(b) ¿Puede conjeturar la respuesta para cualquier valor de c?

(c) Compruebe que su respuesta a (b) funciona con otros dos valores diferentes de c.

2.7 Límites en el infinito

De momento se han considerado límites en los que x tiende a un número c. También es importante considerar límites en los que x se aproxima a $+\infty$ o a $-\infty$, a los que nos referiremos como **límites en el inf nito**. En las aplicaciones prácticas, los límites en el inf nito aparecen de forma natural cuando se estudia el comportamiento de un sistema "a largo plazo" como se observa en la f gura 1.

La notación $x \to +\infty$ indica que x crece sin limitación, y $x \to -\infty$ indica que x decrece (a través de valores negativos) sin limitación. Se escribe:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ está cada vez más cerca de L cuando $x \to +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ está cada vez más cerca de L cuando $x \to -\infty$.

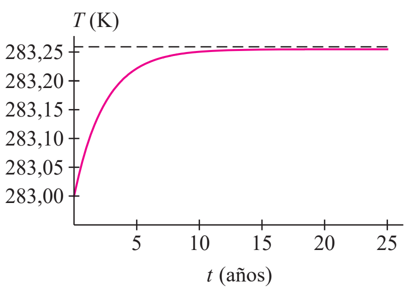


FIGURA 1 La temperatura media de la Tierra (conforme a un modelo climatológico simple) en respuesta a un 0,25 % de incremento de la radiación solar. Según este modelo, $\lim_{t\to\infty} T(t) = 283{,}255$.

Tal y como se mencionó con anterioridad, "cada vez más cerca" signif ca que $|f(x) - L|$ resulta arbitrariamente pequeño. En cada uno de los dos casos, la recta $y = L$ se denomina **asíntota horizontal**. Se utiliza la notación $x \to \pm\infty$ para indicar que se están considerando ambos límites, es decir, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

Los límites inf nitos describen el **comportamiento asintótico** de una función, esto es, el comportamiento de la gráf ca a medida que nos desplazamos hacia la derecha o hacia la izquierda.

■ **EJEMPLO 1** Discusión del comportamiento asintótico de la f gura 2.

Solución La función $g(x)$ tiende a $L = 7$ al desplazarnos hacia la derecha, y tiende a $L = 3$ al desplazarnos hacia la izquierda, es decir:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 7 \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 3$$

De esta manera, las rectas $y = 7$ e $y = 3$ son asíntotas horizontales de $g(x)$. ■

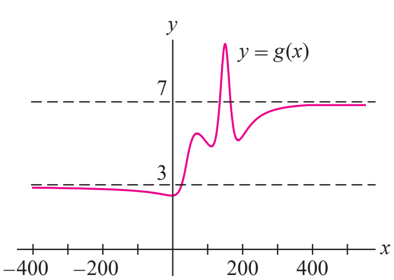


FIGURA 2 Las rectas $y = 7$ y $y = 3$ son asíntotas horizontales de $g(x)$.

Una función puede tender a un límite inf nito cuando $x \to \pm\infty$. Se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

si $f(x)$ resulta arbitrariamente grande cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Una notación similar se utiliza si $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Por ejemplo, según se observa en la f gura 3(A), se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

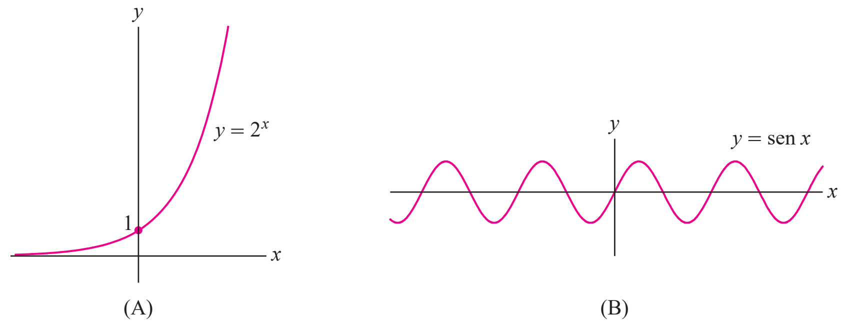


FIGURA 3

Sin embargo, los límites en el infinito no siempre existen. Por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ oscila indefinidamente [figura 3(B)], por lo que:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$$

no existen.

Los límites en el infinito de las funciones potenciales $f(x) = x^n$ se determinan de manera sencilla. Si $n > 0$, entonces x^n aumenta sin limitación cuando $x \to +\infty$, por lo que (figura 4):

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

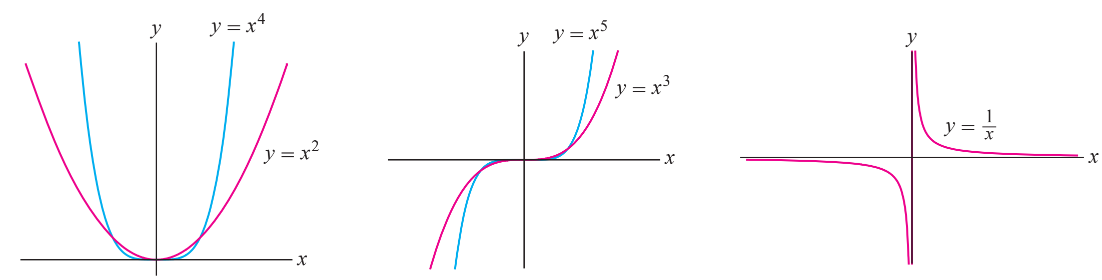
Para describir los límites cuando $x \to -\infty$, suponga que n es un número entero de manera que x^n esté definido para $x < 0$. Si n es par, entonces x^n resulta grande y positivo cuando $x \to -\infty$ y, si n es impar, entonces es también grande pero negativo. En resumen:

TEOREMA 1 Para todo $n > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n es un número entero positivo,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{-n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$



(A) n par: $\lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (B) n impar: $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (C) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

FIGURA 4

Las propiedades básicas de los límites (teorema 1 de la sección 2.3) son ciertas para los límites en el infinito. Por ejemplo, la propiedad de la suma y del múltiplo constante dan lugar a:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(3 - 4x^{-3} + 5x^{-5}\right) &= \lim_{x\to+\infty} 3 - 4 \lim_{x\to+\infty} x^{-3} + 5 \lim_{x\to+\infty} x^{-5} \\ &= 3 + 0 + 0 = 3\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 2** Calcule $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5}$.

Solución Un primer intento podría ser aplicar la propiedad del cociente directamente, pero esta propiedad es cierta únicamente si el límite del denominador es f nito y diferente de cero. El límite del enunciado presenta la indeterminación ∞/∞ ya que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (20x^2 - 3x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (3x^5 - 4x^2 + 5) = \infty$$

La forma de evitar esta dif cultad consiste en dividir el numerador y el denominador por x^5 (la mayor potencia de x en el denominador):

$$\frac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5} = \frac{x^{-5}(20x^2 - 3x)}{x^{-5}(3x^5 - 4x^2 + 5)} = \frac{20x^{-3} - 3x^{-4}}{3 - 4x^{-3} + 5x^{-5}}$$

Ahora se puede utilizar la propiedad del cociente:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} \left(20x^{-3} - 3x^{-4}\right)}{\lim_{x\to\pm\infty} \left(3 - 4x^{-3} + 5x^{-5}\right)} = \frac{0}{3} = 0$$ ■

En general, si

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$$

donde $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, divida el numerador y el denominador por x^m:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + \cdots + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_0 x^{-m}} \\ &= x^{n-m}\left(\frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_0 x^{-m}}\right) \end{aligned}$$

El cociente entre paréntesis tiende al límite f nito a_n/b_m pues:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0 x^{-n}) = a_n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_0 x^{-m}) = b_m$$

Así, tendremos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_0 x^{-m}} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

TEOREMA 2 Límites en el infinito de una función racional El comportamiento asintótico de una función racional depende únicamente de los coef cientes principales de su numerador y denominador. Si $a_n, b_m \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

He aquí algunos ejemplos:

- $n = m$: $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^4 - 7x + 9}{7x^4 - 4} = \dfrac{3}{7} \lim_{x\to\pm\infty} x^0 = \dfrac{3}{7}$

- $n < m$: $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 9}{7x^4 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x\to\pm\infty} x^{-1} = 0$
- $n > m$, $n - m$ impar: $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^8 - 7x + 9}{7x^3 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$
- $n > m$, $n - m$ par: $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^7 - 7x + 9}{7x^3 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

Este método se puede adaptar a exponentes no enteros y a funciones algebraicas.

La propiedad del cociente es válida si $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, donde $L \neq 0$:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 3 Calcule los límites **(a)** $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^{7/2} + 7x^{-1/2}}{x^2 - x^{1/2}}$ **(b)** $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

Solución

(a) Tal y como se procedió anteriormente, divida el numerador y el denominador por x^2, que es la potencia de x de orden superior que aparece tanto en el numerador como en el denominador (esto quiere decir, en realidad, multiplicar por x^{-2}):

$$\frac{3x^{7/2} + 7x^{-1/2}}{x^2 - x^{1/2}} = \frac{x^{-2}}{x^{-2}} \cdot \frac{3x^{7/2} + 7x^{-1/2}}{x^2 - x^{1/2}} = \frac{3x^{3/2} + 7x^{-5/2}}{1 - x^{-3/2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^{7/2} + 7x^{-1/2}}{x^2 - x^{1/2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} (3x^{3/2} + 7x^{-5/2})}{\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-3/2})} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

(b) El punto clave es observar que el denominador de $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ "se comporta" como $x^{3/2}$:

$$\sqrt{x^3+1} = \sqrt{x^3(1 + x^{-3})} = x^{3/2}\sqrt{1 + x^{-3}} \qquad (\text{para } x > 0)$$

Esto sugiere que se divida en numerador y el denominador por $x^{3/2}$:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \left(\frac{x^{-3/2}}{x^{-3/2}}\right) \frac{x^2}{x^{3/2}\sqrt{1 + x^{-3}}} = \frac{x^{1/2}}{\sqrt{1 + x^{-3}}}$$

Ahora aplicando la propiedad del cociente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{\sqrt{1 + x^{-3}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}}{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + x^{-3}}}$$

$$= \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

EJEMPLO 4 Calcule los límites en el infinito de $f(x) = \dfrac{12x + 25}{\sqrt{16x^2 + 100x + 500}}$.

Solución Divida el numerador y el denominador por x (multiplique por x^{-1}), pero observe la diferencia entre x positiva y x negativa. Si $x > 0$, se tiene:

$$x^{-1}\sqrt{16x^2 + 100x + 500} = \sqrt{x^{-2}}\sqrt{16x^2 + 100x + 500} = \sqrt{16 + \frac{100}{x} + \frac{500}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12x + 25}{\sqrt{16x^2 + 100x + 500}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \left(12 + \frac{25}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{16 + \frac{100}{x} + \frac{500}{x^2}}} = \frac{12}{\sqrt{16}} = 3$$

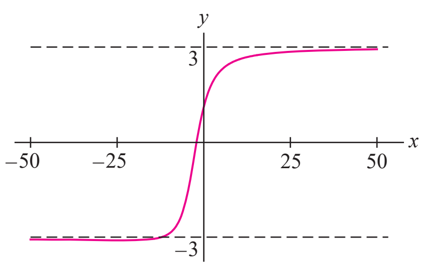


FIGURA 5 Gráf ca de

$$f(x) = \frac{12x + 25}{\sqrt{16x^2 + 100x + 500}}.$$

Sin embargo, si $x < 0$, entonces $x = -\sqrt{x^2}$ y

$$x^{-1}\sqrt{16x^2 + 100x + 500} = -\sqrt{x^{-2}}\sqrt{16x^2 + 100x + 500} = -\sqrt{16 + \frac{100}{x} + \frac{500}{x^2}}$$

Así, el límite cuando $x \to -\infty$ es -3 en lugar de 3 (f gura 5):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{12x + 25}{\sqrt{16x^2 + 100x + 500}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(12 + \frac{25}{x}\right)}{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{16 + \frac{100}{x} + \frac{500}{x^2}}} = \frac{12}{-\sqrt{16}} = -3 \quad ■$$

2.7 RESUMEN

- *Límites en el inf nito*:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ si $|f(x) - L|$ resulta arbitrariamente pequeño cuando x crece sin limitación.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $|f(x) - L|$ resulta arbitrariamente pequeño cuando x decrece sin limitación.

- Una recta horizontal $y = L$ es una *asíntota horizontal* si:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \text{y/o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

- Si $n > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0$. Si $n > 0$ es un número natural, entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{-n} = 0$$

- Si $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$ con $a_n, b_m \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

2.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Suponga que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to L} g(x) = +\infty$$

¿Cuál de las siguientes af rmaciones es correcta?

(a) $x = L$ es una asíntota vertical de $g(x)$.

(b) $y = L$ es una asíntota horizontal de $g(x)$.

(c) $x = L$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

(d) $y = L$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

2. ¿Cuál es el valor de los siguientes límites?

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ **(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ **(c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

3. Dibuje la gráf ca de una función que tenga límite cuando $x \to \infty$ pero que no lo tenga (ni f nito ni inf nito) cuando $x \to -\infty$.

4. ¿Cuál es el signo de a, si $f(x) = ax^3 + x + 1$ cumple $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$?

5. ¿Cuál es el signo del coef ciente principal a_7, si $f(x)$ es un polinomio de grado 7 tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$?

6. Explique por qué $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ existe pero $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no existe. ¿A qué es igual $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$?

Problemas

1. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales de la figura 6?

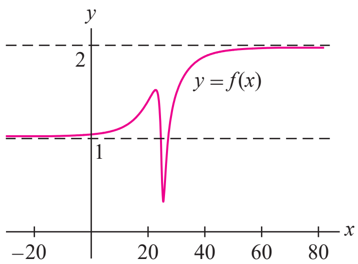


FIGURA 6

2. Dibuje la gráfica de una función $f(x)$ para la que tanto $y = -1$ como $y = 5$ sean asíntotas horizontales.

3. Dibuje la gráfica de una función $f(x)$ con una única asíntota horizontal $y = 3$.

4. Dibuje las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ para las que tanto $y = -2$ como $y = 4$ sean asíntotas horizontales, pero que cumplan $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

5. GU Investigue el comportamiento asintótico de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + x}$ numérica y gráficamente:

(a) Construya una tabla de valores de $f(x)$ para $x = \pm 50, \pm 100, \pm 500, \pm 1000$.

(b) Represente gráficamente $f(x)$.

(c) ¿Cuáles son las asíntotas horizontales de $f(x)$?

6. GU Investigue $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{12x + 1}{\sqrt{4x^2 + 9}}$ numérica y gráficamente:

(a) Construya una tabla de valores de $f(x) = \dfrac{12x + 1}{\sqrt{4x^2 + 9}}$ para $x = \pm 100, \pm 500, \pm 1000, \pm 10\ 000$.

(b) Represente gráficamente $f(x)$.

(c) ¿Cuáles son las asíntotas horizontales de $f(x)$?

En los problemas 7-16, calcule el límite.

7. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x + 9}$

8. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 20x}{4x^2 + 9}$

9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 20x}{2x^4 + 3x^3 - 29}$

10. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x + 5}$

11. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{7x - 9}{4x + 3}$

12. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2 - 2}{6 - 29x}$

13. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2 - 9}{4x + 3}$

14. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5x - 9}{4x^3 + 2x + 7}$

15. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3 - 10}{x + 4}$

16. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5 + 3x^4 - 31x}{8x^4 - 31x^2 + 12}$

En los problemas 17-22, halle las asíntotas horizontales.

17. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{8x^2 + 8}$

18. $f(x) = \dfrac{8x^3 - x^2}{7 + 11x - 4x^4}$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{36x^2 + 7}}{9x + 4}$

20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{36x^4 + 7}}{9x^2 + 4}$

21. $f(t) = \dfrac{3^t}{1 + 3^{-t}}$

22. $f(t) = \dfrac{t^{1/3}}{(64t^2 + 9)^{1/6}}$

En los problemas 23-30, calcule el límite.

23. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^4 + 3x + 2}}{4x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + 20x}}{10x - 2}$

25. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{8x^2 + 7x^{1/3}}{\sqrt{16x^4 + 6}}$

26. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x - 3}{\sqrt{25x^2 + 4x}}$

27. $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^{4/3} + t^{1/3}}{(4t^{2/3} + 1)^2}$

28. $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^{4/3} - 9t^{1/3}}{(8t^4 + 2)^{1/3}}$

29. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{|x| + x}{x + 1}$

30. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{4 + 6e^{2t}}{5 - 9e^{3t}}$

31. Determine los límites en el infinito de $g(t) = 5^{-1/t^2}$.

32. Pruebe que $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$. *Indicación:* observe que:

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

33. Según la **ecuación de Michaelis-Menten** (figura 7), cuando un enzima se combina con un sustrato de concentración s (en milimolares), la tasa de reacción (en micromolares/min) es:

$$R(s) = \frac{As}{K + s} \qquad (A, K \text{ constantes})$$

(a) Pruebe, calculando $\lim_{s\to+\infty} R(s)$, que A es la tasa de reacción límite cuando la concentración s tiende a $+\infty$.

(b) Pruebe que la tasa de reacción $R(s)$ alcanza la mitad del valor límite A, cuando $s = K$.

(c) Para una determinada reacción, $K = 1{,}25$ mM y $A = 0{,}1$. ¿Para qué concentración s es $R(s)$ igual al 75 % de su valor límite?

Leonor Michaelis
1875–1949

Maud Menten
1879–1960

FIGURA 7 Nacida en Canadá, la bioquímica Maud Menten es más conocida por su destacado trabajo sobre la cinética de enzimas con el científico alemán Leonor Michaelis. También fue una consumada pintora, clarinetista, alpinista y profesora de numerosos idiomas.

34. Suponga que la temperatura media de la Tierra, medida en kelvins, es $T(t) = 283 + 3(1 - 10^{-0,13t})$, donde t es el número de años transcurridos desde el 2000.

(a) Calcule la temperatura media a largo plazo $L = \lim_{t\to+\infty} T(t)$.

(b) ¿En qué momento se encuentra $T(t)$ a la mitad de un grado de su valor límite?

En los problemas 35-40, calcule el límite.

35. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^4 + 9x} - 2x^2\right)$

36. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^3 + x} - x^{3/2}\right)$

37. $\lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x+2}\right)$

38. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$

39. $\lim_{t\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi 3^t + 1}{4 - 3^{t+1}}\right)$

40. $\lim_{t\to-\infty} 2\left(\frac{8t}{t+1} + 10^{t+1}\right)$

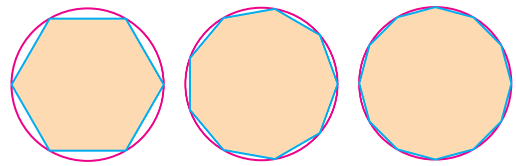
41. Sea $P(n)$ el perímetro de un polígono de n lados inscrito en la circunferencia unitaria (f gura 8).

(a) Explique, intuitivamente, por qué $P(n)$ tiende a 2π cuando $n \to +\infty$.

(b) Pruebe que $P(n) = 2n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(c) Combine (a) y (b) para concluir que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1$.

(d) Use este resultado para proporcionar otro argumento por el que $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$.



$n = 6$ $\quad$ $n = 9$ $\quad$ $n = 12$

FIGURA 8

42. Los físicos han observado que la teoría de la **relatividad especial** se reduce a la mecánica de Newton en el límite cuando $c \to +\infty$, donde c es la velocidad de la luz. Esto se puede ilustrar mediante una piedra que se lanza al aire verticalmente desde el suelo y que vuelve a la Tierra un segundo más tarde. Utilizando las leyes de Newton, se obtiene que la altura máxima de la piedra es $h = g/8$ metros ($g = 9{,}8$ m/s^2). Según la teoría de la relatividad, la masa de la piedra depende de su velocidad dividida por c y la altura máxima viene dada por:

$$h(c) = c\sqrt{c^2/g^2 + 1/4} - c^2/g$$

Demuestre que $\lim_{c\to+\infty} h(c) = g/8$.

Problemas avanzados

43. Cualquier límite cuando $x \to +\infty$ se puede reescribir como un límite lateral $t \to 0+$, donde $t = x^{-1}$. Para $g(t) = f(t^{-1})$, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0+} g(t)$$

Pruebe que $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x}{2x^2 + 5} = \lim_{t\to 0+} \frac{3 - t}{2 + 5t^2}$, y calcule su valor utilizando la propiedad del cociente de límites.

44. Reescriba los siguientes límites como límites laterales, tal y como se indicó en el problema 43, y calcule su valor.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 - 12x^3}{4x^3 + 3x + 1}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} 2^{1/x}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

45. Sea $G(b) = \lim_{x\to+\infty} (1 + b^x)^{1/x}$ para $b \geq 0$. Investigue el valor de $G(b)$ numérica y gráf camente para $b = 0{,}2,\ 0{,}8,\ 2,\ 3,\ 5$ (y otros valores si fuere necesario). A continuación, conjeture el valor de $G(b)$ como función de b. Dibuje la curva $y = G(b)$. ¿Considera que $G(b)$ es continua? Se evaluará $G(b)$ mediante la regla de L'Hôpital de la sección 7.7 (vea el problema 65 de la sección 7.7).

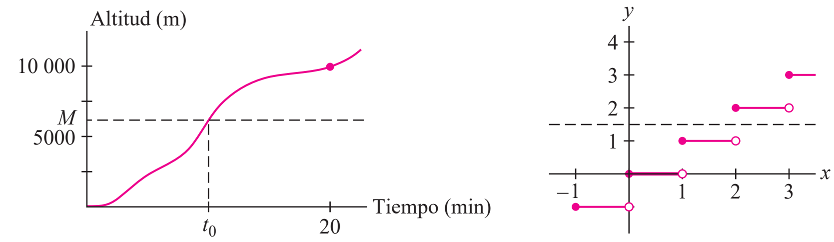
2.8 Teorema de los valores intermedios

El **Teorema del valor intermedio (TVI)** establece, en términos generales, que *una función continua no puede saltarse ningún valor*. Considere un avión que despega y asciende desde 0 hasta 10 000 metros en 20 minutos. El avión deberá pasar por todas las altitudes posibles entre 0 y 10 000 durante ese intervalo de 20 minutos. En algún momento, su altitud deberá ser exactamente de 8371 metros. Desde luego, estamos suponiendo que el movimiento del avión es continuo, por lo que su altitud no puede saltar de golpe de 8000 a 9000 metros, por poner un ejemplo.

Para enunciar esta conclusión de modo formal, sea $A(t)$ la altitud en cada instante t. El TVI asegura que, para cada altitud M comprendida entre 0 y 10 000, existe algún instante de tiempo t_0, entre 0 y 20, tal que $A(t_0) = M$. En otras palabras, la gráf ca de $A(t)$ debe cortar la recta horizontal $y = M$ [f gura 1(A)].

Por el contrario, una función discontinua puede saltarse valores. La función parte entera $f(x) = [x]$, en la f gura 1(B), cumple que $[1] = 1$ y que $[2] = 2$, pero no alcanza el valor 1,5 (o cualquier otro valor entre 1 y 2).

El TVI se demuestra en el apéndice B.



(A) Altitud del avión $A(t)$ (B) Gráfica de $f(x) = [x]$

FIGURA 1

TEOREMA 1 Teorema del valor intermedio Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor M comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

■ **EJEMPLO 1** Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tiene como mínimo una solución.

Solución Se puede aplicar el TVI porque que $\operatorname{sen} x$ es continua. Elija un intervalo en el que intuya que exista una solución. El valor dado 0,3 se encuentra entre los dos valores siguientes de la función:

$$\operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

por lo que el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funciona (f gura 2). Según el TVI, $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tiene como mínimo una solución en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. ■

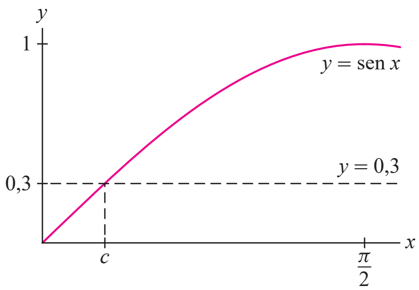


FIGURA 2

Un cero, o raíz, de una función es un valor c tal que $f(c) = 0$. Normalmente el término "raíz" se reserva específicamente para los ceros de los polinomios.

El TVI puede usarse para demostrar la existencia de ceros de funciones. Si $f(x)$ es continua y presenta valores tanto positivos como negativos, digamos $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces el TVI garantiza que $f(c) = 0$ para algún c entre a y b.

COROLARIO 2 Teorema de Bolzano (Existencia de ceros) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son no nulos y tienen signos opuestos, entonces $f(x)$ tiene algún cero en (a, b).

Pueden localizarse ceros de funciones con tanta precisión como se desee por el **método de bisección**, que se ilustra en el siguiente ejemplo.

■ **EJEMPLO 2 Método de bisección** Pruebe que $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4}$ tiene un cero en $(0, 2)$. A continuación, halle dicho cero, con mayor precisión, utilizando el método de la bisección.

Solución Con una calculadora, se obtiene que $f(0)$ y $f(2)$ son de signos opuestos:

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(2) \approx -0{,}786 < 0$$

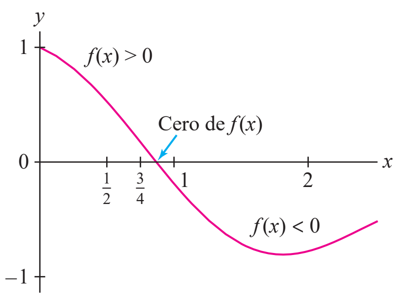


FIGURA 3 Gráf ca de $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4}$.

Los programas de cálculo simbólico suelen tener instrucciones para hallar las raíces de una función o resolver ecuaciones numéricamente. Estos sistemas usan diversos métodos, entre los cuales hay versiones más sofisticadas del método de bisección. Tenga en cuenta que, para usar el método de bisección, es necesario hallar primero un intervalo que contenga un cero.

Según el corolario 2 queda garantizado que $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(0, 2)$ (f gura 3).

Para localizar un cero con más precisión, divida $[0, 2]$ en dos intervalos $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Como mínimo, uno de esos intervalos debe contener un cero de $f(x)$. Para determinar cuál, evalúe $f(x)$ en el punto medio $m = 1$. Con una calculadora, se obtiene que $f(1) \approx$ $\approx -0{,}203 < 0$ y como $f(0) = 1$,

$$f(x) \text{ tiene signos opuestos en los extremos de } [0, 1]$$

Así, $(0, 1)$ debe contener al menos un cero. Se descarta $[1, 2]$ porque tanto $f(1)$ como $f(2)$ son negativos.

El método de bisección consiste en continuar este proceso hasta que podamos especif car la situación del cero con la precisión deseada. En la siguiente tabla se repite el proceso tres veces:

Intervalo	Punto medio del intervalo	Valores de la función	Conclusión
$[0, 1]$	$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) \approx 0{,}521$ $f(1) \approx -0{,}203$	El cero se encuentra en $(\frac{1}{2}, 1)$
$[\frac{1}{2}, 1]$	$\frac{3}{4}$	$f(\frac{3}{4}) \approx 0{,}163$ $f(1) \approx -0{,}203$	El cero se encuentra en $(\frac{3}{4}, 1)$
$[\frac{3}{4}, 1]$	$\frac{7}{8}$	$f(\frac{3}{4}) \approx 0{,}163$ $f(\frac{7}{8}) \approx -0{,}0231$	El cero se encuentra en $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$

La conclusión es que $f(x)$ tiene un cero c que cumple $0{,}75 < c < 0{,}875$. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL El TVI parece af rmar algo evidente: una función continua no puede saltarse ningún valor. No obstante, su demostración (que se encuentra en el apéndice B) es bastante sutil, puesto que depende de la *propiedad de completitud* de los números reales. Para poner de manif esto esa sutileza, observe que el TVI es *falso* para funciones def nidas solamente sobre los *números racionales*. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua, pero no posee la propiedad de los valores intermedios si se restringe su dominio a los números racionales. En efecto, $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$ pero $f(c) = 2$ *no tiene solución* para c racional. La solución $c = \sqrt{2}$ no "se encuentra" en el conjunto de los número racionales ya que es irracional. No hay duda de que el TVI fue siempre considerado como una obviedad pero no fue posible proporcionar una demostración rigurosa de este teorema hasta que la propiedad de completitud se clarif có en la segunda mitad del siglo XIX.

2.8 RESUMEN

- El teorema de los valores intermedios (TVI) establece que una función continua no puede *saltarse* valores.
- De forma más precisa, si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ con $f(a) \neq f(b)$ y si M es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $f(c) = M$ para algún $c \in (a, b)$.
- Teorema de Bolzano: si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (uno es positivo y el otro negativo), entonces $f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- Método de la bisección: suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, de manera que f tenga un cero en (a, b). Entonces f tiene un cero en $(a, m]$ o en $[m, b)$, donde $m = (a + b)/2$ es el punto medio de $[a, b]$. Suponiendo que $f(m) \neq 0$, habrá un cero en (a, m) si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos opuestos, y en (m, b) si $f(m)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Reiterando el proceso, se puede localizar un cero con la precisión requerida.

2.8 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ alcanza el valor 0,5 en el intervalo $[0, 1]$.

2. La temperatura en Vancouver era de 8 °C a las 6 AM y aumentó hasta 20 °C al mediodía. ¿Qué hipótesis debe hacerse sobre la temperatura para poder deducir que la temperatura fue de 15 ° en algún momento entre 6 AM y el mediodía?

3. ¿Cuál es la interpretación gráf ca del TVI?

4. Demuestre que el enunciado siguiente es falso dibujando una gráf ca que proporcione un contraejemplo:

Si $f(x)$ es continua y tiene un cero en $[a, b]$, entonces $f(a)$ y $f(b)$ poseen signos opuestos.

5. Suponga que $f(t)$ es continua en $[1, 5]$ y que $f(1) = 20$ y $f(5) = 100$. Determine si cada una de las siguientes af rmaciones son correctas: siempre, jamás o en ocasiones.

(a) $f(c) = 3$ tiene una solución $c \in [1, 5]$.

(b) $f(c) = 75$ tiene una solución $c \in [1, 5]$.

(c) $f(c) = 50$ no tiene ninguna solución $c \in [1, 5]$.

(d) $f(c) = 30$ tiene exactamente una solución $c \in [1, 5]$.

Problemas

1. Aplique el TVI para demostrar que $f(x) = x^3 + x$ es igual a 9 para algún x de $[1, 2]$.

2. Pruebe que $g(t) = \dfrac{t}{t+1}$ es igual a 0,499 para algún t de $[0, 1]$.

3. Pruebe que $g(t) = t^2 \tan t$ es igual a $\frac{1}{2}$ para algún t de $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4. Pruebe que $f(x) = \dfrac{x^2}{x^7 + 1}$ alcanza el valor 0,4.

5. Pruebe que $\cos x = x$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$. *Indicación:* pruebe que $f(x) = x - \cos x$ tiene un cero en $[0, 1]$.

6. Aplique el TVI para hallar un intervalo de longitud $\frac{1}{2}$ que contenga un cero de $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

En los problemas 7-16, use el TVI para demostrar los siguientes enunciados .

7. $\sqrt{c} + \sqrt{c+2} = 3$ tiene una solución.

8. Para todo número entero n, $\operatorname{sen} nx = \cos x$ para algún $x \in [0, \pi]$.

9. $\sqrt{2}$ existe. *Indicación:* considere $f(x) = x^2$.

10. Todo número positivo c posee una raíz n-ésima, para todo entero positivo n.

11. Para todo entero positivo k, $\cos x = x^k$ tiene una solución.

12. $2^x = bx$ tiene una solución si $b > 2$.

13. $2^x + 3^x = 4^x$ tiene una solución.

14. $\tan x = x$ tiene infinitas soluciones.

15. $2^x + 1/x = -4$ tiene una solución.

16. $x = \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene una solución.

17. Efectúe tres pasos del método de la bisección para $f(x) = 2^x - x^3$ de la siguiente manera:

(a) Pruebe que $f(x)$ tiene un cero en $[1, 1{,}5]$.

(b) Pruebe que $f(x)$ tiene un cero en $[1{,}25, 1{,}5]$.

(c) Determine si $[1{,}25, 1{,}375]$ o $[1{,}375, 1{,}5]$ contiene un cero.

18. La figura 4 muestra que $f(x) = x^3 - 8x - 1$ posee un cero en el intervalo $[2{,}75, 3]$. Aplique el método de bisección dos veces para hallar un intervalo de longitud $\frac{1}{16}$ que contenga ese cero.

19. Halle un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en $[1, 2]$ que contenga una solución de la ecuación $x^7 + 3x - 10 = 0$.

20. Pruebe que $\tan^3 \theta - 8\tan^2 \theta + 17 \tan \theta - 8 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0{,}5, 0{,}6]$. Aplique el método de la bisección dos veces para hallar un intervalo de longitud 0,025 que contenga a esta solución.

En los problemas 21-24, dibuje la gráfica de una función $f(x)$ en $[0, 4]$ con la propiedad que se enuncia.

21. Discontinuidad de salto en $x = 2$ y no cumple la conclusión del TVI.

22. Discontinuidad de salto en $x = 2$ y cumple la conclusión del TVI en $[0, 4]$.

23. Límites laterales infinitos en $x = 2$ y no cumple la conclusión del TVI.

24. Límites laterales infinitos en $x = 2$ y cumple la conclusión del TVI en $[0, 4]$.

25. ¿Se puede aplicar el corolario 2 a la función $f(x) = x^{-1}$ en $[-1, 1]$? ¿Tiene $f(x)$ algún cero?

Problemas avanzados

26. Considere un mapa y dibuje en él una circunferencia al azar (figura 5). Demuestre que en cualquier instante de tiempo existe algún par de puntos diametralmente opuestos en esa circunferencia, A y B, que corresponden a lugares cuyas temperaturas coinciden en ese instante. *Indicación:* sea θ una coordenada angular en la circunferencia y sea $f(\theta)$ la diferencia entre las temperaturas registradas en los puntos correspondientes a θ y a $\theta + \pi$.

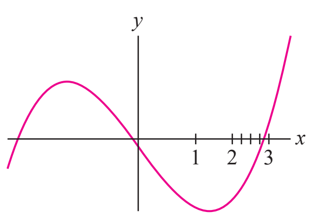


FIGURA 4 Gráfica de $y = x^3 - 8x - 1$.

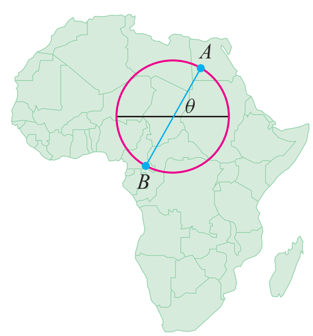


FIGURA 5 $f(\theta)$ es la diferencia entre las temperaturas en A y en B.

27. Pruebe que si $f(x)$ es continua y $0 \le f(x) \le 1$ para $0 \le x \le 1$, entonces $f(c) = c$ para algún c en $[0, 1]$ (figura 6).

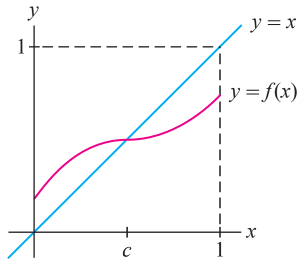
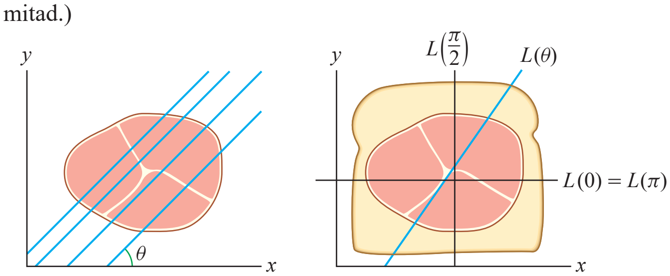


FIGURA 6 Una función que cumple $0 \le f(x) \le 1$ para $0 \le x \le 1$.

28. Aplique el TVI para demostrar que si $f(x)$ es continua e inyectiva en un intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente.

29. **Teorema del bocadillo de jamón** La figura 7(A) muestra una loncha de jamón. Demuestre que para todo ángulo θ $(0 \le \theta \le \pi)$, se puede cortar esa loncha de jamón en dos mitades iguales mediante un corte de inclinación θ. *Indicación:* las rectas de inclinación θ vienen dadas por las ecuaciones $y = (\tan\theta)x + b$, donde b varía de $-\infty$ a $+\infty$. Cada una de esas rectas divide la loncha de jamón en dos partes (una de las cuales puede ser vacía). Sea $A(b)$ la cantidad de jamón que queda a la izquierda de la recta menos la que queda a la derecha, y sea A el área total del jamón. Pruebe que $A(b) = -A$ si b es suficientemente grande, y que $A(b) = A$ si b es suficientemente negativo. A continuación use el TVI. Este método funciona si $\theta \ne 0$ o $\frac{\pi}{2}$. Si $\theta = 0$, defina $A(b)$ como la cantidad de jamón que queda por encima de la recta $y = b$ menos la que queda por debajo. ¿Cómo hay que modificar el razonamiento para que funcione cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ (en cuyo caso $\tan\theta = +\infty$)?

30. La figura 7(B) muestra una loncha de jamón en un pedazo de pan. Demuestre que se puede cortar este bocadillo de manera que las dos partes tengan la misma cantidad de jamón y la misma cantidad de pan. *Indicación:* según el ejercicio 29, para todo $0 \le \theta \le \pi$ existe una recta $L(\theta)$ de inclinación θ (que se supondrá única) que divide el jamón en dos partes iguales. Sea $B(\theta)$ la cantidad de pan que queda a la izquierda de (o por encima de) $L(\theta)$ menos la que queda a la derecha (o por debajo de). Observe que $L(\pi)$ y que $L(0)$ son la misma recta, pero $B(\pi) = -B(0)$ puesto que la izquierda y la derecha se intercambian cuando el ángulo pasa de 0 a π. Suponga que $B(\theta)$ es continua y aplique el TVI. (Generalizando aún más este razonamiento se puede demostrar el auténtico "teorema del bocadillo de jamón", que afirma que si permitimos que el cuchillo corte de modo inclinado, entonces se puede cortar cualquier bocadillo formado por una loncha de jamón entre dos pedazos de pan de manera que cada una de las tres capas quede partida por la mitad.)



(A) Corte de una loncha de jamón en un ángulo θ

(B) Una loncha de jamón sobre una rebanada de pan

FIGURA 7

2.9 Definición formal de límite

Una "demostración rigurosa" en matemáticas es una demostración que se basa en una cadena completa de pasos lógicos sin ningún tipo de lagunas mentales o ambigüedades. La definición formal de límite es un ingrediente clave de demostraciones rigurosas del cálculo infinitesimal. Algunas de esas pruebas se incluyen en el apéndice D. Desarrollos más completos se pueden encontrar en libros de texto de la disciplina de las matemáticas denominada "análisis".

En esta sección, se retoma la definición de límite para enunciarla de manera rigurosa y precisa. ¿Por qué es necesario? En la sección 2.2, se definieron los límites diciendo que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si $|f(x) - L|$ se hace arbitrariamente pequeño cuando x está suficientemente próximo (pero no es igual) a c. El defecto de esta definición reside en las expresiones "arbitrariamente pequeño" y "suficientemente próximo". Hay que encontrar una manera de concretar a partir de dónde se considera que algo está "suficientemente próximo".

Cuantificar desviaciones

Recuerde que la distancia entre $f(x)$ y L es $|f(x)-L|$. Es conveniente referirse a la cantidad $|f(x) - L|$ como la *desviación* entre el valor $f(x)$ y el límite L.

Considere, de nuevo, el límite trigonométrico siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \tag{1}$$

En este ejemplo, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $L = 1$, por lo que la ec. (1) establece que la desviación $|f(x) - 1|$ se hace arbitrariamente pequeña cuando x está suficientemente próximo, pero no es igual, a 0. [figura 1(A)].

Suponga que se desea que la desviación $|f(x) - 1|$ sea menor que 0,2. ¿A qué distancia de 0 debe estar x? La figura 1(B) muestra que $f(x)$ se encuentra a menos de 0,2 unidades de $L = 1$ para todos los valores de x en el intervalo $[-1, 1]$. En otras palabras, la siguiente afirmación es cierta:

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| < 0{,}2 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x| < 1$$

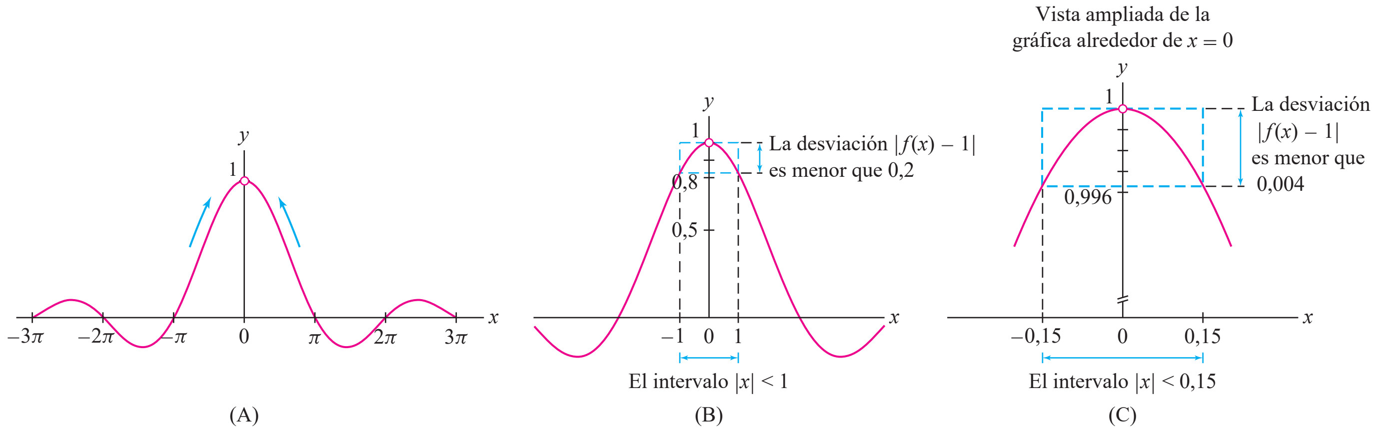


FIGURA 1 Gráficas de $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Para disminuir la desviación de 0,2 a 0,004, se necesita que x se encuentre a 0,15 unidades de 0.

Si se requiere ahora que la desviación sea menor que 0,004, se puede comprobar ampliando la gráfica, como muestra la figura 1(C), que:

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| < 0{,}004 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x| < 0{,}15$$

Aparentemente este proceso se puede continuar: ampliando más la gráfica, se puede encontrar un pequeño intervalo alrededor de $c = 0$ donde la desviación $|f(x) - 1|$ sea menor que cualquier número positivo prefijado.

Para expresar esto de manera precisa, vamos a respetar una larga tradición y usaremos las letras griegas ϵ (épsilon) y δ (delta) para denotar números pequeños que cuantifican el tamaño de la desviación y de la distancia $|x - c|$, respectivamente. En nuestro caso, $c = 0$ y $|x - c| = |x - 0| = |x|$. El significado preciso de la ec. (1) es que, para cualquier elección de $\epsilon > 0$, existe algún δ (que depende de ϵ) tal que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x| < \delta$$

El número δ especifica qué se entiende por "suficientemente próximo" para cada ϵ dado. Después de estas aclaraciones, estamos preparados para enunciar la definición formal de límite.

La definición formal de límite se suele llamar la definición ϵ-δ. La tradición de utilizar los símbolos ϵ y δ tiene su origen en los trabajos de Augustin-Louis Cauchy sobre cálculo y análisis hacia el 1820.

DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE Suponga que $f(x)$ está definida para todo x de un intervalo abierto que contenga a c (pero no necesariamente en $x = c$). Entonces:

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = L}$$

sii para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - c| < \delta}$$

Si los símbolos ϵ y δ provocan que esta definición le parezca demasiado abstracta, tenga en cuenta que se puede considerar $\epsilon = 10^{-n}$ y $\delta = 10^{-m}$. Es decir, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si, para todo $n > 0$, existe $m > 0$ tal que $|f(x) - L| < 10^{-n}$, siempre que $|x - c| < 10^{-m}$.

La condición $0 < |x-c| < \delta$ en esta definición excluye a $x = c$. En otras palabras, el límite depende únicamente de valores de $f(x)$ para x alrededor de c pero no de $f(c)$ propiamente dicha. Tal y como se ha visto en las secciones previas, el límite puede existir incluso si $f(c)$ no está definida.

■ **EJEMPLO 1** Sea $f(x) = 8x + 3$.

(a) Demuestre que $\lim_{x\to 3} f(x) = 27$ usando la definición formal de límite.

(b) Halle valores de δ apropiados para $\epsilon = 0{,}2$ y $0{,}001$.

Solución

(a) La demostración se estructurará en dos etapas.

Etapa 1. **Relación de la desviación con $|x - c|$**

Se debe de encontrar una relación entre dos valores absolutos: $|f(x) - L|$ para $L = 27$ y $|x - c|$ para $c = 3$. Observe que:

$$\underbrace{|f(x) - 27|}_{\text{Desviación}} = |(8x + 3) - 27| = |8x - 24| = 8|x - 3|$$

Luego la desviación es 8 veces mayor que $|x - 3|$.

Etapa 2. **Elección de δ (en términos de ϵ)**

Ahora puede examinar cómo reducir la desviación: si $|x - 3| < \frac{\epsilon}{8}$, entonces la desviación es menor que $8\left(\frac{\epsilon}{8}\right) = \epsilon$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$, se elige $\delta = \frac{\epsilon}{8}$. Con esta elección, se cumple que:

$$\boxed{|f(x) - 27| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{donde } \delta = \frac{\epsilon}{8}}$$

Puesto que se ha especificado δ para todo $\epsilon > 0$, se han satisfecho los requisitos de la definición formal de límite, con lo que ha quedado demostrado rigurosamente que $\lim_{x\to 3}(8x + 3) = 27$.

(b) Para el valor concreto de $\epsilon = 0{,}2$, se puede considerar $\delta = \frac{\epsilon}{8} = \frac{0{,}2}{8} = 0{,}025$:

$$|f(x) - 27| < 0{,}2 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}025$$

Esta afirmación se ilustra en la figura 2. Pero observe que *cualquier δ menor que* 0,025 *también funcionaría*. Por ejemplo, la siguiente afirmación también es cierta, aunque incorpora una restricción innecesaria sobre x:

$$|f(x) - 27| < 0{,}2 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}019$$

De manera análoga, para conseguir que la desviación sea menor que $\epsilon = 0{,}001$, se puede considerar:

$$\delta = \frac{\epsilon}{8} = \frac{0{,}001}{8} = 0{,}000125$$ ■

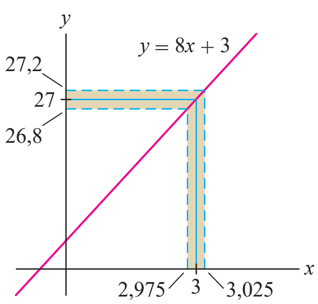


FIGURA 2 Para conseguir que la desviación sea menor que 0,2, se puede considerar $\delta = 0{,}025$ (no está dibujado a escala).

La dificultad en aplicar la definición de límite reside en el intento de relacionar $|f(x) - L|$ con $|x - c|$. Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo se puede hacer esto en casos especiales.

■ **EJEMPLO 2** Demuestre que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Solución Sea $f(x) = x^2$.

Etapa 1. **Relación de la desviación con $|x - c|$**

En este caso, se debe de relacionar la desviación $|f(x) - 4| = |x^2 - 4|$ con la cantidad $|x - 2|$ (figura 3). Esto resulta más difícil que en el ejemplo anterior, porque la desviación no es un múltiplo constante de $|x - 2|$. Para resolver este problema, considere la factorización siguiente:

$$|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2|$$

Como se va a exigir que $|x-2|$ sea pequeño, no hay inconveniente en suponer desde el principio que $|x-2| < 1$, con lo cual $1 < x < 3$. En esta situación, $|x+2|$ es menor que 5 y la desviación cumple:

$$|x^2 - 4| = |x+2|\,|x-2| < 5\,|x-2| \qquad \text{si} \qquad |x-2| < 1 \tag{2}$$

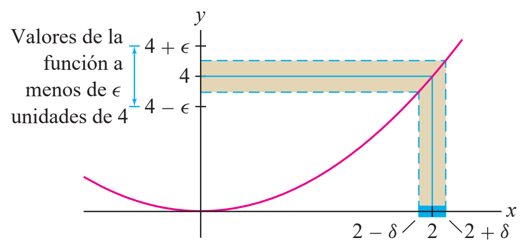


FIGURA 3 Gráf ca de $f(x) = x^2$. Se puede elegir δ tal que $f(x)$ esté a menos de ϵ unidades de 4, para todo x de $[2-\delta, 2+\delta]$.

***Etapa 2.* Elección de δ (a partir de ϵ)**

Como, según la ec. (2), $|x-2|$ es menor que $\frac{\epsilon}{5}$ y también que 1, entonces la desviación cumple:

$$|x^2 - 4| < 5|x-2| < 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

Así, la siguiente af rmación es cierta para todo $\epsilon > 0$:

$$\boxed{|x^2 - 4| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x-2| < \delta, \quad \text{donde } \delta \text{ es el mínimo de } \tfrac{\epsilon}{5} \text{ y } 1}$$

Puesto que se ha especif cado δ para todo $\epsilon > 0$, se han satisfecho los requisitos de la def nición formal de límite, con lo que ha quedado demostrado rigurosamente que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. ■

■ **EJEMPLO 3** Demuestre que $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$.

Solución

***Etapa 1.* Relación de la desviación con $|x - c|$**

La desviación es igual a:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-x}{3x}\right| = |x-3|\left|\frac{1}{3x}\right|$$

Como se va a exigir que $|x-3|$ sea pequeño, no hay inconveniente en suponer desde el principio que $|x-3| < 1$; es decir, $2 < x < 4$. Observe ahora que si $x > 2$ entonces $3x > 6$ y $\frac{1}{3x} < \frac{1}{6}$, con lo que la siguiente desigualdad es válida si $|x-3| < 1$:

RECORDATORIO *Si $a > b > 0$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Por tanto, si $3x > 6$, entonces $\frac{1}{3x} < \frac{1}{6}$.*

$$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-x}{3x}\right| = \left|\frac{1}{3x}\right|\,|x-3| < \frac{1}{6}\,|x-3| \tag{3}$$

***Etapa 2.* Elección de δ (a partir de ϵ)**

Según la ec. (3), si $|x-3| < 1$ y $|x-3| < 6\epsilon$, entonces:

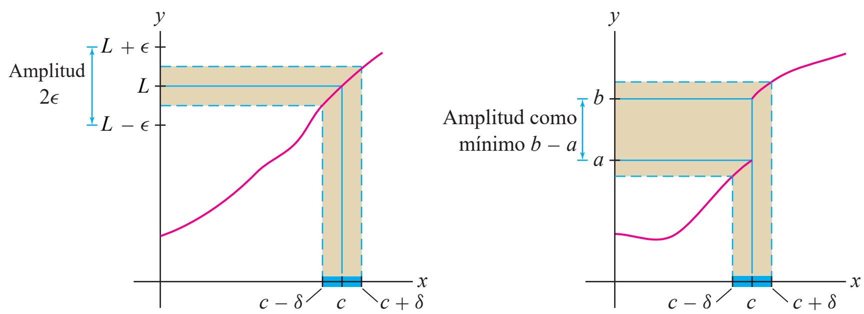
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6}\,|x-3| < \frac{1}{6} \cdot 6\epsilon = \epsilon$$

Por consiguiente, dado $\epsilon > 0$, es suf ciente considerar δ como el mínimo de los números 6ϵ y 1. Entonces:

$$\boxed{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{donde } \delta \text{ es el mínimo de } 6\epsilon \text{ y } 1}$$

Una vez más, se han cumplido los requisitos de la def nición formal de límite, con lo que se ha demostrado con rigor que $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$. ■

UN APUNTE GRÁFICO Tenga presente la interpretación gráf ca de los límites. En la f gura 4(A), $f(x)$ se aproxima a L cuando $x \to c$, porque para cada $\epsilon > 0$ se puede reducir la desviación por debajo de ϵ eligiendo δ suf cientemente pequeño. Por el contrario, la función de la f gura 4(B) presenta una discontinuidad de salto en $x = c$. La desviación no puede reducirse, sin importar lo pequeña que se escoja δ. Por este motivo, el límite no existe.



(A) La función es continua en $x = c$. Eligiendo δ suficientemente pequeño, se puede reducir la desviación por debajo de ϵ.

(B) La función no es continua en $x = c$. La desviación siempre es mayor que $(b - a)/2$, sin importar lo pequeña que sea δ.

FIGURA 4

Demostración de teoremas sobre límites

En la práctica, la def nición formal de límite casi nunca se usa para calcular límites. La mayoría se calculan mediante las propiedades básicas de los límites y otras técnicas como el teorema de compresión. Sin embargo, la def nición formal permite demostrar las propiedades de los límites de manera rigurosa y asegura que el cálculo inf nitesimal posee unos fundamentos sólidos. Se va a ilustrar esta af rmación demostrando la propiedad de la suma. El apéndice D contiene otras demostraciones del mismo tipo.

Demostración de la propiedad de la suma Suponga que:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

Se debe demostrar que $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Por la desigualdad triangular (vea la nota al margen) con $a = f(x) - L$ y $b = g(x) - M$:

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M| \qquad \boxed{4}$$

RECORDATORIO *La desigualdad triangular [ec. (1) de la sección 1.1] establece que*

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

para todo a y b.

Cada término de la derecha de (4) se puede reducir aplicando la def nición de límite. Concretamente, dado $\epsilon > 0$, se puede elegir δ tal que $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ si $0 < |x - c| < \delta$ (en principio, se pueden elegir diferentes δ para f y para g y se puede seleccionar f nalmente el menor de ambos valores de δ). Por tanto, según la ec. (4):

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - c| < \delta \qquad \boxed{5}$$

Esto demuestra que:

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L + M = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$ ■

2.9 RESUMEN

- De manera informal, la afirmación $\lim_{x\to c} f(x) = L$ significa que la desviación $|f(x) - L|$ tiende a 0 cuando x se aproxima a c.
- La *definición formal* (llamada definición ϵ-δ): $\lim_{x\to c} f(x) = L$, si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - c| < \delta$$

2.9 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) Si $|\cos x - 1|$es muy pequeño, entonces x está próximo a 0.

(b) Existe un $\epsilon > 0$ tal que $|x| < 10^{-5}$ si $0 < |\cos x - 1| < \epsilon$.

(c) Existe un $\delta > 0$ tal que $|\cos x - 1| < 10^{-5}$ si $0 < |x| < \delta$.

(d) Existe un $\delta > 0$ tal que $|\cos x| < 10^{-5}$ si $0 < |x - 1| < \delta$.

2. Suponga que para ciertos valores de ϵ y δ, se cumple que $|f(x) - 2| < \epsilon$ si $0 < |x - 3| < \delta$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones debe ser también cierta?

(a) $|f(x) - 2| < \epsilon$ si $0 < |x - 3| < 2\delta$

(b) $|f(x) - 2| < 2\epsilon$ si $0 < |x - 3| < \delta$

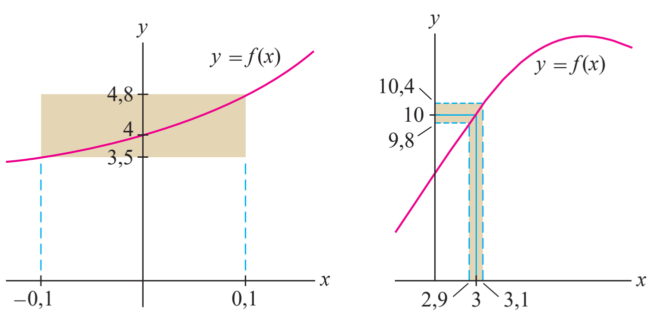
(c) $|f(x) - 2| < \dfrac{\epsilon}{2}$ si $0 < |x - 3| < \dfrac{\delta}{2}$

(d) $|f(x) - 2| < \epsilon$ si $0 < |x - 3| < \dfrac{\delta}{2}$

Problemas

1. Según la información que que se proporciona en la figura 5(A), halle valores de L, ϵ y $\delta > 0$ tales que la siguiente afirmación se cumpla: $|f(x) - L| < \epsilon$ si $|x| < \delta$.

2. Según la información que que se proporciona en la figura 5(B), halle valores de c, L, ϵ y $\delta > 0$ tales que la siguiente afirmación se cumpla: $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x - c| < \delta$.



(A) (B)

FIGURA 5

3. Considere $\lim_{x\to 4} f(x)$, siendo $f(x) = 8x + 3$.

(a) Pruebe que $|f(x) - 35| = 8|x - 4|$.

(b) Pruebe que para todo $\epsilon > 0$, $|f(x) - 35| < \epsilon$ si $0 < |x - 4| < \delta$, donde $\delta = \frac{\epsilon}{8}$. Explique por qué esto demuestra de forma rigurosa que $\lim_{x\to 4} f(x) = 35$.

4. Considere $\lim_{x\to 2} f(x)$, siendo $f(x) = 4x - 1$.

(a) Pruebe que $|f(x) - 7| < 4\delta$ si $0 < |x - 2| < \delta$.

(b) Halle δ tal que:

$$|f(x) - 7| < 0{,}01 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 2| < \delta$$

(c) Demuestre de forma rigurosa que $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$.

5. Considere $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ (vea el ejemplo 2).

(a) Pruebe que $|x^2 - 4| < 0{,}05$ si $0 < |x - 2| < 0{,}01$.

(b) Pruebe que $|x^2 - 4| < 0{,}0009$ si $0 < |x - 2| < 0{,}0002$.

(c) Halle un valor de δ tal que $|x^2 - 4|$ sea menor que 10^{-4} si $0 < |x - 2| < \delta$.

6. En relación al límite $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$:

(a) Pruebe que $|x^2 - 25| < 11|x - 5|$ si $4 < x < 6$. *Indicación:* exprese $|x^2 - 25| = |x + 5| \cdot |x - 5|$.

(b) Halle δ tal que $|x^2 - 25| < 10^{-3}$ si $0 < |x - 5| < \delta$.

(c) Demuestre de forma rigurosa el límite probando que $|x^2 - 25| < \epsilon$ si $0 < |x - 5| < \delta$, donde δ es el mínimo de $\frac{\epsilon}{11}$ y 1.

7. Considere el ejemplo 3 y halle un valor $\delta > 0$ tal que:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < 10^{-4} \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

8. Use la f gura 6 para hallar un valor de $\delta > 0$ tal que la siguiente af rmación sea cierta: $\left|1/x^2 - \frac{1}{4}\right| < \epsilon$ si $0 < |x-2| < \delta$ para $\epsilon = 0{,}03$. Después, halle un valor de δ que funcione para $\epsilon = 0{,}01$.

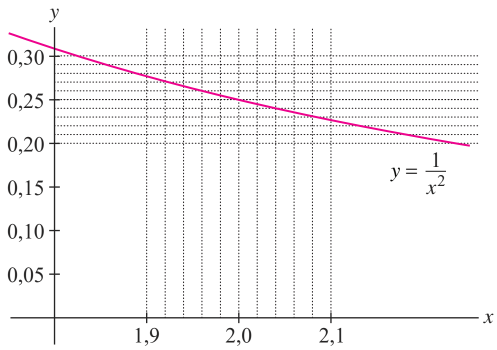


FIGURA 6

9. GU Represente gráf camente $f(x) = \sqrt{2x-1}$ junto con las rectas horizontales $y = 2{,}9$ e $y = 3{,}1$. Use esta representación para hallar un valor de $\delta > 0$ tal que $|\sqrt{2x-1} - 3| < 0{,}1$ si $0 < |x-5| < \delta$.

10. GU Represente gráf camente $f(x) = \tan x$ junto con las rectas horizontales $y = 0{,}99$ e $y = 1{,}01$. Use esta representación para hallar un valor de $\delta > 0$ tal que $|\tan x - 1| < 0{,}01$ si $0 < \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta$.

11. GU La función $f(x) = 2^{-x^2}$ cumple $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Use una representación gráf ca de f para hallar un valor de $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 1| < 0{,}001$ si $0 < |x| < \delta$.

12. GU Sea $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ y $\epsilon = 0{,}5$. Utilizando una representación gráf ca de $f(x)$, halle un valor de $\delta > 0$ tal que $\left|f(x) - \frac{16}{5}\right| < \epsilon$ para $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$. Repita el problema con $\epsilon = 0{,}2$ y $0{,}1$.

13. Considere $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x}$.

(a) Pruebe que si $|x-2| < 1$, entonces

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}|x-2|$$

(b) Sea δ el mínimo de 1 y 2ϵ. Demuestre que:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x-2| < \delta$$

(c) Halle $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01$ si $0 < |x-2| < \delta$.

(d) Demuestre rigurosamente que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

14. Considere $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+3}$.

(a) Pruebe que $|\sqrt{x+3} - 2| < \frac{1}{2}|x-1|$ si $|x-1| < 4$. *Indicación:* multiplique la desigualdad $|\sqrt{x+3} + 2|$ y observe que $|\sqrt{x+3} + 2| > 2$.

(b) Halle $\delta > 0$ tal que $|\sqrt{x+3} - 2| < 10^{-4}$ si $0 < |x-1| < \delta$.

(c) Demuestre rigurosamente que el límite es igual a 2.

15. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Con una calculadora, se ha obtenido que:

$$f\left(\frac{\pi}{4} - 0{,}1\right) \approx 0{,}633, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}707, \quad f\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}1\right) \approx 0{,}774$$

Utilice estos valores y el hecho que $f(x)$ es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para justif car la af rmación siguiente:

$$\left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| < 0{,}08 \qquad \text{si} \qquad 0 < \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < 0{,}1$$

A continuación, obtenga una representación, como la de la f gura 3, para ilustrar esta af rmación.

16. Adapte el razonamiento del ejemplo 1 para demostrar rigurosamente que $\lim\limits_{x\to c}(ax+b) = ac+b$, donde a, b y c son arbitrarios.

17. Adapte el razonamiento del ejemplo 2 para demostrar rigurosamente que $\lim\limits_{x\to c} x^2 = c^2$ para todo c.

18. Adapte el razonamiento del ejemplo 3 para demostrar rigurosamente que $\lim\limits_{x\to c} x^{-1} = \frac{1}{c}$ para todo $c \neq 0$.

En los problemas 19-24, use la def ición formal de límite para demostrar rigurosamente el enunciado.

19. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$

20. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 + x) = 4$

21. $\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1$

22. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x^3) = 0$

23. $\lim\limits_{x\to 2} x^{-2} = \dfrac{1}{4}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

25. Sea $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Demuestre rigurosamente que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe. *Indicación:* pruebe que para todo L, siempre existe algún x tal que $|x| < \delta$ pero $|f(x) - L| \geq \frac{1}{2}$, sin importar lo pequeña que se elija δ.

26. Demuestre rigurosamente que $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

27. Sea $f(x) = \text{mín}(x, x^2)$, donde $\text{mín}(a,b)$ es el mínimo de a y b. Demuestre rigurosamente que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

28. Demuestre rigurosamente que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no existe.

29. En primer lugar, use la identidad:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

para verif car la relación:

$$\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a = h \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$$ 6

Después, use la desigualdad $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1$ para $x \neq 0$ para probar que $|\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a| < |h|$ para todo a. Finalmente, demuestre rigurosamente que $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$.

Problemas avanzados

30. Unicidad del límite Demuestre que una función converge a lo sumo a un valor límite. En otras palabras, use la definición de límite para demostrar que si $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to c} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

En los problemas 31-33, demuestre el enunciado utilizando la definición de límite.

31. La propiedad del múltiplo constante [teorema 1, parte (ii) de la sección 2.3, p. 58]

32. El teorema de compresión. (teorema 1 en la sección 2.6, p. 77)

33. Propiedad del producto [teorema 1, parte (iii) en la sección 2.3, p. 58]. *Indicación:* use la identidad:

$$f(x)g(x) - LM = (f(x) - L)\,g(x) + L(g(x) - M)$$

34. Sea $f(x) = 1$ si x es racional y $f(x) = 0$ si x es irracional. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, para ningún c.

35. He aquí una función con extrañas propiedades de continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x \text{ es el número racional } p/q \text{ en su forma irreducible} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional} \end{cases}$$

(a) Pruebe que $f(x)$ es discontinua en c si c es racional. *Indicación:* existen números irracionales arbitrariamente próximos a c.

(b) Pruebe que $f(x)$ es continua en c si c es irracional. *Indicación:* sea I el intervalo $\{x : |x - c| < 1\}$. Pruebe que para cualquier $Q > 0$, I contiene como mucho un número finito de fracciones p/q con $q < Q$. Concluya que existe δ tal que cualquier fracción en $\{x : |x - c| < \delta\}$ tiene un denominador mayor que Q.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. La posición de una partícula en cada instante de tiempo t (s) es $s(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ m. Calcule su velocidad media en $[2, 5]$ y estime su velocidad instantánea en $t = 2$.

2. El precio p del gas natural en los Estados Unidos (en dólares por 1000 pies cúbicos) el primer día de cada mes en 2008 se encuentra recogido en la siguiente tabla:

E	F	M	A	M	J
6,99	7,55	8,29	8,94	9,81	10,82
J	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
10,62	8,32	7,27	6,36	5,97	5,87

Calcule la tasa de variación media de p (en dólares por 1 000 pies cúbicos por mes) en los períodos cuatrimestrales enero-marzo, abril-junio y julio-septiembre.

3. Dado un número natural n, sea $P(n)$ el número de *particiones* de n; es decir, el número de maneras distintas de escribir n como suma de uno o más números naturales. Por ejemplo, $P(4) = 5$ porque el número 4 se puede partir de cinco maneras distintas: 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1. Considerando $P(n)$ como si fuese una función continua, use la figura 1 para estimar la tasa de variación de $P(n)$ para $n = 12$.

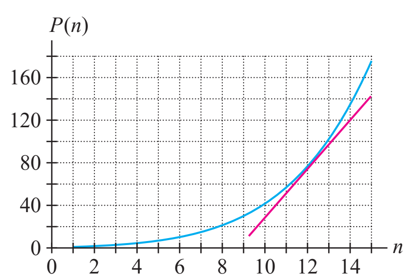


FIGURA 1 Gráfica de $P(n)$.

4. La velocidad media v (m/s) de una molécula de oxígeno en el aire a una temperatura T (°C) es $v = 25{,}7\sqrt{273{,}15 + T}$. ¿Cuál es la velocidad media a $T = 25$ °C (temperatura ambiente)? Estime la tasa de variación de la velocidad media respecto a la velocidad cuando $T = 25$ °C. ¿En qué unidades está expresada esta tasa?

En los problemas 5-10, estime el valor del límite numéricamente con dos decimales de precisión, o bien justifique que el límite no existe.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{x^2}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^x - 4}{x^2 - 4}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{2^x - 4}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{7}{1 - x^7} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3^x - 9}{5^x - 25}$

En los problemas 11-50, evalúe el límite, si existe. Si no existiera el límite, determine si los límites laterales existen (finitos o infinitos).

11. $\displaystyle\lim_{x\to 4} (3 + x^{1/2})$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{5 - x^2}{4x + 7}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{4}{x^3}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x + 1}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1}$

18. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2(a + h)^2 - 2a^2}{h}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to 9} \frac{t - 6}{\sqrt{t} - 3}$

20. $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{1 - \sqrt{s^2 + 1}}{s^2}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to -1+} \frac{1}{x + 1}$

22. $\displaystyle\lim_{y\to \frac{1}{3}} \frac{3y^2 + 5y - 2}{6y^2 - 5y + 1}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x}{x - 1}$

24. $\displaystyle\lim_{a\to b} \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a - b}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4^{3x} - 4^x}{4^x - 1}$

26. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5\theta}{\theta}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 1{,}5} \frac{[x]}{x}$

28. $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}} \sec\theta$

29. $\displaystyle\lim_{z\to -3} \frac{z + 3}{z^2 + 4z + 3}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - ax^2 + ax - 1}{x - 1}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{x^3 - b^3}{x - b}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 3x}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{x(x+3)}\right)$

34. $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{1}{4}} 3^{\tan(\pi\theta)}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{[x]}{x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{[x]}{x}$

37. $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \theta\sec\theta$

38. $\displaystyle\lim_{y\to 3} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{y}\right)^{-1/2}$

39. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 2}{\theta}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 4{,}3} \frac{1}{x - [x]}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 2-} \frac{x - 3}{x - 2}$

42. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^3}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \left(\frac{1}{\sqrt{x - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$

44. $\displaystyle\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \sqrt{2t}\,(\cos t - 1)$

45. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

46. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \cos\frac{1}{t}$

47. $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\cos\frac{1}{t}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to 5+} \frac{x^2 - 24}{x^2 - 25}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}$

50. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}$

51. Halle los límites laterales de la función $f(x)$ de la f gura 2 en $x = 0, 2, 4$. Establezca si $f(x)$ es continua por la derecha, continua por la izquierda, o ambas cosas, en estos puntos.

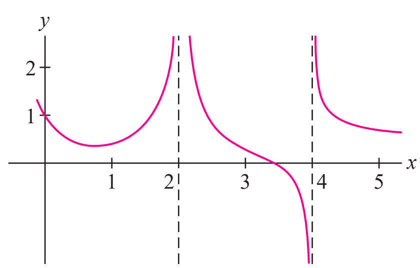


FIGURA 2

52. Dibuje la gráf ca de una función $f(x)$ tal que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2+} f(x) = 3$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x)$ exista, pero no sea igual a $f(4)$.

53. Represente gráf camente $h(x)$ y describa el tipo de discontinuidad:

$$h(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 0 \\ x^{-1/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función $h(x)$, ¿es continua por la derecha o por la izquierda?

54. Dibuje la gráf ca de una función $g(x)$ tal que:

$$\lim_{x\to -3-} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -3+} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 4} g(x) = +\infty$$

55. Halle los puntos de discontinuidad de:

$$g(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ |x - 1| & \text{si } |x| \ge 1 \end{cases}$$

Determine el tipo de discontinuidad y si $g(x)$ es continua por la derecha o por la izquierda.

56. Pruebe que $f(x) = x2^{\operatorname{sen} x}$ es continua en su dominio.

57. Halle una constante b tal que $h(x)$ sea continua en $x = 2$, donde:

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } |x| < 2 \\ b - x^2 & \text{si } |x| \ge 2 \end{cases}$$

Con esta elección de b, halle todos los puntos de discontinuidad.

En los problemas 58-63, halle las asíntotas horizontales de la función calculando los límites en el inf nito.

58. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 4}{2x^2 - x}$

59. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x^4}{x - 1}$

60. $f(u) = \dfrac{8u - 3}{\sqrt{16u^2 + 6}}$

61. $f(u) = \dfrac{2u^2 - 1}{\sqrt{6 + u^4}}$

62. $f(x) = \dfrac{3x^{2/3} + 9x^{3/7}}{7x^{4/5} - 4x^{-1/3}}$

63. $f(t) = \dfrac{t^{1/3} - t^{-1/3}}{(t - t^{-1})^{1/3}}$

64. Calcule (a)-(d), suponiendo que:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6, \qquad \lim_{x\to 3} g(x) = 4$$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} (f(x) - 2g(x))$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} x^2 f(x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x) + x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} (2g(x)^3 - g(x)^{3/2})$

65. Suponga que los siguientes límites existen:

$$A = \lim_{x\to a} f(x), \qquad B = \lim_{x\to a} g(x), \qquad L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Demuestre que si $L = 1$, entonces $A = B$. *Indicación:* no se puede usar la propiedad del cociente si $B = 0$; en su lugar, aplique la propiedad del producto a L y B.

66. GU Sea $g(t) = (1 + 2^{1/t})^{-1}$ para $t \neq 0$. ¿Cómo se debe def nir $g(0)$ para que $g(t)$ sea continua por la izquierda en $t = 0$?

67. Con las notaciones del problema 65, proporcione un ejemplo en el que L exista pero no existan ni A ni B.

68. ¿Verdadero o falso?

(a) Si $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

(b) Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, entonces $f(0) = 0$.

(c) Si $\lim_{x\to -7} f(x) = 8$, entonces $\lim_{x\to -7} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{8}$.

(d) Si $\lim_{x\to 5+} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 5-} f(x) = 8$, entonces $\lim_{x\to 5} f(x) = 6$.

(e) Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(f) Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$, entonces $\lim_{x\to 5} f(x)^3 = 8$.

69. Sea $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$, donde $[x]$ es la función parte entera. Pruebe que para todo $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$$

A continuación, aplique el teorema de compresión para demostrar que:

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

Indicación: Considere los límites laterales por separado.

70. Sean r_1 y r_2 los ceros de $f(x) = ax^2 - 2x + 20$. Observe que $f(x)$ "se aproxima" a la función lineal $L(x) = -2x + 20$ cuando $a \to 0$. Como $r = 10$ es el único cero de $L(x)$, cabe esperar que al menos uno de los ceros de $f(x)$ tiendan a 10 cuando $a \to 0$ (figura 3). Demuestre que los ceros se pueden etiquetar de manera que $\lim_{a\to 0} r_1 = 10$ y $\lim_{a\to 0} r_2 = +\infty$.

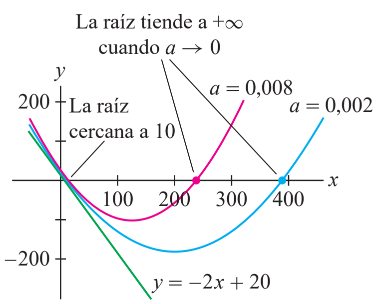


FIGURA 3 Gráficas de $f(x) = ax^2 - 2x + 20$.

71. Aplique el TVI para demostrar que las curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$ se intersecan.

72. Aplique el TVI para demostrar que $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2 + 2}{\cos x + 2}$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

73. Aplique el TVI para demostrar que $2^{-x^2} = x$ tiene una solución en $(0, 1)$.

74. Utilice el método de la bisección para localizar una solución de $x^2 - 7 = 0$ con dos decimales de precisión.

75. Proporcione un ejemplo de una función (discontinua) que no cumpla la conclusión del TVI en $[-1, 1]$. A continuación, pruebe que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

cumple la conclusión del TVI en cualquier intervalo $[-a, a]$, pese a que f es discontinua en $x = 0$.

76. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$.

(a) Pruebe que $\left|f(x) - \frac{1}{4}\right| < \dfrac{|x - 2|}{12}$ si $|x - 2| < 1$. *Indicación:* observe que $|4(x + 2)| > 12$ si $|x - 2| < 1$.

(b) Halle $\delta > 0$ tal que $\left|f(x) - \frac{1}{4}\right| < 0{,}01$ si $|x - 2| < \delta$.

(c) Demuestre rigurosamente que $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{4}$.

77. GU Represente gráficamente la función $f(x) = x^{1/3}$. Amplíe la representación gráfica para hallar $\delta > 0$ tal que $|x^{1/3} - 2| < 0{,}05$ si $|x - 8| < \delta$.

78. Utilice el hecho que $f(x) = 2^x$ es una función estrictamente creciente para hallar un valor de δ tal que $|2^x - 8| < 0{,}001$ si $|x - 2| < \delta$. *Indicación:* halle c_1 y c_2 tales que $7{,}999 < f(c_1) < f(c_2) < 8{,}001$.

79. Demuestre rigurosamente que $\lim_{x\to -1} (4 + 8x) = -4$.

80. Demuestre rigurosamente que $\lim_{x\to 3} (x^2 - x) = 6$.

El cálculo inf nitesimal es el fundamento de nuestra comprensión del movimiento, incluyendo los principios aerodinámicos que hacen que el vuelo supersónico sea posible.

3 DERIVACIÓN

El cálculo diferencial es el estudio de la derivada, y la derivación es el proceso de calcular derivadas. ¿Qué es una derivada? Hay tres respuestas igualmente importantes: una derivada es una tasa de variación, es la pendiente de una recta y (de manera más formal), es el límite de un cociente incremental, tal y como se explicará a continuación. En este capítulo, se van a examinar estas tres facetas de la derivada y a obtener las reglas básicas de derivación. Cuando domine estas técnicas, dispondrá de una de las herramientas más útiles y f exibles que las matemáticas pueden ofrecer.

3.1 Definición de la derivada

Considere las siguientes dos preguntas: ¿Cuál es la def nición precisa de un recta tangente? ¿Cómo se puede calcular su pendiente? Para responder a estas dos cuestiones, volvamos a revisar la relación entre la recta tangente y las rectas secantes que se mencionó por primera vez en la sección 2.1.

La pendiente de la recta secante por dos puntos distintos $P = (a, f(a))$ y $Q = (x, f(x))$ de la gráf ca de una función $f(x)$ es [f gura 1(A)]:

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

donde

$$\Delta f = f(x) - f(a) \qquad \text{y} \qquad \Delta x = x - a$$

RECORDATORIO *Una **recta secante** es cualquier recta por dos puntos sobre una curva o una gráfica.*

La expresión $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se denomina el **cociente incremental**.

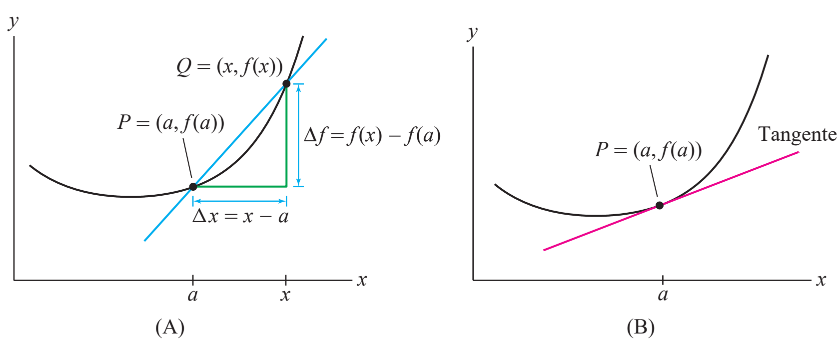


FIGURA 1 La pendiente de la recta secante es $\Delta f/\Delta x$. El objetivo es calcular la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$.

Ahora, observe lo que ocurre cuando Q se acerca a P o, equivalentemente, cuando x tiende a a. En la f gura 2 se observa que las rectas secantes se acercan cada vez más a la recta tangente. Si se imagina a Q moviéndose hacia P, entonces la recta secante parece dirigirse hacia la recta tangente, como en (D). Por tanto, se espera que las pendientes de las rectas secantes tiendan a la pendiente de la recta tangente.

Según esta idea, se def ne la **derivada** $f'(a)$ (que se lee "f prima de a") como el límite

$$f'(a) = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\text{Límite de las pendientes} \\ \text{de las rectas secantes}}}$$

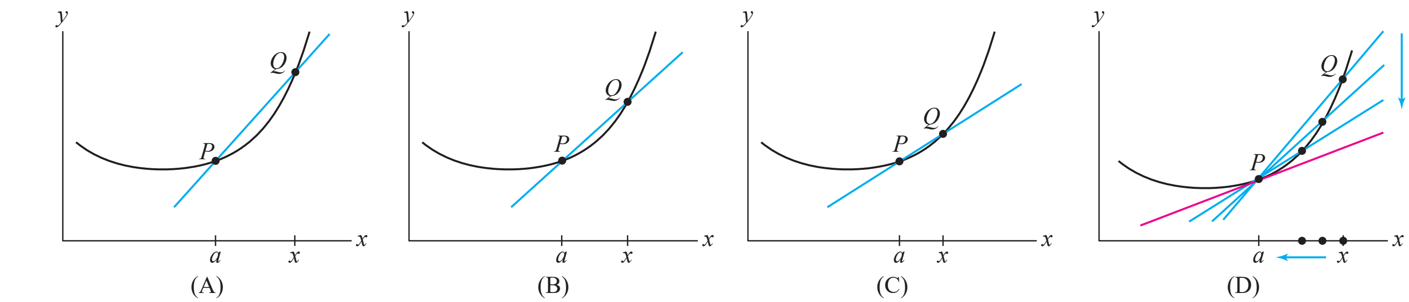


FIGURA 2 Las rectas secantes se aproximan a la recta tangente a medida que Q se acerca a P.

Hay otra manera de expresar el cociente diferencial. Considere una nueva variable h def nida como:

$$h = x - a$$

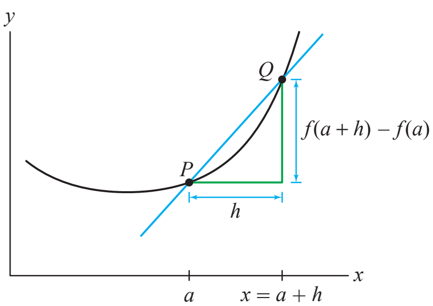


FIGURA 3 El cociente incremental se puede expresar en términos de h.

Se tiene que $x = a + h$ y para $x \neq a$ (f gura 3),

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La variable h tiende a 0 cuando $x \to a$, por lo que se puede reescribir la derivada como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cada una de las dos maneras de expresar la derivada es útil. La versión que usa h suele ser más cómoda para realizar cálculos.

DEFINICIÓN La derivada La derivada de $f(x)$ en $x = a$ es el límite (si existe) de los cocientes incrementales:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \qquad \boxed{1}$$

Cuando el límite existe, se dice que f es **derivable** en $x = a$. Una def nición equivalente de la derivada es:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad \boxed{2}$$

Ahora se puede def nir la recta tangente de una manera precisa, como la recta de pendiente $f'(a)$ que pasa por $P = (a, f(a))$.

RECORDATORIO *La ecuación de la recta de pendiente m que pasa por $P = (a, b)$ en la forma punto-pendiente es:*

$$y - b = m(x - a)$$

DEFINICIÓN Recta tangente Suponga que $f(x)$ es derivable en $x = a$. La recta tangente a la gráf ca de $y = f(x)$ en $P = (a, f(a))$ es la recta que pasa por P de pendiente $f'(a)$. La ecuación de la recta tangente en la forma punto-pendiente es:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)} \qquad \boxed{3}$$

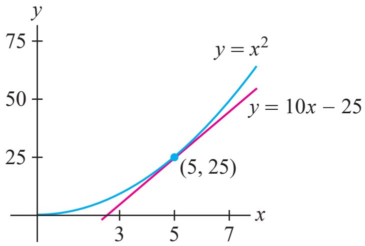


FIGURA 4 Recta tangente a $y = x^2$ en $x = 5$.

■ **EJEMPLO 1 Ecuación de una recta tangente** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráf ca de $f(x) = x^2$ en $x = 5$.

Solución En primer lugar,se debe calcular $f'(5)$. Se puede utilizar la ec. (1) o la ec. (2) indistintamente. Usando la ec. (2), se tiene:

$$f'(5) = \lim_{x\to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5}(x + 5) = 10$$

A continuación, se puede aplicar la ec. (3) con $a = 5$. Como $f(5) = 25$, una ecuación de la recta tangente es $y - 25 = 10(x - 5)$ o, en la forma pendiente-ordenada en el origen: $y = 10x - 25$ (f gura 4). ■

Isaac Newton se refería al cálculo como el "método de fluxiones" (del término en latín para "flujo"), pero el término "cálculo diferencial", introducido en su denominación en latín como "calculus differentialis" por Gottfried Wilhelm Leibniz, finalmente se impuso y fue adoptado universalmente.

Los dos ejemplos siguientes ilustran la derivación (el proceso del cálculo de la derivada) usando la ec. (1). Para mayor claridad, se realizarán los cálculos en tres etapas.

■ **EJEMPLO 2** Calcule $f'(3)$, donde $f(x) = x^2 - 8x$.

Solución Usando la ec. (1), se puede expresar el cociente incremental en $a = 3$ como:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

***Etapa 1.* Escriba el numerador del cociente incremental**

$$f(3+h) - f(3) = \left((3+h)^2 - 8(3+h)\right) - \left(3^2 - 8(3)\right)$$

$$= \left((9 + 6h + h^2) - (24 + 8h)\right) - (9 - 24)$$

$$= h^2 - 2h$$

***Etapa 2.* Divida por *h* y simplif que**

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h} = \underbrace{\frac{h(h-2)}{h} = h - 2}_{\text{Cancele } h}$$

***Etapa 3.* Calcule el límite**

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 2) = -2$$ ■

■ **EJEMPLO 3** Dibuje la gráf ca de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y la recta tangente en $x = 2$.

(a) Según la gráf ca, ¿espera que $f'(2)$ sea positiva o negativa?

(b) Halle la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

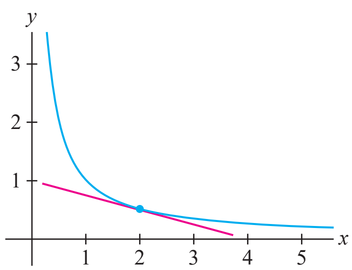


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x) = \frac{1}{x}$. La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Solución La gráf ca y la recta tangente en $x = 2$ se muestran en la f gura 5.

(a) Se observa que la recta tangente tiene pendiente negativa, por lo que $f'(2)$ debe ser negativa.

(b) Se calcula $f'(2)$ siguiendo los tres pasos establecidos en el ejemplo anterior.

***Etapa 1.* Escriba el numerador del cociente incremental**

$$f(2+h) - f(2) = \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)} = -\frac{h}{2(2+h)}$$

***Etapa 2.* Divida por *h* y simplif que**

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{h}{2(2+h)}\right) = -\frac{1}{2(2+h)}$$

Etapa 3. **Calcule el límite**

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

El valor de la función es $f(2) = \frac{1}{2}$, por lo que la recta tangente pasa por $(2, \frac{1}{2})$ y su ecuación es:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

En la forma pendiente-ordenada en el origen, la ecuación es $y = -\frac{1}{4}x + 1$. ■

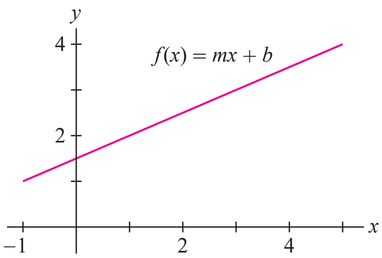


FIGURA 6 La derivada de $f(x) = mx + b$ es $f'(a) = m$ para todo a.

La gráf ca de una función lineal $f(x) = mx + b$ (donde m y b son constantes) es una recta de pendiente m. La recta tangente en cualquier punto coincide con la recta propiamente dicha (f gura 6), por lo que cabe esperar que $f'(a) = m$ para todo a. Se puede comprobar obteniendo la derivada:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(m(a+h) + b) - (ma + b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = m$$

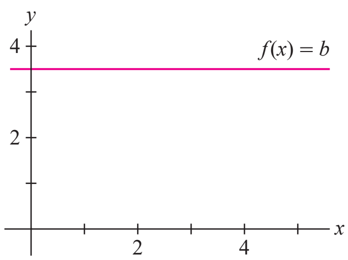


FIGURA 7 La derivada de una función constante $f(x) = b$ es $f'(a) = 0$ para todo a.

Si $m = 0$, entonces $f(x) = b$ es constante y $f'(a) = 0$ (f gura 7). En resumen,

TEOREMA 1 Derivada de una función lineal y de una función constante

- Si $f(x) = mx + b$ es una función lineal, entonces $f'(a) = m$ para todo a.
- Si $f(x) = b$ es una función constante, entonces $f'(a) = 0$ para todo a.

■ **EJEMPLO 4** Halle la derivada de $f(x) = 9x - 5$ en $x = 2$ y en $x = 5$.

Solución Se tiene que $f'(a) = 9$ para todo a. Así, $f'(2) = f'(5) = 9$. ■

Estimación de la derivada

Las aproximaciones de la derivada son útiles en situaciones en que no se puede evaluar $f'(a)$ de forma exacta. Como la derivada es el límite de cocientes incrementales, el cociente incremental debería proporcionar una buena aproximación si h es suf cientemente pequeña:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{si } h \text{ es pequeña}$$

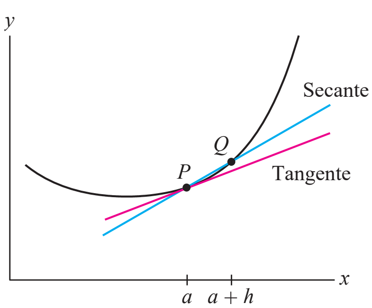


FIGURA 8 Cuando h es pequeña, la recta secante tiene prácticamente la misma pendiente que la recta tangente.

De forma gráf ca, se está af rmando que si h es pequeña, la pendiente de la recta secante es casi igual a la pendiente de la recta tangente (f gura 8).

■ **EJEMPLO 5** Aproxime la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \frac{\pi}{6}$.

Solución Se calcula el cociente incremental para valores de h pequeños:

$$\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} + h) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{h} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} + h) - 0{,}5}{h}$$

Según se observa en la tabla 1 de la siguiente página, parece que el límite tiene una expansión decimal que empieza en 0,866. En otras palabras, $f'(\frac{\pi}{6}) \approx 0{,}866$. ■

TABLA 1 Valores del cociente incremental para h pequeñas

$h > 0$	$\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}+h)-0{,}5}{h}$	$h < 0$	$\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}+h)-0{,}5}{h}$
0,01	0,863511	−0,01	0,868511
0,001	0,865775	−0,001	0,866275
0,0001	0,**8660**00	−0,0001	0,**866**050
0,00001	0,**8660**229	−0,00001	0,**8660**279

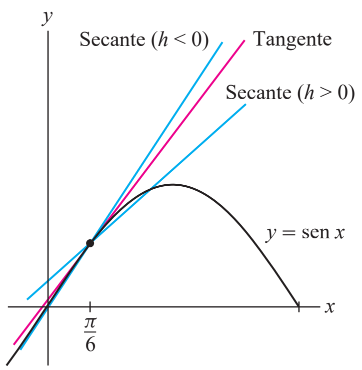


FIGURA 9 La recta tangente queda comprimida *entre* las rectas secantes para $h > 0$ y $h < 0$.

Esta técnica de aproximación de una cantidad desconocida utilizando que se encuentra entre dos valores conocidos ("comprimiéndola"), se usa con frecuencia en cálculo.

En el siguiente ejemplo, se razona gráf camente para obtener la precisión de las aproximaciones obtenidas en el ejemplo 5.

■ **EJEMPLO 6** GU **Análisis gráfico de la precisión** Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pruebe que la aproximación $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}8660$ es correcta hasta cuatro dígitos decimales.

Solución El la f gura 9, observe que la posición de la recta secante respecto a la recta tangente, depende de si h es positiva o negativa. Si $h > 0$, la pendiente de la recta secante es *menor* que la pendiente de la recta tangente y es *mayor*, si $h < 0$. Así, la diferencia entre los cocientes de la segunda columna de la tabla 1 son menores que $f'(\frac{\pi}{6})$ y los de la cuarta columna son mayores que $f'(\frac{\pi}{6})$. De la última línea de la tabla 1 se concluye que:

$$0{,}866022 \le f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \le 0{,}866028$$

Así, la aproximación $f'(\frac{\pi}{6}) \approx 0{,}8660$ tiene una precisión de cuatro cifras decimales. En la sección 3.6, se verá que el valor exacto es $f'(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}8660254$, casi a medio camino entre 0,866022 y 0,866028. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Se necesitan realmente los límites? Es natural preguntarse si los límites son realmente necesarios. La recta tangente es fácil de visualizar. Entonces, ¿existe alguna manera mejor o más sencilla de encontrar su ecuación? La respuesta la proporciona la historia: los métodos del cálculo basados en límites han resistido el paso del tiempo y se usan más hoy en día que antes.

A parte de la evidencia histórica, se puede ver directamente la razón por la que los límites desempeñan este papel fundamental. La pendiente de una recta se puede calcular a partir de las coordenadas de *dos* puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ de esa recta:

$$\text{Pendiente de la recta} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta fórmula no se puede aplicar a la recta tangente porque sólo se sabe que pasa por el punto $P = (a, f(a))$. Los límites proporcionan una manera ingeniosa de sortear este obstáculo. Se elige un punto $Q = (a + h, f(a + h))$ de la gráf ca y cercano a P y se considera la recta secante correspondiente. La pendiente de esta recta secante es simplemente una aproximación a la pendiente de la recta tangente:

$$\text{Pendiente de la recta secante} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx \text{Pendiente de la recta tangente}$$

Pero esta aproximación mejora cuando $h \to 0$. Luego pasando al límite, estas aproximaciones se transforman en el valor exacto de la pendiente.

3.1 RESUMEN

- El *cociente incremental*:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (a+h, f(a+h))$ de la gráf ca de $f(x)$.

- La *derivada* $f'(a)$ se def ne por medio de los siguientes límites equivalentes:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si el límite existe, se dice que f es *derivable* en $x = a$.

- Por def nición, la recta tangente en $P = (a, f(a))$ es la recta que pasa por P de pendiente $f'(a)$ [suponiendo que $f'(a)$ exista].
- Ecuación de la recta tangente en la forma punto-pendiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

- Para calcular $f'(a)$ a partir de la def nición:

  Paso 1. Escriba el numerador del cociente incremental.

  Paso 2. Divida por h y simplif que.

  Paso 3. Calcule la derivada pasando al límite.

- Para valores pequeños de h, se tiene la aproximación $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

3.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué rectas de la f gura 10 son tangentes a la curva?

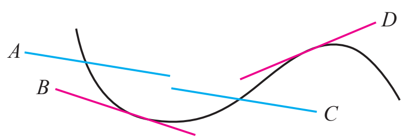


FIGURA 10

2. ¿Cuáles son las dos maneras de expresar el cociente incremental?

3. Halle a y h tales que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ sea igual a la pendiente de la recta secante que pasa por $(3, f(3))$ y $(5, f(5))$.

4. ¿Qué derivada es aproximada por $\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}+0{,}0001)-1}{0{,}0001}$?

5. ¿Qué representan las siguientes cantidades, en términos de la gráf -ca de $f(x) = \operatorname{sen} x$?

(a) $\operatorname{sen} 1{,}3 - \operatorname{sen} 0{,}9$ **(b)** $\dfrac{\operatorname{sen} 1{,}3 - \operatorname{sen} 0{,}9}{0{,}4}$ **(c)** $f'(0{,}9)$

Problemas

1. Sea $f(x) = 5x^2$. Pruebe que $f(3+h) = 5h^2 + 30h + 45$. A continuación, pruebe que:

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 5h + 30$$

y calcule $f'(3)$ pasando al límite cuando $h \to 0$.

2. Sea $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$. Pruebe que la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(2+h, f(2+h))$ es $2h+5$. A continuación, use esta fórmula para calcular la pendiente de:

(a) La recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(3, f(3))$.

(b) La recta tangente en $x = 2$ (pasando al límite).

En los problemas 3-6, calcule $f'(a)$ de dos maneras: usando la ec. (1) y la ec. (2).

3. $f(x) = x^2 + 9x, \quad a = 0$

4. $f(x) = x^2 + 9x, \quad a = 2$

5. $f(x) = 3x^2 + 4x + 2, \quad a = -1$

6. $f(x) = x^3, \quad a = 2$

Los problemas 7-10, hacen referencia a la figura 11.

7. Halle la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(2{,}5, f(2{,}5))$. ¿Es menor o mayor que $f'(2)$? Justifique su respuesta.

8. Estime $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ para $h = -0{,}5$. ¿Qué representa esta cantidad? ¿Es menor o mayor que $f'(2)$? Justifique su respuesta.

9. Calcule aproximadamente $f'(1)$ y $f'(2)$.

10. Halle un valor de h para el que $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$.

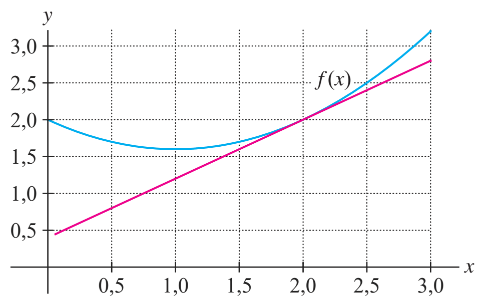


FIGURA 11

Los problemas 11-14, se refieren a la figura figura 12.

11. Determine $f'(a)$ para $a = 1, 2, 4, 7$.

12. ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?

13. ¿Qué valor es mayor, $f'(5{,}5)$ o $f'(6{,}5)$?

14. Pruebe que $f'(3)$ no existe.

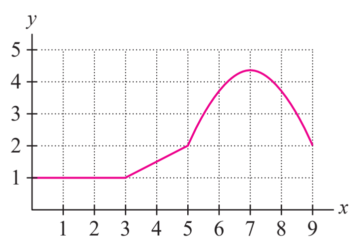


FIGURA 12 Gráfica de $f(x)$.

En los problemas 15-18, use la definición para calcular la derivada de la función lineal.

15. $f(x) = 7x - 9$

16. $f(x) = 12$

17. $g(t) = 8 - 3t$

18. $k(z) = 14z + 12$

19. Halle la ecuación de la recta tangente en $x = 3$, suponiendo que $f(3) = 5$ y $f'(3) = 2$.

20. Halle $f(3)$ y $f'(3)$, sabiendo que la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $a = 3$ es $y = 5x + 2$.

21. Describa la recta tangente en un punto arbitrario de la "curva" $y = 2x + 8$.

22. Suponga que $f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 5h$. Calcule:

(a) La pendiente de la recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(6, f(6))$

(b) $f'(2)$

23. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. ¿Es $f(-2+h)$ igual a $\dfrac{1}{-2+h}$ o a $\dfrac{1}{-2} + \dfrac{1}{h}$? Calcule el cociente incremental en $a = -2$ con $h = 0{,}5$.

24. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Es $f(5+h)$ igual a $\sqrt{5+h}$ o a $\sqrt{5} + \sqrt{h}$? Calcule el cociente incremental en $a = 5$ con $h = 1$.

25. Sea $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Calcule $f'(5)$ probando que:

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5+h}(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})}$$

26. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $x = 9$.

En los problemas 27-44, use la definición para calcular $f'(a)$, y halle la ecuación de la recta tangente.

27. $f(x) = 2x^2 + 10x, \quad a = 3$

28. $f(x) = 4 - x^2, \quad a = -1$

29. $f(t) = t - 2t^2, \quad a = 3$

30. $f(x) = 8x^3, \quad a = 1$

31. $f(x) = x^3 + x, \quad a = 0$

32. $f(t) = 2t^3 + 4t, \quad a = 4$

33. $f(x) = x^{-1}, \quad a = 8$

34. $f(x) = x + x^{-1}, \quad a = 4$

35. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}, \quad a = -2$

36. $f(t) = \dfrac{2}{1-t}, \quad a = -1$

37. $f(x) = \sqrt{x+4}, \quad a = 1$

38. $f(t) = \sqrt{3t+5}, \quad a = -1$

39. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad a = 4$

40. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad a = 4$

41. $f(t) = \sqrt{t^2+1}, \quad a = 3$

42. $f(x) = x^{-2}, \quad a = -1$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad a = 0$

44. $f(t) = t^{-3}, \quad a = 1$

45. En la figura 13 se muestran los datos obtenidos por el biólogo Julian Huxley (1887-1975) sobre el peso promedio de las astas W del ciervo macho como función de la edad t. Estime la derivada en $t = 4$. ¿Para qué valores de t es la pendiente de la recta tangente igual a cero? ¿Para qué valores es negativa?

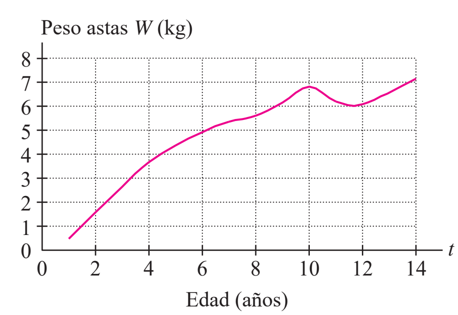
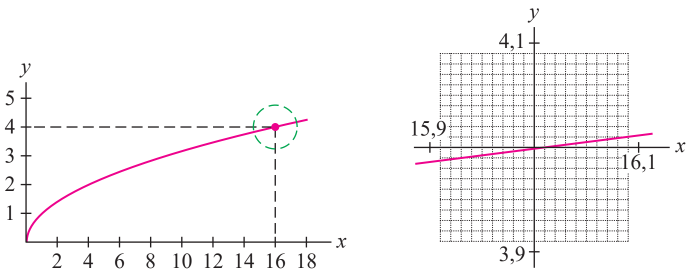


FIGURA 13

46. La figura 14(A) muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. La ampliación en la figura 14(B) muestra que la gráfica es casi una línea recta alrededor de $x = 16$. Aproxime la pendiente de esta recta y considere el valor obtenido como una estimación de $f'(16)$. A continuación, calcule $f'(16)$ y compare con su estimación.



(A) Gráf ca de $y = \sqrt{x}$ (B) Ampliación alrededor de (16, 4)

FIGURA 14

47. GU Sea $f(x) = \dfrac{4}{1 + 2^x}$.

(a) Represente gráf camente $f(x)$ en $[-2, 2]$. A continuación, amplíe alrededor de $x = 0$ hasta que la gráf ca parezca recta y estime la pendiente $f'(0)$.

(b) Use (a) para hallar una ecuación aproximada de la recta tangente en $x = 0$. Represente esta recta y $f(x)$ en el mismo sistema de ejes.

48. GU Sea $f(x) = \cot x$. Estime $f'(\frac{\pi}{2})$ gráf camente mediante una ampliación de la gráf ca de $f(x)$ cerca de $x = \frac{\pi}{2}$.

49. Determine los intervalos del eje x sobre los que la derivada de la función representada en la f gura 15 es positiva.

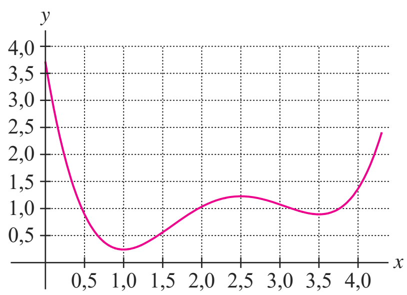


FIGURA 15

50. Dibuje la gráf ca de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ y conjeture el valor de $f'(\frac{\pi}{2})$. A continuación, calcule el cociente incremental en $x = \frac{\pi}{2}$ para dos valores pequeños de h, uno positivo y otro negativo. ¿Resultan consistentes sus cálculos y su conjetura?

En los problemas 51-56, cada límite representa una derivada $f'(a)$. Halle $f(x)$ y a.

51. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^3 - 125}{h}$

52. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5}$

53. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - 0{,}5}{h}$

54. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{4}} \frac{x^{-1} - 4}{x - \frac{1}{4}}$

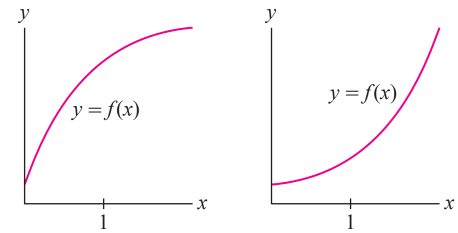
55. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{5^{2+h} - 25}{h}$

56. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{5^h - 1}{h}$

57. Aplique el método del ejemplo 6 a $f(x) = \operatorname{sen} x$ para determinar $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ con cuatro decimales de precisión.

58. Aplique el método del ejemplo 6 a $f(x) = \cos x$ para determinar $f'(\frac{\pi}{5})$ con cuatro decimales de precisión. Utilice la gráf ca de $f(x)$ para explicar cómo funciona el método en este caso.

59. Para cada gráf ca de la f gura 16, determine si $f'(1)$ es mayor o menor que la pendiente de la recta secante entre $x = 1$ y $x = 1 + h$ para $h > 0$. Justif que su respuesta.



(A) (B)

FIGURA 16

60. Considere la gráf ca de $f(x) = 2^x$ en la f gura 17.

(a) Justif que gráf camente por qué, para $h > 0$, se verif ca:

$$\frac{f(-h) - f(0)}{-h} \le f'(0) \le \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

(b) Use (a) para probar que $0{,}69314 \le f'(0) \le 0{,}69315$.

(c) De manera análoga, calcule $f'(x)$ con una precisión de cuatro decimales, para $x = 1, 2, 3, 4$.

(d) Ahora, calcule los cocientes $f'(x)/f'(0)$ para $x = 1, 2, 3, 4$. ¿Puede conjeturar una fórmula aproximada para $f'(x)$?

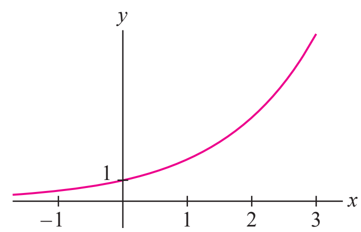


FIGURA 17 Gráf ca de $f(x) = 2^x$.

61. GU Dibuje la gráf ca de $f(x) = x^{5/2}$ en $[0, 6]$.

(a) Use la representación para justif car las desigualdades, para $h > 0$:

$$\frac{f(4) - f(4-h)}{h} \le f'(4) \le \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

(b) Use (a) para calcular $f'(4)$ con cuatro decimales de precisión.

(c) Utilice un programa informático adecuado para representar gráf camente $f(x)$ y la recta tangente en $x = 4$, usando su estimación para $f'(4)$.

62. GU Compruebe que $P = (1, \frac{1}{2})$ se encuentra tanto en la gráf ca de $f(x) = 1/(1 + x^2)$ como en la de $L(x) = \frac{1}{2} + m(x - 1)$, para cualquier pendiente m. Represente $f(x)$ y $L(x)$ en el mismo sistema de ejes, para diferentes valores de m, hasta que encuentre un valor de m para el que $y = L(x)$ le parezca tangente a la gráf ca de $f(x)$. ¿Cuál es su estimación de $f'(1)$?

63. GU Use una representación gráf ca de $f(x) = x^x$ para estimar un valor de c tal que $f'(c) = 0$. Halle c con la suf ciente precisión para que:

$$\left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right| \le 0{,}006 \qquad \text{si} \quad h = \pm 0{,}001$$

64. GU Represente $f(x) = x^x$ y $y = 2x + a$ en el mismo sistema de ejes, para diferentes valores de a, hasta que la recta sea tangente a la gráfica. Estime entonces el valor de c tal que $f'(c) = 2$.

En los problemas 65-71, estime las derivadas utilizando el ***cociente incremental simétrico*** *(CIS), definido como la media de los cocientes incrementales en h y en −h:*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right) = \\ = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \qquad \boxed{4}$$

El CIS suele proporcionar una mejor aproximación a la derivada que el cociente incremental.

65. La presión del vapor de agua a temperatura T (en kelvins) es la presión atmosférica P a la que la evaporación neta no se lleva a cabo. Use la siguiente tabla para estimar $P'(T)$ cuando $T = 303, 313, 323, 333, 343$, calculando el CIS dado por la ec. (4) con $h = 10$.

T (K)	293	303	313	323	333	343	353
P (atm)	0,0278	0,0482	0,0808	0,1311	0,2067	0,3173	0,4754

66. Use el CIS con $h = 1$ años para estimar $P'(T)$ en los años 2000, 2002, 2004, 2006, donde $P(T)$ es la producción de etanol de EE.UU. (figura 18). Exprese su respuesta en las unidades apropiadas.

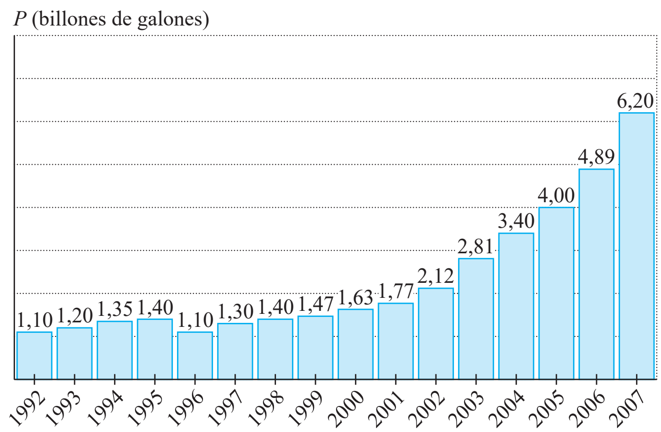


FIGURA 18 Producción de etanol de EE.UU.

En los problemas 67-68, la velocidad de circulación S por cierta carretera (en km/h) varía como función de la densidad de tráfico q (número de coches por kilómetro de carretera). Use los siguientes datos para resolver las preguntas que se plantean.

q (densidad)	60	70	80	90	100
S (velocidad)	72,5	67,5	63,5	60	56

67. Estime $S'(80)$.

68. Explique por qué $V = qS$, llamado *volumen de tráfico*, es igual al número de automóviles que pasan por un punto por hora. Use los datos para estimar $V'(80)$.

Problemas 69-71: la corriente (en amperios) en el instante t (en segundos) que pasa por el circuito de la figura 19 viene dada por la ley de Kirchhoff:

$$i(t) = Cv'(t) + R^{-1}v(t)$$

donde $v(t)$ es el voltaje (en voltios), C es la capacidad (en faradios) y R es la resistencia (en ohmios, Ω).

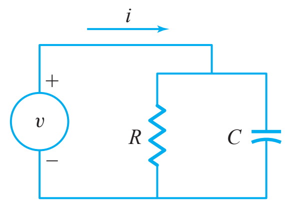


FIGURA 19

69. Calcule la corriente en $t = 3$ si

$$v(t) = 0{,}5t + 4 \text{ V}$$

donde $C = 0{,}01$ F y $R = 100\ \Omega$.

70. Use los siguientes datos para estimar $v'(10)$ (mediante un CIS). A continuación, estime $i(10)$, suponiendo que $C = 0{,}03$ y $R = 1000$.

t	9,8	9,9	10	10,1	10,2
$v(t)$	256,52	257,32	258,11	258,9	259,69

71. Suponga que $R = 200\ \Omega$ pero que C es desconocido. Use los siguientes datos para estimar $v'(4)$ (mediante un CIS) y deduzca un valor aproximado para la capacidad C.

t	3,8	3,9	4	4,1	4,2
$v(t)$	388,8	404,2	420	436,2	452,8
$i(t)$	32,34	33,22	34,1	34,98	35,86

Problemas avanzados

72. El CIS suele aproximar la derivada mejor de lo que lo hace el cociente incremental ordinario. Sean $f(x) = 2^x$ y $a = 0$. Calcule el CIS con $h = 0{,}001$ y el cociente incremental ordinario con $h = \pm 0{,}001$. Compárelos con el valor real, que es $f'(0) = \ln 2$.

73. Explique cómo el cociente incremental simétrico definido en la ec. (4) se puede interpretar como la pendiente de una recta secante.

74. ¿Cuál de las dos funciones de la figura 20 cumple la desigualdad

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

para $h > 0$? Razónelo en términos de rectas secantes.

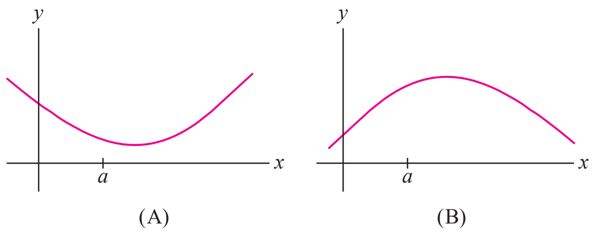


FIGURA 20

75. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio cuadrático, entonces el CIS en $x = a$ (para cualquier $h \neq 0$) es *igual* a $f'(a)$. Explique el signif cado gráf co de este resultado.

76. Sea $f(x) = x^{-2}$. Calcule $f'(1)$ tomando el límite del CIS (con $a = 1$) cuando $h \to 0$.

3.2 La derivada como una función

En la sección previa, se ha calculado la derivada $f'(a)$ para valores concretos de a. También es útil entender la derivada como una función $f'(x)$ cuyo valor en $x = a$ es $f'(a)$. La función $f'(x)$ se continúa def niendo como un límite, pero el número f jado a se reemplaza por la variable x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \boxed{1}$$

Si $y = f(x)$, también se escribe y' o $y'(x)$ en lugar de $f'(x)$.

El dominio de $f'(x)$ son todos los valores x del dominio de $f(x)$ para los que el límite en la ec. (1) existe. Se dice que $f(x)$ es **derivable** en (a, b) si $f'(x)$ existe para todo x de (a, b). Si $f'(x)$ existe para todo x en el intervalo o intervalos en los que $f(x)$ está def nida, se dice simplemente que $f(x)$ es derivable.

A menudo, el dominio de $f'(x)$ está claro, por el contexto. En tal caso, no se suele mencionar el domino de forma explícita.

■ **EJEMPLO 1** Demuestre que $f(x) = x^3 - 12x$ es derivable. Calcule $f'(x)$ y halle una ecuación de la recta tangente en $x = -3$.

Solución Se calculará $f'(x)$ según las tres etapas que se establecieron en la sección anterior.

Etapa 1. **Escriba el numerador del cociente incremental**

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= ((x+h)^3 - 12(x+h)) - (x^3 - 12x) = \\ &= (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 12x - 12h) - (x^3 - 12x) = \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 12h = \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2 - 12) \qquad \text{(saque factor común } h\text{)} \end{aligned}$$

Etapa 2. **Divida por h y simplif que**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 12)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 12 \quad (h \neq 0)$$

Etapa 3. **Calcule el límite**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 12) = 3x^2 - 12$$

En este límite, se trata a x como a una constante porque no cambia cuando $h \to 0$. Se observa que el límite existe para todo x, por lo que $f(x)$ es derivable y $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Ahora, evaluando en $x = -3$:

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = 9$$
$$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15$$

Una ecuación de la recta tangente en $x = -3$ es $y - 9 = 15(x + 3)$ (f gura 1). ■

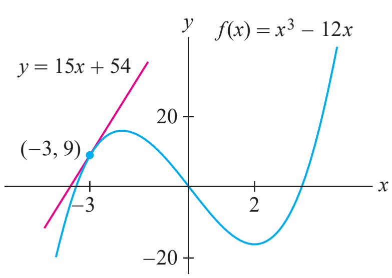


FIGURA 1 Gráf ca de $f(x) = x^3 - 12x$.

■ **EJEMPLO 2** Demuestre que $y = x^{-2}$ es derivable y calcule y'.

Solución El dominio de $f(x) = x^{-2}$ es $\{x : x \neq 0\}$, por lo que $x \neq 0$. Se va a calcular $f'(x)$ de forma directa, sin seguir los pasos del ejemplo previo:

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}\right) = \lim_{h\to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = \qquad \text{(cancele } h\text{)} \\
&= -\frac{2x+0}{x^2(x+0)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -2x^{-3}
\end{aligned}
$$

El límite existe para todo $x \neq 0$, por lo que y es derivable e $y' = -2x^{-3}$. ■

Notación de Leibniz

La notación "prima", y' y $f'(x)$ fue introducida por el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Existe otra notación estándar para la derivada que se debe a Leibniz (f gura 2):

$$\frac{df}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}$$

FIGURA 2 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), fue un f lósofo y científ co alemán. Newton y Leibniz (que se pronuncia "Laib-nitz") suelen ser citados como los inventores del cálculo (trabajando de forma independiente). Es más preciso reconocerles el mérito de haber desarrollado el cálculo como una disciplina general y fundamental, dado que muchos resultados del cálculo ya se habían descubierto previamente por otros matemáticos.

En el ejemplo 2, se probó que la derivada de $y = x^{-2}$ es $y' = -2x^{-3}$. En la notación de Leibniz, se hubiera escrito:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}x^{-2} = -2x^{-3}$$

Para especif car el valor de la derivada en un valor concreto de x, por ejemplo en $x = 4$, se escribe:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=4} \quad \text{o} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4}$$

Puede pensar en dy/dx como en la fracción "dy dividida por dx." Las expresiones dy y dx se denominan **diferenciales**. Desempeñan un papel destacado en ciertas situaciones (en aproximación lineal y en cálculo más avanzado). En este punto, se van a tratar meramente como símbolos, sin ningún otro signif cado.

UN APUNTE CONCEPTUAL La notación de Leibniz se usa por diferentes motivos. En primer lugar, recuerda que la derivada df/dx, aunque no es un cociente propiamente dicho, es un *límite* de cocientes $\Delta f/\Delta x$. En segundo lugar, esta notación especif ca la variable independiente. Esto resulta útil cuando se emplean otras variables además de x. Por ejemplo, si la variable independiente es t, se escribe df/dt. En tercer lugar, se suele pensar en d/dx como en un "operador" que aplica la operación de derivación sobre las funciones. En otras palabras, se aplica el operador d/dx a f para obtener la derivada df/dx. Otras ventajas de la notación de Leibniz se pondrán de manif esto cuando se trate la regla de la cadena en la sección 3.7.

Uno de los objetivos principales de este capítulo es establecer las reglas básicas de derivación. Estas reglas permitirán hallar derivadas sin necesidad de calcular límites.

La regla de la potencia es válida para cualquier exponente. Aquí se demuestra para un número natural n (vea el problema 95 para un entero negativo n y la p. 183 para n arbitrario).

TEOREMA 1 La regla de la potencia Para cualquier exponente n, se tiene:

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

Demostración Suponga que n es un número natural y sea $f(x) = x^n$. Entonces:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a}$$

Para simplif car el cociente incremental, se deben generalizar las siguientes identidades:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$
$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2)$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)$$

La generalización es:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \qquad \boxed{2}$$

Para comprobar la ec. (2), observe que el miembro de la derecha de la igualdad es:

$$x(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$
$$- a(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

Cuando se realizan las multiplicaciones, todos los términos se cancelan excepto el primero y el último, por lo que sólo queda $x^n - a^n$.

Según la ecuación (2):

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ términos}} \quad (x \neq a) \qquad \boxed{3}$$

Por tanto:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) =$$
$$= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} = \quad (n \text{ términos})$$
$$= na^{n-1}$$

Así se ha demostrado que $f'(a) = na^{n-1}$, que también se puede escribir como $f'(x) = nx^{n-1}$. ■

*ATENCIÓN La regla de la potencia se puede aplicar únicamente a las funciones potenciales $y = x^n$. No se puede aplicar a las funciones exponenciales como $y = 2^x$. La derivada de $y = 2^x$ **no es** $x2^{x-1}$. Se estudiarán las derivadas de las funciones exponenciales en esta sección, pero más adelante.*

Antes de continuar, he aquí algunas observaciones:

- Puede ser de ayuda recordar la regla de la potencia en palabras: para derivar x^n, "baje el exponente y reste uno (al exponente)".

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^{\text{exponente}} = (\text{exponente})\, x^{\text{exponente}-1}}$$

- La regla de la potencia es válida para cualquier exponente, ya sea negativo, fraccionario, o irracional:

$$\frac{d}{dx}x^{-3/5} = -\frac{3}{5}x^{-8/5} \qquad \frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$$

- La regla de la potencia se puede aplicar con cualquier variable, no únicamente con x. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dz}z^2 = 2z, \qquad \frac{d}{dt}t^{20} = 20t^{19}, \qquad \frac{d}{dr}r^{1/2} = \frac{1}{2}r^{-1/2}$$

A continuación, se enuncian las propiedades de linealidad para las derivadas, que son análogas a las propiedades de linealidad para límites.

TEOREMA 2 Reglas de linealidad Suponga que f y g son derivables. Entonces:

Regla de la suma y de la diferencia: $f + g$ y $f - g$ son derivables y

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'}$$

Regla del múltiplo constante: Para cualquier constante c, cf es derivable y

$$\boxed{(cf)' = cf'}$$

Demostración Para demostrar la regla de la suma, se utiliza la def nición:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h}$$

Este cociente incremental es igual a una suma ($h \neq 0$):

$$\frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Por tanto, según la regla de la suma para límites, tendremos:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

como se quería demostrar. Las reglas de la diferencia y del múltiplo constante se demuestran de manera análoga. ■

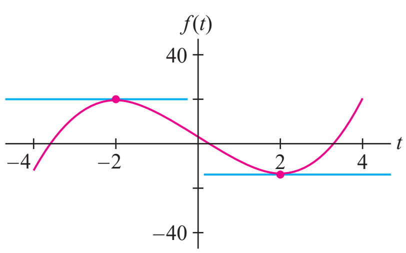


FIGURA 3 Gráf ca de $f(t) = t^3 - 12t + 4$. Las rectas tangentes en $t = \pm 2$ son horizontales.

■ **EJEMPLO 3** Halle los puntos sobre la gráf ca de $f(t) = t^3 - 12t + 4$ en los que la recta tangente sea horizontal (f gura 3).

Solución En primer lugar, se obtiene la derivada:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^3 - 12t + 4) = \\ &= \frac{d}{dt}t^3 - \frac{d}{dt}(12t) + \frac{d}{dt}4 = && \text{(Regla de la suma y de la diferencia)}\\ &= \frac{d}{dt}t^3 - 12\frac{d}{dt}t + 0 = && \text{(Regla del múltiplo constante)}\\ &= 3t^2 - 12 && \text{(Regla de la potencia)}\end{aligned}$$

Observe, en la segunda linea, que la derivada de 4 es igual a cero. La recta tangente es horizontal en aquellos puntos en los que $f'(t)$ es cero, por lo que se debe resolver la ecuación siguiente:

$$f'(t) = 3t^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 2$$

Se tiene que $f(2) = -12$ y $f(-2) = 20$. Por tanto, la recta tangente es horizontal en los puntos $(2, -12)$ y $(-2, 20)$. ■

■ **EJEMPLO 4** Calcule $\left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=1}$, donde $g(t) = t^{-3} + 2\sqrt{t} - t^{-4/5}$.

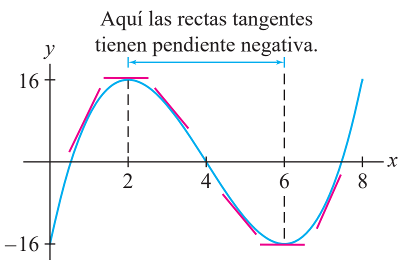
Solución Se derivará término a término usando la regla de la potencia sin justificar los pasos intermedios. Si se escribe $\sqrt{t}$ como $t^{1/2}$, se tiene que:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(t^{-3} + 2t^{1/2} - t^{-4/5}) = -3t^{-4} + 2\left(\frac{1}{2}\right)t^{-1/2} - \left(-\frac{4}{5}\right)t^{-9/5} =$$

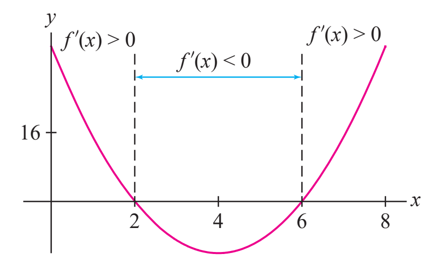
$$= -3t^{-4} + t^{-1/2} + \frac{4}{5}t^{-9/5} =$$

Luego:

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=1} = -3 + 1 + \frac{4}{5} = -\frac{6}{5}$$ ■



(A) Gráfica de $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 16$



(B) Gráfica de la derivada
$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

FIGURA 4

La derivada $f'(x)$ proporciona importante información sobre la gráfica de $f(x)$. Por ejemplo, el signo de $f'(x)$ informa de si la recta tangente tiene pendiente positiva o negativa, y la magnitud de $f'(x)$ indica lo pronunciada que es esta pendiente.

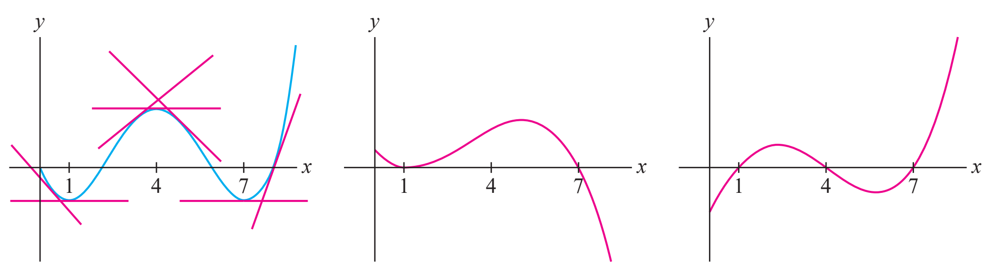
■ **EJEMPLO 5 Un apunte gráfico** Averigüe cuál es la relación entre la gráfica de $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 16$ y la de su derivada $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.

Solución La derivada $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x-6)(x-2)$ es negativa para $2 < x < 6$ y positiva o cero en caso contrario [figura 4(B)]. La siguiente tabla resume la información sobre el signo de la derivada [figura 4(A)]:

Propiedad de $f'(x)$	Propiedad de la gráfica de $f(x)$
$f'(x) < 0$ si $2 < x < 6$	La pendiente de la recta tangente es negativa si $2 < x < 6$.
$f'(2) = f'(6) = 0$	La recta tangente es horizontal en $x = 2$ y $x = 6$.
$f'(x) > 0$ si $x < 2$ o $x > 6$	La pendiente de la recta tangente es positiva si $x < 2$ o $x > 6$.

Observe también que $f'(x) \to +\infty$ cuando $|x|$ aumenta. Esto se corresponde con el hecho de que la gráfica de $f(x)$ sea cada vez más inclinada, a medida que $|x|$ va creciendo. ■

■ **EJEMPLO 6 Identificando la derivada** En la figura 5(A) se muestra la gráfica de $f(x)$. ¿Qué gráfica corresponde a $f'(x)$: (B) o (C)?



(A) Gráfica de $f(x)$ (B) (C)

FIGURA 5

Solución En la figura 5(A) se observa que las rectas tangentes a la gráfica tienen pendiente negativa en los intervalos (0, 1) y (4, 7). Por tanto, $f'(x)$ es negativa en estos intervalos. De manera análoga (vea la tabla al margen), las rectas tangentes tienen pendiente positiva (y $f'(x)$ es positiva) en los intervalos (1, 4) y $(7, +\infty)$. Únicamente (C) cumple estas condiciones, por lo que (C) es la gráfica de $f'(x)$. ■

Pendiente de la recta tangente	donde
Negativa	(0, 1) y (4, 7)
Cero	$x = 1, 4, 7$
Positiva	$(1, 4)$ y $(7, +\infty)$

Derivabilidad, continuidad y linealidad local

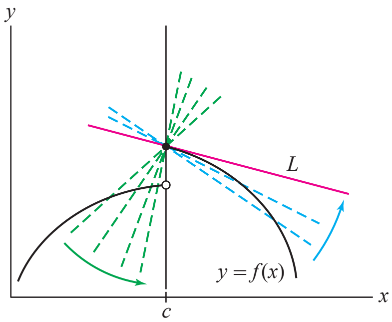


FIGURA 6 Rectas secantes en una discontinuidad de salto.

En el resto de la sección, se examinará el concepto de **derivabilidad** con más detalle. En primer lugar, se demostrará que toda función derivable es necesariamente continua. En particular, una función derivable no puede presentar saltos. La f gura 6 ilustra el porqué: aunque las rectas secantes por la derecha se aproximan a la recta L (que es la tangente a la parte derecha de la gráf ca), las rectas secantes se aproximan a la vertical (y sus pendientes tienden a $+\infty$).

> **TEOREMA 3 Derivabilidad implica continuidad** Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Demostración Por def nición, si f es derivable en $x = c$, entonces el siguiente límite existe:

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Se debe demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, pues ésta es la def nición de continuidad en $x = c$. Para relacionar estos dos límites, considere la igualdad siguiente (válida si $x \neq c$):

$$f(x) - f(c) = (x - c)\,\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Los dos factores a la derecha de la igualdad tienen límite cuando $x \to c$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x\to c}\left((x - c)\,\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to c}(x - c)\right)\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\\
&= 0 \cdot f'(c) = 0
\end{aligned}$$

según la regla del producto para límites. La regla de la suma conduce a la conclusión deseada:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(f(x) - f(c)) + \lim_{x\to c} f(c) = 0 + f(c) = f(c)$$ ■

La mayor parte de las funciones que se encuentran en este texto son derivables, pero hay excepciones como en el siguiente ejemplo.

Según el teorema 3, todas las funciones derivables son continuas pero el recíproco es falso, tal y como se ilustra en el ejemplo 7. Una función continua no es necesariamente derivable.

■ **EJEMPLO 7 Continua pero no derivable** Pruebe que la función $f(x) = |x|$ es continua pero no derivable en $x = 0$.

Solución La función $f(x)$ es continua en $x = 0$, ya que $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$. Por otra parte:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Este límite no existe [y por tanto $f(x)$ no es derivable en $x = 0$] pues:

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

y, en consecuencia, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = -1$$ ■

UN APUNTE GRÁFICO La derivabilidad admite una importante interpretación gráf ca en relación con la linealidad local. Se dice que f es **localmente lineal** en $x = a$, si su gráf ca se parece cada vez más a una recta, a medida que se amplía la imagen alrededor del punto $(a, f(a))$. En este contexto, el adjetivo *lineal* signif ca "parecido a una recta", y *local* indica que sólo estamos interesados en el comportamiento de la gráf ca alrededor de $(a, f(a))$. La gráf ca de una función localmente lineal puede ser muy sinuosa, o *no lineal*, como en la f gura 7. Pero cuando se amplía la imagen de una parcela suf cientemente pequeña de la gráf ca, ésta se va volviendo recta.

No únicamente la gráf ca se parece a una recta cuando se amplía la imagen más y más sobre un punto, sino que, tal y como sugiere la f gura 7, la "recta ampliada" es la recta tangente. Por tanto, la relación entre la derivabilidad y la linealidad local se puede expresar de la siguiente manera:

> Si $f'(a)$ existe, entonces f es localmente lineal en $x = a$, es decir, la gráf ca resulta prácticamente indistinguible de su recta tangente, si se amplía cerca del punto $(a, f(a))$.

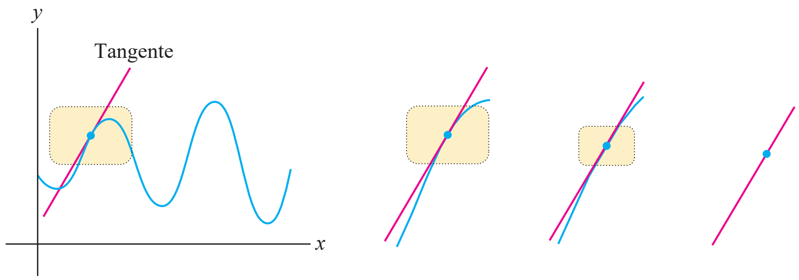


FIGURA 7 Linealidad local: la gráf ca se parece cada vez más a la recta tangente, a medida que se amplía más y más cerca del punto.

La linealidad local proporciona una manera gráf ca de entender por qué $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ (tal y como se probó en el ejemplo 7). La f gura 8 muestra que la gráf ca de $f(x) = |x|$ tiene un punto de esquina en $(0, 0)$ y que esta esquina *no desaparece*, por más que se amplíe la gráf ca alrededor del origen. Como la gráf ca no se vuelve recta al ser ampliada, $f(x)$ no es localmente lineal en $x = 0$ y no se puede esperar que $f'(0)$ exista.

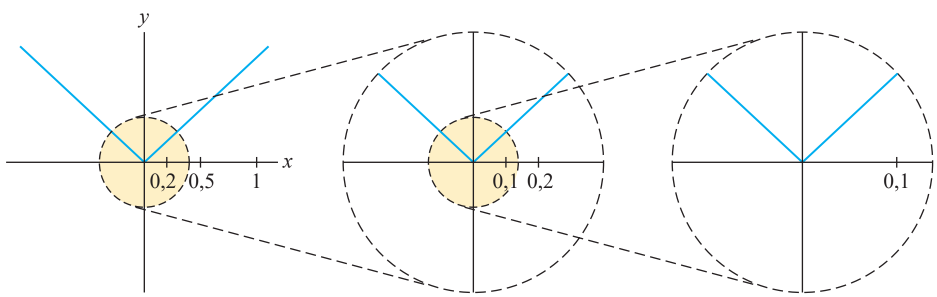


FIGURA 8 La gráf ca de $f(x) = |x|$ no es localmente lineal en $x = 0$. La esquina no desaparece cuando se amplía alrededor del origen.

Otra manera en la que una función continua puede no ser derivable es cuando la recta tangente existe pero es vertical (en cuyo caso la pendiente de la recta tangente no está def nida).

■ **EJEMPLO 8 Tangentes verticales** Pruebe que $f(x) = x^{1/3}$ no es derivable en $x = 0$.

Solución El límite que def ne a $f'(0)$ es inf nito. En efecto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

Por tanto, $f'(0)$ no existe (f gura 9). ■

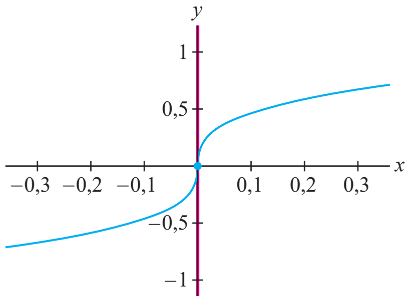
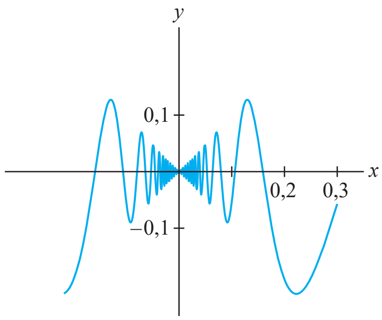
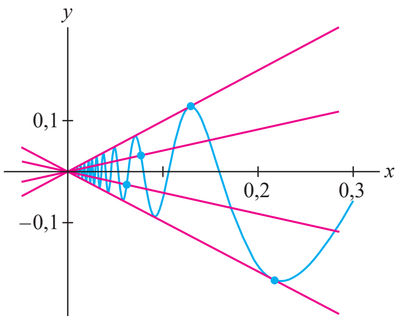


FIGURA 9 La recta tangente a la gráf ca de $f(x) = x^{1/3}$ en el origen es el eje (vertical) y. La derivada $f'(0)$ no existe.

Como apunte f nal, mencionar que existen muchas otras maneras más complicadas en las que una función continua puede no ser derivable. La f gura 10 muestra la gráf ca de $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Si se def ne $f(0) = 0$, entonces f es continua pero no derivable en $x = 0$. Las rectas secantes oscilan y no tienden hacia ninguna posición límite (vea el problema 97).



(A) Gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



(B) Las secantes no tienden hacia ninguna posición límite.

FIGURA 10

3.2 RESUMEN

- La derivada $f'(x)$ es la función cuyo valor en $x = a$ es la derivada $f'(a)$.
- Existen diferentes notaciones para la derivada de $y = f(x)$:

$$y' \quad y'(x) \quad f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{df}{dx}$$

El valor de la derivada en $x = a$ se denota:

$$y'(a) \quad f'(a) \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

- La regla de la potencia es válida para todo n:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- Las reglas de linealidad permiten derivar término a término:

Regla de la suma: $(f+g)' = f' + g'$ Regla del múltiplo constante: $(cf)' = cf'$

- Derivabilidad implica continuidad: si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$. Sin embargo, existen fuciones continuas que no son derivables.
- Si $f'(a)$ existe, entonces f es localmente lineal en el siguiente sentido: cuando se amplía la gráf ca sobre un punto $(a, f(a))$, ésta resulta prácticamente indistinguible de su recta tangente.

3.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, f(2))$, si $f'(x) = x^3$?

2. Evalúe $(f - g)'(1)$ y $(3f + 2g)'(1)$ suponiendo que $f'(1) = 3$ y $g'(1) = 5$.

3. ¿A cuáles de la siguientes expresiones se puede aplicar la regla de la potencia?

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = 2^{\pi}$

(c) $f(x) = x^{\pi}$ **(d)** $f(x) = \pi^x$

(e) $f(x) = x^x$ **(f)** $f(x) = x^{-4/5}$

4. Elija (a) o (b). La derivada no existe si la recta tangente es:
(a) horizontal (b) vertical

5. Si $f(x)$ es derivable en $x = c$, ¿es necesariamente $f(x)$ continua en $x = c$? ¿Existen funciones continuas que no sean derivables?

Problemas

En los problemas 1-6, calcule $f'(x)$ usando la definición.

1. $f(x) = 3x - 7$

2. $f(x) = x^2 + 3x$

3. $f(x) = x^3$

4. $f(x) = 1 - x^{-1}$

5. $f(x) = x - \sqrt{x}$

6. $f(x) = x^{-1/2}$

En los problemas 7-14, use la regla de la potencia para calcular la derivada.

7. $\left.\frac{d}{dx} x^4\right|_{x=-2}$

8. $\left.\frac{d}{dt} t^{-3}\right|_{t=4}$

9. $\left.\frac{d}{dt} t^{2/3}\right|_{t=8}$

10. $\left.\frac{d}{dt} t^{-2/5}\right|_{t=1}$

11. $\frac{d}{dx} x^{0,35}$

12. $\frac{d}{dx} x^{14/3}$

13. $\frac{d}{dt} t^{\sqrt{17}}$

14. $\frac{d}{dt} t^{-\pi^2}$

En los problemas 15-18, calcule $f'(x)$ y halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = a$.

15. $f(x) = x^4, \quad a = 2$

16. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 5$

17. $f(x) = 5x - 32\sqrt{x}, \quad a = 4$

18. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8$

19. Halle una ecuación de la recta tangente a $y = 1/\sqrt{x}$ en $x = 9$.

20. Halle un punto de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en que la pendiente de la recta tangente sea igual a 10.

En los problemas 21-32, calcule la derivada.

21. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

22. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x$

23. $f(x) = 4x^{5/3} - 3x^{-2} - 12$

24. $f(x) = x^{5/4} + 4x^{-3/2} + 11x$

25. $g(z) = 7z^{-5/14} + z^{-5} + 9$

26. $h(t) = 6\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

27. $f(s) = \sqrt[4]{s} + \sqrt[3]{s}$

28. $W(y) = 6y^4 + 7y^{2/3}$

29. $g(x) = \pi^2$

30. $f(x) = x^{\pi}$

31. $h(t) = \sqrt{2}\, t^{\sqrt{2}}$

32. $R(z) = \frac{z^{5/3} - 4z^{3/2}}{z}$ *Indicación:* simplifique.

En los problemas 33-36, calcule la derivada expandiendo o simplificando la función.

33. $P(s) = (4s - 3)^2$

34. $Q(r) = (1 - 2r)(3r + 5)$

35. $g(x) = \frac{x^2 + 4x^{1/2}}{x^2}$

36. $s(t) = \frac{1 - 2t}{t^{1/2}}$

En los problemas 37-42, calcule la derivada que se indica.

37. $\left.\frac{dT}{dC}\right|_{C=8}, \quad T = 3C^{2/3}$

38. $\left.\frac{dP}{dV}\right|_{V=-2}, \quad P = \frac{7}{V}$

39. $\left.\frac{ds}{dz}\right|_{z=2}, \quad s = 4z - 16z^2$

40. $\left.\frac{dR}{dW}\right|_{W=1}, \quad R = W^{\pi}$

41. $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=4}, \quad r = \frac{t^2 + 1}{t^{1/2}}$

42. $\left.\frac{dp}{dh}\right|_{h=32}, \quad p = 16h^{0,2} + 8h^{-0,8}$

43. Relacione las funciones de las gráficas (A)-(D) con sus derivadas (I)-(III) en la figura 11. Observe que dos de las funciones tienen la misma derivada. Explique por qué.

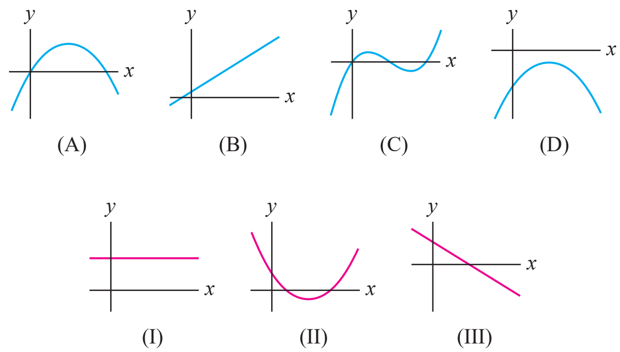


FIGURA 11

44. Para las funciones f y g de la figura 12, ¿qué función es la derivada de la otra? Justifique su respuesta.

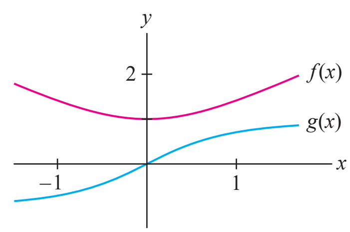


FIGURA 12

45. Asigne las etiquetas $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ a las gráficas de la figura 13 de manera que $f'(x) = g(x)$ y que $g'(x) = h(x)$.

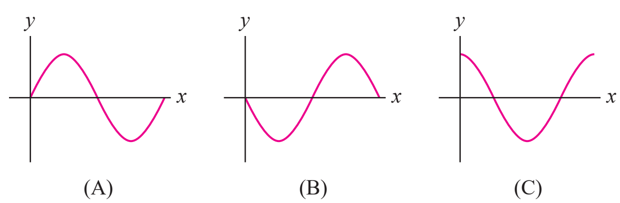


FIGURA 13

46. Según la *teoría del pico de Hubbert*, propuesta inicialmente en 1956 por el geofísico M. Hubbert, la cantidad total de petróleo $Q(t)$ producida en todo el mundo hasta el instante t tiene una gráfica como la de la figura 14.

(a) Dibuje la derivada $Q'(t)$ para $1900 \leq t \leq 2150$. ¿Que representa $Q'(t)$?

(b) ¿En qué año (aproximadamente) alcanzará $Q'(t)$su valor máximo?

(c) ¿A qué es igual $L = \lim_{t\to\infty} Q(t)$? ¿Cuál es su interpretación?

(d) ¿Cuál es el valor de $\lim_{t\to\infty} Q'(t)$?

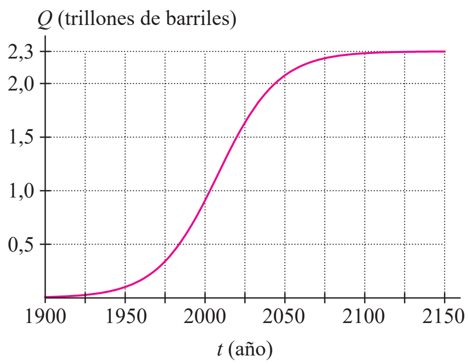


FIGURA 14 Producción total de petróleo hasta el instante t.

47. Use la tabla de valores de $f(x)$ para determinar si (A) o (B) en la figura 15 es la gráfica de $f'(x)$. Justifique su respuesta.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	10	55	98	139	177	210	237	257	268

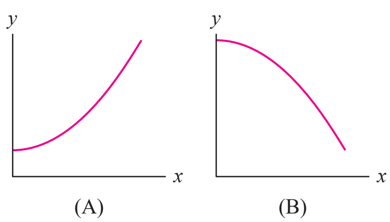


FIGURA 15 ¿Cuál es la gráfica de $f'(x)$?

48. Sean R una variable y r una constante. Calcule las derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dR} R$ **(b)** $\dfrac{d}{dR} r$ **(c)** $\dfrac{d}{dR} r^2R^3$

49. Calcule las derivadas, siendo c una constante:

(a) $\dfrac{d}{dt} ct^3$ **(b)** $\dfrac{d}{dz}(5z + 4cz^2)$

(c) $\dfrac{d}{dy}(9c^2y^3 - 24c)$

50. Halle los puntos de la gráfica de $f(x) = 12x - x^3$ en los que la recta tangente sea horizontal.

51. Halle los puntos de la gráfica de $y = x^2 + 3x - 7$ en los que la pendiente de la recta tangente sea igual a 4.

52. Halle los valores de x en los que las rectas tangentes a $y = x^3$ e $y = x^2 + 5x$ sean paralelas.

53. Determine a y b tales que $p(x) = x^2 + ax + b$ cumpla $p(1) = 0$ y $p'(1) = 4$.

54. Halle todos los valores de x para los que la pendiente de la recta tangente a $y = 4x^2 + 11x + 2$ sea más pronunciada que la de la recta tangente a $y = x^3$.

55. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Pruebe que $f'(x) \geq -3$ para todo x, y que, para todo $m > -3$, hay exactamente dos puntos en los que $f'(x) = m$. Indique la posición de estos puntos y de las correspondientes rectas tangentes para un valor de m en un dibujo de la gráfica de $f(x)$.

56. Pruebe que las rectas tangentes a $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ en $x = a$ y en $x = b$ son paralelas si $a = b$ o $a + b = 2$.

57. Calcule la derivada de $f(x) = x^{3/2}$ usando la definición. *Indicación:* pruebe que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}}\right)$$

58. Dibuje la gráfica de una función continua en $(0, 5)$, que también sea derivable salvo en $x = 1$ y $x = 4$.

59. Pruebe, usando la definición de derivada, que $f(x) = |x^2 - 4|$ no es derivable en $x = 2$.

60. La velocidad media (en metros por segundo) de una molécula de gas es:

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

donde T es la temperatura (en grados kelvin), M es la masa molar (en kilogramos por mol) y $R = 8{,}31$. Calcule dv_{m}/dT en $T = 300$ K para el oxígeno, cuya masa molar es de 0,032 kg/mol.

61. Los biólogos han observado que el ritmo del pulso P (en pulsaciones por minuto) en los animales está relacionado con la masa corporal (en kilogramos) por la fórmula aproximada $P = 200\, m^{-1/4}$. Se trata de una de las *leyes del escalado alométrico* frecuentes en biología. ¿Es $|dP/dm|$ una función de m estrictamente creciente o estrictamente decreciente? Halle una ecuación de la recta tangente a los puntos de la figura 16 que representan a la cabra ($m = 33$) y al hombre ($m = 68$).

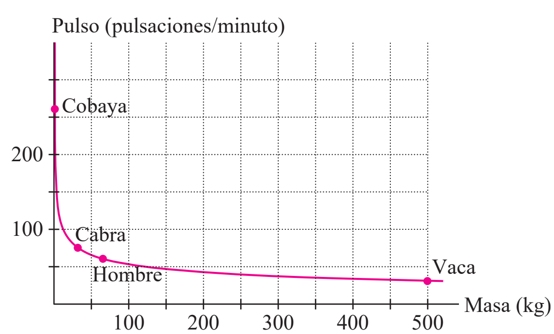


FIGURA 16

62. Algunos estudios sugieren que la masa del riñón en los mamíferos, K, (en kilogramos), está relacionada con la masa corporal m (en kilogramos) por la fórmula aproximada $K = 0{,}007\ m^{0{,}85}$. Calcule dK/dm en $m = 68$. A continuación, calcule la derivada respecto a m de la relación entre la masa del riñón y la masa corporal, K/m, en $m = 68$.

63. La ley de Clausius-Clapeyron relaciona la *presión del vapor* de agua P (en atmósferas) con la temperatura T (en grados kelvin):

$$\frac{dP}{dT} = k\frac{P}{T^2}$$

donde k es una constante. Estime dP/dT para $T = 303, 313, 323, 333$ y 343 utilizando los datos y la aproximación siguientes:

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{P(T+10) - P(T-10)}{20}$$

T (K)	293	303	313	323	333	343	353
P (atm)	0,0278	0,0482	0,0808	0,1311	0,2067	0,3173	0,4754

¿Confirman sus estimaciones la ley de Clausius-Clapeyron? ¿Cuál es el valor aproximado de k?

64. Sea L la recta tangente a la hipérbola $xy = 1$ en $x = a$, donde $a > 0$. Muestre que el área del triángulo limitado por L y los ejes de coordenadas no depende de a.

65. Continuando con el problema 64, pruebe que el punto de tangencia es el punto medio del segmento de L que se encuentra en el primer cuadrante.

66. Relacione las funciones (A)-(C) con sus derivadas (I)-(III) en la figura 17.

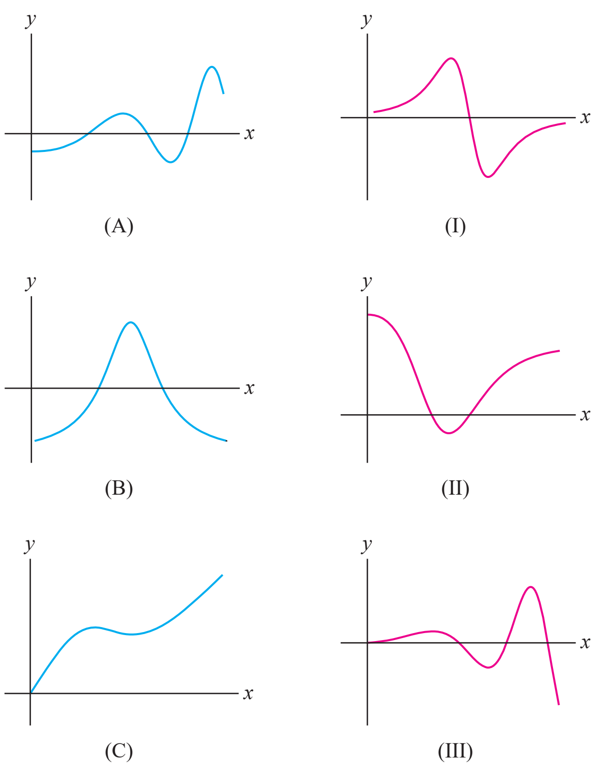


FIGURA 17

67. Realice una gráfica aproximada de la derivada de la función de la figura 18(A).

68. Represente la derivada de la función de la figura 18(B), omitiendo aquellos puntos en los que la derivada no esté definida.

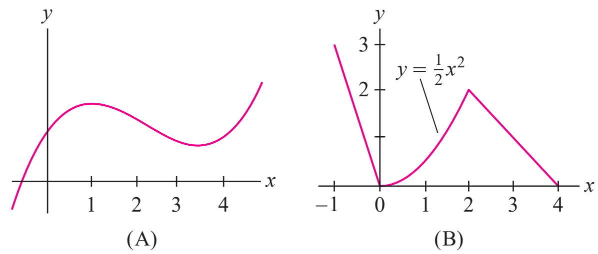


FIGURA 18

69. Dibuje la gráfica de $f(x) = x\,|x|$. A continuación, pruebe que $f'(0)$ existe.

70. Determine los valores de x en los que la función de la figura 19 es: (a) discontinua y (b) no derivable.

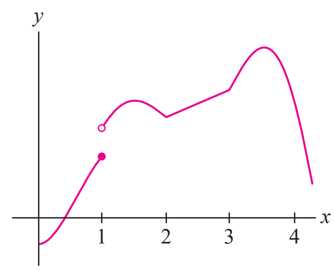


FIGURA 19

En los problemas 71-76, halle los puntos c (si hay) en los que $f'(c)$ no exista.

71. $f(x) = |x-1|$

72. $f(x) = [x]$

73. $f(x) = x^{2/3}$

74. $f(x) = x^{3/2}$

75. $f(x) = |x^2 - 1|$

76. $f(x) = |x-1|^2$

GU *En los problemas 77-82, amplíe la gráfica de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, y establezca si $f(x)$ parece que es derivable en $x = a$. Si no lo parece, indique si la recta tangente es vertical o si no existe.*

77. $f(x) = (x-1)|x|, \quad a = 0$

78. $f(x) = (x-3)^{5/3}, \quad a = 3$

79. $f(x) = (x-3)^{1/3}, \quad a = 3$

80. $f(x) = \operatorname{sen}(x^{1/3}), \quad a = 0$

81. $f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad a = 0$

82. $f(x) = |x - \operatorname{sen} x|, \quad a = 0$

83. GU Represente la derivada $f'(x)$ de $f(x) = 2x^3 - 10x^{-1}$ para $x > 0$ (fije los límites de visualización de manera apropiada) y observe que $f'(x) > 0$. ¿Qué indica este valor positivo de $f'(x)$ acerca de la gráfica de $f(x)$ propiamente dicha? Represente $f(x)$ y confirme esta conclusión.

84. Halle las coordenadas del punto P en la f gura 20 en que la recta tangente pasa por $(5, 0)$.

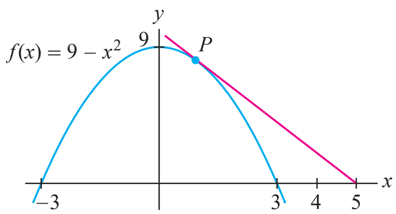


FIGURA 20 Gráf ca de $f(x) = 9 - x^2$.

Los problemas 85-88 hacen referencia a la f gura 21. La longitud QR se denomina la subtangente *en P y la longitud RT se denomina la* subnormal.

85. Calcule la subtangente de:

$$f(x) = x^2 + 3x \quad \text{en } x = 2$$

86. Pruebe que para $n \neq 0$, la subtangente de $f(x) = x^n$ en $x = c$ es igual a c/n.

87. Demuestre que, en general, la subnormal en P es $|f'(x)f(x)|$.

88. Pruebe que la longitud de $\overline{PQ}$ es $|f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^{-2}}$.

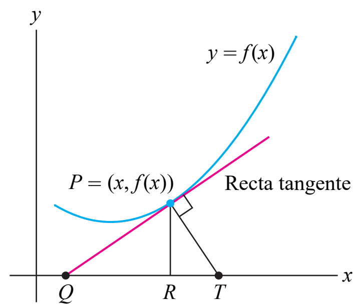


FIGURA 21

89. Demuestre el siguiente teorema de Apolonio de Perga (el matemático griego nacido en el 262 A.C. que dio a la parábola, elipse e hipérbola sus nombres): la subtangente de la parábola $y = x^2$ en $x = a$ es igual a $a/2$.

90. Pruebe que la subtangente de $y = x^3$ en $x = a$ es igual a $\frac{1}{3}a$.

91. Formule y demuestre una generalización del problema 90 para $y = x^n$.

Problemas avanzados

92. Dos arcos pequeños tienen forma de parábolas. El primero viene dado por $f(x) = 1 - x^2$ si $-1 \le x \le 1$, y el segundo por $g(x) = 4 - (x - 4)^2$ si $2 \le x \le 6$. Se coloca un tablero en la parte superior de los dos arcos, de manera que se apoya en ambos (f gura 22). ¿Cuál es la inclinación del tablero? *Indicación:* halle la recta tangente a $y = f(x)$ que interseca con $y = g(x)$ exactamente en un punto.

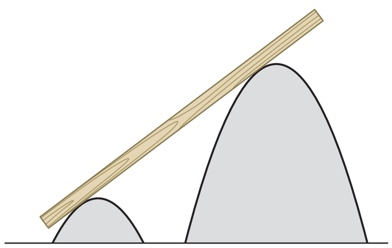


FIGURA 22

93. Se forma una vasija por rotación de $y = x^2$ respecto al eje y. Si se deja caer una canica, o bien tocará el fondo de la vasija o bien quedará suspendida sin llegar al fondo pero tocando ambos lados (f gura 23). ¿Qué tamaño debe tener la canica para tocar el fondo?

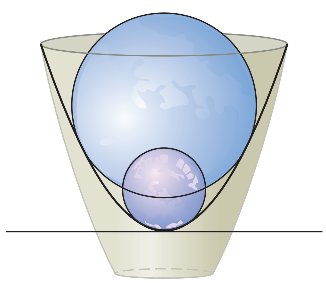


FIGURA 23

94. Sean $f(x)$ una función derivable y $g(x) = f(x + c)$, donde c es una constante. Use la def nición para probar que $g'(x) = f'(x + c)$. Explique este resultado gráf camente, poniendo de manif esto que la gráf ca de $g(x)$ se obtiene desplazando la gráf ca de $f(x)$ c unidades a la izquierda (si $c > 0$), o a la derecha (si $c < 0$).

95. Exponentes negativos Sea n un número natural. Aplique la regla de la potencia a x^n para calcular la derivada de $f(x) = x^{-n}$, probando que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-1}{x^n(x+h)^n} \, \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

96. Compruebe la regla de la potencia para el exponente $1/n$, donde n es un entero positivo, utilizando el siguiente truco: reescriba el cociente incremental para $y = x^{1/n}$ en $x = b$ en términos de:

$$u = (b + h)^{1/n} \qquad \text{y} \qquad a = b^{1/n}$$

97. Oscilaciones inf nitamente rápidas Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que $f(x)$ es continua en $x = 0$ pero que $f'(0)$ no existe (vea la f gura 10).

98. Determine para qué valores de c tiene una única solución la ecuación:

$$x^2 + 4 = cx$$

Indicación: Dibuje una gráf ca.

3.3 Reglas del producto y del cociente

En esta sección se tratan la **regla del producto** y la **regla del cociente** para calcular derivadas. Estas dos reglas, junto con la regla de la cadena y la derivación implícita (que se trata en las últimas secciones de esta capítulo), conforman un "instrumental de derivación" sumamente ef ciente.

RECORDATORIO *La función producto fg se define como $(fg)(x) = f(x)g(x)$.*

TEOREMA 1 Regla del producto Si f y g son funciones derivables, entonces fg es derivable y se tiene:

$$\boxed{(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

Puede ser útil recordar la regla del producto en palabras: la derivada de un producto es igual a *la primera función por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función*:

$$\text{Primera} \cdot (\text{Segunda})' + \text{Segunda} \cdot (\text{Primera})'$$

Se demostrará la regla del producto después de estos tres ejemplos.

EJEMPLO 1 Halle la derivada de $h(x) = x^2(9x + 2)$.

Solución Esta función es un producto:

$$h(x) = \overbrace{x^2}^{\text{Primera}}\ \overbrace{(9x+2)}^{\text{Segunda}}$$

Por la regla del producto (en la notación de Leibniz), tendremos:

$$h'(x) = \overbrace{x^2}^{\text{Primera}}\ \overbrace{\frac{d}{dx}(9x+2)}^{\text{Segunda}'} + \overbrace{(9x+2)}^{\text{Segunda}}\ \overbrace{\frac{d}{dx}(x^2)}^{\text{Primera}'} =$$
$$= (x^2)(9) + (9x+2)(2x) = 27x^2 + 4x$$

EJEMPLO 2 Halle la derivada de $y = (2 + x^{-1})(x^{3/2} + 1)$.

Observe cómo se usa la notación prima en la solución del ejemplo 2. Se escribe $(x^{3/2} + 1)'$ para denotar la derivada de $x^{3/2} + 1$, etc.

Solución Aplique la regla del producto:

$$y' = \overbrace{(2 + x^{-1})(x^{3/2} + 1)' + (x^{3/2} + 1)(2 + x^{-1})'}^{\text{Primera}\cdot(\text{Segunda})' + \text{Segunda}\cdot(\text{Primera})'} =$$
$$= (2 + x^{-1})(\tfrac{3}{2}x^{1/2}) + (x^{3/2} + 1)(-x^{-2}) = \qquad \text{(calcule las derivadas)}$$
$$= 3x^{1/2} + \tfrac{3}{2}x^{-1/2} - x^{-1/2} - x^{-2} = 3x^{1/2} + \tfrac{1}{2}x^{-1/2} - x^{-2} \qquad \text{(simplif que)}$$

En los dos ejemplos previos, se podría haber evitado la regla del producto efectuando el producto en la función. Así, el resultado del ejemplo 2 se podría obtener de la siguiente manera:

$$y = (2 + x^{-1})(x^{3/2} + 1) = 2x^{3/2} + 2 + x^{1/2} + x^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}(2x^{3/2} + 2 + x^{1/2} + x^{-1}) = 3x^{1/2} + \tfrac{1}{2}x^{-1/2} - x^{-2}$$

En muchos casos, la función no se puede desarrollar y se debe usar la regla del producto. Una de estas funciones es $f(x) = x\cos x$ cuya derivada se determinará en la sección 3.6.

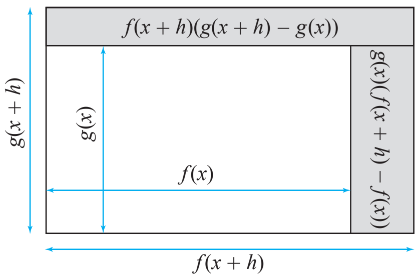


FIGURA 1

Demostración de la regla del producto Según la definición de derivada:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Se puede interpretar el numerador como el área de la región sombreada en la figura 1: esta área es igual al rectángulo mayor $f(x+h)g(x+h)$ menos el área del rectángulo menor $f(x)g(x)$. Esta región sombreada es la unión de dos bandas rectangulares, por lo que se obtiene la siguiente identidad (que se puede comprobar directamente):

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x))$$

Utilice esta identidad para expresar $(fg)'(x)$ como la suma de dos límites:

$$(fg)'(x) = \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\text{Pruebe que éste es igual a } f(x)g'(x).} + \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{Pruebe que éste es igual a } g(x)f'(x).} \qquad \boxed{1}$$

La utilización de la regla de la suma es correcta, siempre que cada límite de la derecha exista. Para comprobar que el primer límite existe y para evaluarlo, observe que $f(x)$ es continua (pues es derivable) y que $g(x)$ es derivable. Así, para el primer límite se tiene:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x+h)\ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$
$$= f(x)\,g'(x) \qquad \boxed{2}$$

El segundo límite es análogo:

$$\lim_{h\to 0} g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)\,f'(x) \qquad \boxed{3}$$

Utilizando la ec. (2) y la ec. (3) en la ec. (1), se concluye que fg es derivable y que $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ tal y como se quería demostrar. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL La regla del producto fue enunciada por primera vez por Leibniz a la edad de 29 años, en 1675, año en que desarrolló algunas de sus mayores ideas sobre el cálculo. Para documentar su proceso de descubrimiento para la posteridad, dejó constancia de sus pensamientos y luchas, de los momentos de inspiración, así como de los errores. En un manuscrito datado el 11 de noviembre de1675, Leibniz sugiere *de forma incorrecta* que $(fg)'$ es igual a $f'g'$. Después, se da cuenta de su error considerando $f(x) = g(x) = x$ y percatándose de que:

$$(fg)'(x) = (x^2)' = 2x \qquad \textit{no} \text{ es igual a} \qquad f'(x)g'(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Diez días más tarde, el 21 de noviembre, Leibniz establece la correcta regla del producto y comenta "*Ahora éste es un teorema realmente notable.*"

Con el beneficio de la retrospectiva, se puede señalar que Leibniz hubiera podido evitar su error si hubiera prestado atención a las unidades. Suponga que $f(t)$ y $g(t)$ representan distancias en metros, donde t es el tiempo en segundos. Entonces las unidades de $(fg)'$ son m^2/s. Esto no puede ser igual a $f'g'$, cuyas unidades son $(m/s)(m/s) = m^2/s^2$.

El siguiente teorema establece la regla para derivar cocientes. En particular, observe que $(f/g)'$ *no* es igual al cociente f'/g'.

RECORDATORIO *La función cociente f/g se define como:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

TEOREMA 2 Regla del cociente Si f y g son funciones derivables, entonces f/g es derivable para todo x tal que $g(x) \neq 0$ y se tiene:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

El numerador en la regla del cociente es igual a *la función de debajo por la derivada de la de encima menos la función de encima por la derivada de la función de debajo*:

$$\frac{\text{Debajo} \cdot (\text{Encima})' - \text{Encima} \cdot (\text{Debajo})'}{\text{Debajo}^2}$$

La demostración es análoga a la de la regla del producto (vea los problemas 58-60).

■ **EJEMPLO 3** Calcule la derivada de $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Solución Aplique la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(1 + x^2)}^{\text{Debajo}}\ \overbrace{(x)'}^{\text{Encima}'} - \overbrace{(x)}^{\text{Encima}}\ \overbrace{(1 + x^2)'}^{\text{Debajo}'}}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)(1) - (x)(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

■

■ **EJEMPLO 4** Halle la recta tangente a la gráf ca de $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{4x^3 + 1}$ en $x = 1$.

Solución

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 + x - 2}{4x^3 + 1}\right) = \frac{\overbrace{(4x^3 + 1)}^{\text{Debajo}}\ \overbrace{(3x^2 + x - 2)'}^{\text{Encima}'} - \overbrace{(3x^2 + x - 2)}^{\text{Encima}}\ \overbrace{(4x^3 + 1)'}^{\text{Debajo}'}}{(4x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{(4x^3 + 1)(6x + 1) - (3x^2 + x - 2)(12x^2)}{(4x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{(24x^4 + 4x^3 + 6x + 1) - (36x^4 + 12x^3 - 24x^2)}{(4x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-12x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 6x + 1}{(4x^3 + 1)^2}$$

En $x = 1$, tendremos:

$$f(1) = \frac{3 + 1 - 2}{4 + 1} = \frac{2}{5}$$

$$f'(1) = \frac{-12 - 8 + 24 + 6 + 1}{5^2} = \frac{11}{25}$$

Una ecuación de la recta tangente en $(1, \frac{2}{5})$ es:

$$y - \frac{2}{5} = \frac{11}{25}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = \frac{11}{25}x - \frac{1}{25}$$

■

■ **EJEMPLO 5 Potencia suministrada por una batería** La potencia que una batería suministra a un equipo, como un ordenador portátil, depende de la *resistencia interna* de la batería. Para una batería de voltaje V y resistencia interna r, la potencia total suministrada a un aparato de resistencia R (f gura 2) es:

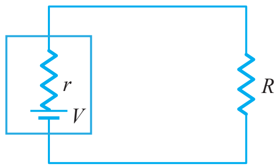


FIGURA 2 Equipo de resistencia R unido a una batería de voltaje V.

$$P = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}$$

(a) Calcule dP/dR, suponiendo que V y r son constantes.

(b) ¿Dónde, en la gráf ca de P respecto a R, es la recta tangente horizontal?

Solución

(a) Como V es una constante, se obtiene (usando la regla del cociente):

$$\frac{dP}{dR} = V^2 \frac{d}{dR}\left(\frac{R}{(R+r)^2}\right) = V^2 \frac{(R+r)^2 \frac{d}{dR}R - R\frac{d}{dR}(R+r)^2}{(R+r)^4} \tag{4}$$

Tenemos $\frac{d}{dR}R = 1$ y $\frac{d}{dR}r = 0$, ya que r es una constante. Así:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dR}(R+r)^2 &= \frac{d}{dR}(R^2 + 2rR + r^2)\\ &= \frac{d}{dR}R^2 + 2r\frac{d}{dR}R + \frac{d}{dR}r^2\\ &= 2R + 2r + 0 = 2(R+r)\end{aligned} \tag{5}$$

Usando la ec. (5) en ec. (4), se obtiene:

$$\frac{dP}{dR} = V^2\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = V^2\frac{(R+r)-2R}{(R+r)^3} = V^2\frac{r-R}{(R+r)^3} \tag{6}$$

(b) La recta tangente es horizontal cuando la derivada es cero . Según la ec. (6), la derivada es cero cuando $r - R = 0$, es decir, cuando $R = r$. ■

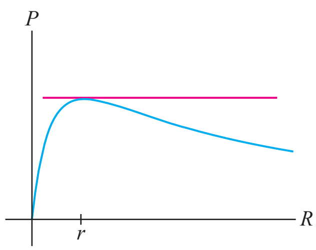


FIGURA 3 Gráf ca de la potencia respecto a la resistencia:

$$P = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}$$

UN APUNTE GRÁFICO La f gura 3 muestra que el punto en el que la recta tangente es horizontal es el *punto máximo* sobre la gráf ca. Esto demuestra un resultado importante para el diseño de circuitos: se suministra la potencia máxima cuando la resistencia de la carga (aparato) es igual a la resistencia interna de la batería.

3.3 RESUMEN

- Dos reglas básicas de derivación:

Regla del producto: $(fg)' = fg' + gf'$

Regla del cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

- Recuerde: La derivada de fg *no* es igual a $f'g'$. De manera análoga, la derivada de f/g *no* es igual a f'/g'.

3.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Indique si las siguientes af rmaciones son verdaderas o falsas. Para aquellas que sean falsas, enuncie la versión correcta.

(a) fg denota la función cuyo valor en x es $f(g(x))$.

(b) f/g denota la función cuyo valor en x es $f(x)/g(x)$.

(c) La derivada del producto es el producto de derivadas.

(d) $\left.\dfrac{d}{dx}(fg)\right|_{x=4} = f(4)g'(4) - g(4)f'(4)$

(e) $\left.\dfrac{d}{dx}(fg)\right|_{x=0} = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$

2. Halle $(f/g)'(1)$ si $f(1) = f'(1) = g(1) = 2$ y $g'(1) = 4$.

3. Halle $g(1)$ si $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$ y $(fg)'(1) = 10$.

Problemas

En los problemas 1-6, aplique la regla del producto para calcular la derivada.

1. $f(x) = x^3(2x^2 + 1)$

2. $f(x) = (3x - 5)(2x^2 - 3)$

3. $f(x) = \sqrt{x}(1 - x^3)$

4. $f(x) = (3x^4 + 2x^6)(x - 2)$

5. $\left.\dfrac{dh}{ds}\right|_{s=4}$, $\quad h(s) = (s^{-1/2} + 2s)(7 - s^{-1})$

6. $y = (t - 8t^{-1})(t + t^2)$

En los problemas 7-12, aplique la regla del cociente para calcular la derivada.

7. $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

8. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x + 1}$

9. $\left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=-2}$, $\quad g(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$

10. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=9}$, $\quad w = \dfrac{z^2}{\sqrt{z} + z}$

11. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^{3/2}}$

12. $h(s) = \dfrac{s^{3/2}}{s^2 + 1}$

En los problemas 13-16, calcule la derivada de dos maneras. En primer lugar, utilice la regla del producto o del cociente; en segundo lugar, transforme la función algebraicamente y aplique directamente la regla de la potencia.

13. $f(t) = (2t + 1)(t^2 - 2)$

14. $f(x) = x^2(3 + x^{-1})$

15. $h(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t - 1}$

16. $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x^{-1}}{x}$

En los problemas 17-38, calcule la derivada.

17. $f(x) = (x^3 + 5)(x^3 + x + 1)$

18. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - x^2\right)(x^3 + 1)$

19. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3}$, $\quad y = \dfrac{1}{x + 10}$

20. $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=-2}$, $\quad z = \dfrac{x}{3x^2 + 1}$

21. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

22. $f(x) = \dfrac{9x^{5/2} - 2}{x}$

23. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$, $\quad y = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 5}$

24. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^{-1}}{x + 1}$

25. $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=1}$, $\quad z = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

26. $f(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 + 2}{\sqrt{x}}$

27. $h(t) = \dfrac{t}{(t + 1)(t^2 + 1)}$

28. $f(x) = x^{3/2}(2x^4 - 3x + x^{-1/2})$

29. $f(t) = 3^{1/2} \cdot 5^{1/2}$

30. $h(x) = \pi^2(x - 1)$

31. $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 5)$

32. $h(s) = s(s + 4)(s^2 + 1)$

33. $f(x) = \dfrac{x^{3/2}(x^2 + 1)}{x + 1}$

34. $g(z) = \dfrac{(z - 2)(z^2 + 1)}{z}$

35. $g(z) = \left(\dfrac{z^2 - 4}{z - 1}\right)\left(\dfrac{z^2 - 1}{z + 2}\right)$ *Indicación:* primero simplif que.

36. $\dfrac{d}{dx}\Big((ax + b)(abx^2 + 1)\Big)$ $\quad$ (a, b constantes)

37. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{xt - 4}{t^2 - x}\right)$ $\quad$ (x constante)

38. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{ax + b}{cx + d}\right)$ $\quad$ (a, b, c, d constantes)

En los problemas 39-42, calcule la derivada usando los valores:

$f(4)$	$f'(4)$	$g(4)$	$g'(4)$
10	−2	5	−1

39. $(fg)'(4)$ y $(f/g)'(4)$.

40. $F'(4)$, donde $F(x) = x^2 f(x)$.

41. $G'(4)$, donde $G(x) = g(x)^2$.

42. $H'(4)$, donde $H(x) = \dfrac{x}{g(x)f(x)}$.

43. Calcule $F'(0)$, donde:

$$F(x) = \frac{x^9 + x^8 + 4x^5 - 7x}{x^4 - 3x^2 + 2x + 1}$$

Indicación: no calcule $F'(x)$. En su lugar, considere $F(x) = f(x)/g(x)$ y exprese $F'(0)$ en términos de $f(0), f'(0), g(0)$ y $g'(0)$ directamente.

44. Siguiendo las indicaciones del problema 43, calcule $F'(0)$, donde:

$$F(x) = (1 + x + x^{4/3} + x^{5/3})\frac{3x^5 + 5x^4 + 5x + 1}{8x^9 - 7x^4 + 1}$$

45. Compruebe la fórmula $(x^3)' = 3x^2$ expresando $x^3 = x \cdot x \cdot x$ y aplicando la regla del producto.

46. GU Represente la derivada de $f(x) = x/(x^2 + 1)$ en $[-4, 4]$. Use la gráfica para determinar los intervalos en los que $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. A continuación, represente $f(x)$ y describa cómo se refleja el signo de $f'(x)$ en la gráfica de $f(x)$.

47. GU Represente $f(x) = x/(x^2 - 1)$ (en un rango de visión apropiado). Use la gráfica para determinar si $f'(x)$ es positiva o negativa en su dominio $\{x : x \neq \pm 1\}$. A continuación calcule $f'(x)$ y confirme su conclusión algebraicamente.

48. Sea $P = V^2R/(R + r)^2$, como en el ejemplo 5. Calcule dP/dr, suponiendo que r es variable y que R es constante.

49. Halle todos los valores de a tales que la recta tangente a

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 8} \quad \text{en } x = a$$

pase por el origen (figura 4).

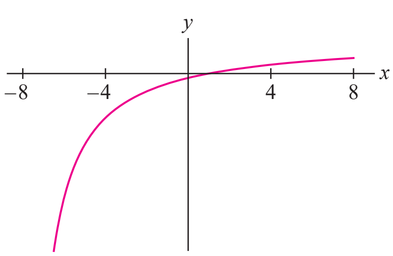


FIGURA 4

50. La corriente I (amperios), el voltaje V (voltios) y la resistencia R (ohmios) en un circuito están relacionadas por la ley de Ohm, $I = V/R$.

(a) Calcule $\left.\frac{dI}{dR}\right|_{R=6}$ si V es constante y de valor $V = 24$.

(b) Calcule $\left.\frac{dV}{dR}\right|_{R=6}$ si I es constante y de valor $I = 4$.

51. Los ingresos mensuales obtenidos por la cadena de ropa Couture en el momento t son $R(t) = N(t)S(t)$, donde $N(t)$ es el número de tiendas y $S(t)$ son los ingresos medios por tienda al mes. Couture pone en marcha una campaña de dos etapas: (A) construir nuevas tiendas, a razón de 5 tiendas al mes y (B) realizar publicidad para incrementar las ventas medias a razón de 10 000 \$ al mes. Suponga que $N(0) = 50$ y $S(0) = 150\ 000$ \$.

(a) Pruebe que los ingresos totales aumentarán a razón de:

$$\frac{dR}{dt} = 5S(t) + 10\ 000N(t)$$

Observe que los dos términos en la regla del producto corresponden, por un lado, a los efectos de incrementar el número de tiendas y por el otro a aumentar los ingresos medios.

(b) Calcule $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=0}$.

(c) Si Couture pudiera implementar sólo una parte (A o B) de su expansión en $t = 0$, ¿qué elección haría que los ingresos crecieran más rápidamente?

52. La **razón de la velocidad de la punta** de una turbina (figura 5) es el cociente $R = T/W$, donde T es la velocidad del aspa y W es la velocidad del viento. (Los ingenieros han determinado empíricamente que una turbina con n hojas consigue la máxima potencia del viento cuando $R = 2\pi/n$.) Calcule dR/dt (t en minutos) si $W = 35$ km/h y W decrece a razón de 4 km/h por minuto, y la velocidad de la punta es constante y de valor $T = 150$ km/h.

FIGURA 5 Turbinas en un parque eólico.

53. La curva $y = 1/(x^2 + 1)$ se denomina la *bruja de Agnesi* (figura 6) y debe su nombre a la matemática italiana Maria Agnesi (1718-1799), quien escribió uno de los primeros libros de cálculo. Este nombre tan extraño se debe a una mala traducción de la palabra italiana *la versiera* al inglés ("witch", *bruja*, en lugar de "that which turns", *la que gira*). Halle las ecuaciones de las rectas tangentes en $x = \pm 1$.

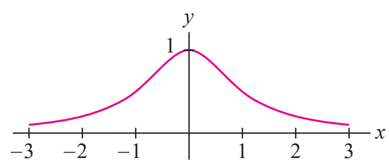


FIGURA 6 La bruja de Agnesi.

54. Sea $f(x) = g(x) = x$. Pruebe que $(f/g)' \neq f'/g'$.

55. Use la regla del producto para probar que $(f^2)' = 2ff'$.

56. Pruebe que $(f^3)' = 3f^2f'$.

Problemas avanzados

57. Sean f, g, h funciones derivables. Pruebe que $(fgh)'(x)$ es igual a:

$$f(x)g(x)h'(x) + f(x)g'(x)h(x) + f'(x)g(x)h(x)$$

Indicación: exprese fgh como $f(gh)$.

58. Demuestre la regla del producto utilizando la definición de derivada.

59. Derivada de la recíproca Use la definición de derivada para demostrar:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \qquad \boxed{7}$$

Indicación: pruebe que el cociente incremental para $1/f(x)$ es igual a:

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x)f(x+h)}$$

60. Demuestre la regla del cociente usando la ec. (7) y la regla del producto.

61. Use la definición de derivada para demostrar el siguiente caso particular de la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(xf(x)) = xf'(x) + f(x)$$

62. Realice la demostración de la regla del cociente que dió Maria Agnesi en su libro sobre cálculo, publicado en 1748: suponga que f, g y $h = f/g$ son derivables. Calcule la derivada de $hg = f$ usando la regla del producto y aísle h'.

63. Revisión de la regla de la potencia Si se encuentra familiarizado con la *demostración por inducción completa*, use inducción para demostrar la regla de la potencia para cualquier número natural n. Pruebe que la regla de la potencia se cumple para $n = 1$; a continuación exprese x^n como $x \cdot x^{n-1}$ y use la regla del producto.

*Problemas 64 y 65: un resultado básico de álgebra establece que c es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $f(x) = (x - c)g(x)$ para algún polinomio $g(x)$. Se dice que c es una **raíz múltiple** si $f(x) = (x-c)^k h(x)$, donde $h(x)$ es un polinomio y $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.*

64. Pruebe que c es una raíz múltiple de $f(x)$ si y sólo si c es una raíz tanto de $f(x)$ como de $f'(x)$.

65. Aplique el problema 64 para determinar si $c = -1$ es una raíz múltiple de:

(a) $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - x + 2$

(b) $x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

66. La figura 7 es la gráfica de un polinomio con raíces en A, B y C. ¿Cuál de ellas es una raíz múltiple? Utilice el ejercicio 64 en su razonamiento.

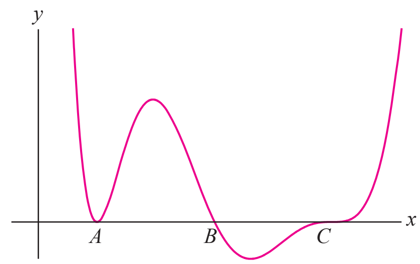


FIGURA 7

3.4 Tasas de variación

Recuerde la notación para la tasa de variación media de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$:

$$\Delta y = \text{cambio en } y = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta x = \text{cambio en } x = x_1 - x_0$$

$$\boxed{\text{Tasa de variación media} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

Habitualmente se omite el término "instantáneo" y se menciona la derivada, sencillamente, como la tasa de cambio. Es una denominación más corta y también más precisa cuando se aplica a tasas genéricas, porque el término "instantáneo" parece que se refiera únicamente a tasas respecto al tiempo.

En la discusión anterior, de la sección 2.1, no se habían introducido todavía los límites ni las derivadas. En este punto, en que ya se dispone de ellos, se puede definir la tasa de variación **instantánea** de y respecto a x en $x = x_0$:

$$\boxed{\text{Tasa de variación instantánea} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

Recuerde las interpretaciones geométricas: la tasa de variación media es la pendiente de la recta secante (figura 1) y la tasa de variación instantánea es la pendiente de la recta tangente (figura 2).

La notación de Leibniz dy/dx resulta especialmente conveniente porque especifica que se está considerando la tasa de variación de y respecto a la variable independiente x. La

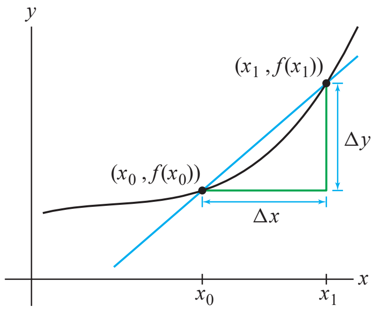


FIGURA 1 La tasa de variación media en $[x_0, x_1]$ es la pendiente de la recta secante.

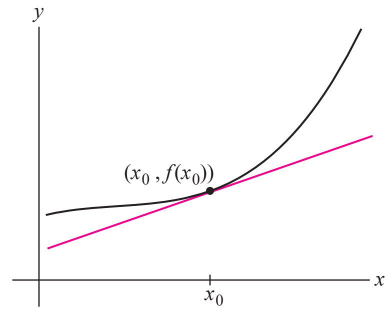


FIGURA 2 La tasa de variación instantánea en x_0 es la pendiente de la recta tangente.

tasa dy/dx se mide en unidades de y por unidad de x. Por ejemplo, la tasa de variación de la temperatura respecto al tiempo tiene unidades tales como grados por minuto, mientras que la tasa de cambio de la temperatura respecto a la altitud tiene unidades tales como grados por kilómetro.

TABLA 1 Datos de la misión Mars Pathfinder, julio 1997

Tiempo	Temperatura (°C)
5:42	−74,7
6:11	−71,6
6:40	−67,2
7:09	−63,7
7:38	−59,5
8:07	−53
8:36	−47,7
9:05	−44,3
9:34	−42

■ **EJEMPLO 1** La tabla 1 contiene datos de la temperatura T sobre la superf cie de Marte en tiempo de Marte t, recogidos por la la sonda espacial Pathf nder, de la NASA.

(a) Calcule la tasa de variación media de la temperatura T desde las 6:11 AM hasta las 9:05 AM.

(b) Use la f gura 3 para estimar la tasa de variación en $t = $ 12:28 PM.

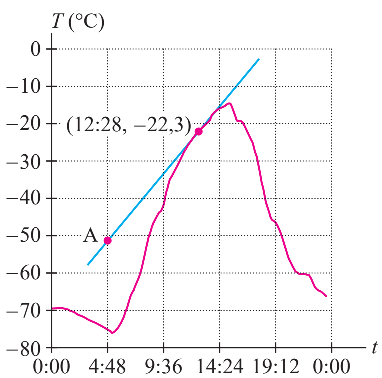


FIGURA 3 Variación de la temperatura en la superf cie de Marte el 6 de Julio de 1997.

Solución

(a) La longitud del intervalo de tiempo [6:11, 9:05] es de 2 h, 54 min, o $\Delta t = 2{,}9$ h. Según la tabla 1, la variación en la temperatura a lo largo de este intervalo de tiempo es:

$$\Delta T = -44{,}3 - (-71{,}6) = 27{,}3\ ^\circ\text{C}$$

La tasa de variación media es es el cociente:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{27{,}3}{2{,}9} \approx 9{,}4\ ^\circ\text{C/h}$$

(b) La tasa de variación es la derivada dT/dt, que es igual a la pendiente de la recta tangente por el punto (12:28, −22,3) en la f gura 3. Para estimar la pendiente, se debe elegir un segundo punto sobre la recta tangente. Considere el punto etiquetado como A, cuyas coordenadas son, aproximadamente, (4:48, −51). La longitud del intervalo de tiempo que va desde las 4:48 AM a las 12:28 PM es de 7 h, 40 min, o $\Delta t = 7{,}67$ h. Luego:

$$\frac{dT}{dt} = \text{pendiente de la recta tangente} \approx \frac{-22{,}3 - (-51)}{7{,}67} \approx 3{,}7\ ^\circ\text{C/h}$$ ■

■ **EJEMPLO 2** Sea $A = \pi r^2$ el área de un círculo de radio r.

(a) Calcule dA/dr en $r = 2$ y $r = 5$.

(b) ¿Por qué dA/dr es mayor en $r = 5$?

Solución La tasa de variación del área respecto al radio es la derivada:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r \qquad \boxed{1}$$

Según la ec. (1), dA/dr es igual a la longitud de la circunferencia $2\pi r$. Se puede explicar este resultado de manera intuitiva: salvo por un error pequeño, el área ΔA de la tira de amplitud Δr en la figura 4 es igual a la longitud de la circunferencia $2\pi r$ por la amplitud Δr. Así, $\Delta A \approx 2\pi r \Delta r$ y

$$\frac{dA}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta r} = 2\pi r$$

(a) Tendremos:

$$\left.\frac{dA}{dr}\right|_{r=2} = 2\pi(2) \approx 12{,}57 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{dA}{dr}\right|_{r=5} = 2\pi(5) \approx 31{,}42$$

(b) La derivada dA/dr mide cómo cambia el área de la circunferencia al aumentar r. La f gura 4 muestra que, cuando el radio aumenta en Δr, el área aumenta en una banda de grosor Δr. El área de la banda es mayor en $r = 5$ que en $r = 2$. Por tanto, la derivada es mayor (y la recta tangente de pendiente más pronunciada) en $r = 5$. En general, para Δr f jado, la variación en el área ΔA es mayor cuando r es mayor. ■

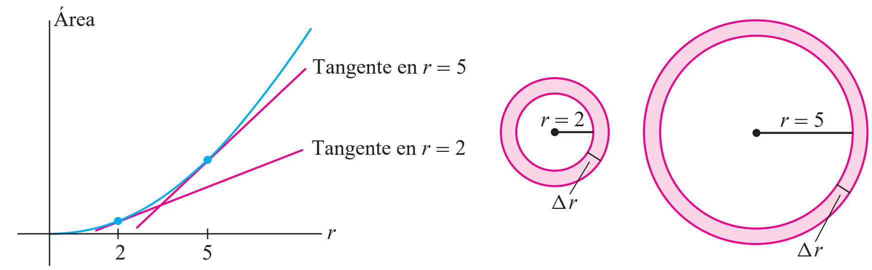


FIGURA 4 Las bandas de color rosa representan la variación en el área cuando r aumenta en Δr.

El efecto de una variación unitaria

Para valores pequeños de h, el cociente incremental es prácticamente igual a la derivada:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \boxed{2}$$

Esta aproximación generalmente mejora cuando h se hace cada vez más pequeño pero, para algunas aplicaciones, la aproximación ya es útil cuando $h = 1$. Si $h = 1$ en la ec. (2) se tiene:

$$\boxed{f'(x_0) \approx f(x_0 + 1) - f(x_0)} \qquad \boxed{3}$$

En otras palabras, $f'(x_0)$ *es aproximadamente igual a la variación que sufre f debida a un cambio unitario en x, cuando $x = x_0$.*

■ **EJEMPLO 3** **Distancia de frenado** Para velocidades s entre 30 y 75 mph, la distancia a la que se detiene un automóvil, después de haber activado los frenos, es aproximadamente $F(s) = 1{,}1s + 0{,}05s^2$ ft. Para $s = 60$ mph:

(a) Estime la variación en la distancia de frenado si la velocidad aumenta en 1 mph.

(b) Compare su estimación con el incremento real en la distancia de frenado.

Solución

(a) Se tiene:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}(1{,}1s + 0{,}05s^2) = 1{,}1 + 0{,}1s \text{ ft/mph}$$

$$F'(60) = 1{,}1 + 6 = 7{,}1 \text{ ft/mph}$$

Usando la ec. (3), se puede estimar:

$$\underbrace{F(61) - F(60)}_{\text{Variación en la distancia de frenado}} \approx F'(60) = 7{,}1 \text{ ft}$$

Así, cuando se incrementa la velocidad de 60 a 61 mph, la distancia de frenado aumenta del orden de 7 ft.

(b) El cambio real en la distancia de frenado es $F(61) - F(60) = 253{,}15 - 246 = 7{,}15$, por lo que la estimación de (a) es bastante precisa. ■

Coste marginal en economía

Aunque $C(x)$ sólo tiene sentido cuando x es un número natural, los economistas suelen tratar $C(x)$ como una función derivable en x de tal manera que las técnicas del cálculo se pueden aplicar.

Sea $C(x)$ el coste de producción en dólares, mano de obra y piezas incluídas, de x unidades de un producto concreto. El número x de unidades producidas se denomina el **nivel de producción**. A fin de estudiar la relación entre el coste y la producción, los economistas definen el **coste marginal** para el nivel de producción x_0, como el coste de producir una unidad adicional:

$$\text{Coste marginal} = C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

En este contexto, la ec. (3) suele proporcionar una buena aproximación; así, se puede considerar $C'(x_0)$ como una estimación del coste marginal.

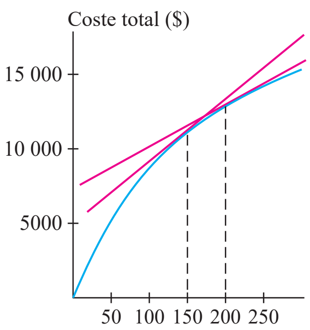


FIGURA 5 Coste de un vuelo. Las pendientes de las rectas tangentes son decrecientes, por lo que el coste marginal es decreciente.

■ **EJEMPLO 4 Coste de un vuelo** Los datos de una aerolínea sugieren que el coste total en dólares de cierto vuelo es aproximadamente $C(x) = 0{,}0005x^3 - 0{,}38x^2 + 120x$, donde x es el número de pasajeros (figura 5).

(a) Estime el coste marginal de un pasajero adicional si el vuelo ya tiene 150 pasajeros.

(b) Compare su estimación con el coste real de un pasajero adicional.

(c) ¿Resulta más caro añadir un pasajero cuando $x = 150$ o cuando $x = 200$?

Solución La derivada es $C'(x) = 0{,}0015x^2 - 0{,}76x + 120$.

(a) El coste marginal en $x = 150$ se estima mediante la derivada siguiente:

$$C'(150) = 0{,}0015(150)^2 - 0{,}76(150) + 120 = 39{,}75$$

Por tanto, añadir un pasajero extra cuesta, aproximadamente, 39,75 $.

(b) El coste real de añadir un pasajero extra es:

$$C(151) - C(150) \approx 11\ 177{,}10 - 11\ 137{,}50 = 39{,}60$$

La estimación de 39,75 $ está suficientemente cerca a efectos prácticos.

(c) El coste marginal en $x = 200$ es aproximadamente de:

$$C'(200) = 0{,}0015(200)^2 - 0{,}76(200) + 120 = 28$$

Como $39{,}75 > 28$, es más caro añadir un pasajero extra cuando $x = 150$. ■

En su libro Lectures on Physics, *el premio Nobel Richard Feynman (1918-1988) recurre a un diálogo para explicar la velocidad instantánea:*

Agente: "Amigo mío, conducía usted a 75 millas por hora".

Conductor: "Eso es imposible, señor: he estado viajando sólo durante siete minutos".

Movimiento rectilíneo

Recuerde que el *movimiento rectilíneo* es un movimiento a lo largo de una línea recta. Esto incluye el desplazamiento horizontal de un vehículo a lo largo de una carretera recta y el movimiento vertical de un cuerpo en caída. Sea $s(t)$ la posición o distancia al origen en el instante t. La velocidad es la tasa de variación de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \text{velocidad} = \frac{ds}{dt}$$

El *signo* de $v(t)$ indica el sentido del movimiento. Por ejemplo, si $s(t)$ denota la altura sobre el suelo, entonces $v(t) > 0$ indica que el objeto está ascendiendo. **Celeridad** se define como el valor absoluto de $|v(t)|$.

La figura 6 muestra la posición de un coche en función del tiempo. Recuerde que la altura de la gráfica representa la distancia del coche al punto de origen. La pendiente de la recta tangente es la celeridad. He aquí algunas conclusiones que se pueden extraer de la gráfica:

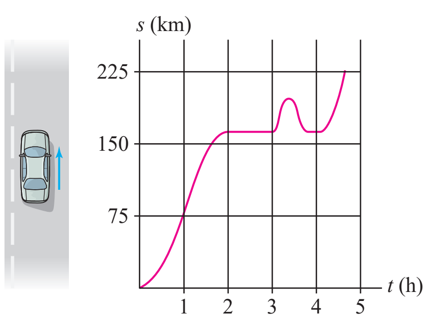


FIGURA 6 Gráfica de la distancia respecto al tiempo.

- **¿Acelerando o desacelerando?** Las rectas tangentes son más pronunciadas en el intervalo $[0, 1]$, por lo que *el coche aceleraba durante la primera hora*. Se vuelven más planas en el intervalo $[1, 2]$, por lo que el coche desaceleraba.

- **Parada** La gráf ca es horizontal en [2, 3] (quizás el conductor se paró en un restaurante durante una hora).
- **Volviendo al mismo lugar** La gráf ca sube y baja en el intervalo [3, 4], indicando que el conductor volvió al restaurante (quizás se dejó su teléfono móvil allí).
- **Velocidad media** La gráf ca crece más en [0, 2] que en [3, 5], por lo que la velocidad media fue mayor durante las primeras dos horas que durante las segundas dos horas.

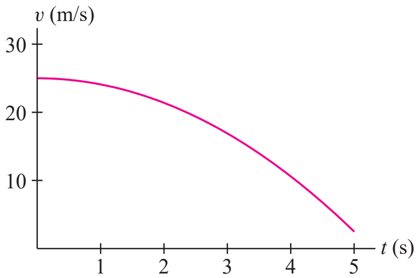


FIGURA 7 Gráf ca de la velocidad $v(t) = 25 - 0{,}9t^2$.

■ **EJEMPLO 5** Un camión de gran tonelaje se incorpora al carril de salida de una autopista en $t = 0$. Su posición, al cabo de t segundos es $s(t) = 25t - 0{,}3t^3$ m para $0 \le t \le 5$.

(a) ¿Qué celeridad lleva el camión en el momento en que se incorpora al carril de salida?

(b) ¿Está acelerando o desacelerando?

Solución La velocidad del camión en el instante t es $v(t) = \dfrac{d}{dt}(25t - 0{,}3t^3) = 25 - 0{,}9t^2$.

(a) El camión se incorpora al carril de salida con celeridad $v(0) = 25$ m/s.

(b) Como $v(t) = 25 - 0{,}9t^2$ es decreciente (f gura 7), el camión está desacelerando. ■

Movimiento bajo la influencia de la gravedad

Las fórmulas de Galileo son válidas únicamente cuando la resistencia al aire es despreciable. Se supondrá que esta es la situación.

Galileo descubrió que la altura $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ en el instante t (segundos) de un objeto que se lanza al aire verticalmente cerca de la superf cie de la Tierra vienen dadas por las fórmulas:

$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 - gt} \qquad (4)$$

Las constantes s_0 y v_0 son los *valores iniciales*:

- $s_0 = s(0)$, la posición en el instante $t = 0$.
- $v_0 = v(0)$, la velocidad en $t = 0$.
- $-g$ es la aceleración debida a la gravedad, sobre la superf cie de la Tierra (negativa, porque el sentido ascendente se considerará positivo), donde:

$$g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{o} \qquad g \approx 32 \text{ ft/s}^2$$

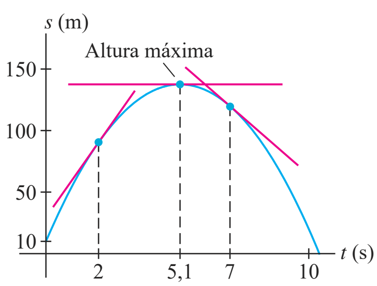


FIGURA 8 La altura máxima se alcanza cuando $s'(t) = v(t) = 0$, donde la recta tangente es horizontal.

Una simple observación permite hallar la altura máxima del objeto. Como la velocidad es positiva cuando el objeto asciende y negativa cuando cae, el objeto alcanza su altura máxima en un momento de transición: ya no asciende más y todavía no ha empezado a caer. En ese momento, su velocidad es cero. En otras palabras, *la altura máxima se alcanza cuando* $v(t) = 0$. En este instante, la recta tangente a la gráf ca de $s(t)$ es horizontal (f gura 8).

■ **EJEMPLO 6 Cálculo de la altura máxima** Se lanza una piedra, verticalmente hacia arriba con un tirador, con velocidad inicial de 50 m/s desde una altura inicial de 10 m.

(a) Halle la velocidad en $t = 2$ y en $t = 7$. Explique el cambio de signo.

(b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la piedra y cuándo lo hará?

Fórmulas de Galileo:

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 - gt$$

Solución Aplique la ec. (4) con $s_0 = 10$, $v_0 = 50$ y $g = 9{,}8$:

$$s(t) = 10 + 50t - 4{,}9t^2 \qquad v(t) = 50 - 9{,}8t$$

(a) Por tanto,

$$v(2) = 50 - 9{,}8(2) = 30{,}4 \text{ m/s}$$

$$v(7) = 50 - 9{,}8(7) = -18{,}6 \text{ m/s}$$

En $t = 2$, la piedra está ascendiendo y su velocidad $v(2)$ es positiva (f gura 8). En $t = 7$, la piedra ya está cayendo y su velocidad $v(7)$ es negativa.

(b) Como la altura máxima se alcanza cuando la velocidad es cero, hay que resolver

$$v(t) = 50 - 9{,}8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{50}{9{,}8} \approx 5{,}1 \text{ s}$$

La piedra alcanza su altura máxima en $t = 5{,}1$ s. Esta altura máxima es:

$$s(5{,}1) = 10 + 50(5{,}1) - 4{,}9(5{,}1)^2 \approx 137{,}6 \text{ m}$$

■

En el ejemplo previo, se han especif cado los valores iniciales de la posición y de la velocidad. El objetivo del siguiente ejemplo será determinar la velocidad inicial.

¿Son importantes las unidades? En septiembre de 1999, la nave Mars Climate Orbiter, *con un coste de 125 millones de dólares ardió en la atmósfera de Marte sin haber completado su misión científica. Según Arthur Stephenson, presidente de la comisión de investigación NASA, en 1999, sobre el fracaso de la misión Mars* Climate Orbiter, *"La 'causa principal' de la pérdida de la nave fue un error de conversión de las unidades anglosajonas a las unidades del sistema métrico en un parte del sistema de navegación".*

■ **EJEMPLO 7 Determinando las condiciones iniciales** ¿Qué velocidad inicial v_0 es necesaria para que un proyectil, que se lanza verticalmente desde el suelo, llegue a una altura máxima de 2 km?

Solución Se necesita una fórmula para la altura máxima en función de la velocidad inicial v_0. La altura inicial es $s_0 = 0$, por lo que la altura del proyectil es $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, según la fórmula de Galileo. La altura máxima se alcanza cuando la velocidad es cero:

$$v(t) = v_0 - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}$$

La altura máxima es el valor de $s(t)$ en $t = v_0/g$:

$$s\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

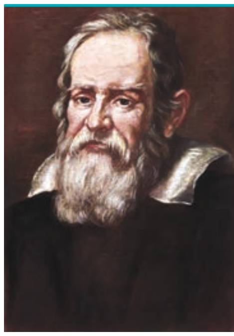
Se puede despejar ahora v_0 utilizando el valor $g = 9{,}8$ m/s^2 (observe que 2 km = 2000 m).

En la ec. (5), la distancia debe expresarse en metros porque el valor de g viene dado en m/s^2.

$$\text{Altura máxima} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2 \cdot 9{,}8} = 2000 \text{ m} \qquad \boxed{5}$$

Así $v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2000} \approx 198$ m/s. En realidad, la velocidad inicial debería haber sido considerablemente mayor para superar la resistencia al aire. ■

FIGURA 9 Aparato como el que usó Galileo para estudiar la caída de los cuerpos.



PERSPECTIVA HISTÓRICA

Galileo Galilei (1564-1642) descubrió las leyes del movimiento para la caída de cuerpos en las inmediaciones de la superf cie terrestre, alrededor del 1600. Los hallazgos de Galileo abrieron el camino a las leyes generales del movimiento enunciadas por Newton. ¿Cómo llegó Galileo a sus fórmulas? El movimiento de un objeto en caída es demasiado rápido para ser medido directamente, sin aparatos de fotografía o electrónicos modernos. Para solventar esta dif cultad, Galileo hizo sus experimentos con bolas que rodaban por un plano inclinado (f gura 9). Si el plano se encontraba en una posición suf cientemente plana, le fue posible medir el movimiento con un reloj de agua y hallar que la velocidad de las bolas era proporcional al tiempo. Se dio cuenta de que la caída libre no es más que una variante más veloz del descenso por un plano inclinado y dedujo la fórmula $v(t) = -gt$ (suponiendo que la velocidad inicial es cero).

Antes de Galileo, se suponía incorrectamente que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros. Galileo se dio cuenta de que esto no era cierto (siempre que se desprecie la resistencia del aire) y, de hecho, la fórmula $v(t) = -gt$ muestra claramente que la velocidad depende del tiempo pero no del peso del objeto. Es interesante que, 300 años más tarde, otro gran físico, Albert Einstein, quedara profundamente intrigado por el descubrimiento de Galileo de que los objetos caen todos con la misma rapidez independientemente de su peso. Lo llamó Principio de Equivalencia e intentó entender por qué era cierto. En 1916, después de una década de trabajo intenso, Einstein desarrolló la teoría de la relatividad general, que por f n ofreció una explicación completa del principio de equivalencia en términos de la geometría del espacio y del tiempo.

3.4 RESUMEN

- La tasa de variación (instantánea) de $y = f(x)$ respecto a x en $x = x_0$ se def ne como la derivada

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- La tasa dy/dx se mide en *unidades de y por unidad de x*.
- Para el movimiento rectilíneo, la velocidad $v(t)$ es la tasa de variación de la posición $s(t)$ respecto al tiempo, es decir, $v(t) = s'(t)$.
- En algunas aplicaciones, $f'(x_0)$ proporciona una buena estimación del cambio en f debido a un incremento unitario en x cuando $x = x_0$:

$$f'(x_0) \approx f(x_0 + 1) - f(x_0)$$

- El coste marginal es el coste de producción de una unidad adicional. Si $C(x)$ es el coste de producción de x unidades, entonces el coste marginal para el nivel de producción x_0 es $C(x_0 + 1) - C(x_0)$. La derivada $C'(x_0)$ suele ser una buena estimación del coste marginal.
- Fórmulas de Galileo para un cuerpo que asciende o que cae bajo la inf uencia de la gravedad, cerca de la superf cie de la Tierra, (s_0 = posición initial, v_0 = velocidad inicial):

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v(t) = v_0 - gt$$

donde $g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$ o $g \approx 32\ \text{ft/s}^2$. La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$.

3.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué unidades se deben usar en cada tasa de variación?

(a) Presión (en atmósferas) en un depósito de agua respecto a la profundidad.

(b) La velocidad de una reacción química (variación en la concentración respecto al tiempo, donde la concentración está medida en moles por litro).

2. Dos trenes van de New Orleans a Memphis en 4 horas. El primer tren viaja a una velocidad constante de 90 mph pero la velocidad del segundo tren varía. ¿Cuál fue la velocidad media del segundo tren durante el recorrido?

3. Estime $f(26)$, suponiendo que $f(25) = 43$ y $f'(25) = 0{,}75$.

4. La población $P(t)$ de Freedonia en 2009 fue de $P(2009) = 5$ millones.

(a) ¿Cuál es el signif cado de $P'(2009)$?

(b) Estime $P(2010)$ si $P'(2009) = 0{,}2$.

Problemas

En los problemas 1-8, halle la tasa de variación.

1. Área de un cuadrado respecto a su lado s cuando $s = 5$.

2. Volumen de un cubo respecto a su lado s cuando $s = 5$.

3. Raíz cúbica $\sqrt[3]{x}$ respecto a x cuando $x = 1, 8, 27$.

4. El recíproco $1/x$ respecto a x cuando $x = 1, 2, 3$.

5. Diámetro de una circunferencia respecto al radio.

6. Área A de la superf cie de una esfera respecto al radio r ($A = 4\pi r^2$).

7. Volumen V de un cilindro respecto al radio, si la altura es igual al radio.

8. Velocidad del sonido v (en m/s) respecto a la temperatura del aire T (en grados kelvin), donde $v = 20\sqrt{T}$.

Los problemas 9-11, se ref eren a la f gura 10, la gráf ca de la distancia $s(t)$ al origen, en función del tiempo, de un desplazamiento en coche.

9. Halle la velocidad media sobre cada intervalo.

(a) $[0, 0{,}5]$ **(b)** $[0{,}5, 1]$ **(c)** $[1, 1{,}5]$ **(d)** $[1, 2]$

10. ¿En qué momento la velocidad es máxima?

11. Relacione las descripciones (i)-(iii) con los intervalos (a)-(c).

(i) Velocidad creciente.

(ii) Velocidad decreciente.

(iii) Velocidad negativa.

(a) $[0, 0{,}5]$ **(b)** $[2{,}5, 3]$ **(c)** $[1{,}5, 2]$

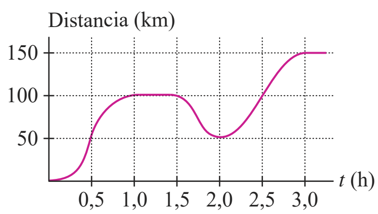


FIGURA 10 Distancia al origen en función del tiempo, para un desplazamiento en coche.

12. Use los datos de la tabla 1 del ejemplo 1 para calcular la tasa media de variación de la temperatura en Marte T respecto al tiempo t en el intervalo que va de las 8:36 AM a las 9:34 AM.

13. Use la f gura 3 del ejemplo 1 para estimar la tasa instantánea de variación de la temperatura en Marte respecto al tiempo (en grados Celsius por hora) en $t = 4$ AM.

14. La temperatura (en °C) de un objeto en el instante t (en minutos) es $T(t) = \frac{3}{8}t^2 - 15t + 180$ para $0 \le t \le 20$. ¿A qué velocidad se está enfriando el objeto en $t = 10$? (Exprese el resultado en las unidades correctas.)

15. La velocidad (en cm/s) de las moléculas de la sangre que f uye a través de un capilar de radio 0,008 cm es $v = 6{,}4 \times 10^{-8} - 0{,}001r^2$, donde r es la distancia de la molécula al centro del capilar. Halle la tasa de variación de la velocidad respecto a r cuando $r = 0{,}004$ cm.

16. La f gura 11 muestra el voltaje V a través de un condensador en función del tiempo, mientras el condensador se está cargando. Estime la tasa de variación del voltaje en $t = 20$ s. Indique los valores que utiliza en sus cálculos y las unidades apropiadas. ¿Cambia más deprisa o más despacio el voltaje, a medida que pasa el tiempo? Justif que su respuesta en términos de rectas tangentes.

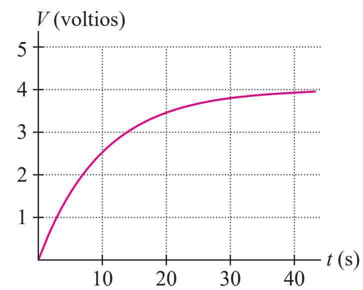


FIGURA 11

17. Use la f gura 12 para estimar dT/dh en $h = 30$ y 70, donde T es la temperatura atmosférica (en grados Celsius) y h es la altitud (en kilómetros). ¿Dónde es dT/dh igual a cero?

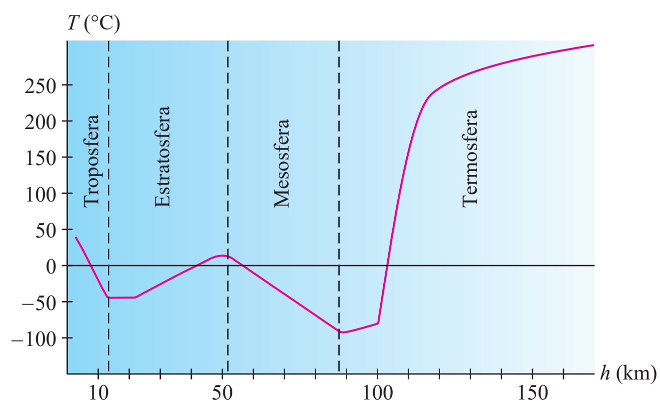


FIGURA 12 Temperatura atmosférica respecto a la altitud.

18. La Tierra ejerce una fuerza gravitatoria de $F(r) = (2{,}99 \times 10^{16})/r^2$ newtons sobre un objeto de masa 75 kg que se encuentra a r metros del centro de la Tierra. Halle la tasa de variación de la fuerza respecto a la distancia r en la superf cie de la Tierra.

19. Calcule la tasa de variación de la velocidad de escape $v_{\text{esc}} = (2{,}82 \times 10^7)r^{-1/2}$ m/s respecto a la distancia r al centro de la Tierra.

20. La potencia suministrada por una batería a un aparato de resistencia R (en ohmios) es $P = 2{,}25R/(R + 0{,}5)^2$ watts. Halle la tasa de variación de la potencia respecto a la resistencia para $R = 3\ \Omega$ y $R = 5\ \Omega$.

21. La posición de una partícula que se mueve en línea recta durante 5 segundos es $s(t) = t^2 - t + 10$ cm. Halle el instante t en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad media del recorrido.

22. La altura (en metros) de un helicóptero en el instante t (en minutos) es $s(t) = 600t - 3t^3$ para $0 \le t \le 12$.

(a) Represente gráf camente $s(t)$ y la velocidad $v(t)$.

(b) Halle la velocidad en $t = 8$ y $t = 10$.

(c) Halle la altura máxima del helicóptero.

23. La posición de una partícula que se mueve sobre una recta en el instante t segundos es $s(t) = t^4 - 18t^2$ m. ¿En qué momento pasa la partícula por el origen? ¿En qué momento se queda instantáneamente sin movimiento la partícula (es decir, su velocidad es cero)?

24. GU Represente la posición de la partícula en el problema 23. ¿Cuál es la posición alcanzada que está más lejos del origen?

25. Se lanza al aire verticalmente un proyectil con velocidad inicial de 200 m/s. Halle la máxima velocidad y la máxima altura del proyectil.

26. Halle la velocidad de un objeto que se deja caer desde 300 m de altura en el instante en que toca el suelo.

27. Se lanza al aire una bola desde el suelo y vuelve a la Tierra 4 s después. Halle la velocidad inicial y la altura máxima de la bola.

28. Olivia está mirando desde la ventana del décimo piso de un edif cio cuando un cubo (que se le ha caído a un limpiador de ventanas) cae. Ella observa que llega al suelo 1,5 s más tarde. Determine la planta desde la que cayó el cubo, si cada piso tiene 5 m de altura y la ventana está en el centro de la décima planta. Desprecie la fricción del aire.

29. Pruebe que, para un objeto en caída según la fórmula de Galileo, la velocidad media en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a la media de las velocidades instantáneas en t_1 y t_2.

30. Un objeto cae bajo la inf uencia de la gravedad cerca de la superf cie de la Tierra. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es cierta? Justif que su respuesta.

(a) La distancia recorrida aumenta en la misma cantidad en intervalos de tiempo iguales.

(b) La velocidad aumenta en la misma cantidad en intervalos de tiempo iguales.

(c) La derivada de la velocidad aumenta con el tiempo.

31. Según la ley de Faraday, si un hilo conductor de longitud ℓ metros se mueve con una velocidad v m/s perpendicularmente a un campo magnético de intensidad B (en teslas), se induce un voltaje de magnitud $V = -B\ell v$ en el hilo. Suponga que $B = 2$ y $\ell = 0{,}5$.

(a) Calcule dV/dv.

(b) Halle la tasa de variación de V respecto al tiempo t si $v = 4t + 9$.

32. El voltaje V, la intensidad de corriente I y la resistencia R en un circuito están relacionados por la ley de Ohm: $V = IR$, donde las unidades son voltios, amperios y ohmios. Suponga que el voltaje es constante $V = 12$ voltios. Calcule (especif cando las unidades):

(a) La tasa de variación media de I respecto a R para el intervalo que va de $R = 8$ hasta $R = 8{,}1$.

(b) La tasa de variación de I respecto a R cuando $R = 8$.

(c) La tasa de variación de R respecto a I cuando $I = 1{,}5$.

33. Ethan tiene comprobado que si recibe h horas de clase, logra resolver correctamente un porcentaje $S(h)$ de los problemas de un examen de matemáticas. ¿Qué valor espera que sea mayor: $S'(3)$ or $S'(30)$? Justif que su respuesta.

34. Suponga que $\theta(t)$ mide el ángulo que forman las dos agujas de un reloj. ¿Cuánto vale $\theta'(t)$ cuando el reloj marca las tres?

35. Para determinar dosis de medicamentos, los médicos estiman la superf cie corporal (SC) de una persona (en metros cuadrados) mediante la fórmula $SC = \sqrt{hm}/60$, donde h es la altura en centímetros y m el peso en kilogramos. Calcule la tasa de variación de la SC respecto al peso en una persona de altura $h = 180$ cm. ¿A qué es igual esta tasa para $m = 70$ kg y $m = 80$ kg? Exprese su resultado en las unidades correctas. ¿Crece más rápidamente la SC respecto al peso en personas de mayor peso o de menor peso?

36. El nivel atmosférico de CO_2, $A(t)$, en Mauna Loa, Hawaii, en el instante t (en partes por millón por volumen) es registrado por la Institución Scripps de Oceanografía. Los valores para los meses de Enero-Diciembre de 2007 fueron:

382,45,	383,68,	384,23,	386,26,	386,39,	385,87,
384,39,	381,78,	380,73,	380,81,	382,33,	383,69

(a) Suponiendo que los registros se obtuvieron el primer día de cada mes, estime $A'(t)$ el día 15 de los meses que van de Enero a Noviembre.

(b) ¿En qué meses alcanzó $A'(t)$ su mayor y menor valores?

(c) ¿En qué mes se mantuvo el nivel de CO_2 prácticamente constante?

37. Las rectas tangentes a la gráf ca de $f(x) = x^2$ son más inclinadas cuando x aumenta. ¿Cual es la tasa de crecimiento de las pendientes de las rectas tangentes?

38. La f gura 13 muestra la altura y de un cuerpo que oscila al f nal de un muelle, a lo largo de un ciclo de oscilación. Dibuje la gráf ca de la velocidad como función del tiempo.

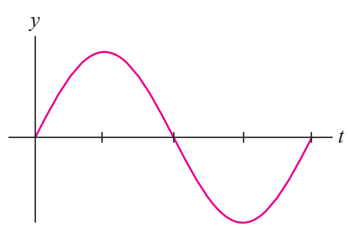


FIGURA 13

En los problemas 39-46, use la ec. (3) para estimar la variación unitaria.

39. Estime $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ y $\sqrt{101} - \sqrt{100}$. Compare sus estimaciones con los valores reales.

40. Estime $f(4) - f(3)$ si $f'(x) = 2^{-x}$. A continuación, estime $f(4)$ suponiendo que $f(3) = 12$.

41. Sea $F(s) = 1{,}1s + 0{,}05s^2$ la distancia de frenado, como en el ejemplo 3. Calcule $F(65)$ y estime el incremento en la distancia de frenado si se aumenta la velocidad de 65 a 66 mph. Compare su estimación con el incremento real.

42. Según la ley de Kleiber, el ritmo metabólico P (en kilocalorías por día) y la masa corporal m (en kilogramos) de un animal están relacionados por una *ley potencial de tres cuartos* $P = 73{,}3\ m^{3/4}$. Estime el aumento del ritmo metabólico cuando la masa corporal se incrementa de 60 a 61 kg.

43. El coste en dólares de producir x rosquillas viene dado por la expresión $C(x) = 300 + 0{,}25x - 0{,}5(x/1000)^3$. Determine el coste de producción de 2000 rosquillas y estime el coste de la rosquilla número 2001. Compare la estimación con el coste real de la rosquilla número 2001.

44. Suponga que el coste en dólares de producir x videocámaras es $C(x) = 500x - 0{,}003x^2 + 10^{-8}x^3$.

(a) Estime el coste marginal a un nivel de producción de $x = 5000$ y compárelo con el coste real $C(5001) - C(5000)$.

(b) Compare el coste marginal para $x = 5000$ con el coste medio por cámara, def nido como $C(x)/x$.

45. La demanda de una mercancía generalmente decrece a medida que el precio aumenta. Suponga que la demanda de petróleo (por persona y año) es de $D(p) = 900/p$ barriles, donde p es el precio por barril en dólares. Calcule la demanda cuando $p = 40$ \$. Estime la disminución de la demanda si p sube a 41 \$ y el aumento si p baja a 39 \$.

46. La tasa de reproducción de la mosca de la fruta *Drosophila melanogaster* criada en botellas en un laboratorio decrece con el número de moscas p de la botella. Un investigador ha hallado que el número de nuevos individuos por hembra y día es, aproximadamente, $f(p) = (34 - 0{,}612p)p^{-0{,}658}$.

(a) Calcule $f(15)$ y $f'(15)$.

(b) Estime la disminución de la descendencia diaria por hembra cuando p aumenta de 15 a 16. ¿Es esta estimación mayor o menor que el valor real $f(16) - f(15)$?

(c) GU Represente gráf camente $f(p)$ para $5 \le p \le 25$ y compruebe que $f(p)$ es una función decreciente de p. ¿Espera que $f'(p)$ sea positiva o negativa? Represente $f'(p)$ y conf rme su suposición.

47. Según la ley de Stevens, en psicología, la intensidad con que una persona percibe un estímulo (magnitud percibida) es proporcional (aproximadamente) a una potencia de la verdadera intensidad I del estímulo. Los experimentos muestran que la *claridad percibida* B de un punto de iluminación cumple $B = kI^{2/3}$, donde I es la intensidad de esa luz, mientras que la *pesadez percibida* H de un peso W cumple $H = kW^{3/2}$ (k es una constante distinta en los dos casos). Calcule dB/dI y dH/dW, y determine si se trata de funciones crecientes o decrecientes. A continuación, explique las siguientes af rmaciones:

(a) Un incremento de una unidad en la intensidad de una luz se nota más cuando I es pequeña que cuando I es grande.

(b) Añadir una libra de carga a W se siente más cuando W es grande que cuando W es pequeña.

48. Sea $M(t)$ la masa (en kilogramos) de una planta en función del tiempo (en años). Estudios recientes de Niklas y Enquist han evidenciado que para una sorprendente variedad de plantas (desde hierbas y algas hasta palmeras), la tasa de crecimiento durante el período de vida del organismo cumple una *ley potencial de tres cuartos*, es decir, $dM/dt = CM^{3/4}$ para alguna constante C.

(a) Si un árbol tiene una tasa de crecimiento de 6 kg/año cuando $M = 100$ kg, ¿cuál será su tasa de crecimiento cuando $M = 125$ kg?

(b) Si $M = 0{,}5$ kg, ¿cuánta masa adicional debe adquirir la planta para duplicar su tasa de crecimiento?

Problemas avanzados

Problemas 49-51: la ***curva de Lorenz*** $y = F(r)$ *es utilizada por los economistas para estudiar distribución de la renta en un país concreto (vea la f gura 14). Por def nición,* $F(r)$ *es la fracción de la renta total que va a parar a la proporción* r *de la población, donde* $0 \le r \le 1$. *Por ejemplo, si* $F(0{,}4) = 0{,}245$, *entonces el* 40 % *del total de los hogares recibe el* 24,5 % *de la renta total. Observe que* $F(0) = 0$ *y* $F(1) = 1$.

49. El objetivo es hallar una interpretación para $F'(r)$. La renta media de un grupo de hogares es la renta total que va a parar al grupo, dividida por el número de hogares en el grupo. La renta nacional media es $A = T/N$, donde N es el número total de hogares y T es la renta total percibida por la población.

(a) Pruebe que la renta media entre los hogares dentro de la proporción r de la población es igual a $(F(r)/r)A$.

(b) Pruebe, de forma más general, que la renta media de los hogares que pertenecen al intervalo $[r, r + \Delta r]$ es igual a:

$$\left(\frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r}\right) A$$

(c) Sea $0 \le r \le 1$. Un hogar pertenece al percentil $100r$ si su renta es superior o igual que la renta del $100r$ % de todos los hogares. Pase al límite cuando $\Delta r \to 0$ en (b) para obtener la siguiente interpretación: un hogar en el percentil $100r$ tiene una renta de $F'(r)A$. En particular, un hogar en el percentil $100r$ recibe más que la media nacional si $F'(r) > 1$, y menos si $F'(r) < 1$.

(d) Según las curvas de Lorenz L_1 y L_2 en la f gura 14(B), ¿qué porcentaje de hogares tienen una renta por encima de la media?

50. La siguiente tabla contiene los valores de $F(r)$ para Suecia en 2004. Suponga que la renta nacional media fue de $A = 30\ 000$ euros.

r	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$F(r)$	0	0,01	0,245	0,423	0,642	1

(a) ¿Cuál fue la renta media en la porción que comprende el 40 % inferior del total de los hogares?

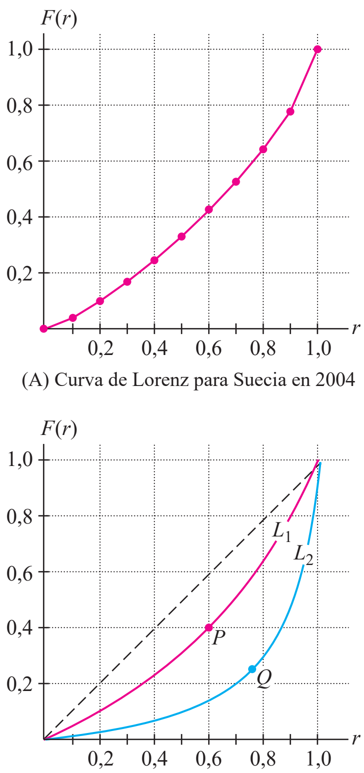
(b) Pruebe que la renta media de los hogares que pertenecen al intervalo [0,4, 0,6] fue de 26 700 euros.

(c) Estime $F'(0{,}5)$. Estime la renta de los hogares en el percentil 50. ¿Fue mayor o menor que la media nacional?

51. Use el problema 49 (c) para demostrar:

(a) $F'(r)$ es una función creciente de r.

(b) La renta se distribuye de forma equitativa (todos los hogares tienen la misma renta) si y sólo si $F(r) = r$ para $0 \le r \le 1$.



(A) Curva de Lorenz para Suecia en 2004

(B) Dos curvas de Lorenz: las pendientes de las rectas tangentes en P y Q son iguales a 1.

FIGURA 14

52. SAC Los estudios sobre buscadores de Internet muestran que la popularidad de una página web se describe bastante bien por la ley de Zipf, según la cual la web que ocupa el lugar n según su popularidad recibe aproximadamente una fracción $1/n$ de todas las visitas. Suponga que un cierto día la página web situada en el lugar n recibió aproximadamente $V(n) = 10^6/n$ visitantes (con $n \leq 15\ 000$).

(a) Compruebe que las 50 mejores webs recibieron cerca del 45 % de las visitas. *Indicación:* Sea $T(N)$ la suma de $V(n)$ para $1 \leq n \leq N$. Use un programa de cálculo simbólico para evaluar $T(45)$ y $T(15\ 000)$.

(b) Compruebe numéricamente que cuando se usa la ec. (3) para estimar $V(n+1)-V(n)$, el error cometido en la estimación decrece a medida que n aumenta. Halle (de nuevo experimentalmente) N tal que el error sea, a lo sumo, 10 para $n \geq N$.

(c) Usando la ec. (3), pruebe que para $n \geq 100$, la web situada en el lugar n recibirá, a lo sumo, 100 visitantes más que la web en la posición $(n+1)$.

En los problemas 53 y 54, el coste medio por unidad a un nivel de producción x se def ne como $C_{\text{med}}(x) = C(x)/x$, donde $C(x)$ es la función coste. El coste medio es una medida de la ef ciencia del proceso de producción.

53. Pruebe que $C_{\text{med}}(x)$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto $(x, C(x))$ sobre la gráf ca de $C(x)$. Usando esta interpretación, determine si el coste medio, o el marginal, es el mayor en los puntos A, B, C y D de la f gura 15.

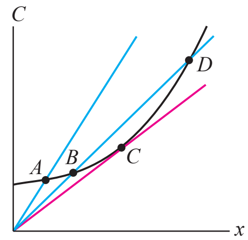


FIGURA 15 Gráf ca de $C(x)$.

54. El coste en dólares de fabricar despertadores viene dado por $C(x) = 50x^3 - 750x^2 + 3740x + 3750$, donde x está en unidades de 1000.

(a) Calcule el coste medio en $x = 4, 6, 8$ y 10.

(b) Use la interpretación gráf ca del coste medio para hallar el nivel de producción x_0 para el que el coste medio sea mínimo.¿Cuál es la relación entre el coste medio y el coste marginal en x_0 (vea la f gura 16)?

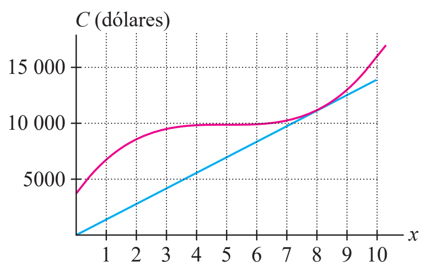


FIGURA 16 Función de coste $C(x) = 50x^3 - 750x^2 + 3740x + 3750$.

3.5 Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior se obtienen derivando sucesivamente una función $y = f(x)$. Si f' es derivable, entonces la **segunda derivada**, que se denota f'' o y'', es la derivada de f':

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x))$$

La segunda derivada es la tasa de cambio de $f'(x)$. El siguiente ejemplo pone de manif esto las diferencias entre la primera y la segunda derivadas.

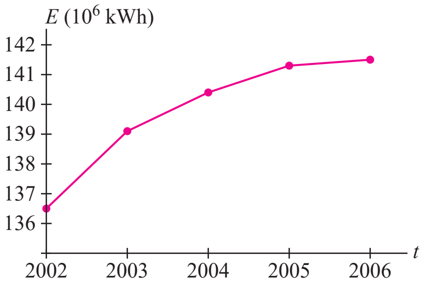


FIGURA 1 Consumo doméstico de energía $E(t)$ en Alemania en millones de kilovatios-hora.

■ **EJEMPLO 1** La figura 1 y la tabla 1 describen el consumo doméstico total de energía $E(t)$ en Alemania en el año t. Examine $E'(t)$ y $E''(t)$.

TABLA 1 **Consumo doméstico de energía en Alemania**

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Consumo (10^6 kWh)	136,5	139,1	140,4	141,3	141,5
Incremento anual		2,6	1,3	0,9	0,2

Solución Vamos a ver que $E'(t)$ es positiva, pero $E''(t)$ es negativa. Según la tabla 1, el consumo cada año fue mayor que el anterior, por lo que la tasa de variación $E'(t)$ es positiva. Sin embargo, la magnitud del incremento se redujo de 2,6 millones en 2003 a 0,2 en 2006. Así, aunque $E'(t)$ es positiva, $E'(t)$ decrece de un año al siguiente y, por tanto, su tasa de variación $E''(t)$ es negativa. La figura 1 apoya esta conclusión: las pendientes de los segmentos de la gráfica son decrecientes. ■

- *dy/dx se expresa en unidades de y por unidad de x.*
- *d^2y/dx^2 se expresa en unidades de dy/dx por unidad de x, o en unidades de y por unidad de x al cuadrado.*

El proceso de derivar se puede continuar, siempre que las derivadas existan. La tercera derivada, que se denota $f'''(x)$ o $f^{(3)}(x)$, es la derivada de $f''(x)$. En general, la derivada de orden n, que se denota $f^{(n)}(x)$, es la derivada de la derivada de orden $(n-1)$. Se dice que $f(x)$ es la derivada de orden cero, y que $f'(x)$ es la primera derivada. En la notación de Leibniz, se escribe:

$$\frac{df}{dx} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} \qquad \frac{d^4 f}{dx^4} \ldots$$

■ **EJEMPLO 2** Calcule $f'''(-1)$ para $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7x^{-2}$.

Solución Se deben calcular las tres primeras derivadas:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5 - 2x^2 + 7x^{-2}) = 15x^4 - 4x - 14x^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(15x^4 - 4x - 14x^{-3}) = 60x^3 - 4 + 42x^{-4}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(60x^3 - 4 + 42x^{-4}) = 180x^2 - 168x^{-5}$$

Para $x = -1$, $f'''(-1) = 180 + 168 = 348$. ■

Los polinomios poseen una propiedad especial: llega un momento en que sus derivadas de orden superior son la función cero. Concretamente, si $f(x)$ es un polinomio de grado k, entonces $f^{(n)}(x)$ es cero para $n > k$. La tabla 2 ilustra esta propiedad para $f(x) = x^5$. Por el contrario, las derivadas de orden superior de una función no polinómica, nunca son la función cero (vea el problema 89, sección 4.8).

TABLA 2 **Derivadas de x^5**

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
x^5	$5x^4$	$20x^3$	$60x^2$	$120x$	120	0

■ **EJEMPLO 3** Calcule las primeras cuatro derivadas de $y = x^{-1}$. A continuación, intente establecer la pauta y determine una fórmula general para $y^{(n)}$.

Solución Según la regla de la potencia,

$$y'(x) = -x^{-2}, \quad y'' = 2x^{-3}, \quad y''' = -2 \cdot 3x^{-4}, \quad y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}$$

Se tiene que $y^{(n)}(x)$ es igual a $\pm n!\, x^{-n-1}$. Ahora, observe la alternancia del signo. Como las derivadas de orden impar aparecen con un signo menos, el signo de $y^{(n)}(x)$ es $(-1)^n$. Así, en general, $y^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-n-1}$. ■

RECORDATORIO n-factorial es el número:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

Por tanto:

$$1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Por convenio, se considera $0! = 1$.

No siempre es posible hallar una fórmula simple para las derivadas de una función. En la mayoría de los casos, se vuelven cada vez más complicadas.

■ **EJEMPLO 4** Halle una ecuación de la recta tangente a $y = f'(x)$ en $x = 4$ donde $f(x) = x^{3/2}$.

Solución La pendiente de la recta tangente a $y = f'(x)$ en $x = 4$ es la derivada $f''(4)$. Así, se calcularán las dos primeras derivadas y sus valores en $x = 4$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}, \qquad f'(4) = \frac{3}{2}(4)^{1/2} = 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}, \qquad f''(4) = \frac{3}{4}(4)^{-1/2} = \frac{3}{8}$$

Por tanto, una ecuación de la recta tangente es

$$y - f'(4) = f''(4)(x-4) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = \frac{3}{8}(x-4)$$

En la forma explícita, la ecuación es $y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{2}$. ■

Una derivada segunda muy conocida es la aceleración. Un objeto en movimiento rectilíneo cuya posición es $s(t)$ en el instante t, tiene velocidad $v(t) = s'(t)$ y aceleración $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Así, la aceleración es la tasa de variación de la velocidad, y se mide en unidades de velocidad por unidad de tiempo o "distancia por tiempo al cuadrado", como por ejemplo en m/s^2.

■ **EJEMPLO 5 Aceleración debida a la gravedad** Halle la aceleración $a(t)$ de una bola que se lanza verticalmente al aire, desde el nivel del suelo, con velocidad inicial de 12 m/s. ¿Cómo describe $a(t)$ el cambio en la velocidad de la bola, mientras ésta asciende y vuelve a caer?

Solución Según la fórmula de Galileo, la altura de la bola en el instante t viene dada por $s(t) = s_0 + v_0 t - 4{,}9t^2$ m [f gura 2(A)]. En este caso, $s_0 = 0$ y $v_0 = 12$, por lo que $s(t) = 12t - 4{,}9t^2$ m. Así, $v(t) = s'(t) = 12 - 9{,}8t$ m/s y la aceleración de la bola es:

$$a(t) = s''(t) = \frac{d}{dt}(12 - 9{,}8t) = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Tal y como cabía esperar, la aceleración es constante y de valor $-g = -9{,}8$ m/s^2. Mientras la bola asciende y cae, su velocidad decrece de 12 a -12 m/s a razón constante de $-g$ [f gura 2(B)]. ■

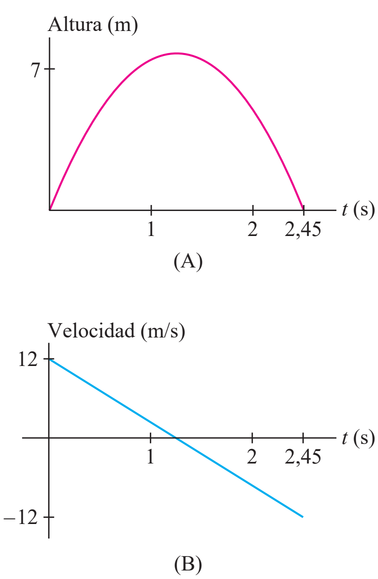
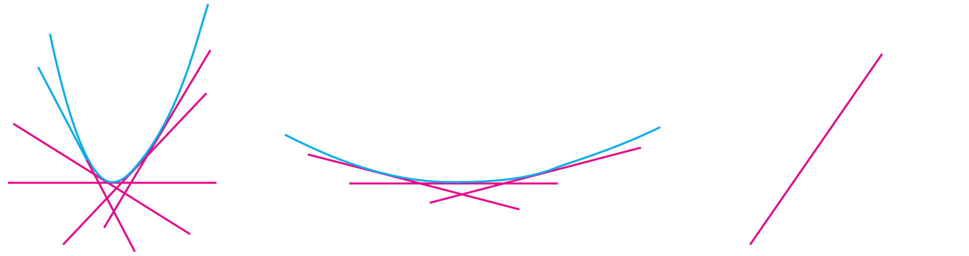


FIGURA 2 Altura y velocidad de una bola lanzada verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 12 m/s.

UN APUNTE GRÁFICO ¿Se puede visualizar la variación representada por $f''(x)$? La segunda derivada indica la rapidez con que $f'(x)$ va cambiando, por lo que $f''(x)$ es grande cuando las pendientes de las rectas tangentes varían rápidamente, como en la f gura 3(A) en la página siguiente. De manera similar, $f''(x)$ es pequeña cuando las pendientes de las rectas tangentes cambian lentamente; en tal caso, la curva es relativamente plana, como en la f gura 3(B). Si f es una función lineal [f gura 3(C)],entonces la recta tangente es siempre la misma y $f''(x) = 0$. De esta manera, $f''(x)$ mide la "f exión" o concavidad de la gráf ca.



(A) Segunda derivada grande: las rectas tangentes cambian rápidamente.

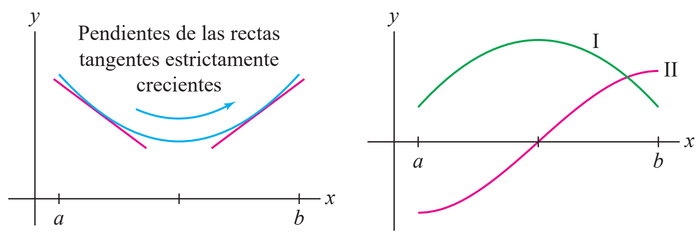
(B) Segunda derivada menor: las rectas tangentes cambian lentamente.

(C) Segunda derivada es cero: las rectas tangentes no cambian.

FIGURA 3

■ **EJEMPLO 6** Identifique que las curvas I y II en la figura 4(B) como las gráficas de $f'(x)$ o de $f''(x)$ para la función $f(x)$ de la figura 4(A).

Solución Las pendientes de las rectas tangentes a $f(x)$ son *estrictamente crecientes* en el intervalo $[a, b]$. De esta manera $f'(x)$ es una función estrictamente creciente y su gráfica debe ser II. Como $f''(x)$ es la tasa de variación de $f'(x)$, $f''(x)$ es positiva y su gráfica debe ser I. ■



(A) Gráfica de $f(x)$

(B) Gráfica de las primeras dos derivadas

FIGURA 4

3.5 RESUMEN

- Las derivadas de orden superior $f', f'', f''', \ldots$ se definen por derivación sucesiva:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) \qquad f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x)\ldots$$

La derivada de orden n se denota como $f^{(n)}(x)$.

- La segunda derivada desempeña un papel importante: es la tasa de variación de f'. Gráficamente, f'' mide lo rápido que las rectas tangentes cambian de dirección y, por tanto, mide la “flexión” de la gráfica.
- Si $s(t)$ es la posición de un objeto en el instante t, entonces $s'(t)$ será la velocidad y $s''(t)$ es la aceleración.

3.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. El 4 de septiembre de 2003, el *Wall Street Journal* publicó el siguiente titular “La bolsa sigue subiendo, aunque el ritmo de sus beneficios disminuye.” Reescriba este titular como una afirmación sobre la primera y la segunda derivadas de los precios de las acciones y dibuje una posible gráfica.

2. ¿Verdadero o falso? La tercera derivada de la posición respecto al tiempo es cero para un objeto que cae al suelo por efecto de la gravedad. Justifique su respuesta.

3. ¿Qué polinomios cumplen $f'''(x) = 0$ para todo x?

4. ¿A qué es igual la derivada de orden seis de $f(x) = x^6$?

Problemas

En los problemas 1-16, calcule y'' e y'''.

1. $y = 14x^2$

2. $y = 7 - 2x$

3. $y = x^4 - 25x^2 + 2x$

4. $y = 4t^3 - 9t^2 + 7$

5. $y = \frac{4}{3}\pi r^3$

6. $y = \sqrt{x}$

7. $y = 20t^{4/5} - 6t^{2/3}$

8. $y = x^{-9/5}$

9. $y = z - \frac{4}{z}$

10. $y = 5t^{-3} + 7t^{-8/3}$

11. $y = \theta^2(2\theta + 7)$

12. $y = (x^2 + x)(x^3 + 1)$

13. $y = \frac{x-4}{x}$

14. $y = \frac{1}{1-x}$

15. $y = s^{-1/2}(s + 1)$

16. $y = (r^{1/2} + r)(1 - r)$

En los problemas 17-26, calcule la derivada que se indica.

17. $f^{(4)}(1), \quad f(x) = x^4$

18. $g'''(-1), \quad g(t) = -4t^{-5}$

19. $\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=1}, \quad y = 4t^{-3} + 3t^2$

20. $\left.\frac{d^4f}{dt^4}\right|_{t=1}, \quad f(t) = 6t^9 - 2t^5$

21. $\left.\frac{d^4x}{dt^4}\right|_{t=16}, \quad x = t^{-3/4}$

22. $f'''(4), \quad f(t) = 2t^2 - t$

23. $f'''(-3), \quad f(x) = \frac{12}{x} - x^3$

24. $f''(1), \quad f(t) = \frac{t}{t+1}$

25. $h''(1), \quad h(w) = \frac{1}{\sqrt{w} + 1}$

26. $g''(1), \quad g(s) = \frac{\sqrt{s}}{s+1}$

27. Calcule $y^{(k)}(0)$ para $0 \le k \le 5$, donde $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (con a, b, c y d constantes).

28. ¿Cual de las siguientes funciones cumple $f^{(k)}(x) = 0$ para todo $k \ge 6$?

(a) $f(x) = 7x^4 + 4 + x^{-1}$

(b) $f(x) = x^3 - 2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = 1 - x^6$

(e) $f(x) = x^{9/5}$

(f) $f(x) = 2x^2 + 3x^5$

29. Use el resultado del ejemplo 3 para hallar $\frac{d^6}{dx^6}x^{-1}$.

30. Calcule las primeras cinco derivadas de $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Pruebe que $f^{(n)}(x)$ es un múltiplo de $x^{-n+1/2}$.

(b) Pruebe que $f^{(n)}(x)$ alterna en signo según $(-1)^{n-1}$ para $n \ge 1$.

(c) Halle una fórmula para $f^{(n)}(x)$, si $n \ge 2$. *Indicación:* compruebe que el coeficiente es $\pm 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \frac{2n-3}{2^n}$.

En los problemas 31-36, halle una fórmula general para $f^{(n)}(x)$.

31. $f(x) = x^{-2}$

32. $f(x) = (x + 2)^{-1}$

33. $f(x) = x^{-1/2}$

34. $f(x) = x^{-3/2}$

35. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

36. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

37. **(a)** Halle la aceleración en el instante $t = 5$ min de un helicóptero cuya altura es $h(t) = 300t - 4t^3$ m.

(b) Represente gráficamente la aceleración $h''(t)$ para $0 \le t \le 6$. ¿Cómo muestra esta gráfica que el helicóptero está bajando lentamente en este intervalo de tiempo?

38. Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f'(x)$ en $x = 3$, donde $f(x) = x^4$.

39. La figura 5 muestra f, f' y f''. Determine cuál es cuál.

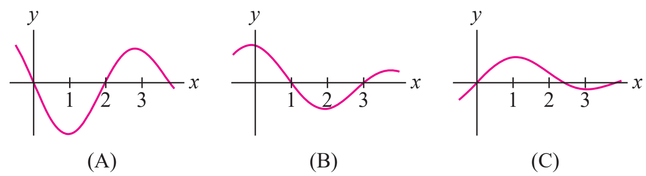


FIGURA 5

40. En la figura 6 se muestra la segunda derivada f''. Considere ahora las representaciones en (A) y (B): ¿cuál corresponde a la gráfica de f y cuál a la de f'?

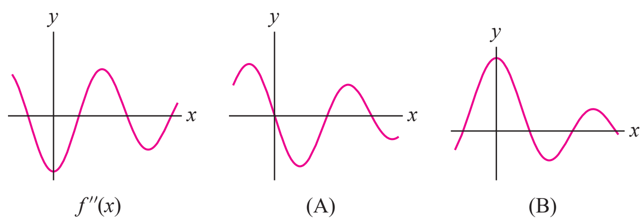


FIGURA 6

41. La figura 7 muestra la gráfica de la posición s de un objeto en función del tiempo t. Determine los intervalos en que la aceleración es positiva.

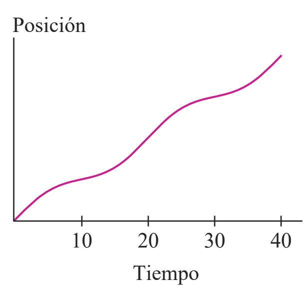


FIGURA 7

42. Halle un polinomio $f(x)$ que cumpla la ecuación: $xf''(x) + f(x) = x^2$

43. Halle todos los valores de n tales que $y = x^n$ cumpla:

$$x^2y'' - 2xy' = 4y$$

44. ¿Cuál de las siguientes descripciones *no* se puede aplicar a la figura 8? Explíquelo.

(a) Gráfica de la aceleración cuando la velocidad es constante.

(b) Gráfica de la velocidad cuando la aceleración es constante.

(c) Gráfica de la posición cuando la aceleración es cero.

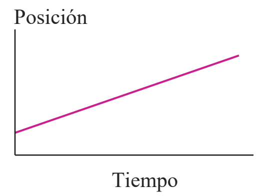


FIGURA 8

45. Según un modelo que tiene en cuenta la resistencia del aire, la aceleración $a(t)$ (en m/s^2) de un paracaidista de masa m en caída libre cumple:

$$a(t) = -9{,}8 + \frac{k}{m}v(t)^2$$

donde $v(t)$ es la velocidad (negativa porque el objeto está cayendo) y k es una constante. Suponga que $m = 75$ kg y $k = 14$ kg/m.

(a) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando $a(t) = -4{,}9$?

(b) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando $a(t) = 0$? Esta velocidad es la velocidad terminal del objeto.

46. Según un modelo que intenta tener en cuenta la resistencia del aire, la distancia $s(t)$ (en metros) recorrida por una gota de lluvia al caer es:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g - \frac{0{,}0005}{D}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

donde D es el diámetro de la gota de lluvia y $g = 9{,}8$ m/s^2. La velocidad terminal v_{term} se define como la velocidad a la que la gota tiene aceleración cero (se puede ver que la velocidad tiende a v_{term} con el paso del tiempo).

(a) Pruebe que $v_{\text{term}} = \sqrt{2000gD}$.

(b) Halle v_{term} para gotas de diámetro 10^{-3} m y 10^{-4} m.

(c) Según este modelo, ¿las gotas de lluvia aceleran más rápido a velocidades mayores o menores?

47. Un servomotor controla el movimiento vertical de un taladro que debe perforar una serie de agujeros en una lámina de metal. La velocidad vertical máxima del taladro es de 4 in./s y, mientras perfora un agujero, debe moverse a menos de 2,6 in./s para no deformar el metal. En cada ciclo, el taladro empieza y termina en reposo, se acerca rápidamente a la lámina y regresa rápidamente a su posición inicial después de la perforación. Dibuje posibles gráficas de la velocidad vertical y aceleración del taladro. Marque los puntos en los que el taladro entra en contacto con la lámina de metal.

Los problemas 48 y 49, se refieren a lo siguiente: En un estudio realizado en 1997, Boardman y Lave relacionaron la velocidad S del tráfico en una autovía de dos carriles con la densidad Q de tráfico (número de coches por cada milla) mediante la fórmula:

$$S = 2882Q^{-1} - 0{,}052Q + 31{,}73$$

para $60 \le Q \le 400$ *(figura 9).*

48. Calcule dS/dQ y d^2S/dQ^2.

49. (a) Explique, de modo intuitivo, por qué cabe esperar que $dS/dQ < 0$.

(b) Pruebe que $d^2S/dQ^2 > 0$. A continuación, use que $dS/dQ < 0$ y $d^2S/dQ^2 > 0$ para justificar la siguiente afirmación: *un incremento de una unidad en la densidad de tráfico reduce más la velocidad cuando Q es pequeño que cuando Q es grande.*

(c) GU Represente gráficamente dS/dQ. ¿Qué propiedad de esta gráfica indica que $d^2S/dQ^2 > 0$?

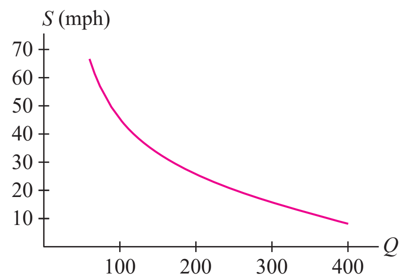


FIGURA 9 La velocidad como función de la densidad de tráfico.

50. SAC Use un programa de cálculo simbólico para calcular $f^{(k)}(x)$ con $k = 1, 2, 3$ para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = (1 + x^3)^{5/3}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1 - x^4}{1 - 5x - 6x^2}$

51. SAC Sea $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$. Use un programa de cálculo simbólico para calcular $f^{(k)}(x)$ con $1 \le k \le 4$. Intente deducir la fórmula general para $f^{(k)}(x)$.

Problemas avanzados

52. Halle la derivada de orden 100 de:

$$p(x) = (x + x^5 + x^7)^{10}(1 + x^2)^{11}(x^3 + x^5 + x^7)$$

53. ¿A qué es igual $p^{(99)}(x)$ para la función $p(x)$ del problema 52?

54. Use la regla del producto, dos veces, para hallar una fórmula para $(fg)''$ en términos de f y g y de sus derivadas primera y segunda.

55. Use la regla del producto para hallar una fórmula para $(fg)'''$ y compare su resultado con el desarrollo de $(a + b)^3$. Intente establecer una fórmula general para $(fg)^{(n)}$.

56. Calcule:

$$\Delta f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x$ **(b)** $f(x) = x^2$ **(c)** $f(x) = x^3$

Según estos ejemplos, ¿puede establecer una conjetura sobre lo que representa Δf?

3.6 Funciones trigonométricas

Las reglas descritas hasta ahora permiten derivar funciones que contienen potencias de x, pero no se ha discutido aún cómo tratar las funciones trigonométricas. Hace falta conocer las derivadas de sen x y cos x. Afortunadamente, estas derivadas son sencillas: cada una es la derivada de la otra, salvo un signo.

Recuerde el convenio que se ha establecido sobre los ángulos: *todos los ángulos se miden en radianes, a menos que se especif que lo contrario.*

ATENCIÓN *En el teorema 1 se deriva respecto a x medida en radianes. Las derivadas del seno y el coseno respecto a grados contienen un engorroso factor adicional de $\pi/180$ (vea el ejemplo 7 en la sección 3.7).*

TEOREMA 1 Derivada del seno y del coseno Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ son derivables y sus derivadas son:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

Demostración Es necesario recurrir a la def nición de derivada:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \qquad \boxed{1}$$

RECORDATORIO *Fórmula de adición para* sen x:

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h$$

No se puede simplif car h reescribiendo el cociente incremental, pero se puede utilizar la fórmula de adición (vea la nota al margen) para expresar el numerador como suma de dos términos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x \qquad \text{(fórmula de adición)}\\
&= (\operatorname{sen} x\cos h - \operatorname{sen} x) + \cos x\operatorname{sen} h\\
&= \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x\operatorname{sen} h
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \frac{\operatorname{sen} x\,(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x\ \operatorname{sen} h}{h}\\
\frac{d\operatorname{sen} x}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\,(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\ \operatorname{sen} h}{h} =\\
&= (\operatorname{sen} x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}}_{\text{Es igual a 0.}} + (\cos x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\text{Es igual a 1.}}
\end{aligned} \qquad \boxed{2}$$

Se puede sacar sen x y cos x fuera de los límites en la ec. (2) porque no dependen de h. Los dos límites vienen dados por el teorema 2 de la sección 2.6,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

De esta manera, la ec. (2) se reduce a la fórmula $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$, tal y como se quería demostrar. La fórmula $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$ se demuestra de forma análoga (vea el problema 53). ■

■ **EJEMPLO 1** Calcule $f''(x)$, donde $f(x) = x\cos x$.

Solución Por la regla del producto, tendremos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}x = x(-\operatorname{sen} x) + \cos x = \cos x - x\operatorname{sen} x\\
f''(x) &= (\cos x - x\operatorname{sen} x)' = -\operatorname{sen} x - (x(\operatorname{sen} x)' + \operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} x - x\cos x
\end{aligned}$$ ■

UN APUNTE GRÁFICO La plausibilidad de la fórmula $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ se hace evidente al comparar las gráf cas de la f gura 1. Las rectas tangentes a la gráf ca de $y = \operatorname{sen} x$ tienen pendiente positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y, en este intervalo, la derivada $y' = \cos x$ es positiva. Análogamente, las rectas tangentes tienen pendiente negativa en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, donde $y' = \cos x$ es negativa. Las rectas tangentes son horizontales en $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, donde $\cos x = 0$.

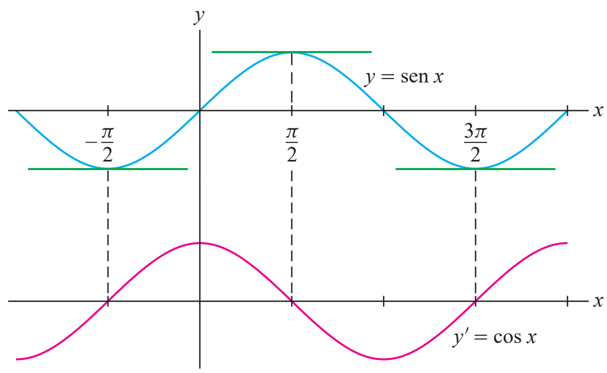


FIGURA 1 Compare las gráf cas de $y = \operatorname{sen} x$ y de su derivada $y' = \cos x$.

Las derivadas de otras **funciones trigonométricas estándar** se pueden calcular aplicando la regla del cociente. Se deduce la fórmula para $(\tan x)'$ en el ejemplo 2, y se dejan el resto de las fórmulas como problemas (problemas 35-37).

RECORDATORIO Las funciones trigonométricas estándar se definieron en la sección 1.4.

TEOREMA 2 Derivadas de las funciones trigonométricas estándar

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

■ **EJEMPLO 2** Compruebe la fórmula $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ (f gura 2).

Solución Aplique la regla del producto y la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$ ■

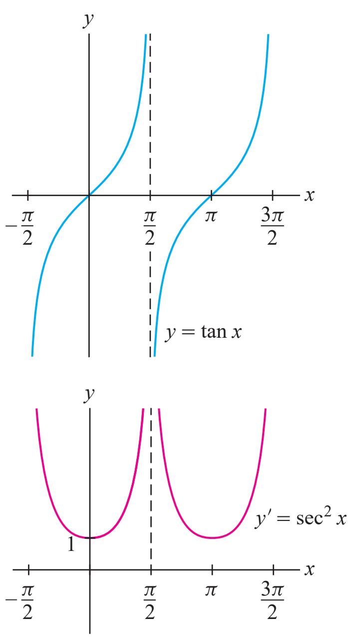


FIGURA 2 Gráf cas de $y = \tan x$ y de su derivada $y' = \sec^2 x$.

■ **EJEMPLO 3** Halle la recta tangente a la gráf ca de $y = \tan\theta \sec\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solución Por la regla del producto se tiene:

$$y' = \tan\theta\,(\sec\theta)' + \sec\theta\,(\tan\theta)' = \tan\theta\,(\sec\theta\ \tan\theta) + \sec\theta\ \sec^2\theta$$

$$= \tan^2\theta \sec\theta + \sec^3\theta$$

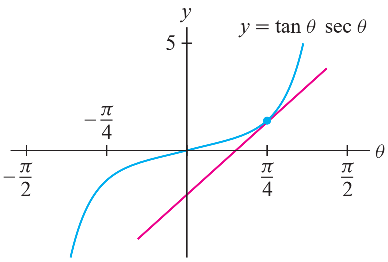


FIGURA 3 Recta tangente a $y = \tan\theta \sec\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Ahora, utilice los valores $\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ y $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ para calcular la ordenada y la pendiente:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sec^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Luego una ecuación de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{4}$ (f gura 3) es $y - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. ■

3.6 RESUMEN

- Derivadas trigonométricas básicas:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x}$$

- Fórmulas adicionales:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

3.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Determine el signo (+ o −) correcto en las siguientes fórmulas:

(a) $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + \cos x) = \pm \operatorname{sen} x \pm \cos x$

(b) $\frac{d}{dx}\sec x = \pm \sec x \tan x$

(c) $\frac{d}{dx}\cot x = \pm \csc^2 x$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden derivar con las reglas que se han tratado en el texto hasta el momento?

(a) $y = 3\cos x \cot x$ **(b)** $y = \cos(x^2)$ **(c)** $y = 2^x \operatorname{sen} x$

3. Calcule $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$ sin usar las fórmulas de derivación para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

4. ¿Cómo se usa la fórmula de adición en la deducción de la fórmula $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$?

Problemas

En los problemas 1-4, halle una ecuación de la recta tangente en el punto que se indica.

1. $y = \operatorname{sen} x, \quad x = \frac{\pi}{4}$

2. $y = \cos x, \quad x = \frac{\pi}{3}$

3. $y = \tan x, \quad x = \frac{\pi}{4}$

4. $y = \sec x, \quad x = \frac{\pi}{6}$

En los problemas 5-24, calcule la derivada.

5. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

6. $f(x) = x^2 \cos x$

7. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

8. $f(x) = 9\sec x + 12\cot x$

9. $H(t) = \operatorname{sen} t \sec^2 t$

10. $h(t) = 9\csc t + t\cot t$

11. $f(\theta) = \tan\theta \sec\theta$

12. $k(\theta) = \theta^2 \operatorname{sen}^2 \theta$

13. $f(x) = (2x^4 - 4x^{-1})\sec x$

14. $f(z) = z\tan z$

15. $y = \dfrac{\sec\theta}{\theta}$

16. $G(z) = \dfrac{1}{\tan z - \cot z}$

17. $R(y) = \dfrac{3\cos y - 4}{\operatorname{sen} y}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x + 2}$

19. $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

20. $f(\theta) = \theta \tan\theta \sec\theta$

21. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x - 1}$

22. $h(t) = \dfrac{\csc^2 t}{t}$

23. $R(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{4 + \cos\theta}$

24. $g(z) = \dfrac{\cot z}{3 - 3\operatorname{sen} z}$

En los problemas 25-34, halle una ecuación de la recta tangente en el punto que se indica.

25. $y = x^3 + \cos x, \quad x = 0$

26. $y = \tan\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

27. $y = \operatorname{sen} x + 3\cos x, \quad x = 0$

28. $y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}, \quad t = \frac{\pi}{3}$

29. $y = 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

30. $y = \csc x - \cot x, \quad x = \frac{\pi}{4}$

31. $y = (\cot t)(\cos t), \quad t = \dfrac{\pi}{3}$

32. $y = x\cos^2 x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

33. $y = x^2(1 - \operatorname{sen} x), \quad x = \dfrac{3\pi}{2}$

34. $y = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\theta}, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

En los problemas 35-37, use el teorema 1 para comprobar la fórmula.

35. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

36. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

37. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

38. Pruebe que tanto $y = \operatorname{sen} x$ como $y = \cos x$ verifican $y'' = -y$.

En los problemas 39-42, calcule la derivada de orden superior.

39. $f''(\theta), \quad f(\theta) = \theta \operatorname{sen}\theta$

40. $\dfrac{d^2}{dt^2}\cos^2 t$

41. $y'', \quad y''', \quad y = \tan x$

42. $y'', \ y''', \ y = t^2 \operatorname{sen} t$

43. Calcule las primeras cinco derivadas de $f(x) = \cos x$. Después determine $f^{(8)}$ y $f^{(37)}$.

44. Halle $y^{(157)}$, donde $y = \operatorname{sen} x$.

45. Halle los valores de x entre 0 y 2π tales que la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x \cos x$ sea horizontal.

46. GU Represente la gráfica de $f(\theta) = \sec\theta + \csc\theta$ en $[0, 2\pi]$ y determine gráficamente el número de soluciones de $f'(\theta) = 0$ en este intervalo. A continuación, calcule $f'(\theta)$ y halle todas las soluciones.

47. GU Sea $g(t) = t - \operatorname{sen} t$.

(a) Represente, con un programa informático, la gráfica de g para $0 \le t \le 4\pi$.

(b) Pruebe que la pendiente de la recta tangente es no negativa. Compruebe esta afirmación sobre su gráfica.

(c) ¿Para qué valores de t, en el rango indicado, la recta tangente es horizontal?

48. SAC Sea $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

(a) Represente gráficamente $f(x)$ en $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Pruebe que $f'(c) = 0$ si $c = \tan c$. Empleando la opción de determinación numérica de raíces en un programa de cálculo simbólico, halle una buena aproximación del menor valor *positivo* c_0 tal que $f'(c_0) = 0$.

(c) Compruebe que la recta horizontal $y = f(c_0)$ es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = c_0$ representándola en el mismo sistema de ejes.

49. Pruebe que ninguna recta tangente a $f(x) = \tan x$ tiene pendiente cero. ¿Cuál es la menor de las pendientes de las tangentes? Justifique su respuesta dibujando la gráfica de $(\tan x)'$.

50. La altura en el instante t (en segundos) de un cuerpo que oscila al final de un muelle es $s(t) = 300 + 40 \operatorname{sen} t$ cm. Halle la velocidad y la aceleración en $t = \frac{\pi}{3}$ s.

51. El alcance horizontal de un proyectil R lanzado a nivel del suelo con un ángulo θ y velocidad inicial v_0 m/s es $R = (v_0^2/9{,}8)\operatorname{sen}(2\theta)$. Calcule $dR/d\theta$. Si $\theta = 7\pi/24$, ¿aumentará o disminuirá el alcance al aumentar el ángulo ligeramente? Justifique su respuesta en base al signo de la derivada.

52. Pruebe que si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, entonces la distancia sobre el eje x entre θ y el punto en el que la recta tangente corta el eje x es igual a $|\tan\theta|$ (figura 4).

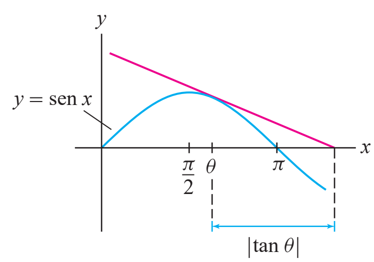


FIGURA 4

Problemas avanzados

53. Use la definición de derivada y el principio de adición para la función coseno, para demostrar que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

54. Use la fórmula de adición para la tangente:

$$\tan(x + h) = \frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h}$$

para calcular $(\tan x)'$ directamente como un límite de cocientes incrementales. Necesitará probar también que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\tan h}{h} = 1$.

55. Compruebe la siguiente identidad y utilícela para proporcionar una demostración alternativa de $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

$$\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x + \tfrac{1}{2}h\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}h\right)$$

Indicación: use la fórmula de adición para demostrar que $\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b) = 2\cos a \operatorname{sen} b$.

56. Pruebe que una función polinómica diferente de cero $y = f(x)$ no puede cumplir la ecuación $y'' = -y$. Use este resultado para demostrar que ni $\operatorname{sen} x$ ni $\cos x$ son polinomios. ¿Se le ocurre otra manera de llegar a esta conclusión, considerando límites cuando $x \to \infty$?

57. Sean $f(x) = x\operatorname{sen} x$ y $g(x) = x\cos x$.

(a) Pruebe que $f'(x) = g(x) + \operatorname{sen} x$ y que $g'(x) = -f(x) + \cos x$.

(b) Compruebe que $f''(x) = -f(x) + 2\cos x$ y que $g''(x) = -g(x) - 2\operatorname{sen} x$.

(c) Intente hallar por tanteo fórmulas para las derivadas de orden superior de f y de g. *Indicación:* la derivada de orden k depende de si $k = 4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ o bien $4n + 3$.

58. La f gura 5 muestra la interpretación geométrica de la fórmula $(\operatorname{sen}\theta)' = \cos\theta$. Los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{BD}$ son paralelos a los ejes x e y, respectivamente. Sea $\Delta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + h) - \operatorname{sen}\theta$. Compruebe las siguientes af rmaciones:

(a) $\Delta \operatorname{sen}\theta = BC$

(b) $\angle BDA = \theta$ *Indicación:* $\overline{OA} \perp AD$.

(c) $BD = (\cos\theta)AD$

Ahora explique el siguiente enunciado intuitivo: si h es pequeño, entonces $BC \approx BD$ y $AD \approx h$, por lo que $\Delta \operatorname{sen}\theta \approx (\cos\theta)h$ y $(\operatorname{sen}\theta)' = \cos\theta$.

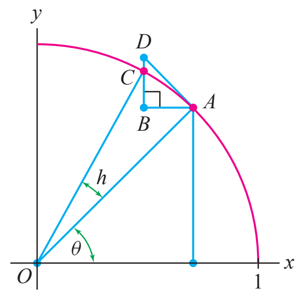


FIGURA 5

3.7 La regla de la cadena

La **regla de la cadena** se emplea para derivar funciones compuestas, como por ejemplo $y = \cos(x^3)$ y $y = \sqrt{x^4 + 1}$.

Recuerde que *una función compuesta* se obtiene "insertando" una función en otra. La composición de g y f, que se denota $f \circ g$, se def ne como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Por conveniencia, se llamará a f la función *externa* y a g la función *interna*. A menudo, se expresa la función compuesta como $f(u)$, donde $u = g(x)$. Por ejemplo, $y = \cos(x^3)$ es la función $y = \cos u$, donde $u = x^3$.

TEOREMA 1 Regla de la cadena Si f y g son derivables, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable y se verif ca:

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)}$$

En su forma verbal, la regla de la cadena dice:

$(f(g(x)))' =$ *exterior′ (interior) · interior′*

Al final de esta sección se facilita una demostración de la regla de la cadena.

EJEMPLO 1 Calcule la derivada de $y = \cos(x^3)$.

Solución Tal y como se ha mencionado anteriormente, $y = \cos(x^3)$ es una composición $f(g(x))$ donde:

$$f(u) = \cos u \qquad u = g(x) = x^3$$

$$f'(u) = -\operatorname{sen} u \qquad g'(x) = 3x^2$$

Observe que $f'(g(x)) = -\operatorname{sen}(x^3)$ y, por la regla de la cadena, tendremos:

$$\frac{d}{dx}\cos(x^3) = \underbrace{-\operatorname{sen}(x^3)}_{f'(g(x))}\ \underbrace{(3x^2)}_{g'(x)} = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$$

EJEMPLO 2 Calcule la derivada de $y = \sqrt{x^4 + 1}$.

Solución La función $y = \sqrt{x^4 + 1}$ es una composición $f(g(x))$ donde:

$$f(u) = u^{1/2} \qquad u = g(x) = x^4 + 1$$

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} \qquad g'(x) = 4x^3$$

Observe que $f'(g(x)) = \frac{1}{2}(x^4 + 1)^{-1/2}$ y, por la regla de la cadena, tendremos:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^4 + 1} = \underbrace{\frac{1}{2}(x^4 + 1)^{-1/2}}_{f'(g(x))} \underbrace{(4x^3)}_{g'(x)} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}}$$

■

EJEMPLO 3 Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Solución La función externa es $f(u) = \tan u$. Como $f'(u) = \sec^2 u$, por la regla de la cadena, tendremos:

$$\frac{d}{dx}\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) = \sec^2\left(\frac{x}{x+1}\right) \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\substack{\text{Derivada de} \\ \text{la función interna}}}$$

Ahora, por la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

De donde:

$$\frac{d}{dx}\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) = \sec^2\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\sec^2\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$$

■

Resulta instructivo escribir la regla de la cadena con la notación de Leibniz. Sea:

$$y = f(u) = f(g(x))$$

Entonces, por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,g'(x) = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$$

o bien:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}}$$

Christian Huygens (1629-1695), uno de los grandes científ cos de su tiempo, fue maestro de Leibniz en matemáticas y física. Admiró mucho a Isaac Newton, pero no aceptó su teoría de la gravitación. Se refería a ella como el "improbable principio de atracción", puesto que no explicaba cómo dos masas separadas por una distancia podían inf uirse mutuamente.

UN APUNTE CONCEPTUAL En la notación de Leibniz, parece como si multiplicásemos fracciones y la regla de la cadena se reduce a "tachar el du". Puesto que las expresiones simbólicas dy/du y du/dx no son fracciones, esto carece de sentido si se interpreta literalmente pero sugiere que las derivadas se comportan *como si fuesen fracciones* (lo cual es razonable, ya que que una derivada es un *límite* de fracciones: el de los cocientes incrementales). La forma de Leibniz también resalta un aspecto clave de la regla de la cadena: *las tasas de variación se multiplican*. Para ilustrar este idea, suponga que (gracias a sus conocimientos en cálculo) su salario aumenta dos veces más rápido que el de su amigo. Si el salario de su amigo aumenta en 4000 \$ al año, su salario aumentará a un ritmo de 2 × 4000 o 8000 \$ al año. En términos de derivadas:

$$\frac{d(\text{su salario})}{dt} = \frac{d(\text{su salario})}{d(\text{salario de su amigo})} \times \frac{d(\text{salario de su amigo})}{dt}$$

$$8000\ \$/\text{año} = 2 \times 4000\ \$/\text{año}$$

■ **EJEMPLO 4** Imagine una esfera cuyo radio r aumenta a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo aumenta el volumen V de esa esfera cuando $r = 10$ cm?

Solución Se pide determinar la razón a la que V está aumentado; así, se debe hallar dV/dt. Se proporciona la tasa dr/dt, concretamente $dr/dt = 3$ cm/s. La regla de la cadena permite expresar dV/dt en términos de dV/dr y dr/dt:

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\substack{\text{Tasa de variación del volumen}\\ \text{respecto al tiempo}}} = \underbrace{\frac{dV}{dr}}_{\substack{\text{Tasa de variación del volumen}\\ \text{respecto al radio}}} \times \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\substack{\text{Tasa de variación del radio}\\ \text{respecto al tiempo}}}$$

Para calcular dV/dr, se usa la fórmula del volumen de una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2$$

Como $dr/dt = 3$, se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot 3 = 12\pi r^2$$

Para $r = 10$, tendremos:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=10} = 12\pi \cdot 10^2 = 1200\pi \approx 3770\ \text{cm}^3/\text{s}$$ ■

A continuación se analizan algunos casos particulares de la regla de la cadena, de especial interés.

TEOREMA 2 Regla de la potencia generalizada Si $g(x)$ es derivable, entonces para todo número n, se tiene:

$$\frac{d}{dx}g(x)^n = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

Demostración Sea $f(u) = u^n$. Entonces $g(x)^n = f(g(x))$ y, según la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}g(x)^n = f'(g(x))g'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$ ■

■ **EJEMPLO 5 Regla de la potencia generalizada y regla exponencial** Halle las derivadas de:

(a) $y = (x^2 + 7x + 2)^{-1/3}$ y **(b)** $y = \sec^4 t$

Solución Aplique $\frac{d}{dx}g(x)^n = ng(x)^{n-1}g'(x)$ en (a) y $\frac{d}{dx}e^{g(x)} = g'(x)e^{g(x)}$ en (b).

(a)
$$\frac{d}{dx}(x^2 + 7x + 2)^{-1/3} = -\frac{1}{3}(x^2 + 7x + 2)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + 7x + 2) =$$
$$= -\frac{1}{3}(x^2 + 7x + 2)^{-4/3}(2x + 7)$$

(b)
$$\frac{d}{dt}\sec^4 t = 4\sec^3 t\frac{d}{dt}\sec t = 4\sec^3 t(\sec t\tan t) = 4\sec^4 t\tan t$$ ■

La regla de la cadena aplicada a $f(kx + b)$ da lugar a otro caso particular destacado:

$$\frac{d}{dx}f(kx + b) = f'(kx + b)\frac{d}{dx}(kx + b) = kf'(kx + b)$$

TEOREMA 3 Regla del desplazamiento y cambio de escala Si $f(x)$ es derivable entonces, para k y b constantes cualesquiera, se tiene:

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(kx + b) = kf'(kx + b)}$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(9x - 2)^5 = 9 \cdot 5(9x - 2)^4 = 45(9x - 2)^4$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(-4t) = -4\cos(-4t)$$

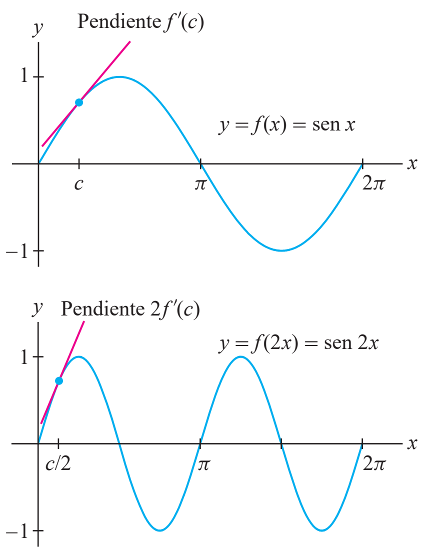


FIGURA 1 La derivada de $f(2x)$ en $x = c/2$ es igual a dos veces la derivada de $f(x)$ en $x = c$.

UN APUNTE GRÁFICO Para entender el teorema 3 gráf camente, recuerde que las gráf cas de $f(kx + b)$ y $f(x)$ están relacionadas mediante desplazamiento y reescalado (sección 1.1). Por ejemplo, si $k > 1$, entonces la gráf ca de $f(kx + b)$ es una versión comprimida de la gráf ca de $f(x)$ que es más pronunciada en un factor k. La f gura 1 ilustra un caso en que $k = 2$.

Cuando la función interior ya es una función compuesta, la regla de la cadena se aplica en más de una ocasión, tal y como se expone en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Usando dos veces la regla de la cadena Calcule $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$.

Solución En primer lugar, aplique la regla de la cadena siendo la función interior $u = 1 + \sqrt{x^2+1}$:

$$\frac{d}{dx}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)$$

Después, aplique la regla de la cadena de nuevo a la derivada que queda:

$$\frac{d}{dx}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x(x^2+1)^{-1/2}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{-1/2}$$

Según el convenio que se ha establecido, $\operatorname{sen} x$ denota el seno de x radianes y, con este convenio, la fórmula $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ es cierta. En el siguiente ejemplo, se deduce la fórmula para la derivada de la función seno cuando x se expresa en grados.

EJEMPLO 7 Derivadas trigonométricas en grados Calcule la derivada de la función seno cuando la variable se exprese en grados, en lugar de en radianes.

Un cálculo similar muestra que el factor $\frac{\pi}{180}$ aparece en las fórmulas de las derivadas de otras funciones trigonométricas estándar cuando se expresan en grados. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}\underline{\tan}\, x = \left(\frac{\pi}{180}\right)\underline{\sec}^2\, x$$

Solución Para resolver este problema, conviene utilizar un subrayado para indicar la función en grados y no en radianes. Por ejemplo:

$$\underline{\operatorname{sen}}\, x = \text{seno de } x \text{ grados}$$

Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\underline{\operatorname{sen}}\, x$ son diferentes, pero están relacionadas por:

$$\underline{\operatorname{sen}}\, x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

ya que x grados son $\frac{\pi}{180}x$ radianes. Según el teorema 3:

$$\frac{d}{dx}\underline{\operatorname{sen}}\, x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}x\right) = \left(\frac{\pi}{180}\right)\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right) = \left(\frac{\pi}{180}\right)\underline{\cos}\, x$$

Demostración de la regla de la cadena El cociente incremental para la función compuesta $f \circ g$ es:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \qquad (h \neq 0)$$

El objetivo es demostrar que $(f \circ g)'$ es el producto de $f'(g(x))$ y $g'(x)$, de manera que tenga sentido expresar el cociente incremental como un producto:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \boxed{1}$$

Este paso es legítimo únicamente si el denominador $g(x+h)-g(x)$ es diferente de cero. Así, para continuar la demostración, se debe suponer cierta la condición adicional de que $g(x+h)-g(x) \neq 0$ para todo h cercano pero no igual a 0. Aunque esta condición no es estrictamente necesaria, sin ella el razonamiento resulta más técnico (vea el problema 105).

Bajo esta hipótesis, se puede usar la ec. (1) para escribir $(f \circ g)'(x)$ como un producto de dos límites:

$$(f \circ g)'(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\text{Pruebe que es igual a } f'(g(x)).} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\text{Es igual a } g'(x).}$$

El segundo límite a la derecha es $g'(x)$. Se habrá demostrado la regla de la cadena si se prueba que el primer límite es igual a $f'(g(x))$. Para comprobar esta af rmación, sea:

$$k = g(x+h) - g(x)$$

Entonces $g(x+h) = g(x) + k$ y, por tanto:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k}$$

La función $g(x)$ es continua porque es derivable. Así, $g(x+h)$ tiende a $g(x)$ y $k = g(x+h) - g(x)$ tiende a cero cuando $h \to 0$. Por tanto, se puede reescribir el límite en términos de k para obtener el resultado deseado:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x))$$

■

3.7 RESUMEN

- La regla de la cadena expresa $(f \circ g)'$ en términos de f' y g':

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

- En la notación de Leibniz: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, donde $y = f(u)$ y $u = g(x)$
- Regla de la potencia generalizada: $\dfrac{d}{dx}g(x)^n = n(g(x))^{n-1}g'(x)$
- Regla del desplazamiento y cambio de escala: $\dfrac{d}{dx}f(kx+b) = kf'(kx+b)$

3.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Identifique las funciones interior y exterior de las siguientes funciones compuestas:

(a) $y = \sqrt{4x + 9x^2}$ **(b)** $y = \tan(x^2 + 1)$

(c) $y = \sec^5 x$ **(d)** $y = (1 + x^{12})^4$

2. ¿Cuál de las siguientes funciones se puede derivar *sin* usar la regla de la cadena?

(a) $y = \tan(7x^2 + 2)$ **(b)** $y = \dfrac{x}{x+1}$

(c) $y = \sqrt{x} \cdot \sec x$ **(d)** $y = \sqrt{x \cos x}$

(e) $y = x \sec \sqrt{x}$ **(f)** $y = \tan(4x)$

3. ¿Cuál es la derivada de $f(5x)$?

(a) $5f'(x)$ **(b)** $5f'(5x)$ **(c)** $f'(5x)$

4. Suponga que $f'(4) = g(4) = g'(4) = 1$. ¿Dispone de suficiente información para calcular $F'(4)$, donde $F(x) = f(g(x))$? Si la respuesta es negativa, ¿qué datos faltarían?

Problemas

En los problemas 1-4, rellene una tabla como la siguiente:

$f(g(x))$	$f'(u)$	$f'(g(x))$	$g'(x)$	$(f \circ g)'$

1. $f(u) = u^{3/2}$, $g(x) = x^4 + 1$

2. $f(u) = u^3$, $g(x) = 3x + 5$

3. $f(u) = \tan u$, $g(x) = x^4$

4. $f(u) = u^4 + u$, $g(x) = \cos x$

En los problemas 5 y 6, exprese la función como una función compuesta $f(g(x))$ y calcule la derivada usando la regla de la cadena.

5. $y = (x + \operatorname{sen} x)^4$ **6.** $y = \cos(x^3)$

7. Calcule $\dfrac{d}{dx} \cos u$ para las siguientes elecciones de $u(x)$:

(a) $u(x) = 9 - x^2$ **(b)** $u(x) = x^{-1}$ **(c)** $u(x) = \tan x$

8. Calcule $\dfrac{d}{dx} f(x^2 + 1)$ para las siguientes elecciones de $f(u)$:

(a) $f(u) = \operatorname{sen} u$ **(b)** $f(u) = 3u^{3/2}$ **(c)** $f(u) = u^2 - u$

9. Calcule $\dfrac{df}{dx}$ si $\dfrac{df}{du} = 2$ y $\dfrac{du}{dx} = 6$.

10. Calcule $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=2}$ si $f(u) = u^2$, $u(2) = -5$, y $u'(2) = -5$.

En los problemas 11-22, use la regla de la potencia generalizada o la regla del desplazamiento y cambio de escala para calcular la derivada.

11. $y = (x^4 + 5)^3$ **12.** $y = (8x^4 + 5)^3$

13. $y = \sqrt{7x - 3}$ **14.** $y = (4 - 2x - 3x^2)^5$

15. $y = (x^2 + 9x)^{-2}$ **16.** $y = (x^3 + 3x + 9)^{-4/3}$

17. $y = \cos^4 \theta$ **18.** $y = \cos(9\theta + 41)$

19. $y = (2\cos\theta + 5 \operatorname{sen}\theta)^9$ **20.** $y = \sqrt{9 + x + \operatorname{sen} x}$

21. $y = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + 2x + 9}\right)$ **22.** $y = \tan(4 - 3x)\sec(3 - 4x)$

En los problemas 23-26, calcule la derivada de $f \circ g$.

23. $f(u) = \operatorname{sen} u$, $g(x) = 2x + 1$

24. $f(u) = 2u + 1$, $g(x) = \operatorname{sen} x$

25. $f(u) = u + u^{-1}$, $g(x) = \tan x$

26. $f(u) = \dfrac{u}{u-1}$, $g(x) = \csc x$

En los problemas 27 y 28, halle la derivada de $f(g(x))$ y de $g(f(x))$.

27. $f(u) = \cos u$, $u = g(x) = x^2 + 1$

28. $f(u) = u^3$, $u = g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

En los problemas 29-42, use la regla de la cadena para hallar la derivada.

29. $y = \operatorname{sen}(x^2)$ **30.** $y = \operatorname{sen}^2 x$

31. $y = \sqrt{t^2 + 9}$ **32.** $y = (t^2 + 3t + 1)^{-5/2}$

33. $y = (x^4 - x^3 - 1)^{2/3}$ **34.** $y = (\sqrt{x+1} - 1)^{3/2}$

35. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$ **36.** $y = \cos^3(12\theta)$

37. $y = \sec \dfrac{1}{x}$ **38.** $y = \tan(\theta^2 - 4\theta)$

39. $y = \tan(\theta + \cos\theta)$ **40.** $y = \sqrt{\cot^9 \theta + 1}$

41. $y = \csc(9 - 2\theta^2)$ **42.** $y = \cot(\sqrt{\theta} - 1)$

En los problemas 43-72, halle la derivada usando la regla o combinación de reglas apropiadas.

43. $y = \tan(x^2 + 4x)$ **44.** $y = \operatorname{sen}(x^2 + 4x)$

45. $y = x\cos(1 - 3x)$ **46.** $y = \operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)$

47. $y = (4t + 9)^{1/2}$ **48.** $y = (z + 1)^4(2z - 1)^3$

49. $y = (x^3 + \cos x)^{-4}$ **50.** $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$

51. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x \cos x}$ **52.** $y = \left(9 - (5 - 2x^4)^7\right)^3$

53. $y = (\cos 6x + \operatorname{sen} x^2)^{1/2}$

54. $y = \dfrac{(x+1)^{1/2}}{x+2}$

55. $y = \tan^3 x + \tan(x^3)$

56. $y = \sqrt{4 - 3\cos x}$

57. $y = \sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}$

58. $y = (\cos^3 x + 3\cos x + 7)^9$

59. $y = \dfrac{\cos(1+x)}{1+\cos x}$

60. $y = \sec(\sqrt{t^2 - 9})$

61. $y = \cot^7(x^5)$

62. $y = \dfrac{\cos(1/x)}{1+x^2}$

63. $y = \left(1 + \cot^5(x^4+1)\right)^9$

64. $y = \sqrt{\cos 2x + \operatorname{sen} 4x}$

65. $y = (1 - \csc^2(1 - x^3))^6$

66. $y = \operatorname{sen}(\sqrt{\operatorname{sen}\theta + 1})$

67. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}$

68. $y = \sec\left(1 + (4+x)^{-3/2}\right)$

69. $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

70. $y = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1}$

71. $y = (kx+b)^{-1/3}$; k y b constantes cualesquiera

72. $y = \dfrac{1}{\sqrt{kt^4 + b}}$; k y b constantes, al menos una de ellas no nula

En los problemas 73-76, calcule la derivada de orden superior.

73. $\dfrac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}(x^2)$

74. $\dfrac{d^2}{dx^2}(x^2+9)^5$

75. $\dfrac{d^3}{dx^3}(9-x)^8$

76. $\dfrac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}(2x)$

77. La velocidad molecular media v de un gas en un recipiente viene dada por $v = 29\sqrt{T}$ m/s, donde T es la temperatura, en grados Kelvin. La temperatura está relacionada con la presión (en atmósferas) por $T = 200P$. Halle $\left.\dfrac{dv}{dP}\right|_{P=1,5}$.

78. La potencia P en un circuito es $P = Ri^2$, donde R es la resistencia e i es la intensidad de corriente. Halle dP/dt en $t = \frac{1}{3}$ si $R = 1000\ \Omega$ e i varía según $i = \operatorname{sen}(4\pi t)$ (tiempo en segundos).

79. El radio de una esfera que se expande es $r = 0{,}4t$ cm en cada instante t (en segundos). Sea V el volumen de la esfera. Halle dV/dt cuando: (a) $r = 3$ y (b) $t = 3$.

80. Según un estudio de 2005 del Departamento de Investigación de la Pesca en Aberdeen, Escocia, se inf ere que la longitud media en centímetros de la especie *Clupea harengus* (arenque del Atlántico) en función de la edad t (en años) se puede modelar por la función:

$$L(t) = 32\left(1 - (1 + 0{,}37t + 0{,}068t^2 + 0{,}0085t^3 + 0{,}0009t^4)^{-1}\right)$$

para $0 \le t \le 13$. Vea la f gura 2.

(a) ¿Con qué rapidez cambia la longitud media a la edad de $t = 6$ años?

(b) GU Use una representación de $g'(t)$ para estimar la edad t en la que la longitud media está cambiando a razón de 5 cm/año.

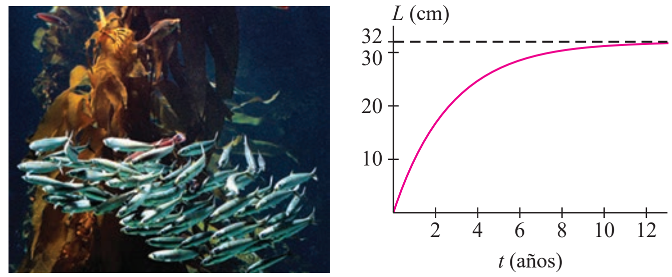


FIGURA 2 Longitud media de la especie *Clupea harengus*.

81. Según un estudio de 1999 de Starkey y Scarnecchia sobre el pez gato americano en el río Yellowstone Inferior (f gura 3), el peso medio (en kilogramos) a la edad t (en años) se puede aproximar por la función:

$$W(t) = \left(0{,}14 + 0{,}115t - 0{,}002t^2 + 0{,}000023t^3\right)^{3,4}$$

Halle la tasa de cambio del peso medio para $t = 10$ años.

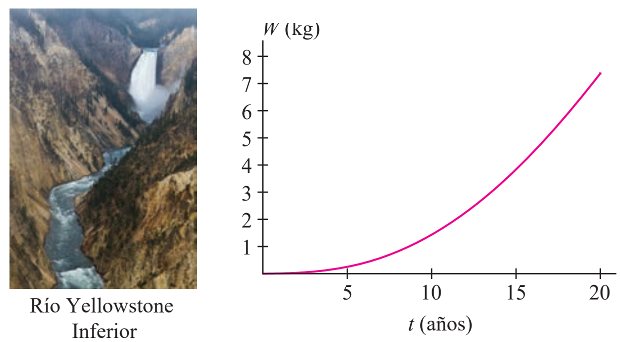


FIGURA 3 Peso medio del pez gato americano a la edad t.

82. Calcule $M'(0)$ en términos de las constantes a, b, k y m, donde:

$$M(t) = \left(a + (b-a)\left(1 + kmt + \frac{1}{2}(kmt)^2\right)\right)^{1/m}$$

83. Con la notación del ejemplo 7, calcule:

(a) $\left.\dfrac{d}{d\theta}\underline{\operatorname{sen}}\,\theta\right|_{\theta=60^\circ}$

(b) $\left.\dfrac{d}{d\theta}\left(\theta + \underline{\tan}\,\theta\right)\right|_{\theta=45^\circ}$

84. Suponga que:

$$f(0) = 2,\quad f'(0) = 3,\quad h(0) = -1,\quad h'(0) = 7$$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones en $x = 0$:

(a) $(f(x))^3$

(b) $f(7x)$

(c) $f(4x)h(5x)$

85. Calcule la derivada de $h(\operatorname{sen} x)$ en $x = \frac{\pi}{6}$, suponiendo que $h'(0{,}5) = 10$.

86. Sea $F(x) = f(g(x))$, donde las gráf cas de f y g se muestran en la f gura 4. Estime $g'(2)$ y $f'(g(2))$ y calcule $F'(2)$.

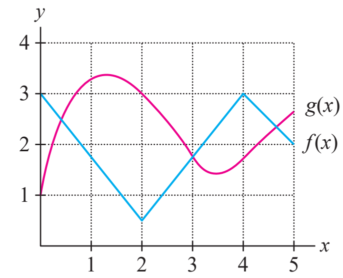


FIGURA 4

En los problemas 87-90, use la tabla de valores para calcular la derivada de la función en el punto que se indica.

x	1	4	6
$f(x)$	4	0	6
$f'(x)$	5	7	4
$g(x)$	4	1	6
$g'(x)$	5	$\frac{1}{2}$	3

87. $f(g(x)), \quad x = 6$

88. $e^{f(x)}, \quad x = 4$

89. $g(\sqrt{x}), \quad x = 16$

90. $f(2x + g(x)), \quad x = 1$

91. El precio (en dólares) de un componente informático es $P = 2C - 18C^{-1}$, donde C es el coste de producción del fabricante. Suponga que el coste en un tiempo t (en años) es $C = 9 + 3t^{-1}$. Determine la tasa de variación del precio respecto al tiempo cuando $t = 3$.

92. GU Represente gráf camente el “astroide” $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 8$. Pruebe que longitud del segmento de cada recta tangente dentro del primer cuadrante es igual a 8.

93. Según el modelo atmosférico estándar en los Estados Unidos, desarrollado por la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica para su uso en el diseño de aviones y cohetes, la temperatura atmosférica T (en grados Celsius), la presión P (kPa = 1 000 Pascales) y la altitud h (en metros) están relacionadas por las fórmulas siguientes (válidas en la troposfera $h \leq 11\ 000$):

$$T = 15{,}04 - 0{,}000649h \qquad P = 101{,}29 + \left(\frac{T + 273{,}1}{288{,}08}\right)^{5{,}256}$$

Use la regla de la cadena para calcular dP/dh. A continuación, estime el cambio en P (en pascales, Pa) por cada metro adicional de altitud, cuando $h = 3\ 000$.

94. Los climatólogos usan la **ley de Stefan-Boltzmann** $R = \sigma T^4$ para estimar el cambio en la temperatura media de la Tierra T (en grados kelvin) provocada por un cambio en la radiación R (en julios por metro cuadrado por segundo) que la Tierra recibe del Sol. Aquí $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{Js^{-1}m^{-2}K^{-4}}$. Calcule dR/dt, suponiendo que $T = 283$ y $\frac{dT}{dt} = 0{,}05$ K/año. ¿En qué unidades se expresa la derivada?

95. Continuando con el ejercicio 94, calcule la tasa anual de cambio de T si $T = 283$ K y R aumenta a razón de $0{,}5\ \mathrm{Js^{-1}m^{-2}}$al año.

96. SAC Use un programa de cálculo simbólico para calcular $f^{(k)}(x)$, con $k = 1, 2, 3$, de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cot(x^2)$

(b) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

97. Use la regla de la cadena para expresar la derivada segunda de $f \circ g$ en términos de las derivadas de f y de g.

98. Calcule la segunda derivada de $\operatorname{sen}(g(x))$ en $x = 2$, suponiendo que $g(2) = \frac{\pi}{4}$, $g'(2) = 5$ y $g''(2) = 3$.

Problemas avanzados

99. Pruebe que si f, g, y h son derivables, entonces:

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

100. Pruebe que la derivación invierte la paridad: Si f es par, entonces f' es impar y si f es impar, entonces f' es par. *Indicación:* derive $f(-x)$.

101. (a) Dibuje la gráf ca de una función par cualquiera $f(x)$ y explique gráf camente por qué $f'(x)$ es impar.

(b) Suponga que $f'(x)$ es par. ¿Esto implica que necesariamente $f(x)$ debe ser impar? *Indicación:* compruebe si es cierto para funciones lineales.

102. Regla de la potencia para exponentes fraccionarios Sea $f(u) = u^q$ y $g(x) = x^{p/q}$. Suponga que $g(x)$ es derivable.

(a) Pruebe que $f(g(x)) = x^p$ (recuerde las reglas de los exponentes).

(b) Aplique la regla de la cadena y la regla de la potencia para números naturales para demostrar que $f'(g(x))\,g'(x) = px^{p-1}$.

(c) A continuación, deduzca la regla de la potencia para $x^{p/q}$.

103. Demuestre que para cualquier número natural $n \geq 1$, se verif ca:

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Indicación: Use la identidad $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

104. Una derivada discontinua Use la def nición con límites para probar que $g'(0)$ existe pero $g'(0) \neq \lim_{x \to 0} g'(x)$, donde:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

105. Regla de la cadena En este ejercicio se demuestra la regla de la cadena sin la hipótesis adicional que se realizó en la demostración del libro. Para todo número b, def na una nueva función:

$$F(u) = \frac{f(u) - f(b)}{u - b} \qquad \text{para todo } u \neq b$$

(a) Pruebe que si se def ne $F(b) = f'(b)$, entonces $F(u)$ es continua en $u = b$.

(b) Sea $b = g(a)$. Pruebe que si $x \neq a$, entonces para todo u, se tiene:

$$\frac{f(u) - f(g(a))}{x - a} = F(u)\frac{u - g(a)}{x - a} \qquad \boxed{2}$$

Observe que ambos lados son cero si $u = g(a)$.

(c) Sustituya $u = g(x)$ en la ec. (2) con el resultado de:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = F(g(x))\,\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Deduzca la regla de la cadena, pasando al límite en ambos lados cuando $x \to a$.

3.8 Derivación implícita

Se han desarrollado las técnicas básicas para calcular una derivada dy/dx cuando y viene dada en términos de x por una fórmula como $y = x^3 + 1$. Pero suponga que y está determinada por una ecuación como la siguiente:

$$y^4 + xy = x^3 - x + 2 \tag{1}$$

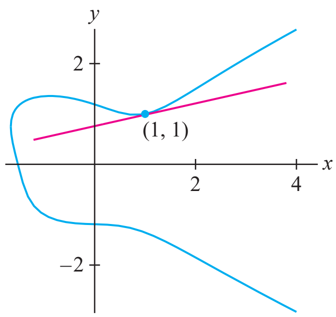


FIGURA 1 Gráf ca de $y^4 + xy = x^3 - x + 2$.

En tal caso, se dice que y está def nida *implícitamente*. ¿Cómo se puede encontrar la pendiente de una recta tangente a un punto de la gráf ca (f gura 1)? Aunque puede ser difícil, o incluso imposible, expresar y explícitamente como función de x, se puede hallar dy/dx con el método de la **derivación implícita**.

Para ilustrar estas ideas, considere la ecuación de la circunferencia unitaria (f gura 2):

$$x^2 + y^2 = 1$$

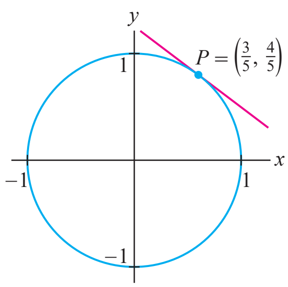


FIGURA 2 La pendiente de la recta tangente a la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ en P es $-\frac{3}{4}$.

Calcule dy/dx derivando a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \tag{2}$$

¿Cómo se va a tratar el término $\frac{d}{dx}(y^2)$? Se utilizará la regla de la cadena. Piense en y como una función $y = f(x)$. Entonces $y^2 = f(x)^2$ y, por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}f(x)^2 = 2f(x)\frac{df}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

La ecuación (2) resulta $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, y se puede despejar $\frac{dy}{dx}$ si $y \neq 0$:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}} \tag{3}$$

■ **EJEMPLO 1** Use la ec. (3) para hallar la pendiente de la recta tangente en el punto $P = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ de la circunferencia unitaria.

Solución Considere $x = \frac{3}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$ en la ec. (3):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$ ■

En este ejemplo concreto, se podría haber calculado dy/dx directamente, sin derivación implícita. La semicircunferencia superior es la gráf ca de $y = \sqrt{1 - x^2}$ y entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(1 - x^2) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esta fórmula expresa dy/dx únicamente en términos x, mientras que la ec. (3) expresa dy/dx en términos de x y también de y, como es habitual cuando se utiliza derivación implícita. Las dos fórmulas son la misma porque $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Observe lo que ocurre si se insiste en aplicar la regla de la cadena a $\frac{d}{dy}\operatorname{sen} y$. *El factor extra aparece pero es igual a* 1*:*

$$\frac{d}{dy}\operatorname{sen} y = (\cos y)\frac{dy}{dy} = \cos y$$

Antes de considerar más ejemplos, vamos a examinar nuevamente cómo el factor dy/dx aparece cuando se deriva una expresión que contiene a y como función de x. No aparecería si se estuviera derivando respecto a y. Es decir:

$$\frac{d}{dy}\operatorname{sen} y = \cos y \qquad \text{pero} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dy}y^4 = 4y^3 \qquad \text{pero} \qquad \frac{d}{dx}y^4 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

De manera análoga, la regla del producto aplicada a xy da lugar a:

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

La regla del cociente aplicada a t^2/y da como resultado:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{y}\right) = \frac{y\frac{d}{dt}t^2 - t^2\frac{dy}{dt}}{y^2} = \frac{2ty - t^2\frac{dy}{dt}}{y^2}$$

■ **EJEMPLO 2** Halle la ecuación de la recta tangente al punto $P = (1, 1)$ de la curva siguiente (f gura 1):

$$y^4 + xy = x^3 - x + 2$$

Solución Se estructura el cálculo en dos etapas.

Etapa 1. **Derive ambos lados de la ecuación respecto a *x***

$$\frac{d}{dx}y^4 + \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(x^3 - x + 2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4y^3\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 3x^2 - 1 \tag{4}$$

Etapa 2. **Despeje** $\frac{dy}{dx}$

Agrupe los términos que involucren dy/dx en la ec. (4) a la izquierda de la igualdad y sitúe los términos restantes a la derecha:

$$4y^3\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 - y$$

Saque factor común dy/dx y despéjelo:

$$(4y^3 + x)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 - y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1 - y}{4y^3 + x} \tag{5}$$

Para hallar la derivada en $P = (1, 1)$, aplique la ec. (5) con $x = 1$ e $y = 1$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{3 \cdot 1^2 - 1 - 1}{4 \cdot 1^3 + 1} = \frac{1}{5}$$

Una ecuación de la recta tangente es $y - 1 = \frac{1}{5}(x - 1)$ o $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL La gráfica de una ecuación no siempre define una función, puesto que puede haber más de un valor de y para algún valor dado de x. La derivación implícita funciona porque la gráfica suele estar formada por varios trozos llamados **ramas**, cada uno de los cuales define una función (una demostración de este hecho necesita del teorema de la función implícita, un resultado de cálculo avanzado). Por ejemplo, las ramas de la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ son las gráficas de las funciones $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Análogamente, la gráfica de la figura 3 posee una rama superior y otra inferior. En la mayoría de los ejemplos, las ramas son derivables excepto en ciertos puntos excepcionales donde la recta tangente puede ser vertical.

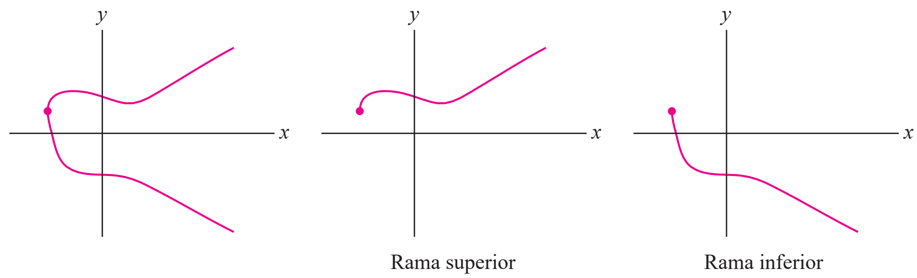


FIGURA 3 Cada rama de la gráfica de $y^4 + xy = x^3 - x + 2$ define una función de x.

■ **EJEMPLO 3** Calcule dy/dx en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ de la curva:

$$\sqrt{2}\,\cos(x+y) = \cos x - \cos y$$

Solución Se seguirán las etapas del ejemplo previo, escribiendo ahora y' en lugar de dy/dx:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\,\cos(x+y)\right) = \frac{d}{dx}\cos x - \frac{d}{dx}\cos y$$

$$-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(x+y)\cdot(1+y') = -\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} y)\,y' \qquad \text{(Regla de la cadena)}$$

$$-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(x+y) - \sqrt{2}\,y'\operatorname{sen}(x+y) = -\operatorname{sen} x + y'\,\operatorname{sen} y$$

$$-y'\left(\operatorname{sen} y + \sqrt{2}\,\operatorname{sen}(x+y)\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen} x$$

(sitúe los términos en y' a la izquierda)

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x - \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen} y + \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+y)}$$

La derivada en el punto $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ es, por consiguiente:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}} = -\frac{1}{3}$$ ■

■ **EJEMPLO 4 Atajo para calcular la derivada en un punto específico** Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_P$ en el punto $P = \left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$ de la curva siguiente (figura 4):

$$y\cos(y + t + t^2) = t^3$$

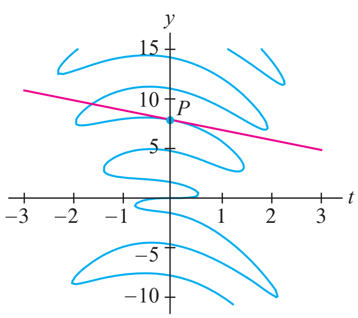


FIGURA 4 Gráfica de $y\cos(y+t+t^2) = t^3$. La pendiente de la recta tangente en $P = \left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$ es -1.

Solución Como antes, derive ambos lados de la ecuación (y' denota dy/dt):

$$\frac{d}{dt}y\cos(y+t+t^2) = \frac{d}{dt}t^3$$

$$y'\cos(y+t+t^2) - y\operatorname{sen}(y+t+t^2)(y'+1+2t) = 3t^2$$

6

Se podría haber despejado y' pero no era necesario, pues se puede sustituir $t = 0$ e $y = \frac{5\pi}{2}$ directamente en la ec. (6) y obtener:

$$y' \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 0 + 0^2\right) - \left(\frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2} + 0 + 0^2\right)(y' + 1 + 0) = 0$$

$$0 - \left(\frac{5\pi}{2}\right)(1)(y' + 1) = 0$$

De donde: $y' + 1 = 0$ o $y' = -1$ ■

3.8 RESUMEN

- La derivación implícita se usa para calcular dy/dx cuando x e y están relacionadas por una ecuación.

Paso 1. Derive a ambos lados de la ecuación, respecto a x.

Paso 2. Despeje dy/dx agrupando todos los términos que involucren dy/dx en un lado y el resto en el otro lado de la ecuación.

- Recuerde incluir el factor dy/dx cuando derive expresiones que involucren y respecto a x. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y = (\cos y) \frac{dy}{dx}$$

3.8 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué regla de derivación se usa para probar que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} y = \cos y \frac{dy}{dx}?$$

2. Una de las af rmaciones (a)-(c) es incorrecta. Halle el error y corríjalo.

(a) $\frac{d}{dy} \operatorname{sen}(y^2) = 2y \cos(y^2)$

(b) $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(x^2) = 2x \cos(x^2)$

(c) $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(y^2) = 2y \cos(y^2)$

3. En un examen se le pidió a Jason que derivara la ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^3 = 7$$

Halle los errores en la respuesta de Jason: $2x + 2xy' + 3y^2 = 0$

4. ¿A qué es igual $\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} t)$, a (a) o a (b)?

(a) $(x \cos t)\frac{dt}{dx}$

(b) $(x \cos t)\frac{dt}{dx} + \operatorname{sen} t$

Problemas

1. Pruebe que si deriva a ambos lados de $x^2 + 2y^3 = 6$, el resultado es $2x + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$. A continuación, despeje dy/dx y evalúe esta derivada en el punto $(2, 1)$.

2. Pruebe que si deriva a ambos lados de $xy + 4x + 2y = 1$, el resultado es $(x + 2)\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$. A continuación, despeje dy/dx y evalúe esta derivada en el punto $(1, -1)$.

En los problemas 3-8, derive la expresión respecto a x, suponiendo que $y = f(x)$.

3. x^2y^3

4. $\frac{x^3}{y^2}$

5. $(x^2 + y^2)^{3/2}$

6. $\tan(xy)$

7. $\frac{y}{y + 1}$

8. $\operatorname{sen} \frac{y}{x}$

En los problemas 9-26, calcule la derivada respecto a x.

9. $3y^3 + x^2 = 5$

10. $y^4 - 2y = 4x^3 + x$

11. $x^2y + 2x^3y = x + y$

12. $xy^2 + x^2y^5 - x^3 = 3$

13. $x^3R^5 = 1$

14. $x^4 + z^4 = 1$

15. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2y$

16. $\sqrt{x + s} = \frac{1}{x} + \frac{1}{s}$

17. $y^{-2/3} + x^{3/2} = 1$

18. $x^{1/2} + y^{2/3} = -4y$

19. $y + \frac{1}{y} = x^2 + x$

20. $\operatorname{sen}(xt) = t$

21. $\operatorname{sen}(x + y) = x + \cos y$

22. $\tan(x^2 y) = (x + y)^3$

23. $\tan(x + y) = \tan x + \tan y$

24. $x \operatorname{sen} y - y \cos x = 2$

25. $x + \cos(3x - y) = xy$

26. $2x^2 - x - y = \sqrt{x^4 + y^4}$

27. Pruebe que $x + yx^{-1} = 1$ e $y = x - x^2$ def nen la misma curva (salvo para $(0, 0)$, que no es solución de la primera ecuación) y que, por derivación implícita, se obtiene $y' = yx^{-1} - x$ e $y' = 1 - 2x$. Explique por qué estas dos fórmulas dan lugar a los mismos valores para la derivada.

28. Use el método del ejemplo 4 para calcular $\left.\frac{dy}{dx}\right|_P$ en el punto $P = (2, 1)$ de la curva $y^2 x^3 + y^3 x^4 - 10x + y = 5$.

En los problemas 29 y 30, halle dy/dx en el punto que se indica.

29. $(x + 2)^2 - 6(2y + 3)^2 = 3, \quad (1, -1)$

30. $\operatorname{sen}^2(3y) = x + y, \quad \left(\dfrac{2 - \pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

En los problemas 31-38, halle una ecuación de la recta tangente en el punto que se indica.

31. $xy + x^2 y^2 = 5, \quad (2, 1)$

32. $x^{2/3} + y^{2/3} = 2, \quad (1, 1)$

33. $x^2 + \operatorname{sen} y = xy^2 + 1, \quad (1, 0)$

34. $\operatorname{sen}(x - y) = x \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

35. $2x^{1/2} + 4y^{-1/2} = xy, \quad (1, 4)$

36. $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{y}{y + 1} = 1, \quad (1, 1)$

37. $\operatorname{sen}(2x - y) = \dfrac{x^2}{y}, \quad (0, \pi)$

38. $x + \sqrt{x} = y^2 + y^4, \quad (1, 1)$

39. Halle los puntos de la gráf ca de $y^2 = x^3 - 3x + 1$ (f gura 5) en que la recta tangente sea horizontal.

(a) Pruebe, en primer lugar, que $2yy' = 3x^2 - 3$, donde $y' = dy/dx$.

(b) No despeje y'. En su lugar, considere $y' = 0$ y despeje x. El resultado son dos valores de x en los que la pendiente puede ser igual a cero.

(c) Pruebe que el valor positivo de x no corresponde a un punto de la gráf ca.

(d) El valor negativo corresponde a los dos puntos de la gráf ca en los que la recta tangente es horizontal. Halle sus coordenadas.

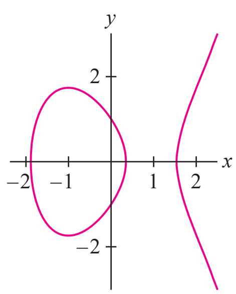


FIGURA 5 Gráf ca de $y^2 = x^3 - 3x + 1$.

40. Pruebe, derivando la ecuación, que si la recta tangente a un punto (x, y) de la curva $x^2 y - 2x + 8y = 2$ es horizontal, entonces $xy = 1$. A continuación, sustituya $y = x^{-1}$ en $x^2 y - 2x + 8y = 2$ para probar que la recta tangente es horizontal en los puntos $(2, \frac{1}{2})$ y $(-4, -\frac{1}{4})$.

41. Halle todos los puntos de la gráf ca de $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ en que la recta tangente sea horizontal (f gura 6).

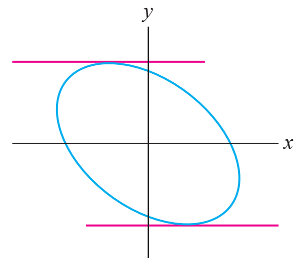


FIGURA 6 Gráf ca de $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$.

42. Pruebe que ningún punto de la gráf ca de $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ tiene una recta tangente horizontal.

43. La f gura 1 muestra la gráf ca de $y^4 + xy = x^3 - x + 2$. Halle dy/dx en los dos puntos de la gráf ca con coordenada x igual a 0, y halle una ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$.

44. Folium de Descartes La curva $x^3 + y^3 = 3xy$ (f gura 7) fue estudiada por primera vez en 1638 por el f lósofo y matemático francés René Descartes, quien le dio el nombre de “folium”, que signif ca hoja. Gilles de Roberval, un colega científ co de Descartes, la llamó f or de jazmín. Ambos creyeron, equivocadamente, que la forma de hoja del primer cuadrante se repetía en cada cuadrante, dándole la apariencia de una f or de cuatro pétalos. Halle la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

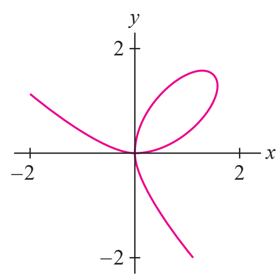


FIGURA 7 Folium de Descartes: $x^3 + y^3 = 3xy$.

45. Halle un punto en el folium $x^3 + y^3 = 3xy$, además del origen, en el que la recta tangente sea horizontal.

46. GU Represente gráf camente $x^3 + y^3 = 3xy + b$ para diferentes valores de b y describa el cambio en la gráf ca cuando $b \to 0$. A continuación, calcule dy/dx en el punto $(b^{1/3}, 0)$. ¿Cómo cambia este valor cuando $b \to \infty$? ¿Conf rman sus gráf cos esta conclusión?

47. Halle las coordenadas x de los puntos en los que las rectas tangentes sean horizontales a la curva *tridente* $xy = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, a la cual dió nombre Isaac Newton en su tratado sobre curvas publicado en 1710 (f gura 8). *Indicación:* $2x^3 - 5x^2 + 1 = (2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$.

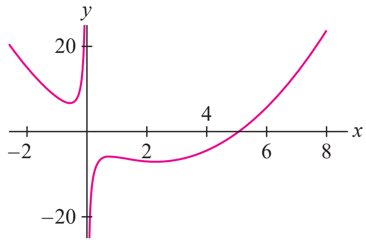


FIGURA 8 Tridente: $xy = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.

48. Halle una ecuación de la recta tangente en cada uno de los cuatro puntos de la curva $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 2(x^2 + y^2)$ en los que $x = 1$. Esta curva (figura 9) es un ejemplo de un *caracol de Pascal*, llamado así por el padre del filósofo francés Blaise Pascal, quien la describió por primera vez en 1650.

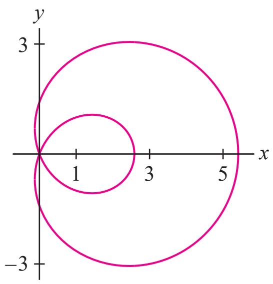


FIGURA 9 Caracol: $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

49. Halle la derivada en los puntos del folium $(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{4}xy^2$ en los que $x = 1$. Vea la figura 10.

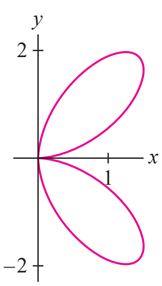


FIGURA 10 Folium: $(x^2 + y^2)^2 = \dfrac{25}{4}xy^2$.

50. SAC Represente gráficamente $(x^2 + y^2)^2 = 12(x^2 - y^2) + 2$ para $-4 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$ usando un programa de cálculo simbólico. ¿Cuántas rectas tangentes horizontales parece tener esta curva? Halle los puntos correspondientes.

Problemas 51-53: Si la derivada dx/dy (en lugar de $dy/dx = 0$) existe en un punto y $dx/dy = 0$, entonces la recta tangente en este punto es vertical.

51. Calcule dx/dy para la ecuación $y^4 + 1 = y^2 + x^2$ y halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente sea vertical.

52. Pruebe que las rectas tangentes en $x = 1 \pm \sqrt{2}$ al *concoide* de ecuación $(x-1)^2(x^2 + y^2) = 2x^2$ son verticales (figura 11).

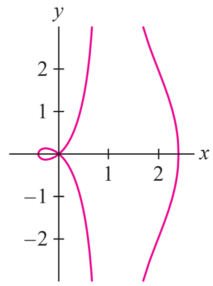


FIGURA 11 Concoide: $(x-1)^2(x^2 + y^2) = 2x^2$.

53. SAC Use un programa de cálculo simbólico para representar:

$$y^2 = x^3 - 4x \quad \text{para } -4 \le x \le 4,\ -4 \le y \le 4$$

Pruebe que si $dx/dy = 0$, entonces $y = 0$. Concluya que la recta tangente es vertical en los puntos donde la curva corta el eje x. ¿Queda confirmada esta conclusión por su representación gráfica?

54. Pruebe que, para todos los puntos P de la gráfica de la figura 12, la longitud de los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{PR}$ es igual.

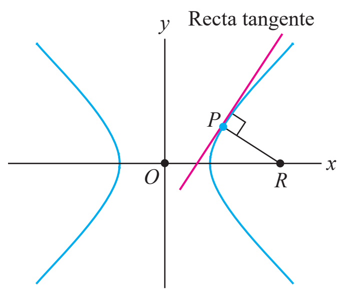


FIGURA 12 Gráfica de $x^2 - y^2 = a^2$.

En los problemas 55-58, use derivación implícita para calcular las derivadas de orden superior.

55. Considere la ecuación $y^3 - \frac{3}{2}x^2 = 1$.

(a) Pruebe que $y' = x/y^2$ y derive de nuevo, para probar que:

$$y'' = \frac{y^2 - 2xyy'}{y^4}$$

(b) Exprese y'' en términos de x y de y usando el resultado de (a).

56. Use el método del problema previo para probar que $y'' = -y^{-3}$, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

57. Calcule y'' en el punto $(1, 1)$ de la curva $xy^2 + y - 2 = 0$, siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

(a) Halle y' por derivación implícita y calcule y' en el punto $(1, 1)$.

(b) Derive la expresión de y' que ha encontrado en (a). A continuación, calcule y'' en $(1, 1)$ sustituyendo $x = 1$, $y = 1$ y el valor de y' hallado en (a).

58. Use el método del problema previo para calcular y'' en el punto $(1, 1)$ de la curva $x^3 + y^3 = 3x + y - 2$.

En los problemas 59-61, x e y son funciones de una variable t y use derivación implícita para relacionar dy/dt y dx/dt.

59. Derive $xy = 1$ respecto de t y deduzca la relación $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dx}{dt}$.

60. Derive $x^3 + 3xy^2 = 1$ respecto de t y exprese dy/dt en términos de dx/dt, como en el problema 59.

61. Calcule dy/dt en términos de dx/dt en los casos siguientes:

(a) $x^3 - y^3 = 1$ **(b)** $y^4 + 2xy + x^2 = 0$

62. El volumen V y la presión P de un gas en un pistón (que varían con el tiempo t) verif can $PV^{3/2} = C$, donde C es una constante. Demuestre que:

$$\frac{dP/dt}{dV/dt} = -\frac{3}{2}\frac{P}{V}$$

El cociente de estas derivadas es negativo. ¿Podría haber predicho este resultado a partir de la relación $PV^{3/2} = C$?

Problemas avanzados

63. Pruebe que si P se encuentra en la intersección de la curva $x^2 - y^2 = c$ con $xy = d$ (c y d constantes), entonces las tangentes a estas curvas en P son perpendiculares.

64. La *lemniscata* $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ fue descubierta por Jacob Bernoulli en 1694, quien observó que tenía "forma de ocho, o de un nudo, o del lazo de una cinta". Halle las coordenadas de los cuatro puntos en los que la recta tangente sea horizontal (f gura 13).

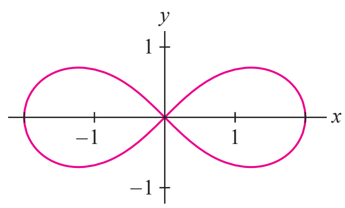


FIGURA 13 Lemniscata: $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

65. Divida la curva (f gura 14):

$$y^5 - y = x^2y + x + 1$$

en cinco ramas, siendo cada una de ellas la gráf ca de una función. Dibuje las ramas.

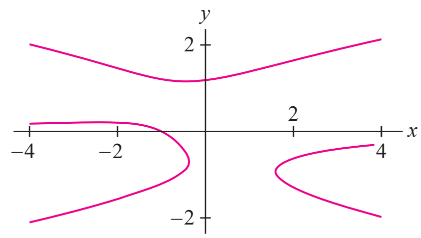


FIGURA 14 Gráf ca de $y^5 - y = x^2y + x + 1$.

3.9 Tasas relacionadas

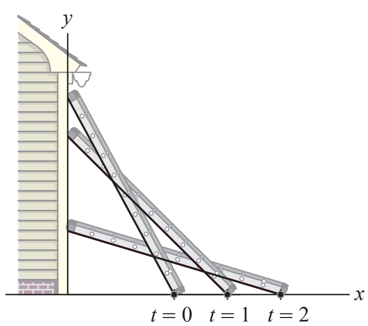


FIGURA 1 Posición de una escalera en los instantes $t = 0, 1, 2$.

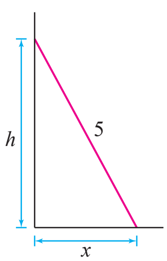


FIGURA 2 Las variables x y h.

En los problemas de *tasas relacionadas*, el objetivo es calcular una tasa de variación desconocida en términos de otras tasas de variación que se conocen.Un problema típico es el de una escalera apoyada en una pared. Se formula la siguiente pregunta: *¿con qué rapidez se desplaza el extremo superior de la escalera si el extremo inferior se aleja de la pared a velocidad constante?* Resulta interesante, y quizás sorprendente, que los dos extremos se muevan con velocidades distintas. La f gura 1 lo ilustra claramente: la base recorre distancias iguales en tiempos iguales, pero el extremo superior cae con más rapidez durante el segundo intervalo que durante el primero. En otras palabras, el extremo superior acelera aunque la base se desplace a velocidad constante. En el siguiente ejemplo se usa el cálculo inf nitesimal para hallar la velocidad de la parte superior de la escalera.

■ **EJEMPLO 1 Problema de la escalera** Una escalera de 5 metros está apoyada en una pared. La base de la escalera se encuentra a 1,5 metros de la pared en el instante $t = 0$ y se desliza, apartándose de la pared, a un ritmo de 0,8 m/s. Halle la velocidad del extremo superior de la escalera en el instante $t = 1$.

Solución El primer paso en cualquier problema de tasas relacionadas es elegir variables para las magnitudes relevantes. Como se está analizando cómo se desplazan los extremos de la escalera, se considerarán las siguientes variables (f gura 2):

- $x = x(t)$ distancia de la base de la escalera a la pared.
- $h = h(t)$ altura del extremo superior de la escalera.

Tanto x como h son funciones del tiempo. La velocidad de la base es $dx/dt = 0{,}8$ m/s. La velocidad, desconocida, del extremo superior es dh/dt, y la distancia inicial de la base a la pared es $x(0) = 1{,}5$, por lo que se puede reformular el problema como:

$$\boxed{\text{Calcule } \frac{dh}{dt} \text{ en } t = 1 \qquad \text{sabiendo que} \qquad \frac{dx}{dt} = 0{,}8 \text{ m/s y } x(0) = 1{,}5 \text{ m}}$$

Para resolver este problema, se necesita una ecuación que relacione x y h (f gura 2). La proporciona el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + h^2 = 5^2$$

Para calcular dh/dt, se derivan ambos lados de la ecuación *respecto de t*:

$$\frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}h^2 = \frac{d}{dt}5^2$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2h\frac{dh}{dt} = 0$$

Así $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{x}{h}\dfrac{dx}{dt}$ y, como $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}8$ m/s, la velocidad del extremo superior es:

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -0{,}8\frac{x}{h} \text{ m/s}} \qquad \boxed{1}$$

Para aplicar esta fórmula, se debe determinar x y h en el instante $t = 1$. Como la base se desliza a 0,8 m/s y $x(0) = 1{,}5$, se tiene que $x(1) = 2{,}3$ y $h(1) = \sqrt{5^2 - 2{,}3^2} \approx 4{,}44$. Por tanto (observe que la respuesta es negativa porque la escalera está cayendo):

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=1} = -0{,}8\frac{x(1)}{h(1)} \approx -0{,}8\frac{2{,}3}{4{,}44} \approx -0{,}41 \text{ m/s} \qquad ■$$

t	x	h	dh/dt
0	1,5	4,77	−0,25
1	2,3	4,44	−0,41
2	3,1	3,92	−0,63
3	3,9	3,13	−1,00

Esta tabla de valores confirma que la parte superior de la escalera va acelerando.

UN APUNTE CONCEPTUAL Un aspecto sorprendente de la ec. (1) es que la velocidad dh/dt, que es igual a $-0{,}8x/h$, resulta inf nita cuando $h \to 0$ (cuando la parte superior de la escalera se acerca al suelo). Como esto es imposible, el modelo matemático propuesto falla cuando $h \to 0$. De hecho, la parte superior de la escalera pierde el contacto con la pared durante la caída y, a partir de ese momento, la fórmula deja de ser válida.

En los ejemplos siguientes, se divide la solución en tres etapas que pueden usarse al resolver los problemas.

■ **EJEMPLO 2 Llenado de un depósito rectangular** En un vivero piscícola entra agua a un ritmo de 0,3 m^3/min. ¿Con qué rapidez asciende el nivel del agua si la base del depósito es un rectángulo de 2×3 metros?

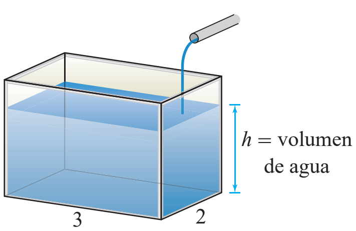


FIGURA 3 V = volumen de agua en el instante t.

Solución Para resolver un problema de tasas relacionadas, es útil dibujar un diagrama siempre que sea posible. La f gura 3 ilustra este problema.

***Etapa 1.* Asigne variables y reformule el problema**

En primer lugar, hay que darse cuenta de que el ritmo con el que el agua cae dentro del depósito es la derivada del volumen de agua respecto al tiempo. Por tanto, sea V el volumen y h la altura del agua en cada instante t. Entonces

Por norma general, ayuda elegir variables que estén relacionadas o tradicionalmente asociadas con la magnitud que representan. Por ejemplo, V para un volumen; θ para un ángulo; h o bien y para una altura, y r para un radio.

$$\frac{dV}{dt} = \text{ritmo de entrada del agua en el depósito}$$

$$\frac{dh}{dt} = \text{ritmo al que asciende el nivel de agua}$$

Ahora se puede reformular el problema en términos de derivadas:

$$\boxed{\text{Calcule } \frac{dh}{dt} \qquad \text{sabiendo que} \qquad \frac{dV}{dt} = 0{,}3 \text{ m}^3/\text{min}}$$

Etapa 2. **Halle una ecuación que relacione las variables y derive**

Se necesita una relación entre V y h. Se cumple $V = 6h$, ya que el área de la base del depósito es de 6 m^2. Así,

$$\frac{dV}{dt} = 6\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{6}\frac{dV}{dt}$$

Etapa 3. **Use los datos para hallar la derivada desconocida**

Como $dV/dt = 0{,}3$, el nivel del agua aumenta a razón de:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{6}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{6} \cdot 0{,}3 = 0{,}05 \text{ m/min}$$

Observe que dh/dt se expresa en metros por minuto, pues h y t se miden en metros y en minutos respectivamente. ■

En el siguiente ejemplo el planteamiento es parecido, pero más complicado porque el depósito de agua tiene forma de cono circular. Se usará la semejanza de triángulos para deducir una relación entre el volumen y la altura del agua. También se necesitará la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi hr^2$ del volumen de un cono circular, de altura h y radio r.

■ **EJEMPLO 3** **Llenado de un depósito cónico** Se introduce agua en un depósito cónico de 10 m de altura y radio 4 m a un ritmo de 6 m^3/min.

(a) ¿Con qué ritmo asciende el nivel del agua cuando el nivel es de 5 metros?

(b) A medida que transcurre el tiempo, ¿qué sucede con el ritmo con que asciende el nivel del agua? Justif que su respuesta

Solución

(a) *Etapa 1.* **Asigne variables y reformule el problema**

Al igual que en el ejemplo anterior, sean V y h el volumen y la altura del agua en el depósito en cada instante t. El problema, en términos de derivadas, es:

$$\boxed{\text{Calcule } \frac{dh}{dt} \text{ en } h = 5 \qquad \text{sabiendo que} \qquad \frac{dV}{dt} = 6 \text{ m}^3/\text{min}}$$

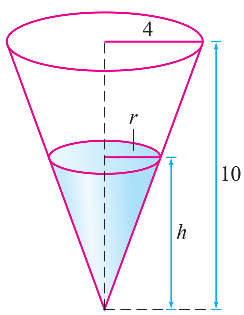


FIGURA 4 Por semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{10}$$

Etapa 2. **Halle una ecuación que relacione las variables y derive**

Cuando el nivel del agua es h, el volumen de agua en el cono es $V = \frac{1}{3}\pi hr^2$, donde r es el radio del cono a una altura h, pero *no se puede usar esta relación a menos que se elimine la variable r*. Usando la semejanza de triángulos en la f gura 4, se tiene que:

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{10}$$

o bien:

$$r = 0{,}4\,h$$

Por tanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(0{,}4\,h)^2 = \frac{0{,}16}{3}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}16\pi h^2\frac{dh}{dt} \qquad \boxed{2}$$

ATENCIÓN Un error frecuente es sustituir el valor concreto de $h = 5$ en la ec. (2). No se puede considerar $h = 5$ hasta el final del problema, después de haber derivado. Esto se aplica a todos los problemas de tasas relacionadas.

Etapa 3. **Use los datos para hallar la derivada desconocida**

Se sabe que $\frac{dV}{dt} = 6$. Usando esta información en la ec. (2), se obtiene:

$$0{,}16\pi h^2 \frac{dh}{dt} = 6 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{6}{0{,}16\pi h^2} \approx \frac{12}{h^2} \qquad \boxed{3}$$

Cuando $h = 5$, el nivel está ascendiendo a razón de $\frac{dh}{dt} \approx 12/5^2 = 0{,}48$ m/min.

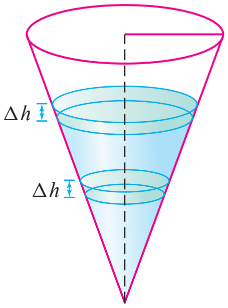


FIGURA 5 Cuanto mayor es h, se necesita más agua para elevar el nivel en Δh.

(b) La ec. (3) muestra que dh/dt es inversamente proporcional a h^2. A medida que h aumenta, el nivel del agua asciende más despacio. Esto es plausible si se observa que una sección delgada del cono de altura Δh encierra un volumen mayor cuanto mayor es h, por lo que se necesita más agua para incrementar el nivel cuando h es grande (f gura 5). ■

■ **EJEMPLO 4 Seguimiento de un cohete** Un espía observa un cohete con un telescopio para determinar su velocidad. El cohete asciende verticalmente desde su plataforma de lanzamiento situada a una distancia de 6 km, como en la f gura 6. En un cierto instante, el ángulo entre el telescopio y el suelo es igual a $\frac{\pi}{3}$ y está variando a razón de 0,9 rad/min. ¿Cuál es la velocidad del cohete en ese momento?

Solución

Etapa 1. **Asigne variables y reformule el problema**

Sea y la la altura del cohete en el instante t. El objetivo es calcular la velocidad del cohete dy/dt cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$, por lo que se puede enunciar el problema de la manera siguiente:

$$\boxed{\text{Calcule } \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} \qquad \text{sabiendo que} \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0{,}9 \text{ rad/min cuando } \theta = \frac{\pi}{3}}$$

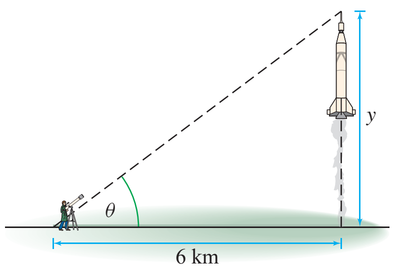


FIGURA 6 Observación de un cohete con un telescopio.

Etapa 2. **Halle una ecuación que relacione las variables y derive**

Se necesita una relación entre θ e y. Como podemos observar en la f gura 6:

$$\tan\theta = \frac{y}{6}$$

Ahora, derive respecto al tiempo:

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad \boxed{4}$$

Etapa 3. **Use los datos para hallar la derivada desconocida**

En el momento considerado, $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $d\theta/dt = 0{,}9$, por lo que, según la ec. (3):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{\cos^2(\pi/3)}(0{,}9) = \frac{6}{(0{,}5)^2}(0{,}9) = 21{,}6 \text{ km/min}$$

La velocidad del cohete en ese momento es de 21,6 km/min, aproximadamente, 1296 km/h. ■

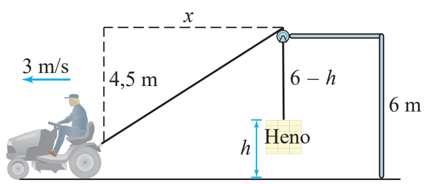


FIGURA 7

■ **EJEMPLO 5** El tractor del granjero John, que se desplaza a 3 m/s, tira de una cuerda atada a un fardo de heno, por medio de una polea. Con unas dimensiones como se indica en la f gura 7, ¿a qué velocidad asciende la bala, cuando el tractor se enuentra a 5 m de ésta?

Solución

Etapa 1. **Asigne variables y reformule el problema**

Sea x la distancia horizontal del tractor a la bala de heno y sea h la altura por encima del nivel del suelo, de la parte superior de la bala. El tractor está a 5 m de la bala cuando $x = 5$, por lo que se puede reformular el problema de la siguiente manera:

$$\text{Calcule } \left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=5} \qquad \text{sabiendo que} \qquad \frac{dx}{dt} = 3 \text{ m/s}$$

Etapa 2. **Halle una ecuación que relacione las variables y derive**

Sea L la longitud total de la cuerda. Según la f gura 7 (utilizando el teorema de Pitágoras):

$$L = \sqrt{x^2 + 4{,}5^2} + (6 - h)$$

Aunque no se proporciona el valor de L, es constante y, por tanto, $dL/dt = 0$. Así:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2 + 4{,}5^2} + (6 - h)\right) = \frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 4{,}5^2}} - \frac{dh}{dt} = 0 \qquad \boxed{5}$$

Etapa 3. **Use los datos para hallar la derivada desconocida**

Aplique la ec. (5) con $x = 5$ y $dx/dt = 3$. La bala de heno asciende a velocidad:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 4{,}5^2}} = \frac{(5)(3)}{\sqrt{5^2 + 4{,}5^2}} \approx 2{,}23 \text{ m/s}$$ ■

3.9 RESUMEN

- Los problemas de tasas relacionadas presentan situaciones en que una o más variables están relacionadas por una ecuación, y se pide calcular la tasa de variación de una de las variables en términos de las tasas de variación de la(s) otra(s) variable(s).
- Dibuje un diagrama siempre que sea posible. También puede ser útil estructurar la solución en tres pasos:

Paso 1. Asigne variables y reformule el problema.

Paso 2. Halle una ecuación que relacione las variables y derive.

Esto proporcionará una ecuación que relacionará las derivadas conocidas con las desconocidas. Recuerde que no deben sustituirse las variables por valores concretos antes de haber calculado todas las derivadas.

Paso 3. Use los datos para hallar la derivada desconocida.

- Los dos elementos de geometría que aparecen con más frecuencia en problemas de tasas relacionadas son el teorema de Pitágoras y el teorema de los triángulos semejantes (las razones de los lados correspondientes son iguales).

3.9 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Asigne variables y reformule el siguiente problema en términos de derivadas conocidas y desconocidas (sin resolverlo): ¿con qué rapidez aumenta el volumen de un cubo si su lado crece a razón de 0,5 cm/s?

2. ¿Qué relación existe entre dV/dt y dr/dt si $V = \frac{4}{3}\pi r^3$?

En las preguntas 3 y 4, suponga que se deja caer agua en un vaso cilíndrico de 4 cm de radio. Las variables V y h denotan el volumen y el nivel del agua en el instante t, respectivamente.

3. Reformule esta pregunta en términos de dV/dt y dh/dt: ¿con qué rapidez asciende el nivel del agua si el agua cae a razón de 2 cm^3/min?

4. Reformule esta pregunta en términos de dV/dt y dh/dt: ¿con qué rapidez entra el agua si el nivel asciende a razón de 1 cm/min?

Problemas

En los problemas 1 y 2, considere una bañera rectangular de 18 ft^2 de base.

1. ¿Con qué rapidez asciende el nivel del agua si la bañera se está llenando a razón de 0,7 ft^3/min?

2. ¿Con qué rapidez entra el agua en la bañera si el nivel del agua asciende a razón de 0,8 ft/min?

3. El radio de una mancha de petróleo circular crece a razón de 2 m/min.

(a) ¿Con qué rapidez aumenta el área de la mancha cuando su radio es de 25 m?

(b) Si el radio es 0 cuando $t = 0$, ¿con qué rapidez aumenta el área después de 3 min?

4. ¿Con qué rapidez aumenta la diagonal de un cubo si sus lados crecen a un ritmo de 2 cm/s?

En los problemas 5-8, suponga que el radio r de una esfera está creciendo a razón de 30 cm/min. *El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su área es $4\pi r^2$. Determine la tasa que se indica.*

5. Volumen respecto al tiempo cuando $r = 15$ cm.

6. Volumen respecto al tiempo en $t = 2$ min, suponiendo que $r = 0$ en $t = 0$.

7. Área respecto al tiempo cuando $r = 40$ cm.

8. Área respecto al tiempo en $t = 2$ min, suponiendo entonces $r = 10$ en $t = 0$.

En los problemas 9-12, se considera una escalera de 5 *m que cae deslizándose por una pared, como en las f guras 1 y 2. La variable h es la altura del extremo superior de la escalera en el instante t, y x es la distancia de la pared a la base de la escalera.*

9. Suponga que la base se aparta de la pared con una rapidez de 0,8 m/s. Halle la velocidad del extremo superior de la escalera cuando $t = 2$ s, si la base se encuentra a 1,5 m de la pared cuando $t = 0$ s.

10. Suponga que el extremo superior se desliza hacia abajo a razón de 1,2 m/s. Calcule dx/dt cuando $h = 3$ m.

11. Supongamos que $h(0) = 4$ y que el extremo superior cae deslizándose a una velocidad de 1,2 m/s. Calcule x y dx/dt $t = 2$ s.

12. ¿Cuál es la relación entre h y x en el momento en que los dos extremos de la escalera se mueven a la misma velocidad?

13. La altura de un depósito cónico es 3 m y su radio mide 2 m en la parte más alta. Entra agua en el depósito a razón de 2 m^3/min. ¿Con qué rapidez asciende el nivel del agua cuando éste es de 2 m?

14. En la misma situación del problema 13, suponga que el nivel del agua asciende a razón de 0,3 m/min cuando alcanza los 2 m. ¿A qué ritmo entra el agua en el depósito?

15. Suponga que tanto el radio r como la altura h de un cono circular varían a razón de 2 cm/s. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cono cuando $r = 10$ y $h = 20$?

16. Una carretera perpendicular a una autovía conduce a una granja situada a 2 km de distancia (f gura 8). Un automóvil se aleja de la granja por la autovía a una velocidad de 80 km/h. ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre el automóvil y la granja cuando el coche está 6 km más allá de la intersección de la autovía con la carretera?

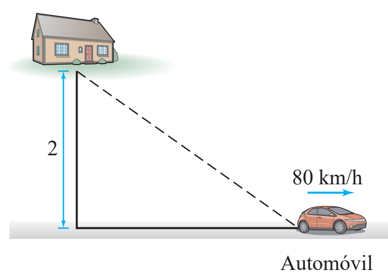


FIGURA 8

17. Un hombre de 1,8 m de altura se aleja de un poste de luz de 5 m a una velocidad de 1,2 m/s (f gura 9). Halle la rapidez con que su sombra aumenta de longitud.

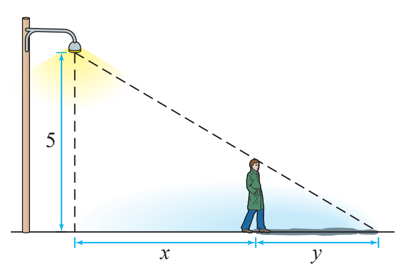


FIGURA 9

18. Cuando Claudia se aleja de un poste de luz de 264 cm, la punta de su sombra se mueve el doble de rápido que ella. ¿Cuál es la altura de Claudia?

19. En un cierto momento, un avión pasa por encima de una estación de radar volando a una altitud de 6 km.

(a) La velocidad del avión es de 800 km/h. ¿A qué ritmo varía la distancia entre el avión y la estación al cabo de media hora?

(b) ¿A qué ritmo varía la distancia entre el avión y la estación en el momento en que el avión pasa justo por encima de la estación?

20. En la situación del problema 19, suponga que la recta que pasa por la estación de radar y el avión forma un ángulo θ con la horizontal. ¿Con qué rapidez varía θ, 12 min después de que el avión haya pasado por encima de la estación?

21. Un globo de aire caliente está subiendo verticalmente y es observado por una persona situada a 4 km de distancia del punto desde donde el globo empezó a ascender. En un cierto momento, el ángulo formado por la línea visual del observador y la horizontal es de $\frac{\pi}{5}$ y está variando a razón de 0,2 rad/min. ¿Con qué velocidad asciende el globo en ese momento?

22. Un puntero láser se sitúa en una plataforma que gira a razón de 20 revoluciones por minuto. El haz toca a una pared a 8 m de distancia, produciendo un punto de luz que se mueve horizontalmente sobre la pared. Sea θ el ángulo entre el haz y la línea perpendicular al ref ector y la pared (f gura 10). ¿A qué velocidad se mueve el punto de luz cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$?

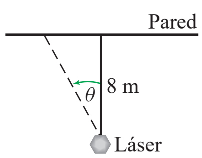


FIGURA 10

23. Un cohete se desplaza verticalmente a una velocidad de 1200 km/h. Un observador situado a 16 km de la plataforma de lanzamiento lo va siguiendo con un telescopio. Halle la rapidez con que aumenta el ángulo formado por el telescopio y el suelo 3 min después del despegue.

24. Mediante un telescopio se observa un cohete que fue lanzado a 3 km de distancia y se registra el ángulo θ formado por el telescopio y el suelo cada medio segundo. Estime la velocidad del cohete si $\theta(10) = 0{,}205$ y $\theta(10{,}5) = 0{,}225$.

25. Un coche de policía viajando en dirección sur, hacia Sioux Falls, a 160 km/h persigue un camión que viaja en dirección este y se está alejando de Sioux Falls, Iowa, a 140 km/h (f gura 11). En el instante $t = 0$, el coche de policía se encuentra 20 km al norte de Sioux Falls y el camión está 30 km al este de Sioux Falls. Calcule la tasa a que la distancia entre los dos vehículos está variando:

(a) En el instante $t = 0$ **(b)** 5 minutos después

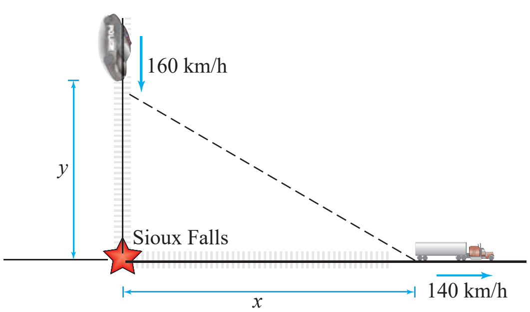


FIGURA 11

26. Un coche viaja por una autopista a 25 m/s. Un observador se halla situado a 150 m de la autopista.

(a) ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre el observador y el coche en el momento en que el coche pasa por delante del observador? Justif que la respuesta sin realizar ningún cálculo.

(b) ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre el observador y el coche 20 segundos después?

27. En la situación del ejemplo 5, en un cierto momento, la velocidad del tractor es de 3 m/s y la bala asciende a 2 m/s. ¿A qué distancia se encuentra el tractor de la bala en ese momento?

28. Plácido tira de una cuerda unida a una vagoneta por una polea, a razón de q m/s. Con unas dimensiones como las de la f gura 12:

(a) Halle una fórmula para la velocidad de la vagoneta en términos de q y de la variable x de la f gura.

(b) Halle la velocidad de la vagoneta cuando $x = 0{,}6$, si $q = 0{,}5$ m/s.

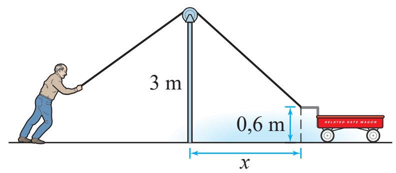


FIGURA 12

29. Julián se ejercita corriendo por una pista circular de 50 m de radio. Con un sistema de coordenadas de origen en el centro de la pista, su coordenada x está cambiando a razón de $-1{,}25$ m/s cuando las coordenadas de este atleta son $(40, 30)$. Halle dy/dt en ese preciso instante.

30. Una partícula se desplaza siguiendo la elipse $9x^2 + 16y^2 = 25$ en sentido contrario al de las agujas del reloj (f gura 13).

(a) ¿En cuál de los cuatro cuadrantes es $dx/dt > 0$? Justif que su respuesta.

(b) Halle una relación entre dx/dt y dy/dt.

(c) ¿Cuál es la tasa de variación de la abscisa cuando la partícula pasa por el punto $(1, 1)$ si la coordenada y aumenta a razón de 6 m/s?

(d) Halle dy/dt cuando la partícula pasa por el punto superior y por el inferior de la elipse.

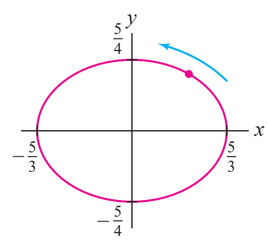


FIGURA 13

En los problemas 31 y 32, suponga que la presión P (en kilopascales) y el volumen V (en cm^3) de un gas en expansión están relacionados por la fórmula $PV^b = C$, donde b y C son constantes (esto se cumple si la expansión es adiabática, *sin ganancia ni pérdida de calor).*

31. Halle dP/dt si $b = 1{,}2$, $P = 8$ kPa, $V = 100$ cm^2 y $dV/dt = 20$ cm^3/min.

32. Halle b si $P = 25$ kPa, $dP/dt = 12$ kPa/min, $V = 100$ cm^2 y $dV/dt = 20$ cm^3/min.

33. La base x del triángulo rectángulo de la f gura 14 crece a razón de 5 cm/s, mientras que la altura se mantiene constante en $h = 20$. ¿Con qué rapidez varía el ángulo θ cuando $x = 20$?

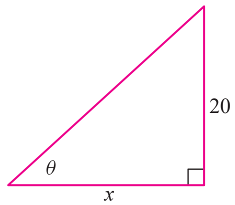


FIGURA 14

34. En un bosque hay dos caminos paralelos separados 15 m. Brooke corre hacia el este a 10 km/h siguiendo uno de esos caminos, mientras que Jamail camina hacia el oeste a 6 km/h por el otro camino. Si se cruzan en el instante $t = 0$, ¿a qué distancia estarán uno del otro 3 s más tarde? ¿Con qué rapidez variará la distancia entre ellos en ese momento?

35. Una partícula se mueve por una curva $y = f(x)$, tal y como se ilustra en la f gura 15. Sea $L(t)$ la distancia de la partícula al origen.

(a) Pruebe que:

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}\right)\frac{dx}{dt}$$

si la situación de la partícula en el instante t es $P = (x, f(x))$.

(b) Calcule $L'(t)$ cuando $x = 1$ y $x = 2$, si $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8x + 9}$ y $dx/dt = 4$.

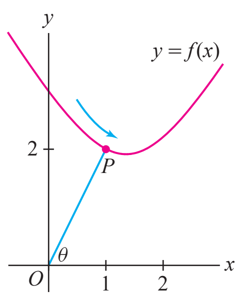


FIGURA 15

36. Sea θ el ángulo de la f gura 15, donde $P = (x, f(x))$. En la situación del problema previo, pruebe que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2 + f(x)^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

Indicación: Derive $\tan\theta = f(x)/x$ y observe que $\cos\theta = x/\sqrt{x^2 + f(x)^2}$.

Los problemas 37 y 38 se ref eren al campo de béisbol (un cuadrado de lado 90 ft*) de la f gura 16.*

37. Un jugador de béisbol corre desde el *home plate* hacia la primera base a 20 ft/s. ¿Con qué rapidez está variando la distancia del jugador a la segunda base, cuando se encuentra a medio camino de la primera base?

38. El jugador 1 corre hacia la primera base a una velocidad de 20 ft/s, mientras que el jugador 2 corre desde la segunda base hacia la tercera a velocidad de 15 ft/s. Sea s la distancia entre los dos jugadores. ¿Con qué rapidez está cambiado s cuando el jugador 1 está a 30 ft del home plate y el jugador 2 está a 60 ft de la segunda base?

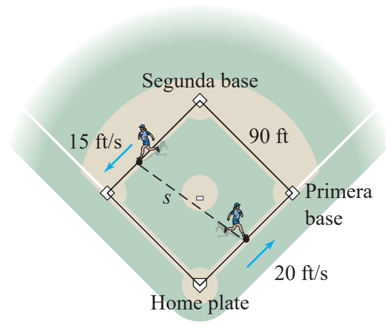


FIGURA 16

39. La cubeta de agua cónica de la f gura 17 tiene una rejilla de agujeros. El agua f uye a través de los agujeros a razón de kA m^3/min, donde k es una constante y A es la superf cie del cono en contacto con el agua. El área de esta superf cie es $A = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ y el volumen es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcule la tasa dh/dt a la que el nivel de agua está cambiando cuando $h = 0{,}3$ m, suponiendo que $k = 0{,}25$ m.

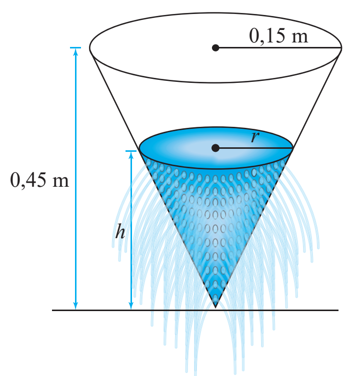


FIGURA 17

Problemas avanzados

40. Un recipiente contiene agua que se evapora a una velocidad proporcional a la superf cie de agua expuesta al aire (f gura 18). Sea $A(h)$ el área de la sección transversal del recipiente a la altura h.

(a) Explique por qué $V(h + \Delta h) - V(h) \approx A(h)\Delta h$, si Δh es pequeño.

(b) Use (a) para argumentar que $\dfrac{dV}{dh} = A(h)$.

(c) Pruebe que el nivel de agua h decrece a razón constante.

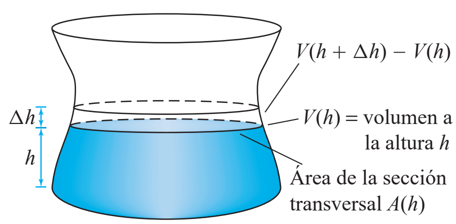


FIGURA 18

41. El perfil de una montaña rusa tiene la forma de la gráfica de la figura 19. Pruebe que cuando un coche pasa por el punto $(x, f(x))$ su velocidad vertical es igual a $f'(x)$ multiplicado por su velocidad horizontal.

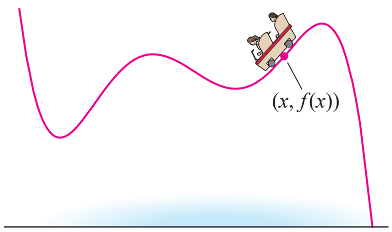


FIGURA 19 Gráfica de $f(x)$ como perfil de la montaña rusa.

42. Dos trenes salen de una estación cuando $t = 0$ y circulan con velocidad constante v a lo largo de vías rectilíneas que forman un ángulo θ.

(a) Pruebe que los trenes se separan uno del otro a una velocidad de $v\sqrt{2 - 2\cos\theta}$.

(b) ¿A qué es igual esta fórmula cuando $\theta = \pi$?

43. Cuando la rueda de r cm de radio de la figura 20 está girando, la varilla de longitud L unida al punto P impulsa un pistón adelante y atrás en línea recta. Sea x la distancia del origen al punto Q donde acaba la varilla, tal y como se muestra en la figura.

(a) Use el teorema de Pitágoras para demostrar que:

$$L^2 = (x - r\cos\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \qquad \boxed{6}$$

(a) Derive la ec. (6) respecto de t para demostrar que:

$$2(x - r\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt} + r\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right) + 2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = 0$$

(c) Calcule la velocidad del pistón cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, suponiendo que $r = 10$ cm, $L = 30$ cm y que la rueda gira a 4 revoluciones por minuto.

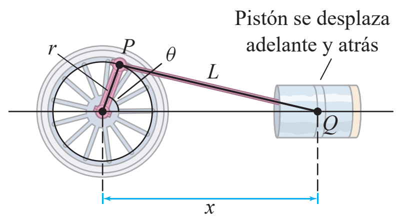


FIGURA 20

44. Un espectador sentado a 300 m del centro de una pista circular de radio 100 m observa como un atleta corre por la pista a una velocidad de 5 m/s. ¿Con qué rapidez varía la distancia entre el espectador y el atleta cuando el corredor se acerca al espectador y la distancia entre ambos es de 250 m? *Indicación:* El diagrama para este problema es similar al de la figura 20, con $r = 100$ y $x = 300$.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

Los problemas 1-4, se refieren a la función $f(x)$ cuya gráfica se muestra en la figura 1.

1. Calcule la tasa de variación media de $f(x)$ en $[0, 2]$. ¿Cuál es la interpretación gráfica de esta tasa media?

2. ¿Para qué valor de h es $\dfrac{f(0{,}7 + h) - f(0{,}7)}{h}$ igual a la pendiente de la recta secante entre los puntos para los que $x = 0{,}7$ y $x = 1{,}1$?

3. Estime $\dfrac{f(0{,}7 + h) - f(0{,}7)}{h}$ para $h = 0{,}3$. ¿Es mayor o menor que $f'(0{,}7)$?

4. Estime $f'(0{,}7)$ y $f'(1{,}1)$.

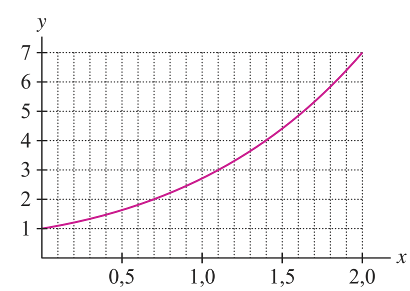


FIGURA 1

En los problemas 5-8, calcule $f'(a)$ usando la definición y halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = a$.

5. $f(x) = x^2 - x, \quad a = 1$

6. $f(x) = 5 - 3x, \quad a = 2$

7. $f(x) = x^{-1}, \quad a = 4$

8. $f(x) = x^3, \quad a = -2$

En los problemas 9-12, calcule dy/dx usando la definición.

9. $y = 4 - x^2$

10. $y = \sqrt{2x + 1}$

11. $y = \dfrac{1}{2 - x}$

12. $y = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

En los problemas 13-16, exprese el límite como una derivada.

13. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to \pi} \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{t - \pi}$

16. $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi} \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta + 1}{\theta - \pi}$

17. Halle $f(4)$ y $f'(4)$ si la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 4$ es $y = 3x - 14$.

18. Cada representación de la figura 2 muestra la gráfica de una función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$. Determine cuál de las dos gráficas corresponde a la función y cuál a la derivada.

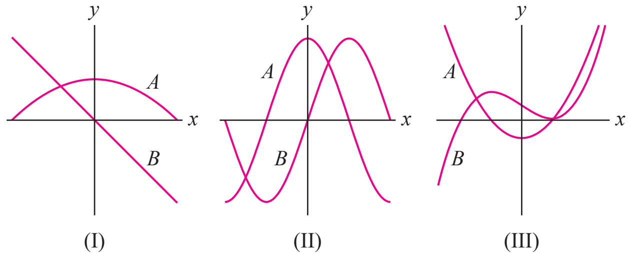


FIGURA 2 Gráfica de $f(x)$.

19. ¿Es (A), (B) o (C) la gráfica de la derivada de la función $f(x)$ que se muestra en la figura 3?

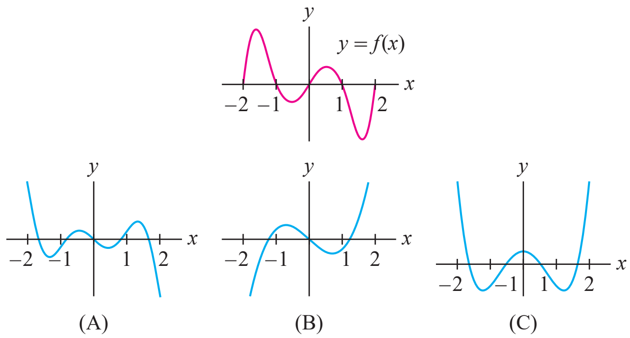


FIGURA 3

20. Sea $N(t)$ el porcentaje de la población de un país que se contagia por un virus de la gripe en la semana t de una epidemia. ¿Qué porcentaje aproximado se contagiará en la semana 4 si $N(3) = 8$ y $N'(3) = 1{,}2$?

21. Se mide la altura $h(t)$ de una chica (en centímetros) en t (años), para $0 \le t \le 14$:

52, 75,1, 87,5, 96,7, 104,5, 111,8, 118,7, 125,2,
131.5, 137,5, 143,3, 149,2, 155,3, 160,8, 164,7

(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento medio de la chica durante ese periodo de 14 años?

(b) ¿Es mayor la tasa media en la primera mitad del periodo o en la segunda mitad?

(c) Estime $h'(t)$ (en centímetros por año) para $t = 3, 8$.

22. El periodo P de un planeta (número de días que tarda en completar una vuelta alrededor del Sol) es aproximadamente igual a $0{,}199A^{3/2}$, donde A es la distancia media (en millones de kilómetros) del planeta al Sol.

(a) Calcule P y dP/dA para la Tierra, usando el valor $A = 150$.

(b) Estime el incremento en P si A aumenta a 152.

En los problemas 23 y 24, use la siguiente tabla de valores para el número A(t) de automóviles (en millones) manufacturados en los Estados Unidos en cada año t.

t	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
$A(t)$	6,55	8,58	8,83	9,67	7,32	6,72	8,50

23. ¿Cuál es la interpretación de $A'(t)$? Estime $A'(1971)$. ¿Será $A'(1974)$ positiva o negativa?

24. A la vista de los datos, ¿cuál de las gráficas (A)-(C) de la figura 4 podría ser la de la derivada $A'(t)$? Justifique su respuesta.

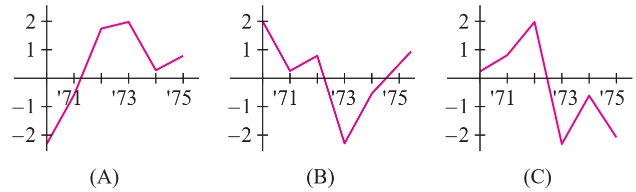


FIGURA 4

En los problemas 25-50, calcule la derivada.

25. $y = 3x^5 - 7x^2 + 4$

26. $y = 4x^{-3/2}$

27. $y = t^{-7,3}$

28. $y = 4x^2 - x^{-2}$

29. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

30. $y = \dfrac{3t-2}{4t-9}$

31. $y = (x^4 - 9x)^6$

32. $y = (3t^2 + 20t^{-3})^6$

33. $y = (2 + 9x^2)^{3/2}$

34. $y = (x+1)^3(x+4)^4$

35. $y = \dfrac{z}{\sqrt{1-z}}$

36. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3$

37. $y = \dfrac{x^4 + \sqrt{x}}{x^2}$

38. $y = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{2-x}}$

39. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

40. $h(z) = \left(z + (z+1)^{1/2}\right)^{-3/2}$

41. $y = \tan(t^{-3})$

42. $y = 4\cos(2 - 3x)$

43. $y = \operatorname{sen}(2x)\cos^2 x$

44. $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{4}{\theta}\right)$

45. $y = \dfrac{t}{1 + \sec t}$

46. $y = z\csc(9z + 1)$

47. $y = \dfrac{8}{1 + \cot\theta}$

48. $y = \tan(\cos x)$

49. $y = \tan(\sqrt{1 + \csc\theta})$

50. $y = \cos(\cos(\cos(\theta)))$

En los problemas 51-56, use la siguiente tabla de valores para calcular la derivada de la función que se indica, en x = 2.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	5	4	−3	9
4	3	2	−2	3

51. $S(x) = 3f(x) - 2g(x)$

52. $H(x) = f(x)g(x)$

53. $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

54. $G(x) = f(g(x))$

55. $F(x) = f(g(2x))$

56. $K(x) = f(x^2)$

57. Halle los puntos de la gráf ca de $x^3 - y^3 = 3xy - 3$ en los que la recta tangente sea horizontal.

58. Halle los puntos de la gráf ca de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en los que la pendiente de la recta tangente sea igual a 1.

59. Halle a tal que las rectas tangentes a $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ en $x = a$ y $x = a + 1$ sean paralelas.

En los problemas 60-63, sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$.

60. Halle los puntos de la gráf ca de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea igual a 10.

61. ¿Para qué valores de x son las rectas tangentes a $y = f(x)$ horizontales?

62. Halle todos los valores de b tales que $y = 25x + b$ sea tangente a la gráf ca de $f(x)$.

63. Halle todos los valores de k tales que $f(x)$ tenga solo una recta tangente de pendiente k.

64. Use la tabla para calcular la tasa de variación media del porcentaje de votos para el candidato A en los intervalos que van del día 20 al día 15, del día 15 al día 10 y del día 10 al día 5. Si continúa esta tendencia durante los 5 días antes de las votaciones, ¿ganaría el candidato A?

Días restantes para la votación	20	15	10	5
Candidato A	44,8 %	46,8 %	48,3 %	49,3 %
Candidato B	55,2 %	53,2 %	51,7 %	50,7 %

En los problemas 65-70, calcule y''.

65. $y = 12x^3 - 5x^2 + 3x$

66. $y = x^{-2/5}$

67. $y = \sqrt{2x+3}$

68. $y = \dfrac{4x}{x+1}$

69. $y = \tan(x^2)$

70. $y = \operatorname{sen}^2(4x+9)$

En los problemas 71-76, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

71. $x^3 - y^3 = 4$

72. $4x^2 - 9y^2 = 36$

73. $y = xy^2 + 2x^2$

74. $\dfrac{y}{x} = x + y$

75. $y = \operatorname{sen}(x+y)$

76. $\tan(x+y) = xy$

77. En la f gura 5, identif que las gráf cas de f, f' y de f''.

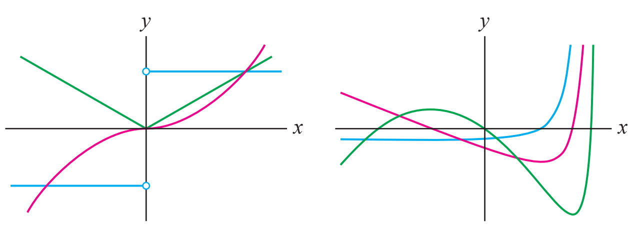


FIGURA 5

78. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^{-1})$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Pruebe que $f'(x)$ existe para todo x (incluyendo $x = 0$), pero que $f'(x)$ no es continua en $x = 0$ (f gura 6).

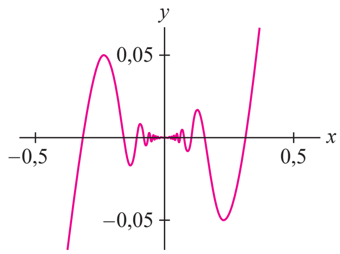


FIGURA 6 Gráf ca de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^{-1})$.

*Problemas 79-81: Sea q el número de unidades de un producto (teléfonos móviles, barriles de petróleo, etc.) que pueden ser vendidos a precio p. La **elasticidad del precio de la demanda** E se def ne como el porcentaje de cambio de q respecto a p. En términos de derivadas:*

$$E = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{(100\Delta q)/q}{(100\Delta p)/p}$$

79. Pruebe que el total de ingresos $R = pq$ cumple que $\dfrac{dR}{dp} = q(1+E)$.

80. En una pastelería se pueden vender q pasteles de chocolate a precio p \$, donde $q = 50p(10-p)$ para $5 < p < 10$.

(a) Pruebe que $E(p) = \dfrac{2p-10}{p-10}$.

(b) Pruebe, calculando $E(8)$, que si $p = 8$ \$, entonces un incremento del 1 % en el precio disminuye la demanda en, aproximadamente, un 3 %.

81. La demanda mensual (en miles) de vuelos entre Chicago y St. Louis a precio p es de $q = 40 - 0{,}2p$. Calcule la elasticidad del precio de demanda cuando $p = 150$ \$, y estime el incremeno percentual de pasajeros adicionales si el precio del billete se reduce en un 1 %.

82. Se hace entrar agua en el depósito de la f gura 7 a razón de 20 m^3/min. ¿Con qué rapidez asciende el nivel del agua cuando su altura es de $h = 4$ m?

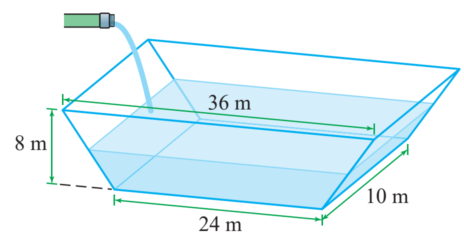


FIGURA 7

83. La aguja minutera de un reloj mide 8 cm y la aguja horaria 5 cm. ¿Con qué rapidez varía la distancia entre los extremos de las dos agujas cuando el reloj marca las 3 en punto?

84. Chloe y Bao están en unas lanchas en el centro de un lago. En el instante $t = 0$, Chloe empieza a desplazarse hacia el sur a velocidad 50 km/h. Un minuto después, Bao se va, hacia el este, a una velocidad de 40 km/h. ¿Con qué rapidez está aumentando la distancia entre ellos en $t = 12$ min?

85. Una bola diminuta desciende por la curva $xy = 10$. Halle su velocidad horizontal en $t = 2$ s si su altura para un tiempo t en segundos es $y = 400 - 16t^2$ cm.

86. En la f gura 8, x está aumentando a razón de 2 cm/s, y está aumentado a razón de 3 cm/s y θ disminuye, de tal manera que el área total del triángulo es constante e igual a 4 cm^2.

(a) ¿Con qué ritmo disminuye θ cuando $x = 4$ e $y = 4$?

(b) ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre P y Q cuando $x = 4$ e $y = 4$?

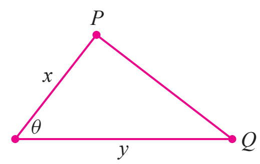


FIGURA 8

87. Un foco de luz se acerca con una velocidad de 0,8 m/s a un hombre que está situado a 4 m de una pared (f gura 9). El foco se encuentra a 1 m por encima del suelo. ¿Con qué rapidez se moverá el extremo superior P de la sombra de ese hombre, cuando el foco se halle a 7 m de la pared?

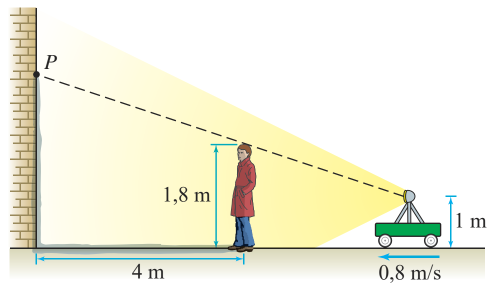
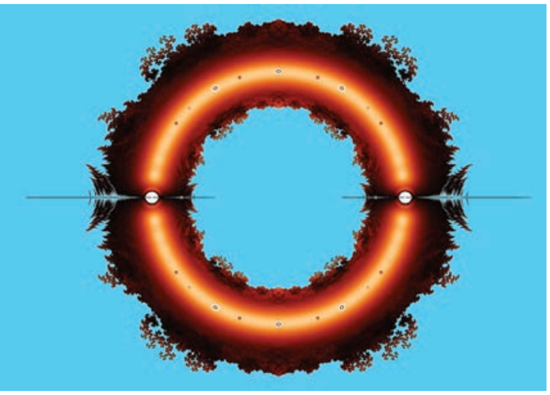


FIGURA 9



Esta impactante imagen, creada por Sam Derbyshire, mientras era un estudiante de grado en la Universidad de Warwick en Inglaterra, es una gráf ca de densidad de las raíces (reales o complejas) de todos los polinomios de grado 24 cuyos coef cientes son +1 or −1.

4 APLICACIONES DE LA DERIVADA

En este capítulo se ponen en funcionamiento las derivadas. Las derivadas primera y segunda se utilizan para analizar las funciones y sus gráf cas y para resolver problemas de optimización (hallar los valores máximos y mínimos de una función). El método de Newton, en la sección 4.7, utiliza la derivada para aproximar soluciones a ecuaciones. En la sección 4.8, se introduce la operación inversa de la derivación, como preparación para el estudio de la integración, en el capítulo 5.

4.1 Aproximación lineal y aplicaciones

En ciertas situaciones, es interesante determinar el "efecto de un pequeño cambio". Por ejemplo:

- ¿Cómo afecta un pequeño cambio en el ángulo de tiro, al alcance de un lanzamiento en baloncesto? (problema 39)
- ¿Qué efecto tendría sobre la recaudación en la taquilla un pequeño aumento en los precios de la entrada? (problema 29)
- La raíz cúbica de 27 es 3. ¿Cuánto mayor es la raíz cúbica de 27,2? (problema 7)

En cada uno de estos casos, se dispone de una función $f(x)$ y estamos interesados en la variación:

$$\boxed{\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)}$$

cuando Δx es pequeño. La **aproximación lineal** consiste en usar la derivada para estimar el valor de Δf sin calcularlo exactamente. Por def nición, la derivada es el límite:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Por tanto, cuando Δx es pequeño, resulta que $\Delta f/\Delta x \approx f'(a)$ y por tanto:

$$\Delta f \approx f'(a)\Delta x$$

RECORDATORIO El símbolo ≈ significa "aproximadamente igual a". La precisión de la aproximación se examina al final de esta sección.

Aproximación lineal de Δf Si f es derivable en $x = a$ y Δx es pequeño, entonces:

$$\boxed{\Delta f \approx f'(a)\Delta x} \qquad \boxed{1}$$

donde $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Recuerde los diferentes papeles que tienen Δf y $f'(a)\Delta x$. La cantidad de interés es el *cambio real* Δf, que estimamos por medio de $f'(a)\,\Delta x$. La aproximación lineal indica que, salvo por un pequeño error, Δf es directamente proporcional a Δx cuando Δx es pequeño.

UN APUNTE GRÁFICO La aproximación lineal también se puede llamar **aproximación por la recta tangente**. ¿Por qué? Observe, en la f gura 1, que Δf es el cambio vertical en la gráf ca desde $x = a$ hasta $x = a+\Delta x$. En una línea recta, el cambio vertical es igual a la pendiente por el cambio horizontal Δx y, como la pendiente de la recta tangente es $f'(a)$, su cambio vertical es $f'(a)\Delta x$. Por tanto, la aproximación lineal aproxima Δf por el cambio vertical en la recta tangente. Cuando Δx es pequeño, los dos valores son casi iguales.

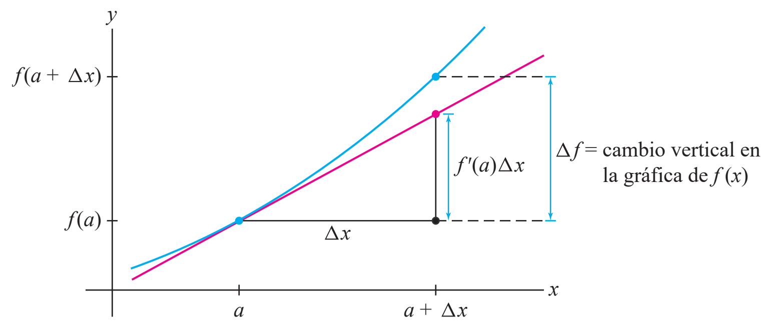


FIGURA 1 Interpretación gráf ca de la aproximación lineal $\Delta f \approx f'(a)\Delta x$.

Aproximación lineal:

$$\Delta f \approx f'(a)\Delta x$$

donde $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

EJEMPLO 1 Use la aproximación lineal para estimar $\frac{1}{10,2} - \frac{1}{10}$. ¿Cuál es la precisión de su estimación?

Solución Se aplica la aproximación lineal a $f(x) = \frac{1}{x}$ con $a = 10$ y $\Delta x = 0{,}2$:

$$\Delta f = f(10{,}2) - f(10) = \frac{1}{10{,}2} - \frac{1}{10}$$

Se tiene $f'(x) = -x^{-2}$ y $f'(10) = -0{,}01$, por lo que Δf se aproxima por:

$$f'(10)\Delta x = -0{,}01 \cdot 0{,}2 = -0{,}002$$

Dicho de otro modo:

$$\frac{1}{10{,}2} - \frac{1}{10} \approx -0{,}002$$

Con una calculadora, se obtiene el valor $\frac{1}{10,2} - \frac{1}{10} \approx -0{,}00196$; de esta manera, el error es menor que 10^{-4}:

$$\text{Error} \approx \left|-0{,}00196 - (-0{,}002)\right| = 0{,}00004 < 10^{-4}$$ ■

El error en la aproximación lineal es:

$$\textit{Error} = \left|\Delta f - f'(a)\Delta x\right|$$

Notación diferencial La aproximación lineal a $y = f(x)$ se suele expresar usando los “diferenciales” dx y dy. En esta notación, se utiliza dx en lugar de Δx para representar el cambio en x y dy es el correspondiente cambio vertical en la recta tangente:

$$\boxed{dy = f'(a)dx} \qquad \boxed{2}$$

Sea $\Delta y = f(a + dx) - f(a)$. Entonces, la aproximación lineal establece que:

$$\boxed{\Delta y \approx dy} \qquad \boxed{3}$$

Se trata, simplemente, de otra manera de escribir $\Delta f \approx f'(a)\Delta x$.

EJEMPLO 2 Notación diferencial ¿Cuánto mayor es la raíz cúbica de $\sqrt[3]{8{,}1}$ que $\sqrt[3]{8} = 2$?

Solución Estamos interesados en $\sqrt[3]{8{,}1} - \sqrt[3]{8}$, por lo que se aplica la aproximación lineal a $f(x) = x^{1/3}$ con $a = 8$ y variación $\Delta x = dx = 0{,}1$.

Etapa 1. **Escriba Δy**

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a) = \sqrt[3]{8 + 0{,}1} - \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8{,}1} - 2$$

Etapa 2. **Calcule dy**

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad \text{y} \qquad f'(8) = \frac{1}{3}\cdot 8^{-2/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Así, $dy = f'(8)\,dx = \frac{1}{12}\cdot 0{,}1 \approx 0{,}0083$.

Etapa 3. **Use la aproximación lineal**

$$\Delta y \approx dy \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{8{,}1} - 2 \approx 0{,}0083$$

De esta manera $\sqrt[3]{8{,}1}$ es mayor que $\sqrt[3]{8}$ en 0,0083 unidades y $\sqrt[3]{8{,}1} \approx 2{,}0083$. ■

FIGURA 2 Transductores de posición de cable (fabricados por Space Age Control, Inc.). En una de las aplicaciones, se usó un transductor para comparar las variaciones en la posición del acelerador de un coche de fórmula 1 respecto a las acciones del conductor.

Cuando los ingenieros deben medir con mucha precisión el cambio de posición de un objeto, pueden usar un transductor de posición (f gura 2). Se trata de un aparato que detecta y registra el movimiento de un cable de metal unido al objeto. Su precisión se ve afectada por los cambios de temperatura ambiente, puesto que el calor hace que el cable se alargue. Se puede estimar este efecto mediante aproximación lineal.

■ **EJEMPLO 3 Dilatación térmica** La longitud de un cable delgado de metal es $L = 12$ cm cuando la temperatura es de $T = 21\,^\circ$C. Estime la variación en la longitud cuando T aumenta hasta 24 °C, suponiendo que

$$\frac{dL}{dT} = kL \qquad \boxed{1}$$

donde $k = 1{,}7 \times 10^{-5}\,^\circ\mathrm{C}^{-1}$ (k se denomina coef ciente de dilatación térmica).

Solución ¿Cómo se aplica aquí la aproximación lineal? Se utilizará el diferencial dL para estimar el cambio real en la longitud ΔL cuando T aumenta de 21° a 24°, es decir cuando $dT = 3°$. Según la ec. (2), el diferencial dL es:

$$dL = \left(\frac{dL}{dT}\right) dT$$

Según la ec. (4), como $L = 12$, tendremos:

$$\left.\frac{dL}{dT}\right|_{L=12} = kL = (1{,}7 \times 10^{-5})(12) \approx 2 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm/^\circ C}$$

La aproximación lineal $\Delta L \approx dL$ dice que el cambio en la longitud es, aproximadamente

$$\Delta L \approx \underbrace{\left(\frac{dL}{dT}\right) dT}_{dL} \approx (2 \times 10^{-4})(3) = 6 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

■

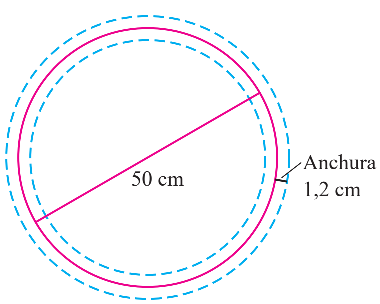


FIGURA 3 El borde de la pizza está comprendido entre las circunferencias de puntos.

Suponga que se mide el *diámetro* D de un círculo y se usa el resultado para calcular el *área* de ese círculo. Si la medición de D no es exacta, el cálculo del área tampoco lo será. ¿Cómo afecta al cálculo del área el error cometido en la medición? Esta pregunta se puede responder mediante aproximación lineal, como se detalla en el siguiente ejemplo.

■ **EJEMPLO 4 El efecto de una medición poco precisa** La Pizzería Bonzo af rma que sus pizzas son circulares, de diámetro 50 cm (f gura 3).

(a) ¿Cuál es el área de una pizza?

(b) Estime la cantidad de pizza que se pierde, o gana, si la medida del error en el diámetro es, a lo sumo, de 1,2 cm.

Solución Para empezar, se necesita disponer de una fórmula para el área A de un círculo en términos de su diámetro D. Puesto que el radio es igual a $r = D/2$, el área será:

$$A(D) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} D^2$$

(a) Si $D = 50$ cm, entonces el área de la pizza será $A(50) = (\frac{\pi}{4})(50)^2 \approx 1963{,}5$ cm^2.

(b) Si el diámetro real es igual a $50 + \Delta D$, entonces la pérdida o ganancia en el área de la pizza será $\Delta A = A(50+\Delta D) - A(50)$. Observe que $A'(D) = \frac{\pi}{2} D$ y $A'(50) = 25\pi \approx 78{,}5$ cm. Así, según la aproximación lineal, tendremos:

En este ejemplo, debe interpretarse ΔA como el posible error en el cálculo de $A(D)$. No debe confundirse este valor con el error en la aproximación lineal. Este último se refiere a la precisión conseguida al usar $A'(D)\,\Delta D$ para aproximar ΔA.

$$\Delta A = A(50 + \Delta D) - A(50) \approx A'(D)\Delta D \approx (78{,}5)\,\Delta D$$

Como ΔD es, a lo sumo, $\pm 1{,}2$ cm, la pérdida o ganancia de pizza no supera:

$$\Delta A \approx \pm(78{,}5)(1{,}2) \approx \pm 94{,}2 \text{ cm}^2$$

Esta cantidad es aproximadamente igual al 4,8 %. ■

Linealización

Para aproximar la función $f(x)$ en lugar de la variación Δf, se utiliza la linealización $L(x)$ “centrada en $x = a$” y definida como:

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

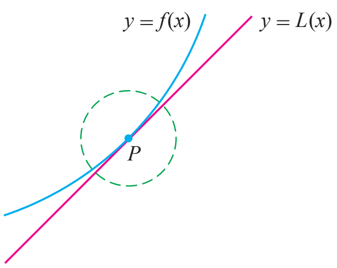


FIGURA 4 La recta tangente es una buena aproximación en un pequeño entorno de $P = (a, f(a))$.

Observe que $y = L(x)$ es la ecuación de la recta tangente en $x = a$ (figura 4). Para valores de x cercanos a a, $L(x)$ proporciona una buena aproximación a $f(x)$.

> **Aproximación de $f(x)$ por su linealización** Si f es derivable en $x = a$ y x está cercano a a, entonces:
>
> $$\boxed{f(x) \approx L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Recuerde que la linealización y la aproximación lineal son dos maneras de decir lo mismo. De hecho, cuando se aplica la linealización con $x = a + \Delta x$ y se reescribe adecuadamente, se obtiene la aproximación lineal:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(a) + f'(a)(x - a) \\ f(a + \Delta x) &\approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \qquad \text{(pues } \Delta x = x - a\text{)} \\ f(a + \Delta x) - f(a) &\approx f'(a)\Delta x \end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 5** Calcule la linealización de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$ (figura 5).

Solución Si se calculan $f(x)$ y su derivada $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ en $a = 1$, se obtiene $f(1) = \sqrt{1} = 1$ y $f'(1) = \frac{1}{2}$. La linealización en $a = 1$ es, por tanto:

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$ ■

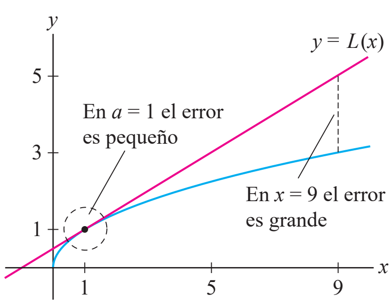


FIGURA 5 Gráfica de la linealización de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$.

La linealización se puede usar para aproximar valores de funciones. La siguiente tabla compara valores de la linealización con valores obtenidos mediante una calculadora, para la función $f(x) = \sqrt{x}$ del ejemplo previo. Observe que el error es mayor para $x = 9$, tal y como cabía esperar, ya que 9 está lejos del centro $a = 1$ (figura 5).

x	$\sqrt{x}$	Linealización en $a = 1$	Calculadora	Error
1,1	$\sqrt{1{,}1}$	$L(1{,}1) = \frac{1}{2}(1{,}1) + \frac{1}{2} = 1{,}05$	1,0488	0,0012
0,98	$\sqrt{0{,}98}$	$L(0{,}98) = \frac{1}{2}(0{,}98) + \frac{1}{2} = 0{,}99$	0,98995	$5 \cdot 10^{-5}$
9	$\sqrt{9}$	$L(9) = \frac{1}{2}(9) + \frac{1}{2} = 5$	3	2

En el siguiente ejemplo se calcula el **porcentaje de error**, que suele ser más importante que el propio error. Por definición:

$$\text{Porcentaje de error} = \left|\frac{\text{error}}{\text{valor exacto}}\right| \times 100\,\%$$

■ **EJEMPLO 6** Estime $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}02\right)$ y calcule el porcentaje de error.

Solución La linealización de $f(x) = \tan x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ es:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Para $x = \frac{\pi}{4} + 0{,}02$, la linealización da lugar a la estimación siguiente:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}02\right) \approx L\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}02\right) = 1 + 2(0{,}02) = 1{,}04$$

Mediante una calculadora, se obtiene $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}02\right) \approx 1{,}0408$, por lo que:

$$\text{Porcentaje de error} \approx \left|\frac{1{,}0408 - 1{,}04}{1{,}0408}\right| \times 100 \approx 0{,}08\,\%$$

■

Magnitud del error

Los ejemplos de esta sección deberían haberle convencido de que la aproximación lineal proporciona una buena estimación de Δf cuando Δx es pequeño, pero si se pretende seguir usando aproximación lineal, es necesario analizar mejor la magnitud del error:

$$E = \text{Error} = \left|\Delta f - f'(a)\Delta x\right|$$

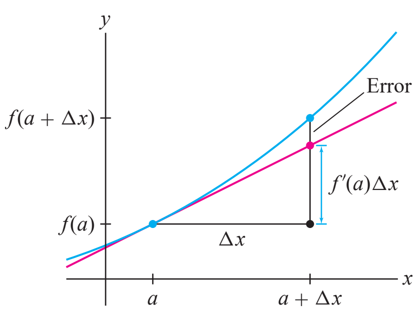


FIGURA 6 Interpretación gráfica del error en la aproximación lineal.

Recuerde que el error E es simplemente la distancia vertical entre la gráfica y la recta tangente (figura 6). En la sección 11.7, se demostrará la siguiente **cota del error**:

$$E \leq \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 \qquad \boxed{5}$$

donde K es el valor máximo de $|f''(x)|$ sobre el intervalo que comprende desde a hasta $a + \Delta x$.

Cota del error:

$$E \leq \frac{1}{2}K(\Delta x)^2$$

donde K *es el máximo de* $|f''|$ *en el intervalo* $[a, a + \Delta x]$.

La cota de error proporciona dos informaciones relevantes. En primer lugar, indica que el error es pequeño cuando la segunda derivada (y por tanto K) es pequeña. Esto tiene sentido porque $f''(x)$ mide lo rápido que las rectas tangentes cambian su dirección. Conforme $|f''(x)|$ sea menor, la gráf ca será más plana, y la aproximación lineal más precisa en un intervalo mayor centrado en $x = a$ (compare las gráf cas de la f gura 7).

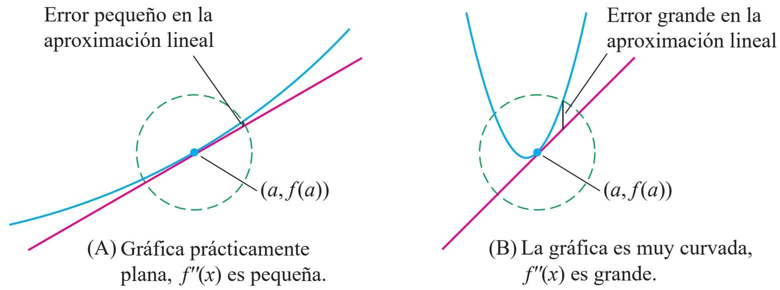


FIGURA 7 La precisión de la aproximación lineal depende de la magnitud de curvatura.

En segundo lugar, también indica que la acotación del error es de *orden dos* en Δx, lo que signif ca que E es inferior a una constante multiplicada por $(\Delta x)^2$. Así, si Δx es pequeño, digamos $\Delta x = 10^{-n}$, entonces E tiene un orden sustancialmente menor que $(\Delta x)^2 = 10^{-2n}$. En particular, $E/\Delta x$ tiende a cero (ya que $E/\Delta x < K\Delta x$), por lo que la aproximación lineal indica que la gráf ca resulta prácticamente indistinguible de la recta tangente cuando nos aproximamos a la gráf ca alrededor del punto $x = a$. Se trata de una versión precisa de la propiedad de "linealidad local" que se introdujo en la sección 3.2.

4.1 RESUMEN

- Sea $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$. La *aproximación lineal* es la estimación:

$$\boxed{\Delta f \approx f'(a)\Delta x \qquad \text{(para valores de } \Delta x \text{ pequeños)}}$$

- Notación diferencial: dx es el cambio en x, $dy = f'(a)dx$ y $\Delta y = f(a + dx) - f(a)$. Con esta notación, la aproximación lineal se expresa:

$$\boxed{\Delta y \approx dy \qquad \text{(para valores de } dx \text{ pequeños)}}$$

- La *linealización* de $f(x)$ en $x = a$ es la función:

$$\boxed{L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

- La aproximación lineal es equivalente a la aproximación, es decir:

$$\boxed{f(x) \approx L(x) \qquad \text{(para } x \text{ cercanos a } a\text{)}}$$

- El error en la aproximación lineal viene dado por:

$$\text{Error} = \left|\Delta f - f'(a)\Delta x\right|$$

En muchas situaciones, el porcentaje de error es más relevante que el propio error:

$$\text{porcentaje de error} = \left|\frac{\text{error}}{\text{valor exacto}}\right| \times 100\,\%$$

4.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Verdadero o falso? La aproximación lineal establece que el cambio vertical en la gráf ca es aproximadamente igual al cambio vertical en la recta tangente.

2. Estime $g(1{,}2) - g(1)$ si $g'(1) = 4$.

3. Estime $f(2{,}1)$ si $f(2) = 1$ y $f'(2) = 3$.

4. Complete la frase: la aproximación lineal muestra como, salvo por un pequeño error, el cambio en Δf es directamente proporcional a . . .

Problemas

En los problemas 1-6, use la ec. (1) para estimar $\Delta f = f(3{,}02) - f(3)$.

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = x^4$

3. $f(x) = x^{-1}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

5. $f(x) = \sqrt{x+6}$

6. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{3}$

7. La raíz cúbica de 27 es 3. ¿Cuánto mayor es la raíz cúbica de 27,2? Estímelo mediante aproximación lineal.

8. Estime $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + 0{,}1\right) - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$ usando diferenciales.

En los problemas 9-12, use la ec. (1) para estimar Δf. *Use una calculadora para evaluar el error y también el porcentaje de error.*

9. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad a = 3, \quad \Delta x = 0{,}2$

10. $f(x) = 2x^2 - x, \quad a = 5, \quad \Delta x = -0{,}4$

11. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad a = 3, \quad \Delta x = 0{,}5$

12. $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right), \quad a = 0, \quad \Delta x = 0{,}01$

En los problemas 13-16, estime Δy *mediante diferenciales [ec. (3)].*

13. $y = \cos x, \quad a = \frac{\pi}{6}, \quad dx = 0{,}014$

14. $y = \tan^2 x, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad dx = -0{,}02$

15. $y = \dfrac{10 - x^2}{2 + x^2}, \quad a = 1, \quad dx = 0{,}01$

16. $y = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}, \quad a = 1, \quad dx = -0{,}1$

En los problemas 17-24, estime mediante aproximación lineal y halle el error usando una calculadora.

17. $\sqrt{26} - \sqrt{25}$

18. $16{,}5^{1/4} - 16^{1/4}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{101}} - \dfrac{1}{10}$

20. $\dfrac{1}{\sqrt{98}} - \dfrac{1}{10}$

21. $9^{1/3} - 2$

22. $\dfrac{1}{(27{,}5)^{5/3}} - \dfrac{1}{243}$

23. $\operatorname{sen}(0{,}023)$

24. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 0{,}01\right) - 1$

25. Estime $f(4{,}03)$ para la función $f(x)$ que se muestra en la f gura 8.

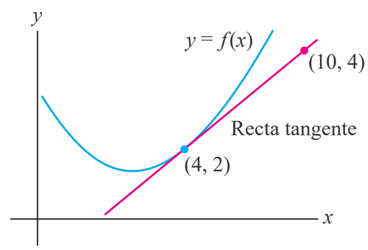


FIGURA 8

26. La velocidad de un objeto que se desplaza en movimiento lineal es, en un cierto instante, de 100 m/s. Estime la distancia que recorrerá el objeto en el siguiente cuarto de segundo y explique de qué modo se obtiene por aplicación de la aproximación lineal de una función.

27. ¿Qué valor es mayor: $\sqrt{2{,}1} - \sqrt{2}$ ó $\sqrt{9{,}1} - \sqrt{9}$? Justif que su respuesta usando la aproximación lineal.

28. Estime $\operatorname{sen} 61^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ$ usando aproximación lineal. *Indicación:* Exprese $\Delta\theta$ en radianes.

29. Los ingresos de taquilla en un complejo de cines de París son $R(p) = 3600p - 10p^3$ euros por pase, cuando el precio está expresado en p euros. Calcule $R(p)$ para $p = 9$ y use la aproximación lineal para estimar ΔR si p se aumenta o se disminuye en 0,5 euros.

30. La *distancia de frenado* de un coche es $F(s) = 1{,}1s + 0{,}054s^2$ ft, donde s es la velocidad en millas por hora. Use aproximación lineal para estimar la variación en la distancia de frenado por cada milla por hora adicional, cuando $s = 35$ y cuando $s = 55$.

31. Un hilo f no de plata mide $L = 18$ cm cuando la temperatura es de $T = 30\,^\circ$C. Estime ΔL cuando T disminuye a $25\,^\circ$C si el coef ciente de dilatación térmica es $k = 1{,}9 \times 10^{-5}\,^\circ\mathrm{C}^{-1}$ (vea el ejemplo 3).

32. En cierto momento, la temperatura en una jaula para serpientes cumple $dT/dt = 0{,}008\,^\circ$C/s. Estime el aumento de la temperatura a lo largo de los próximos 10 segundos.

33. La presión atmosférica P a una altitud de $h = 20$ km es $P = 5{,}5$ kilopascales. Estime P a una altitud de $h = 20{,}5$ km, suponiendo que:

$$\frac{dP}{dh} = -0{,}87$$

(a) Estime ΔP en $h = 20$ cuando $\Delta h = 0{,}5$.

(b) Calcule el cambio real y el porcentaje de error en la aproximación lineal.

34. La resistencia R de un hilo de cobre a una temperatura de $T = 20\,°\text{C}$ es $R = 15\ \Omega$. Estime la resistencia a $T = 22\,°\text{C}$, suponiendo que $dR/dT\big|_{T=20} = 0{,}06\ \Omega/°\text{C}$.

35. La ley de la gravitación universal de Newton establece que si una persona pesa w libras sobre la superf cie de la Tierra, entonces su peso a distancia x del centro de la Tierra es:

$$W(x) = \frac{wR^2}{x^2} \qquad (\text{para } x \geq R)$$

donde $R = 3960$ millas es el radio de la Tierra (f gura 9).

(a) Pruebe que la pérdida de peso a una altitud h por encima de la superf cie de la Tierra es, aproximadamente, $\Delta W \approx -(0{,}0005w)h$. *Indicación:* Use la aproximación lineal con $dx = h$.

(b) Estime la pérdida de peso sufrida por un jugador de fútbol americano de 200 libras de peso que vuela en un avión a una altitud de 7 millas.

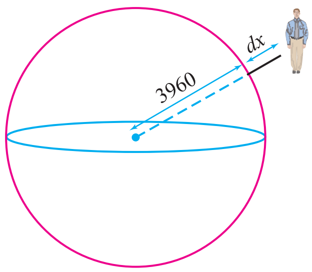


FIGURA 9 La distancia al centro de la Tierra es de $3960 + h$ millas.

36. Utilizando el problema 35(a), estime la altitud a la que un piloto de 130 libras pesará 129,5 libras.

37. Se lanza un piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v cm/s y alcanza una altura máxima de $h = v^2/1960$ cm.

(a) Estime Δh si $v = 700$ cm/s y $\Delta v = 1$ cm/s.

(b) Estime Δh si $v = 1{,}000$ cm/s y $\Delta v = 1$ cm/s.

(c) En general, para un incremento de 1 cm/s en v ¿es mayor la variación de la altura máxima para velocidades iniciales altas o bajas? Justif que la respuesta.

38. El lado s de una alfombra cuadrada mide 6 m. Estime el error máximo en el área A de la alfombra si s se ha medido con una precisión de 2 centímetros.

En los problemas 39 y 40, use la siguiente consecuencia de las leyes de Newton: un objeto lanzado con un ángulo θ y una velocidad inicial v ft/s recorre una distancia horizontal de:

$$s = \frac{1}{32}v^2 \operatorname{sen} 2\theta \text{ ft (f gura 10)}$$

39. Un jugador situado a 18,1 ft de una canasta salta y encesta lanzando la pelota desde una altura de 10 ft (la misma que la del borde de la canasta), con un ángulo de $\theta = 34\,°$ y velocidad inicial de $v = 25$ ft/s.)

(a) Demuestre que $\Delta s \approx 0{,}255\Delta\theta$ ft para un pequeño cambio $\Delta\theta$.

(b) ¿Considera probable el enceste si el ángulo hubiera sido de $2\,°$?

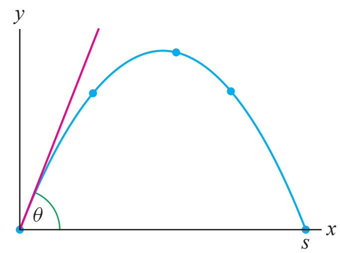


FIGURA 10 Trayectoria de un objeto lanzado con un ángulo θ.

40. Estime Δs si $\theta = 34\,°$, $v = 25$ ft/s y $\Delta v = 2$.

41. El radio de una bola esférica es de $r = 25$ cm. Estime el error máximo en la superf cie y en el volumen si r se ha medido con una precisión de 0,5 cm.

42. La dosis D de difenhidramina para un perro de masa corporal w kg es $D = 4{,}7w^{2/3}$ mg. Estime el máximo error admisible en w, para un Cocker Spaniel de masa $w = 10$ kg, si el porcentaje de error en la dosis D no puede superar el 3 %.

43. El volumen de un cierto gas (en litros) está relacionado con la presión P (en atmósferas) según la fórmula $PV = 24$. Suponga que $V = 4$ con un posible error de $\pm 0{,}3$ L. Calcule P y estime el error máximo posible cometido.

44. Con la notación del problema 43, suponga que se obtiene $V = 4$. Estime el máximo error admisible en V si P debe determinarse con un error inferior a 0,2 atm.

En los problemas 45-54, halle la linealización en $x = a$.

45. $f(x) = x^4, \quad a = 1$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 2$

47. $f(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta, \quad a = \frac{\pi}{4}$

48. $g(x) = \dfrac{x^2}{x-3}, \quad a = 4$

49. $y = (1+x)^{-1/2}, \quad a = 0$

50. $y = (1+x)^{-1/2}, \quad a = 3$

51. $y = (1+x^2)^{-1/2}, \quad a = 0$

52. $y = \dfrac{1-x}{1+x}, \quad a = 4$

53. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad a = \dfrac{\pi}{2}$

54. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

55. ¿Cuánto vale $f(2)$ si la linealización de $f(x)$ en $a = 2$ es $L(x) = 2x + 4$?

56. Calcule la linealización de $f(x) = 3x - 4$ en $a = 0$ y en $a = 2$. Demuestre, de manera general, que una función lineal coincide con su linealización en $x = a$ para todo a.

57. Estime $\sqrt{16{,}2}$ usando la linealización $L(x)$ de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$. Represente $f(x)$ y $L(x)$ en los mismos ejes y determine si la estimación es demasiado grande o demasiado pequeña.

58. GU Estime $1/\sqrt{15}$ utilizando una linealización apropiada de $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Represente $f(x)$ y $L(x)$ en los mismos ejes y determine si la estimación es demasiado grande o demasiado pequeña. Use una calculadora para evaluar el porcentaje de error.

En los problemas 59-67, aproxime utilizando linealización y use una calculadora para evaluar el porcentaje de error.

59. $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ **60.** $\dfrac{1}{101}$ **61.** $\dfrac{1}{(10{,}03)^2}$

62. $(17)^{1/4}$ **63.** $(64{,}1)^{1/3}$ **64.** $(1{,}2)^{5/3}$

65. $\tan(0{,}04)$ **66.** $\cos\left(\dfrac{3{,}1}{4}\right)$ **67.** $\dfrac{(3{,}1)/2}{\operatorname{sen}(3{,}1/2)}$

68. GU Obtenga la linealización $L(x)$ de $f(x) = x^2 - x^{3/2}$ en $a = 4$. A continuación represente $f(x) - L(x)$, y halle un intervalo I alrededor de $a = 4$ tal que $|f(x) - L(x)| \leq 0{,}1$ para $x \in I$.

69. Pruebe que la aproximación lineal a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 9$ da lugar a la estimación $\sqrt{9+h} - 3 \approx \frac{1}{6}h$. Sea $K = 0{,}001$ y muestre que $|f''(x)| \leq K$ si $x \geq 9$. A continuación, verif que numéricamente que el error E cumple la ec. (5) para $h = 10^{-n}$, con $1 \leq n \leq 4$.

70. GU La aproximación lineal a $f(x) = \tan x$ en $x = \frac{\pi}{4}$ da lugar a la estimación $\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1 \approx 2h$. Sea $K = 6{,}2$ y muestre, gráf camente, que $|f''(x)| \leq K$ para $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 0{,}1]$. A continuación, verif que numéricamente que el error E cumple la ec. (5) para $h = 10^{-n}$ y $1 \leq n \leq 4$.

Problemas avanzados

71. Calcule dy/dx en el punto $P = (2, 1)$ de la curva $y^3 + 3xy = 7$ y pruebe que la linealización en P es $L(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Use $L(x)$ para estimar la coordenada y del punto sobre la curva para el que $x = 2{,}1$.

72. Aplique el método del problema 71 a $P = (0{,}5, 1)$ sobre $y^5 + y - 2x = 1$ para estimar la coordenada y del punto sobre la curva para el que $x = 0{,}55$.

73. Aplique el método del problema 71 a $P = (-1, 2)$ sobre $y^4 + 7xy = 2$ para estimar la solución de $y^4 - 7{,}7y = 2$ alrededor de $y = 2$.

74. Pruebe que para cualquier número real k, $(1 + \Delta x)^k \approx 1 + k\Delta x$ para valores de Δx pequeños. Estime $(1{,}02)^{0{,}7}$ y $(1{,}02)^{-0{,}3}$.

75. Sea $\Delta f = f(5 + h) - f(5)$, donde $f(x) = x^2$. Verif que directamente que $E = |\Delta f - f'(5)h|$ cumple (5) con $K = 2$.

76. Sea $\Delta f = f(1+h) - f(1)$ donde $f(x) = x^{-1}$. Pruebe directamente que $E = |\Delta f - f'(1)h|$ es igual a $h^2/(1 + h)$. A continuación, demuestre que $E \leq 2h^2$ si $-\frac{1}{2} \leq h \leq \frac{1}{2}$. *Indicación:* En esta situación, $\frac{1}{2} \leq 1 + h \leq \frac{3}{2}$.

4.2 Valores extremos

En muchas aplicaciones es necesario determinar el valor mínimo o máximo de una función $f(x)$. Por ejemplo, un médico debe determinar la concentración máxima de un medicamento en la sangre de un paciente después de administrárselo. Esto requiere hallar el punto máximo de la gráf ca de $C(t)$, la concentración en cada instante t (f gura 1).

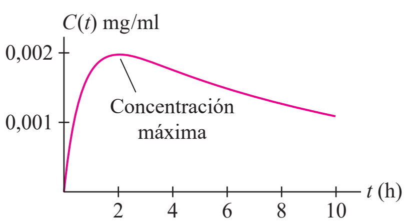


FIGURA 1 Concentración de un medicamento en sangre (vea el problema 66).

A menudo se omite el calificativo "absoluto" y se habla simplemente del mínimo o máximo sobre un intervalo I. Si no se especifica ningún intervalo, deberá entenderse que nos referimos a los valores extremos sobre todo el dominio de la función.

Nos referiremos a los valores máximos y mínimos (max y min en su abreviatura) como **valores extremos**, o **extremos**, y al proceso de hallarlos como **optimización**. Algunas veces interesará encontrar el valor mínimo o máximo restringiendo x a un intervalo I en vez de considerar todo el dominio de $f(x)$.

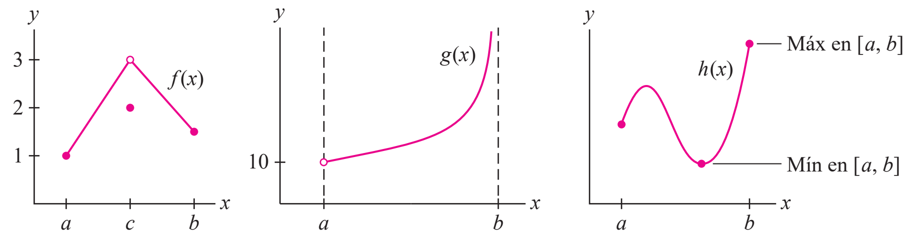
> **DEFINICIÓN Valores extremos en un intervalo** Sea $f(x)$ una función en un intervalo I y sea $a \in I$. Se dice que $f(a)$ es el:
> - **Mínimo absoluto** de $f(x)$ en I, si $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.
> - **Máximo absoluto** de $f(x)$ en I, si $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.

¿Poseen todas las funciones un valor mínimo o máximo? Es evidente que no, como deja claro $f(x) = x$: la función $f(x) = x$ crece más allá de cualquier valor cuando $x \to +\infty$ y decrece del mismo modo cuando $x \to -\infty$. En realidad, puede ocurrir que no existan valores extremos incluso restringiéndose a un intervalo I. La f gura 2 ilustra lo que puede ir mal si I es abierto o f es discontinua:

- **Discontinuidad:** (A) muestra una función discontinua sin valor máximo. Los valores de $f(x)$ se acercan tanto como se quiera a 3 desde abajo, pero 3 no es el valor máximo porque $f(x)$ nunca llega a ser igual a 3.

- **Intervalo abierto:** En (B), $g(x)$ está definida en el intervalo *abierto* (a, b). No tiene máximo porque tiende a $+\infty$ por la derecha, ni mínimo porque tiende a 10 por la izquierda aunque sin llegar a alcanzar este valor.

Afortunadamente, el siguiente teorema garantiza que existen valores extremos cuando $f(x)$ es continua y el intervalo I es cerrado [figura 2(C)].



(A) Función discontinua sin máximo en $[a, b]$.

(B) Función continua sin máximo ni mínimo en el intervalo abierto (a,b).

(C) Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene máximo y mínimo en $[a, b]$

FIGURA 2

RECORDATORIO *Un intervalo cerrado y acotado es un intervalo $I = [a, b]$ (los extremos están incluidos), en el que tanto a como b son finitos. A menudo se suprime el término "acotado" y se hace referencia a I simplemente como un intervalo cerrado. Un intervalo abierto (a, b) (los extremos no están incluidos) puede tener uno o ambos extremos infinitos.*

TEOREMA 1 Existencia de extremos en un intervalo cerrado Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado (y acotado) $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en I.

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Por qué razón se requiere un intervalo cerrado en el teorema 1? Piense en la gráfica de una función continua como en una cadena. Si el intervalo es cerrado, la cadena está sujeta a los dos extremos y no puede irse hacia el infinito (o aproximarse al min/max sin alcanzarlo) como se muestra en la figura 2(B). De manera intuitiva, debe existir un punto máximo y uno mínimo. Sin embargo, una demostración rigurosa del teorema 1 requiere la *propiedad de completitud* de los números reales (vea el apéndice D).

Extremos locales y puntos críticos

El objetivo de este apartado es encontrar los valores extremos. Un concepto clave es el de mínimo o máximo local.

Cuando se llega a la cima de una colina, la altitud se encuentra en un máximo local pero aún estamos lejos del punto de altitud máxima absoluta, que se encuentra en el pico del monte Everest. Esa es la diferencia entre extremo local y extremo absoluto.

Una adaptación de "Relatos sobre máximos y mínimos", V. M. Tikhomirov, AMS (1990)

DEFINICIÓN Extremos locales Se dice que $f(x)$ tiene un:

- **Mínimo local** en $x = c$ si $f(c)$ es el valor mínimo de f en algún intervalo abierto (del dominio de f) que contenga a c.
- **Máximo local** en $x = c$ si $f(c)$ es el valor máximo de f en algún intervalo abierto (del dominio de f) que contenga a c.

Hay un máximo local en $x = c$ si $(c, f(c))$ es el punto más alto de la gráfica dentro de un pequeño recuadro [figura 3(A)]. Así, $f(c)$ es mayor o igual que cualquier otro valor *próximo*, pero no tiene que ser necesariamente el valor máximo de $f(x)$. Los mínimos locales son análogos. La figura 3(B) ilustra la diferencia entre extremos locales y absolutos: $f(a)$ es el máximo absoluto en $[a, b]$ pero no se trata de un máximo local pues $f(x)$ alcanza valores superiores a la izquierda de $x = a$.

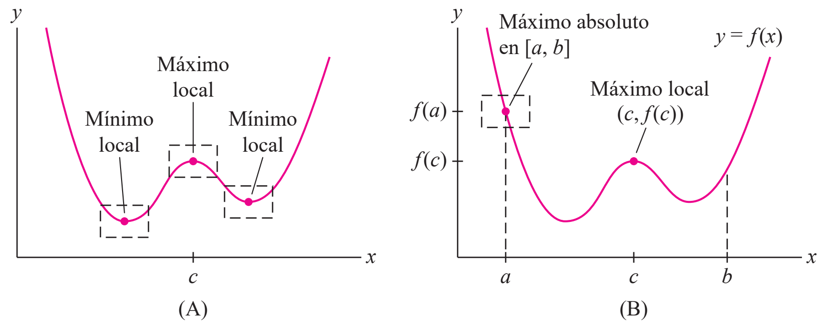
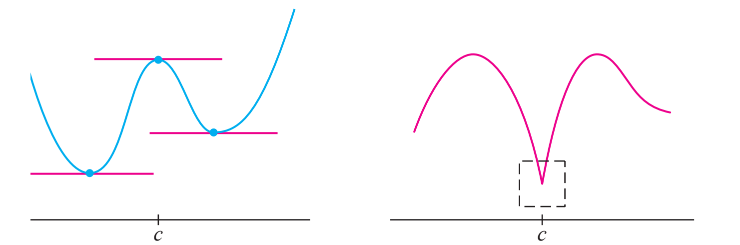


FIGURA 3

¿Cómo se pueden encontrar los extremos locales de una función? La observación crucial es que *la recta tangente en un máximo o en un mínimo local es horizontal* [f gura 4(A)]. En otras palabras, si $f(c)$ es un máximo o mínimo local, entonces $f'(c) = 0$. Ahora bien, esto requiere suponer que $f(x)$ es derivable. Si no lo es, la recta tangente podría no existir, como en la f gura 4(B). Para contemplar ambas posibilidades, se def ne la noción de punto crítico.



(A) La recta tangente es horizontal en un extremo local.

(B) Este mínimo local se encuentra en un punto en el que la función no es derivable.

FIGURA 4

> **DEFINICIÓN Puntos críticos** Un número c del dominio de f es un **punto crítico** si $f'(c) = 0$ *o bien* si $f'(c)$ no existe.

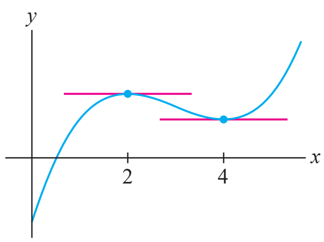


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$.

■ **EJEMPLO 1** Halle los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$.

Solución Como la función $f(x)$ es derivable en todo su dominio (f gura 5), los puntos críticos son las soluciones de $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) =$$
$$= 3(x-2)(x-4) = 0$$

Los puntos críticos son las raíces, $c = 2$ y $c = 4$. ■

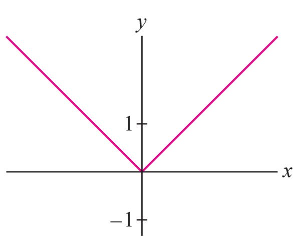


FIGURA 6 Gráf ca de $f(x) = |x|$.

■ **EJEMPLO 2 Una función no derivable** Halle los puntos críticos de $f(x) = |x|$.

Solución Como se puede ver en la f gura 6, $f'(x) = -1$ si $x < 0$ y $f'(x) = 1$ si $x > 0$. Así, $f'(x) = 0$ no tiene soluciones si $x \neq 0$. Por otra parte, $f'(0)$ no existe. Así, $c = 0$ es un punto crítico. ■

El siguiente teorema establece que se pueden hallar los extremos locales determinando los puntos críticos. Se trata de uno de los resultados mas importantes del cálculo.

> **TEOREMA 2 Teorema de Fermat sobre extremos locales** Si $f(c)$ es un máximo o mínimo local, entonces c es un punto crítico de f.

Demostración Suponga que $f(c)$ es un mínimo local (para un máximo local se procedería de forma análoga). Si $f'(c)$ no existe, entonces c es un punto crítico y no hay nada más que demostrar. Suponga, pues, que $f'(c)$ existe. Hay que demostrar que $f'(c) = 0$.

Puesto que $f(c)$ es un mínimo local, se cumple que $f(c+h) \geq f(c)$ para todo $h \neq 0$ suficientemente pequeño. De modo equivalente, $f(c+h) - f(c) \geq 0$. Divida esta desigualdad por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{si } h > 0 \tag{1}$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \qquad \text{si } h < 0 \tag{2}$$

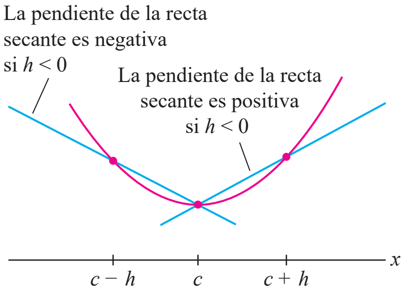


FIGURA 7

En la figura 7 se muestra la interpretación gráfica de estas desigualdades. Considerando los límites laterales en ambos miembros de (1) y de (2), se obtiene:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq \lim_{h \to 0+} 0 = 0$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0-} 0 = 0$$

Así $f'(c) \geq 0$ y $f'(c) \leq 0$. La única posibilidad es que $f'(c) = 0$, tal y como se quería demostrar. ■

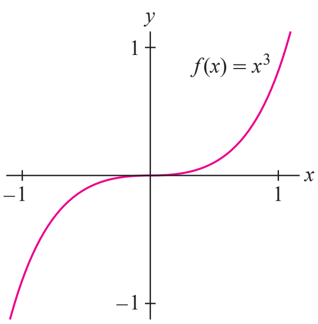


FIGURA 8 La recta tangente en $(0, 0)$ es horizontal, pero $f(0)$ no es ni un máximo ni un mínimo local.

> **UN APUNTE CONCEPTUAL** El teorema de Fermat *no afirma* que todos los puntos críticos correspondan a extremos locales. Pueden existir “falsos positivos”, en los cuales se cumpla $f'(c) = 0$, pero $f(c)$ no sea ni un máximo ni un mínimo local. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$ y $f'(0) = 0$, pero $f(0)$ no es un máximo ni un mínimo local (figura 8). El origen es un punto de inflexión (que se estudiará en la sección 4.4), donde la recta tangente atraviesa la gráfica.

Optimización en un intervalo cerrado

Por fin se dispone de todas las herramientas necesarias para optimizar una función continua en un intervalo cerrado. El teorema 1 asegura que existen valores extremos y el siguiente teorema indica dónde se pueden encontrar: en los puntos críticos o en los extremos del intervalo.

En esta sección se consideran solamente intervalos cerrados porque esto garantiza que los valores extremos existen (teorema 1). La optimización en intervalos abiertos se analiza en la sección 4.6.

> **TEOREMA 3 Valores extremos en un intervalo cerrado** Suponga que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y sea $f(c)$ su valor máximo o mínimo en $[a, b]$. Entonces c es o bien un punto crítico, o bien uno de los extremos a o b.

Demostración Si c es uno de los extremos a o b, no hay nada más que demostrar. En caso contrario, c pertenece al intervalo abierto (a, b). Así, $f(c)$ es también un máximo o mínimo local porque es el máximo o mínimo en (a, b). Según el teorema de Fermat, c es un punto crítico. ■

■ **EJEMPLO 3** Halle los extremos de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 7$ en $[0, 6]$.

Solución Según el teorema 3, los valores extremos se alcanzan en puntos críticos o en los extremos del intervalo. Por tanto, hay que resolver el problema en dos pasos.

Etapa 1. **Halle los puntos críticos**

Como la función $f(x)$ es derivable, los puntos críticos se obtienen resolviendo:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4) = 0$$

Los puntos críticos son $c = 1$ y 4.

Etapa 2. **Compare los valores en los puntos críticos y en los extremos del intervalo**

Valor de x	**Valor de f**	
1 (punto crítico)	$f(1) = 18$	
4 (punto crítico)	$f(4) = -9$	min
0 (extremo del intervalo)	$f(0) = 7$	
6 (extremo del intervalo)	$f(6) = 43$	max

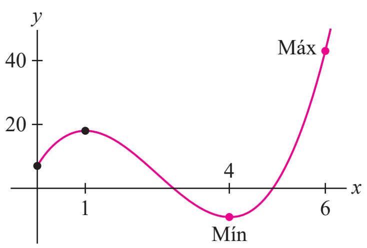


FIGURA 9 Extremos de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 7$ en $[0, 6]$.

El máximo de $f(x)$ en $[0, 6]$ es el mayor de los valores de esta tabla, es decir $f(6) = 43$. De manera análoga, el mínimo es $f(4) = -9$. Vea la f gura 9. ■

■ **EJEMPLO 4 Función con cúspide** Halle el máximo de $f(x) = 1-(x-1)^{2/3}$ en $[-1, 2]$.

Solución En primer lugar, halle los puntos críticos:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = -\frac{2}{3(x-1)^{1/3}}$$

La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene soluciones, puesto que el numerador de $f'(x)$ no se anula nunca. Por otra parte, $f'(x)$ no existe en $x = 1$, por lo que $c = 1$ es un punto crítico (f gura 10).

Ahora, compare los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo.

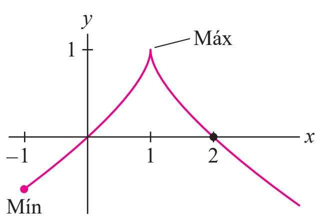


FIGURA 10 Extremos de $f(x) = 1 - (x-1)^{2/3}$ en $[-1, 2]$.

Valor de x	**Valor de f**	
1 (punto crítico)	$f(1) = 1$	max
−1 (extremo del intervalo)	$f(-1) \approx -0{,}59$	min
2 (extremo del intervalo)	$f(2) = 0$	

■

En el siguiente ejemplo, los puntos críticos se encuentran fuera del intervalo $[a, b]$, por lo que no son relevantes para el problema.

■ **EJEMPLO 5 Punto crítico situado fuera del intervalo** Halle los extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$ en $[4, 8]$ (f gura 11).

Solución Calcule $f'(x)$ por la regla del cociente y obtenga los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(x)' - x(x^2+5)'}{(x^2+5)^2} = \frac{(x^2+5) - x(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{5-x^2}{(x^2+5)^2} = 0$$

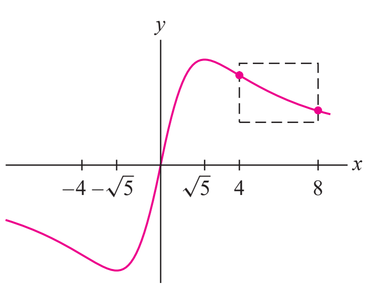


FIGURA 11 Gráf ca de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$.

Resulta que $f'(x) = 0$ si $5 - x^2 = 0$. Por tanto, los puntos críticos son $c = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2{,}2$, ambos situados *fuera* del intervalo $[4, 8]$. Luego el máximo y el mínimo de $f(x)$ en $[4, 8]$ se alcanzan en los extremos del intervalo. Como, $f(4) = \frac{4}{21} \approx 0{,}19$ y $f(8) = \frac{8}{69} \approx 0{,}116$, se tiene que $f(4)$ es el máximo y $f(8)$ es el mínimo en el intervalo $[4, 8]$. ■

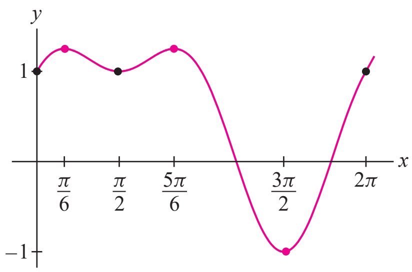


FIGURA 12 $f(x)$ alcanza un máximo en $\frac{\pi}{6}$ y en $\frac{5\pi}{6}$ y un mínimo en $\frac{3\pi}{2}$.

■ **EJEMPLO 6 Función trigonométrica** Halle el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$ en $[0, 2\pi]$ (f gura 12).

Solución En primer lugar, obtenga los puntos críticos:

$$f'(x) = \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0 \text{ o } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

A continuación, compare los valores de $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo.

Valor de x	Valor de f	
$\frac{\pi}{2}$ (punto crítico)	$f(\frac{\pi}{2}) = 1 + 0^2 = 1$	
$\frac{3\pi}{2}$ (punto crítico)	$f(\frac{3\pi}{2}) = -1 + 0^2 = -1$	min
$\frac{\pi}{6}$ (punto crítico)	$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$	max
$\frac{5\pi}{6}$ (punto crítico)	$f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$	max
0 y 2π (extremos del intervalo)	$f(0) = f(2\pi) = 1$	

■

Teorema de Rolle

Como aplicación de los métodos de optimización tratados, se va a demostrar el teorema de Rolle: si $f(x)$ es igual en dos puntos distintos a y b, entonces, para algún punto situado entre estos dos, la derivada es cero. Gráf camente: si la recta secante por $x = a$ y $x = b$ es horizontal, entonces al menos una recta tangente entre a y b también deberá ser horizontal (f gura 13).

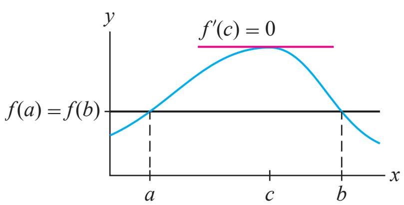


FIGURA 13 Teorema de Rolle: si $f(a) = f(b)$, entonces $f'(c) = 0$ para algún c entre a y b.

> **TEOREMA 4 Teorema de Rolle** Suponga que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces hay un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

Demostración Como $f(x)$ es continua y $[a, b]$ es cerrado, $f(x)$ tiene máximo y un mínimo en $[a, b]$. ¿Dónde están? Si un valor extremo se alcanza en un punto c del intervalo *abierto* (a, b), entonces $f(c)$ es un valor extremo local y $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat (teorema 2). En caso contrario, tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo. Dado que $f(a) = f(b)$, los valores máximo y mínimo han de coincidir y esto implica que la función $f(x)$ es constante y de derivada igual a cero. Así, $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$. ■

■ **EJEMPLO 7 Ilustración del teorema de Rolle** Compruebe el teorema de Rolle para

$$f(x) = x^4 - x^2 \qquad \text{en} \qquad [-2, 2].$$

Solución Se verif can las hipótesis del teorema de Rolle pues $f(x)$ es derivable (y por tanto continua) en su domino y $f(2) = f(-2)$:

$$f(2) = 2^4 - 2^2 = 12 \qquad f(-2) = (-2)^4 - (-2)^2 = 12$$

Se debe comprobar que $f'(c) = 0$ tiene una solución en $(-2, 2)$ y, por tanto, hay que resolver $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0$. Las soluciones son $c = 0$ y $c = \pm 1/\sqrt{2} \approx \pm 0{,}707$. Todas las soluciones se encuentran en $(-2, 2)$, y el teorema de Rolle se cumple para estos tres valores de c. ■

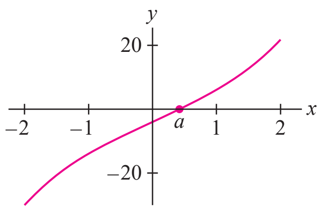


FIGURA 14 Gráf ca de $f(x) = x^3 + 9x - 4$. Esta función tiene un cero real.

■ **EJEMPLO 8 Aplicación del teorema de Rolle** Pruebe que $f(x) = x^3 + 9x - 4$ tiene exactamente un cero.

Solución En primer lugar, observe que $f(0) = -4$ es negativo y que $f(1) = 6$ es positivo. Por el teorema de los valores intermedios (sección 2.8), $f(x)$ tiene *como mínimo* un cero a en $[0, 1]$. Si $f(x)$ tuviera un segundo cero b, entonces $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, $f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$. Esto no es posible porque $f'(x) = 3x^2 + 9 \geq 9$ y, por tanto, $f'(c) = 0$ no tiene solución. Se concluye que a es *el único* cero real de $f(x)$ (f gura 14). ■

PERSPECTIVA HISTÓRICA

En algún momento de la década de 1630, antes de que naciera Isaac Newton, el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) inventó un método general para hallar valores extremos. Fermat dijo, esencialmente, que para encontrar extremos había que igualar a cero la derivada y así obtener los puntos críticos, tal como se acaba de explicar en esta sección. También describió un procedimiento general para trazar rectas tangentes que no era muy distinto de nuestro método mediante derivadas. Por este motivo, a veces se nombra a Fermat como uno de los inventores del cálculo inf nitesimal, junto con Newton y Leibniz.

Más o menos en la misma época, René Descartes (1596-1650) desarrolló una técnica diferente, mucho menos efectiva, para encontrar rectas tangentes. Descartes, que dio nombre a las coordenadas cartesianas, fue un gran pensador: el f lósofo y científ co más destacado de Europa en su tiempo. Está considerado actualmente el padre de la f losofía moderna y el fundador (junto con Fermat) de la geometría analítica. Tuvieron una disputa cuando Descartes supo, a través de un intermediario, que Fermat había criticado su trabajo sobre óptica. Susceptible y obstinado, Descartes respondió atacando el método de Fermat para hallar las tangentes y únicamente, tras la intervención de terceras personas, admitió que el método de Fermat era correcto. Le escribió a Fermat:

Pierre de Fermat
(1601-1665)

René Descartes
(1596-1650)

. . . Viendo el último método que usted usa para encontrar tangentes a líneas curvas, no puedo hacer otra cosa que elogiarlo; si lo hubiese explicado al principio de esta manera, yo no lo habría objetado de ningún modo.

Sin embargo, en la correspondencia privada posterior, Descartes fue menos generoso, ref riéndose a algunos de los trabajos de Fermat como “le galimatias le plus ridicule” (el galimatías mas ridículo). En la actualidad se reconoce a Fermat como a uno de los más grandes matemáticos de su época que hizo contribuciones de enorme alcance en varias áreas de las matemáticas.

Es difícil que pueda haber un método más general. . . . Este método nunca falla y puede emplearse en muchos y bellos problemas; con su ayuda hemos encontrado centros de gravedad de figuras limitadas por líneas rectas o curvas, y también de cuerpos sólidos, junto con otros resultados que explicaremos cuando dispongamos de tiempo.

De la obra de Fermat *Máximos, mínimos y tangentes*

4.2 RESUMEN

- Los *valores extremos* de $f(x)$ en un intervalo I son los valores mínimo y máximo de $f(x)$ para $x \in I$ (también se denominan *extremos absolutos* en I).
- Teorema básico: Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ tiene tanto máximo como mínimo en $[a, b]$.
- $f(c)$ es un *mínimo local* si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto alrededor de c. Los máximos locales se def nen de forma análoga.
- $x = c$ es un *punto crítico* de $f(x)$ si, o bien $f'(c) = 0$, o bien $f'(c)$ no existe.
- Teorema de Fermat: si $f(c)$ es un máximo o un mínimo local, entonces c es un punto crítico.

- Para hallar los valores extremos de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$:

Paso 1. Halle los puntos críticos de $f(x)$ en $[a, b]$.

Paso 2. Evalúe $f(x)$ en los puntos críticos en $[a, b]$ y en los extremos del intervalo.

El máximo y el mínimo sobre $[a, b]$ son el mayor y el menor de los valores que se han calculado en el paso 2.

- Teorema de Rolle: si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y se cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe algún c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

4.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la definición de punto crítico?

En los ejercicios 2 y 3, seleccione la conclusión correcta.

2. Si $f(x)$ no es continua en $[0, 1]$, entonces:

(a) $f(x)$ no tiene valores extremos en $[0, 1]$.

(b) $f(x)$ puede no tener valores extremos en $[0, 1]$.

3. Si $f(x)$ es continua pero no tiene puntos críticos en $[0, 1]$, entonces:

(a) $f(x)$ no tiene ni mínimo ni máximo en $[0, 1]$.

(b) O bien $f(0)$ o bien $f(1)$ es el valor mínimo en $[0, 1]$.

4. El teorema de Fermat *no* afirma que si $f'(c) = 0$, entonces $f(c)$ es un extremo local (en realidad esto es falso). ¿Qué *establece* el teorema de Fermat?

Problemas

1. Las siguientes preguntas hacen referencia a la figura 15.

(a) ¿Cuántos puntos críticos tiene $f(x)$ en $[0, 8]$?

(b) ¿Cuál es el valor máximo de $f(x)$ en $[0, 8]$?

(c) ¿Cuáles son los máximos locales de $f(x)$?

(d) Halle un intervalo cerrado en el que el máximo y el mínimo de $f(x)$ se den en puntos críticos.

(e) Halle un intervalo en el que el mínimo se dé en un extremo.

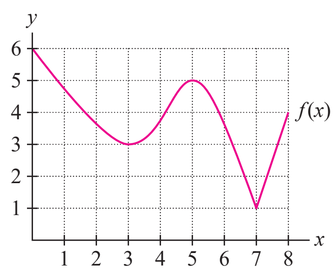


FIGURA 15

2. Establezca si $f(x) = x^{-1}$ (figura 16) tiene máximo o mínimo en los siguientes intervalos:

(a) $(0, 2)$ **(b)** $(1, 2)$ **(c)** $[1, 2]$

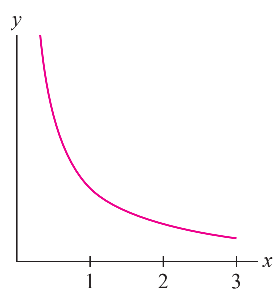


FIGURA 16 Gráfica de $f(x) = x^{-1}$.

En los problemas 3-16, halle todos los puntos críticos de la función.

3. $f(x) = x^2 - 2x + 4$

4. $f(x) = 7x - 2$

5. $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 54x + 2$

6. $f(t) = 8t^3 - t^2$

7. $f(x) = x^{-1} - x^{-2}$

8. $g(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 8}$

11. $f(t) = t - 4\sqrt{t+1}$

12. $f(t) = 4t - \sqrt{t^2 + 1}$

13. $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}$

14. $f(x) = x + |2x + 1|$

15. $g(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta$

16. $R(\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}^2 \theta$

17. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

(a) Halle el punto crítico c de $f(x)$ y calcule $f(c)$.

(b) Calcule el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo $[0, 4]$.

(c) Determine el máximo y el mínimo de $f(x)$ en $[0, 4]$.

(d) Halle los valores extremos de $f(x)$ en $[0, 1]$.

18. Halle los valores extremos de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ en $[0, 3]$ y en $[0, 2]$.

19. Halle los puntos críticos de $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ y determine los valores extremos en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

20. Calcule los puntos críticos de $h(t) = (t^2 - 1)^{1/3}$. Compruebe que su respuesta es consistente con la figura 17. A continuación, halle los valores extremos de $h(t)$ en $[0, 1]$ y en $[0, 2]$.

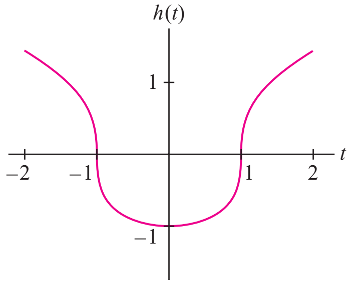


FIGURA 17 Gráfica de $h(t) = (t^2 - 1)^{1/3}$.

21. GU Represente $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ en $[0, 4]$ y determine el valor máximo gráficamente. A continuación verifique su respuesta analíticamente.

22. GU Represente $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ en $[0, 3]$ y localice los valores extremos gráficamente. A continuación verifique su respuesta analíticamente.

23. SAC Aproxime los puntos críticos de $g(x) = x \cos x$ en el intervalo $I = [0, 2\pi]$ y estime el valor mínimo de $g(x)$ en I.

24. SAC Aproxime los puntos críticos de $g(x) = \tan^2 x - 5x$ en $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y estime el valor mínimo de $g(x)$ en I.

En los problemas 25-50, halle el valor mínimo y máximo de la función en el intervalo dado comparando los valores en los puntos críticos y los extremos del intervalo.

25. $y = 2x^2 + 4x + 5$, $[-2, 2]$

26. $y = 2x^2 + 4x + 5$, $[0, 2]$

27. $y = 6t - t^2$, $[0, 5]$

28. $y = 6t - t^2$, $[4, 6]$

29. $y = x^3 - 6x^2 + 8$, $[1, 6]$

30. $y = x^3 + x^2 - x$, $[-2, 2]$

31. $y = 2t^3 + 3t^2$, $[1, 2]$

32. $y = x^3 - 12x^2 + 21x$, $[0, 2]$

33. $y = z^5 - 80z$, $[-3, 3]$

34. $y = 2x^5 + 5x^2$, $[-2, 2]$

35. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 4}$, $[5, 6]$

36. $y = \dfrac{1 - x}{x^2 + 3x}$, $[1, 4]$

37. $y = x - \dfrac{4x}{x + 1}$, $[0, 3]$

38. $y = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$, $[0, 2]$

39. $y = (2 + x)\sqrt{2 + (2 - x)^2}$, $[0, 2]$

40. $y = \sqrt{1 + x^2} - 2x$, $[0, 1]$

41. $y = \sqrt{x + x^2} - 2\sqrt{x}$, $[0, 4]$

42. $y = (t - t^2)^{1/3}$, $[-1, 2]$

43. $y = \operatorname{sen} x \cos x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

44. $y = x + \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$

45. $y = \sqrt{2}\,\theta - \sec\theta$, $[0, \frac{\pi}{3}]$

46. $y = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$, $[0, 2\pi]$

47. $y = \theta - 2\operatorname{sen}\theta$, $[0, 2\pi]$

48. $y = 4\operatorname{sen}^3\theta - 3\cos^2\theta$, $[0, 2\pi]$

49. $y = \tan x - 2x$, $[0, 1]$

50. $y = \sec^2 x - 2\tan x$, $[-\pi/6, \pi/3]$

51. Sea $f(\theta) = 2\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta$.

(a) Pruebe que θ es un punto crítico si $\cos 4\theta = -\cos 2\theta$.

(b) Pruebe, usando una circunferencia unitaria, que $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$ si y sólo si $\theta_1 = \pi \pm \theta_2 + 2\pi k$ para un entero k.

(c) Pruebe que $\cos 4\theta = -\cos 2\theta$ si y sólo si $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $\theta = \frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{3}\right)k$.

(d) Halle los seis puntos críticos de $f(\theta)$ en $[0, 2\pi]$ y halle los valores extremos de $f(\theta)$ en este intervalo.

(e) GU Compruebe sus resultados con una representación gráfica de $f(\theta)$.

52. GU Halle los puntos críticos de $f(x) = 2\cos 3x + 3\cos 2x$ en $[0, 2\pi]$. Compruebe sus resultados con una representación gráfica de $f(x)$.

En los problemas 53-56, halle los puntos críticos y los valores extremos en $[0, 4]$*. Los problemas 55 y 56, se refieren a la figura 18.*

53. $y = |x - 2|$

54. $y = |3x - 9|$

55. $y = |x^2 + 4x - 12|$

56. $y = |\cos x|$

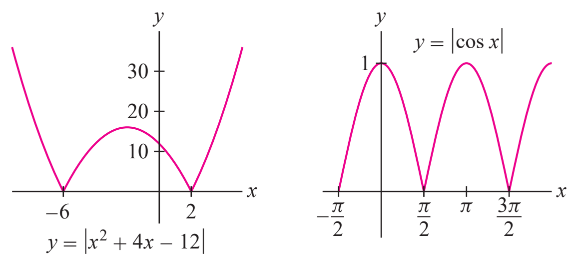


FIGURA 18

En los problemas 57-60, compruebe el teorema de Rolle para el intervalo dado.

57. $f(x) = x + x^{-1}$, $[\frac{1}{2}, 2]$

58. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

59. $f(x) = \dfrac{x^2}{8x - 15}$, $[3, 5]$

60. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

61. Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x - 12$ tiene exactamente un cero real.

62. Demuestre que $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$ tiene exactamente un cero real.

63. Demuestre que $f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x$ no tiene ningún cero c que sea $c > 0$. *Indicación:* observe que $x = 0$ es un cero y aplique el teorema de Rolle.

64. Demuestre que $c = 4$ es el mayor cero de $f(x) = x^4 - 8x^2 - 128$.

65. La posición de una masa que oscila al final de un muelle es $s(t) = A\operatorname{sen}\omega t$, donde A es la amplitud y ω es la frecuencia angular. Pruebe que la celeridad $|v(t)|$ es máxima cuando la aceleración $a(t)$ es cero y que $|a(t)|$ es máximo cuando $v(t)$ es cero.

66. La concentración $C(t)$ (en mg/cm^3) de un medicamento en la sangre de un paciente después de t horas es:

$$C(t) = \frac{0{,}016t}{t^2 + 4t + 4}$$

Halle la concentración máxima en el intervalo de tiempo $[0, 8]$ y el momento en que se registra.

67. En 1919, el físico Alfred Betz argumentó que la máxima eficiencia de una turbina de viento está alrededor del 59 %. Si entra viento en una turbina a velocidad v_1 y sale a velocidad v_2, entonces la potencia extraída es la diferencia de energía cinética por unidad de tiempo:

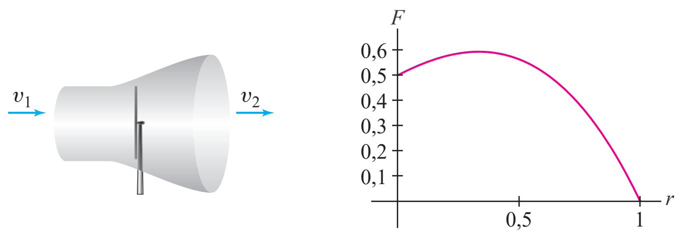
$$P = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{watios}$$

donde m es la masa de viento que fluye a través del rotor por unidad de tiempo (figura 19). Betz supuso que $m = \rho A(v_1 + v_2)/2$, donde ρ es la densidad del aire y A es el área barrida por el rotor. Un viento que fluya sin limitaciones por la misma zona A tendría la misma masa por unidad de tiempo $\rho A v_1$ y potencia $P_0 = \frac{1}{2}\rho A v_1^3$. La fracción de potencia extraída por la turbina es $F = P/P_0$.

(a) Pruebe que F depende únicamente del cociente $r = v_2/v_1$ y que es igual a $F(r) = \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 + r)$, donde $0 \le r \le 1$.

(b) Pruebe que el valor máximo de $F(r)$, denominado el **límite de Betz**, es $16/27 \approx 0{,}59$.

(c) Explique por qué la fórmula de Betz para $F(r)$ no tiene sentido para r cerca de cero. *Indicación:* ¿cuánto viento pasaría por la turbina si v_2 fuera cero? ¿Es realista?



(A) Viento que fluye a través de una turbina.
(B) F es la fracción de energía extraída por la turbina como función de $r = v_2/v_1$.

FIGURA 19

68. GU El **radio de Bohr** a_0 del átomo de hidrógeno es el valor de r que minimiza la energía:

$$E(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donde $\hbar$, m, e y ϵ_0 son constantes físicas. Pruebe que $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$. Suponga que el mínimo se da en un punto crítico, tal y como se sugiere en la figura 20.

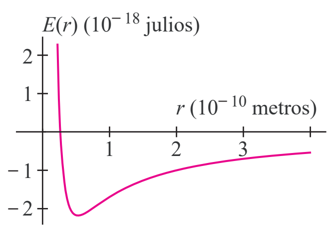
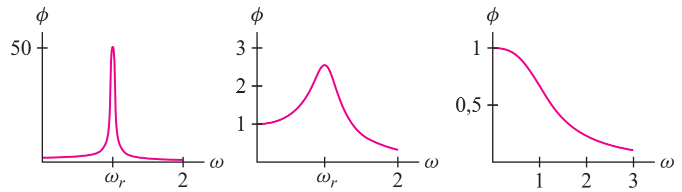


FIGURA 20

69. La respuesta de un circuito u otro sistema oscilatorio a una señal entrante de frecuencia ω ("omega") viene descrita por la función:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2}}$$

Tanto ω_0 (la frecuencia natural del sistema) como D (el factor de amortiguamiento) son constantes positivas. La gráfica de ϕ se llama una **curva de resonancia** y la frecuencia positiva $\omega_r > 0$ donde ϕ alcanza su valor máximo (si una tal frecuencia positiva existe) se denomina la **frecuencia resonante**. Pruebe que $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2D^2}$ si $0 < D < \omega_0/\sqrt{2}$ y que, en caso contrario, la frecuencia resonante no existe (figura 21).



(A) $D = 0{,}01$ (B) $D = 0{,}2$ (C) $D = 0{,}75$ (no resonante)

FIGURA 21 Curvas de resonancia con $\omega_0 = 1$.

70. Las abejas construyen sus panales con una estructura de celdas de base hexagonal y tres caras en forma de rombo en la parte superior, tal como ilustra la figura 22. Se puede probar que la superficie de una celda de este tipo es igual a:

$$A(\theta) = 6hs + \frac{3}{2}s^2(\sqrt{3}\csc\theta - \cot\theta)$$

donde h, s y θ se encuentran indicadas en la figura. Es sorprendente que las abejas "sepan" cuál es el ángulo θ que minimiza esta superficie (y por tanto requiere usar la menor cantidad posible de cera).

(a) Pruebe que $\theta \approx 54{,}7°$ (suponga que h y s son constantes). *Indicación:* halle el punto crítico de $A(\theta)$ para $0 < \theta < \pi/2$.

(b) GU Confirme, representando $f(\theta) = \sqrt{3}\csc\theta - \cot\theta$, que el punto crítico efectivamente minimiza la superficie de la celda.

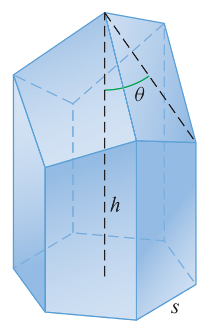


FIGURA 22 Una celda de un panal construido por abejas.

71. Halle los máximos de $y = x^a - x^b$ en $[0, 1]$ donde $0 < a < b$. En particular, halle el máximo de $y = x^5 - x^{10}$ en $[0, 1]$.

En los problemas 72-74, represente la función con un programa de representación gráfica y halle sus puntos críticos y valores extremos en $[-5, 5]$.

72. GU $y = \dfrac{1}{1 + |x - 1|}$

73. GU $y = \dfrac{1}{1 + |x - 1|} + \dfrac{1}{1 + |x - 4|}$

74. GU $y = \dfrac{x}{|x^2 - 1| + |x^2 - 4|}$

75. (a) Aplique derivación implícita para hallar los puntos críticos en la curva $27x^2 = (x^2 + y^2)^3$.

(b) GU Represente la curva y las rectas tangentes horizontales en los mismo ejes.

76. Dibuje la gráf ca de una función continua en $(0, 4)$ con valor mínimo pero sin valor máximo.

77. Dibuje la gráf ca de una función continua en $(0, 4)$ que tenga un mínimo local pero no tenga mínimo absoluto.

78. Dibuje la gráf ca de una función continua en $[0, 4]$ que tenga:

(a) Dos máximos locales y un mínimo local.

(b) Un mínimo absoluto, que se da en un extremo del intervalo, y un máximo absoluto, que se da en un punto crítico.

79. Dibuje la gráf ca de una función $f(x)$ en $[0, 4]$ con una discontinuidad de manera que $f(x)$ tenga mínimo absoluto, pero no tenga máximo absoluto.

80. Un arco iris se produce por rayos de luz que entran en una gota de lluvia (que se supone esférica) y salen después de ref ejarse internamente como en la f gura 23. El ángulo entre los rayos de entrada y los ref ejados es $\theta = 4r - 2i$, donde el ángulo de incidencia i y de refracción r se relacionan por la ley de Snell: $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r$ con $n \approx 1{,}33$ (el índice de refracción para el aire y el agua).

(a) Use la ley de Snell para probar que $\dfrac{dr}{di} = \dfrac{\cos i}{n \cos r}$.

(b) Pruebe que el valor máximo $\theta_{\text{máx}}$ de θ se da cuando i cumple $\cos i = \sqrt{\dfrac{n^2 - 1}{3}}$. *Indicación:* pruebe que $\dfrac{d\theta}{di} = 0$ si $\cos i = \dfrac{n}{2} \cos r$. A continuación, use la ley de Snell para eliminar r.

(c) Pruebe que $\theta_{\text{máx}} \approx 59{,}58\,°$.

FIGURA 23

Problemas avanzados

81. Pruebe que los valores extremos de $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ son $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

82. Demuestre, estudiando su mínimo, que $f(x) = x^2 - 2x + 3$ es siempre positiva. De forma más general, discuta para qué números r y s la función cuadrática $f(x) = x^2 + rx + s$ es siempre positiva. Proporcione ejemplos de r y s para los cuales f tome valores de ambos signos.

83. Pruebe que si un polinomio cuadrático $f(x) = x^2 + rx + s$ alcanza valores positivos y negativos, entonces su valor mínimo se da en el punto medio de las dos raíces.

84. Generalice el problema 83: pruebe que si la recta horizontal $y = c$ corta la gráf ca de $f(x) = x^2 + rx + s$ en dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, entonces $f(x)$ alcanza su valor mínimo en el punto medio $M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (f gura 24).

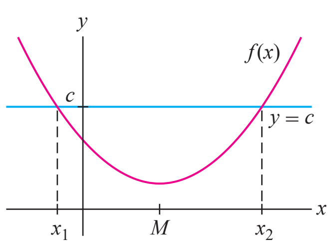


FIGURA 24

85. Un polinomio cúbico puede tener un máximo y un mínimo local, o no tener ninguno de los dos (f gura 25). Halle condiciones sobre los coef cientes a y b de

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$$

que aseguren que f no tenga ni máximo ni mínimo local. *Indicación:* aplique el problema 82 a $f'(x)$.

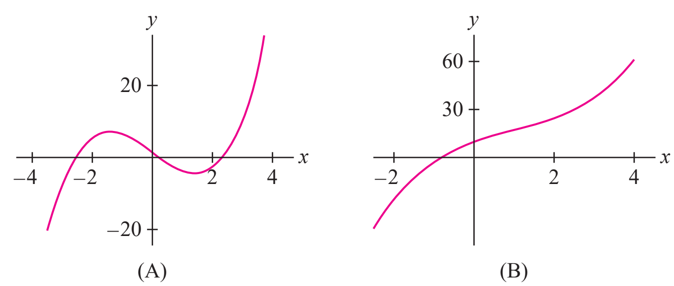


FIGURA 25 Polinomios cúbicos.

86. Halle los máximos y mínimos de:

$$f(x) = x^p(1 - x)^q \quad \text{en } [0, 1],$$

donde $p, q > 0$.

87. Demuestre que si f es continua y $f(a)$ y $f(b)$ son mínimos locales, con $a < b$, entonces existe un valor c entre a y b tal que $f(c)$ es un máximo local. (*Indicación:* aplique el teorema 1 al intervalo $[a, b]$.) Pruebe que la continuidad es una hipótesis necesaria dibujando la gráf ca de una función (necesariamente discontinua) con dos mínimos locales pero sin ningún máximo local.

4.3 El teorema del valor medio y monotonía

Se ha dado por sentado que una función $f(x)$ es creciente si $f'(x)$ es positiva, y decreciente, si $f'(x)$ es negativa. En esta sección se va a demostrar rigurosamente usando un importante resultado teórico llamado teorema del valor medio (TVM). A continuación se desarrollará un método para "analizar" los puntos críticos, concretamente para determinar si corresponden a máximos o a mínimos locales.

Según el TVM, la recta secante por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráf ca es paralela a, como mínimo, una recta tangente en el intervalo (a, b) [f gura 1]. Como dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, lo que en realidad af rma el TVM es que existe al menos un punto c entre a y b tal que:

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{Pendiente de la recta tangente}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Pendiente de la recta secante}}$$

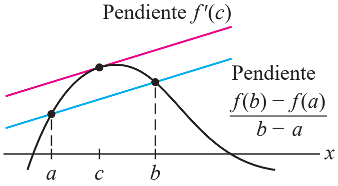


FIGURA 1 Según el TVM, existe, como mínimo, una recta tangente paralela a la recta secante.

TEOREMA 1 Teorema del valor medio de Lagrange Suponga que f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un valor c en (a, b) tal que:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

El teorema de Rolle (sección 4.2) es un caso especial del TVM en el que $f(a) = f(b)$. En este caso, la conclusión es que $f'(c) = 0$.

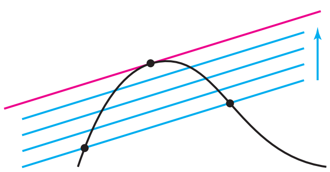


FIGURA 2 Realice un desplazamiento paralelo de la secante hasta que sea tangente a la curva.

UN APUNTE GRÁFICO Imagine qué ocurre cuando la recta secante se va desplazando de manera paralela. Llegará un momento en que se convertirá en una tangente, como en la f gura 2. Esta es la idea de fondo del TVM. Se ofrece una demostración formal al f nal de la sección.

UN APUNTE CONCEPTUAL La conclusión del TVM se puede reescribir como:

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

Se puede entender como una variación de la aproximación lineal, según la cual:

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b-a)$$

En el TVM se reemplaza esta aproximación por una igualdad, sustituyendo $f'(a)$ por $f'(c)$ para una elección apropiada de c en (a, b).

■ **EJEMPLO 1** Compruebe el TVM con $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ y $b = 9$.

Solución En primer lugar, calcule la pendiente de la recta secante (f gura 3):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{9-1} = \frac{3-1}{9-1} = \frac{1}{4}$$

Se debe determinar c tal que $f'(c) = 1/4$. La derivada es $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y, por tanto:

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{c} = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

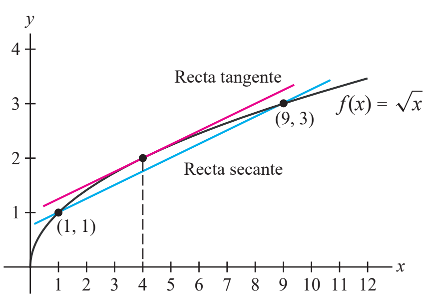


FIGURA 3 La recta tangente en $c = 4$ es paralela a la recta secante.

El valor $c = 4$ se encuentra en $(1, 9)$ y cumple $f'(4) = \frac{1}{4}$. Así, queda comprobado el TVM. ■

Como una primera aplicación, se demuestra que una función con derivada cero es constante.

COROLARIO Si $f(x)$ es derivable y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante en (a, b). En otras palabras, $f(x) = C$ en (a, b) para alguna constante C.

Demostración Si a_1 y b_1 son dos puntos distintos en (a, b), entonces, por el TVM, existe c comprendido entre a_1 y b_1 tal que:

$$f(b_1) - f(a_1) = f'(c)(b_1 - a_1) = 0 \qquad \text{(pues } f'(c) = 0\text{)}$$

Así $f(b_1) = f(a_1)$. Es decir, $f(x)$ es constante en (a, b). ■

Crecimiento y decrecimiento de funciones

A continuación se demostrará que el signo de la derivada determina si una función $f(x)$ es estrictamente creciente o decreciente. Recuerde que $f(x)$ es:

- **Estrictamente creciente en (a, b)** si $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$.
- **Estrictamente decreciente en (a, b)** si $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$.

Se dice que $f(x)$ es **monótona** en (a, b) si es o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente en (a, b).

Se dice que f es "creciente" si

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad \text{para} \quad x_1 \le x_2$$

El término "decreciente" se define de forma análoga. En el teorema 2, si se asume que $f'(x) \ge 0$ (en lugar de > 0), entonces $f(x)$ es creciente en (a, b). Si $f'(x) \le 0$, entonces $f(x)$ es decreciente en (a, b).

TEOREMA 2 El signo de la derivada Sea f una función derivable sobre un intervalo abierto (a, b).

- Si $f'(x) > 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).

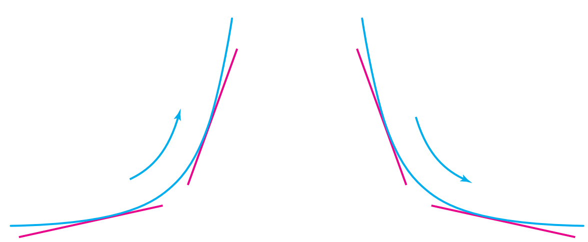
Demostración Suponga, en primer lugar, que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Según el TVM, para cualesquiera dos puntos $x_1 < x_2$ en (a, b), existe c comprendido entre x_1 y x_2 tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$$

Se cumple la desigualdad porque tanto $f'(c)$ como $(x_2 - x_1)$ son ambos positivos. Así, $f(x_2) > f(x_1)$, tal y como se quería probar. El caso $f'(x) < 0$ es similar. ■

UN APUNTE GRÁFICO El teorema 2 conf rma la intuición gráf ca (f gura 4):

- $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ las rectas tangentes tienen pendiente positiva $\quad \Rightarrow$
  $\Rightarrow \quad f$ es estrictamente creciente
- $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ las rectas tangentes tienen pendiente negativa $\quad \Rightarrow$
  $\Rightarrow \quad f$ es estrictamente decreciente



Función estrictamente creciente: las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

Función estrictamente decreciente: las rectas tangentes tienen pendiente negativa.

FIGURA 4

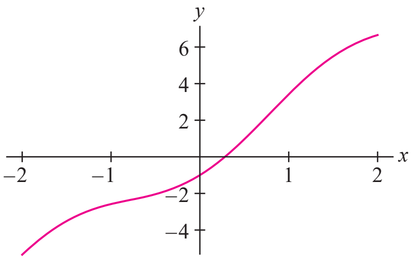


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Pruebe que la función $f(x) = 3x - \cos 2x$ es estrictamente creciente.

Solución La derivada $f'(x) = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,2x$ cumple que $f'(x) > 0$ para todo x. De hecho, $\mathrm{sen}\,2x \geq -1$ y por tanto $3 + 2\,\mathrm{sen}\,2x \geq 3 - 2 = 1$. Así, $f(x)$ es una función estrictamente creciente en toda la recta real $(-\infty, +\infty)$ [f gura 5]. ■

EJEMPLO 3 Determine los intervalos de monotonía de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución La derivada $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$ es positiva si $x > 1$ y negativa si $x < 1$. Según el teorema 2, f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y estrictamente creciente en el intervalo $(1, +\infty)$, tal y como queda de manif esto en la f gura 6. ■

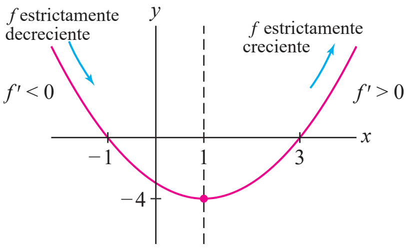


FIGURA 6 Gráf ca de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Estudio de los puntos críticos

Existe un criterio muy útil para determinar si un punto crítico de una función $f(x)$ es un máximo o un mínimo (o ninguna de las dos cosas), basado en el *cambio de signo* de $f'(x)$.

Para aclarar la expresión "cambio de signo", suponga que una función $F(x)$ cumple $F(c) = 0$. Se dice que $F(x)$ *pasa de positiva a negativa* en $x = c$ si $F(x) > 0$ a la izquierda de c y $F(x) < 0$ a la derecha de c, para x en un pequeño intervalo abierto que contenga a c (f gura 7). Un cambio de signo, de negativa a positiva se def ne del mismo modo. Observe en la f gura 7 que $F(5) = 0$, pero $F(x)$ no cambia de signo en $x = 5$.

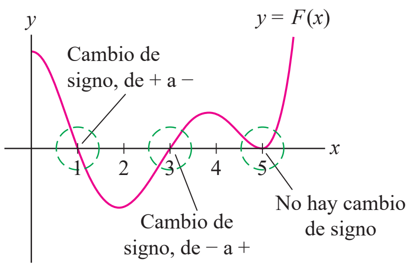


FIGURA 7

Suponga ahora que $f'(c) = 0$ y $f'(x)$ cambia de signo en $x = c$, pongamos por caso de + a −. Entonces $f(x)$ es estrictamente creciente a la izquierda de c y estrictamente decreciente a la derecha; por tanto, $f(c)$ es un máximo local. Análogamente, si $f'(x)$ pasa de − a +, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Vea la f gura 8(A).

La f gura 8(B) ilustra la situación en que $f'(c) = 0$ pero f' no cambia de signo. En esta situación, $f'(x) > 0$ para todo x cerca de, aunque no igual a, c, por lo que $f(x)$ es estrictamente creciente y no presenta ni un máximo ni un mínimo local en c.

> **TEOREMA 3 Criterio de la primera derivada para puntos críticos** Suponga que $f(x)$ es derivable y sea c un punto crítico de $f(x)$. Entonces
>
> - $f'(x)$ cambia de + a − en c $\Rightarrow$ $f(c)$ es un máximo local.
> - $f'(x)$ cambia de − a + en c $\Rightarrow$ $f(c)$ es un mínimo local.

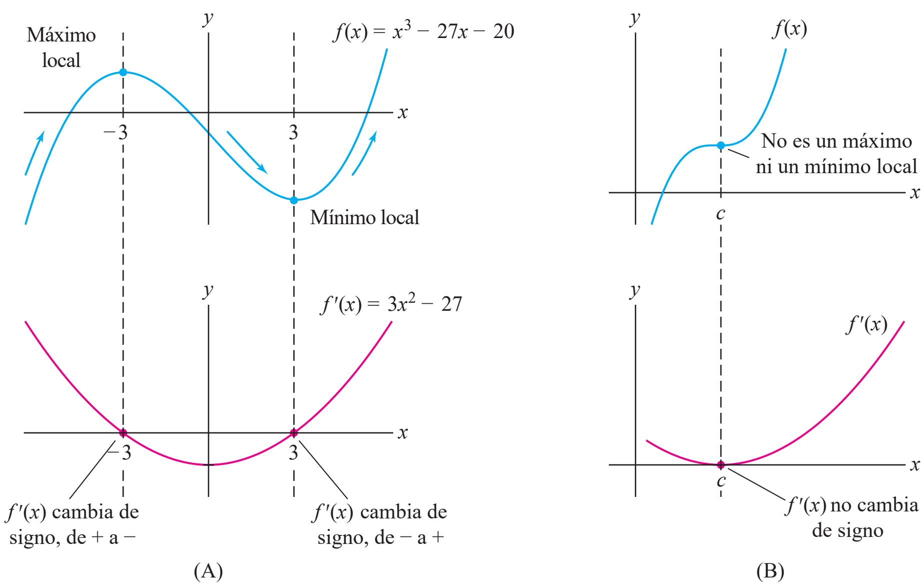


FIGURA 8

Para aplicar el criterio de la primera derivada, he aquí una observación útil: el signo de $f'(x)$ puede cambiar en un punto crítico, pero *no puede cambiar en el intervalo comprendido entre dos puntos críticos consecutivos* (esto se puede demostrar incluso si $f'(x)$ no se supone continua). Por tanto, para determinar el signo de $f'(x)$ en un intervalo entre puntos críticos consecutivos, sólo hace falta evaluar $f'(x)$ en un *punto de prueba* x_0 en ese intervalo. El signo de $f'(x_0)$ será el de $f'(x)$ en todo el intervalo.

EJEMPLO 4 Estudie los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 27x - 20$.

Solución El análisis que se va a llevar a cabo, conf rma la gráf ca que se muestra en la f gura 8(A).

***Etapa 1.* Halle los puntos críticos**

Los ceros de $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 0$ son $c = \pm 3$.

***Etapa 2.* Determine el signo de f' en los intervalos comprendidos entre puntos críticos**

Los puntos críticos $c = \pm 3$ dividen la recta real en tres intervalos:

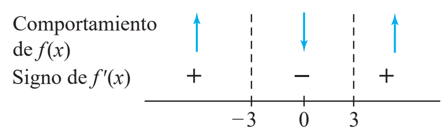
$$(-\infty, -3), \qquad (-3, 3), \qquad (3, +\infty)$$

Para determinar el signo de f' en estos intervalos, se selecciona un punto de prueba en cada uno de los intervalos y se evalúa. Por ejemplo, en $(-\infty, -3)$ se considera $x = -4$. Como $f'(-4) = 21 > 0$, $f'(x)$ es positiva en todo el intervalo $(-\infty, -3)$. Análogamente:

Se han elegido los puntos -4, 0 y 4 arbitrariamente. Para conocer el signo de $f'(x)$ en $(-\infty, -3)$, se podría haber calculado también $f'(-5)$ o cualquier otro valor de f' en el intervalo $(-\infty, -3)$.

$$\begin{aligned} f'(-4) &= 21 > 0 & &\Rightarrow & f'(x) &> 0 & &\text{para todo } x \in (-\infty, -3) \\ f'(0) &= -27 < 0 & &\Rightarrow & f'(x) &< 0 & &\text{para todo } x \in (-3, 3) \\ f'(4) &= 21 > 0 & &\Rightarrow & f'(x) &> 0 & &\text{para todo } x \in (3, +\infty) \end{aligned}$$

Esta información se muestra en el siguiente diagrama de signos:



***Etapa 3.* Aplique el criterio de la primera derivada**

- $c = -3$: $f'(x)$ cambia de + a − $\Rightarrow$ $f(-3)$ es un máximo local.
- $c = 3$: $f'(x)$ cambia de − a + $\Rightarrow$ $f(3)$ es un mínimo local.

EJEMPLO 5 Estudie los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$ en $(0, \pi)$.

Solución En primer lugar, halle los puntos críticos:

$$f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x + \cos x = (\cos x)(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0 \text{ o } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Los puntos críticos son $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, y $\frac{5\pi}{6}$. Dividen $(0, \pi)$ en cuatro intervalos:

$$\left(0, \frac{\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$$

Se determina el signo de f' evaluando f' en un punto de prueba dentro de cada intervalo. Como $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$ y $\pi \approx 3{,}14$, se pueden considerar los siguientes puntos de prueba:

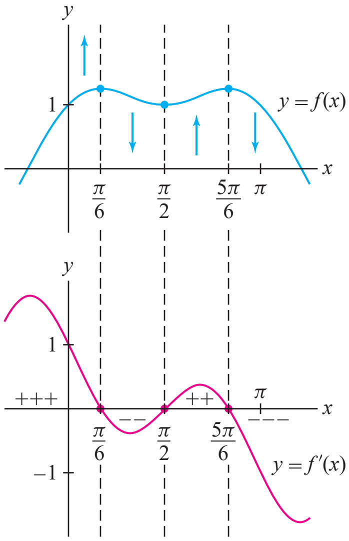


FIGURA 9 Gráf ca de $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$ y de su derivada.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x)$	Comportamiento de $f(x)$
$(0, \frac{\pi}{6})$	$f'(0{,}5) \approx 0{,}04$	$+$	$\uparrow$
$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$	$f'(1) \approx -0{,}37$	$-$	$\downarrow$
$(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$	$f'(2) \approx 0{,}34$	$+$	$\uparrow$
$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$	$f'(3) \approx -0{,}71$	$-$	$\downarrow$

Ahora, aplique el criterio de la primera derivada:

- Máximo local en $c = \frac{\pi}{6}$ y $c = \frac{5\pi}{6}$ ya que f' cambia de + a −.
- Mínimo local en $c = \frac{\pi}{2}$ ya que f' cambia de − a +.

El comportamiento de $f(x)$ y de $f'(x)$ se muestra en las gráf cas de la f gura 9. ■

■ **EJEMPLO 6** **Un punto crítico sin cambio de signo** Estudie los puntos críticos de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$.

Solución La derivada es $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, por lo que $c = 1$ es el único punto crítico. Sin embargo, $(x-1)^2 \geq 0$, por lo que $f'(x)$ no cambia de signo en $c = 1$, y $f(1)$ no es ni un máximo ni un mínimo local (f gura 10). ■

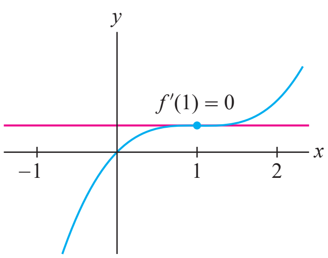


FIGURA 10 Gráf ca de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$.

Demostración del TVM

Sea $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ la pendiente de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La ecuación de la recta secante es $y = mx + r$ para algún r (f gura 11). El valor exacto de r no es relevante, pero puede comprobarse que $r = f(a) - ma$. Considere ahora la función:

$$G(x) = f(x) - (mx + r)$$

Tal y como se indica en la f gura 11, $G(x)$ es la distancia vertical entre la gráf ca y la recta secante en x (es negativa en los puntos en que la gráf ca de f se encuentra por debajo de la recta tangente). Esta distancia es cero en los puntos inicial y f nal y, por tanto, $G(a) = G(b) = 0$. Según el teorema de Rolle (sección 4.2), existe un punto c en (a, b) tal que $G'(c) = 0$. Pero $G'(x) = f'(x) - m$, por lo que $G'(c) = f'(c) - m = 0$, y $f'(c) = m$ tal y como se quería demostrar. ■

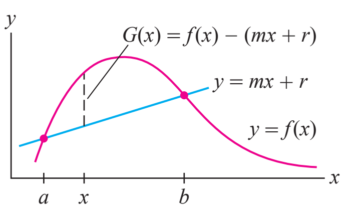


FIGURA 11 $G(x)$ es la distancia vertical entre la gráf ca y la recta secante.

4.3 RESUMEN

- El teorema del valor medio (TVM): Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe por lo menos un punto c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta conclusión también se puede expresar como:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

- Un corolario importante del TVM: si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante en (a, b).
- El *signo* de $f'(x)$ determina si $f(x)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente:

$$f'(x) > 0 \text{ para } x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ es estrictamente creciente en } (a, b)$$
$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b)$$

- El signo de $f'(x)$ sólo puede cambiar en los puntos críticos, por lo que $f(x)$ es *monótona* (estrictamente creciente o estrictamente decreciente) en los intervalos comprendidos entre dos puntos críticos consecutivos.
- Para determinar el signo de $f'(x)$ en un intervalo comprendido entre dos puntos críticos consecutivos, calcule el signo de $f'(x_0)$ en un punto cualquiera, de prueba, x_0 de ese intervalo.
- *Criterio de la primera derivada:* Si $f(x)$ es derivable y c es un punto crítico, entonces:

Cambio de signo de f' en c	**Tipo de punto crítico**
De + a −	Máximo local
De − a +	Mínimo local

4.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué valor de m hace que la siguiente afirmación sea correcta? Si $f(2) = 3$, $f(4) = 9$ y $f(x)$ es derivable, entonces f admite una recta tangente con pendiente m.

2. Suponga que f es derivable. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* se deduce del TVM?

(a) Si f admite una recta secante de pendiente 0, entonces f admite una recta tangente de pendiente 0.

(b) Si $f(5) < f(9)$, entonces $f'(c) > 0$ para algún $c \in (5, 9)$.

(c) Si f admite una recta tangente de pendiente 0, entonces f admite una recta secante de pendiente 0.

(d) Si $f'(x) > 0$ para todo x, entonces toda recta secante tiene pendiente positiva.

3. ¿Puede una función que sólo toma valores negativos tener derivada positiva? En caso afirmativo, dibuje un ejemplo.

4. Sea $f(x)$ una función con derivada representada en la figura 12:

(a) ¿Es $f(c)$ un máximo local o un mínimo local?

(b) ¿Es $f(x)$ una función estrictamente decreciente?

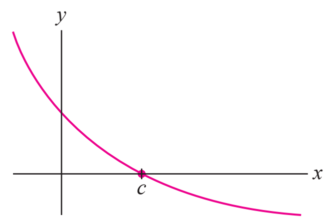


FIGURA 12 Gráfica de la derivada $f'(x)$.

Problemas

En los problemas 1-8, halle un punto c que cumpla la conclusión del TVM, para la función e intervalo dados.

1. $y = x^{-1}$, $[2, 8]$

2. $y = \sqrt{x}$, $[9, 25]$

3. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$

4. $y = \dfrac{x}{x+2}$, $[1, 4]$

5. $y = x^3$, $[-4, 5]$

6. $y = (x-1)(x-3)$, $[1, 3]$

7. $y = x \operatorname{sen} x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

8. $y = x - \operatorname{sen}(\pi x)$, $[-1, 1]$

9. GU Sea $f(x) = x^5 + x^2$. La recta secante entre $x = 0$ y $x = 1$ tiene pendiente 2 (compruébelo), por tanto, según el TVM, $f'(c) = 2$ para algún $c \in (0, 1)$. Represente gráficamente $f(x)$ y la secante en unos mismos ejes. A continuación, represente rectas de la forma $y = 2x + b$ para distintos valores de b, hasta encontrar un valor de b que corresponda a una tangente a la gráfica de f. Amplíe la imagen en el punto de tangencia para estimar la coordenada x del punto c de tangencia.

10. GU Represente la derivada de $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. Describa sus cambios de signo y use esta información para determinar los extremos locales de $f(x)$. A continuación, represente gráficamente $f(x)$ y compruebe sus resultados.

11. Determine los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva y negativa, suponiendo que la figura 13 es la gráfica de $f(x)$.

12. Determine los intervalos en los que $f(x)$ es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, suponiendo que la figura 13 es la gráfica de $f'(x)$.

13. Determine si $f(2)$ y $f(4)$ son máximos locales o mínimos locales, suponiendo que la figura 13 sea la gráfica de $f'(x)$.

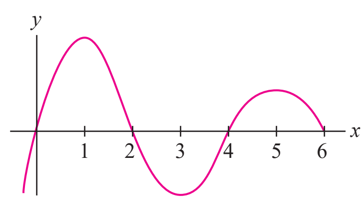


FIGURA 13

14. La figura 14 muestra la gráfica de $f'(x)$ de una función $f(x)$. Halle los puntos críticos de $f(x)$ y determine si son máximos locales, mínimos locales o ninguna de las dos cosas.

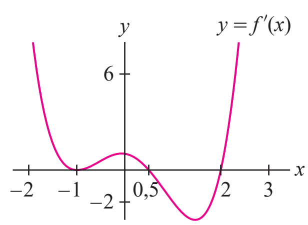


FIGURA 14

En los problemas 15-18, dibuje la gráfica de una función $f(x)$ cuya derivada $f'(x)$ cumpla la descripción que se facilita.

15. $f'(x) > 0$ para $x > 3$ y $f'(x) < 0$ para $x < 3$.

16. $f'(x) > 0$ para $x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $x > 1$.

17. $f'(x)$ es negativa en $(1, 3)$ y positiva en el resto.

18. $f'(x)$ realice las siguientes transiciones de signo: +, −, +, −

En los problemas 19-22, halle todos los puntos críticos de f y aplique el criterio de la primera derivada para determinar si se trata de máximos locales o mínimos locales.

19. $f(x) = 4 + 6x - x^2$

20. $f(x) = x^3 - 12x - 4$

21. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

22. $f(x) = x^3 + x^{-3}$

En los problemas 23-44, halle los puntos críticos y los intervalos en los que la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Aplique el criterio de la primera derivada para determinar si el punto crítico es un máximo local o un mínimo local (o ninguna de las dos cosas).

23. $y = -x^2 + 7x - 17$

24. $y = 5x^2 + 6x - 4$

25. $y = x^3 - 12x^2$

26. $y = x(x-2)^3$

27. $y = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$

28. $y = x^2 + (10 - x)^2$

29. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 4$

30. $y = x^4 + x^3$

31. $y = x^5 + x^3 + 1$

32. $y = x^5 + x^3 + x$

33. $y = x^4 - 4x^{3/2} \quad (x > 0)$

34. $y = x^{5/2} - x^2 \quad (x > 0)$

35. $y = x + x^{-1} \quad (x > 0)$

36. $y = x^{-2} - 4x^{-1} \quad (x > 0)$

37. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

38. $y = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

39. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

40. $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$

41. $y = \theta + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

42. $y = \operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

43. $y = \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta$

44. $y = \theta - 2\cos\theta, \quad [0, 2\pi]$

45. Halle el valor mínimo de $f(x) = x^x$ para $x > 0$.

46. Pruebe que $f(x) = x^2 + bx + c$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -\frac{b}{2})$ y estrictamente creciente en $(-\frac{b}{2}, +\infty)$.

47. Pruebe que $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ es una función estrictamente creciente. *Indicación:* halle el valor mínimo de $f'(x)$.

48. Halle condiciones sobre a y b que aseguren que $f(x) = x^3 + ax + b$ sea estrictamente creciente en $(-\infty, +\infty)$.

49. GU Sea $h(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{x^2+1}$ y suponga que $f'(x) = h(x)$. Represente gráficamente $h(x)$ y use su representación para describir los extremos locales y el comportamiento estrictamente creciente o estrictamente decreciente de $f(x)$. Esboce una gráfica para $f(x)$ que considere plausible.

50. Sam hizo dos afirmaciones que a Deborah le parecieron dudosas.

(a) "La velocidad media en mi trayecto fue de 70 mph; en ningún momento el cuentakilómetros marcó las 70 mph."

(b) "Un policía me multó por circular a 70 mph, pero el cuentakilómetros nunca marcó 65 mph."

Para cada caso, ¿en qué teorema se basó Deborah para rebatir la afirmación de Sam: el teorema de los valores intermedios o el teorema del valor medio? Justifique la respuesta.

51. Determine si $f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$ es estrictamente decreciente. Use su resultado para decidir qué número es mayor: $800^2 + 200^2$ o $600^2 + 400^2$.

52. Pruebe que $f(x) = 1 - |x|$ cumple la conclusión del TVM en $[a, b]$ si a y b son ambos positivos o negativos, pero que no la cumple si $a < 0$ y $b > 0$.

53. ¿Qué valores de c cumplen la conclusión del TVM en $[a, b]$, si $f(x)$ es una función lineal?

54. Pruebe que si $f(x)$ es cualquier polinomio cuadrático, entonces el punto medio $c = \dfrac{a+b}{2}$ cumple la conclusión del TVM en $[a, b]$ para cualesquiera a y b.

55. Suponga que $f(0) = 2$ y $f'(x) \le 3$ para $x > 0$. Aplique el TVM en el intervalo $[0, 4]$ para demostrar que $f(4) \le 14$. Demuestre, de manera más general, que $f(x) \le 2 + 3x$ para todo $x > 0$.

56. Pruebe que si $f(2) = -2$ y $f'(x) \ge 5$ para $x > 2$, entonces $f(4) \ge 8$.

57. Pruebe que si $f(2) = 5$ y $f'(x) \ge 10$ para $x > 2$, entonces $f(x) \ge 10x - 15$ para todo $x > 2$.

Problemas avanzados

58. Pruebe que una función cúbica $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es estrictamente creciente en $(-\infty, +\infty)$ si $b > a^2/3$.

59. Demuestre que si $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \le g'(x)$ para $x \ge 0$, entonces $f(x) \le g(x)$ para todo $x \ge 0$. *Indicación:* pruebe que $f(x) - g(x)$ es decreciente.

60. Use el problema 59 para demostrar que $x \le \tan x$ para $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

61. Use el problema 59 y la desigualdad $\operatorname{sen} x \le x$ para $x \ge 0$ (establecida en el teorema 3 de la sección 2.6) para demostrar los siguientes enunciados, válidos para todo $x \ge 0$ (cada enunciado se deduce del anterior).

(a) $\cos x \ge 1 - \frac{1}{2}x^2$

(b) $\operatorname{sen} x \ge x - \frac{1}{6}x^3$

(c) $\cos x \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

(d) ¿Puede conjeturar la siguiente desigualdad en la serie?

62. Suponga que $f(x)$ es una función tal que $f(0) = 1$ y, para todo x, $f'(x) = f(x)$ y $f(x) > 0$ (en el capítulo 7, se verá que $f(x)$ es la función exponencial e^x). Demuestre que, para todo $x \ge 0$ (cada enunciado se deduce del anterior),

(a) $f(x) \ge 1$

(b) $f(x) \ge 1 + x$

(c) $f(x) \ge 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

A continuación demuestre, por inducción completa, que para cualquier número natural n y todo $x \ge 0$, se tiene:

$$f(x) \ge 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

63. Suponga que f'' existe y $f''(x) = 0$ para todo x. Demuestre que $f(x) = mx + b$, donde $m = f'(0)$ y $b = f(0)$.

64. Sea $f(x) = x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

(a) Pruebe que $f'(x)$ es continua en $x = 0$ y que $x = 0$ es un punto crítico de f.

(b) GU Examine las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$. ¿Se puede aplicar el criterio de la primera derivada?

(c) Pruebe que $f(0)$ no es ni un mínimo local ni un máximo local.

65. Suponga que $f(x)$ cumple la siguiente ecuación (un ejemplo de **ecuación diferencial**):

$$f''(x) = -f(x) \qquad \boxed{1}$$

(a) Pruebe que $f(x)^2 + f'(x)^2 = f(0)^2 + f'(0)^2$ para todo x. *Indicación:* pruebe que la derivada de la función a la izquierda es igual a cero.

(b) Compruebe que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ cumplen la ec. (1) y deduzca que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

66. Suponga que dos funciones f y g cumplen la ec. (1) y tienen los mismos valores iniciales, es decir, $f(0) = g(0)$ y $f'(0) = g'(0)$. Demuestre que $f(x) = g(x)$ para todo x. *Indicación:* aplique el problema 65(a) a $f - g$.

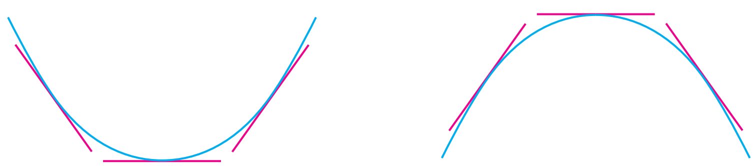
67. Aplique el problema 66 para demostrar: $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la única solución de la ec. (1) tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$; $g(x) = \cos x$ es la única solución tal que $g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$. Este resultado se puede utilizar para deducir todas las propiedades de las funciones trigonométricas “analíticamente”, es decir, sin hacer referencia a triángulos.

4.4 La forma de una gráfica

En la sección anterior se estudió el crecimiento y decrecimiento de las funciones a partir del signo de su derivada. Otra propiedad importante de las funciones es su concavidad y convexidad, es decir, la manera como se curvan sus gráficas. Dicho de modo informal, una curva se denomina *convexa* si se abre hacia arriba y *cóncava* si se abre hacia abajo (figura 1).

FIGURA 1

Para analizar la concavidad de manera precisa, hay que examinar cómo se relaciona las rectas tangentes y las derivadas. Como se puede ver en la figura 2, cuando $f(x)$ es convexa, $f'(x)$ es estrictamente creciente (las pendientes de las rectas tangentes crecen al desplazarse hacia la derecha). Análogamente, cuando $f(x)$ es cóncava, $f'(x)$ es estrictamente decreciente. Esta observación conduce a la siguiente definición.



Convexa: la pendientes de las rectas tangentes son estrictamente crecientes.

Cóncava: la pendientes de las rectas tangentes son estrictamente decrecientes.

FIGURA 2

> **DEFINICIÓN Concavidad y convexidad** Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto (a, b). Entonces:
>
> - f es **convexa** en (a, b) si $f'(x)$ es estrictamente creciente en (a, b).
> - f es **cóncava** en (a, b) si $f'(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

■ **EJEMPLO 1 Concavidad/convexidad y precios de acciones** Las acciones de dos compañías A y B han aumentado su valor y ambas se están vendiendo a 75 \$ (figura 3). Sin embargo, una de ellas es claramente una mejor inversión que la otra. Explique por qué en términos de concavidad y convexidad.

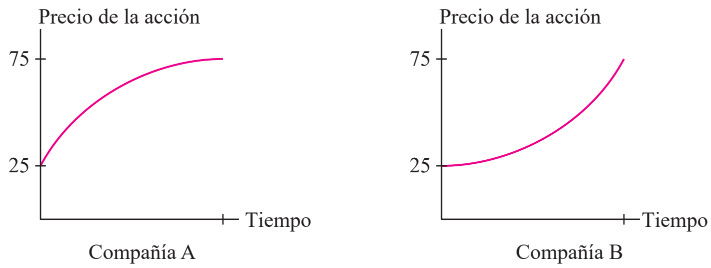


FIGURA 3

Solución La gráfica del precio de las acciones de A es cóncava, por lo que su tasa de crecimiento (primera derivada) está disminuyendo con el tiempo. La gráfica del precio de las acciones de B es convexa, por lo que su tasa de crecimiento es estrictamente creciente. Si estas tendencias continúan, las acciones de B son la mejor inversión. ■

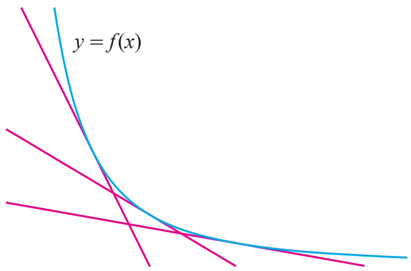


FIGURA 4 Esta función es estrictamente decreciente. Su derivada es negativa pero estrictamente creciente.

UN APUNTE GRÁFICO Recuerde que una función puede decrecer mientras que su derivada crece. En la figura 4, la derivada $f'(x)$ es estrictamente creciente. Aunque las rectas tangentes son cada vez menos pronunciadas, sus pendientes son cada vez *menos negativas*.

La concavidad de una función está determinada por el *signo* de su segunda derivada: si $f''(x) > 0$, entonces $f'(x)$ es estrictamente creciente y, en consecuencia, $f(x)$ es convexa. Análogamente, si $f''(x) < 0$, entonces $f'(x)$ es estrictamente decreciente y $f(x)$ es cóncava.

TEOREMA 1 Criterio de concavidad/convexidad Suponga que $f''(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$.

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b).
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b).

Resultan especialmente interesantes los puntos donde cambia la concavidad o la convexidad de una gráfica. Se dice que $P = (c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de $f(x)$ si hay un cambio de concavidad a convexidad, o viceversa, en $x = c$. La figura 5 muestra una curva formada por dos arcos: uno de ellos es cóncavo y el otro es convexo (el término “arco” se refiere a una porción de curva). El punto P, en que los arcos se unen, es un punto de inflexión. Se denotarán los puntos de inflexión en una gráfica mediante un cuadrado ■.

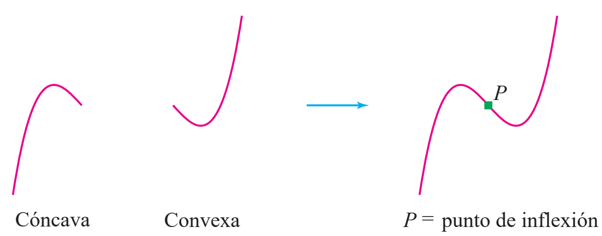


FIGURA 4

Según el teorema 1, la concavidad de f queda determinada por el signo de f''. Así, un punto de inflexión es un punto en el que $f''(x)$ cambia de signo.

TEOREMA 2 Caracterización de los puntos de inflexión Suponga que $f''(x)$ existe. Si $f''(c) = 0$ y $f''(x)$ cambia de signo en $x = c$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = c$.

■ **EJEMPLO 2** Halle los puntos de inf exión de $f(x) = \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

Solución Se tiene que $f''(x) = -\cos x$ y $f''(x) = 0$ para $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. La f gura 6 muestra que $f''(x)$ cambia de signo en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $\frac{3\pi}{2}$, por lo que ambos son puntos de inf exión de $f(x)$. ■

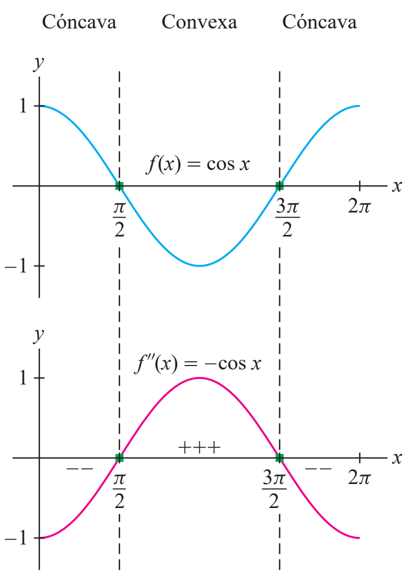


FIGURA 6

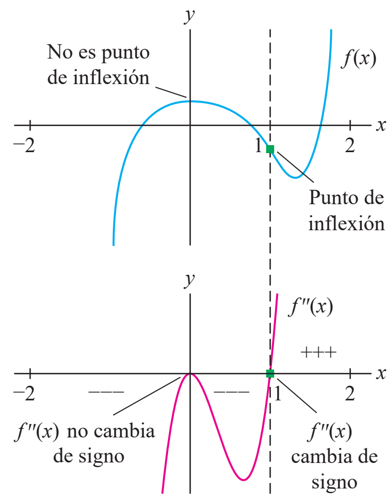


FIGURA 7 Gráf ca de $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$ y de su derivada segunda.

■ **EJEMPLO 3** **Puntos de inflexión e intervalos de concavidad/convexidad** Halle los puntos de inf exión y los intervalos de concavidad/convexidad de $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$.

Solución La primera derivada es $f'(x) = 15x^4 - 20x^3$ y la segunda:

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$$

Los ceros de $f''(x) = 60x^2(x-1)$ son $x = 0, 1$. Dividen el eje x en tres intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Se determina el signo de $f''(x)$ y la concavidad/convexidad de f calculando "valores de prueba" dentro de cada intervalo (f gura 7):

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f''(x)$	Comportamiento de $f(x)$
$(-\infty, 0)$	$f''(-1) = -120$	−	Cóncava
$(0, 1)$	$f''(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{2}$	−	Cóncava
$(1, +\infty)$	$f''(2) = 240$	+	Convexa

Esta tabla proporciona los puntos de inf exión:

- $c = 0$: no es un punto de inf exión, puesto que $f''(x)$ no cambia de signo en 0.
- $c = 1$: punto de inf exión, ya que $f''(x)$ cambia de signo en 1. ■

Por regla general, se encuentran los puntos de inf exión resolviendo la ecuación $f''(x) = 0$. Sin embargo, puede haber puntos de inf exión c en los que $f''(c)$ no exista.

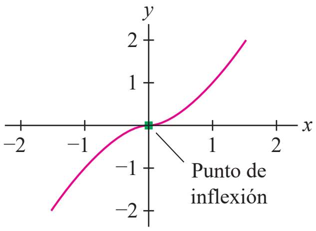


FIGURA 8 $f(x) = x^{5/3}$ cambia de cóncava a convexa en $x = 0$ aunque $f''(0)$ no existe.

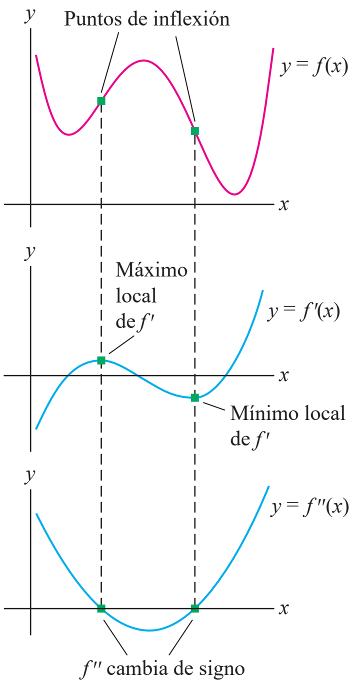


FIGURA 9

■ **EJEMPLO 4 Un caso en que la segunda derivada no existe** Halle los puntos de inf exión de $f(x) = x^{5/3}$.

Solución En este caso, $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$ y $f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$. Aunque $f''(0)$ no existe, $f''(x)$ cambia de signo en $x = 0$:

$$f''(x) = \frac{10}{9x^{1/3}} = \begin{cases} > 0 & \text{para } x > 0 \\ < 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Así, $f(x)$ cambia de cóncava a convexa en $x = 0$ y $(0, 0)$ es un punto de inf exión (f gura 8). ■

UN APUNTE GRÁFICO Los puntos de inf exión son fáciles de encontrar observando la gráf ca de la primera derivada $f'(x)$. Si $f''(c) = 0$ y $f''(x)$ cambia de signo en $x = c$, entonces $f'(x)$ pasa de estrictamente creciente a estrictamente decreciente, o viceversa, en $x = c$. Por tanto, *los puntos de inf exión de f se sitúan donde $f'(x)$ posee máximos locales o mínimos locales* (f gura 9).

Criterio de la segunda derivada para puntos críticos

Existe un criterio sencillo para los puntos críticos basado en la concavidad/convexidad. Suponga que $f'(c) = 0$. Como se puede ver en la f gura 10, $f(c)$ es un máximo local si $f(x)$ es cóncava, y es un mínimo local si $f(x)$ es convexa. La concavidad/convexidad queda, pues, determinada por el signo de f'', con lo que se obtiene el siguiente criterio de la segunda derivada. (Vea el problema 55 para una demostración completa.)

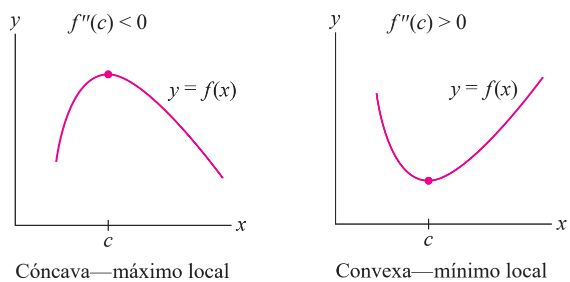


FIGURA 10 La concavidad/convexidad determina el tipo de punto crítico.

TEOREMA 3 Criterio de la segunda derivada Sea c un punto crítico de $f(x)$. Si $f''(c)$ existe, entonces:

- $f''(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(c)$ es un mínimo local
- $f''(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(c)$ es un máximo local
- $f''(c) = 0 \quad \Rightarrow$ el criterio no concluye: $f(c)$ podría ser un máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas

■ **EJEMPLO 5** Estudie los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución En primer lugar, se determinan los puntos críticos solucionando:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1) = 0$$

Dado que los puntos críticos son $c = -2, 1$ (f gura 11) y $f''(x) = 12x + 6$, según el criterio de la segunda derivada tendremos:

$$f''(-2) = -24 + 6 = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(-2) \text{ es un máximo local}$$

$$f''(1) = 12 + 6 = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) \text{ es un mínimo local}$$ ■

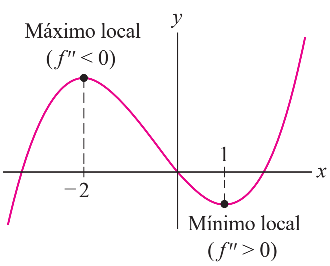


FIGURA 11 Gráf ca de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

■ **EJEMPLO 6 El criterio de la segunda derivada no concluye** Estudie los puntos críticos de $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Solución Las dos primeras derivada son

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2$$

Los puntos críticos son $c = 0, 4$ y, si se aplica el criterio de la segunda derivada:

$$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{El criterio de la segunda derivada falla}$$
$$f''(4) = 320 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(4) \text{ es un mínimo local}$$

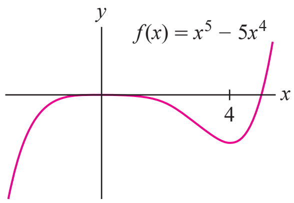


FIGURA 12 Gráf ca de $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Al fallar el criterio de la segunda derivada en $c = 0$, se regresa al criterio de la primera derivada. Seleccionando puntos de prueba a la derecha y a la izquierda de $c = 0$, se obtiene:

$$f'(-1) = 5 + 20 = 25 > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ es positiva en } (-\infty, 0)$$
$$f'(1) = 5 - 20 = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ es negativa en } (0, 4)$$

Como $f'(x)$ cambia de + a − en $c = 0$, $f(0)$ es un máximo local (f gura 12). ■

4.4 RESUMEN

- Una función derivable $f(x)$ es *convexa* en (a, b) si $f'(x)$ es estrictamente creciente y *cóncava* si $f'(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).
- Los signos de las dos primeras derivadas proporcionan la siguiente información:

Primera derivada			**Segunda derivada**		
$f' > 0$	$\Rightarrow$	f es estrictamente creciente	$f'' > 0$	$\Rightarrow$	f es convexa
$f' < 0$	$\Rightarrow$	f es estrictamente decreciente	$f'' < 0$	$\Rightarrow$	f es cóncava

- Un *punto de inf exión* es un punto en el que f cambia de convexa a cóncava, o viceversa.
- Si $f''(c) = 0$ y $f''(x)$ cambia de signo en c, entonces c es un punto de inf exión.
- Criterio de la segunda derivada: si $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ existe, entonces:
  - $f(c)$ es un máximo local si $f''(c) < 0$.
  - $f(c)$ es un mínimo local si $f''(c) > 0$.
  - El criterio falla si $f''(c) = 0$.

Si el criterio falla, use el criterio de la primera derivada.

4.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Si f es convexa, entonces f' es (elija una opción):

(a) estrictamente creciente **(b)** estrictamente decreciente

2. ¿Qué conclusión puede extraer si sabe que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$?

3. ¿Verdadero o falso? Si $f(c)$ es un mínimo local, entonces $f''(c)$ debe ser positiva.

4. ¿Verdadero o falso? Si $f''(x)$ cambia de + a − en $x = c$, entonces f tiene un punto de inf exión en $x = c$.

Problemas

1. Relacione las gráficas de la figura 13 con la descripción:

(a) $f''(x) < 0$ para todo x. **(b)** $f''(x)$ pasa de + a −.

(c) $f''(x) > 0$ para todo x. **(d)** $f''(x)$ pasa de − a +.

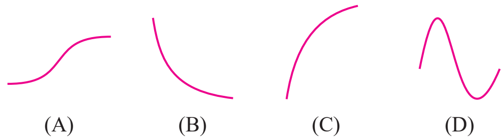


FIGURA 13

2. Relacione cada afirmación con una gráfica de la figura 14 que represente los beneficios de la empresa como función del tiempo.

(a) Tiene muy buen aspecto: la tasa de crecimiento es estrictamente creciente.

(b) Estamos perdiendo dinero, pero no tan rápidamente como antes.

(c) Estamos perdiendo dinero y las expectativas empeoran con el paso del tiempo.

(d) Vamos bien, pero nuestra tasa de crecimiento se estanca.

(e) Los negocios estaban estancados, pero nos estamos recuperando.

(f) Los negocios iban muy bien, pero ahora se están estancando.

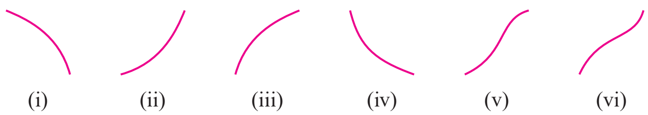


FIGURA 14

En los problemas 3-14, determine los intervalos de concavidad/convexidad de la función y halle los puntos de inflexión.

3. $y = x^2 - 4x + 3$ **4.** $y = t^3 - 6t^2 + 4$

5. $y = 10x^3 - x^5$ **6.** $y = 5x^2 + x^4$

7. $y = \theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad [0, 2\pi]$ **8.** $y = \theta + \mathrm{sen}^2\,\theta, \quad [0, \pi]$

9. $y = x(x - 8\sqrt{x}) \quad (x \geq 0)$ **10.** $y = x^{7/2} - 35x^2$

11. $y = (x-2)(1-x^3)$ **12.** $y = x^{7/5}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2+3}$ **14.** $y = \dfrac{x-1}{x^2+8}$

15. El crecimiento de un girasol durante sus primeros 100 días se modela bien con la *curva logística* $y = h(t)$ mostrada en la figura 15. Estime la tasa de crecimiento en el punto de inflexión y explique su significado. Esboce las derivadas primera y segunda de $h(t)$.

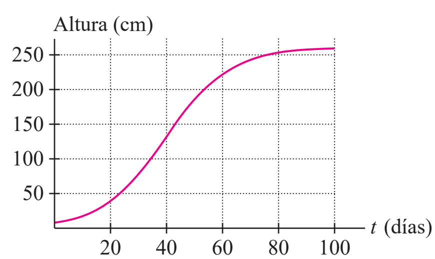


FIGURA 15

16. Suponga que la figura 16 es la gráfica de $f(x)$. ¿Dónde se encuentran los puntos de inflexión de $f(x)$ y sobre qué intervalo es $f(x)$ cóncava?

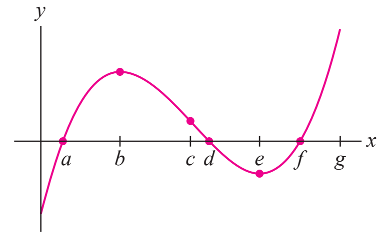


FIGURA 16

17. Repita el problema 16 suponiendo ahora que la figura 16 es la gráfica de la *derivada* $f'(x)$.

18. Repita el problema 16 suponiendo ahora que la figura 16 es la gráfica de la *segunda derivada* $f''(x)$.

19. La figura 17 muestra la *derivada* de $f'(x)$ en $[0, 1{,}2]$. Localice los puntos de inflexión de $f(x)$ y los puntos que dan lugar al máximo y mínimo local. Determine los intervalos sobre los que $f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

(a) Estrictamente creciente **(b)** Estrictamente decreciente

(c) Convexa **(d)** Cóncava

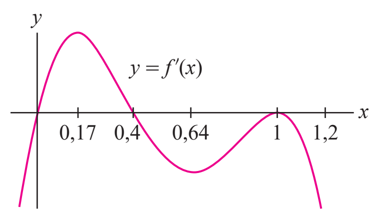


FIGURA 17

20. Leticia ha estado vendiendo cargadores portátiles de energía solar a través de su página web, con unas ventas mensuales según consta a continuación. En un informe a los inversores, afirma: "Las ventas llegaron a un punto de inflexión cuando empecé a usar publicidad de pago por clic". ¿En qué mes ocurrió? Justifique su respuesta.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8
Ventas	2	30	50	60	90	150	230	340

En los problemas 21-34, halle los puntos críticos y aplique el criterio de la segunda derivada (o establezca que este criterio falla).

21. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ **22.** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

23. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ **24.** $f(x) = x^5 - x^3$

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x+1}$ **26.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$

27. $y = 6x^{3/2} - 4x^{1/2}$

28. $y = 9x^{7/3} - 21x^{1/2}$

29. $f(x) = x^3 + 48/x, \quad (0, \infty)$

30. $f(x) = x^4 + 128/x^2, \quad (0, \infty)$

31. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x, \quad [0, \pi]$

32. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + 4}, \quad [0, 2\pi]$

33. $f(x) = 2 + \tan^2 x, \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

34. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos^3 x, \quad [0, \pi]$

En los problemas 35-46, halle los intervalos de concavidad/convexidad de f, los puntos de inflexión, los puntos críticos y los máximos y mínimos locales.

35. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

36. $f(x) = x^2(x - 4)$

37. $f(t) = t^2 - t^3$

38. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$

39. $f(x) = x^2 - 8x^{1/2} \quad (x \geq 0)$

40. $f(x) = x^{3/2} - 4x^{-1/2} \quad (x > 0)$

41. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 27}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$

43. $f(\theta) = \theta + \operatorname{sen}\theta, \quad [0, 2\pi]$

44. $f(x) = \cos^2 x, \quad [0, \pi]$

45. $f(x) = \tan x, \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

46. $f(x) = \dfrac{x}{x^6 + 5}$

47. Dibuje la gráfica de una función estrictamente creciente tal que $f''(x)$ cambie de + a − en $x = 2$, y de − a + en $x = 4$. Repita el problema para una función estrictamente decreciente.

En los problemas 48-50, dibuje la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las condiciones dadas.

48. $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para todo x.

49. **(i)** $f'(x) > 0$ para todo x, y

(ii) $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

50. **(i)** $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$, y

(ii) $f''(x) < 0$ si $|x| > 2$ y $f''(x) > 0$ si $|x| < 2$.

51. Una epidemia de gripe empieza a extenderse despacio y se va acelerando hasta que la mayoría de la población de riesgo se ha contagiado, después de lo cual el proceso avanza a un ritmo menor.

(a) Si $R(t)$ es el número de individuos contagiados en un instante de tiempo t, describa la concavidad/convexidad de la gráfica de R al principio y al final de la epidemia.

(b) Describa la situación de la epidemia el día en que $R(t)$ presenta un punto de inflexión.

52. Se bombea agua hacia un recipiente esférico a un ritmo constante (figura 18). Sea $h(t)$ el nivel de agua en el instante t. Dibuje la gráfica de $h(t)$ (aproximadamente, pero con la concavidad/convexidad correcta). ¿Dónde se sitúa el punto de inflexión?

53. Se bombea agua hacia un recipiente esférico a un ritmo variable de manera que el nivel del agua ascienda con rapidez constante (figura 18). Sea $V(t)$ el volumen de agua en cada instante t. Dibuje la gráfica de $V(t)$ (de modo aproximado, pero con la concavidad correcta). ¿Dónde se sitúa el punto de inflexión?

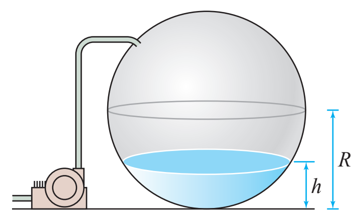


FIGURA 18

54. (Continuación del problema 53) Si el radio de la esfera es R, el volumen de agua es $V = \pi(Rh^2 - \frac{1}{3}h^3)$, donde h es el nivel de agua. Suponga que el nivel asciende con una rapidez constante 1 (es decir, $h = t$).

(a) Halle el punto de inflexión de $V(t)$. ¿Concuerda su resultado con la respuesta dada al problema 53?

(b) GU Represente gráficamente $V(t)$ para $R = 1$.

Problemas avanzados

En los problemas 55-57, suponga que $f(x)$ es derivable.

55. Demostración del criterio de la segunda derivada Sea c un punto crítico tal que $f''(c) > 0$ (el caso $f''(c) < 0$ es similar).

(a) Pruebe que:

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c + h)}{h}$$

(b) Use el resultado de (a) para probar que existe un intervalo abierto (a, b), que contiene a c, tal que $f'(x) < 0$ si $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ si $c < x < b$. Concluya que $f(c)$ es un mínimo local.

56. Demuestre que si $f''(x)$ existe y $f''(x) > 0$ para todo x, entonces la gráfica de $f(x)$ "queda por encima" de sus rectas tangentes, tal y como se indica.

(a) Sea c un número cualquiera y considere:

$$G(x) = f(x) - f'(c)(x - c) - f(c)$$

Es suficiente demostrar que $G(x) \geq 0$ para todo c. Explique por qué con un gráfico.

(b) Pruebe que $G(c) = G'(c) = 0$ y $G''(x) > 0$ para todo x. Concluya que $G'(x) < 0$ si $x < c$ y $G'(x) > 0$ si $x > c$. Deduzca entonces, usando el TVM, que $G(x) > G(c)$ si $x \neq c$.

57. Suponga que $f''(x)$ existe y sea c un punto de inflexión de $f(x)$.

(a) Use el método del problema 56 para demostrar que la recta tangente en $x = c$ *corta la gráfica* (figura 19). *Indicación:* pruebe que $G(x)$ cambia de signo en $x = c$.

(b) GU Verifique que esta conclusión para

$$f(x) = \frac{x}{3x^2 + 1}$$

representando $f(x)$ y la recta tangente en cada punto de inflexión, sobre el mismo sistema de ejes.

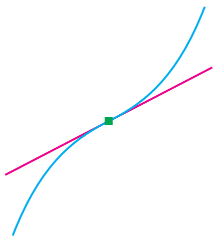


FIGURA 19 La recta tangente corta la gráf ca en cada punto de inf exión.

58. Sea $C(x)$ el coste de producir x unidades de un cierto producto. Suponga que la gráf ca de $C(x)$ es convexa.

(a) Pruebe que el coste medio $A(x) = C(x)/x$ es minimizado en un nivel de producción x_0 tal que el coste medio sea igual al cose marginal, es decir, $A(x_0) = C'(x_0)$.

(b) Pruebe que la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(x_0, C(x_0))$ es tangente a la gráf ca de $C(x)$.

59. Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n \geq 2$. Pruebe que $f(x)$ tiene como mínimo un punto de inf exión si n es impar. A continuación, proporcione un ejemplo para mostrar que $f(x)$ no tiene por qué tener un punto de inf exión si n es par.

60. Puntos críticos y de inf exión Si $f'(c) = 0$ y $f(c)$ no es ni un mínimo local, ni un máximo local, ¿debe ser $x = c$ un punto de inf exión? Esto es cierto para funciones "razonables" (incluyendo las funciones que se estudian en este libro), pero no es cierto en general. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Use la def nición de la derivada para probar que $f'(0)$ existe y que $f'(0) = 0$.

(b) Pruebe que $f(0)$ no es ni un mínimo local ni un máximo local.

(c) Pruebe que $f'(x)$ cambia inf nitas veces de signo cerca de $x = 0$. Concluya que $x = 0$ no es un punto de inf exión.

4.5 Dibujo de gráficas y asíntotas

El objetivo en esta sección es representar gráf cas usando la información que proporcionan las dos primeras derivadas f' y f''. Veremos cómo obtener buenos esbozos sin necesidad de calcular largas tablas de valores. Pese a que en la actualidad casi todas las gráf cas se dibujan por ordenador (entre ellas, por supuesto, las de este libro), el trazado de gráf cas a mano es útil para reforzar la comprensión de los conceptos básicos del presente capítulo.

La mayoría de gráf cas están formadas por *arcos* que adoptan una de las cuatro formas básicas correspondientes a las cuatro posibles combinaciones de signos de f' y f'' (f gura 1). Como f' y f'' pueden tener cada una signo $+$ o $-$, las combinaciones de signos posibles son:

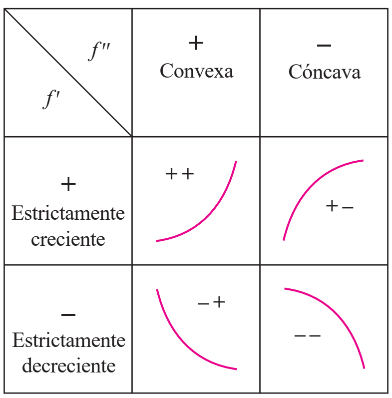


FIGURA 1 Las cuatro formas básicas.

$$++ \qquad +- \qquad -+ \qquad --$$

En esta notación, el primer signo se ref ere a f' y el segundo a f''. Por ejemplo, $-+$ indica que $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$.

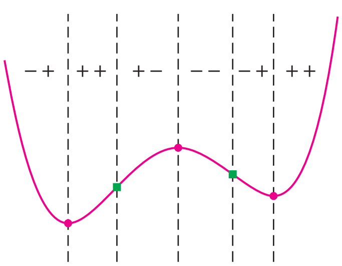


FIGURA 2 Gráf ca de $f(x)$ con puntos de transición y combinaciones de signos de f' y f''.

Para dibujar gráf cas hay que f jarse especialmente en los **puntos de transición**, en los cuales la forma cambia debido a un cambio de signo en f' (máximo o mínimo local) o en f'' (punto de inf exión). En esta sección, los extremos locales se indican con pequeños círculos y los puntos de inf exión con pequeños cuadrados (f gura 2).

Para dibujar gráf cas, también hay que f jarse en el **comportamiento asintótico**, es decir, el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$ o a una asíntota vertical.

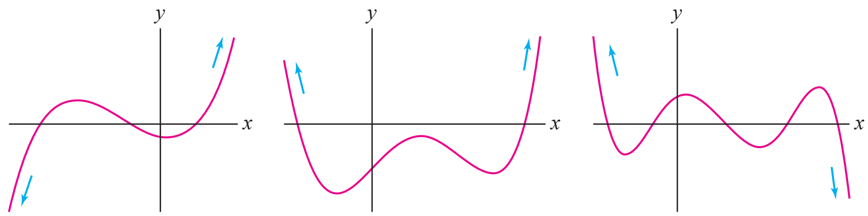
Los tres ejemplos siguientes tratan sobre polinomios. Recuerde, de la sección 2.7, que los límites en el inf nito de un polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(suponiendo que $a_n \neq 0$) quedan determinados por:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a_n \lim_{x \to \pm\infty} x^n$$

En general, entonces, la gráf ca de un polinomio "ondula" hacia arriba y hacia abajo un número f nito de veces y tiende hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$ (f gura 3).



(A) Grado 3, $a_3 > 0$ (B) Grado 4, $a_4 > 0$ (C) Grado 5, $a_5 < 0$

FIGURA 3 Gráficas de polinomios.

■ **EJEMPLO 1 Un polinomio cuadrático** Dibuje la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Solución Se tiene que $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$. Se observa, directamente, que $f'(x)$ es negativa si $x < 2$ y positiva si $x > 2$, pero se puede confirmar considerando valores de prueba, como en las secciones previas:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'
$(-\infty, 2)$	$f'(1) = -2$	$-$
$(2, +\infty)$	$f'(3) = 2$	$+$

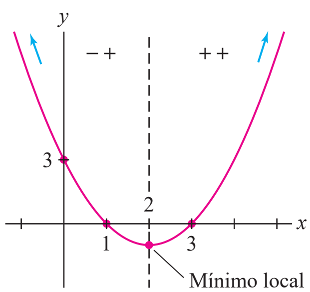


FIGURA 4 Gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Además, $f''(x) = 2$ es positiva, por lo que la gráfica es siempre convexa. Para dibujar la gráfica, represente el mínimo local $(2, -1)$, la intersección con el eje y y las raíces $x = 1, 3$. Como el término dominante de f es x^2, $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Este comportamiento asintótico se denota con flechas en la figura 4. ■

■ **EJEMPLO 2 Un polinomio cúbico** Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

Solución

Etapa 1. **Determine los signos de f' y de f''**

En primer lugar, obtenga los puntos críticos:

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0$$

Los puntos críticos $c = -1, 2$ dividen el eje x en tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$ sobre los que se va a determinar el signo de f' calculando valores de prueba:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'
$(-\infty, -1)$	$f'(-2) = 4$	$+$
$(-1, 2)$	$f'(0) = -2$	$-$
$(2, +\infty)$	$f'(3) = 4$	$+$

A continuación, resuelva $f''(x) = 2x - 1 = 0$. La solución es $c = \frac{1}{2}$ y se tiene:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f''
$(-\infty, \frac{1}{2})$	$f''(0) = -1$	$-$
$(\frac{1}{2}, +\infty)$	$f''(1) = 1$	$+$

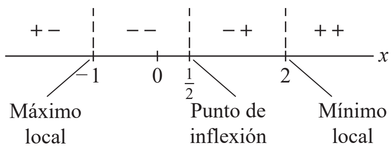


FIGURA 5 Combinaciones de signos de f' y f''.

Etapa 2. **Anote los puntos de transición y las combinaciones de signos**

En este paso se combina la información dada por f' y f'' en un diagrama de signos (figura 5). Hay tres puntos de transición:

- $c = -1$: máximo local porque f' pasa de + a − en $c = -1$.
- $c = \frac{1}{2}$: punto de inflexión porque f'' cambia de signo en $c = \frac{1}{2}$.
- $c = 2$: mínimo local porque f' pasa de − a + en $c = 2$.

En la figura 6(A), se representan los puntos de transición y, para mayor precisión, la intersección con el eje y, $f(0)$, usando los valores:

$$f(-1) = \frac{25}{6} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{12} \qquad f(0) = 3 \qquad f(2) = -\frac{1}{3}$$

Etapa 3. **Trace arcos de la forma y comportamiento asintótico correctos**

El término dominante de $f(x)$ es $\frac{1}{3}x^3$. Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Para completar la gráfica, sólo queda conectar los puntos de transición mediante arcos de concavidad apropiada y comportamiento asintótico, como se ilustra en la figura 6(B) y (C). ■

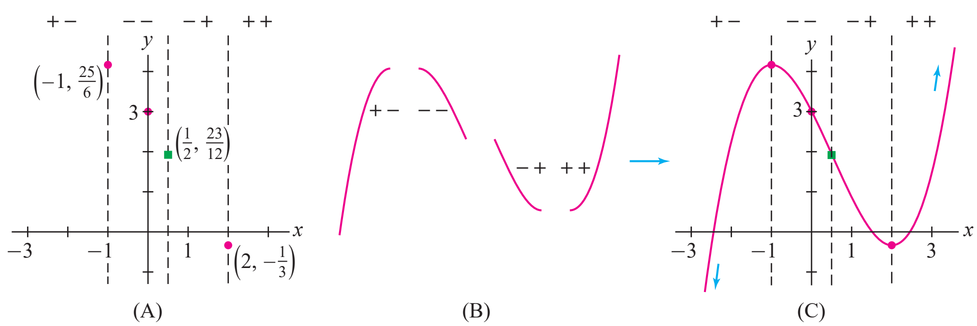


FIGURA 6 Gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

■ **EJEMPLO 3** Dibuje la gráfica de $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.

Solución

Etapa 1. **Determine los signos de f' y de f''**

En primer lugar, halle los puntos de transición:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, 1$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(x-1)(3x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}, 1$$

Los signos de f' y f'' se encuentran en las siguientes tablas:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = -48$	−
$(0, 1)$	$f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$	+
$(1, +\infty)$	$f'(2) = 24$	+

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f''
$(-\infty, \frac{1}{3})$	$f''(0) = 12$	+
$(\frac{1}{3}, 1)$	$f''(\frac{1}{2}) = -3$	−
$(1, +\infty)$	$f''(2) = 60$	+

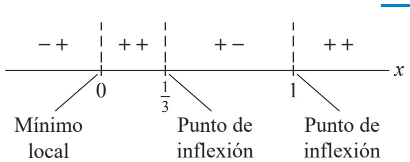


FIGURA 7

Etapa 2. **Anote los puntos de transición y las combinaciones de signos**

Los puntos de transición $c = 0, \frac{1}{3}, 1$ dividen el eje x en cuatro intervalos (figura 7). El tipo de signo determina la naturaleza del punto de transición:

- $c = 0$: mínimo local pues f' pasa de − a + en $c = 0$.
- $c = \frac{1}{3}$: punto de inflexión pues f'' cambia de signo en $c = \frac{1}{3}$.

- $c = 1$: no es ni un mínimo local ni un máximo local ya que f' no cambia de signo, pero sí que es un punto de inf exión ya que $f''(x)$ cambia de signo en $c = 1$.

Se representan los puntos de transición $c = 0, \frac{1}{3}, 1$ en la f gura 8(A) usando los valores de la función $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{38}{27}$ y $f(1) = 2$.

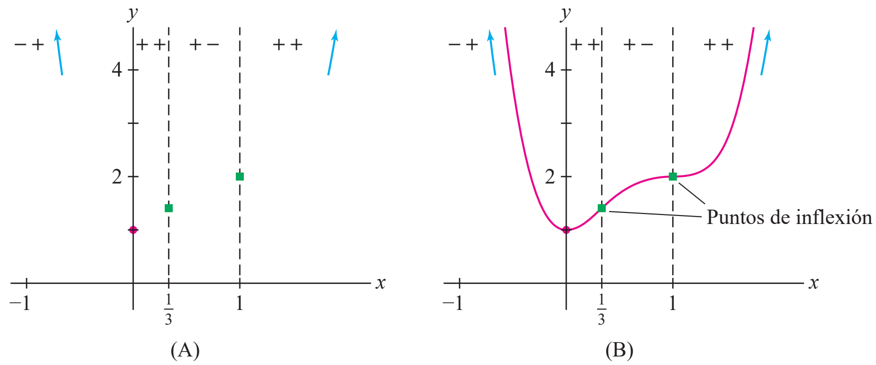


FIGURA 8 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.

Etapa 3. **Trace arcos de la forma y comportamiento asintótico correctos**

Antes de trazar los arcos, observe que el término dominante de $f(x)$ es $3x^4$, por tanto $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Se obtiene, f nalmente, la f gura 8(B). ■

■ **EJEMPLO 4** **Una función trigonométrica** Dibuje $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$ en $[0, \pi]$.

Solución En primer lugar, se obtienen los puntos de transición x en $[0, \pi]$:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$f''(x) = -\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Las combinaciones de signos se muestran en las siguientes tablas:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'
$(0, \frac{\pi}{6})$	$f'(\frac{\pi}{12}) \approx 0{,}24$	+
$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$	$f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$	−
$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$	$f'(\frac{11\pi}{12}) \approx 0{,}24$	+

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f''
$(0, \frac{\pi}{2})$	$f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	−
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$f''(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	+

Teniendo en cuenta los cambios de signo y los puntos de transición, y utilizando los valores que se encuentran a continuación, se obtiene la representación de la f gura 9:

$$f(0) = 1 \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 1{,}13 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0{,}79 \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \approx 0{,}44 \quad f(\pi) \approx 0{,}57$$ ■

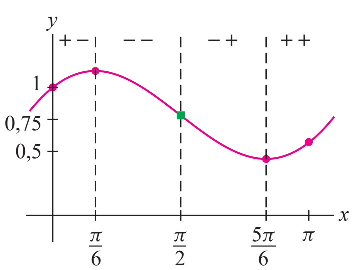


FIGURA 9 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$.

Los dos ejemplos siguientes tratan sobre asíntotas horizontales y verticales.

■ **EJEMPLO 5** Dibuje la gráf ca de $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$.

Solución La función $f(x)$ no está def nida para todo x. Este hecho es importante en el análisis, por lo que se añade un paso 0 a nuestro procedimiento.

Etapa 0. **Determine el dominio de f**

La función

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x-4}$$

no está def nida en $x = 2$. Por tanto, el dominio de f consiste en los dos intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$. Se debe analizar f sobre estos intervalos por separado.

Etapa 1. **Determine los signos de f' y de f''**

Se tiene que:

$$f'(x) = -\frac{4}{(x-2)^2} \qquad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Aunque $f'(x)$ no está def nida en $x = 2$, este punto no es un punto crítico, pues $x = 2$ no está en el dominio de f. De hecho, $f'(x)$ es negativa si $x \neq 2$, por lo que $f(x)$ es estrictamente decreciente y no tiene puntos críticos.

Por otra parte, $f''(x) > 0$ si $x > 2$ y $f''(x) < 0$ si $x < 2$. Aunque $f''(x)$ cambia de signo en $x = 2$, este punto no es un punto de inf exión pues $x = 2$ no está en el dominio de f.

Etapa 2. **Anote los puntos de transición y las combinaciones de signos**

No hay puntos de transición en el dominio de f.

$(-\infty, 2)$	$f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$
$(2, +\infty)$	$f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$

Etapa 3. **Trace arcos de la forma y comportamiento asintótico correctos**

Los siguientes límites muestran que $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+2}{2x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+2x^{-1}}{2-4x^{-1}} = \frac{3}{2}$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical ya que $f(x)$ tiene límites laterales inf nitos:

$$\lim_{x\to 2-} \frac{3x+2}{2x-4} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+} \frac{3x+2}{2x-4} = +\infty$$

Para comprobar esto, observe que para x cercano a 2, el denominador $2x - 4$ es negativo y pequeño si $x < 2$, y positivo y también pequeño si $x > 2$, mientras que el numerador $3x + 2$ es positivo.

La f gura 10(A) resume el comportamiento asintótico. ¿Qué forma tiene la gráf ca a la derecha de $x = 2$? Es estrictamente decreciente y convexa pues $f' < 0$ y $f'' > 0$ y tiende a las asíntotas. La única posibilidad es la curva que se muestra en la parte derecha de la f gura 10(B). A la izquierda de $x = 2$, la gráf ca es estrictamente decreciente, cóncava y tiende a las asíntotas. La intersección con el eje x es $x = -\frac{2}{3}$ pues $f(-\frac{2}{3}) = 0$ y la intersección con el eje y es $y = f(0) = -\frac{1}{2}$. ■

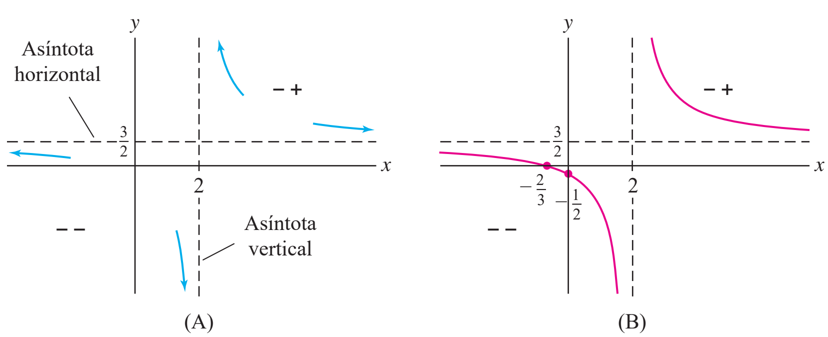


FIGURA 10 Gráf ca de $y = \dfrac{3x+2}{2x-4}$.

EJEMPLO 6 Dibuje la gráf ca de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solución La función $f(x)$ está def nida si $x \neq \pm 1$. Se tiene:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Si $x \neq \pm 1$, el denominador de $f'(x)$ es positivo. Por tanto, $f'(x)$ y x tienen signos opuestos:

- $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$ $\Rightarrow$ en $x = 0$ hay un máximo local

El signo de $f''(x)$ es igual al signo de $x^2 - 1$, ya que $6x^2 + 2$ es positivo:

- $f''(x) > 0$ si $x < -1$ o $x > 1$ y $f''(x) < 0$ si $-1 < x < 1$

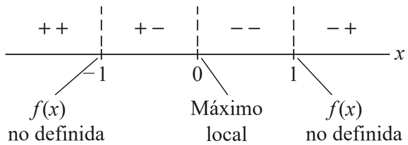


FIGURA 11

La f gura 11 resume la información sobre los signos.

El eje x, $y = 0$, es una asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

En este ejemplo,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$
$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas verticales. Para determinar los límites laterales, observe que $f(x) < 0$ si $-1 < x < 1$, y $f(x) > 0$ si $|x| > 1$. Por tanto, cuando $x \to \pm 1$, $f(x)$ tiende a $-\infty$ desde dentro del intervalo $(-1, 1)$, y tiende a $+\infty$ desde fuera de $(-1, 1)$ (f gura 12). Se obtiene la representación de la f gura 13.

Asíntota vertical	Límite por la izquierda	Límite por la derecha
$x = -1$	$\lim_{x\to-1-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$	$\lim_{x\to-1+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$
$x = 1$	$\lim_{x\to1-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$	$\lim_{x\to1+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$

■

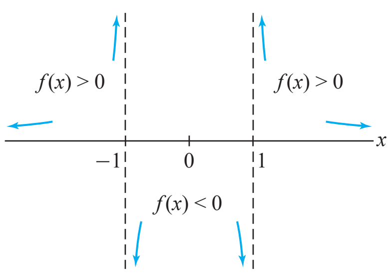


FIGURA 12 Comportamiento en las asíntotas verticales.

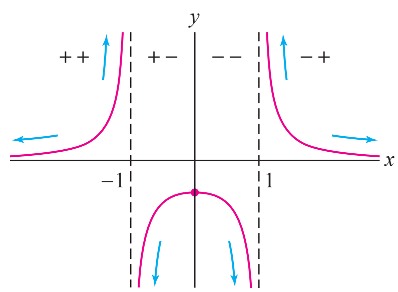


FIGURA 13 Gráf ca de $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.

4.5 RESUMEN

- La mayoría de gráf cas se componen de arcos que adoptan una de las cuatro formas básicas (f gura 14):

Combinación de signos		Tipo de curva
++	$f' > 0, f'' > 0$	Estrictamente creciente y convexa
+−	$f' > 0, f'' < 0$	Estrictamente creciente y cóncava
−+	$f' < 0, f'' > 0$	Estrictamente decreciente y convexa
−−	$f' < 0, f'' < 0$	Estrictamente decreciente y cóncava

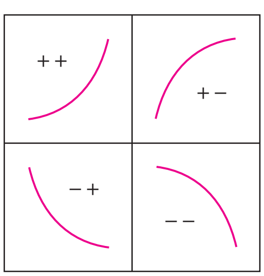


FIGURA 14 Las cuatro formas básicas.

- Un *punto de transición* es un punto del dominio de f en el que, o bien f' cambia de signo (máximo local o mínimo local) o bien f'' cambia de signo (punto de inf exión).
- Es conveniente organizar el trazado de gráf cas en varios pasos:

Paso 0. Determine el dominio de f.

Paso 1. Determine los signos de f' y f''.

Paso 2. Anote los puntos de transición y las combinaciones de signos.

Paso 3. Determine el comportamiento asintótico de $f(x)$.

Paso 4. Trace arcos de la forma y comportamiento asintótico correctos.

4.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dibuje un arco en el que f' y f'' tengan la combinación de signos $++$. Repita el ejercicio con la combinación $-+$.

2. Si la combinación de signos de f' y f'' cambia de $++$ a $+-$ en $x = c$, entonces (elija la respuesta correcta):

(a) $f(c)$ es un mínimo local **(b)** $f(c)$ es un máximo local

(c) c es un punto de inf exión

3. La segunda derivada de la función $f(x) = (x-4)^{-1}$ es $f''(x) = 2(x-4)^{-3}$. Aunque $f''(x)$ cambia de signo en $x = 4$, $f(x)$ no tiene un punto de inf exión en $x = 4$. ¿Por qué?

Problemas

1. Determine las combinaciones de signo de f' y f'' para cada intervalo A–G de la f gura 15.

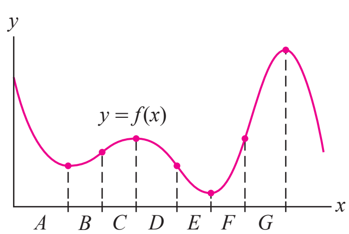


FIGURA 15

2. Establezca las combinaciones de signo en cada punto de transición A-G de la f gura 16. Ejemplo: $f'(x)$ cambia de + a − en A.

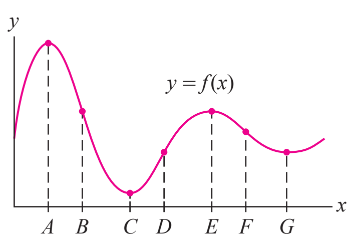


FIGURA 16

En los prolemas 3-6, dibuje la gráf ca de una función para la que f' y f'' presenten las combinaciones de signo dadas.

3. $++,\ +-,\ --$

4. $+-,\ --,\ -+$

5. $-+,\ --,\ -+$

6. $-+,\ ++,\ +-$

7. Dibuje la gráf ca de $y = x^2 - 5x + 4$.

8. Dibuje la gráf ca de $y = 12 - 5x - 2x^2$.

9. Dibuje la gráf ca de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Incluya los ceros de $f(x)$, que son $x = 1$ y $1 \pm \sqrt{3}$ (aproximadamente $-0{,}73, 2{,}73$).

10. Pruebe que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ tiene un punto de inf exión, pero no tiene valores extremos locales. Dibuje la gráf ca.

11. Extienda la gráf ca de $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$ del ejemplo 4 al intervalo $[0, 5\pi]$.

12. Dibuje las gráf cas de $y = x^{2/3}$ e $y = x^{4/3}$.

En los problemas 13-34, halle los puntos de transición, intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad y comportamiento asintótico. A continuación dibuje la gráf ca, con toda esta información indicada.

13. $y = x^3 + 24x^2$

14. $y = x^3 - 3x + 5$

15. $y = x^2 - 4x^3$

16. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$

17. $y = 4 - 2x^2 + \frac{1}{6}x^4$

18. $y = 7x^4 - 6x^2 + 1$

19. $y = x^5 + 5x$

20. $y = x^5 - 15x^3$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 4x$

22. $y = x^2(x-4)^2$

23. $y = x^7 - 14x^6$

24. $y = x^6 - 9x^4$

25. $y = x - 4\sqrt{x}$

26. $y = \sqrt{x} + \sqrt{16 - x}$

27. $y = x(8 - x)^{1/3}$

28. $y = (x^2 - 4x)^{1/3}$

29. $y = (2x - x^2)^{1/3}$

30. $y = (x^3 - 3x)^{1/3}$

31. $y = x - x^{-1}$

32. $y = x^2 - x^{-2}$

33. $y = x^3 - 48/x^2$

34. $y = x^2 - x + x^{-1}$

35. Dibuje la gráf ca de $f(x) = 18(x-3)(x-1)^{2/3}$ usando las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{30(x-\frac{9}{5})}{(x-1)^{1/3}} \qquad f''(x) = \frac{20(x-\frac{3}{5})}{(x-1)^{4/3}}$$

36. Dibuje la gráf ca de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ usando las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \qquad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

SAC *En los problemas 37-40, dibuje la gráf ca de la función indicando todos los puntos de transición. Si fuera necesario, utilice un programa de representación gráf ca o uno de cálculo simbólico para localizar los puntos de transición numéricamente.*

37. $y = x^3 - \dfrac{4}{x^2+1}$ **38.** $y = 12\sqrt{x^2+2x+4} - x^2$

39. $y = x^4 - 4x^2 + x + 1$

40. $y = 2\sqrt{x} - \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

En los problemas 41-46, dibuje la gráf ca en el intervalo dado, con todos los puntos de transición indicados.

41. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi]$

42. $y = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

43. $y = 2\operatorname{sen} x - \cos^2 x, \quad [0, 2\pi]$ **44.** $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x, \quad [0, 2\pi]$

45. $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x, \quad [0, \pi]$

46. $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

47. ¿Cualquier transición de signos es posible? Explique, con un gráf co, por qué las transiciones $++ \to -+$ y $-- \to +-$ no ocurren, si la función es derivable. (Vea una demostración en el problema 76.)

48. Suponga que f es una función dos veces derivable y que cumple: (i) $f(0) = 1$, (ii) $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, y (iii) $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$. Sea $g(x) = f(x^2)$.

(a) Dibuje una posible gráf ca para $f(x)$.

(b) Demuestre que $g(x)$ no tiene puntos de inf exión y que presenta un único extremo local en $x = 0$. Dibuje una posible gráf ca para $g(x)$.

49. ¿Cuál de las gráf cas de la f gura 17 *no puede* ser la gráf ca de un polinomio? Justif que su respuesta.

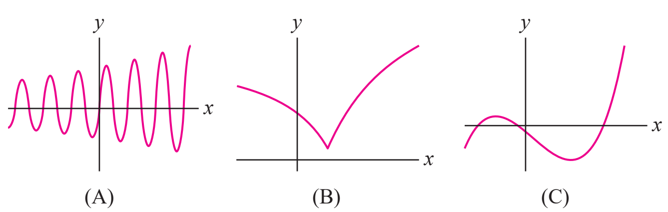


FIGURA 17

50. ¿Qué curva, de las de la f gura 18, es la gráf ca de $f(x) = \dfrac{2x^4-1}{1+x^4}$? Razone su respuesta basándose en las asíntotas horizontales.

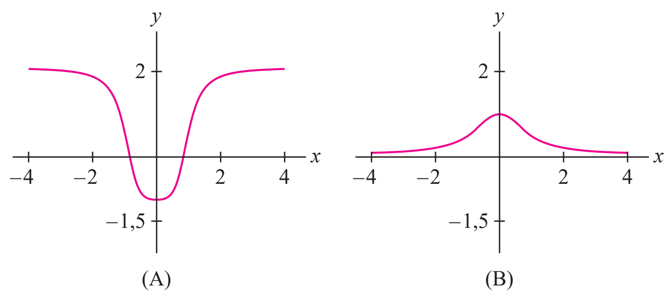


FIGURA 18

51. Relacione las gráf cas de la f gura 19 con las dos funciones $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$ e $y = \dfrac{3x^2}{x^2-1}$. Justif que su respuesta.

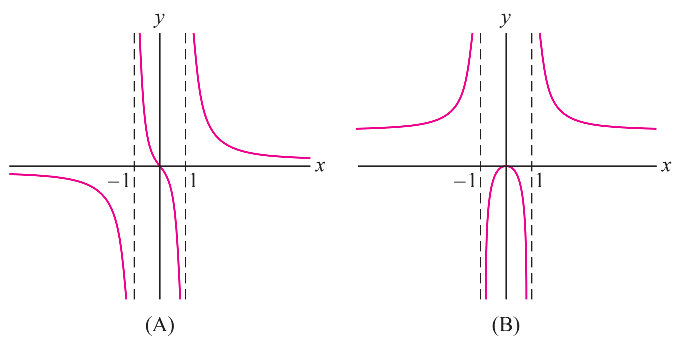


FIGURA 19

52. Relacione las funciones con sus gráf cas en la f gura 20.

(a) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ **(b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

(c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **(d)** $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

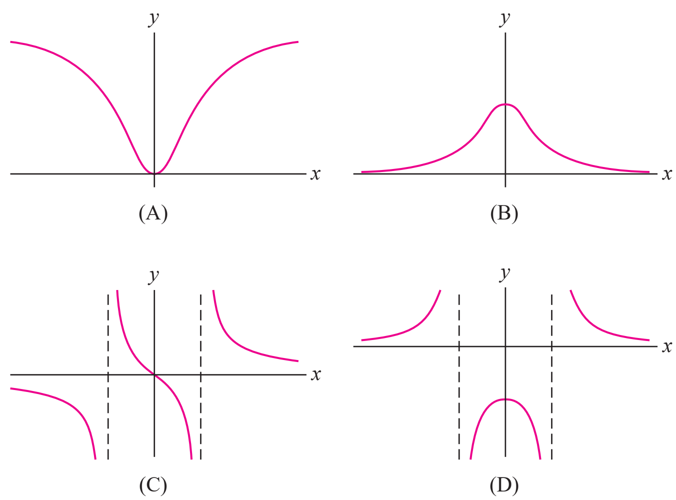


FIGURA 20

En los problemas 53-70, dibuje la gráf ca de la función. Indique los puntos de transición y las asíntotas.

53. $y = \frac{1}{3x - 1}$

54. $y = \frac{x-2}{x-3}$

55. $y = \frac{x+3}{x-2}$

56. $y = x + \frac{1}{x}$

57. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

58. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

59. $y = \frac{1}{x(x-2)}$

60. $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

61. $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$

62. $y = \frac{x^3 + 1}{x}$

63. $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}$

64. $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$

65. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$

66. $y = \frac{4}{x^2 - 9}$

67. $y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

68. $y = \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}$

69. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

70. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Problemas avanzados

*En los problemas 71-75, se estudian funciones cuyas gráf cas tienden a una recta que no es horizontal, cuando $x \to \pm\infty$. Una recta $y = ax + b$ se denomina **asíntota oblicua** si:*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

o

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

71. Sea $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ (f gura 21). Compruebe las siguientes af rmaciones:

(a) $f(0)$ es un máximo local y $f(2)$ es un mínimo local.

(b) f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.

(c) $\lim_{x\to1-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to1+} f(x) = +\infty$.

(d) $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$.

(e) La asíntota oblicua se encuentra por encima de la gráf ca de $f(x)$ para $x < 1$ y por debajo de la gráf ca para $x > 1$.

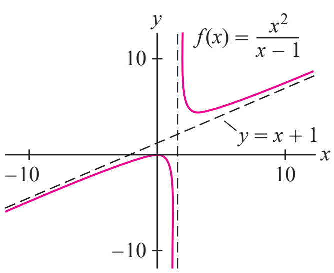


FIGURA 21

72. Si $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde P y Q son polinomios de grados $m + 1$ y m, entonces, efectuando la división de polinomios, se puede escribir:

$$f(x) = (ax + b) + P_1(x)/Q(x)$$

donde P_1 es un polinomio de grado $< m$. Pruebe que $y = ax + b$ es la asíntota oblicua de $f(x)$. Use este procedimiento para determinar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

(a) $y = \frac{x^2}{x+2}$ **(b)** $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + x + 1}$

73. Dibuje la gráf ca de:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Halle la asíntota oblicua siguiendo el procedimiento del problema anterior.

74. Pruebe que $y = 3x$ es una asíntota oblicua de $f(x) = 3x + x^{-2}$. Determine si $f(x)$ tiende a la asíntota oblicua por encima o por debajo, y realice un esbozo de la gráf ca.

75. Dibuje la gráf ca de $f(x) = \frac{1 - x^2}{2 - x}$.

76. Suponga que $f'(x)$ y $f''(x)$ existen para todo x, y sea c un punto crítico de $f(x)$. Pruebe que $f(x)$ no puede realizar la transición de ++ a −+ en $x = c$. *Indicación:* aplique el TVM a $f'(x)$.

77. Suponga que $f''(x)$ existe y que es $f''(x) > 0$ para todo x. Pruebe que $f(x)$ no puede ser negativa para todo x. *Indicación:* pruebe que $f'(b) \neq 0$ para algún b y use el resultado del problema 56 en la sección 4.4.

4.6 Optimización aplicada

Los problemas de optimización surgen en una gran variedad de disciplinas como la física, la ingeniería, la economía y la biología. Por ejemplo, los ornitólogos han descubierto que las aves migratorias saben resolver un problema de optimización: vuelan a una velocidad v que maximiza la distancia que pueden recorrer sin detenerse, para un valor dado de la energía que almacenan en forma de grasa corporal (f gura 1).

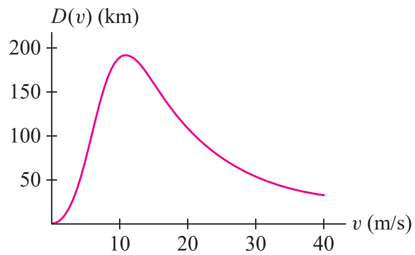


FIGURA 1 Los científ cos usan principios de f siología y aerodinámica para obtener una fórmula plausible para la distancia $D(v)$ recorrida por las aves migratorias en función de su velocidad v. La velocidad óptima corresponde al punto máximo de la gráf ca (vea el problema 56).

En muchos problemas de optimización, el primer paso es determinar la **función objetivo**. Se trata de la función cuyo máximo o mínimo se quiere determinar. Una vez que esta función se haya determinado, se pueden aplicar las técnicas que se han desarrollado en este capítulo. Los primeros ejemplos se ocupan de la optimización en un intervalo cerrado $[a, b]$. Recuerde los pasos para encontrar extremos que se explicaron en la sección 4.2:

(i) Halle los puntos críticos de $f(x)$ en $[a, b]$.
(ii) Evalúe $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, a y b.
(iii) El mayor y el menor de esos valores son los valores extremos de $f(x)$ en $[a, b]$.

■ **EJEMPLO 1** Se dobla un trozo de alambre de longitud L dándole forma de rectángulo (f gura 2). ¿Qué dimensiones proporcionan el rectángulo de área máxima?

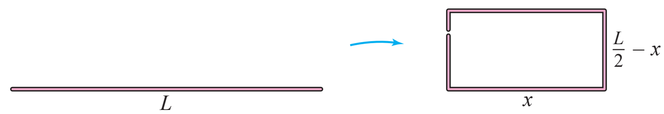


FIGURA 2

Una igualdad que relaciona dos o más variables en un problema de optimización se llama "ecuación de restricción". En el ejemplo 1, la ecuación de restricción es:

$$2x + 2y = L$$

Solución Si los lados del rectángulo miden x e y, entonces el área es $A = xy$. Puesto que A depende de dos variables x e y, para hallar el máximo se debe eliminar una de estas variables. Esto puede hacerse porque las variables están relacionadas: el perímetro del rectángulo es $L = 2x + 2y$, por lo que $y = \frac{1}{2}L - x$. Así, se puede reescribir el área como una función de x para obtener la función objetivo:

$$A(x) = x\left(\frac{1}{2}L - x\right) = \frac{1}{2}Lx - x^2$$

¿Sobre qué intervalo se está optimizando? Como los lados del rectángulo no pueden tener longitud negativa, hay que imponer $x \geq 0$ y $\frac{1}{2}L - x \geq 0$. Por tanto, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}L$. El problema se reduce, entonces, a maximizar $A(x)$ sobre el intervalo cerrado $[0, \frac{1}{2}L]$.

Resolviendo $A'(x) = \frac{1}{2}L - 2x = 0$ se obtiene el punto crítico $x = \frac{1}{4}L$ y se procede a comparar:

$$\begin{aligned} &\text{Extremos del intervalo:} && A(0) = 0 \\ & && A\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}L\right) = 0 \\ &\text{Punto crítico:} && A\left(\frac{1}{4}L\right) = \left(\frac{1}{4}L\right)\left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}L\right) = \frac{1}{16}L^2 \end{aligned}$$

El área mayor se consigue con $x = \frac{1}{4}L$ y, en tal caso, $y = \frac{1}{2}L - \frac{1}{4}L = \frac{1}{4}L$. El rectángulo de área máxima es el cuadrado de lados $x = y = \frac{1}{4}L$. ■

■ **EJEMPLO 2 Minimizar el tiempo de viaje** Se quiere construir una carretera que una un rancho a una autovía, de tal manera que los conductores puedan llegar a la ciudad en el menor tiempo posible (f gura 3). ¿Cómo se debe construir el camino, si la velocidad límite en la carretera es de 60 km/h y en la autovía es de 110 km/h? La distancia perpendicular desde el rancho hasta la autovía es de 30 km y la ciudad se encuentra a 50 km en línea recta por la autovía desde ese punto.

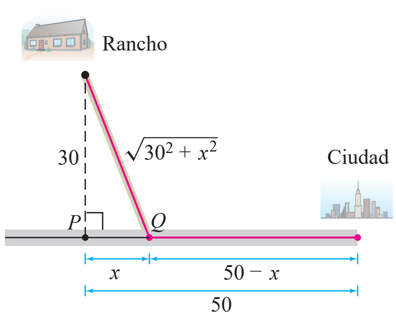


FIGURA 3

Solución Este problema es más complicado que el anterior, por lo que se analizará en tres etapas, que también sirven para resolver otros problemas de optimización.

Etapa 1. **Elija las variables**

Se necesita determinar el punto Q en que la carretera se unirá a la autovía. Sea x la distancia de Q al punto P en que la perpendicular se une a la autovía.

Etapa 2. **Halle la función objetivo y el intervalo**

La función objetivo es el tiempo de viaje $T(x)$, como función de x. A f n de hallar una fórmula para $T(x)$, recuerde que una distancia que se recorre a velocidad constante v es $d = vt$, y que el *tiempo* necesario para recorrer la distancia d es $t = d/v$. La longitud de la carretera es $\sqrt{30^2 + x^2}$, según el teorema de Pitágoras, por lo que a velocidad $v = 60$ km/h se tarda:

$$\frac{\sqrt{30^2 + x^2}}{60} \text{ horas para viajar desde el rancho hasta } Q$$

El tramo de la autovía desde Q hasta la ciudad tiene longitud $50 - x$. A una velocidad de $v = 110$ km/h, se tarda:

$$\frac{50 - x}{110} \text{ horas para viajar desde } Q \text{ hasta la ciudad}$$

El número total de horas del viaje será, por tanto:

$$T(x) = \frac{\sqrt{30^2 + x^2}}{60} + \frac{50 - x}{110}$$

El intervalo es $0 \le x \le 50$, pues la carretera se une a la autopista en algún lugar entre P y la ciudad. Así, se debe minimizar $T(x)$ en $[0, 50]$ (f gura 4).

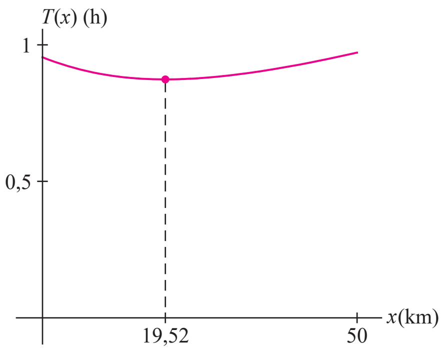


FIGURA 4 Gráf ca del tiempo de viaje como función de x.

Etapa 3. **Optimice**

Obtenga los puntos críticos:

$$T'(x) = \frac{x}{60\sqrt{30^2 + x^2}} - \frac{1}{110} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 110x = 60\sqrt{30^2 + x^2} \;\Rightarrow\; 11x = 6\sqrt{30^2 + x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 121x^2 = 36(30^2 + x^2) \;\Rightarrow\; 85x^2 = 32\,400 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{32\,400/85} \approx 19{,}52$$

Para hallar el valor mínimo de $T(x)$, se comparan los valores de $T(x)$ en el punto crítico y en los extremos del intervalo $[0, 50]$:

$$T(0) \approx 0{,}95 \text{ h} \qquad T(19{,}52) \approx 0{,}87 \text{ h} \qquad T(50) \approx 0{,}97 \text{ h}$$

La conclusión es que el tiempo de viaje se minimiza si la carretera se une a la autovía a una distancia $x \approx 19{,}52$ km de P. ■

■ **EJEMPLO 3 Precio óptimo** Todos los apartamentos de un edif cio de 30 viviendas se encuentran alquilados cuando el alquiler mensual se establece en $r = 1000$ \$/mes. Según un estudio, un apartamento queda vacante con cada incremento de 40 \$ en el alquiler mensual. Suponga que cada apartamento que se encuentra ocupado cuesta 120 \$/mes en mantenimiento. ¿Para qué alquiler r se maximiza el benef cio mensual?

Solución

Etapa 1. **Elija las variables**

El objetivo es maximizar el benef cio mensual $P(r)$ como función del alquiler r. Dependerá del número $N(r)$ de apartamentos ocupados.

Etapa 2. **Halle la función objetivo y el intervalo**

Como un apartamento queda vacante con cada incremento de 40 \$ al alquiler de 1000 \$, se tiene que $(r - 1000)/40$ apartamentos quedarían vacantes cuando $r > 1000$. Así

$$N(r) = 30 - \frac{1}{40}(r - 1000) = 55 - \frac{1}{40}r$$

El benef cio total mensual es igual al número de apartamentos ocupados multiplicado por el benef cio que proporciona cada uno de ellos, esto es, $r - 120$ (pues cada unidad cuesta 120 \$ en concepto de mantenimiento). Luego:

$$P(r) = N(r)(r - 120) = \left(55 - \frac{1}{40}r\right)(r - 120) = -6600 + 58r - \frac{1}{40}r^2$$

¿Qué intervalo de valores de r se debe considerar? No hay razón para considerar un alquiler por debajo de $r = 1000$, porque todos los apartamentos se ocupan si $r = 1000$. Por otra parte, $N(r) = 0$ si $r = 40 \cdot 55 = 2200$. Por tanto, cero apartamentos quedarían ocupados si $r = 2200$ y tiene sentido considerar $1000 \le r \le 2200$.

Etapa 3. **Optimice**

Halle los puntos críticos:

$$P'(r) = 58 - \frac{1}{20}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1160$$

y compare los valores en el punto crítico y en los extremos del intervalo:

$$P(1000) = 26\ 400 \qquad P(1160) = 27\ 040 \qquad P(2200) = 0$$

La conclusión es que el benef cio se maximiza cuando se establece el alquiler en $r = 1160$ \$. En tal caso, quedan vacantes cuatro unidades. ■

Intervalos abiertos en vez de cerrados

Cuando se debe optimizar sobre un intervalo abierto, no está garantizado que ese máximo o mínimo exista (a diferencia del caso de los intervalos cerrados). Sin embargo, si existe un máximo o mínimo, éste debe darse en un punto crítico (pues también es un máximo o mínimo local). A menudo, se puede demostrar que tal máximo o mínimo existe examinando $f(x)$ cerca de los extremos del intervalo abierto. Si $f(x)$ tiende a inf nito en los extremos del intervalo (como en la f gura 6), entonces hay un mínimo en un punto crítico del intervalo.

■ **EJEMPLO 4** Diseñe una lata cilíndrica de 900 cm^3 de tal manera que se utilice la menor cantidad de metal (f gura 5). En otras palabras, minimice la superf cie de la lata (incluyendo la parte superior e inferior).

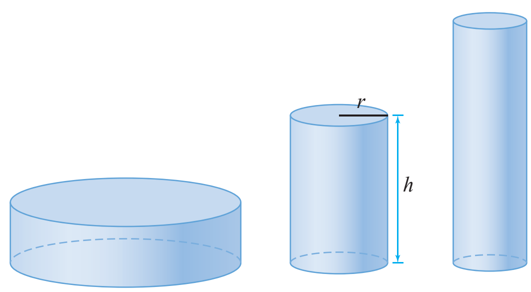


FIGURA 5 Cilindros con el mismo volumen pero diferente área.

Solución

Etapa 1. **Elija las variables**

Se debe especif car el radio de la lata y su altura. Así, sea r el radio, h la altura y A el área de la lata.

Etapa 2. **Halle la función objetivo y el intervalo**

Calcule A como función de r y de h:

$$A = \underbrace{\pi r^2}_{\text{Superior}} + \underbrace{\pi r^2}_{\text{Inferior}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Lado}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

El volumen de la lata es $V = \pi r^2 h$. Como $V = 900\ \text{cm}^3$, se tiene la siguiente ecuación de restricción: $\pi r^2 h = 900$. Por tanto, $h = (900/\pi) r^{-2}$ y

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{900}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{1800}{r}$$

El radio r sólo puede ser positivo y, por tanto, se minimiza $A(r)$ en $(0, +\infty)$.

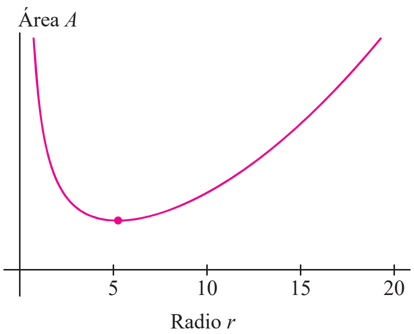


FIGURA 6 El área aumenta cuando r tiende a 0 o a $+\infty$. Existe el valor mínimo.

***Etapa 3.* Optimice la función**

Observe que $A(r)$ tiende a infinito cuando r tiende a los extremos de $(0, +\infty)$:

- $A(r) \to +\infty$ cuando $r \to +\infty$ (debido al término r^2)
- $A(r) \to +\infty$ cuando $r \to 0$ (debido al término $1/r$)

Por tanto $A(r)$ debe ser mínima en un punto crítico de $(0, +\infty)$ [figura 6]. Llegados a este punto, se soluciona de la manera habitual:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{1800}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{450}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{450}{\pi}\right)^{1/3} \approx 5{,}23 \text{ cm}$$

También se necesita calcular la altura:

$$h = \frac{900}{\pi r^2} = 2\left(\frac{450}{\pi}\right) r^{-2} = 2\left(\frac{450}{\pi}\right)\left(\frac{450}{\pi}\right)^{-2/3} = 2\left(\frac{450}{\pi}\right)^{1/3} \approx 10{,}46 \text{ cm}$$

Observe que las dimensiones óptimas cumplen $h = 2r$. Dicho de otro modo, la lata óptima es tan alta como ancha. ■

■ **EJEMPLO 5** **Un problema de optimización sin solución** ¿Puede diseñarse un cilindro de 900 cm^3 de volumen, con la mayor área posible?

Solución La respuesta es negativa. En el ejemplo anterior se vio que un cilindro de volumen 900 y radio r tiene por área:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1800}{r}$$

Esta función no alcanza ningún valor máximo porque tiende a infinito cuando $r \to 0$ o $r \to +\infty$ (figura 6). Esto significa que un cilindro de volumen fijado puede tener un área muy grande si es muy ancho y bajo (r grande), o muy alto y delgado (r pequeño). ■

*El principio de mínima distancia se llama también **principio de Herón**, debido al matemático griego Herón de Alejandría (aprox. 100 d.C.). Vea el problema 69 para una demostración elemental que no utiliza cálculo infinitesimal y que se atribuye a Herón. En el problema 44 se desarrolla la ley de Snell, una ley de óptica más general basada en el principio de tiempo mínimo.*

El **principio de mínima distancia** establece que un rayo de luz que se refleja en un espejo sigue la trayectoria más corta. De forma más precisa, un rayo de luz que viaja de A a B, como en la figura 7, se refleja en el punto P para el que la trayectoria APB tiene longitud mínima. En el siguiente ejemplo se probará que este mínimo acontece cuando *el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión*, es decir, $\theta_1 = \theta_2$.

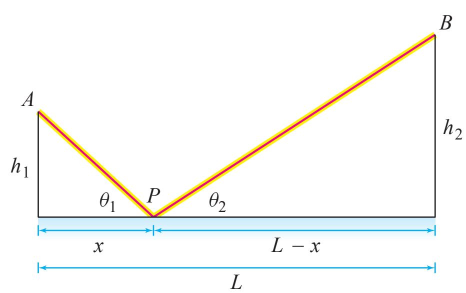


FIGURA 7 Reflexión de un rayo de luz sobre un espejo.

■ **EJEMPLO 6** Pruebe que si P es el punto para el que la trayectoria APB de la figura 7 tiene longitud mínima, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud de APB es:

$$f(x) = AP + PB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}$$

con x, h_1 y h_2 tal y como se muestra en la figura. La función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a $\pm\infty$ (es decir, cuando P se desplaza arbitrariamente lejos hacia la derecha o

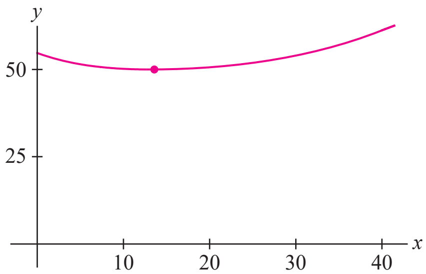


FIGURA 8 Gráfica de la longitud de la trayectoria para $h_1 = 10$, $h_2 = 20$, $L = 40$.

hacia la izquierda), por lo que el mínimo de $f(x)$ se sitúa en un punto crítico x tal que (vea la figura 8):

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}} = 0 \qquad \boxed{1}$$

Es necesario aislar x porque el objetivo no es determinar el punto crítico, sino probar que $\theta_1 = \theta_2$. Para ello, reescriba la ec. (1) como:

$$\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}}_{\cos\theta_1} = \underbrace{\frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}}}_{\cos\theta_2}$$

Según la figura 7, esta ecuación establece que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ y, como θ_1 y θ_2 se encuentran entre 0 y π, se obtiene que $\theta_1 = \theta_2$, tal y como se quería demostrar. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL Todos los ejemplos de esta sección han conducido a problemas de optimización donde el máximo o el mínimo se alcanza en un punto crítico. A menudo, el punto crítico suele representar un punto de equilibrio entre "factores contrapuestos." En el ejemplo 3, se ha maximizado el beneficio, hallando el equilibrio entre aumentar el alquiler y mantener los apartamentos ocupados. En el ejemplo 4, la solución minimiza la superficie hallando un punto de equilibrio entre altura y anchura. Sin embargo, los problemas cotidianos suelen tener su solución en los puntos inicial o final y no en los puntos críticos. Por ejemplo, para minimizar el tiempo en una carrera de 10 metros, hay que correr tan rápido como se pueda: la solución no es un punto crítico sino un extremo del intervalo (la mayor velocidad posible).

4.6 RESUMEN

- Se suelen seguir tres pasos para resolver un problema práctico de optimización:

Paso 1. Elija las variables

Determine qué magnitudes son relevantes, dibujando un diagrama si se requiere, y asigne nombres a las variables apropiadas.

Paso 2. Encuentre la función objetivo y el intervalo

Formule el problema en términos de optimización de una función f en un intervalo. Si la función depende de más de una variable, use una *ecuación de restricción* para expresar f como una función de una variable.

Paso 3. Optimice la función

- Si el intervalo es abierto, puede ocurrir que f no tenga máximo ni mínimo. Si los tiene, se hallan necesariamente en puntos críticos del interior del intervalo. Para determinar si existe un máximo o un mínimo, debe estudiarse el comportamiento de f cuando x se aproxima al borde del intervalo.

4.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Se desea hallar un triángulo rectángulo de perímetro 10 cuya área sea la mayor posible. ¿Cuál es la ecuación de restricción que relaciona la base b y la altura h del triángulo?

2. Describa una manera de probar que una función continua en un intervalo abierto (a, b) tiene un valor mínimo.

3. ¿Existe un rectángulo de área 100 y perímetro máximo? Justifique su respuesta.

Problemas

1. Halle las dimensiones x e y del rectángulo de área máxima que se pueda construir con 3 metros de alambre.

(a) ¿Cuál es la ecuación de restricción que relaciona x e y?

(b) Halle una expresión del área que sólo dependa de x.

(c) ¿Cuál es el intervalo de optimización? ¿Es abierto o cerrado?

(d) Resuelva el problema de optimización.

2. Un hilo de alambre de 12 m se corta en dos trozos y con cada uno de ellos se forma un cuadrado. ¿Cómo debe hacerse para que sea mínima la suma de las áreas de los dos cuadrados?

(a) Exprese la suma de las áreas de los cuadrados en términos de las longitudes x e y de los dos trozos.

(b) ¿Cuál es la ecuación de restricción que relaciona x e y?

(c) ¿Cuál es el intervalo de optimización? ¿Es abierto o cerrado?

(d) Resuelva el problema de optimización.

3. Un hilo de alambre de 12 m se corta en dos trozos y con los trozos se forma un cuadrado y un círculo. ¿Cómo debe hacerse para que sea mínima la suma de las dos áreas?

4. Halle un número positivo x tal que la suma de x y su recíproco sea la menor posible. ¿Requiere este problema optimizar en un intervalo abierto o cerrado?

5. Un tubo f exible de 4 m se dobla en forma de L. ¿Dónde debe hacerse el pliegue para que la distancia entre los extremos sea mínima?

6. Halle las dimensiones de una caja de base cuadrada con:

(a) Volumen 12 y área mínima.

(b) Área 20 y volumen máximo.

7. Un ranchero piensa usar 600 m de valla para rodear un corral de forma rectangular con un semicírculo en la parte superior, cuyo diámetro coincide con un lado del rectángulo (f gura 9). Halle las dimensiones del corral de área máxima.

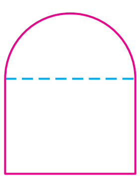


FIGURA 9

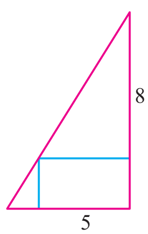


FIGURA 10

8. Halle el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de lados 5 y 8 como en la f gura 10. Los lados del rectángulo son paralelos a los lados del triángulo.

9. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio $r = 4$ (f gura 11).

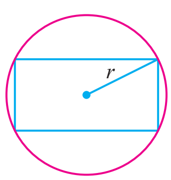


FIGURA 11

10. Halle las dimensiones x e y del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio r que maximice la cantidad xy^2.

11. Halle el punto sobre la recta $y = x$ más cercano al punto $(1, 0)$. *Indicación:* es equivalente, y más fácil, minimizar el *cuadrado* de la distancia.

12. Halle el punto P sobre la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(3, 0)$ (f gura 12).

13. Halle las coordenadas del punto sobre la gráf ca de $y = x + 2x^{-1}$ más cercano al origen en la región $x > 0$ (f gura 13).

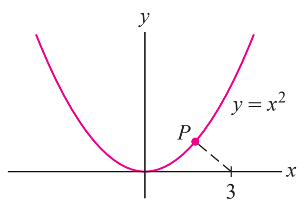


FIGURA 12

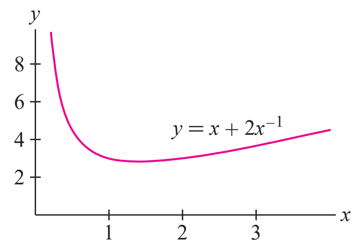


FIGURA 13

14. Problema de Tartaglia (1500-1557) De entre todos los números positivos a y b cuya suma es 8, halle aquellos para los cuales el producto de los dos números y su diferencia sea máxima.

15. Halle el ángulo θ que maximiza el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud ℓ (f gura 14).

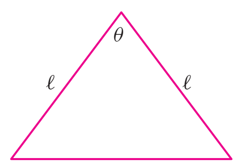


FIGURA 14

16. El volumen de un cono circular recto (f gura 15) es $V = \frac{\pi}{3}r^2h$ y su área es $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Halle las dimensiones del cono con área 1 y máximo volumen.

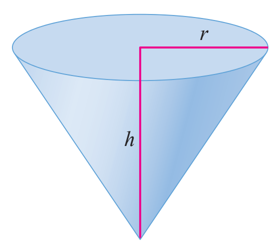


FIGURA 15

17. Halle el área del mayor triángulo isósceles que se puede inscribir en una circunferencia de radio r.

18. Halle el radio y la altura de una lata cilíndrica de área total A cuyo volumen sea lo mayor posible. ¿Existe un cilindro de área A y volumen total mínimo?

19. Un póster de 6000 cm^2 de área debe tener unos márgenes en blanco de 10 cm en las partes superior e inferior, y de 6 cm a los lados. Halle las dimensiones que maximizan el área impresa.

20. Según la normativa postal, una caja de cartón se clasif ca como “de gran tamaño” si la suma de su altura y del perímetro de su base sobrepasa las 108 pulgadas. Halle las dimensiones de una caja de cartón con base cuadrada que no sea de gran tamaño y que tenga volumen máximo.

21. Problema del barril de vino de Kepler En su obra *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Nueva geometría de los barriles de vino), publicada en 1615, el astrónomo Johannes Kepler enunció y resolvió el siguiente problema: halle las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio R. *Indicación:* pruebe que un cilindro inscrito tiene volumen igual a $2\pi x(R^2 - x^2)$, donde x es la mitad de la altura del cilindro.

22. Halle el ángulo θ que maximiza el área del trapezoide con una base de longitud 4 y lados de longitud 2, como se muestra en la f gura 16.

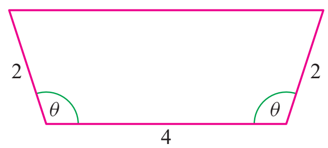


FIGURA 16

23. Un arquitecto paisajista quiere limitar un jardín rectangular de área 1000 m^2 por un lado mediante una pared de ladrillo que cuesta 90 \$/m y por los otros tres lados mediante una valla metálica que cuesta 30 \$/m. ¿Qué dimensiones minimizan el coste total?

24. La cantidad de luz que llega hasta un punto situado a una distancia r de una fuente de luz A de intensidad I_A es I_A/r^2. Suponga que una segunda fuente de luz B de intensidad $I_B = 4I_A$ esté situada a 10 metros de A. Halle el punto del segmento comprendido entre A y B donde la cantidad total de luz sea mínima.

25. Halle el área máxima del rectángulo inscrito en la región limitada por la gráf ca de $y = \dfrac{4 - x}{2 + x}$ y los ejes (f gura 17).

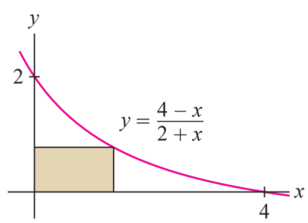


FIGURA 17

26. Halle el área máxima del triángulo formado por los ejes y la recta tangente a la gráf ca de $y = (x + 1)^{-2}$ con $x > 0$.

27. Halle el área máxima de un rectángulo circunscrito en un rectángulo de lados L y H. *Indicación:* Exprese el área en términos del ángulo θ (f gura 18).

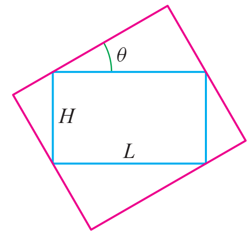


FIGURA 18

28. Se le encarga a un contratista la construcción de una escalera por la ladera de una colina que tiene la forma de la gráf ca $y = x^2(120 - x)/6400$ para $0 \le x \le 80$, con x medida en metros (f gura 19). ¿Cuál es la máxima elevación vertical de la escalera, si cada escalón tiene una longitud horizontal de un tercio de metro?

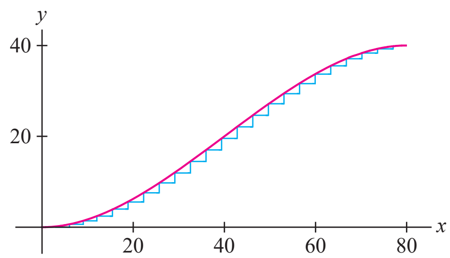


FIGURA 19

29. Halle la ecuación de la recta que pasa por $P = (4, 12)$ tal que el triángulo limitado por esta recta y los ejes, en el primer cuadrante, sea de área mínima.

30. Sea $P = (a, b)$ un punto del primer cuadrante. Halle la pendiente de la recta que pasa por P tal que el triángulo limitado por esta recta y y los ejes, en el primer cuadrante, sea de área mínima. A continuación, pruebe que P es el punto medio de la hipotenusa de ese triángulo.

31. Problema de Arquímedes Un casquete esférico (f gura 20) de radio r y altura h tiene volumen $V = \pi h^2(r - \frac{1}{3}h)$ y área $S = 2\pi rh$. Demuestre que la semiesfera encierra el mayor volumen entre todos los casquetes esféricos de superf cie f jada S.

32. Halle el triángulo isósceles de menor área (f gura 21) que circunscribe una circunferencia de radio 1 (de la obra de Thomas Simpson *The Doctrine and Application of Fluxions*, un libro de cálculo inf nitesimal que se publicó en 1750).

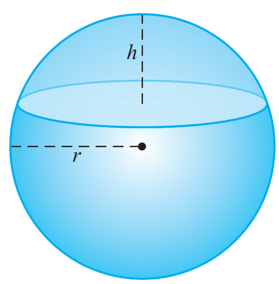


FIGURA 20

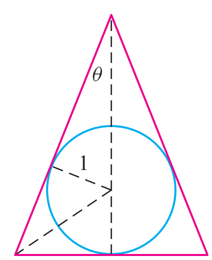


FIGURA 21

33. Una caja de 72 m^3 de volumen, con base cuadrada y sin tapa se construye a partir de dos materiales diferentes. El coste de la base es de 40 \$/m^2 y el coste de los lados es de 30 \$/m^2. Halle las dimensiones de la caja que minimizan el coste total.

34. Halle las dimensiones de un cilindro de volumen 1 m^3 de coste mínimo, si la parte superior e inferior están realizadas con un material que cuesta dos veces más que el material utilizado para el lado.

35. Se quiere diseñar un almacén industrial rectangular formado por tres recintos del mismo tamaño separados de la manera indicada en la figura 22. Los costes del material de las paredes ascienden a 500 \$ por metro lineal y suponga que su empresa destina 2 400 000 \$ al proyecto.

(a) ¿Qué dimensiones maximizan el área total del almacén?

(b) ¿Cuál es el área de cada recinto en ese caso?

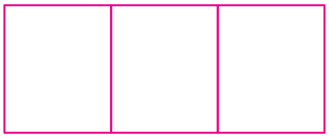


FIGURA 22

36. Suponga en el ejercicio anterior, que el almacén está formado por n recintos separados del mismo tamaño. Halle una fórmula en función de n para la máxima área posible del almacén.

37. Según un modelo desarrollado por los economistas E. Heady y J. Pesek, si un fertilizante que contiene N libras de nitrógeno y P libras de fosfato se utiliza en una hectárea de tierras de cultivo, entonces el rendimiento del maíz (en toneladas por hectárea) será:

$$Y = 7{,}5 + 0{,}6N + 0{,}7P - 0{,}001N^2 - 0{,}002P^2 + 0{,}001NP$$

Un agricultor tiene intención de gastar 30 \$ por hectárea en fertilizante. Si el nitrógeno cuesta 25 céntimos/libra y el fosfato cuesta 20 céntimos/libra, ¿qué combinación de N y L produce el mayor rendimiento en el maíz?

38. Los experimentos muestran que las cantidades x de maíz e y de habas de soja necesarias para conseguir un cerdo de peso Q, cumplen $Q = 0{,}5x^{1/2}y^{1/4}$. Las unidades de x, y y Q es el cwt, una unidad que se emplea en agricultura igual a 100 libras. Halle los valores de x y de y que minimizan el coste de un cerdo de peso $Q = 2{,}5$ cwt si el maíz cuesta 3 \$/cwt y la soja cuesta 7 \$/cwt.

39. Los 100 apartamentos de un edificio se alquilan cuando el alquiler se establece en $r = 900$ \$/mes. Suponga que un apartamento queda vacante por cada 10 \$ de incremento en el alquiler y que cada apartamento tiene un coste de mantenimiento de 80 \$/mes. ¿Cuál es el alquiler r que maximiza el beneficio mensual?

40. Una cosecha de 8 mil millones de fanegas de maíz se vende a un precio de 2,40 \$/bushel. Un vendedor utiliza la siguiente regla empírica: si la cosecha se reduce en un porcentaje x, entonces el precio aumenta en $10x$ centavos. ¿Qué resultados de la cosecha dan lugar al máximo beneficio y cuál es el precio por bushel en tal situación? *Indicación:* El beneficio es igual al precio por el tamaño de la cosecha.

41. La producción mensual de una fábrica de bombillas española viene dada por $P = 2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 1,7 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total $L + K$?

42. La figura 23 muestra un patio rectangular de 100 metros × 200 metros. Se tiene que instalar una tubería desde A hasta el punto P del lado BC y, desde ahí, hasta C. El coste de instalar la tubería a lo largo de un lado del patio es de 45 \$/m y el coste a través del patio es de 80 \$/m (puesto que debe ser subterránea).

(a) Sea $f(x)$ el coste total, donde x es la distancia de P a B. Determine $f(x)$ y observe que f es discontinua en $x = 0$ (cuando $x = 0$, el coste de toda la tubería es de 45 \$/m).

(b) ¿Cuál es la manera más económica de instalar la tubería? ¿Qué ocurriría si el precio para los lados fuese de 65 \$/m?

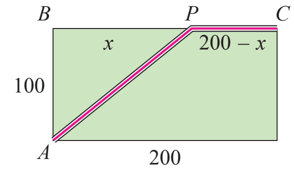


FIGURA 23

43. Brandon se encuentra en una orilla de un río que mide 50 metros de ancho y quiere llegar a un punto que se encuentra a 200 metros río abajo, en la orilla opuesta, tan rápido como sea posible, nadando en diagonal por el río y después corriendo el resto del trayecto. Halle la mejor ruta si Brandon puede nadar a 1,5 m/s y correr a 4 m/s.

44. Ley de Snell Cuando un rayo de luz viaja de un punto A, situado por encima de la superficie de una piscina, a un punto B por debajo del agua (figura 24), lo hace siguiendo una trayectoria que emplea el *menor tiempo*. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua (se sabe que $v_1 > v_2$). Demuestre la ley de Snell de la refracción:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}$$

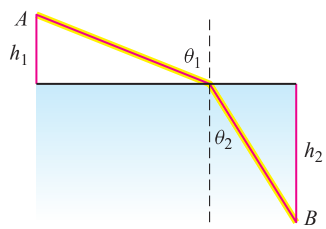


FIGURA 24

En los problemas 45-47, se construye una caja (sin tapa) a partir de una cartulina de lados A y B cortando cuadrados de lado h en las esquinas y doblando los lados (figura 26).

45. Halle el valor de h que minimice el volumen de la caja si $A = 15$ y $B = 24$. ¿Cuáles son las dimensiones de esta caja?

46. Ramificación vascular Una arteria pequeña de radio r se ramifica con un ángulo θ desde una arteria mayor de radio R para transportar sangre desde un punto A a otro punto B. Según la ley de Poiseuille, la resistencia total al flujo sanguíneo es proporcional a

$$T = \left(\frac{a - b\cot\theta}{R^4} + \frac{b\csc\theta}{r^4}\right)$$

donde a y b se indican en la figura 25. Muestre que la resistencia total se minimiza cuando $\cos\theta = (r/R)^4$.

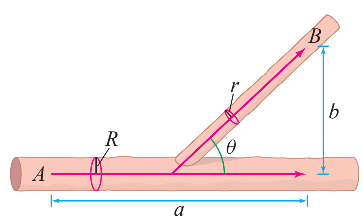


FIGURA 25

47. ¿Para qué valores de A y B se maximiza el volumen de la caja si $h = 10$ cm y $AB = 900$ cm?

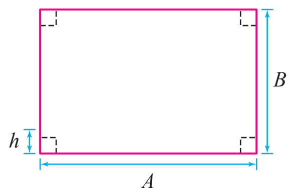


FIGURA 26

48. Dados n números $x_1, \ldots, x_n$, halle el valor de x que minimiza la siguiente suma de cuadrados:

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

Resuelva, en primer lugar, para $n = 2, 3$, y después inténtelo para cualquier n.

49. Se instala un rótulo publicitario de altura b en la pared de un edif cio con el borde inferior situado a una distancia h del suelo, tal y como se ilustra en la f gura 27. ¿A qué distancia x de la pared debe situarse un observador para que el ángulo de observación θ sea máximo?

50. Resuelva el problema 49 de nuevo pero aplicando geometría plana en lugar de cálculo inf nitesimal. Existe una única circunferencia que pasa por los puntos B y C que es tangente a la calle. Sea R el punto de tangencia. Observe que los dos ángulos que se han etiquetado como ψ en la f gura 27 son iguales, ya que subtienden arcos iguales en el círculo.

(a) Pruebe que el máximo valor de θ es $\theta = \psi$. *Indicación:* Muestre que $\psi = \theta + \angle PBA$ donde A es la intersección de la circunferencia con PC.

(b) Demuestre que esto concuerda con la respuesta al problema 49.

(c) Pruebe que $\angle QRB = \angle RCQ$ para el ángulo ψ.

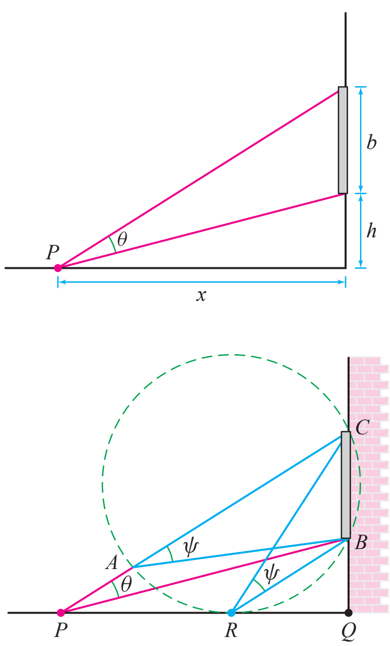


FIGURA 27

51. Calendario óptimo de suministro Una gasolinera vende Q galones de gasolina al año, que se le suministran N veces al año en cantidades iguales de Q/N galones. El coste de cada entrega es de d dólares y los costes anuales de almacenaje ascienden a sQT, donde T es el tiempo (la fracción de año) que transcurre entre dos suministros y s es una constante. Pruebe que el coste es mínimo si $N = \sqrt{sQ/d}$. (*Indicación:* $T = 1/N$.) Halle el número óptimo de entregas si $Q = 2$ millones de galones, $d = 8000$ \$ y $s = 30$ céntimos/galón-año. Su respuesta debe ser un número entero, así que compare los costes para los dos valores enteros de N más próximos al valor óptimo.

52. El problema de maximizar extremos de Victor Klee Dados 40 metros de una valla recta, su objetivo es la construcción de un recinto rectangular con 80 metros adicionales de valla que abarque la mayor superf cie. Sea $A(x)$ el área del recinto, con x como se indica en la f gura 28.

(a) Halle el valor máximo de $A(x)$.

(b) ¿Qué intervalo de valores de x es relevante en este problema? Halle el máximo valor de $A(x)$ sobre este intervalo.

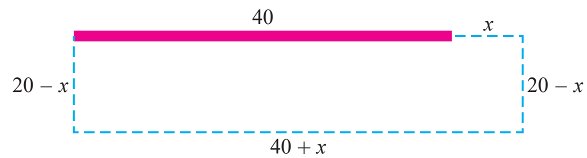


FIGURA 28

53. Sea (a, b) un punto concreto del primer cuadrante y sea $S(d)$ la suma de las distancias de $(d, 0)$ a los puntos $(0, 0)$, (a, b) y $(a, -b)$.

(a) Halle el valor de d para el que $S(d)$ es mínima. La respuesta depende de si $b < \sqrt{3}a$ o $b \geq \sqrt{3}a$. *Indicación:* Pruebe que $d = 0$ cuando $b \geq \sqrt{3}a$.

(b) GU Sea $a = 1$. Represente gráf camente $S(d)$ para $b = 0{,}5$, $\sqrt{3}$, 3 y describa la posición del mínimo.

54. La fuerza F (en Newtons) necesaria para desplazar una caja de masa m kg estirándola con una cuerda (f gura 29) es:

$$F(\theta) = \frac{fmg}{\cos\theta + f \operatorname{sen}\theta}$$

donde θ es el ángulo entre la cuerda y la horizontal, f es el coef ciente de fricción estática y $g = 9{,}8$ m/s^2. Halle el ángulo θ que minimiza la fuerza necesaria F, suponiendo que $f = 0{,}4$. *Indicación:* Halle el valor máximo de $\cos\theta + f \operatorname{sen}\theta$.

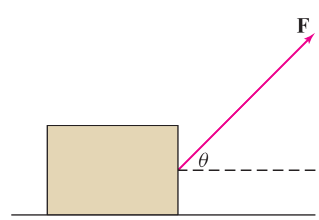


FIGURA 29

55. Continuando con el problema 54, pruebe que para cualquier f la fuerza mínima necesaria es proporcional a $1/\sqrt{1 + f^2}$.

56. Migración de las aves Los ornitólogos consideran que la potencia (en julios por segundo) que consume cierta paloma que vuela a velocidad v m/s se describe de manera satisfactoria mediante la función $P(v) = 17v^{-1} + 10^{-3}v^3$ J/s. Suponga que una paloma puede almacenar 5×10^4 J de energía útil como masa corporal.

(a) Pruebe que a velocidad v, una paloma puede volar una distancia total de $D(v) = (5 \times 10^4)v/P(v)$ si usa toda su energía almacenada.

(b) Halle la velocidad v_p que *minimiza* $P(v)$.

(c) Las aves migratorias han aprendido a volar a la velocidad que maximiza la distancia recorrida en lugar de minimizar la potencia consumida. Pruebe que la velocidad v_d que maximiza $D(v)$ cumple $P'(v_d) = P(v_d)/v_d$. Pruebe que v_d se obtiene gráf camente como la coordenada x de la velocidad del punto en que una recta por el origen es tangente a la gráf ca de $P(v)$ (f gura 30).

(d) Halle v_d y la distancia máxima $D(v_d)$.

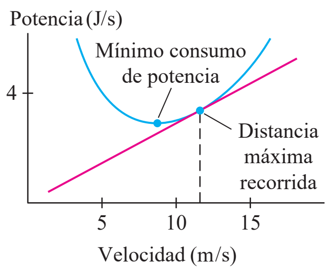


FIGURA 30

57. Se quiere poner un "techo" de lado s en una buhardilla de altura h y amplitud b. Halle la menor longitud s para la que esto es posible si $b = 27$ y $h = 8$ (f gura 31).

58. Vuelva a resolver el problema 57 pero ahora para b y h arbitrarios.

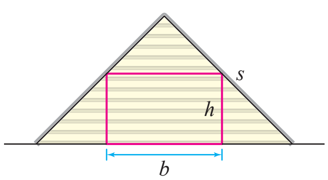


FIGURA 31

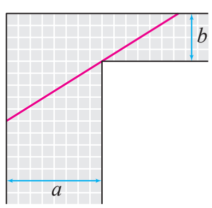


FIGURA 32

59. Halle la longitud máxima de un poste para que pueda pasar horizontalmente por una esquina que forman dos pasillos, de anchuras respectivas $a = 24$ y $b = 3$ (f gura 32).

60. Vuelva a resolver el problema 59 pero ahora para a y b anchuras arbitrarias.

61. Halle la longitud máxima ℓ de un travesaño para que pueda superar una valla de altura h y tocar una pared situada a b pies por detrás de la valla (f gura 33).

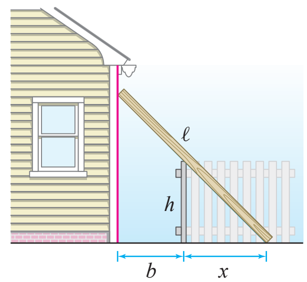


FIGURA 33

62. ¿Para qué valor de h se maximiza el volumen de la caja si $A = B$?

63. Un jugador de baloncesto se encuentra a una distancia de d pies de la canasta. Considere h y α como en la f gura 34. La física enseña que, si el jugador lanza la pelota con un ángulo θ, entonces la velocidad inicial necesaria para encestar viene dada por:

$$v^2 = \frac{16d}{\cos^2\theta(\tan\theta - \tan\alpha)}$$

(a) Explique por qué esta fórmula tiene sentido sólo si $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$. ¿Por qué v tiende a inf nito en los extremos de este intervalo?

(b) GU Considere $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y represente v^2 como función de θ para $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Compruebe que el mínimo se alcanza en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(c) Sea $F(\theta) = \cos^2\theta(\tan\theta - \tan\alpha)$. Explique por qué v se minimiza para θ tal que $F(\theta)$ se maximiza.

(d) Compruebe que $F'(\theta) = \cos(\alpha - 2\theta)\sec\alpha$ (hay que usar la fórmula de adición del coseno) y pruebe que el valor máximo de $F(\theta)$ en $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ se alcanza en $\theta_0 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$.

(e) Dado α, el ángulo óptimo de lanzamiento es θ_0 porque minimiza v^2 y, en consecuencia, minimiza la energía necesaria para realizar el lanzamiento (la energía es proporcional a v^2). Pruebe que la velocidad v_{opt} en el ángulo óptimo θ_0 cumple:

$$v_{opt}^2 = \frac{32d\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} = \frac{32\,d^2}{-h + \sqrt{d^2 + h^2}}$$

(f) GU Demuestre gráf camente que, para un valor f jado de d (por ejemplo, $d = 15$ pies, la distancia de un tiro libre), v_{opt}^2 es una función creciente de h. Use este hecho para explicar por qué los jugadores más altos tienen ventaja y por qué puede ser útil saltar al lanzar la pelota.

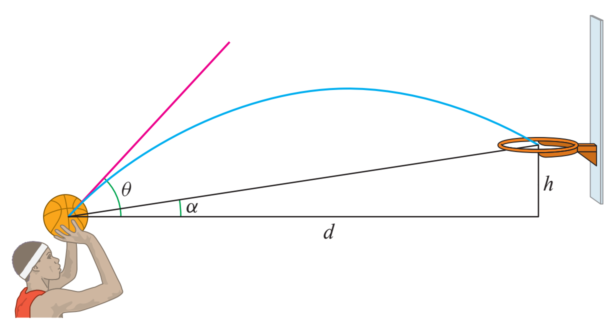


FIGURA 34

64. Se van a unir tres ciudades A, B y C mediante un cable de fibra óptica subterráneo tal como se ilustra en la figura 35(A). Suponga que la ciudad C está situada en la vertical del punto medio de $\overline{AB}$. Halle el punto de enlace P que minimiza la cantidad total de cable necesario.

(a) Demuestre primero que P debe estar situado en la vertical de C. *Indicación:* Use el resultado del ejemplo 6 para mostrar que si la unión se realiza en un punto Q, como se muestra en la figura 35(B), entonces se puede reducir la longitud del cable desplazando Q horizontalmente hasta un punto P situado sobre C.

(b) Escogiendo x como en la figura 35(A), sea $f(x)$ la longitud total del cable usado. Demuestre que $f(x)$ tiene un único punto crítico c. Calcule c y pruebe que $0 \le c \le L$ si y sólo si $D \le 2\sqrt{3}\,L$.

(c) Halle el mínimo de $f(x)$ en $[0, L]$ para los dos casos siguientes: $D = 2$, $L = 4$ y $D = 8$, $L = 2$.

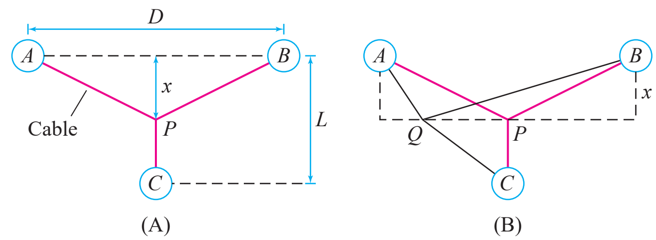


FIGURA 35

Problemas avanzados

65. Tom y Ali conducen por la carretera representada por la gráfica de $f(x)$ en la figura 36. Durante el trayecto, Ali ve una valla publicitaria representada por el segmento $\overline{BC}$ en el eje y. Sea Q el punto de intersección de recta tangente a $y = f(x)$ con el eje y. Pruebe que θ se maximiza en x para la que los ángulos $\angle QPB$ y $\angle QCP$ son iguales. Este resultado generaliza el problema 50 (c) (que corresponde a la situación $f(x) = 0$). *Indicaciones:*

(a) Pruebe que $d\theta/dx$ es igual a:

$$(b-c)\cdot\frac{(x^2+(xf'(x))^2)-(b-(f(x)-xf'(x)))(c-(f(x)-xf'(x)))}{(x^2+(b-f(x))^2)(x^2+(c-f(x))^2)}$$

(b) Pruebe que la coordenada y de Q es $f(x) - xf'(x)$.

(c) Pruebe que la condición $d\theta/dx = 0$ es equivalente a:

$$PQ^2 = BQ \cdot CQ$$

(d) Deduzca que $\triangle QPB$ y $\triangle QCP$ son triángulos semejantes.

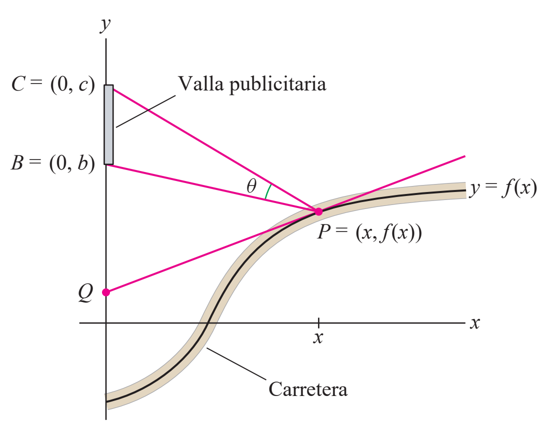


FIGURA 36

Prospección sísmica *Los problemas 66-68 se refieren a la determinación de la profundidad d de una capa de suelo situada encima de una formación rocosa. Un equipo de geólogos envía dos pulsos sónicos de un punto A a un punto D separados por una distancia s. El primer pulso se desplaza directamente de A a D por la superficie del terreno. El segundo pulso avanza hasta la formación rocosa, se desplaza por su superficie y finalmente asciende hasta llegar a D (trayectoria ABCD), tal como se representa en la figura 37. Un pulso viaja a una velocidad v_1 a través del suelo y v_2 en la roca.*

66. (a) Pruebe que el tiempo invertido por el primer pulso en ir de A a D es $t_1 = s/v_1$.

(b) Pruebe que el tiempo invertido por el segundo pulso es:

$$t_2 = \frac{2d}{v_1}\sec\theta + \frac{s - 2d\tan\theta}{v_2}$$

siempre que:

$$\tan\theta \le \frac{s}{2d} \qquad \boxed{2}$$

(*Nota:* Si esta desigualdad no se cumple, entonces el punto B no se encuentra a la izquierda de C.)

(c) Pruebe que t_2 es mínimo cuando sen $\theta = v_1/v_2$.

67. En este problema, suponga que $v_2/v_1 \ge \sqrt{1 + 4(d/s)^2}$.

(a) Pruebe que la desigualdad (2) se cumple si sen $\theta = v_1/v_2$.

(b) Pruebe que el tiempo mínimo para el segundo pulso es:

$$t_2 = \frac{2d}{v_1}(1-k^2)^{1/2} + \frac{s}{v_2}$$

donde $k = v_1/v_2$.

(c) Deduzca que $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{2d(1-k^2)^{1/2}}{s} + k$.

68. Las hipótesis son las mismas que en el ejercicio anterior.

(a) Determine la profundidad de la capa de suelo suponiendo que $v_1 = 0{,}7v_2$, $t_2/t_1 = 1{,}3$ y $s = 400$ m.

(b) Los tiempos t_1 y t_2 se registran experimentalmente. La expresión obtenida en el problema 67(c) muestra que t_2/t_1 es una función lineal de $1/s$. ¿Qué se podría pensar si se llevasen a cabo experimentos con varios valores de s y los puntos $(1/s, t_2/t_1)$ *no* resultasen alineados?

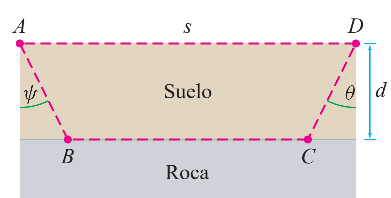


FIGURA 37

69. En este problema se utiliza la f gura 38 para demostrar el principio de Heron del ejemplo 6 sin usar herramientas de cálculo inf-nitesimal. Por def nición, C es la ref exión de B sobre la recta $\overline{MN}$ (de tal manera que $\overline{BC}$ es perpendicular a $\overline{MN}$ y $\overline{BN} = \overline{CN}$). Sea P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{MN}$. Aplique argumentos de geometría plana para justif car que:

(a) $\triangle PNB$ y $\triangle PNC$ son congruentes y $\theta_1 = \theta_2$.

(b) Las longitudes de los segmentos APB y APC son iguales.

(c) De manera análoga, las longitudes de AQB y AQC también son iguales.

(d) El segmento APC es más corto que AQC para todo $Q \neq P$.

Deduzca que el segmento más corto AQB se tiene para $Q = P$.

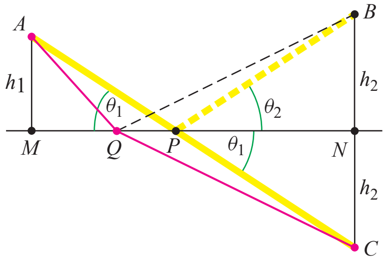


FIGURA 38

70. Un diseñador de artículos de joyería desea incorporar una componente de oro en forma de tronco de cono de altura 1 cm y radio inferior r f jado (f gura 39). El radio superior x puede ser cualquier valor entre 0 y r. Observe que $x = 0$ y $x = r$ corresponden a un cono y un cilindro respectivamente. El área lateral (sin las caras circulares) viene dada en función de x por $S(x) = \pi s(r + x)$, donde s es la *altura inclinada* que se ilustra en la f gura. ¿Qué valor de x da lugar al diseño menos caro [el valor mínimo de $S(x)$ para $0 \le x \le r$]?

(a) Pruebe que $S(x) = \pi(r + x)\sqrt{1 + (r - x)^2}$.

(b) Pruebe que si $r < \sqrt{2}$, entonces $S(x)$ es una función estrictamente creciente. Deduzca que el cono ($x = 0$) tiene área mínima en este caso.

(c) Suponga que $r > \sqrt{2}$. Pruebe que $S(x)$ tiene dos puntos críticos $x_1 < x_2$ en $(0, r)$ y que $S(x_1)$ es un máximo local y $S(x_2)$ es un mínimo local.

(d) Deduzca que el mínimo se alcanza en $x = 0$ o en x_2.

(e) Halle el mínimo en los casos $r = 1{,}5$ y $r = 2$.

(f) Un reto: Sea $c = \sqrt{(5 + 3\sqrt{3})/4} \approx 1{,}597$. Demuestre que el mínimo se alcanza en $x = 0$ (cono) si $\sqrt{2} < r < c$, pero que el mínimo se alcanza en $x = x_2$ si $r > c$.

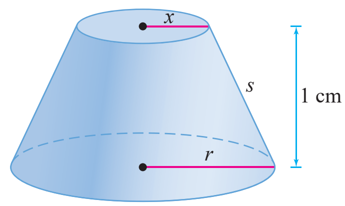


FIGURA 39 Tronco de cono de 1 cm de altura.

4.7 Método de Newton

El método de Newton es un procedimiento para obtener aproximaciones numéricas de ceros o raices de funciones. Las aproximaciones numéricas son importantes porque a menudo es imposible hallar los ceros con exactitud. Por ejemplo, aunque el polinomio $f(x) = x^5 - x - 1$ tiene una raíz real c (vea la f gura 1), se puede demostrar, mediante una especialidad avanzada de las matemáticas llamada *teoría de Galois*, que esta raíz no puede expresarse algebraicamente. El método de Newton muestra que $c \approx 1{,}1673$ y así, si se dispone de suf ciente capacidad de cálculo, se puede determinar c con cualquier grado de precisión.

RECORDATORIO *Un "cero" de una función $f(x)$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.*

En el método de Newton se empieza eligiendo un número x_0, supuestamente cercano a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Este primer valor x_0 se llama **elección inicial**. A continuación el método de Newton produce una colección $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de aproximaciones sucesivas que, en situaciones favorables, converge a una raíz.

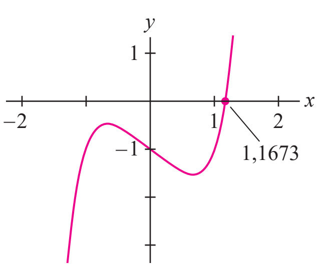


FIGURA 1 Gráf ca de $y = x^5 - x - 1$. El valor 1,1673 es una buena aproximación numérica al cero de la función.

La f gura 2 ilustra el método. Hecha una elección inicial x_0, se dibuja la recta tangente a la gráf ca en $(x_0, f(x_0))$. La aproximación x_1 se def ne como coordenada x del punto donde esa recta tangente corta al eje de abscisas. Para obtener la segunda aproximación x_2 (también llamada segunda iteración), se aplica este mismo proceso a x_1.

A continuación se va a deducir una fórmula para x_1. La ecuación de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esta recta corta el eje x en x_1, donde:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

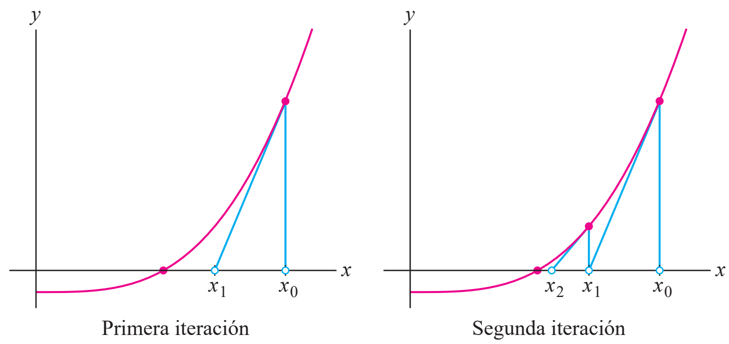


FIGURA 2 La sucesión obtenida por iteración converge a una raíz.

Si $f'(x_0) \neq 0$, se puede despejar x_1 y se obtiene $x_1 - x_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$, es decir,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

La segunda iteración x_2 se obtiene aplicando esta fórmula a x_1 en lugar de x_0:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

y así sucesivamente. Observe en la f gura 2 que x_1 está más cerca de la raíz que x_0, y x_2 es todavía más cercano. Esto es lo habitual: que las sucesivas aproximaciones converjan a la raíz exacta. No obstante, existen casos en que el método de Newton falla (vea la f gura 4).

El método de Newton es un ejemplo de proceso iterativo. "Iterar" significa repetir, y en el método de Newton se usa la ec. (1) repetidamente para obtener la sucesión de aproximaciones.

Método de Newton Para hallar una aproximación numérica a una raíz de $f(x) = 0$:

Etapa 1. **Escoja un valor inicial x_0 (cercano a la raíz buscada, si es factible)**

Etapa 2. **Genere aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, \ldots$ donde:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \boxed{1}$$

■ **EJEMPLO 1** **Aproximación de $\sqrt{5}$** Calcular las primeras tres aproximaciones x_1, x_2, x_3 a una raíz de $f(x) = x^2 - 5$ usando el valor inicial $x_0 = 2$.

Solución Se tiene $f'(x) = 2x$. Por tanto:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 5}{2x_0}$$

Se calculan las aproximaciones sucesivas de la siguiente manera:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^2 - 5}{2 \cdot 2} = 2{,}25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}25 - \frac{2{,}25^2 - 5}{2 \cdot 2{,}25} \approx 2{,}23611$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2{,}23611 - \frac{2{,}23611^2 - 5}{2 \cdot 2{,}23611} \approx \mathbf{2{,}23606797}789$$

Los términos de esta sucesión se van aproximando a la raíz de $x^2 - 5 = 0$, esto es, a

$$\sqrt{5} = \mathbf{2{,}236067977}499789696\ldots$$

Observe que x_3 dif ere del valor exacto en menos de 10^{-9}. Se ha logrado esta impresionante precisión con sólo tres iteraciones del método de Newton. ■

¿Cuántas iteraciones son necesarias?

¿Cuántas iteraciones del método de Newton se requieren para aproximar una raíz con una precisión dada? Aunque no se puede dar una respuesta def nitiva, en la práctica suele ser acertado suponer que si x_n y x_{n+1} coinciden en las primeras m cifras decimales, entonces la aproximación x_n tiene esas m cifras correctas.

EJEMPLO 2 GU Sea c la menor solución positiva de $\operatorname{sen} 3x = \cos x$.

(a) Use una gráf ca generada por ordenador para elegir un valor inicial x_0 para c.

(b) Use el método de Newton para aproximar c con un error de, a lo sumo, 10^{-6}.

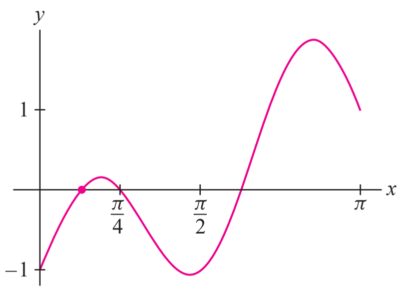


FIGURA 3 Gráf ca de $f(x) = \operatorname{sen} 3x - \cos x$.

Solución

(a) Una solución de $\operatorname{sen} 3x = \cos x$ es un cero de la función $f(x) = \operatorname{sen} 3x - \cos x$. La f gura 3 muestra que el menor cero está situado, aproximadamente, a mitad de camino entre 0 y $\frac{\pi}{4}$. Como $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, una buena elección inicial es $x_0 = 0{,}4$.

(b) Como $f'(x) = 3\cos 3x + \operatorname{sen} x$, la ec. (1) da lugar a la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\operatorname{sen} 3x_n - \cos x_n}{3\cos 3x_n + \operatorname{sen} x_n}$$

Con $x_0 = 0{,}4$ como valor inicial, las cuatro primeras iteraciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 0{,}\mathbf{392}5647447 \\ x_2 &\approx 0{,}\mathbf{3926990}382 \\ x_3 &\approx 0{,}\mathbf{3926990816987}196 \\ x_4 &\approx 0{,}\mathbf{3926990816987}241 \end{aligned}$$

No existe una única elección inicial "correcta". Aunque en el ejemplo 2 se escogió $x_0 = 0{,}4$, otra posible elección es $x_0 = 0$, que conduce a la sucesión

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 0{,}3333333333 \\ x_2 &\approx 0{,}3864547725 \\ x_3 &\approx 0{,}3926082513 \\ x_4 &\approx 0{,}3926990816 \end{aligned}$$

Sin embargo, como el lector podrá comprobar, $x_0 = 1$ da lugar a una sucesión que converge a $\frac{\pi}{4}$, la segunda solución positiva de $\operatorname{sen} 3x = \cos x$.

Parando aquí, se puede af rmar, casi con seguridad, que x_4 aproxima la menor raíz positiva c como mínimo hasta las 12 primeras cifras decimales. De hecho, $c = \frac{\pi}{8}$ y x_4 tiene una precisión de dieciséis cifras decimales. ■

¿Qué raíz detecta el método de Newton?

En algunos casos, el método de Newton no conduce a ninguna raíz. En la f gura 4, las iteraciones divergen a inf nito. No obstante, el método de Newton normalmente converge con rapidez. Si una elección particular de x_0 no conduce a ninguna raíz, la mejor estrategia es cambiar esa elección por otra, mirando una gráf ca siempre que sea posible. Si $f(x) = 0$ posee más de una raíz, entonces valores iniciales x_0 distintos pueden llevarnos a raíces diferentes.

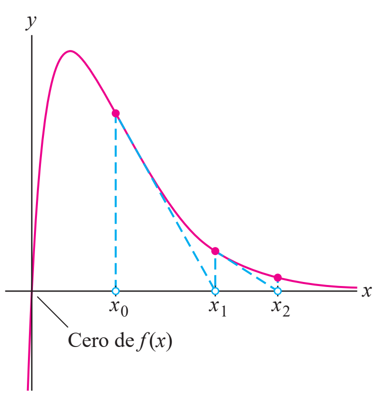


FIGURA 4 La función sólo tiene un cero, pero la sucesión de iteraciones de Newton se va a inf nito.

EJEMPLO 3 La f gura 5 muestra que $f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 5$ tiene cuatro raíces reales.

(a) Pruebe que con $x_0 = 0$, el método de Newton converge a la raíz cercana a -2.

(b) Pruebe que con $x_0 = -1$, el método de Newton converge a la raíz cercana a -1.

Solución Se tiene que $f'(x) = 4x^3 - 12x + 1$ y:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 6x_n^2 + x_n + 5}{4x_n^3 - 12x_n + 1} = \frac{3x_n^4 - 6x_n^2 - 5}{4x_n^3 - 12x_n + 1}$$

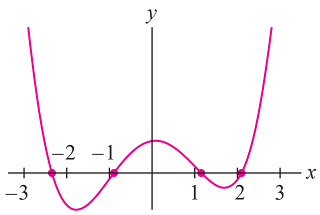


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 5$.

(a) Según la tabla 1, se puede conf ar en que cuando $x_0 = 0$, el método de Newton converge a una raíz próxima a $-2{,}3$. Observe, en la f gura 5, que no se trata de la raíz más cercana a x_0.

(b) La tabla 2 sugiere que con $x_0 = -1$, el método de Newton converge a una raíz próxima a $-0{,}9$. ■

TABLA 1

x_0	0
x_1	−5
x_2	−3,9179954
x_3	−3,1669480
x_4	−2,6871270
x_5	−2,4363303
x_6	−2,3572979
x_7	−**2,3**495000

TABLA 2

x_0	−1
x_1	−0,8888888888
x_2	−0,8882866140
x_3	−0,88828656234358
x_4	−0,**888286562343**575

4.7 RESUMEN

- Método de Newton: para hallar una sucesión de aproximaciones numéricas a una raíz de $f(x)$, empiece con una elección inicial x_0. Luego construya la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mediante la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El valor inicial x_0 debe elegirse tan cerca de una raíz como sea factible, observando una gráf ca si es necesario. En condiciones favorables, la sucesión converge rápidamente a una solución.

- Si x_n y x_{n+1} coinciden en las m primeras cifras decimales, puede suponerse que x_n coincide con la raíz en las m primeras cifras decimales también.

4.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuántas iteraciones del método de Newton se necesitan para calcular una raíz, si $f(x)$ es una función lineal?

2. ¿Qué ocurre en el método de Newton si la elección inicial resulta ser un cero de f?

3. ¿Qué ocurre en el método de Newton si la elección inicial resulta ser un máximo o un mínimo local de f?

4. Discuta si la descripción siguiente del método de Newton es razonablemente correcta: "Se usa una raíz de la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ como aproximación de una raíz de la propia función $f(x)$".

Problemas

En todos los problemas de este apartado, las aproximaciones deben ser obtenidas usando el método de Newton.

En los problemas 1-6, utilice el método de Newton con la función y el valor inicial x_0 dados para calcular x_1, x_2, x_3.

1. $f(x) = x^2 - 6, \quad x_0 = 2$

2. $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 3$

3. $f(x) = x^3 - 10, \quad x_0 = 2$

4. $f(x) = x^3 + x + 1, \quad x_0 = -1$

5. $f(x) = \cos x - 4x, \quad x_0 = 1$

6. $f(x) = 1 - x \operatorname{sen} x, \quad x_0 = 7$

7. Use la f gura 6 para elegir una aproximación inicial x_0 a la única raíz real de $x^3 + 2x + 5 = 0$. Calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton.

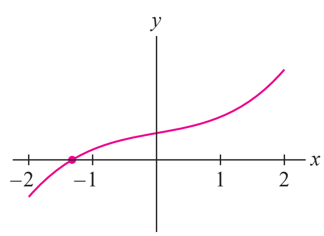


FIGURA 6 Gráf ca de $y = x^3 + 2x + 5$.

8. Aproxime una solución de $\operatorname{sen} x = \cos 2x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ con tres cifras decimales correctas. A continuación, halle la solución exacta y compárela con la aproximación obtenida.

9. Aproxime el punto de intersección de las gráf cas $y = x^2 + 4 + 1/x$ y $y = 2/x^2$ con tres cifras decimales correctas (f gura 7).

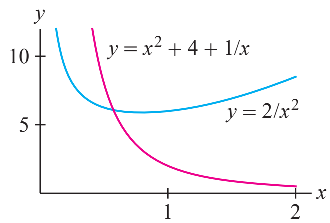


FIGURA 7

10. La primera raíz positiva de $\operatorname{sen} x = 0$ es $x = \pi$. Use el método de Newton para calcular π con cuatro cifras decimales correctas.

En los problemas 11-14, utilice el método de Newton para aproximar la raíz con tres cifras decimales correctas y compare el resultado con el valor dado por una calculadora.

11. $\sqrt{11}$ **12.** $5^{1/3}$ **13.** $2^{7/3}$ **14.** $3^{-1/4}$

15. Aproxime la mayor raíz positiva de $f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 5$ con un error de, a lo sumo, 10^{-4}. Tenga en cuenta la f gura 5.

GU *En los problemas 16-19, use el método de Newton para aproximar la raíz especif cada con tres cifras decimales correctas. Utilice una gráf ca para realizar una elección inicial.*

16. Mayor raíz positiva de $f(x) = x^3 - 5x + 1$.

17. Raíz negativa de $f(x) = x^5 - 20x + 10$.

18. Solución positiva de $\operatorname{sen}\theta = 0{,}8\theta$.

19. Solución positiva de $4\cos x = x^2$.

20. Sean x_1, x_2 dos estimaciones de una raíz obtenidas aplicando el método de Newton con $x_0 = 1$ a la función representada en la f gura 8. Estime los valores numéricos de x_1 y x_2 y dibuje las rectas tangentes usadas para obtenerlos.

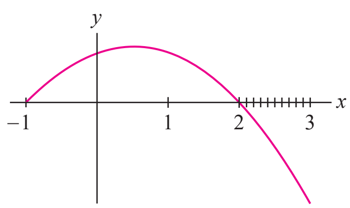


FIGURA 8

21. GU Halle el menor valor positivo de x en el que $y = x$ e $y = \tan x$ intersequen. *Indicación:* dibuje una gráf ca.

22. En 1535, el matemático Antonio Fior desaf ó a su rival Niccolo Tartaglia con el siguiente problema: La altura de un árbol es de 12 *braccia*; se parte en dos de manera que la altura de la parte que queda en pie es la raíz cúbica de la longitud de la parte cortada. ¿Cuál es la altura de la parte que queda en pie? Muestre que este problema es equivalente a resolver la ecuación $x^3 + x = 12$ y halle la solución con tres cifras decimales correctas. Tartaglia, que había descubierto los secretos de las ecuaciones cúbicas, fue capaz de encontrar la respuesta exacta:

$$x = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2919} + 54} - \sqrt[3]{\sqrt{2919} - 54}\right) \Big/ \sqrt[3]{9}$$

23. Halle (con dos cifras decimales correctas) las coordenadas del punto P de la f gura 9 donde la recta tangente a $y = \cos x$ pasa por el origen.

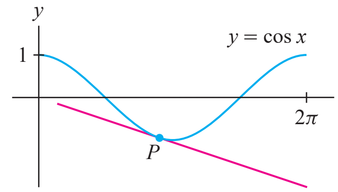


FIGURA 9

El método de Newton se usa a menudo para determinar intereses en cálculos f nancieros. En los ejercicios 24-26, r denota una tasa de interés anual expresada en forma decimal (en lugar de un porcentaje).

24. Si se depositan P dólares cada mes en una cuenta que ofrece una tasa de interés anual igual a r, entonces el saldo S de la cuenta después de N años es:

$$S = P\left(\frac{b^{12N+1} - b}{b - 1}\right) \qquad \text{donde } b = 1 + \frac{r}{12}$$

Se ha decidido depositar $P = 100$ dólares al mes.

(a) Determine S después de 5 años si la tasa de interés anual es $r = 0{,}07$ (es decir, un 7 %).

(b) Pruebe que, para ahorrar 10 000 \$ en 5 años, hay que aplicar una tasa de interés r determinada por la ecuación $b^{61} - 101b + 100 = 0$. Use el método de Newton para hallar b. A continuación, halle r. Observe que, aunque $b = 1$ es una raíz, le interesa la raíz que cumple $b > 1$.

25. Para devolver un préstamo de L dólares durante N años a un interés anual r, la cuota mensual de P dólares se calcula mediante la fórmula:

$$L = P\left(\frac{1 - b^{-12N}}{b - 1}\right) \qquad \text{donde } b = 1 + \frac{r}{12}$$

(a) Halle P si $L = 5000$ \$, $N = 3$ y $r = 0{,}08$ (8 %).

(b) Suponga que se le concede un crédito de $L = 5000$ \$ que debe ser devuelto en 3 años con pagos mensuales de $P = 200$ \$. Utilice el método de Newton para calcular b y hallar la tasa de interés r que debe aplicarse a ese crédito. *Indicación:* pruebe que $(L/P)b^{12N+1} - (1 + L/P)b^{12N} + 1 = 0$.

26. Si deposita P dólares anuales en un fondo de pensiones durante N años con el propósito de retirar luego Q dólares anuales durante M años, debe recibir intereses con una tasa r que cumpla $P(b^N - 1) = Q(1 - b^{-M})$, donde $b = 1 + r$. Suponga que se depositan 2000 \$ durante 30 años y que el objetivo es retirar 10 000 \$ por año durante 25 años. Use el método de Newton para calcular b y luego halle r. Observe que, aunque $b = 1$ es una raíz, le interesa la raíz que cumple $b > 1$.

27. No existe una fórmula sencilla para la posición en el instante t de un planeta P en su órbita (una elipse) alrededor del Sol. Considere la circunferencia auxiliar y ángulo θ de la f gura 10 (observe que P determina a θ porque es el ángulo central correspondiente al punto B sobre la circunferencia). Sean $a = OA$ y $e = OS/OA$ (la excentricidad de la órbita).

(a) Pruebe que el área del sector BSA es $(a^2/2)(\theta - e\operatorname{sen}\theta)$.

(b) La segunda ley de Kepler establece que el área del sector BSA es proporcional al tiempo t transcurrido desde que el planeta pasó por el punto A y, como el área del círculo es πa^2, el área de BSA es $(\pi a^2)(t/T)$, donde T es el período de la órbita. Deduzca la **ecuación de Kepler**:

$$\frac{2\pi t}{T} = \theta - e \operatorname{sen} \theta$$

(c) La excentricidad de la órbita de Mercurio es aproximadamente $e = 0{,}2$. Use el método de Newton para calcular θ si ha transcurrido una cuarta parte del año de Mercurio ($t = T/4$). Exprese θ en grados. ¿Ha recorrido Mercurio más de una cuarta parte de su órbita cuando $t = T/4$?

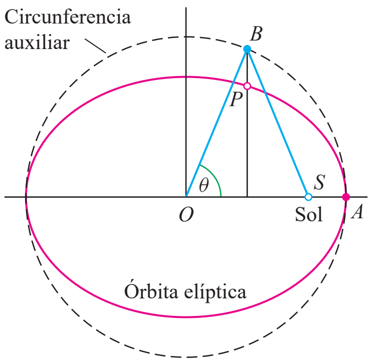


FIGURA 10

28. Las raíces de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ con tres cifras decimales son $-3{,}583$, $0{,}251$ y $3{,}332$ (figura 11). Determine la raíz a la cual converge el método de Newton con las elecciones iniciales $x_0 = 1{,}85$, $1{,}7$ y $1{,}55$. La respuesta enseña que un pequeño cambio en x_0 puede tener un efecto significativo en el resultado del método de Newton.

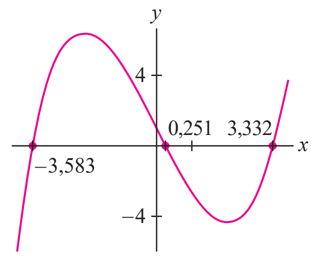


FIGURA 11 Gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$.

29. ¿Qué sucede cuando se aplica el método de Newton para hallar un cero de $f(x) = x^{1/3}$? Observe que $x = 0$ es el único cero.

30. ¿Qué sucede cuando se aplica el método de Newton a la ecuación $x^3 - 20x = 0$ con la desafortunada elección inicial $x_0 = 2$?

Problemas avanzados

31. El método de Newton se puede utilizar para calcular recíprocos sin necesidad de realizar la división. Sea $c > 0$ y considere $f(x) = x^{-1} - c$.

(a) Pruebe que $x - (f(x)/f'(x)) = 2x - cx^2$.

(b) Calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton con $c = 10{,}3$ y las dos elecciones iniciales $x_0 = 0{,}1$ y $x_0 = 0{,}5$.

(c) Explique gráficamente por qué $x_0 = 0{,}5$ no da lugar a una sucesión que converja a $1/10{,}3$.

En los problemas 32 y 33, se considera una varilla metálica de longitud L sujeta en ambos extremos. Si se corta la varilla y se le suelda un segmento adicional, de longitud m, manteniendo los extremos fijos, la varilla se combará formando un arco de radio R (desconocido), tal como muestra la figura 12.

32. Sea h el desplazamiento vertical máximo de la varilla.

(a) Pruebe que $L = 2R \operatorname{sen} \theta$ y deduzca que:

$$h = \frac{L(1 - \cos \theta)}{2 \operatorname{sen} \theta}$$

(b) Pruebe que $L + m = 2R\theta$ y a continuación demuestre que:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{L}{L + m}$$

2

33. Sea $L = 3$ y $m = 1$. Aplique el método de Newton a la ec. (2) para estimar θ y use este resultado para estimar h.

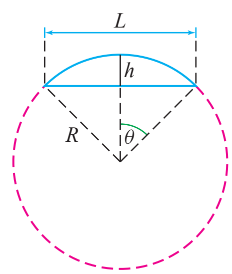


FIGURA 12 La longitud del arco es $L + m$.

34. Convergencia cuadrática a raíces cuadradas Sea $f(x) = x^2 - c$ y sea $e_n = x_n - \sqrt{c}$ el error en x_n.

(a) Pruebe que $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + c/x_n)$ y $e_{n+1} = e_n^2/2x_n$.

(b) Pruebe que si $x_0 > \sqrt{c}$, entonces $x_n > \sqrt{c}$ para todo n. Justifique gráficamente su respuesta.

(c) Pruebe que si $x_0 > \sqrt{c}$, entonces $e_{n+1} \le e_n^2/(2\sqrt{c})$.

4.8 Primitivas

Además del cálculo de derivadas, hay un problema "inverso" importante: *dada la derivada, hallar la función*. En física, por ejemplo, puede interesar determinar la posición $s(t)$ de un objeto a partir de su velocidad $v(t)$ (la derivada). Puesto que $s'(t) = v(t)$, se trata de encontrar una función cuya derivada sea $v(t)$. Una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$ se denomina una antiderivada o primitiva de $f(x)$.

DEFINICIÓN Primitivas Una función $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ en (a, b) si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Ejemplos:

- $F(x) = -\cos x$ es una primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x$ pues:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(-\cos x) = \operatorname{sen} x = f(x)$$

- $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$ pues:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2 = f(x)$$

Una observación importante es que las primitivas no son únicas. Se les puede sumar una constante C porque la derivada de una constante es cero y, por tanto, si $F'(x) = f(x)$, entonces $(F(x) + C)' = f(x)$. Por ejemplo, cada una de las siguientes funciones son primitivas de x^2:

$$\frac{1}{3}x^3 \qquad \frac{1}{3}x^3 + 5 \qquad \frac{1}{3}x^3 - 4$$

¿Existen otras primitivas de $f(x)$ además de las que se obtienen sumando constantes a una primitiva $F(x)$ dada? Según el teorema siguiente, la respuesta es negativa, si $f(x)$ está def nida en un intervalo (a, b).

TEOREMA 1 Primitiva general Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en (a, b). Entonces, cualquier otra primitiva en (a, b) es de la forma $F(x) + C$ para alguna constante C.

Demostración Si $G(x)$ es una segunda primitiva de $f(x)$, sea $H(x) = G(x) - F(x)$. Entonces $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Según el corolario de la sección 4.3, $H(x)$ debe ser constante, es decir $H(x) = C$, y por tanto $G(x) = F(x) + C$. ■

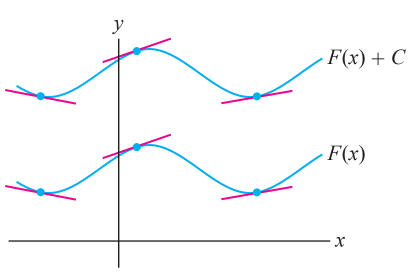


FIGURA 1 Las rectas tangentes a las gráf cas de $y = F(x)$ e $y = F(x) + C$ son paralelas.

UN APUNTE GRÁFICO La gráf ca de $F(x) + C$ se obtiene desplazando verticalmente C unidades la gráf ca de $F(x)$. Como el desplazamiento vertical mueve las rectas tangentes sin cambiar sus pendientes, es natural que todas las funciones $F(x) + C$ tengan la misma derivada (f gura 1). Recíprocamente, el teorema 1, asegura que si dos gráf cas tienen sus rectas tangentes paralelas, entonces una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante un desplazamiento.

Se suele describir la primitiva *general* de una función en términos de una constante C arbitraria, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Halle dos primitivas de $f(x) = \cos x$. A continuación, determine la primitiva general.

Solución Las funciones $F(x) = \operatorname{sen} x$ y $G(x) = \operatorname{sen} x + 2$ son ambas primitivas de $f(x)$. La primitiva general es $F(x) = \operatorname{sen} x + C$, donde C es una constante cualquiera. ■

El proceso de hallar una primitiva se denomina **integración**. El porqué se verá en el capítulo 5, al estudiar la relación entre primitivas y áreas bajo curvas dada por el teorema fundamental del cálculo. Anticipándonos a ese resultado, se empezará a usar el signo integral, $\int$, que se emplea habitualmente para denotar las primitivas.

Los términos "primitiva" e "integral indefinida" se pueden usar indistintamente. En algunos libros, las primitivas se llaman "antiderivadas".

NOTACIÓN Integral indefinida La notación:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{signif ca que} \quad F'(x) = f(x)$$

Se dice que $F(x) + C$ es la primitiva general o la **integral indef nida** de $f(x)$.

La función $f(x)$ que aparece en el signo integral se llama **integrando**. El símbolo "dx", es un *diferencial*. Forma parte de la notación integral y sirve para indicar cuál es la variable independiente. La constante C se denomina *constante de integración*.

Se pueden evaluar algunas integrales indef nidas invirtiendo las fórmulas ya conocidas para derivación. Por ejemplo, se obtiene la integral indef nida de x^n invirtiendo la regla de la potencia para las derivadas.

No existe ninguna regla del producto, cociente o regla de la cadena para integrales. Sin embargo, se verá que la regla del producto da lugar a una importante técnica de integración llamada integración por partes (sección 8.1) y que la regla de la cadena da lugar al método de sustitución (sección 5.6).

TEOREMA 2 Regla de la potencia para integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{si } n \neq -1$$

Demostración Sólo se necesita comprobar que $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de $f(x) = x^n$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{1}{n+1}((n+1)x^n) = x^n$$ ■

Enunciada con palabras, la regla de la potencia para integrales af rma que para integrar una potencia de x hay que "sumar uno al exponente y dividir por el nuevo exponente". He aquí algunos ejemplos:

Observe que, en la notación integral, se trata a dx como a una variable móvil y por tanto, se puede escribir $\int \frac{1}{x^9}dx$ como $\int \frac{dx}{x^9}$.

$$\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + C \qquad \int \frac{dx}{x^9} = -\frac{1}{8}x^{-8} + C \qquad \int x^{3/5}\,dx = \frac{5}{8}x^{8/5} + C$$

La regla de la potencia para integrales pierde su validez para $n = -1$. De hecho, si $n = -1$, el resultado carece de sentido:

$$\int x^{-1}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^0}{0} + C \qquad \text{(absurdo)}$$

La primitiva de $f(x) = x^{-1}$ es el logaritmo natural. Se demostrará en el capítulo 7.3.

La integral indef nida obedece las reglas de linealidad usuales que permiten integrar "término a término". Esto se deduce directamente de las reglas de linealidad para la derivada (vea el problema 79).

TEOREMA 3 Linealidad de la integral indefinida

- **Regla de la suma:** $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- **Regla del múltiplo:** $\displaystyle\int f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

Cuando se descompone una integral indefinida en una suma de varias integrales como en el ejemplo 2, no es necesario incorporar constantes de integración en cada integral por separado.

EJEMPLO 2 Calcule $\int (3x^4 - 5x^{2/3} + x^{-3})\,dx$.

Solución Hay que integrar término a término y usar la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}
\int (3x^4 - 5x^{2/3} + x^{-3})\,dx &= \int 3x^4\,dx - \int 5x^{2/3}\,dx + \int x^{-3}\,dx = && \text{(Regla de la suma)}\\
&= 3\int x^4\,dx - 5\int x^{2/3}\,dx + \int x^{-3}\,dx = && \text{(Regla del múltiplo)}\\
&= 3\left(\tfrac{x^5}{5}\right) - 5\left(\tfrac{x^{5/3}}{5/3}\right) + \tfrac{x^{-2}}{-2} + C = && \text{(Regla de la potencia)}\\
&= \tfrac{3}{5}x^5 - 3x^{5/3} - \tfrac{1}{2}x^{-2} + C
\end{aligned}$$

Para verif car el resultado, se comprueba que la derivada es igual al integrando:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}x^5 - 3x^{5/3} - \frac{1}{2}x^{-2} + C\right) = 3x^4 - 5x^{2/3} + x^{-3}$$

EJEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\int \left(\frac{5}{x^2} - 3x^{-10}\right) dx$.

Solución

$$\int \left(\frac{5}{x^2} - 3x^{-10}\right) dx = 5\int \frac{dx}{x^2} - 3\int x^{-10}\,dx =$$

$$= 5\left(-x^{-1}\right) - 3\left(\frac{x^{-9}}{-9}\right) + C = -5x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-9}$$

Las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas proporcionan las siguientes fórmulas de integración. Cada una de ellas puede comprobarse derivando.

Integrales trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

Análogamente, para constantes b y k cualesquiera con $k \neq 0$, las fórmulas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(kx+b) = k\cos(kx+b), \qquad \frac{d}{dx}\cos(kx+b) = -k\operatorname{sen}(kx+b)$$

se traducen en las siguientes fórmulas para integrales indefinidas:

$$\boxed{\begin{aligned}\int \cos(kx+b)\,dx &= \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx+b)+C\\ \int \operatorname{sen}(kx+b)\,dx &= -\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C\end{aligned}}$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule $\displaystyle\int (\operatorname{sen}(8t-3)+20\cos 9t)\,dt$.

Solución

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen}(8t-3)+20\cos 9t)\,dt &= \int \operatorname{sen}(8t-3)\,dt + 20\int \cos 9t\,dt\\ &= -\frac{1}{8}\cos(8t-3)+\frac{20}{9}\operatorname{sen} 9t + C\end{aligned}$$ ■

Condiciones iniciales

Se puede interpretar una primitiva como una solución de la **ecuación diferencial**:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

En general, una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función desconocida y sus derivadas. La incógnita en la ec. (1) es la función $y = F(x)$ cuya derivada es $f(x)$; es decir, $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Una condición inicial es análoga a la ordenada en el origen de una recta, que la distingue entre todas las rectas que comparten una misma pendiente. De modo similar, las gráficas de las primitivas de $f(x)$ son todas paralelas (figura 1) y la condición inicial distingue a una de ellas.

La ec. (1) tiene infinitas soluciones (porque la primitiva no es única), pero se puede especificar una solución concreta imponiendo una **condición inicial**, es decir, exigiendo que la solución cumpla una condición $y(x_0) = y_0$ para ciertos valores concretos x_0 e y_0. Una ecuación diferencial con una condición inicial se denomina un **problema de valores iniciales**.

■ **EJEMPLO 5** Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = 4x^7$ con la condición inicial $y(0) = 4$.

Solución En primer lugar, halle la primitiva general:

$$y(x) = \int 4x^7\,dx = \frac{1}{2}x^8 + C$$

Luego elija C de manera que se cumpla la condición inicial: $y(0) = 0 + C = 4$. Así $C = 4$ y la solución es $y = \frac{1}{2}x^8 + 4$. ■

■ **EJEMPLO 6** Resuelva el problema de valores iniciales $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(\pi t)$, $y(2) = 2$.

Solución En primer lugar, halle la primitiva general:

$$y(t) = \int \operatorname{sen}(\pi t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) + C$$

Luego se resuelve para C, mediante la evaluación en $t = 2$:

$$y(2) = -\frac{1}{\pi}\cos(2\pi) + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 + \frac{1}{\pi}$$

La solución del problema de valores iniciales es $y(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) + 2 + \frac{1}{\pi}$. ■

■ **EJEMPLO 7** Un coche, que viaja a una velocidad de 24 m/s, empieza a frenar en el momento $t = 0$ con una deceleración constante de $a = -6$ m/s^2. Halle **(a)** la velocidad $v(t)$ en el instante t y **(b)** la distancia recorrida por el coche hasta que se detiene.

Solución (a) La derivada de la velocidad es la aceleración, de modo que la *velocidad es la primitiva de la aceleración*:

Relación entre la posición, velocidad y aceleración:

$$s'(t) = v(t), \quad s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$v'(t) = a(t), \quad v(t) = \int a(t)\,dt$$

$$v(t) = \int a\,dt = \int (-6)\,dt = -6t + C$$

La condición inicial es $v(0) = C = 24$, con lo que $v(t) = -6t + 24$.

(b) La posición es la primitiva de la velocidad. Así la posición del coche es:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-6t + 24)\,dt = -3t^2 + 24t + C_1$$

donde C_1 es una constante. No se sabe dónde se encuentra el coche en $t = 0$, por lo que se puede considerar $s(0) = 0$, por conveniencia, considerando $C_1 = 0$. Con esta elección, $s(t) = -3t^2 + 24t$. Esta es la distancia recorrida desde el momento $t = 0$.

El coche se para cuando su velocidad es cero, por lo que se debe resolver:

$$v(t) = -6t + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \text{ s}$$

Así pues, la distancia recorrida antes de que el coche se pare es $s(4) = -3(4^2) + 24(4) = 48$ m. ■

4.8 RESUMEN

- $F(x)$ es una *primitiva* de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.
- Dos primitivas de $f(x)$ en un intervalo (a, b) dif eren en una constante.
- La primitiva general se denota como una integral indef nida:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- Fórmulas de integración:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \operatorname{sen}(kx + b)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx + b) + C \qquad (k \neq 0)$$

$$\int \cos(kx + b)\,dx = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx + b) + C \qquad (k \neq 0)$$

- Para resolver un problema de valores iniciales $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, en primer lugar, halle la primitiva general $y = F(x) + C$. A continuación, determine C usando la condición inicial $F(x_0) + C = y_0$.

4.8 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Halle una primitiva de la función $f(x) = 0$.

2. ¿Hay alguna diferencia entre hallar la primitiva general de una función $f(x)$ y calcular $\int f(x)dx$?

3. Jacques se ha enterado de que $f(x)$ y $g(x)$ poseen la misma derivada y quiere saber si $f(x) = g(x)$. ¿Tiene Jacques suficiente información para resolver este problema?

4. Suponga que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto? Justifique su respuesta.

(a) Si $f = g$, entonces $F = G$.

(b) Si F y G difieren en una constante, entonces $f = g$.

(c) Si f y g difieren en una constante, entonces $F = G$.

5. ¿Es $y = x$ una solución del siguiente problema de valores iniciales?

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad y(0) = 1$$

Problemas

En los problemas 1-8, halle la primitiva general de $f(x)$ y compruebe la respuesta derivando.

1. $f(x) = 18x^2$

2. $f(x) = x^{-3/5}$

3. $f(x) = 2x^4 - 24x^2 + 12x^{-1}$

4. $f(x) = 9x + 15x^{-2}$

5. $f(x) = 2\cos x - 9\,\text{sen}\, x$

6. $f(x) = 4x^7 - 3\cos x$

7. $f(x) = \text{sen}\, 2x + 12\cos 3x$

8. $f(x) = \text{sen}(4 - 9x)$

9. Relacione las funciones (a)-(d) con sus primitivas (i)-(iv).

(a) $f(x) = \text{sen}\, x$	(i) $F(x) = \cos(1 - x)$
(b) $f(x) = x\,\text{sen}(x^2)$	(ii) $F(x) = -\cos x$
(c) $f(x) = \text{sen}(1 - x)$	(iii) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$
(d) $f(x) = x\,\text{sen}\, x$	(iv) $F(x) = \text{sen}\, x - x\cos x$

En los problemas 10-39, calcule la integral indefinida.

10. $\int (9x + 2)\, dx$

11. $\int (4 - 18x)\, dx$

12. $\int x^{-3}\, dx$

13. $\int t^{-6/11}\, dt$

14. $\int (5t^3 - t^{-3})\, dt$

15. $\int (18t^5 - 10t^4 - 28t)\, dt$

16. $\int 14s^{9/5}\, ds$

17. $\int (z^{-4/5} - z^{2/3} + z^{5/4})\, dz$

18. $\int \frac{3}{2}\, dx$

19. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

20. $\int \frac{dx}{x^{4/3}}$

21. $\int \frac{36\, dt}{t^3}$

22. $\int x(x^2 - 4)\, dx$

23. $\int (t^{1/2} + 1)(t + 1)\, dt$

24. $\int \frac{12 - z}{\sqrt{z}}\, dz$

25. $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}\, dx$

26. $\int \left(\frac{1}{3}\,\text{sen}\, x - \frac{1}{4}\cos x\right) dx$

27. $\int 12\sec x \tan x\, dx$

28. $\int (\theta + \sec^2\theta)\, d\theta$

29. $\int (\csc t \cot t)\, dt$

30. $\int \text{sen}(7x - 5)\, dx$

31. $\int \sec^2(7 - 3\theta)\, d\theta$

32. $\int (\theta - \cos(1 - \theta))\, d\theta$

33. $\int 25\sec^2(3z + 1)\, dz$

34. $\int (12\cos 4x + 9\,\text{sen}\, 3x)\, dx$

35. $\int \sec 12t \tan 12t\, dt$

36. $\int 5\tan(4\theta + 3)\, d\theta$

37. $\int \sec 4x\,(3\sec 4x - 5\tan 4x)\, dx$

38. $\int \sec(x + 5)\tan(x + 5)\, dx$

39. $\int \left(\cos(3\theta) - \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\theta}{4}\right)\right) d\theta$

40. En la figura 2, ¿cuál de las dos, (A) o (B), es la gráfica de una primitiva de $f(x)$?

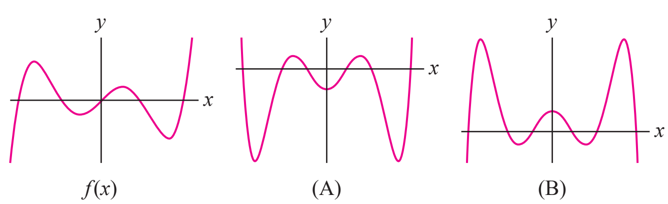


FIGURA 2

41. En la figura 3, ¿cuál de las gráficas (A), (B), (C) no es la gráfica de una primitiva de $f(x)$? Justifique la respuesta.

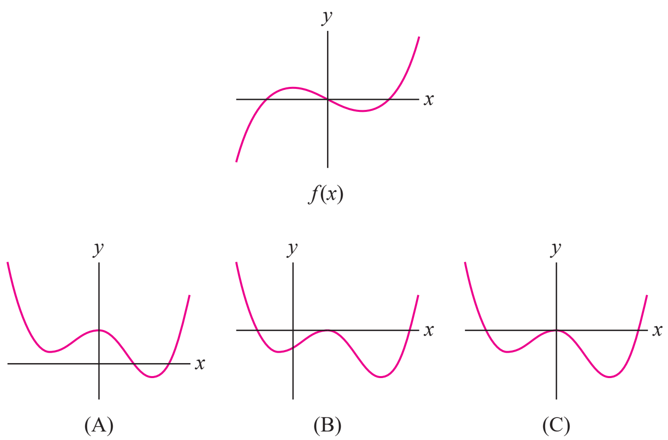


FIGURA 3

42. Pruebe que $F(x) = \frac{1}{3}(x+13)^3$ es una primitiva de $f(x) = (x+13)^2$.

En los problemas 43-46, compruebe el enunciado derivando.

43. $\int (x+13)^6\,dx = \frac{1}{7}(x+13)^7 + C$

44. $\int (x+13)^{-5}\,dx = -\frac{1}{4}(x+13)^{-4} + C$

45. $\int (4x+13)^2\,dx = \frac{1}{12}(4x+13)^3 + C$

46. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$

En los problemas 47-62, resuelva el problema de valores iniciales.

47. $\frac{dy}{dx} = x^3, \ y(0) = 4$

48. $\frac{dy}{dt} = 3 - 2t, \ y(0) = -5$

49. $\frac{dy}{dt} = 2t + 9t^2, \ y(1) = 2$

50. $\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 3x^2, \ y(2) = 0$

51. $\frac{dy}{dt} = \sqrt{t}, \ y(1) = 1$

52. $\frac{dz}{dt} = t^{-3/2}, \ z(4) = -1$

53. $\frac{dy}{dx} = (3x+2)^3, \ y(0) = 1$

54. $\frac{dy}{dt} = (4t+3)^{-2}, \ y(1) = 0$

55. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

56. $\frac{dy}{dz} = \operatorname{sen} 2z, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$

57. $\frac{dy}{dx} = \cos 5x, \ y(\pi) = 3$

58. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 3x, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

59. $\frac{dy}{d\theta} = 6 \sec 3\theta \tan 3\theta, \quad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4$

60. $\frac{dy}{dt} = 4t - \operatorname{sen} 2t, \quad y(0) = 2$

61. $\frac{dy}{d\theta} = \cos\left(3\pi - \frac{1}{2}\theta\right), \quad y(3\pi) = 8$

62. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \csc^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

En los problemas 63-69, primero halle f' y después f.

63. $f''(x) = 12x, \quad f'(0) = 1, \quad f(0) = 2$

64. $f''(x) = x^3 - 2x, \quad f'(1) = 0, \quad f(1) = 2$

65. $f''(x) = x^3 - 2x + 1, \quad f'(0) = 1, \quad f(0) = 0$

66. $f''(x) = x^3 - 2x + 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(1) = 4$

67. $f''(t) = t^{-3/2}, \quad f'(4) = 1, \quad f(4) = 4$

68. $f''(\theta) = \cos\theta, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$

69. $f''(t) = t - \cos t, \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = -2$

70. Pruebe que $F(x) = \tan^2 x$ y $G(x) = \sec^2 x$ tienen la misma derivada. ¿qué se puede deducir sobre la relación entre F y G? Compruebe esta conclusión directamente.

71. Una partícula situada en el origen en $t = 1$ empieza a moverse a lo largo del eje de abscisas con velocidad $v(t) = (6t^2 - t)$ m/s. Enuncie la ecuación diferencial con condición inicial satisfecha por la posición $s(t)$ de la partícula y halle $s(t)$.

72. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = (6t^2 - t)$ m/s. Halle la posición de la partícula $s(t)$ suponiendo que $s(2) = 4$.

73. Una masa oscila al f nal de un muelle. Sea $s(t)$ el desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio, en el instante t. Suponiendo que la masa se encuentra en el origen en el instante $t = 0$ y que tiene velocidad $v(t) = \operatorname{sen}(\pi t/2)$ m/s, enuncie la ecuación diferencial con condición inicial que cumple $s(t)$ y halle $s(t)$.

74. Empezando en $t = 0$ y con velocidad inicial 4 m/s, una partícula se mueve en línea recta con aceleración $a(t) = 3t^{1/2}$ m/s^2. Halle la distancia recorrida al cabo de 25 segundos.

75. Un coche que va a 25 m/s empieza a desacelerar a un ritmo constante de 4 m/s^2. ¿Cuántos segundos tarda el coche en pararse y qué distancia recorrerá antes de detenerse?

76. En el instante $t = 1$ s, una partícula se mueve a velocidad de 72 m/s y empieza a desacelerar a un ritmo de $a(t) = -t^{-1/2}$ hasta que se para. ¿Qué distancia recorre la partícula antes de detenerse?

77. Un cohete de 900 kg es liberado desde una nave espacial. A medida que el cohete consume combustible, su masa disminuye y su velocidad aumenta. Sea $v(m)$ la velocidad (en metros por segundo) en función de la masa m. Halle la velocidad cuando $m = 729$ si $dv/dm = -50m^{-1/2}$. Suponga que $v(900) = 0$.

78. Cuando el agua f uye a través de un tubo de radio $R = 10$ cm, la velocidad v de cada partícula de agua depende únicamente de su distancia r al centro del tubo. Las partículas que se encuentran en las paredes del tubo tienen velocidad cero y $dv/dr = -0{,}06r$. Determine $v(r)$.

79. Verif que las propiedades de linealidad de la integral indef nida que se enunciaron en el teorema 3.

Problemas avanzados

80. Halle constantes c_1 y c_2 tales que $F(x) = c_1 x \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ sea una primitiva de $f(x) = x \cos x$.

81. Halle constantes c_1 y c_2 tales que $F(x) = c_1 x \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ sea una primitiva de $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

82. Suponga que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. ¿Es cierto que $F(x)G(x)$ es una primitiva de $f(x)g(x)$? Demuestre el enunciado o proporcione un contraejemplo.

83. Suponga que $F'(x) = f(x)$.

(a) Pruebe que $\frac{1}{2}F(2x)$ es una primitiva de $f(2x)$.

(b) Halle la primitiva general de $f(kx)$ para $k \neq 0$.

84. Halle una primitiva para $f(x) = |x|$.

85. Aplicando el teorema 1, demuestre que $F'(x) = f(x)$ donde si $f(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces $F(x)$ es un polinomio de grado n. Después demuestre que si $g(x)$ es cualquier función tal que $g^{(n)}(x) = 0$, entonces $g(x)$ es un polinomio de grado, a lo sumo, n.

86. La regla de la potencia para primitivas no se aplica a $f(x) = x^{-1}$. ¿Cuál de las gráf cas de la f gura 4 podría representar una primitiva de $f(x) = x^{-1}$?

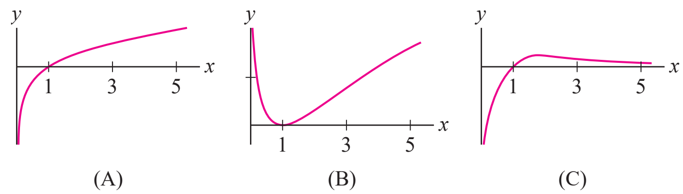


FIGURA 4

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

En los ejercicios 1-6, estime el valor indicado mediante aproximación lineal o linealización y use una calculadora para estimar el error.

1. $8{,}1^{1/3} - 2$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{4{,}1}} - \dfrac{1}{2}$

3. $625^{1/4} - 624^{1/4}$

4. $\sqrt{101}$

5. $\dfrac{1}{1{,}02}$

6. $\sqrt[5]{33}$

En los problemas 7-12, halle la linealización en el punto que se indica.

7. $y = \sqrt{x}, \quad a = 25$

8. $v(t) = 32t - 4t^2, \quad a = 2$

9. $A(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad a = 3$

10. $V(h) = 4h(2-h)(4-2h), \quad a = 1$

11. $P(\theta) = \operatorname{sen}(3\theta + \pi), \quad a = \dfrac{\pi}{3}$

12. $R(t) = \tan\left(\pi\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right), \quad a = \dfrac{1}{4}$

En los problemas 13-18, use la aproximación lineal.

13. La posición de un objeto en movimiento lineal en cada instante t es $s(t) = 0{,}4t^2 + (t+1)^{-1}$. Estime la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo $[4, 4{,}2]$.

14. Un bono de 10 000 \$ en 6 años se pone a la venta a un precio P. El porcentaje de benef cio Y del bono es:

$$Y = 100\left(\left(\frac{10\ 000}{P}\right)^{1/6} - 1\right)$$

Compruebe que si $P = 7500$ \$, entonces $Y = 4{,}91$ %. Estime la disminución del benef cio si el precio aumenta a 7700 \$.

15. Cuando un billete de autobús de Albuquerque a Los Álamos cuesta p dólares, el benef cio mensual de la compañía de autobuses es $R(p) = 1{,}5p - 0{,}01p^2$ (en miles de dólares).

(a) Estime ΔR si el precio aumenta de 50 \$ a 53 \$.

(b) Si $p = 80$, ¿cómo se ven afectados los benef cios por un pequeño aumento del precio? Justif que su respuesta usando la aproximación lineal.

16. Una tienda vende 80 reproductores MP4 a la semana a un precio de $P = 75$ \$. Estime el número N de unidades vendidas si P se aumenta a 80 \$, suponiendo que $dN/dP = -4$. Estime N si el precio se baja a 69 \$.

17. Al medir el perímetro ecuatorial de una esfera se obtiene $C = 100$ cm. Estime el porcentaje máximo de error en el volumen V, si el error en C es menor o igual que 3 cm.

18. Pruebe que $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ si b es pequeño. Use este resultado para estimar $\sqrt{26}$ y halle el error con una calculadora.

19. Compruebe el TVM para $f(x) = x^{-1/3}$ en $[1, 8]$.

20. Pruebe que $f(x) = 2x^3 + 2x + \operatorname{sen} x + 1$ tiene exactamente una raíz real.

21. Compruebe el TVM para $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $[2, 5]$.

22. Suponga que $f(1) = 5$ y $f'(x) \geq 2$ para $x \geq 1$. Aplique el TVM para probar que $f(8) \geq 19$.

23. Aplique el TVM para demostrar que si $f'(x) \leq 2$ para $x > 0$ y $f(0) = 4$, entonces $f(x) \leq 2x + 4$ para todo $x \geq 0$.

24. La derivada de una cierta función $f(x)$ es $f'(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$. ¿En qué punto del intervalo $[1, 4]$ alcanza $f(x)$ su valor máximo?

En los problemas 25-30, halle los puntos críticos y determine si se trata de máximos, mínimos o ninguna de las dos cosas.

25. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

26. $s(t) = t^4 - 8t^2$

27. $f(x) = x^2(x+2)^3$

28. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$

29. $g(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta + \theta$

30. $h(\theta) = 2\cos 2\theta + \cos 4\theta$

En los problemas 31-38, halle los valores extremos en el intervalo.

31. $f(x) = x(10 - x)$, $[-1, 3]$

32. $f(x) = 6x^4 - 4x^6$, $[-2, 2]$

33. $g(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta - \cos\theta$, $[0, 2\pi]$

34. $R(t) = \dfrac{t}{t^2 + t + 1}$, $[0, 3]$

35. $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$, $[-1, 3]$

36. $f(x) = x - \tan x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

37. $f(x) = x - x^{3/2}$, $[0, 2]$

38. $f(x) = \sec x - \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

39. Halle los puntos críticos y valores extremos de $f(x) = |x - 1| + |2x - 6|$ en $[0, 8]$.

40. Relacione la descripción de $f(x)$ con la gráf ca de su *derivada* $f'(x)$ en la f gura 1.

(a) $f(x)$ es estrictamente creciente y convexa.

(b) $f(x)$ es estrictamente decreciente y convexa.

(c) $f(x)$ es estrictamente creciente y cóncava.

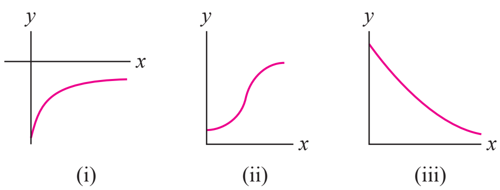


FIGURA 1 Gráf cas de la derivada.

En los problemas 41-46, halle los puntos de inf exión.

41. $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

42. $y = x - 2\cos x$

43. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

44. $y = \dfrac{x}{(x^2 - 4)^{1/3}}$

45. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

46. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - 4\cos x$

En los problemas 47-56, dibuje la gráf ca, indicando los puntos de transición y el comportamiento asintótico.

47. $y = 12x - 3x^2$

48. $y = 8x^2 - x^4$

49. $y = x^3 - 2x^2 + 3$

50. $y = 4x - x^{3/2}$

51. $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

52. $y = \dfrac{x}{(x^2 - 4)^{2/3}}$

53. $y = \dfrac{1}{|x + 2| + 1}$

54. $y = \sqrt{2 - x^3}$

55. $y = \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x$ en $[0, 2\pi]$

56. $y = 2x - \tan x$ en $[0, 2\pi]$

57. Dibuje una curva $y = f(x)$ para la cual f' y f'' tengan los signos indicados en la f gura 2.

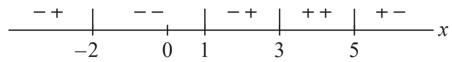


FIGURA 2

58. Halle las dimensiones de una lata cilíndrica con base pero sin tapa y de volumen 4 m^3, que se pueda obtener con la menor cantidad de metal.

59. Una caja con forma de ortoedro de altura h con base cuadrada de lado b tiene un volumen de $V = 4$ m^3. Dos de los lados laterales están hechos de un material que cuesta 40 \$/m^2. El resto de las caras cuestan 20 \$/m^2. ¿Para qué valores de b y h se minimiza el coste de la caja?

60. La cosecha de maíz en una cierta granja es:

$$Y = -0{,}118x^2 + 8{,}5x + 12{,}9 \quad \text{(fanegas por acre)}$$

donde x es el número de plantas de maíz por acre (en miles). Suponga que las semillas de maíz cuestan 1,25 \$ (por cada mil semillas) y que el maíz puede venderse a 1,50 \$/fanega. Sea $P(x)$ el benef cio (ingresos menos el coste de las semillas) para un nivel en la plantación de x.

(a) Calcule $P(x_0)$ para el valor x_0 que maximiza la cosecha Y.

(b) Halle el valor máximo de $P(x)$. ¿Proporciona la máxima cosecha el benef cio máximo?

61. Una cantidad $N(t)$ cumple $dN/dt = 2/t - 8/t^2$ para $t \geq 4$ (t en días). ¿En qué instante está N creciendo más rápidamente?

62. Un camión recorre 10 millas por galón de combustible diesel cuando viaja por una autovía interestatal a 50 mph. Esta distancia disminuye en 0.15 mpg por cada milla por hora que se sobrepasen los 50 mph.

(a) Si se paga al conductor del camión 30 \$/hora y el combustible diesel cuesta $P = 3$ \$/galón, ¿a qué velocidad v entre 50 y 70 mph se minimiza el coste del recorrido por la autovía? Observe que el coste real depende de la longitud del trayecto, pero la velocidad óptima no.

(b) GU Represente el coste como función de v (considere una longitud arbitraria) y compruebe su respuesta al apartado (a).

(c) GU ¿Espera que la velocidad optima v aumente o disminuya, si el precio del combustible baja a $P = 2$ \$/galón? Represente el coste como función de v para $P = 2$ y para $P = 3$ en el mismo sistema de ejes y compruebe su conclusión.

63. Halle el volumen máximo de un cono circular recto colocado al revés, dentro de un cono circular recto de radio $R = 3$ y altura $H = 4$, como en la f gura 3. El volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

64. Vuelva a resolver el problema 63 pero ahora para R y H arbitrarios.

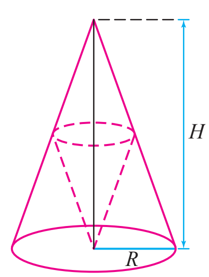


FIGURA 3

65. Pruebe que la máxima área de un paralelogramo $ADEF$ que se encuentra inscrito en un triángulo ABC, como en la f gura 4, es igual a la mitad del área de $\triangle ABC$.

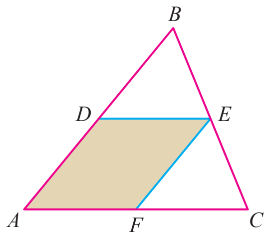


FIGURA 4

66. Se construye una caja de volumen 8 m^3 con base y tapa cuadradas con dos tipos de metal. El metal para la base y tapa cuesta 50 \$/m^2 y el metal para los lados cuesta 30 \$/m^2. Halle las dimensiones de la caja que minimizan el coste total.

67. Sea $f(x)$ una función cuya gráf ca no atraviesa el eje x y sea $Q = (a, 0)$. Sea $P = (x_0, f(x_0))$ el punto de la gráf ca más próximo a Q (f gura 5). Demuestre que $\overline{PQ}$ es perpendicular a la recta tangente a la gráf ca en x_0. *Indicación:* halle el valor mínimo del *cuadrado* de la distancia de $(x, f(x))$ a $(a, 0)$.

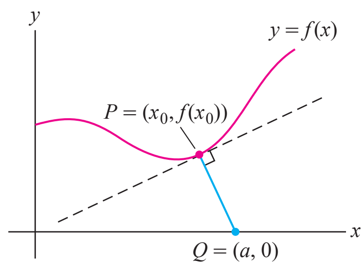


FIGURA 5

68. Considere un círculo de papel de radio R, corte un sector de ángulo θ (f gura 6) y forme un cono con el trozo de papel resultante. ¿Qué ángulo θ produce un recipiente de mayor volumen?

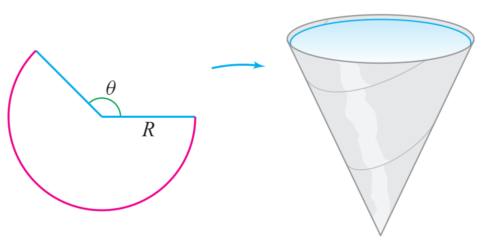


FIGURA 6

69. Use el método de Newton para estimar $\sqrt[3]{25}$ con cuatro cifras decimales de precisión.

70. Use el método de Newton para hallar una raíz de $f(x) = x^2 - x - 1$ con cuatro cifras decimales de precisión.

En los problemas 71-84, calcule la integral indef nida.

71. $\int (4x^3 - 2x^2)\,dx$

72. $\int x^{9/4}\,dx$

73. $\int \operatorname{sen}(\theta - 8)\,d\theta$

74. $\int \cos(5 - 7\theta)\,d\theta$

75. $\int (4t^{-3} - 12t^{-4})\,dt$

76. $\int (9t^{-2/3} + 4t^{7/3})\,dt$

77. $\int \sec^2 x\,dx$

78. $\int \tan 3\theta \sec 3\theta\,d\theta$

79. $\int (y + 2)^4\,dy$

80. $\int \frac{3x^3 - 9}{x^2}\,dx$

81. $\int (\cos\theta - \theta)\,d\theta$

82. $\int \sec^2(12 - 25\theta)\,d\theta$

83. $\int \frac{8\,dx}{x^3}$

84. $\int \operatorname{sen}(4x - 9)\,dx$

En los problemas 85-90, resuleva la ecuación diferencial con la condición inicial dada.

85. $\frac{dy}{dx} = 4x^3, \quad y(1) = 4$

86. $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + \cos t, \quad y(0) = 12$

87. $\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}, \quad y(1) = 1$

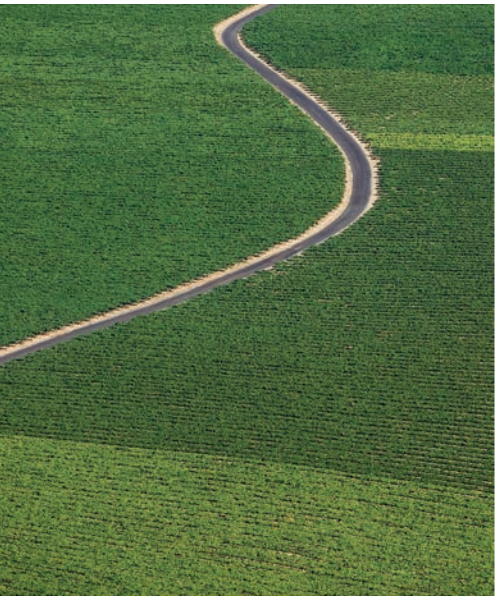
88. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2$

89. $\frac{dy}{dt} = 1 + \pi \operatorname{sen} 3t, \quad y(\pi) = \pi$

90. $\frac{dy}{dt} = \cos 3\pi t + \operatorname{sen} 4\pi t, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

91. Halle $f(t)$ si $f''(t) = 1 - 2t$, $f(0) = 2$ y $f'(0) = -1$.

92. En el instante $t = 0$, un conductor empieza a desacelerar a un ritmo constante de -10 m/s^2 y se detiene después de recorrer 500 m. Halle la velocidad en $t = 0$.



La integración resuelve un antiguo problema matemático: hallar el área de una región irregular.

5 LA INTEGRAL

El problema principal del cálculo integral es determinar el área bajo una curva. Cabe preguntarse por qué el cálculo inf nitesimal se ocupa de dos aspectos aparentemente nada relacionados: las rectas tangentes y las áreas. Una razón es que ambos se calculan mediante límites. El teorema fundamental del cálculo, tratado en las secciones 5.3 y 5.4, pone de manif esto una conexión más profunda entre ambos temas. Este teorema expresa la relación "inversa" existente entre la integración y la derivación. Desempeña además un papel fundamental en la mayor parte de las aplicaciones, tanto prácticas como teóricas, del cálculo inf nitesimal.

5.1 Aproximación y cálculo de áreas

¿Qué interés puede tener determinar el área por debajo de la gráf ca de una función? Consideremos un objeto que se desplaza en línea recta a *velocidad constante* y positiva v. La distancia recorrida en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a $v\Delta t$, siendo $\Delta t = (t_2 - t_1)$ el tiempo total invertido. Se trata de la conocida fórmula

$$\boxed{\text{Distancia recorrida} = \overbrace{\text{velocidad} \times \text{tiempo invertido}}^{v\Delta t}} \qquad \boxed{1}$$

Como v es constante, la gráf ca de la velocidad es una recta horizontal (f gura 1) y $v\Delta t$ es igual al área de la región rectangular limitada por la gráf ca de la función velocidad, en el intervalo $[t_1, t_2]$. De esta manera, se puede escribir la ec. (1) como

$$\boxed{\text{Distancia recorrida} = \text{área por debajo de la gráf ca de la función velocidad en } [t_1, t_2]} \qquad \boxed{2}$$

Sin embargo, existe una gran diferencia entre las dos expresiones anteriores: la ec. (1) sólo tiene sentido si la velocidad es constante, mientras que la ec. (2) es cierta *incluso cuando la velocidad cambia a lo largo del tiempo* (se demostrará en la sección 5.5). Por tanto, la ventaja de expresar la distancia recorrida como un área es que permite considerar tipos de movimiento más generales.

Para ilustrar por qué la ec. (2) puede ser cierta en general, consideremos una situación en la que la velocidad varíe a lo largo del tiempo, pero sea constante sobre determinados intervalos. En otras palabras, se supone que la velocidad del objeto cambia repentinamente de un intervalo al siguiente, tal y como se ilustra en la f gura 2. La distancia recorrida en cada intervalo es igual al área del rectángulo que queda por encima de ese intervalo,

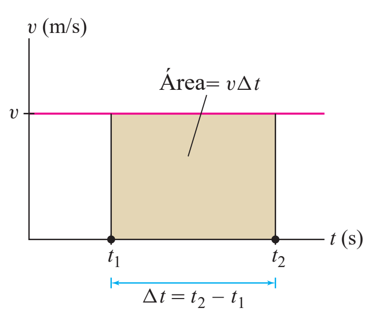


FIGURA 1 El rectángulo tiene área $v\Delta t$, que es igual a la distancia recorrida.

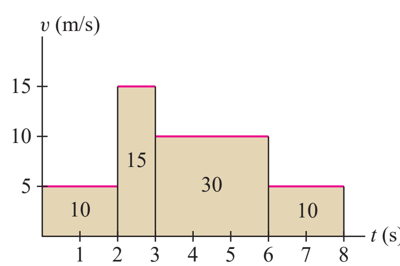


FIGURA 2 La distancia recorrida es igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos.

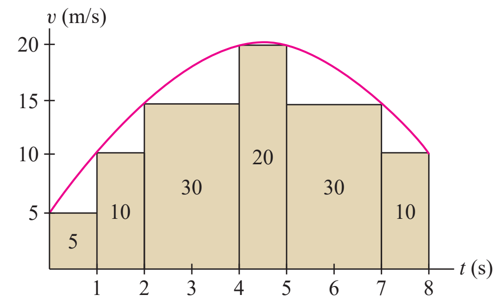


FIGURA 3 La distancia recorrida es igual al área por debajo de la curva. Se *aproxima* mediante la suma de las áreas de los rectángulos.

de manera que la distancia total recorrida es la suma de las áreas de todos los rectángulos. En la figura 2,

$$\text{Distancia recorrida en } [0, 8] = \underbrace{10 + 15 + 30 + 10}_{\text{Suma de las áreas de los rectángulos}} = 65 \text{ m}$$

Cuando la velocidad varíe de manera continua (figura 3), la estrategia será *aproximar* el área por debajo de la gráfica mediante sumas de áreas de rectángulos y realizar un paso al límite para estas sumas. Esta idea conduce al concepto de integral.

Aproximación de un área mediante rectángulos

Nuestro objetivo final es calcular el área por debajo de la gráfica de una función $f(x)$. En esta sección se supone que $f(x)$ es continua y *positiva*, de manera que su gráfica se sitúa por encima del eje x (figura 4). La primera etapa será aproximar el área usando rectángulos.

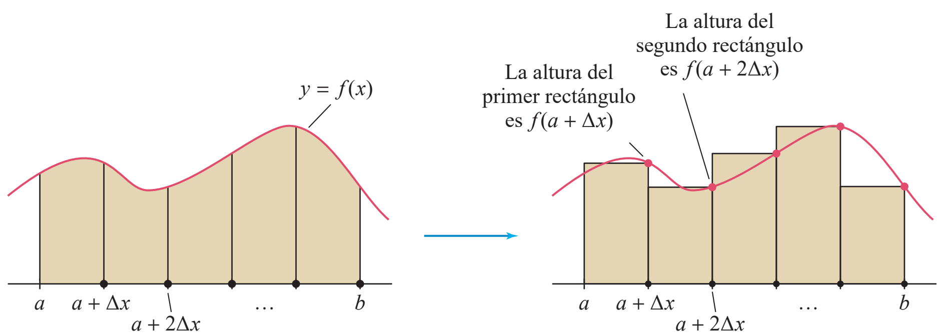
Recordemos que el procedimiento para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva (la derivada) comprende dos etapas: en primer lugar se aproxima la pendiente mediante rectas secantes para, a continuación, calcular el límite de estas aproximaciones. En el cálculo integral, se consideran asimismo dos etapas:

- *En primer lugar, se aproxima el área por debajo de la gráfica de la función usando rectángulos.*
- *A continuación, se calcula el área exacta (la integral) como el límite de estas aproximaciones.*

Como punto de partida, se escoge un número natural N y se divide $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud, tal y como se muestra en la figura 4(A). El intervalo $[a, b]$ tiene longitud $b - a$, de manera que cada subintervalo tiene longitud $\Delta x = (b - a)/N$. Los extremos superiores de cada subintervalo son

$$\boxed{a + \Delta x,\ a + 2\Delta x,\ \ldots,\ a + (N-1)\Delta x,\ a + N\Delta x}$$

Observemos que el último extremo superior es b, pues $a + N\Delta x = a + N((b - a)/N) = b$. A continuación, tal y como se ilustra en la figura 4(B), sobre cada subintervalo se construye un rectángulo cuya altura es el valor de $f(x)$ en el *extremo superior* del subintervalo.



(A) División de $[a, b]$ en N subintervalos, cada uno de longitud Δx.

(B) Construcción de rectángulos basados en el extremo superior de cada subintervalo.

FIGURA 4

La suma de las áreas de estos rectángulos da lugar a una *aproximación* del área por debajo de la gráfica. El primer rectángulo tiene base Δx y altura $f(a + \Delta x)$, de manera que su área es $f(a + \Delta x)\Delta x$. Análogamente, el segundo rectángulo tiene altura $f(a + 2\Delta x)$

y área $f(a+2\Delta x)\,\Delta x$, etc. La suma de las áreas de todos estos rectángulos se denota como R_N y se denomina la **aproximación de orden N basada en el extremo superior**:

$$R_N = f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a+N\Delta x)\Delta x$$

Sacando factor común Δx, se obtiene que

$$\boxed{R_N = \Delta x\left(f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \cdots + f(a+N\Delta x)\right)}$$

Resumen:

a = *extremo inferior del intervalo* $[a,b]$

b = *extremo superior del intervalo* $[a,b]$

N = *número de subintervalos en* $[a,b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

Es decir: R_N *es igual a* Δx *multiplicado por la suma de los valores de la función en los extremos superiores de los subintervalos*.

■ **EJEMPLO 1** Calcule R_4 y R_6 para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1,3]$.

Solución

Etapa 1. **Determine Δx y los extremos superiores**

Para calcular R_4, se divide $[1,3]$ en cuatro subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. Los extremos superiores son $a + j\Delta x = 1 + j(\frac{1}{2})$ para $j = 1,2,3,4$. Estos valores se sitúan en intervalos de longitud $\frac{1}{2}$, que empiezan en $\frac{3}{2}$; los extremos superiores son $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$, tal y como se muestra en la f gura 5(A).

Etapa 2. **Calcule Δx multiplicado por la suma de los valores de la función**

R_4 es igual a Δx multiplicado por la suma de los valores de la función en los extremos superiores:

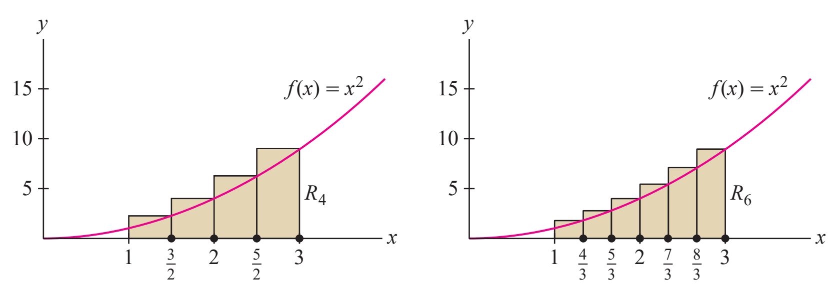
$$R_4 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{4}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{6}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = \frac{43}{4} = 10{,}75$$

R_6 se obtiene de manera análoga: $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$ y los extremos superiores se sitúan en intervalos de longitud $\frac{1}{3}$, que empiezan en $\frac{4}{3}$ y f nalizan en 3, tal y como se muestra en la f gura 5(B). Por tanto,

$$R_6 = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{9}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{16}{9} + \frac{25}{9} + \frac{36}{9} + \frac{49}{9} + \frac{64}{9} + \frac{81}{9}\right) = \frac{271}{27} \approx 10{,}037$$ ■



(A) La aproximación R_4

(B) La aproximación R_6

FIGURA 5

Notación sumatoria

La **notación sumatoria** es una notación estándar para escribir sumas de una manera compacta. La suma de los números $a_m, \dots, a_n$ $(m \le n)$ se denota

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Se usa la letra griega $\sum$ (sigma mayúscula) para representar la "suma," y la notación $\sum\limits_{j=m}^{n}$ indica que el sumatorio empieza en $j = m$ y acaba en $j = n$. Por ejemplo:

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

En este sumatorio, el término j-ésimo es $a_j = j^2$. Nos referiremos a j^2 como el **término general**. La letra j se denomina **índice del sumatorio**. También se llama **variable muda**, porque cualquier otra letra puede ser utilizada en su lugar. Por ejemplo:

$$\sum_{k=4}^{6} (k^2 - 2k) = \overbrace{(4^2 - 2(4))}^{k=4} + \overbrace{(5^2 - 2(5))}^{k=5} + \overbrace{(6^2 - 2(6))}^{k=6} = 47$$

$$\sum_{m=7}^{9} 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad (\text{pues } a_7 = a_8 = a_9 = 1)$$

Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para la suma de números reales dan lugar a las siguientes reglas para operar con sumatorios.

Linealidad de los sumatorios

- $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$
- $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} C a_j = C \sum_{j=m}^{n} a_j$ (para cualquier constante C)
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} k = nk$ (para cualquier constante k y $n \ge 1$)

Por ejemplo,

$$\sum_{j=3}^{5} (j^2 + j) = (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + (5^2 + 5)$$

es igual a

$$\sum_{j=3}^{5} j^2 + \sum_{j=3}^{5} j = (3^2 + 4^2 + 5^2) + (3 + 4 + 5)$$

La linealidad puede ser útil para escribir un único sumatorio como suma de varios. Por ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{100}(7k^2 - 4k + 9) = \sum_{k=0}^{100} 7k^2 + \sum_{k=0}^{100}(-4k) + \sum_{k=0}^{100} 9$$
$$= 7\sum_{k=0}^{100} k^2 - 4\sum_{k=0}^{100} k + 9\sum_{k=0}^{100} 1$$

Cuando se trabaja con aproximaciones del área, es conveniente usar la notación sumatoria. Por ejemplo, R_N es una suma de término general $f(a + j\Delta x)$:

$$R_N = \Delta x[f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \cdots + f(a + N\Delta x)]$$

El sumatorio va desde $j = 1$ hasta $j = N$ y R_N se puede escribir de forma compacta como

$$\boxed{R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x)}$$

Usaremos otras dos aproximaciones rectangulares para el área: la aproximación en base al extremo inferior y la aproximación en base al punto medio. Como antes, se divide $[a, b]$ en N subintervalos. En la **la aproximación en base al extremo inferior** L_N, las alturas de los rectángulos son los valores de $f(x)$ en los extremos inferiores [f gura 6(A)]. Estos extremos inferiores son:

RECORDATORIO

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$a,\ a + \Delta x,\ a + 2\Delta x,\ \ldots,\ a + (N-1)\Delta x$$

y la suma de las áreas de los rectángulos, basados en el extremo inferior, es:

$$L_N = \Delta x\big(f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \cdots + f(a + (N-1)\Delta x)\big)$$

Cabe observar que el término general de R_N y el de L_N es, en ambos casos, $f(a + j\Delta x)$. Sin embargo, la suma para L_N va desde $j = 0$ hasta $j = N - 1$, en lugar de empezar en $j = 1$ y acabar en $j = N$:

$$\boxed{L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(a + j\Delta x)}$$

En la **aproximación en base al punto medio**, M_N, la altura de los rectángulos es el valor de $f(x)$ en el punto medio del subintervalo, en lugar de en los extremos. Como se observa en la f gura 6(B), los puntos medios son:

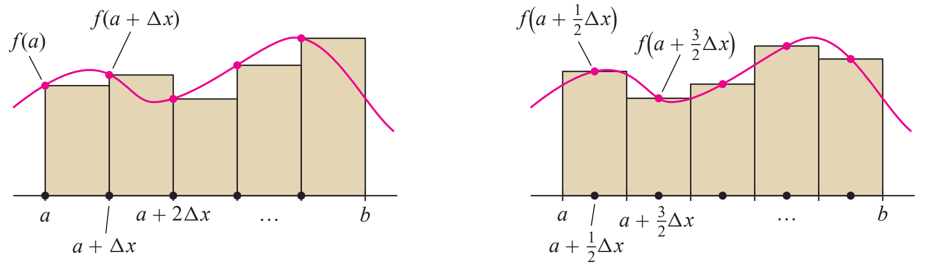
$$a + \frac{1}{2}\Delta x,\ a + \frac{3}{2}\Delta x,\ \ldots,\ a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta x$$

La suma de las áreas de los rectángulos basados en el punto medio es:

$$M_N = \Delta x\left(f\left(a + \frac{1}{2}\Delta x\right) + f\left(a + \frac{3}{2}\Delta x\right) + \cdots + f\left(a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right)$$

En notación sumatoria,

$$\boxed{M_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)}$$



(A) Rectángulos basados en el extremo inferior. (B) Rectángulos basados en el punto medio.

FIGURA 6

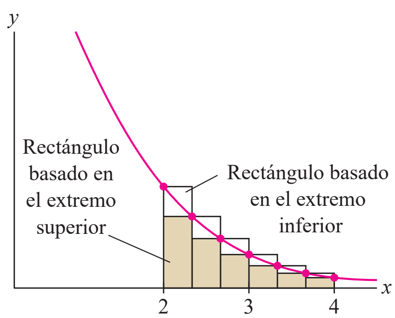


FIGURA 7 L_6 y R_6 para $f(x) = x^{-1}$ en $[2, 4]$.

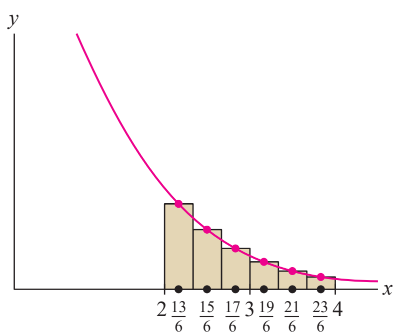


FIGURA 8 M_6 para $f(x) = x^{-1}$ en $[2, 4]$.

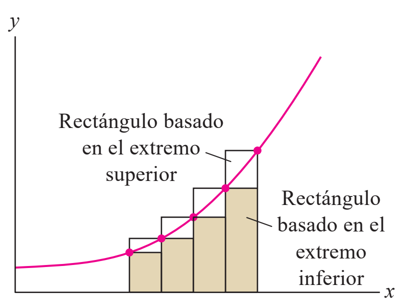


FIGURA 9 Si $f(x)$ es estrictamente creciente, los rectángulos basados en el extremo inferior se encuentran por debajo de la gráf ca de f y los basados en el extremo superior por encima.

■ **EJEMPLO 2** Calcule R_6, L_6 y M_6 para $f(x) = x^{-1}$ en $[2, 4]$.

Solución En esta situación, $\Delta x = (b - a)/N = (4 - 2)/6 = \frac{1}{3}$. En el sumatorio de R_6 y L_6, el término general es:

$$f(a + j\Delta x) = f\left(2 + j\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2 + \frac{1}{3}j} = \frac{3}{6 + j}$$

Por consiguiente (f gura 7):

$$R_6 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} f\left(2 + \left(\frac{1}{3}\right)j\right) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6}\frac{3}{6+j}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{3}{9} + \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}\right) \approx 0{,}653$$

En L_6, la suma empieza en $j = 0$ y acaba en $j = 5$:

$$L_6 = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5}\frac{3}{6+j} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{6} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{3}{9} + \frac{3}{10} + \frac{3}{11}\right) \approx 0{,}737$$

El término general de M_6 es:

$$f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right) = f\left(2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2 + \frac{j}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{6}{12 + 2j - 1}$$

Sumando desde $j = 1$ hasta 6, se obtiene (f gura 8):

$$M_6 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} f\left(2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6}\frac{6}{12 + 2j - 1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{13} + \frac{6}{15} + \frac{6}{17} + \frac{6}{19} + \frac{6}{21} + \frac{6}{23}\right) \approx 0{,}692$$ ■

UN APUNTE GRÁFICO Funciones monótonas En la f gura 7 se observa que, para $f(x) = x^{-1}$, los rectángulos en base al extremo inferior quedan por encima de la gráf - ca y los basados en el extremo superior se sitúan por debajo de ésta. El área exac- ta A debe encontrarse entre R_6 y L_6. En consecuencia, y según el ejemplo anterior, $0{,}65 \le A \le 0{,}74$. De forma más general, *si $f(x)$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente) el área exacta se encuentra entre R_N y L_N* (f gura 9):

- $f(x)$ estrictamente creciente $\Rightarrow$ $L_N \le$ área por debajo de la gráf ca $\le R_N$
- $f(x)$ estrictamente decreciente $\Rightarrow$ $R_N \le$ área por debajo de la gráf ca $\le L_N$

Cálculo de un área como límite de aproximaciones

En la figura 10 se muestran diferentes aproximaciones basadas en el extremo superior. Cabe destacar que el *error*, que corresponde a la región amarilla situada por encima de la gráfica, disminuye al aumentar el número de rectángulos. En realidad se observa que, *considerando un número suficientemente elevado N de rectángulos, se puede disminuir el error tanto como sea preciso.* De esta manera, tiene sentido considerar el límite cuando $N \to \infty$, pues debería proporcionar el área exacta por debajo de la curva. El siguiente teorema garantiza que tal límite existe (ver el teorema 8 en el apéndice D para una demostración y el ejercicio 85 para una caso particular).

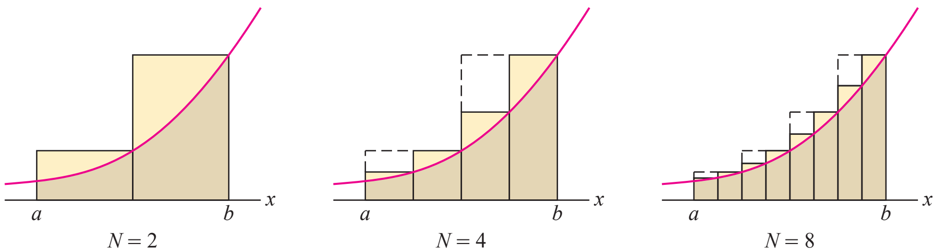


FIGURA 10 El error disminuye al considerar más rectángulos.

En el teorema 1, no se supone que $f(x) \geq 0$. Si $f(x)$ toma valores negativos, el límite L ya no representa el área por debajo de la gráfica, pero puede ser interpretado como un área "con signo", concepto que se tratará en la siguiente sección.

TEOREMA 1 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces las aproximaciones basadas en los extremos y en el punto medio se aproximan entre ellas y tienden al mismo límite cuando $N \to \infty$. Es decir, existe un valor L tal que:

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} M_N = L$$

Si $f(x) \geq 0$, se define el área por debajo de la gráfica de $f(x)$ en $[a, b]$ como L.

UN APUNTE CONCEPTUAL En cálculo diferencial se usan los límites para definir cantidades elementales que, de otra forma, no tendrían un significado preciso. En base al teorema 1 se puede *definir* el área como un límite, más o menos de la misma manera que se define la pendiente de la recta tangente como el límite de las pendientes de las rectas secantes.

En los tres ejemplos que se encuentran a continuación, se ilustra el teorema 1 utilizando fórmulas para las **sumas de potencias**. La k-ésima suma de potencias es la suma de las potencias k-ésimas para los N primeros enteros positivos $\{1, , 2, \ldots, N\}$. Utilizaremos las fórmulas de las sumas de potencias para $k = 1, 2, 3$.

En los problemas 40-43 de la sección 1.3 se desarrolla un método para demostrar fórmulas para sumas de potencias. Las fórmulas (3)-(5) se pueden verificar también por inducción.

Sumas de potencias

$$\sum_{j=1}^{N} j = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \qquad \boxed{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \qquad \boxed{4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} \qquad \boxed{5}$$

Por ejemplo, según la ec. (4),

$$\sum_{j=1}^{6} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \underbrace{\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} + \frac{6}{6}}_{\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \text{ para } N=6} = 91$$

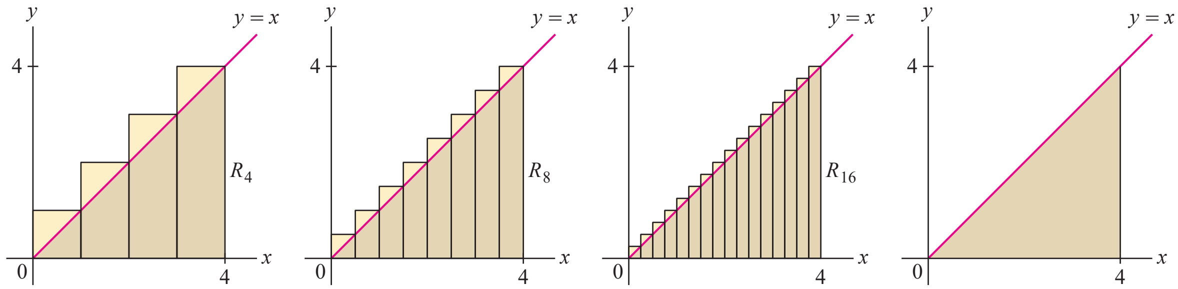


FIGURA 11 Las aproximaciones en base al extremo superior aproximan al área del triángulo.

Como primer ejemplo, calcularemos el área de un triángulo rectángulo de manera "exhaustiva".

■ **EJEMPLO 3** Determine el área A por debajo de la gráf ca de $f(x) = x$ en $[0, 4]$ de tres maneras:

(a) Aplicando geometría plana **(b)** $\lim_{N\to\infty} R_N$ **(c)** $\lim_{N\to\infty} L_N$

Solución La región por debajo de la gráf ca es un triángulo rectángulo de base $b = 4$ y altura $h = 4$ (f gura 11).

(a) Según las fórmulas de geometría plana para el área de un triángulo, $A = \frac{1}{2}bh = (\frac{1}{2})(4)(4) = 8$.

← **RECORDATORIO**

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x)$$

$$L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(a + j\Delta x)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

(b) Calculemos esta área nuevamente, pero ahora como un límite. Como $\Delta x = (b - a)/N = 4/N$ y $f(x) = x$,

$$f(a + j\Delta x) = f\left(0 + j\left(\frac{4}{N}\right)\right) = \frac{4j}{N}$$

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \frac{4}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{4j}{N} = \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N} j$$

En la última igualdad, se ha sacado factor común $4/N$ de la suma. Se puede proceder de esta manera porque $4/N$ es una constante y no depende de j. Así, según la fórmula (3):

$$R_N = \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N} j = \frac{16}{N^2}\underbrace{\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}_{\text{Fórmula para la suma de potencias}} = \frac{8}{N^2}\left(N^2 + N\right) = 8 + \frac{8}{N}$$

El segundo término $8/N$ tiende a cero cuando N tiende a ∞, de manera que

$$A = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}\left(8 + \frac{8}{N}\right) = 8$$

Tal y como cabía esperar, este límite conduce al mismo valor que el de la fórmula $\frac{1}{2}bh$.

(c) La aproximación basada en el extremo inferior es análoga, pero la suma empieza en $j = 0$ y acaba en $j = N - 1$:

En la ec. (6), se aplica la fórmula

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$$

con $N - 1$ en lugar de N:

$$\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2}$$

$$L_N = \frac{16}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{16}{N^2}\left(\frac{(N-1)N}{2}\right) = 8 - \frac{8}{N} \qquad \boxed{6}$$

Cabe mencionar que, en el segundo paso, se ha reemplazado la suma que empieza en $j = 0$ por una suma que empieza en $j = 1$. Este cambio es factible porque el término para $j = 0$ es cero y puede ser omitido. Una vez más, se obtiene que $A = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty}(8 - 8/N) = 8$. ■

En el siguiente ejemplo se calcula el área bajo una gráfica curva. A diferencia de los ejemplos anteriores, no se puede calcular este área de forma directa, aplicando geometría plana.

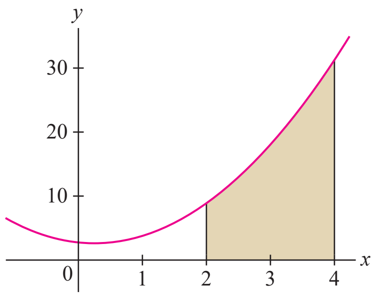


FIGURA 12 Área por debajo de la gráf ca de $f(x) = 2x^2 - x + 3$ en $[2, 4]$.

EJEMPLO 4 Sea A el área por debajo de la gráf ca de $f(x) = 2x^2 - x + 3$ en $[2, 4]$ (f gura 12). Calcule A como el límite $\lim_{N\to\infty} R_N$.

Solución

***Etapa 1.* Exprese R_N como sumas de potencias**

En este caso, $\Delta x = (4 - 2)/N = 2/N$ y

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(2 + \frac{2j}{N}\right)$$

El término general se puede simplif car mediante manipulación algebraica. Como $f(x) = 2x^2 - x + 3$,

$$\begin{aligned} f\left(2 + \frac{2j}{N}\right) &= 2\left(2 + \frac{2j}{N}\right)^2 - \left(2 + \frac{2j}{N}\right) + 3 \\ &= 2\left(4 + \frac{8j}{N} + \frac{4j^2}{N^2}\right) - \left(2 + \frac{2j}{N}\right) + 3 = \frac{8}{N^2}j^2 + \frac{14}{N}j + 9 \end{aligned}$$

De esta manera, R_N se puede expresar como sumas de potencias:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{8}{N^2}j^2 + \frac{14}{N}j + 9\right) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{8}{N^2}j^2 + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{14}{N}j + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}9 \\ &= \frac{16}{N^3}\sum_{j=1}^{N}j^2 + \frac{28}{N^2}\sum_{j=1}^{N}j + \frac{18}{N}\sum_{j=1}^{N}1 \end{aligned} \tag{7}$$

***Etapa 2.* Utilice las fórmulas para las sumas de potencias**

Aplicando las fórmulas (3) y (4), para las sumas de potencias, en la ec. (7) se obtiene:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{16}{N^3}\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) + \frac{28}{N^2}\left(\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}\right) + \frac{18}{N}(N) \\ &= \left(\frac{16}{3} + \frac{8}{N} + \frac{8}{3N^2}\right) + \left(14 + \frac{14}{N}\right) + 18 \\ &= \frac{112}{3} + \frac{22}{N} + \frac{8}{3N^2} \end{aligned}$$

***Etapa 3.* Calcule el límite**

$$A = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{112}{3} + \frac{22}{N} + \frac{8}{3N^2}\right) = \frac{112}{3}$$

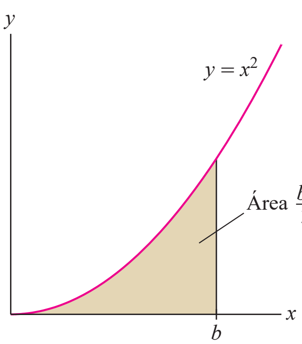


FIGURA 13

EJEMPLO 5 Demuestre que para todo $b > 0$, el área A por debajo de la gráf ca de $f(x) = x^2$ en $[0, b]$ es igual a $b^3/3$, tal y como se muestra en la f gura 13.

Solución Realizaremos el cálculo en base a R_N. Se tiene que $\Delta x = (b - 0)/N = b/N$ y

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(0 + j\Delta x) = \frac{b}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(0 + j\frac{b}{N}\right)^2 = \frac{b}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(j^2\frac{b^2}{N^2}\right) = \frac{b^3}{N^3}\sum_{j=1}^{N}j^2$$

RECORDATORIO *Según la ec. (4)*

$$\sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

Según la fórmula para la suma de potencias que se encuentra en el recordatorio al margen,

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{b^3}{N^3}\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) = \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2N} + \frac{b^3}{6N^2} \\ A &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2N} + \frac{b^3}{6N^2}\right) = \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

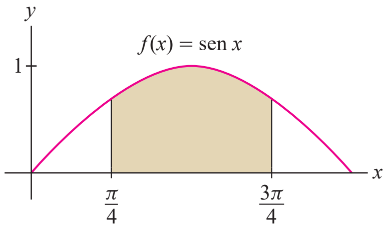


FIGURA 14 El cálculo del área de esta región presenta dificultades cuando se obtiene como límite de aproximaciones basadas en extremos.

El área por debajo de la gráfica de cualquier polinomio se puede obtener usando fórmulas para sumas de potencias, como en los ejemplos anteriores. Para otras funciones, puede ser costoso, o incluso imposible, evaluar el límite que define el área directamente. Sea $f(x) = \text{sen}\, x$ en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. En este caso (figura 14), $\Delta x = (3\pi/4 - \pi/4)/N = \pi/(2N)$ y el área A es:

$$A = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^{N} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi j}{2N}\right)$$

Con algo de trabajo, se puede probar que el límite es igual a $A = \sqrt{2}$. Sin embargo, en la sección 5.3 veremos que es mucho más sencillo aplicar el teorema fundamental del cálculo, que reduce el problema del cálculo de áreas al de la determinación de primitivas.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Hemos utilizado las fórmulas para las potencias de orden k, con $k = 1, 2, 3$. Cabe preguntarse si existen fórmulas análogas para potencias de cualquier orden k. Este problema fue estudiado, y finalmente solucionado sobre el 1690, por el gran matemático suizo Jacob Bernoulli. De su descubrimiento, escribió:

Con su ayuda [la de estas fórmulas] fui capaz de determinar, en menos de un cuarto de hora, que la suma de las potencias de orden 10 para los 1000 primeros enteros positivos es igual a:

91409924241424243424241924242500

La fórmula general de Bernoulli es,

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{k}{12} n^{k-1} + \ldots$$

Los puntos indican términos que involucran potencias de órdenes inferiores y cuyos coeficientes se expresan mediante los llamados números de Bernoulli. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n$$

Estas fórmulas se encuentran implementadas en la mayor parte de los sistemas de álgebra computacional.

5.1 RESUMEN

- Aproximaciones del área por debajo de la gráfica de $f(x)$ en $[a, b]$ $\left(\Delta x = \dfrac{b-a}{N}\right)$:

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \Delta x\big(f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \cdots + f(a + N\Delta x)\big)$$

$$L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(a + j\Delta x) = \Delta x\big(f(a) + f(a + \Delta x) + \cdots + f(a + (N-1)\Delta x)\big)$$

$$M_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

$$= \Delta x\left(f\left(a + \frac{1}{2}\Delta x\right) + \cdots + f\left(a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right)$$

Suma de potencias

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}$$

- Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces las aproximaciones basadas en los extremos y en el punto medio se aproximan entre ellas y tienden al mismo límite L:

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} M_N = L$$

- Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, se def ne el área por debajo de la gráf ca de $y = f(x)$ en $[a, b]$ como L.

5.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Si se divide $[2, 5]$ en seis subintervalos, ¿cuáles son los extremos superiores e inferiores resultantes?

2. Se divide el intervalo $[1, 5]$ en ocho subintervalos.

(a) ¿Cuál es el extremo inferior del último subintervalo?

(b) ¿Cuáles son los extremos superiores de los dos primeros subintervalos?

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de sumas son diferentes?

(a) $\sum_{i=1}^{4} i, \quad \sum_{\ell=1}^{4} \ell$ **(b)** $\sum_{j=1}^{4} j^2, \quad \sum_{k=2}^{5} k^2$

(c) $\sum_{j=1}^{4} j, \quad \sum_{i=2}^{5} (i-1)$ **(d)** $\sum_{i=1}^{4} i(i+1), \quad \sum_{j=2}^{5} (j-1)j$

4. Razone por qué $\sum_{j=1}^{100} j = \sum_{j=0}^{100} j$, pero $\sum_{j=1}^{100} 1$ no es igual a $\sum_{j=0}^{100} 1$.

5. Razone por qué $L_{100} \geq R_{100}$ para $f(x) = x^{-2}$ en $[3, 7]$.

Problemas

1. En la f gura 15 se muestra la velocidad de un objecto a durante un intervalo de 3 minutos. Determine la distancia recorrida durante el intervalo $[0, 3]$ y durante el intervalo $[1, 2{,}5]$ (recuerde que se debe realizar la conversión de km/h a km/min).

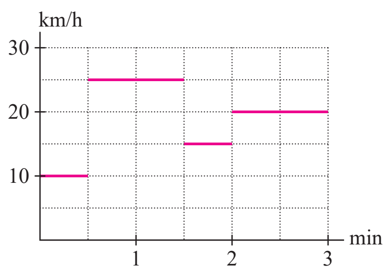


FIGURA 15

2. Un avestruz (f gura 16) corre a una velocidad de 20 km/h durante 2 minutos, de 12 km/h durante 3 minutos y de 40 km/h durante otro minuto. Calcule la distancia total recorrida e ilustre, mediante una gráf ca, la posible interpretación de esta cantidad como un área.

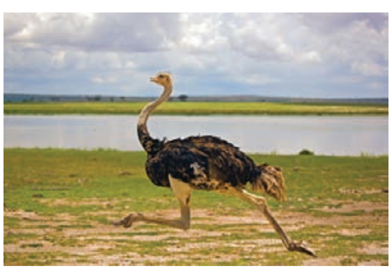


FIGURA 16 Los avestruces pueden alcanzar velocidades de hasta 70 km/h.

3. En Octubre de 1996 cayó una fuerte tormenta en Portland (Maine), dando lugar a un récord de precipitaciones. En la siguiente tabla se encuentra el registro de la tasa de precipitación $R(t)$ (en centímetros por hora) obtenido durante el 21 de Octubre, siendo t el número de horas desde la medianoche. Calcule la cantidad total de precipitación durante este periodo de 24 horas e ilustre, mediante una gráf ca, la posible interpretación de esta cantidad como un área.

t (h)	0-2	2-4	4-9	9-12	12-20	20-24
$R(t)$ (cm)	0,5	0,3	1,0	2,5	1,5	0,6

4. La velocidad de un objeto es $v(t) = 12t$ m/s. Aplicando la ec. (2) y fórmulas pertinentes de geometría plana, encuentre la distancia recorrida en el intervalo $[0, 2]$ y en el intervalo $[2, 5]$.

5. Obtenga R_5 y L_5 en $[0, 1]$ utilizando la siguiente tabla de valores:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	50	48	46	44	42	40

6. La velocidad de un cierto objeto a intervalos de medio segundo se encuentra registrada en la siguiente tabla. En base a ésta, calcule R_6, L_6 y M_3 para estimar la distancia recorrida.

t (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
v (m/s)	0	12	18	25	20	14	20

7. Sea $f(x) = 2x + 3$.

(a) Calcule R_6 y L_6 en $[0, 3]$.

(b) Aplicando geometría plana, determine el área exacta A y calcule los errores $|A - R_6|$ y $|A - L_6|$ cometidos en las aproximaciones.

8. Repita el ejercicio 7 para $f(x) = 20 - 3x$ en $[2, 4]$.

9. Calcule R_3 y L_3 para $f(x) = x^2 - x + 4$ en $[1, 4]$. A continuación, dibuje la gráf ca de f y los rectángulos para cada aproximación. ¿Es el área por debajo de la gráf ca mayor o menor que R_3? ¿Y que L_3?

10. Sea $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y $\Delta x = \frac{1}{3}$. Dibuje la gráf ca de $f(x)$ y los rectángulos basados en el extremo superior, cuya área se obtiene mediante la suma $\sum_{i=1}^{6} f(1 + i\Delta x)\Delta x$.

11. Estime R_3, M_3 y L_6 en $[0, 1{,}5]$ para la función dada por la f gura 17.

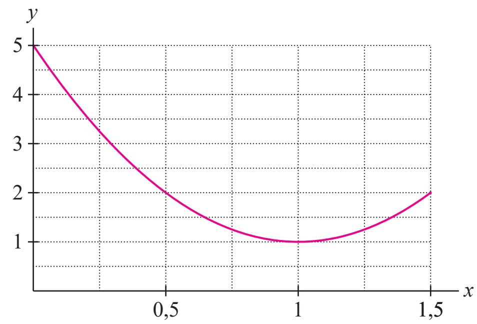


FIGURA 17

12. Calcule el área de los rectángulos sombreados en la f gura 18. ¿Qué aproximación representan estos rectángulos?

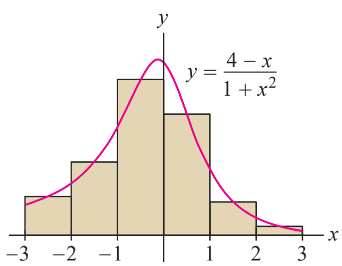


FIGURA 18

Calcule la aproximación requerida en cada uno de los ejercicios 13-20, para la función e intervalo facilitados.

13. $R_3, \quad f(x) = 7 - x, \quad [3, 5]$

14. $L_6, \quad f(x) = \sqrt{6x + 2}, \quad [1, 3]$

15. $M_6, \quad f(x) = 4x + 3, \quad [5, 8]$

16. $R_5, \quad f(x) = x^2 + x, \quad [-1, 1]$

17. $L_6, \quad f(x) = x^2 + 3|x|, \quad [-2, 1]$

18. $M_4, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad [3, 5]$

19. $L_4, \quad f(x) = \cos^2 x, \quad [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

20. $M_4, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad [1, 5]$

En los ejercicios 21-26, escriba la suma correspondiente con notación sumatoria.

21. $4^7 + 5^7 + 6^7 + 7^7 + 8^7$

22. $(2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + (5^2 + 5)$

23. $(2^2 + 2) + (2^3 + 2) + (2^4 + 2) + (2^5 + 2)$

24. $\sqrt{1 + 1^3} + \sqrt{2 + 2^3} + \cdots + \sqrt{n + n^3}$

25. $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$

26. $\operatorname{sen}(\pi) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$

27. Calcule las sumas:

(a) $\sum_{i=1}^{5} 9$ **(b)** $\sum_{i=0}^{5} 4$ **(c)** $\sum_{k=2}^{4} k^3$

28. Calcule las sumas:

(a) $\sum_{j=3}^{4} \operatorname{sen}\left(j\dfrac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\sum_{k=3}^{5} \dfrac{1}{k-1}$ **(c)** $\sum_{j=0}^{2} 3^{j-1}$

29. Sea $b_1 = 4$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$ y $b_4 = -4$. Calcule:

(a) $\sum_{i=2}^{4} b_i$ **(b)** $\sum_{j=1}^{2} (2^{b_j} - b_j)$ **(c)** $\sum_{k=1}^{3} k b_k$

30. Suponiendo que $a_1 = -5$, $\sum_{i=1}^{10} a_i = 20$ y $\sum_{i=1}^{10} b_i = 7$, calcule:

(a) $\sum_{i=1}^{10} (4a_i + 3)$ **(b)** $\sum_{i=2}^{10} a_i$ **(c)** $\sum_{i=1}^{10} (2a_i - 3b_i)$

31. Calcule $\sum_{j=101}^{200} j$. *Indicación:* Escriba el sumatorio como la diferencia de dos sumas y aplique la fórmula (3).

32. Calcule $\sum_{j=1}^{30} (2j + 1)^2$. *Indicación:* Expandir y aplique las fórmulas (3)-(4).

En los ejercicios 33-40, aplique la linealidad y las fórmulas (3)-(5) para reescribir y evaluar después las sumas.

33. $\sum_{j=1}^{20} 8j^3$

34. $\sum_{k=1}^{30} (4k - 3)$

35. $\sum_{n=51}^{150} n^2$

36. $\sum_{k=101}^{200} k^3$

37. $\sum_{j=0}^{50} j(j - 1)$

38. $\sum_{j=2}^{30} \left(6j + \dfrac{4j^2}{3}\right)$

39. $\sum_{m=1}^{30} (4 - m)^3$

40. $\sum_{m=1}^{20} \left(5 + \dfrac{3m}{2}\right)^2$

En los ejercicios 41-44, evalúe el límite aplicando las fórmulas (3)-(5).

41. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{i}{N^2}$

42. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{j^3}{N^4}$

43. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{i^2 - i + 1}{N^3}$

44. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(\dfrac{i^3}{N^4} - \dfrac{20}{N}\right)$

En los ejercicios 45-50, calcule el límite para la función e intervalo facilitados. Verif que las respuestas obtenidas mediante razonamientos de geometría plana.

45. $\lim\limits_{N\to\infty} R_N, \quad f(x) = 9x, \quad [0, 2]$

46. $\lim\limits_{N\to\infty} R_N, \quad f(x) = 3x + 6, \quad [1, 4]$

47. $\lim\limits_{N\to\infty} L_N, \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 2, \quad [0, 4]$

48. $\lim\limits_{N\to\infty} L_N, \quad f(x) = 4x - 2, \quad [1, 3]$

49. $\lim\limits_{N\to\infty} M_N, \quad f(x) = x, \quad [0, 2]$

50. $\lim\limits_{N\to\infty} M_N, \quad f(x) = 12 - 4x, \quad [2, 6]$

51. Sea $f(x) = 3x^2 + 4x$, $x \in [0, 2]$. Demuestre que:

$$R_N = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{24j^2}{N^2} + \frac{16j}{N}\right)$$

A continuación, evalúe el $\lim\limits_{N\to\infty} R_N$.

52. Sea $f(x) = 3x^3 - x^2$, $x \in [1, 5]$. Demuestre que:

$$R_N = \frac{4}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{192j^3}{N^3} + \frac{128j^2}{N^2} + \frac{28j}{N} + 2\right)$$

A continuación, evalúe el $\lim\limits_{N\to\infty} R_N$.

En los ejercicios 53-60, halle una fórmula para R_N y calcule el área por debajo de la gráf ca como un límite.

53. $f(x) = x^2, \quad [0, 1]$

54. $f(x) = x^2, \quad [-1, 5]$

55. $f(x) = 6x^2 - 4, \quad [2, 5]$

56. $f(x) = x^2 + 7x, \quad [6, 11]$

57. $f(x) = x^3 - x, \quad [0, 2]$

58. $f(x) = 2x^3 + x^2, \quad [-2, 2]$

59. $f(x) = 2x + 1, \quad [a, b] \quad$ (a, b constantes tales que $a < b$)

60. $f(x) = x^2, \quad [a, b] \quad$ (a, b constantes tales que $a < b$)

En los ejercicios 61-64, describa el área representada por los límites.

61. $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\dfrac{j}{N}\right)$

62. $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{3}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(2 + \dfrac{3j}{N}\right)^4$

63. $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{5}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left(-2 + 5\dfrac{j}{N}\right)^4$

64. $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\pi}{2N}\sum\limits_{j=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4N} + \dfrac{j\pi}{2N}\right)$

En los ejercicios 65-70, exprese el área por debajo de la gráf ca mediante la aproximación indicada, dando el resultado en notación sumatoria pero sin proceder a su evaluación.

65. $R_N, \quad f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

66. $R_N, \quad f(x) = x^{-1}$ en $[1, 7]$

67. $L_N, \quad f(x) = \sqrt{2x + 1}$ en $[7, 11]$

68. $L_N, \quad f(x) = \cos x$ en $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$

69. $M_N, \quad f(x) = \tan x$ en $[\frac{1}{2}, 1]$

70. $M_N, \quad f(x) = x^{-2}$ en $[3, 5]$

71. Evalúe $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\sqrt{1 - \left(\dfrac{j}{N}\right)^2}$ interpretando este límite como parte del área de una f gura geométrica conocida.

En los ejercicios 72-74, sean $f(x) = x^2$ y R_N, L_N y M_N las aproximaciones correspondientes, en el intervalo $[0, 1]$.

72. Demuestre que $R_N = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2N} + \dfrac{1}{6N^2}$. Interprete $\dfrac{1}{2N} + \dfrac{1}{6N^2}$ como el área de una cierta región.

73. Demuestre que:

$$L_N = \frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}, \qquad M_N = \frac{1}{3} - \frac{1}{12N^2}$$

A continuación, ordene las tres aproximaciones R_N, L_N y M_N en orden creciente de precisión (utilice el ejercicio 72).

74. Para cada una de las tres aproximaciones, R_N, L_N y M_N, halle el menor entero N para el que el error es inferior a 0,001.

En los ejercicios 75-80, aplique los argumentos del **Apunte gráf co**, *en la página 249, para obtener cotas del área.*

75. Sea A el área bajo $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$. Demuestre que $0{,}51 \le A \le 0{,}77$ mediante el cálculo de R_4 y de L_4. Explique los razonamientos seguidos.

76. Utilice R_5 y L_5 para demostrar que el área A bajo $y = x^{-2}$ en $[10, 13]$ verif ca $0{,}0218 \le A \le 0{,}0244$.

77. Utilice R_4 y L_4 para demostrar que el área A por debajo de la gráf ca de $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ verif ca $0{,}79 \le A \le 1{,}19$.

78. Demuestre que el área A bajo $f(x) = x^{-1}$ en $[1, 8]$ verif ca:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \le A \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

79. SAC Demuestre que el área A bajo $y = x^{1/4}$ en $[0, 1]$ cumple $L_N \le A \le R_N$ para todo N. Utilice un sistema de álgebra computacional para evaluar L_N y R_N, $N = 100$ y 200, y determine A con dos decimales de precisión.

80. SAC Demuestre que el área A bajo $y = 4/(x^2+1)$ en $[0, 1]$ verif ca $R_N \le A \le L_N$ para todo N. Utilizando un sistema de álgebra computacional, determine A con tres decimales, como mínimo, de precisión. ¿Qué valor exacto, se puede suponer, tiene A?

Problemas avanzados

81. Aunque la precisión de R_N generalmente mejora cuando N aumenta, esto no tiene por qué ser cierto para valores pequeños de N. Dibuje la gráf ca de una función $f(x)$, positiva sobre un intervalo, tal que R_1 aproxime mejor que R_2 al área exacta por debajo de la gráf ca. Una función que cumpliera esta condición ¿podría ser monótona?

82. Dibuje la gráf ca de una función continua y positiva en un intervalo, para la que tanto R_2 como L_2 sean más pequeños que el área exacta por debajo de la gráf ca. Una función que cumpliere esta condición ¿podría ser monótona?

83. Ilustre gráf camente la siguiente af rmación: *Las aproximaciones basadas en los extremos son menos precisas cuanto mayor sea* $f'(x)$.

84. Demuestre que para cualquier función $f(x)$ en $[a, b]$,

$$R_N - L_N = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a)) \qquad \boxed{8}$$

85. En este ejercicio, se demostrará que si $f(x)$ es estrictamente creciente, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} R_N$ y $\lim\limits_{N\to\infty} L_N$ existen y son iguales [la situación en que $f(x)$ es estrictamente decreciente se demuestra de forma análoga]. Utilizaremos el concepto de supremo, que se puede consultar en el apéndice B.

(a) Ilustre mediante una representación gráf ca adecuada, por qué $L_N \le R_M$ para todo $N, M \ge 1$.

(b) Según (a), la sucesión $\{L_N\}$ está acotada, por tanto existe un valor L que es el supremo de la sucesión. Por def nición, L es el menor número tal que $L_N \le L$ para todo N. Demuestre que $L \le R_M$ para todo M.

(c) En base a (b), $L_N \le L \le R_N$ para todo N. Aplique la ec. (8) para demostrar que $\lim\limits_{N\to\infty} L_N = L$ y $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = L$.

86. Utilice la ec. (8) para demostrar que si $f(x)$ es positiva y monótona, entonces el área A por debajo de la gráf ca en $[a, b]$ verif ca:

$$|R_N - A| \le \frac{b-a}{N}\,|f(b) - f(a)| \qquad \boxed{9}$$

En los ejercicios 87-88 y para cada función e intervalo facilitados, aplique la ec. (9) para determinar un valor de N tal que $|R_N - A| < 10^{-4}$.

87. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, 4]$ **88.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $[0, 3]$

89. Demuestre que, si $f(x)$ es positiva y monótona, entonces M_N se encuentra entre R_N y L_N y que, además, está más próximo al área exacta por debajo de la gráf ca de lo que lo están R_N o L_N. *Indicación:* En la situación en que $f(x)$ es estrictamente creciente, la f gura 19 muestra que la parte del error en R_N debida al i-ésimo rectángulo, es la suma de las áreas $A + B + D$ y para M_N es $|B - E|$. Además, $A \ge E$.

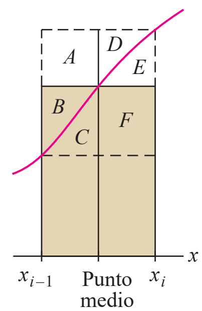


FIGURA 19

5.2 Integral definida

En la sección anterior se vio que, si $f(x)$ era continua en un intervalo $[a, b]$, entonces las aproximaciones basadas en los extremos y la basada en el punto medio tendían a un límite común L cuando $N \to \infty$:

$$L = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} M_N \qquad \boxed{1}$$

Si $f(x) \ge 0$, L es el área por debajo de la gráf ca de $f(x)$. A continuación, se enunciará formalmente que L es la *integral def nida* de $f(x)$ en $[a, b]$. Antes, se van a introducir unas aproximaciones de carácter más general denominadas **sumas de Riemann**.

Tal y como se ha visto anteriormente, para obtener R_N, L_N y M_N se consideran rectángulos de la misma amplitud Δx, cuyas alturas son los valores de $f(x)$ en los extremos o puntos medios de los subintervalos. Para las sumas de Riemann, estos requisitos son menos estrictos: los rectángulos no tienen por qué tener todos la misma amplitud y la altura puede ser *cualquier* valor $f(x)$ del subintervalo.

Para construir una suma de Riemann, se selecciona una partición y un conjunto de puntos intermedios:

- **Partición** P de tamaño N: es un conjunto de puntos que divide $[a, b]$ en N subintervalos.
$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$
- **Puntos intermedios** $C = \{c_1, \ldots, c_N\}$: donde c_i pertenece al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para todo i, $i \le i \le N$.

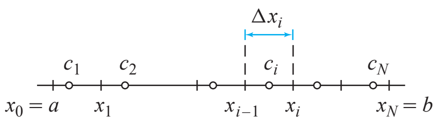


FIGURA 1 Partición de tamaño N y conjunto de puntos intermedios.

Observemos que R_N, L_N y M_N son casos particulares de sumas de Riemann en las que $\Delta x_i = (b-a)/N$, para todo i, y los puntos intermedios c_i son o bien los extremos, o bien los puntos medios.

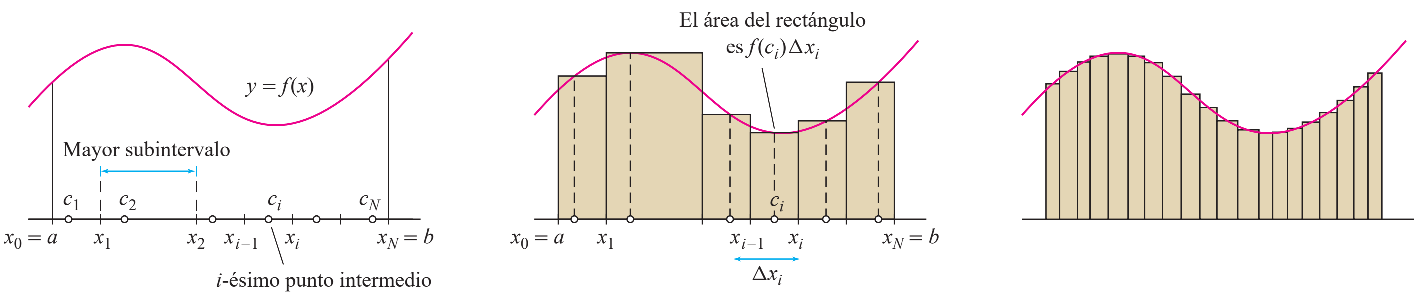
Ver las figuras 1 y 2(A). La longitud del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es

$$\boxed{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$$

La **norma** de P, que se denotará $\|P\|$, es la mayor de las longitudes Δx_i.

Dados P y C, se construye el rectángulo de altura $f(c_i)$ y base Δx_i sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tal y como se ilustra en la figura 2(B). El área de este rectángulo es $f(c_i)\Delta x_i$, si $f(c_i) \geq 0$. Si $f(c_i) < 0$, el rectángulo se sitúa por debajo del eje x y $f(c_i)\Delta x_i$ es el opuesto de esta área. La suma de Riemann es la suma:

$$\boxed{R(f, P, C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_N)\Delta x_N} \qquad \boxed{2}$$



(A) Partición de $[a, b]$ en subintervalos.

(B) Construcción del rectángulo de altura $f(c_i)$ por encima de cada subintervalo.

(C) Rectángulos correspondientes a una suma de Riemann para la que $\|P\|$ es pequeña (gran número de rectángulos).

FIGURA 2 Construcción de $R(f, P, C)$.

■ **EJEMPLO 1** Calcule $R(f, P, C)$ para $f(x) = 8 + 12 \operatorname{sen} x - 4x$ en $[0, 4]$,

$$P : x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 1{,}8 < x_3 = 2{,}9 < x_4 = 4$$
$$C = \{0{,}4,\ 1{,}2,\ 2,\ 3{,}5\}$$

¿Qué valor tiene la norma $\|P\|$?

Solución Las amplitudes de los subintervalos de la partición (figura 3) son

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1 \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 1{,}8 - 1 = 0{,}8$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 2{,}9 - 1{,}8 = 1{,}1 \qquad \Delta x_4 = x_4 - x_3 = 4 - 2{,}9 = 1{,}1$$

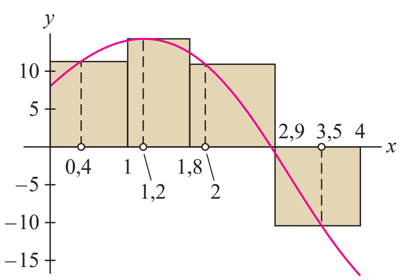


FIGURA 3 Rectángulos definidos por una suma de Riemann para $f(x) = 8 + 12 \operatorname{sen} x - 4x$.

La norma de la partición es $\|P\| = 1{,}1$, pues la mayor de las longitudes de los subintervalos es 1,1 (que corresponde a dos de ellos). Operando con calculadora, se obtiene:

$$R(f, P, C) = f(0{,}4)\Delta x_1 + f(1{,}2)\Delta x_2 + f(2)\Delta x_3 + f(3{,}5)\Delta x_4 \approx$$
$$\approx 11{,}07(1) + 14{,}38(0{,}8) + 10{,}91(1{,}1) - 10{,}2(1{,}1) \approx 23{,}35$$ ■

En la figura 2(C), cabe observar que cuando la norma $\|P\|$ tiende a cero (es decir, que los rectángulos son más estrechos), el número de rectángulos N tiende a ∞ y aproximan con más precisión el área por debajo de la gráfica. Esto nos lleva a la siguiente definición: $f(x)$ es **integrable** en $[a, b]$ si *todas* las sumas de Riemann (y no sólo las aproximaciones basadas en los extremos o en el punto medio) se aproximan unas a otras y hacia el mismo límite L cuando $\|P\|$ tiende a cero. De manera formal,

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, C) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i \qquad \boxed{3}$$

Si $|R(f, P, C) - L|$ se hace arbitrariamente pequeño cuando $\|P\|$ tiende a cero, no importa cómo escojamos la partición o los puntos intermedios. El límite L se denomina la **integral def nida** de $f(x)$ en $[a, b]$.

La notación $\int f(x)\,dx$ fue introducida por Leibniz en 1686. El símbolo $\int$ es una S alargada que indica “sumatorio”. El diferencial dx corresponde a la longitud Δx_i a lo largo del eje x.

DEFINICIÓN 1 Integral definida La integral def nida de $f(x)$ en $[a, b]$, que se denota mediante el símbolo integral, es el límite de las sumas de Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

Si este límite existe, se dice que $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

Riemann fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX, se podría decir que el segundo, tras su profesor C. F. Gauss, Las aportaciones de Riemann en geometría, análisis y teoría de números supusieron una renovación en estos campos. Albert Einstein basó su Teoría de la relatividad general *en la geometría Riemanniana. La “hipótesis de Riemann”, que trata sobre números primos, es uno de los grandes problemas aún sin resolver de las matemáticas actuales. La Fundación Clay ha ofrecido 1 millón de dólares de premio por su solución. (http://www.claymath.org/millennium).*

Georg Friedrich Riemann (1826-1866)

A menudo nos referimos a la integral def nida simplemente como la *integral* de $f(x)$ en $[a, b]$. El proceso de cálculo de las integrales se llama **integración**. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. Los extremos a y b de $[a, b]$ son los **límites de integración**. Como apunte f nal, cabe observar que se puede usar cualquier variable como variable de integración (es una variable “muda”). Así, las tres integrales siguientes se ref eren a la misma cantidad:

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(t)\,dt \qquad \int_a^b f(u)\,du$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Se debe tener presente que una suma de Riemann no es nada más que una aproximación del área basada en rectángulos, y que $\int_a^b f(x)\,dx$ es el valor que se obtiene al pasar al límite cuando se consideran rectángulos cada vez más estrechos.

Sin embargo, raramente consideraremos las sumas de Riemann generales (en base a particiones y puntos arbitrarios) para realizar cálculos. En la práctica, se utilizan aproximaciones particulares, tales como M_N, o bien el teorema fundamental del cálculo, que se tratará en la siguiente sección. En tal caso, ¿por qué preocuparnos en introducir las sumas de Riemann? La respuesta es que las sumas de Riemann desempeñan un papel teórico, más que aplicado. Son útiles en demostraciones y para tratar con rigor ciertas funciones discontinuas. En las últimas secciones, se utilizarán las sumas de Riemann para mostrar cómo se pueden expresar volúmenes y otras cantidades mediante integrales def nidas.

En el siguiente teorema se establece que las funciones continuas (e incluso las funciones con un número f nito de discontinuidades de salto) son integrables (la demostración se puede consultar en el apéndice D). En la práctica, en lugar de probar directamente que una función es integrable, se opta por aplicar este teorema.

TEOREMA 1 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ o si $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto en un número f nito de puntos, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

Intepretación de la integral definida como un área con signo

Cuando $f(x) \geq 0$, la integral def nida corresponde al área por debajo de la gráf ca. Para interpretar la integral cuando $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos, se def ne el concepto de **área con signo**, en la que se considera que las regiones por debajo del eje x tienen “área negativa” (f gura 4); es decir,

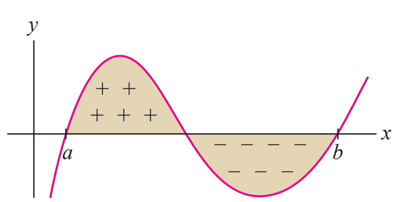


FIGURA 4 El área con signo es el área por encima del eje x menos el área por debajo del eje x.

$$\boxed{\text{Área con signo de una región} = (\text{área por encima del eje } x) - (\text{área por debajo del eje } x)}$$

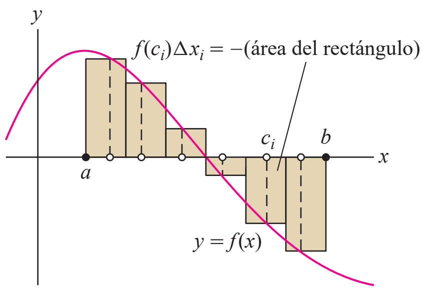


FIGURA 5

Se puede ahora constatar que una suma de Riemann es igual al área con signo de los correspondientes rectángulos:

$$R(f, C, P) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_N)\Delta x_N$$

De hecho, si $f(c_i) < 0$, entonces el correspondiente rectángulo se encuentra por debajo del eje x y tiene área con signo igual a $f(c_i)\Delta x_i$ (f gura 5). El límite de las sumas de Riemann es el área, con signo, de la región limitada por la gráf ca y el eje x:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área, con signo, de la región limitada por la gráf ca y el eje } x \text{ en } [a, b]$$

■ **EJEMPLO 2** **Área con signo** Calcule

$$\int_0^5 (3 - x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^5 |3 - x|\,dx$$

Solución La región entre $y = 3 - x$ y el eje x entre 0 y 5 está formada por dos triángulos de áreas $\frac{9}{2}$ y 2 [f gura 6(A)]. Sin embargo, el segundo triángulo se encuentra por debajo del eje x y, por tanto, tiene área -2. En la gráf ca de $y = |3 - x|$, ambos triángulos se encuentran por encima del eje x [f gura 6(B)]. En consecuencia,

$$\int_0^5 (3 - x)\,dx = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \qquad \int_0^5 |3 - x|\,dx = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$ ■

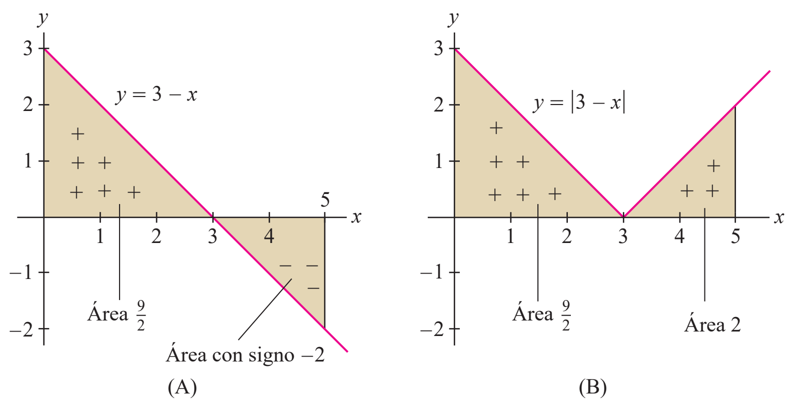


FIGURA 6

Propiedades de la integral definida

Dedicaremos el resto de la sección a examinar algunas propiedades básicas de las integrales def nidas. En primer lugar, observemos que la integral de una función constante $f(x) = C$ en un intervalo $[a, b]$ es el área con signo $C(b - a)$ de un rectángulo (f gura 7).

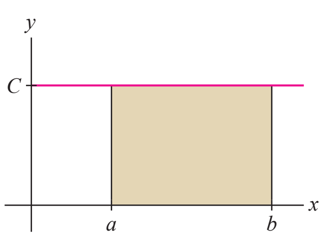


FIGURA 7 $\int_a^b C\,dx = C(b - a)$.

TEOREMA 2 Integral de una constante Para cualquier constante C,

$$\int_a^b C\,dx = C(b - a) \qquad \boxed{4}$$

A continuación, se enuncian las propiedades de linealidad de la integral.

TEOREMA 3 Linealidad de la integral definida Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ y Cf son integrables (para cualquier constante C) y se verif ca:

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$

Demostración La demostración de estas propiedades se basa en las correspondientes propiedades de linealidad para las sumas y para los límites. Por ejemplo, las sumas de Riemann son aditivas:

$$R(f+g, P, C) = \sum_{i=1}^{N} (f(c_i) + g(c_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i$$

$$= R(f, P, C) + R(g, P, C)$$

Por la aditividad de los límites,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f+g, P, C)$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C) + \lim_{\|P\|\to 0} R(g, P, C)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La segunda propiedad de demuestra de forma análoga. ■

■ **EJEMPLO 3** Calcule $\displaystyle\int_0^3 (2x^2 - 5)\,dx$ utilizando la fórmula

$$\boxed{\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}} \qquad \boxed{5}$$

La ec. (5) se obtuvo en el ejemplo 5 de la sección 5.1.

Solución

$$\int_0^3 (2x^2 - 5)\,dx = 2\int_0^3 x^2\,dx + \int_0^3 (-5)\,dx \qquad \text{(linealidad)}$$

$$= 2\left(\frac{3^3}{3}\right) - 5(3 - 0) = 3 \qquad \text{[ecs. (5) y (4)]}$$ ■

De momento hemos usado la notación $\int_a^b f(x)\,dx$ sobrentendiendo que $a < b$. Es conveniente def nir la integral def nida para a y b arbitrarios.

Según la ec. (6), ***la integral cambia de signo cuando se intercambian los límites de integración****. Si tenemos libertad para escoger los símbolos como queramos, ¿por qué hemos escogido poner el signo menos en la ec. (6)? La respuesta es que, precisamente con esta definición, el teorema fundamental del cálculo es cierto.*

DEFINICIÓN Intercambio de los límites de integración Si $a < b$,

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \boxed{6}$$

Por ejemplo, según la ec. (5),

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx = -\frac{5^3}{3} = -\frac{125}{3}$$

Cuando $a = b$, el intervalo $[a, b] = [a, a]$ tiene longitud igual a cero y, en este caso, se def ne la integral def nida también como cero:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

■ **EJEMPLO 4** Demuestre que, para todo b (positivo o negativo),

$$\boxed{\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2} \qquad \boxed{7}$$

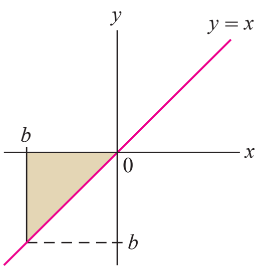


FIGURA 8 En este gráf co, $b < 0$ y el área con signo es igual a $-\frac{1}{2}b^2$.

Solución Si $b > 0$, $\int_0^b x\,dx$ es igual a $\frac{1}{2}b^2$, el área de un triángulo de base b y altura b. Si $b < 0$, $\int_b^0 x\,dx$ es el área con signo $-\frac{1}{2}b^2$ del triángulo de la f gura 8, y la ec. (7) se obtiene aplicando la regla del intercambio de los límites de integración:

$$\int_0^b x\,dx = -\int_b^0 x\,dx = -\left(-\frac{1}{2}b^2\right) = \frac{1}{2}b^2 \qquad ■$$

Las integrales def nidas cumplen una propiedad importante de aditividad: si $f(x)$ es integrable y $a \le b \le c$, tal y como se ilustra en la f gura 9, entonces la integral de a a c es igual a la integral de a a b *más* la integral de b a c. En el siguiente teorema se enuncia esta propiedad (se puede demostrar formalmente utilizando sumas de Riemann).

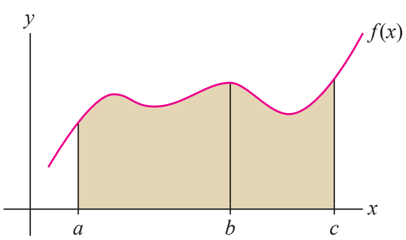


FIGURA 9 El área por encima de $[a, c]$ es la *suma* de las áreas por encima de $[a, b]$ y de $[b, c]$.

TEOREMA 4 Aditividad para intervalos adyacentes Sean $a \le b \le c$ y supongamos que $f(x)$ es integrable. Entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Este teorema continua siendo cierto incluso cuando la condición $a \le b \le c$ no se cumple (Ver el ejercicio 87).

■ **EJEMPLO 5** Calcule $\displaystyle\int_4^7 x^2\,dx$.

Solución En primer lugar, según la propiedad de aditividad para intervalos adyacentes

$$\int_0^4 x^2\,dx + \int_4^7 x^2\,dx = \int_0^7 x^2\,dx$$

Ahora se puede calcular la integral del enunciado como una diferencia:

$$\int_4^7 x^2\,dx = \int_0^7 x^2\,dx - \int_0^4 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)7^3 - \left(\frac{1}{3}\right)4^3 = 93 \qquad ■$$

donde se ha aplicado la fórmula $\int_0^b x^2 dx = b^3/3$ del ejemplo 3.

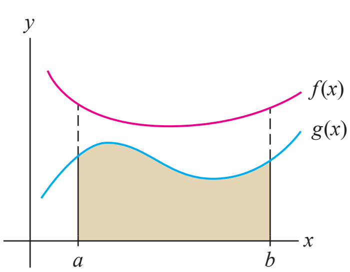


FIGURA 10 La integral de $f(x)$ entre a y b es mayor que la de $g(x)$.

Otra propiedad básica de la integral def nida es que si una función es superior a otra, las correspondientes integrales mantienen este orden (f gura 10).

TEOREMA 5 Teorema de comparación Si f y g son integrables y $g(x) \le f(x)$ para x en $[a, b]$, entonces se tiene:

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración Si $g(x) \le f(x)$, para cualquier partición y elección de puntos intermedios, se cumple que $g(c_i)\Delta x_i \le f(c_i)\Delta x_i$ para todo i. En consecuencia, las sumas de Riemann verif can:

$$\sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

Pasando al límite cuando $\|P\|$ tiende a cero, se obtiene:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i \le \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

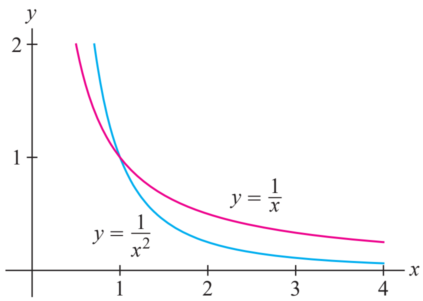


FIGURA 11

■ **EJEMPLO 6** Demuestre la desigualdad: $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx \le \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$

Solución Si $x \ge 1$, entonces $x^2 \ge x$ y $x^{-2} \le x^{-1}$ [f gura 11] En consecuencia, aplicando el teorema de comparación con $g(x) = x^{-2}$ y $f(x) = x^{-1}$, la desigualdad es cierta. ■

Supongamos que existan dos valores m y M tales que $m \le f(x) \le M$ para x en $[a, b]$. Los números m y M se denominan cota inferior y superior, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$. Según el teorema de comparación,

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)} \qquad \boxed{8}$$

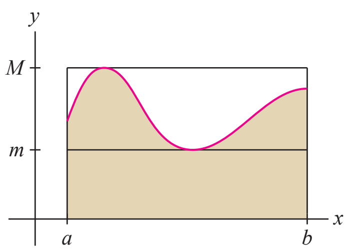


FIGURA 12 La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se encuentra entre las áreas de los rectángulos de base $b - a$ y alturas m y M.

Es decir, la integral de $f(x)$ se encuentra entre las áreas de dos rectángulos (ver la f gura 12).

■ **EJEMPLO 7** Demuestre las desigualdades: $\displaystyle\frac{3}{4} \le \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}\,dx \le 3$

Solución Como $f(x) = x^{-1}$ es estrictamente decreciente (f gura 13), el valor mínimo de la función en $[\frac{1}{2}, 2]$ es $m = f(2) = \frac{1}{2}$ y el máximo es $M = f(\frac{1}{2}) = 2$. Según la ec. (8),

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)}_{m(b-a)} = \frac{3}{4} \le \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}\,dx \le \underbrace{2\left(2 - \frac{1}{2}\right)}_{M(b-a)} = 3 \qquad \blacksquare$$

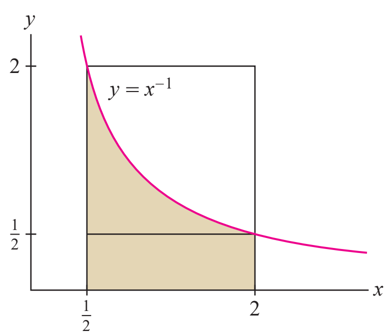


FIGURA 13

5.2 RESUMEN

- Una suma de Riemann $R(f, P, C)$ para el intervalo $[a, b]$ queda determinada mediante la elección de una *partición*

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

y de unos *puntos intermedios* $C = \{c_i\}_{1\le i\le n}$, donde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Entonces

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

- La norma $\|P\|$ de la partición es el valor máximo de las longitudes Δx_i.
- La *integral definida* es el límite de las sumas de Riemann (siempre que éste exista):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C)$$

Se dice que $f(x)$ es *integrable* en $[a, b]$ si el límite existe.

- Teorema: si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ *área con signo* de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje x entre a y b.
- Propiedades de las integrales definidas:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b C f(x)\,dx = C \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{para cualquier constante } C$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{para todo } a, b, c$$

- Fórmulas:

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a) \quad \text{(para cualquier constante } C\text{)}$$

$$\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2$$

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$$

- Teorema de comparación: si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Si $m \le f(x) \le M$ en $[a, b]$, entonces se verifica:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

5.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿A qué corresponde $\displaystyle\int_3^5 dx$ [la función es $f(x) = 1$]?

2. Sea $I = \displaystyle\int_2^7 f(x)\,dx$, para $f(x)$ una función continua. Determine si es verdadero o falso:

(a) I es el área limitada por la gráfica y el eje x en $[2, 7]$.

(b) Si $f(x) \ge 0$, entonces I es el área limitada por la gráfica y el eje x en $[2, 7]$.

(c) Si $f(x) \le 0$, entonces $-I$ es el área limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[2, 7]$.

3. Explique gráf camente por qué $\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0$.

4. ¿Cuál de las siguientes integrales es negativa, $\int_{-1}^{-5} 8\, dx$ o $\int_{-5}^{-1} 8\, dx$?

Problemas

En los problemas 1-10, represente gráf camente el área con signo correspondiente a la integral y calcúlela aplicando geometría plana.

1. $\int_{-3}^{3} 2x\, dx$

2. $\int_{-2}^{3} (2x + 4)\, dx$

3. $\int_{-2}^{1} (3x + 4)\, dx$

4. $\int_{-2}^{1} 4\, dx$

5. $\int_{6}^{8} (7 - x)\, dx$

6. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

7. $\int_{0}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

8. $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$

9. $\int_{-2}^{2} (2 - |x|)\, dx$

10. $\int_{-2}^{5} (3 + x - 2|x|)\, dx$

11. Calcule $\int_0^{10} (8 - x)\, dx$ de dos maneras:

(a) Como el límite $\lim_{N\to\infty} R_N$

(b) Representando gráf camente el área con signo correspondiente y aplicando geometría plana.

12. Calcule $\int_{-1}^{4} (4x - 8)\, dx$ de dos maneras: como el límite $\lim_{N\to\infty} R_N$ y aplicando geometría plana.

Los problemas 13 y 14 se ref eren a la f gura 14.

13. Evalúe: (a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^6 f(x)\, dx$

14. Evalúe: (a) $\int_1^4 f(x)\, dx$ (b) $\int_1^6 |f(x)|\, dx$

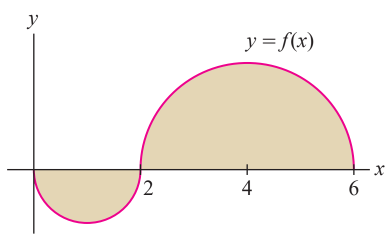


FIGURA 14 Las dos partes del gráf co son semicírculos.

Los problemas 15 y 16 se ref eren a la f gura 15.

15. Evalúe $\int_0^3 g(t)\, dt$ y $\int_3^5 g(t)\, dt$.

16. Halle a, b y c tales que $\int_0^a g(t)\, dt$ y $\int_b^c g(t)\, dt$ sean lo mayor posible.

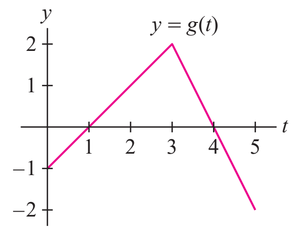


FIGURA 15

17. Describa la partición P y el conjunto de puntos intermedios C que dan lugar a la suma de Riemann representada en la f gura 16. Calcule el valor de esta suma de Riemann.

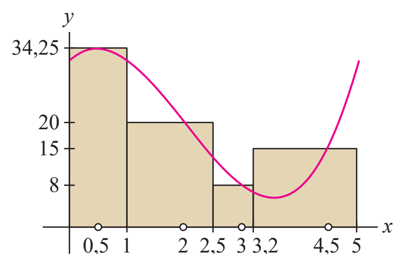


FIGURA 16

18. Calcule $R(f, P, C)$ para $f(x) = x^2 + x$, la partición P y conjunto de puntos intermedios C dados por la f gura 16.

En los problemas 19-22, calcular la suma de Riemann $R(f, P, C)$ para la función, partición y elección de puntos intermedios facilitados. Represente gráf camente f y también los rectángulos correspondientes a $R(f, P, C)$.

19. $f(x) = x$, $P = \{1, 1{,}2, 1{,}5, 2\}$, $C = \{1{,}1, 1{,}4, 1{,}9\}$

20. $f(x) = 2x + 3$, $P = \{-4, -1, 1, 4, 8\}$, $C = \{-3, 0, 2, 5\}$

21. $f(x) = x^2 + x$, $P = \{2, 3, 4{,}5, 5\}$, $C = \{2, 3{,}5, 5\}$

22. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $P = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$, $C = \{0{,}4, 0{,}7, 1{,}2\}$

En los problemas 23-28, dibuje el área correspondiente a la integral. Indique las regiones de área positiva y las de área negativa.

23. $\int_0^5 (4x - x^2)\, dx$

24. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\, dx$

25. $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

26. $\int_0^{3\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

27. $\int_0^6 (|12 - 4x| - 4)\, dx$

28. $\int_{-2}^{2} (t^2 - 1)(t^2 - 4)\, dx$

En los problemas 29-32, determine el signo de la integral sin realizar el cálculo. Represente la gráf ca de la función si fuera necesario.

29. $\int_{-2}^{1} x^4\, dx$

30. $\int_{-2}^{1} x^3\, dx$

31. GU $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$ **32.** GU $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

En los problemas 33-42, aplique las propiedades de la integral y las fórmulas del resumen para calcular las integrales.

33. $\displaystyle\int_0^4 (6t-3)\, dt$ **34.** $\displaystyle\int_{-3}^2 (4x+7)\, dx$

35. $\displaystyle\int_0^9 x^2\, dx$ **36.** $\displaystyle\int_2^5 x^2\, dx$

37. $\displaystyle\int_0^1 (u^2-2u)\, du$ **38.** $\displaystyle\int_0^{1/2} (12y^2+6y)\, dy$

39. $\displaystyle\int_{-3}^1 (7t^2+t+1)\, dt$ **40.** $\displaystyle\int_{-3}^3 (9x-4x^2)\, dx$

41. $\displaystyle\int_{-a}^1 (x^2+x)\, dx$ **42.** $\displaystyle\int_a^{a^2} x^2\, dx$

En los problemas 43-47, calcule la integral suponiendo que:

$$\int_0^5 f(x)\, dx = 5 \qquad \int_0^5 g(x)\, dx = 12$$

43. $\displaystyle\int_0^5 (f(x)+g(x))\, dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^5 \left(2f(x)-\frac{1}{3}g(x)\right) dx$

45. $\displaystyle\int_5^0 g(x)\, dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^5 (f(x)-x)\, dx$

47. En base a la información facilitada, ¿se puede calcular

$$\int_0^5 g(x)f(x)\, dx?$$

48. Calculando el límite de las aproximaciones basadas en el extremo superior, demuestre que:

$$\boxed{\int_0^b x^3\, dx = \frac{b^4}{4}} \qquad \boxed{9}$$

En los problemas 49-54, evalúe la integral aplicando las fórmulas del resumen y la ec. (9).

49. $\displaystyle\int_0^3 x^2\, dx$ **50.** $\displaystyle\int_1^3 x^3\, dx$

51. $\displaystyle\int_0^3 (x-x^3)\, dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 (2x^3-x+4)\, dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 (12x^3+24x^2-8x)\, dx$ **54.** $\displaystyle\int_{-2}^2 (2x^3-3x^2)\, dx$

En los problemas 55-58, calcule la integral, suponiendo que:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1 \qquad \int_0^2 f(x)\, dx = 4 \qquad \int_1^4 f(x)\, dx = 7$$

55. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$ **56.** $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$

57. $\displaystyle\int_4^1 f(x)\, dx$ **58.** $\displaystyle\int_2^4 f(x)\, dx$

En los problemas 59-62, exprese el resultado como una sola integral.

59. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx + \int_3^7 f(x)\, dx$

60. $\displaystyle\int_2^9 f(x)\, dx - \int_4^9 f(x)\, dx$

61. $\displaystyle\int_2^9 f(x)\, dx - \int_2^5 f(x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_7^3 f(x)\, dx + \int_3^9 f(x)\, dx$

En los problemas 63-66, calcule la integral, suponiendo que f es integrable y que $\displaystyle\int_1^b f(x)\, dx = 1 - b^{-1}$ para todo $b > 0$.

63. $\displaystyle\int_1^5 f(x)\, dx$ **64.** $\displaystyle\int_3^5 f(x)\, dx$

65. $\displaystyle\int_1^6 (3f(x)-4)\, dx$ **66.** $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x)\, dx$

67. Explique la diferencia entre la interpretación de $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ y la de $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$.

68. Sea $f(x)$ una función continua. Utilice la interpretación gráf ca de la integral def nida para explicar la desigualdad:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Explique también, por qué la igualdad se asume si y sólo si, o bien $f(x) \ge 0$ para todo x, o bien $f(x) \le 0$ para todo x.

69. Sea $f(x) = x$. Halle un intervalo $[a, b]$ tal que:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b |f(x)|\, dx = \frac{3}{2}$$

70. Evalúe $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ y $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$ según se indica a continuación. En primer lugar, ponga de manif esto gráf camente que $I = J$. A continuación pruebe que $I + J = 2\pi$.

En los problemas 71-74, calcule la integral.

71. $\displaystyle\int_0^6 |3-x|\, dx$ **72.** $\displaystyle\int_1^3 |2x-4|\, dx$

73. $\displaystyle\int_{-1}^1 |x^3|\, dx$ **74.** $\displaystyle\int_0^2 |x^2-1|\, dx$

75. Aplique el teorema de comparación para justif car que:

$$\int_0^1 x^5\, dx \le \int_0^1 x^4\, dx, \qquad \int_1^2 x^4\, dx \le \int_1^2 x^5\, dx$$

76. Demuestre que $\dfrac{1}{3} \le \displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{2}$.

77. Demuestre que $0{,}0198 \le \int_{0,2}^{0,3} \operatorname{sen} x\,dx \le 0{,}0296$. *Indicación:* Pruebe que $0{,}198 \le \operatorname{sen} x \le 0{,}296$ para todo x en $[0{,}2,\ 0{,}3]$.

78. Demuestre que $0{,}277 \le \displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos x\,dx \le 0{,}363$.

79. Demuestre que $0 \le \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

80. Determine una cota superior y una inferior de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^3+4}}$.

81. Supongamos que $f(x) \le g(x)$ en $[a,b]$. Según el teorema de comparación, $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. ¿Se verif ca también que $f'(x) \le g'(x)$ para $x \in [a,b]$? Si no es cierto, dar un contraejemplo.

82. Determine si las siguientes af rmaciones son verdaderas o falsas. Si son falsas, dé un contraejemplo gráf co.

(a) Si $f(x) > 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

(b) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$, entonces $f(x) > 0$.

Problemas avanzados

83. Ilustre gráf camente la siguiente af rmación: Si $f(x)$ es una función impar, entonces se cumple:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

84. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))(\operatorname{sen}^2(x)+1)\,dx$.

85. Sean k y b constantes positivas. Demuestre, comparando las aproximaciones basadas en el extremo superior, que:

$$\int_0^b x^k\,dx = b^{k+1}\int_0^1 x^k\,dx$$

86. Sean f y g funciones continuas tales que, para todo a,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx$$

Explique de manera *intuitiva* por qué $f(0) = g(0)$. Ilustre el razonamiento mediante un gráf co.

87. El teorema 4 continúa siendo cierto aunque $a \le b \le c$ no sea cierto. Verif que que realmente es así para las situaciones en que $b < a < c$ y en que $c < a < b$.

5.3 El teorema fundamental del cálculo (TFC), 1ª parte

El teorema fundamental del cálculo (TFC) pone de manif esto una inesperada conexión entre las dos operaciones principales del cálculo inf nitesimal: la diferenciación y la integración. El teorema tiene dos partes, que aunque están fuertemente relacionadas, se tratarán en secciones separadas para enfatizar su diferente aplicación.

El TFC fue enunciado por primera vez de forma completa por Isaac Newton en 1666, aunque otros matemáticos, entre ellos el profesor de Newton, Isaac Barrow, habían obtenido con anterioridad versiones de éste.

Para explicar la primera parte del TFC, retomemos un resultado que se había obtenido en el ejemplo 5 de la sección 5.2:

$$\int_4^7 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)7^3 - \left(\frac{1}{3}\right)4^3 = 93$$

RECORDATORIO

*$F(x)$ se denomina una **primitiva** de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Se dice que $F(x)+C$, siendo C una constante, es una **integral indefinida** de $f(x)$ y se denota:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Observemos que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de x^2, de manera que

$$\int_4^7 x^2\,dx = F(7) - F(4)$$

Según la primera parte del TFC, esto no es una coincidencia; esta relación entre la integral def nida y la primitiva se cumple en general.

TEOREMA 1 El teorema fundamental del cálculo, 1ª parte Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad (1)$$

Demostración La cantidad $F(b) - F(a)$ corresponde a la variación total de F (también llamada "variación neta") en el intervalo $[a, b]$. El objetivo es relacionar esta cantidad con la integral de $F'(x) = f(x)$. Procederemos en dos etapas.

***Etapa 1.* Escribir la variación total como suma de pequeñas variaciones**

Fijada una partición cualquiera P de $[a, b]$:

$$P\colon x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

se puede expresar $F(b) - F(a)$ como la suma de las variaciones en cada uno de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$:

$$F(b) - F(a) = (\cancel{F(x_1)} - F(a)) + (F(x_2) - \cancel{F(x_1)}) + \cdots + (F(b) - \cancel{F(x_{N-1})})$$

En la parte derecha de la igualdad, $F(x_1)$ se cancela con $-F(x_1)$, en el segundo término, $F(x_2)$ se cancela con $-F(x_2)$ y así sucesivamente (f gura 1). En notación sumatoria,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \qquad \boxed{2}$$

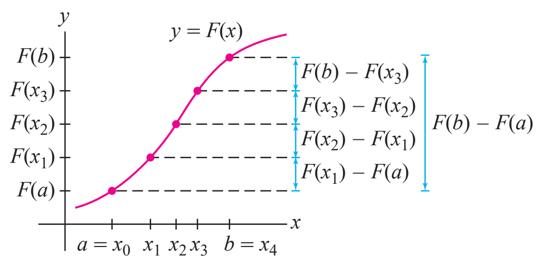


FIGURA 1 Observe las cancelaciones al expresar $F(b) - F(a)$ como la suma de las pequeñas variaciones $F(x_i) - F(x_{i-1})$.

***Etapa 2.* Interpretar la ec. (2) como una suma de Riemann**

Según el teorema del valor medio, existe un punto c_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i^*)\,\Delta x_i$$

De esta manera, la ec. (2) se puede escribir como

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i^*)\,\Delta x_i$$

Esta suma es precisamente la suma de Riemann $R(f, P, C^*)$ siendo los puntos intermedios $C^* = \{c_i^*\}$.

Según el teorema 1, sección 5.2, $f(x)$ es integrable y, por tanto, $R(f, P, C^*)$ tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$, cuando $\|P\|$ tiende a cero. Por otra parte, $R(f, P, C^*)$ es *igual* a $F(b) - F(a)$ gracias a nuestra particular elección de puntos intermedios C^*. De esta manera, queda demostrado el teorema, pues:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C^*) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Las dos gráficas En la demostración del TFC (1ª parte), se ha aplicado el teorema del valor medio para expresar un pequeño cambio en $F(x)$ en términos de la derivada $F'(x) = f(x)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i^*)\Delta x_i$$

Pero $f(c_i^*)\Delta x_i$ es el área de un f no rectángulo que aproxima una sección del área de la gráf ca de $f(x)$ (ver f gura 2). *Éste es el punto esencial del teorema fundamental del cálculo*: la variación total $F(b) - F(a)$ es igual a la suma de las pequeñas variaciones $F(x_i) - F(x_{i-1})$ que, a su vez, son iguales a la suma de las áreas de los rectángulos en una aproximación por sumas de Riemann para $f(x)$. El teorema fundamental del cálculo se obtiene pasando al límite de estas sumas, cuando la longitud de los rectángulos tiende a cero.

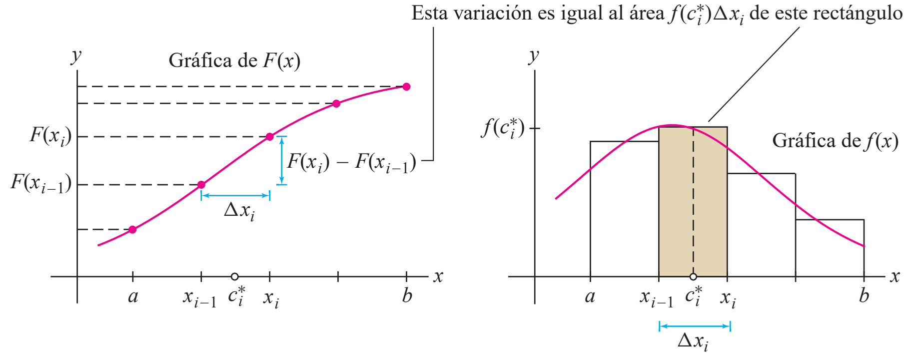


FIGURA 2

Según el TFC (1ª parte), si se puede hallar una primitiva de $f(x)$, entonces se puede obtener de forma sencilla la integral def nida, sin necesidad de calcular ningún límite. Esta es la razón de que se utilice el signo integral $\int$ tanto para denotar la integral def nida $\int_a^b f(x)dx$, como la integral indef nida (primitiva) $\int f(x)dx$.

Notación: $F(b)-F(a)$ se denota como $F(x)\big|_a^b$. Utilizando esta notación, el TFC se expresa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b$$

RECORDATORIO

La regla para el cálculo de integrales de potencias (válida para $n \neq -1$) establece que:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

■ **EJEMPLO 1** Calcule el área bajo la gráf ca de $f(x) = x^3$ en $[2, 4]$.

Solución Como $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una primitiva de $f(x) = x^3$, según el TFC (1ª parte)

$$\int_2^4 x^3\,dx = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}x^4\Big|_2^4 = \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{4}2^4 = 60 \qquad \blacksquare$$

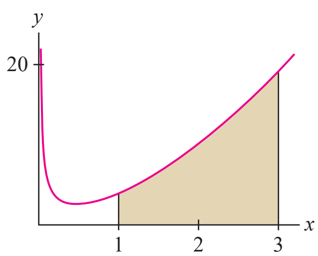


FIGURA 3 Región por debajo de la gráf ca de $g(x) = x^{-3/4} + 3x^{5/3}$ en $[1, 3]$.

■ **EJEMPLO 2** Halle el área por debajo de $g(x) = x^{-3/4} + 3x^{5/3}$ en $[1, 3]$.

Solución La función $G(x) = 4x^{1/4} + \frac{9}{8}x^{8/3}$ es una primitiva de $g(x)$. El área (f gura 3) es igual a:

$$\int_1^3 (x^{-3/4} + 3x^{5/3})\,dx = G(x)\Big|_1^3 = \left(4x^{1/4} + \frac{9}{8}x^{8/3}\right)\Big|_1^3$$

$$= \left(4\cdot 3^{1/4} + \frac{9}{8}\cdot 3^{8/3}\right) - \left(4\cdot 1^{1/4} + \frac{9}{8}\cdot 1^{8/3}\right)$$

$$\approx 26{,}325 - 5{,}125 = 21{,}2 \qquad \blacksquare$$

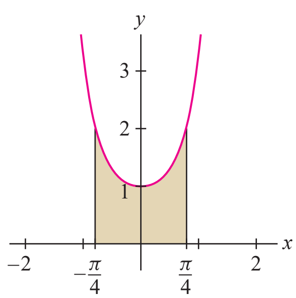


FIGURA 4 Gráf ca de $y = \sec^2 x$.

■ **EJEMPLO 3** Calcule $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$ y dibuje la región correspondiente.

Solución La f gura 4 muestra la región motivo de estudio. Teniendo presente que $(\tan x)' = \sec^2 x$, se obtiene:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - (-1) = 2 \qquad \blacksquare$$

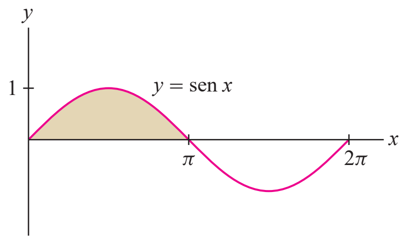


FIGURA 5 El área de una cresta es 2. El área con signo en $[0, 2\pi]$ es cero.

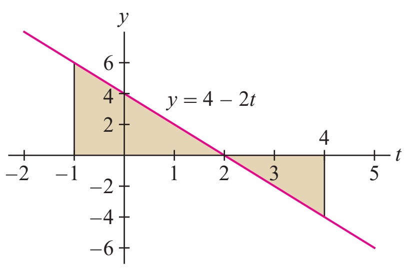


FIGURA 6

Hemos visto que la integral def nida es igual al área *con signo* limitada por la gráf ca de la función y el eje x. Por supuesto, el TFC también "lo sabe": cuando se resuelve una integral mediante el TFC se obtiene el área con signo.

■ **EJEMPLO 4** Calcule **(a)** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ y **(b)** $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución

(a) Como $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$, el área para una "cresta" (f gura 5) es:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

(b) Se espera que el área con signo en $[0, 2\pi]$ sea cero pues el "valle" se encuentra por debajo del eje x. En efecto,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = (-\cos(2\pi) - (-\cos 0)) = -1 - (-1) = 0$$ ■

■ **EJEMPLO 5** Calcule $\int_{-1}^{4} (4 - 2t)\, dt$.

Solución La función $F(t) = 4t - t^2$ es una primitiva de $f(t) = 4 - 2t$; por tanto, la integral def nida (el área con signo por debajo de la gráf ca de la f gura 6) es:

$$\int_{-1}^{4} (4 - 2t)\, dt = (4t - t^2)\Big|_{-1}^{4} = (4 \cdot 4 - 4^2) - (4 \cdot (-1) - (-1)^2) = 0 - (-5) = 5$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Qué primitiva? Las primitivas son únicas salvo una constante aditiva (sección 4.8). ¿Importa entonces qué primitiva se utiliza en el TFC? La respuesta es que no. Si tanto $F(x)$ como $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x)+C$, para alguna constante C, y

$$F(b) - F(a) = \underbrace{(G(b) + C) - (G(a) + C)}_{\text{La constante se cancela}} = G(b) - G(a)$$

Las dos primitivas dan lugar al mismo valor para la integral def nida:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

5.3 RESUMEN

- El teorema fundamental del cálculo, 1ª parte, establece que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. El TFC (1ª parte) se utiliza para evaluar integrales def nidas en situaciones en las que se puede hallar una primitiva del integrando.

- Fórmulas de primitivas básicas para resolver integrales def nidas:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{para } n \neq -1$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

5.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Supongamos que $F'(x) = f(x)$ y que $F(0) = 3$, $F(2) = 7$.

(a) Si $f(x) \geq 0$, ¿cuál es el valor del área por debajo de $y = f(x)$ en $[0, 2]$?

(b) Si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación gráf ca de $F(2) - F(0)$?

2. Supongamos que $f(x)$ es una función *negativa* con primitiva F tal que $F(1) = 7$ y $F(3) = 4$. ¿Cuál es el valor del área (un número positivo) limitada por el eje x y la gráf ca de $f(x)$ en $[1, 3]$?

3. Razone si las siguientes af rmaciones son verdaderas o falsas.

(a) La 1ª parte del TFC sólo es válida para funciones postivas.

(b) Para poder aplicar la 1ª parte del TFC , se tiene que haber seleccionado la primitiva apropiada.

(c) Si no se puede determinar una primitiva de $f(x)$, entonces la integral def nida no existe.

4. Resuelva $\int_2^9 f'(x)\,dx$ donde $f(x)$ es una función diferenciable y $f(2) = f(9) = 4$.

Problemas

En los problemas 1-4, dibuje la región bajo la gráf ca de la función y determine su área mediante el TFC (1ª parte).

1. $f(x) = x^2$, $[0, 1]$

2. $f(x) = 2x - x^2$, $[0, 2]$

3. $f(x) = x^{-2}$, $[1, 2]$

4. $f(x) = \cos x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

En los problemas 5-34, resuelva la integral mediante el TFC (1ª parte).

5. $\int_3^6 x\,dx$

6. $\int_0^9 2\,dx$

7. $\int_{-3}^5 (3t - 4)\,dt$

8. $\int_2^4 (24 - 5u)\,du$

9. $\int_0^1 (4x - 9x^2)\,dx$

10. $\int_{-3}^2 u^2\,du$

11. $\int_0^2 (12x^5 + 3x^2 - 4x)\,dx$

12. $\int_{-2}^2 (10x^9 + 3x^5)\,dx$

13. $\int_3^0 (2t^3 - 6t^2)\,dt$

14. $\int_{-1}^1 (5u^4 + u^2 - u)\,du$

15. $\int_0^4 \sqrt{y}\,dy$

16. $\int_1^8 x^{4/3}\,dx$

17. $\int_{1/16}^1 t^{1/4}\,dt$

18. $\int_4^1 t^{5/2}\,dt$

19. $\int_1^3 \frac{dt}{t^2}$

20. $\int_1^4 x^{-4}\,dx$

21. $\int_{1/2}^1 \frac{8}{x^3}\,dx$

22. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$

23. $\int_1^2 (x^2 - x^{-2})\,dx$

24. $\int_1^9 t^{-1/2}\,dt$

25. $\int_1^{27} \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt$

26. $\int_{8/27}^1 \frac{10t^{4/3} - 8t^{1/3}}{t^2}\,dt$

27. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

28. $\int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

29. $\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) d\theta$

30. $\int_{\pi/4}^{5\pi/8} \cos 2x\,dx$

31. $\int_0^{\pi/6} \sec^2\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) dt$

32. $\int_0^{\pi/6} \sec\theta \tan\theta\,d\theta$

33. $\int_{\pi/20}^{\pi/10} \csc 5x \cot 5x\,dx$

34. $\int_{\pi/28}^{\pi/14} \csc^2 7y\,dy$

En los problemas 35-40, exprese la integral como suma de dos integrales sin los valores absolutos y resuelva.

35. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$

36. $\int_0^5 |3 - x|\,dx$

37. $\int_{-2}^3 |x^3|\,dx$

38. $\int_0^3 |x^2 - 1|\,dx$

39. $\int_0^\pi |\cos x|\,dx$

40. $\int_0^5 |x^2 - 4x + 3|\,dx$

En los problemas 41-44, resuelva la integral en términos de las constantes.

41. $\int_b^1 x^3\,dx$

42. $\int_b^a x^4\,dx$

43. $\displaystyle\int_1^b x^5\,dx$

44. $\displaystyle\int_{-x}^{x} (t^3+t)\,dt$

45. Sea $f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

46. Sea $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le \pi \\ \cos x - \operatorname{sen} 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$. Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

47. Aplique la 1ª parte del TFC para probar que $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n\,dx = 0$ si n es impar. Ilustre gráf camente el razonamiento.

48. SAC Represente gráf camente la función $f(x) = \operatorname{sen} 3x - x$. Determine el cero o raíz positiva de $f(x)$ con tres decimales de precisión y utilice este valor para hallar el área bajo la gráf ca de $f(x)$ en el primer cuadrante.

49. Calcule $F(4)$ sabiendo que $F(1) = 3$ y que $F'(x) = x^2$. *Indicación:* Exprese $F(4) - F(1)$ como una integral def nida.

50. Calcule $G(16)$ sabiendo que $dG/dt = t^{-1/2}$ y $G(9) = -5$.

51. Si se incrementa n, el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ ¿aumenta o disminuye? Ilustre gráf camente el razonamiento.

52. Demuestre que el área del arco parabólico de la f gura 7 es igual a cuatro tercios del área del triángulo mostrado en la misma f gura.

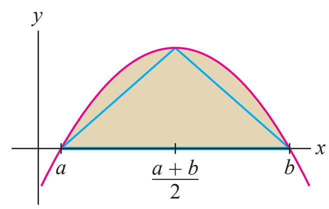


FIGURA 7 Gráf ca de $y = (x-a)(b-x)$.

Problemas avanzados

53. En este problema se demuestra un conocido resultado de Arquímedes (que generaliza el problema 52). Formalmente este resultado establece que si $r < s$, el área de la región sombreada en la f gura 8 es igual a cuatro tercios del área del triángulo $\triangle ACE$, donde C es el punto de la parábola para el que su recta tangente es paralela a la recta secante $\overline{AE}$. Para demostrar el resultado, se pide:

(a) Pruebe que C tiene $(r+s)/2$ por abcisa.

(b) Pruebe que $ABDE$ tiene área $(s-r)^3/4$, entendiéndolo como un paralelogramo de altura $s - r$ y base igual a la longitud de $\overline{CF}$.

(c) Demuestre que $\triangle ACE$ tiene área igual a $(s-r)^3/8$, pues tiene la misma base y altura que el paralelogramo.

(d) Obtenga el área sombreada como el área por debajo de la gráf ca menos el área de un trapecio y obtenga, a continuación, el resultado de Arquímedes.

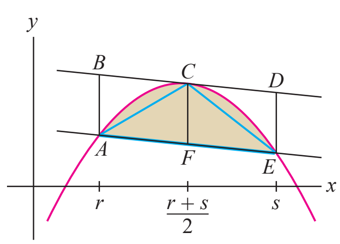


FIGURA 8 Gráf ca de $f(x) = (x-a)(b-x)$.

54. (a) Aplique el teorema de comparación (teorema 5 en la sección 5.2) a la desigualdad $\operatorname{sen} x \le x$ (válida si $x \ge 0$) para demostrar que:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$$

(b) Aplique de nuevo el mismo teorema para demostrar que:

$$x - \frac{x^3}{6} \le \operatorname{sen} x \le x \qquad (\text{para } x \ge 0)$$

(c) Verif que que estas desigualdades son ciertas para $x = 0{,}3$.

55. Aplique el método del problema 54 para demostrar que:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \le \operatorname{sen} x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad (\text{para } x \ge 0)$$

Verif que que estas desigualdades son ciertas para $x = 0{,}1$. ¿Por qué se ha especif cado $x \ge 0$ para $\operatorname{sen} x$ pero no para $\cos x$?

56. Aplique integración sobre los resultados para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ del problema 55, y obtenga el siguiente par de desigualdades. ¿Cuál será el patrón general?

57. Aplique el TFC (1ª parte) para demostrar que si $|f'(x)| \le K$ para $x \in [a,b]$, entonces $|f(x) - f(a)| \le K|x-a|$ para $x \in [a,b]$.

58. (a) Aplique el problema 57 para demostrar que se cumple la desigualdad $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \le |a-b|$ para todo a y b.

(b) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x+a) - \operatorname{sen} x$. En base al resultado obtenido en el apartado (a), pruebe que la gráf ca de $f(x)$ se encuentra entre las rectas horizontales $y = \pm a$.

(c) GU Verif que el apartado (b), representando gráf camente $f(x)$ y las rectas $y = \pm a$ para $a = 0{,}5$ y $a = 0{,}2$.

5.4 El teorema fundamental del cálculo (TFC), 2ª parte

La 1ª parte del teorema fundamental del cálculo establece que se pueden utilizar primitivas para el cálculo del integrales definidas. La 2ª parte expresa la otra dirección de esta relación: se pueden utilizar integrales definidas para *construir* primitivas.

Para enunciar la 2ª parte del teorema, se introduce la **función de área** de f con límite inferior a:

$$\boxed{A(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \text{área con signo desde } a \text{ hasta } x}$$

En ocasiones se denomina $A(x)$ la función ***área acumulada***. *En la definición de $A(x)$, se utiliza t como la variable de integración para evitar confusión con x, que es el límite superior de integración. En realidad, t es una variable muda que puede ser reemplazada por cualquier otra variable.*

En esencia, se va a convertir la integral definida en una función, tratando el límite superior x como una variable (figura 1). Cabe mencionar que $A(a) = 0$ pues $A(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

En algunas situaciones, se puede hallar una expresión explícita para $A(x)$ [figura 2].

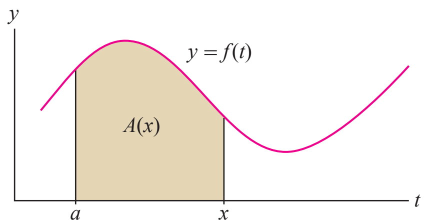


FIGURA 1 $A(x)$ es el área por debajo de la gráfica desde a hasta x.

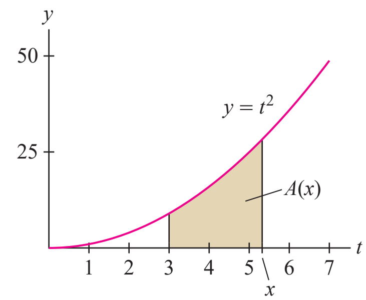


FIGURA 2 El área por debajo de $y = t^2$ desde 3 hasta x es $A(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9$.

■ **EJEMPLO 1** Halle una expresión para la función área $A(x) = \displaystyle\int_3^x t^2\,dt$.

Solución La función $F(t) = \frac{1}{3}t^3$ es una primitiva de $f(t) = t^2$. Según el TFC (1ª parte),

$$A(x) = \int_3^x t^2\,dt = F(x) - F(3) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3^3 = \frac{1}{3}x^3 - 9$$ ■

En el ejemplo previo, cabe observar que *la derivada de $A(x)$ es $f(x)$:*

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 9\right) = x^2$$

La 2ª parte del TFC establece que esta relación siempre es cierta: la derivada de la función área es igual a la función original.

TEOREMA 1 El teorema fundamental del cálculo, 2ª parte Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, la función área

$$\boxed{A(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

es una primitiva de $f(x)$ en I, es decir, $A'(x) = f(x)$. Equivalentemente,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$

Además, $A(x)$ cumple la condición inicial $A(a) = 0$.

Demostración En primer lugar, utilizaremos la propiedad de aditividad de la integral definida para expresar la variación de $A(x)$ en el intervalo $[x, x + h]$ como una integral:

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

En otras palabras, $A(x + h) - A(x)$ es igual al área que se muestra en en la figura 3, correspondiente a la sección limitada por la gráfica y el eje t, desde x hasta $x + h$.

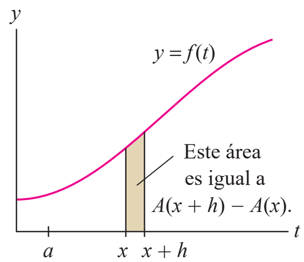


FIGURA 3 El área de la sección es igual a $A(x + h) - A(x)$.

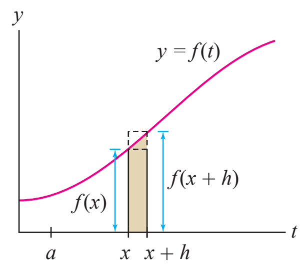


FIGURA 4 La sección sombreada se encuentra entre los rectángulos de alturas $f(x)$ y $f(x + h)$.

En esta demostración,

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Para simplificar el resto de la demostración, se supondrá que $f(x)$ es estrictamente creciente (ver el problema 50 para la situación general). Entonces, si $h > 0$, esta sección se encuentra entre los dos rectángulos de alturas $f(x)$ y $f(x + h)$ que se muestran en la figura 4,

$$\underbrace{hf(x)}_{\text{Área del menor rectángulo}} \le \underbrace{A(x+h) - A(x)}_{\text{Área de la sección}} \le \underbrace{hf(x+h)}_{\text{Área del mayor rectángulo}}$$

Dividiendo por h:

$$f(x) \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f(x+h)$$

Como $\lim\limits_{h\to 0+} f(x+h) = f(x)$, pues $f(x)$ es continua, y $\lim\limits_{h\to 0+} f(x) = f(x)$, según el principio de intercalación,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \qquad \boxed{1}$$

Razonando de forma análoga, se tiene que para $h < 0$,

$$f(x+h) \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f(x)$$

De nuevo, según el principio de intercalación,

$$\lim_{h\to 0-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \qquad \boxed{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) prueban que $A'(x)$ existe y que $A'(x) = f(x)$. ■

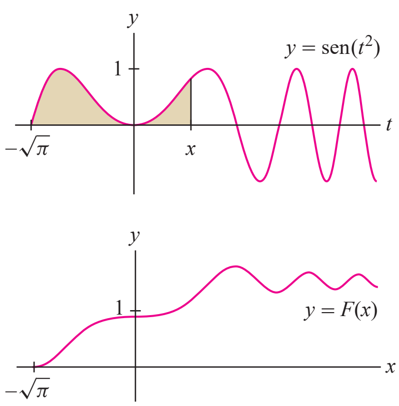


FIGURA 5 Gráfico de una simulación por ordenador de

$$F(x) = \int_{-\sqrt{\pi}}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt.$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Muchas aplicaciones (en ciencias, ingeniería y estadística) involucran funciones para las que no se dispone de una expresión explícita. Sin embargo, a menudo se puede expresar estas funciones como integrales definidas (o como series). Esto permite calcular sus valores numéricamente y obtener gráficos mediante un sistema de álgebra computacional. La figura 5 muestra el gráfico de una primitiva de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, para la que no se dispone de una expresión explícita pero que ha sido simulada por ordenador.

■ **EJEMPLO 2 La primitiva como una integral** Sea $F(x)$ una primitiva particular de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, tal que $F(-\sqrt{\pi}) = 0$. Exprese $F(x)$ como una integral.

Solución Según la 2ª parte del TFC, la función área con límite inferior $a = -\sqrt{\pi}$ es una primitiva cumpliendo $F(-\sqrt{\pi}) = 0$:

$$F(x) = \int_{-\sqrt{\pi}}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$$ ■

■ **EJEMPLO 3 Derivación de una integral** Halle la derivada de:

$$A(x) = \int_{2}^{x} \sqrt{1 + t^3}\, dt$$

y calcule $A'(2)$, $A'(3)$ y $A(2)$.

Solución Por el TFC (2ª parte), $A'(x) = \sqrt{1 + x^3}$. En particular,

$$A'(2) = \sqrt{1 + 2^3} = 3 \qquad \text{y} \qquad A'(3) = \sqrt{1 + 3^3} = \sqrt{28}$$

Por otra parte, $A(2) = \displaystyle\int_{2}^{2} \sqrt{1 + t^3}\, dt = 0$.

UN APUNTE CONCEPTUAL El TFC muestra como la integración y la diferenciación son *operaciones inversas*. Por el TFC (2ª parte), partiendo de una función continua $f(x)$ y considerando la integral $\int_a^x f(x)\, dx$, se puede obtener la función original derivando:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Integrar}} \int_a^x f(t)\, dt \xrightarrow{\text{Derivar}} \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Por otra parte, según el TFC (1ª parte), si se deriva primero e integra después también se recupera la función $f(x)$ [salvo por una constante $f(a)$]:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Derivar}} f'(x) \xrightarrow{\text{Integrar}} \int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$$

Cuando el límite superior de la integral sea una *función* de x, en lugar de x, se utilizará la 2ª parte del TFC junto con la regla de la cadena para derivar la integral.

■ **EJEMPLO 4 El TFC y la regla de la cadena** Halle la derivada de:

$$G(x) = \int_{-2}^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt$$

Solución No se puede aplicar directamente la 2ª parte del TFC porque el límite superior de la integral es x^2 en lugar de x. Es necesario identifcar $G(x)$ como una *función compuesta* de función exterior $A(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \operatorname{sen} t\, dt$:

$$G(x) = A(x^2) = \int_{-2}^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt$$

Por la 2ª parte del TFC $A'(x) = \operatorname{sen} x$. En consecuencia, aplicando la regla de la cadena,

$$G'(x) = A'(x^2) \cdot (x^2)' = \operatorname{sen}(x^2) \cdot (2x) = 2x \operatorname{sen}(x^2)$$

De manera alternativa, se puede introducir $u = x^2$ y aplicar la regla de la cadena según se muestra a continuación:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-2}^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt = \left(\frac{d}{du}\int_{-2}^{u} \operatorname{sen} t\, dt\right)\frac{du}{dx} = (\operatorname{sen} u)2x = 2x \operatorname{sen}(x^2)$$ ■

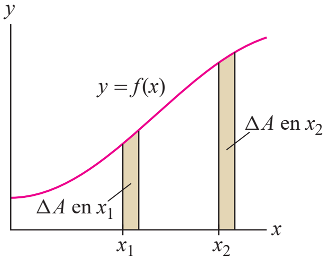


FIGURA 6 La variación en el área ΔA, para Δx f jado, es mayor si $f(x)$ es mayor.

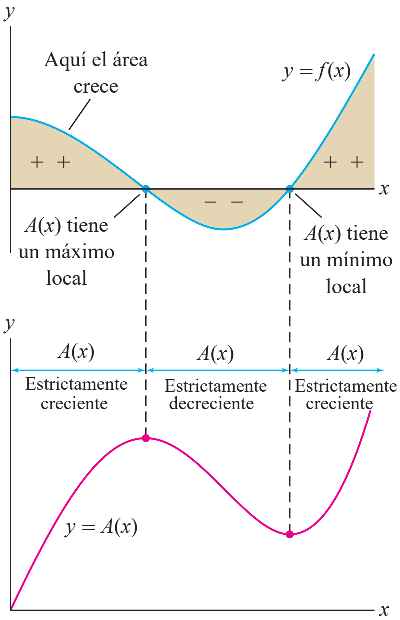


FIGURA 7 El signo de $f(x)$ determina el comportamiento creciente/decreciente de $A(x)$.

UN APUNTE GRÁFICO Otro estudio de dos gráficos Según el TFC (2ª parte) $A'(x) = f(x)$ o, en otras palabras, $f(x)$ es la tasa de variación de $A(x)$. Aunque no supiéramos este resultado, podríamos intuirlo al comparar las gráf cas de $A(x)$ y de $f(x)$. Observemos que:

- En la f gura 6 se muestra como el incremento en el área ΔA para un Δx f jado es superior en x_2 que en x_1 por ser $f(x_2) > f(x_1)$. Por tanto, la magnitud de $f(x)$ determina lo rápido que $A(x)$ cambia, tal y como cabría esperar si $A'(x) = f(x)$.
- En la f gura 7 se muestra como el signo de $f(x)$ determina si $A(x)$ es estrictamente creciente o decreciente. Si $f(x) > 0$, entonces $A(x)$ es estrictamente creciente, pues al realizar un desplazamiento hacia la derecha, se añade área positiva. Cuando $f(x)$ se vuelve negativa, $A(x)$ empieza a decrecer, porque se añade área negativa.
- $A(x)$ presenta un máximo local en los puntos en los que $f(x)$ cambia de signo + a − (los puntos a partir de los que el área empieza a ser negativa) y presenta un mínimo local en aquellos puntos en los que $f(x)$ cambia de − a +. Esto concuerda con el test de la primera derivada.

Los comentarios anteriores muestran que $f(x)$ "se comporta" como $A'(x)$, tal y como se establece en el TFC (2ª parte).

5.4 RESUMEN

- La *función área* de límite inferior a: $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Cumple $A(a) = 0$.
- TFC (2ª parte): $A'(x) = f(x)$ o, equivalentemente, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.
- El TFC (2ª parte) establece que toda función continua tiene una primitiva, precisamente su función área (con cualquier límite inferior).
- Para derivar la función $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$, exprese $G(x) = A(g(x))$ siendo $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. A continuación, aplique la regla de la cadena:

$$G'(x) = A'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

5.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sea $G(x) = \int_4^x \sqrt{t^3+1}\,dt$.

(a) ¿Se necesita el TFC para calcular $G(4)$?

(b) ¿Se necesita el TFC para calcular $G'(4)$?

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones es una primitiva $F(x)$ de $f(x) = x^2$ cumpliendo $F(2) = 0$?

(a) $\int_2^x 2t\,dt$ **(b)** $\int_0^2 t^2\,dt$ **(c)** $\int_2^x t^2\,dt$

3. Toda función continua, ¿tiene primitiva? Justif que la respuesta.

4. Sea $G(x) = \int_4^{x^3} \operatorname{sen} t\,dt$. ¿Cuáles de las siguientes af rmaciones es correcta?

(a) $G(x)$ es igual a la función compuesta $\operatorname{sen}(x^3)$.

(b) $G(x)$ es igual a la función compuesta $A(x^3)$, donde:

$$A(x) = \int_4^x \operatorname{sen}(t)\,dt$$

(c) $G(x)$ es demasiado complicada para poder ser derivada.

(d) Para derivar $G(x)$ se aplica la regla del producto.

(e) Para derivar $G(x)$ se aplica la regla de la cadena.

(f) $G'(x) = 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$.

Problemas

1. Exprese la función área de $f(x) = 2x + 4$ con límite inferior $a = -2$ como una integral y halle una expresión para ésta.

2. Halle una expresión para la función área de $f(x) = 2x+4$ con límite inferior $a = 0$.

3. Sea $G(x) = \int_1^x (t^2 - 2)\,dt$. Calcule $G(1)$, $G'(1)$ y $G'(2)$. A continuación halle una expresión para $G(x)$.

4. Halle $F(0)$, $F'(0)$ y $F'(3)$ para $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2 + t}\,dt$.

5. Halle $G(1)$, $G'(0)$ y $G'(\pi/4)$ para $G(x) = \displaystyle\int_1^x \tan t\,dt$.

6. Halle $H(-2)$ y $H'(-2)$ para $H(x) = \displaystyle\int_{-2}^x \frac{du}{u^2+1}$.

En los problemas 7-16, halle expresiones explícitas para las funciones representadas mediante las integrales.

7. $\displaystyle\int_2^x u^4\,du$

8. $\displaystyle\int_2^x (12t^2 - 8t)\,dt$

9. $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} u\,du$

10. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^x \sec^2\theta\,d\theta$

11. $\displaystyle\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t^2}$

12. $\displaystyle\int_{\operatorname{sen}\theta}^4 (5t+9)\,dt$

13. $\displaystyle\int_1^{x^2} t\,dt$

14. $\displaystyle\int_{x/2}^{x/4} \sec^2 u\,du$

15. $\displaystyle\int_{3\sqrt{x}}^{x^{3/2}} t^3\,dt$

16. $\displaystyle\int_{-2x}^x \sec^2 t\,dt$

En los problemas 17-20, exprese la primitiva $F(x)$ de $f(x)$, cumpliendo la condición inicial, como una integral.

17. $f(x) = \sqrt{x^3+1}, \quad F(5) = 0$

18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+9}, \quad F(7) = 0$

19. $f(x) = \sec x, \quad F(0) = 0$

20. $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta^3), \quad F(-\pi) = 0$

En los problemas 21-24, calcule la derivada.

21. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (t^5 - 9t^3)\,dt$

22. $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\int_1^\theta \cot u\,du$

23. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{100}^t \sec(5x-9)\,dx$

24. $\displaystyle\frac{d}{ds}\int_{-2}^s \tan\left(\frac{1}{1+u^2}\right)du$

25. Sea $f(x)$ la función de la figura 8 y $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Calcule $A(2)$, $A(3)$, $A'(2)$ y $A'(3)$.

(b) Halle fórmulas para $A(x)$ en $[0,2]$ y en $[2,4]$ y dibuje la gráfica de $A(x)$.

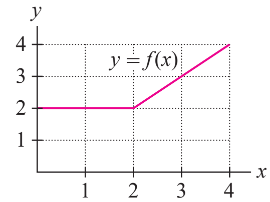


FIGURA 8

26. Sea $g(x)$ la función de la figura 9. Represente, de forma aproximada, la gráfica de $A(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

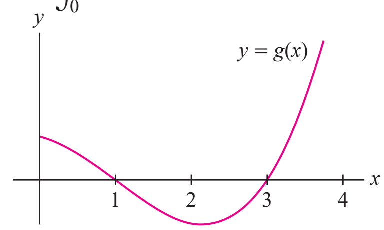


FIGURA 9

27. Verifique que $\displaystyle\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x|x|$. *Indicación:* Considere por separado los casos $x \geq 0$ y $x \leq 0$.

28. Halle $G'(1)$ para $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{t^3+3}\,dt$.

En los problemas 29-34, calcule la derivada.

29. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{t\,dt}{t+1}$

30. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{1/x} \cos^3 t\,dt$

31. $\displaystyle\frac{d}{ds}\int_{-6}^{\cos s} u^4\,du$

32. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} \sqrt{t}\,dt$

Indicación para el problema 32: $F(x) = A(x^4) - A(x^2)$.

33. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \tan t\,dt$

34. $\displaystyle\frac{d}{du}\int_{-u}^{3u} \sqrt{x^2+1}\,dx$

En los problemas 35-38, sea $f(x)$ la función dada por la figura 10. Introducimos,

$$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad y \qquad B(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

35. Halle el mínimo y el máximo de $A(x)$ en $[0,6]$.

36. Halle el mínimo y el máximo de $B(x)$ en $[0,6]$.

37. Halle expresiones para $A(x)$ y $B(x)$, válidas sobre $[2,4]$.

38. Halle expresiones para $A(x)$ y $B(x)$, válidas sobre $[4,5]$.

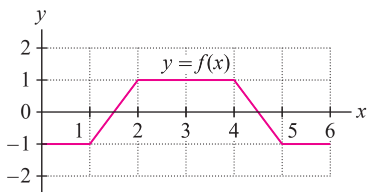


FIGURA 10

39. Sea $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para $f(x)$ dada por la figura 11.

(a) ¿Tiene $A(x)$ un máximo relativo en P?

(b) ¿En qué punto presenta $A(x)$ un mínimo relativo?

(c) ¿En qué punto presenta $A(x)$ un máximo relativo?

(d) ¿Verdadero o falso? $A(x) < 0$ para todo x en el intervalo considerado.

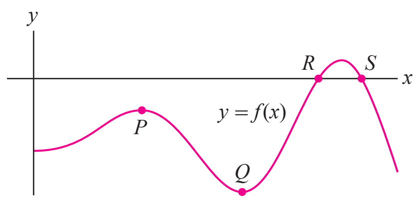


FIGURA 11 Gráfica de $f(x)$.

40. Determine $f(x)$ sabiendo que $\int_0^x f(t)\,dt = x^2 + x$.

41. Determine la función $g(x)$ y todos los valores de c tales que

$$\int_c^x g(t)\,dt = x^2 + x - 6$$

42. Halle $a \leq b$ tales que $\int_a^b (x^2 - 9)\,dx$ sea mínima.

En los problemas 43-44, sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

43. **La función área y la concavidad** Justifique por qué las siguientes afirmaciones son ciertas. Sea $f(x)$ una función derivable.

(a) Si c es un punto de inflexión de $A(x)$, entonces $f'(c) = 0$.

(b) $A(x)$ es convexa si $f(x)$ es estrictamente creciente.

(c) $A(x)$ es cóncava si $f(x)$ es estrictamente decreciente.

44. Relacione la propiedad de $A(x)$ con la correspondiente propiedad de la gráfica de $f(x)$. Suponga que $f(x)$ es derivable.

Función área $A(x)$

(a) $A(x)$ es estrictamente decreciente.

(b) $A(x)$ tiene un máximo relativo.

(c) $A(x)$ es convexa.

(d) $A(x)$ pasa de ser convexa a cóncava.

Gráfica de $A(x)$

(i) Se encuentra por debajo del eje x.

(ii) Cruza el eje x desde los valores positivos hacia los negativos.

(iii) Tiene un máximo relativo.

(iv) $f(x)$ es estrictamente creciente.

45. Sea $f(x)$ la función dada por la figura 12 y $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento estrictos de $A(x)$.

(b) Los valores x para los que $A(x)$ alcanza un máximo o un mínimo relativo.

(c) Los puntos de inflexión de $A(x)$.

(d) Los intervalos de convexidad y de concavidad de $A(x)$.

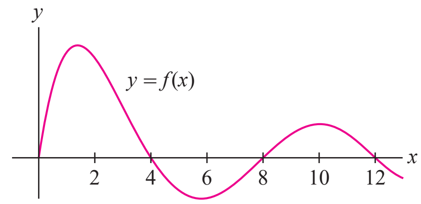


FIGURA 12

46. Sean $f(x) = x^2 - 5x - 6$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Halle los puntos estacionarios de $F(x)$ y determine si son máximos o mínimos relativos.

(b) Halle los puntos de inflexión de $F(x)$ y determine si el cambio que se produce en éstos es de convexidad a concavidad o a la inversa.

(c) GU Represente gráficamente $f(x)$ y $F(x)$, utilizando los mismos ejes, y confirme las respuestas de los apartados (a) y (b).

47. Dibuje la gráfica de una función estrictamente creciente $f(x)$, para la que tanto $f'(x)$ como $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ sean decrecientes.

48. La figura 13 muestra la gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Sea $F(x) = \int_0^x t \operatorname{sen} t\,dt$.

(a) Localice el máximo absoluto y el máximo relativo de $F(x)$ en $[0, 3\pi]$.

(b) Justifique gráficamente: $F(x)$ tiene exactamente una raíz en $[\pi, 2\pi]$.

(c) ¿Cuántas raíces tiene $F(x)$ en $[0, 3\pi]$?

(d) Halle los puntos de inflexión de $F(x)$ en $[0, 3\pi]$. Para cada uno de ellos, determine si el cambio es de convexidad a concavidad o a la inversa.

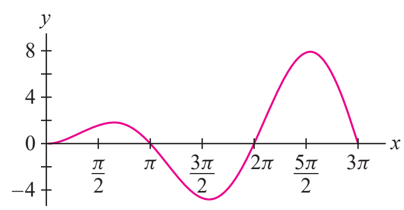


FIGURA 13 Gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

49. GU Halle el menor de los puntos estacionarios positivos de

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^{3/2})\,dt$$

y determine si se trata de un máximo o de un mínimo relativo. A continuación, halle el menor de los puntos de inflexión positivos de $F(x)$ y, en base a la gráfica de $y = \cos(x^{3/2})$, determine si el cambio que se produce es de convexidad a concavidad o a la inversa.

Problemas avanzados

50. Demostración del TFC (2ª parte) En la demostración facilitada en el libro se supone que $f(x)$ es estrictamente creciente. Para demostrar este resultado para cualquier función continua, sean $m(h)$ y $M(h)$ el *mínimo* y el *máximo* de $f(t)$ en $[x, x+h]$ (f gura 14). La continuidad de $f(x)$ implica que $\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(x)$.

Demuestre que para cualquier $h > 0$,

$$hm(h) \le A(x+h) - A(x) \le hM(h)$$

Para $h < 0$, las desigualdades cambian de sentido. Demuestre que $A'(x) = f(x)$.

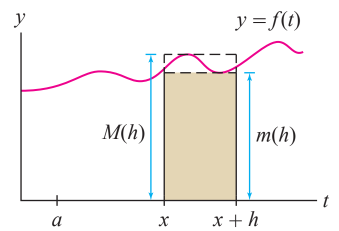


FIGURA 14 Interpretación gráf ca de $A(x+h) - A(x)$.

51. Demostración del TFC (1ª parte) En la 1ª parte del TFC se establece que $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ si $F'(x) = f(x)$. Aplique la 2ª parte del TFC para obtener una nueva demostración, según se indica a continuación. Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(a) Demuestre que $F(x) = A(x) + C$, para alguna constante C.

(b) Demuestre que $F(b) - F(a) = A(b) - A(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

52. ¿Se puede expresar cualquier primitiva como una integral? La función área $\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$, para cualquier valor de a. Sin embargo, no toda primitiva se obtiene de esta forma. La primitiva general de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$. Demuestre que $F(x)$ es una función área si $C \le 0$, pero no si $C > 0$.

53. Demuestre la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

54. Aplique el resultado del problema 53 para calcular:

$$\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{e^x} \operatorname{sen} t\,dt$$

5.5 Variación neta como la integral de una tasa

De momento nos hemos centrado en la interpretación de la integral como un área. En esta sección, se utilizará la integral para calcular la variación neta.

Consideremos el siguiente problema: sea $r(t)$ la razón a la que se llena de agua un cubo vacío, medida en litros por segundo. ¿Qué cantidad de agua contiene el cubo después de 4 segundos? Si la tasa de f ujo de agua fuese *constante* (por ejemplo, 1,5 litros/segundo)

$$\text{Cantidad de agua} = \text{tasa de f ujo} \times \text{tiempo transcurrido} = 1{,}5 \cdot 4 = 6 \text{ litros}$$

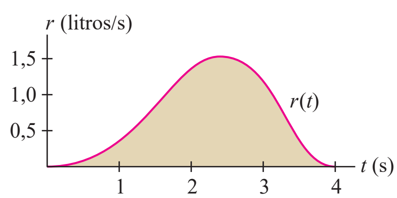


FIGURA 1 La cantidad de agua en el cubo es igual al área bajo la gráf ca de la razón de f ujo $r(t)$.

Sin embargo, cabe suponer que la tasa de f ujo $r(t)$ varía, como en la f gura 1. Entonces, *la cantidad de agua es igual al área por debajo de la gráf ca de $r(t)$*. Para demostrarlo, sea $s(t)$ la cantidad de agua en el cubo en el momento t. Entonces, $s'(t) = r(t)$ porque $s'(t)$ es la tasa de variación de la cantidad de agua. Además, $s(0) = 0$ pues el cubo está inicialmente vacío. Según la 1ª parte del TFC,

$$\underbrace{\int_0^4 s'(t)\,dt}_{\substack{\text{Área bajo la gráf ca}\\ \text{de la razón de f ujo}}} = s(4) - s(0) = \underbrace{s(4)}_{\substack{\text{Agua en el cubo}\\ \text{en } t = 4}}$$

De manera más general, $s(t_2) - s(t_1)$ es la **variación neta** de $s(t)$ a lo largo del intervalo $[t_1, t_2]$. La 1ª parte del TFC da lugar al siguiente resultado.

En el teorema 1, la variable t no tiene por qué ser necesariamente una variable temporal.

TEOREMA 1 Variación neta como la integral de una tasa La variación neta en $s(t)$ a lo largo de un intervalo $[t_1, t_2]$ viene dada por la integral

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt}_{\text{Integral de la tasa de variación}} = \underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{\text{Variación neta a lo largo de } [t_1, t_2]}$$

■ **EJEMPLO 1** Un depósito pierde agua a razón de $2+5t$ litros/hora, donde t es el número de horas transcurridas a partir de las 7 AM. ¿Cuánta agua se ha perdido entre las 9 y las 11 de la mañana?

Solución Sea $s(t)$ la cantidad de agua en el tanque en el momento t. Entonces $s'(t) = -(2+5t)$, donde el signo menos es debido a que $s(t)$ es decreciente. Como las 9 y las 11 de la mañana corresponden a $t = 2$ y $t = 4$ respectivamente, la variación neta en $s(t)$ entre las 9 y las 11 de la mañana es:

$$s(4) - s(2) = \int_2^4 s'(t)\,dt = -\int_2^4 (2+5t)\,dt =$$
$$= -\left(2t + \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_2^4 = (-48) - (-14) = -34 \text{ litros}$$

El tanque ha perdido 34 litros entre las 9 y las 11 de la mañana. ■

En el siguiente ejemplo, se estimará el valor de una integral mediante la evaluación de la función en diferentes puntos. Se calculará la media de las aproximaciones en base a los extremos inferior y superior, porque esta media suele conducir a una aproximación más precisa que la que se obtendría con cualquiera de las aproximaciones basadas sólo en uno de los extremos. (En la sección 8.8, nos referiremos a esta media como la aproximación trapezoidal.)

■ **EJEMPLO 2 Volumen de circulación** El número de vehículos por hora que pasan a través de un punto de observación de la carretera por unidad de tiempo se denomina razón del volumen de tráf co o intensidad de circulación $q(t)$ (en coches por hora).

(a) ¿Qué cantidad representa la integral $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$?

(b) Se registra la intensidad de circulación, a intervalos de 15 minutos entre las 7:00 y las 9:00 de la mañana. Estime el número total de vehículos que han utilizado la carretera en algún momento de ese periodo de dos horas.

t	7:00	7:15	7:30	7:45	8:00	8:15	8:30	8:45	9:00
$q(t)$	1044	1297	1478	1844	1451	1378	1155	802	542

Solución
(a) La integral $\int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$ representa el número total de vehículos que han pasado por el punto de observación en el periodo de tiempo $[t_1, t_2]$.
(b) Los valores numéricos se han registrado a intervalos de $\Delta t = 0{,}25$ horas. Por tanto:

$$L_N = 0{,}25\big(1044 + 1297 + 1478 + 1844 + 1451 + 1378 + 1155 + 802\big) \approx$$
$$\approx 2612$$
$$R_N = 0{,}25\big(1297 + 1478 + 1844 + 1451 + 1378 + 1155 + 802 + 542\big) \approx$$
$$\approx 2487$$

El número de vehículos que han pasado por el punto de observación entre las 7 y las 9 de la mañana se estima como la media de R_N y L_N:

$$\int_7^9 q(t)\,dt \approx \frac{1}{2}(R_N + L_N) = \frac{1}{2}(2612 + 2487) \approx 2550$$

Aproximadamente 2550 vehículos utilizaron la carretera entre las 7 y las 9 de la mañana. ■

En el ejemplo 2, L_N se obtiene mediante la suma de los valores de $q(t)$ en los extremos inferiores:

7:00, 7:15, ..., 8:45

R_N se obtiene mediante la suma de los valores de $q(t)$ en los extremos superiores:

7:15, ..., 8:45, 9:00

La integral de la velocidad

Sea $s(t)$ la posición de un objeto en movimiento rectilíneo en el instante t. Entonces, la velocidad del objeto es $v(t) = s'(t)$ y la integral de $v(t)$ es igual a la *variación neta de la posición* o *desplazamiento* en un intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt = \underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{\substack{\text{Desplazamiento o variación}\\ \text{neta de la posición}}}$$

Se debe distinguir entre desplazamiento y *distancia recorrida*. Si se recorren 10 km y se vuelve al punto de partida, el desplazamiento es cero, pero la distancia recorrida es 20 km. Para obtener la distancia recorrida, en lugar del desplazamiento, se debe integrar la *celeridad* $|v(t)|$.

TEOREMA 2 La integral de la velocidad Para un objeto en movimiento a velocidad $v(t)$,

$$\boxed{\text{Desplazamiento a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt}$$

$$\boxed{\text{Distancia recorrida a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt}$$

EJEMPLO 3 Una partícula se desplaza a velocidad $v(t) = t^3 - 10t^2 + 24t$ m/s. Calcule:

(a) Desplazamiento en el intervalo de tiempo $[0, 6]$.

(b) La distancia total recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 6]$.

Represente la trayectoria de la partícula mediante un diagrama de movimiento.

Solución En primer lugar, se calcula la integral indef nida:

$$\int v(t)\,dt = \int (t^3 - 10t^2 + 24t)\,dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2 + C$$

(a) El desplazamiento a lo largo del intervalo $[0, 6]$ es:

$$\int_0^6 v(t)\,dt = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\bigg|_0^6 = 36 \text{ m}$$

(b) La factorización $v(t) = t(t-4)(t-6)$ pone de manif esto que $v(t)$ cambia de signo en $t = 4$. Es positivo en $[0, 4]$ y negativo en $[4, 6]$, como se muestra en la f gura 2. Por tanto, la distancia total recorrida es:

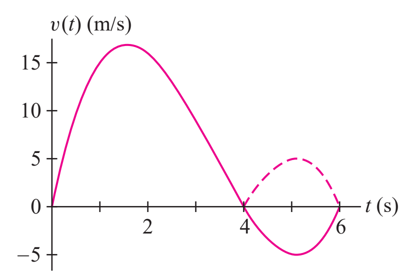


FIGURA 2 Gráf ca de $v(t) = t^3 - 10t^2 + 24t$. En $[4, 6]$, la curva de trazo discontinuo es la gráf ca de $|v(t)|$.

$$\int_0^6 |v(t)|\,dt = \int_0^4 v(t)\,dt - \int_4^6 v(t)\,dt$$

Evaluando estas dos integrales por separado:

$$[0,4]: \quad \int_0^4 v(t)\,dt = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\bigg|_0^4 = \frac{128}{3} \text{ m}$$

$$[4,6]: \quad \int_4^6 v(t)\,dt = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\bigg|_4^6 = -\frac{20}{3} \text{ m}$$

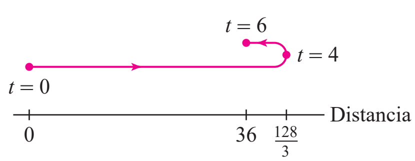


FIGURA 3 Trayectoria de la partícula a lo largo de una línea recta.

se obtiene que la distancia total recorrida es $\frac{128}{3} + \frac{20}{3} = \frac{148}{3} = 49\frac{1}{3}$ m.

La f gura 3 es una diagrama de movimiento ref ejando la trayectoria de la partícula. Ésta recorre $\frac{128}{3}$ m durante los primeros 4 s y después retrocede $\frac{20}{3}$ m durante los siguientes 2 s.

Coste total y marginal

Sea $C(x)$ la función de coste de un fabricante, es decir, el coste en euros de producir x unidades de un cierto producto o mercancía. La derivada $C'(x)$ se denomina **coste marginal**. El coste de aumentar la producción de a a b es la variación neta $C(b) - C(a)$, que a su vez es igual a la integral del coste marginal:

En la sección 3.4, se definió el coste marginal para un nivel de producción x_0 como el coste:

$$C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

de producir una unidad adicional. Como este coste marginal se aproxima por la derivada $C'(x_0)$, a menudo nos solemos referir a $C'(x)$ como el coste marginal también.

$$\text{Coste de aumentar la producción de } a \text{ a } b = \int_a^b C'(x)\,dx$$

■ **EJEMPLO 4** El coste marginal de producir x chips de ordenador (en unidades de mil) es $C'(x) = 300x^2 - 4000x + 40\ 000$ (euros por miles de chips).

(a) Halle el coste de aumentar la producción de 10 000 a 15 000 chips.

(b) Obtenga el coste total de producir 15 000 chips, suponiendo que poner en funcionamiento la fábrica cuesta 30 000 euros [es decir, $C(0) = 30\ 000$].

Solución

(a) El coste de aumentar la producción de 10 000 ($x = 10$) a 15 000 ($x = 15$) es:

$$C(15) - C(10) = \int_{10}^{15} (300x^2 - 4000x + 40\ 000)\,dx =$$

$$= (100x^3 - 2000x^2 + 40\ 000x)\Big|_{10}^{15} =$$

$$= 487\ 500 - 300\ 000 = 187\ 500\,€$$

(b) El coste de aumentar la producción de 0 a 15 000 chips es:

$$C(15) - C(0) = \int_0^{15} (300x^2 - 4000x + 40\ 000)\,dx =$$

$$= (100x^3 - 2000x^2 + 40\ 000x)\Big|_0^{15} = 487\ 500\,€$$

El coste total de producir 15 000 chips debe incluir los costes iniciales de 30 000 €:

$$C(15) = C(0) + 487\ 500 = 30\ 000 + 487\ 500 = 517\ 500\,€$$ ■

5.5 RESUMEN

- Muchas aplicaciones están basadas en el siguiente principio: *La variación neta en una cantidad $s(t)$ es igual a la integral de su tasa de variación:*

$$\underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{\text{Variación neta en } [t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$$

- Para un objeto que se mueve en línea recta a velocidad $v(t)$,

$$\text{Desplazamiento a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

$$\text{Distancia total recorrida a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$$

- Si $C(x)$ es el coste de producir x unidades de un cierto bien, entonces $C'(x)$ es el coste marginal y

$$\text{Coste de aumentar la producción de } a \text{ a } b = \int_a^b C'(x)\,dx$$

5.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Se sumerge en agua un objeto de metal caliente. La razón de refrigeración del objeto (en grados por minuto) es una función $f(t)$ del tiempo. ¿Qué cantidad representa la integral $\int_0^T f(t)\,dt$?

2. Un avión recorre 560 km desde Los Ángeles hasta San Francisco en 1 hora. Si la velocidad del avión en el instante t es $v(t)$ km/h, ¿qué valor tiene $\int_0^1 v(t)\,dt$?

3. ¿Qué cantidades se representarían, de forma natural, mediante derivadas y qué cantidades mediante integrales?

(a) Velocidad de un tren.

(b) Precipitación de lluvia durante un periodo de 6 meses.

(c) Kilómetros por galón recorridos por un vehículo.

(d) Aumento de la población de EE.UU. desde 1990 hasta 2010.

Problemas

1. Un embalse se llena de agua a razón de $3000 + 20t$ litros por hora. ¿Cuánta agua hay en el embalse al cabo de 5 horas?

2. Una población de insectos aumenta a razón de $200 + 10t + 0{,}25t^2$ insectos por día. Halle la población de insectos al cabo de 3 días, suponiendo que hay 35 insectos en $t = 0$.

3. Según una encuesta, la candidata a una cierta alcaldía está ganando votantes a razón de $2000t + 1000$ votos por día, donde t es el número de días desde que anunció su candidatura. Pasados 60 días, ¿cuántos partidarios tendrá la candidata, suponiendo que en $t = 0$ no tenía ninguno?

4. En una fábrica se producen bicicletas a razón de $95+3t^2-t$ unidades por semana. ¿Cuántas bicicletas se han fabricado desde el principio de la semana 2 hasta el f nal de la semana 3?

5. Halle el desplazamiento de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta a velocidad $v(t) = 4t - 3$ m/s en el intervalo de tiempo $[2, 5]$.

6. Halle el desplazamiento a lo largo del intervalo de tiempo $[1, 6]$ de un helicóptero cuya velocidad (vertical) en el instante t es $v(t) = 0{,}02t^2 + t$ m/s.

7. Un gato se cae de un árbol (con velocidad inicial igual a cero) en el instante $t = 0$. ¿Cuál es la distancia total que recorre el gato en su caída, desde $t = 0{,}5$ hasta $t = 1$ s? Aplique la fórmula de Galileo $v(t) = -9{,}8t$ m/s.

8. Se lanza un proyectil con velocidad (vertical) inicial de 100 m/s. Aplique la fórmula $v(t) = 100 - 9{,}8t$ de la velocidad para obtener la distancia recorrida en los primeros 15 segundos.

En los problemas 9-12, una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a la velocidad dada (en m/s). Halle el desplazamiento y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo, y dibuje un diagrama de movimiento como el de la f gura 3 (con la distancia y etiquetas temporales).

9. $v(t) = 12 - 4t$, $[0, 5]$

10. $v(t) = 36 - 24t + 3t^2$, $[0, 10]$

11. $v(t) = t^{-2} - 1$, $[0{,}5, 2]$

12. $v(t) = \cos t$, $[0, 3\pi]$

13. Halle la variación neta de la velocidad en $[1, 4]$ para un objeto con $a(t) = 8t - t^2$ m/s^2.

14. Demuestre que si la aceleración es constante, entonces la variación en la velocidad es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo.

15. La intensidad de circulación en un cierto punto de una carretera es $q(t) = 3000+2000t-300t^2$ (t en horas), siendo $t = 0$ las 8 de la mañana. ¿Cuántos coches pasan por este punto, en el intervalo de tiempo que va desde las 8 de la mañana hasta las 10 de la mañana?

16. El coste marginal de producir x Tablet PC es $C'(x) = 120 - 0{,}06x + 0{,}00001x^2$. Si los costes iniciales son 90 000 €, ¿cuál es el coste de producir 3000 unidades? Si se ha establecido la producción en 3000 unidades, ¿cuál sería el coste de producir 200 unidades adicionales?

17. Una pequeña boutique produce suéteres con un coste marginal de $40 - 5[[x/5]]$ para $0 \le x \le 20$, siendo $[[x]]$ la función entero superior o función techo. Halle el coste de producir 20 suéteres. A continuación, calcule el coste medio de los primeros 10 suéteres y de los últimos 10.

18. Se registra a intervalos de medio minuto la razón (en litros por minuto) a la que se desagua un tanque. Calcule las aproximaciones basadas en los extremos inferior y superior, para estimar la cantidad total de agua drenada durante los primeros 3 minutos.

t (min)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
r (L/min)	50	48	46	44	42	40	38

19. Se registra la velocidad de un vehículo a intervalos de medio segundo (en pies por segundo). Utilice la media de las aproximaciones basadas en los extremos inferior y superior, para estimar la distancia total recorrida durante los primeros 4 segundos.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$v(t)$	0	12	20	29	38	44	32	35	30

20. Para modelar los efectos de un **impuesto del carbono** sobre las emisiones de CO_2, los responsables políticos estudian el *coste marginal de reducción* $B(x)$, que se def ne como el coste de aumentar la reducción de CO_2 de x toneladas a $x + 1$ (en unidades de diez mil toneladas —f gura 4). ¿Que cantidad se representa en la f gura 4 mediante el área bajo la curva en $[0, 3]$?

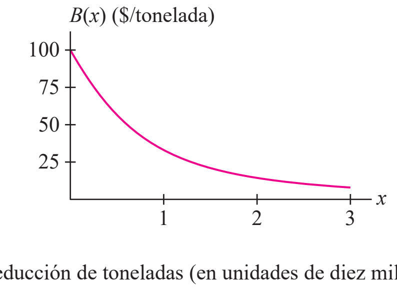


FIGURA 4 Coste marginal de la reducción $B(x)$.

21. Un megawatt de potencia es 10^6 W o $3{,}6 \times 10^9$ J/hora. ¿Qué cantidad se representa en la f gura 5 mediante el área bajo la gráf ca? Estime la energía (en joules) consumida entre las 4 y las 8 de la tarde.

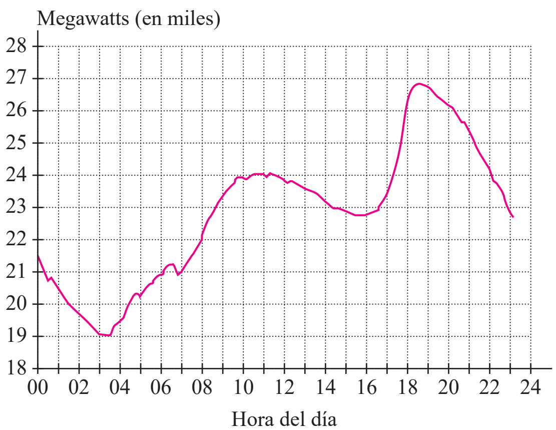


FIGURA 5 Consumo de potencia a lo largo de un periodo de 1 día en California (Febrero 2010).

22. La f gura 6 muestra la tasa de migración $M(t)$ de Irlanda para el periodo 1988-1998; ésta corresponde a la razón según la cual la población (en miles por año) se muda.

(a) La siguiente integral, ¿es positiva o negativa? ¿Qué cantidad representa?

$$\int_{1988}^{1998} M(t)\,dt$$

(b) El f ujo neto de población en Irlanda durante el periodo 1988-1998, ¿fue positivo o negativo?

(c) Según el primer ministro de Irlanda, "Se ha alcanzado un punto de inf exión. Todavía estamos perdiendo población pero la tendencia, en estos momentos, es hacia la recuperación." ¿En qué dos años podría haber hecho esta declaración?

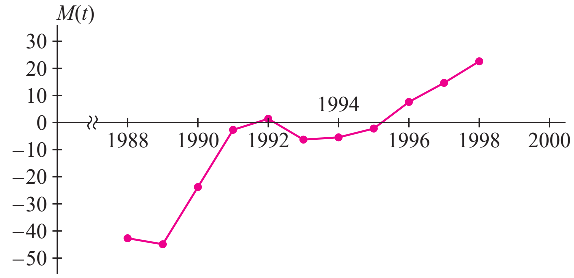


FIGURA 6 Tasa de migración irlandesa (en miles por año).

23. Sea $N(d)$ el número de asteriodes de diámetro $\le d$ kilómetros. Los datos sugieren que los diámetros se distribuyen según una ley de potencias def nida a trozos:

$$N'(d) = \begin{cases} 1{,}9 \times 10^9 d^{-2{,}3} & \text{para } d < 70 \\ 2{,}6 \times 10^{12} d^{-4} & \text{para } d \ge 70 \end{cases}$$

(a) Calcule el número de asteroides que tienen diámetro entre 0,1 y 100 km.

(b) Considerando la aproximación $N(d + 1) - N(d) \approx N'(d)$, estime el número de asteroides de diámetro igual a 50 km.

24. Capacidad caloríf ca La capacidad caloríf ca $C(T)$ de una sustancia es la cantidad de energía (en joules) que que hay que suministrar a 1 g de la sustancia para aumentar su temperatura T en 1 °C.

(a) Explique por qué la energía necesaria para aumentar la temperatura desde T_1 hasta T_2 es el área bajo la gráf ca de $C(T)$ en $[T_1, T_2]$.

(b) Si $C(T) = 6 + 0{,}2\sqrt{T}$, ¿cuánta energía hay que suministrar para aumentar la temperatura desde 50 hasta 100°C?

25. La f gura 7 muestra la tasa $R(t)$ de consumo de gas natural (en billones de pies cúbicos por día) en los estados del Atlántico medio de EE.UU. (New York, New Jersey, Pennsylvania). Exprese la cantidad total de gas consumida en 2009 como una integral (respecto al tiempo t en días). A continuación, estime esta cantidad en base a los siguientes valores mensuales de $R(t)$:

3,18	2,86	2,39	1,49	1,08	0,80
1,01	0,89	0,89	1,20	1,64	2,52

Recuerde que el número de días de un mes varía según el mes considerado.

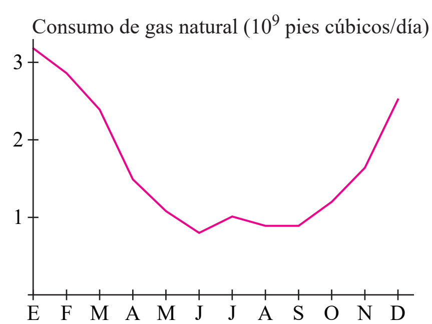


FIGURA 7 Consumo de gas natural en 2009 en los estados del Atlántico medio.

26. El gasto cardíaco es la tasa R de volumen de sangre bombeada por el corazón por unidad de tiempo (en litros por minuto). Los médicos miden R inyectando A mg de colorante en una vena que se dirija al corazón en $t = 0$ y registrando la concentración $c(t)$ de tinte (en miligramos por litro) bombeada en cortos intervalos de tiempo regulares (f gura 8).

(a) Explique la siguiente af rmación: La cantidad de tinte bombeada en un corto periodo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es aproximadamente $Rc(t)\Delta t$.

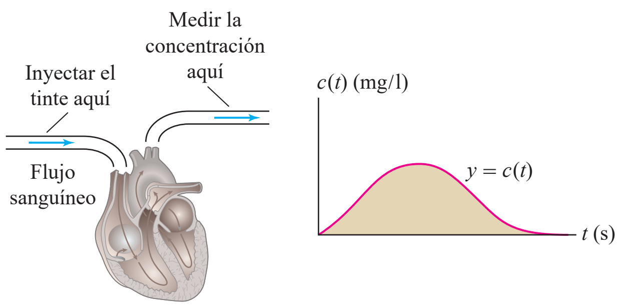


FIGURA 8

(b) Demuestre que $A = R\int_0^T c(t)\,dt$, donde T es lo suf cientemente elevado para que todo el tinte sea bombeado a través del corazón, pero no tanto como para que el tinte vuelva por recirculación.

(c) Supongamos que $A = 5$ mg. Estime R mediante los siguientes valores de $c(t)$ registrados en intervalos de 1 segundo desde $t = 0$ hasta $t = 10$:

0	0,4	2,8	6,5	9,8	8,9
6,1	4	2,3	1,1	0	

Problemas 27 y 28: Un estudio sugiere que la razón de extinción $r(t)$ de las familias de animales marinos durante el eón Fanerozoico se puede modelar mediante la función $r(t) = 3130/(t + 262)$ para $0 \le t \le 544$, siendo t el tiempo transcurrido (en millones de años) desde el inicio del eón, hace 544 millones de años. De esta manera, $t = 544$ se ref ere a la época actual, $t = 540$ corresponde a hace 4 millones de años, y así sucesivamente.

27. Calcule la media de R_N y L_N, $N = 5$, para estimar el número total de familias que se extinguieron en los periodos $100 \le t \le 150$ y $350 \le t \le 400$.

28. SAC Estime el número total de familias que se han extinguido desde $t = 0$ hasta el periodo actual, mediante M_N, $N = 544$.

Problemas avanzados

29. Pruebe que una partícula que se encuentre en el origen en $t = 1$ y que se mueva sobre el eje x a velocidad $v(t) = t^{-2}$, nunca pasará del punto $x = 2$.

30. Pruebe que una partícula que se encuentre en el origen en $t = 1$ y que se mueva sobre el eje x a velocidad $v(t) = t^{-1/2}$ se encontrará arbitrariamente lejos del origen, tras un lapso de tiempo suf ciente.

5.6 Método de sustitución

El término "integración" se utiliza de dos maneras. Se refiere a:

- *El procedimiento de hallar el área con signo (calcular la integral definida).*
- *El procedimiento de hallar una primitiva (obtener una integral indefinida).*

En general, la integración (antiderivación) es más difícil que la derivación. No hay métodos infalibles y muchas primitivas no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales. Sin embargo, sí que existen algunas técnicas generales importantes. Una de estas técnicas es el **método de sustitución**, que utiliza la regla de la cadena "a la inversa".

Consideremos la integral $\int 2x\cos(x^2)\,dx$. Se puede resolver recordando la siguiente aplicación de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}(x^2) = 2x\cos(x^2)$$

Observemos que $\mathrm{sen}(x^2)$ es una primitiva de $2x\cos(x^2)$ y, por tanto:

$$\int \underbrace{2x}_{\substack{\text{Derivada de la}\\ \text{función interior}}}\ \cos\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{Función}\\ \text{interior}}}\,dx = \mathrm{sen}(x^2) + C$$

De forma similar, según la regla de la cadena:

$$\int \underbrace{(1 + 3x^2)}_{\substack{\text{Derivada de la}\\ \text{función interior}}}\ \cos(\underbrace{x + x^3}_{\substack{\text{Función}\\ \text{interior}}})\,dx = \mathrm{sen}(x + x^3) + C$$

RECORDATORIO Una "función compuesta" es una función de la forma $f(g(x))$. Se suele denominar a $g(x)$ la función interior y a $f(u)$ la función exterior.

En ambos casos, el integrando es el producto de una función compuesta y de la derivada de la función en el interior. La regla de la cadena no ayuda si no se dispone de la derivada de la función en el interior. Por ejemplo, no se puede utilizar la regla de la cadena para calcular $\int \cos(x + x^3)\,dx$ porque el factor $(1 + 3x^2)$ no forma parte del integrando.

En general, si $F'(u) = f(u)$, por la regla de la cadena, tendremos:

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

lo que se traduce en el siguiente resultado de integración.

TEOREMA 1 El método de sustitución Si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C}$$

Sustitución mediante diferenciales

Antes de pasar a los ejemplos, se tratará cómo llevar a cabo la sustitución mediante diferenciales. Los diferenciales son símbolos, tales como du o dx, que se encuentran en la notación de Leibniz du/dx y $\int f(x)\,dx$. Para los cálculos que siguen, se manipularán como si estuvieran relacionados por una ecuación en la que dx se "cancela":

$$du = \frac{du}{dx}\,dx$$

Equivalentemente, du y dx están relacionados por:

$$\boxed{du = u'(x)\,dx} \qquad \boxed{1}$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{lll} \text{si} \ \ u = x^2 & \text{entonces} & du = 2x\,dx \\ \text{si} \ \ u = \cos(x^3) & \text{entonces} & du = -3x^2\,\text{sen}(x^3)\,dx \end{array}$$

Cuando el integrando es de la forma $f(u(x))\,u'(x)$, se puede utilizar la ec. (1) para reescribir toda la integral (incluyendo el término dx) en términos de u y de su diferencial du:

El cálculo simbólico de sustitución mediante diferenciales fue inventado por Leibniz y es considerado uno de sus mayores logros. Reduce el complicado proceso de transformar integrales a un práctico conjunto de reglas.

$$\boxed{\int \underbrace{f(u(x))}_{f(u)}\ \underbrace{u'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du}$$

Esta ecuación se denomina **fórmula del cambio de variables**. Transforma una integral en la variable x en una integral (que se espera sea más simple) en la nueva variable u.

■ **EJEMPLO 1** Resuelva $\displaystyle\int 3x^2\,\text{sen}(x^3)\,dx$.

Solución El integrando contiene la función compuesta $\text{sen}(x^3)$, por tanto, asignamos $u = x^3$. El diferencial $du = 3x^2\,dx$ también forma parte del integrando, de manera que se puede llevar a cabo la sustitución:

En la sustitución, la clave está en elegir la función interior apropiada u.

$$\int 3x^2\,\text{sen}(x^3)\,dx = \int \underbrace{\text{sen}(x^3)}_{\text{sen}\,u}\ \underbrace{3x^2\,dx}_{du} = \int \text{sen}\,u\,du$$

Ahora, se resuelve la integral en la variable u y se reemplaza u por x^3 en el resultado:

$$\int 3x^2\,\text{sen}(x^3)\,dx = \int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C = -\cos(x^3) + C$$

Se puede comprobar la respuesta derivando:

$$\frac{d}{dx}(-\cos(x^3)) = \operatorname{sen}(x^3)\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$$ ■

■ **EJEMPLO 2 Multiplicación de *du* por una constante** Resuelva $\int x(x^2+9)^5\,dx$.

Solución Introducimos $u = x^2 + 9$, ya que la composición $u^5 = (x^2+9)^5$ forma parte del integrando. El diferencial $du = 2x\,dx$ no aparece tal cual, pero se puede multiplicar por $\frac{1}{2}$ para obtener:

$$\frac{1}{2}du = x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^5\,du = x(x^2+9)^5\,dx$$

Ahora se puede aplicar sustitución:

$$\int x(x^2+9)^5\,dx = \int \overbrace{(x^2+9)^5}^{u^5}\,\overbrace{x\,dx}^{\frac{1}{2}du} = \frac{1}{2}\int u^5\,du = \frac{1}{12}u^6 + C$$

Finalmente, se expresa el resultado como función de x, sustituyendo $u = x^2 + 9$:

$$\int x(x^2+9)^5\,dx = \frac{1}{12}u^6 + C = \frac{1}{12}(x^2+9)^6 + C$$ ■

■ **EJEMPLO 3** Evalúe $\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{(x^3+3x^2+12)^6}$.

Método de sustitución:

(1) Escoger u y calcular du.

(2) Reescribir la integral en función de u y de du y evaluar.

(3) Expresar el resultado final en función de x.

Solución La aparición de $(x^3+3x^2+12)^{-6}$ en el integrando parece sugerir que se intente la sustitución $u = x^3 + 3x^2 + 12$. Con esta elección:

$$du = (3x^2+6x)\,dx = 3(x^2+2x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}du = (x^2+2x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{(x^3+3x^2+12)^6} &= \int \overbrace{(x^3+3x^2+12)^{-6}}^{u^{-6}}\,\overbrace{(x^2+2x)\,dx}^{\frac{1}{3}du} \\
&= \frac{1}{3}\int u^{-6}\,du = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{u^{-5}}{-5}\right) + C \\
&= -\frac{1}{15}(x^3+3x^2+12)^{-5} + C
\end{aligned}$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL Un método de integración que funciona para una función dada puede fallar si cambiamos la función, aunque sea ligeramente. Si en el ejemplo previo se reemplaza 2 por 2,1 y se considera ahora $\int \frac{(x^2+2{,}1x)\,dx}{(x^3+3x^2+12)^6}$, el método de sustitución no funciona. La razón es que $(x^2+2{,}1x)\,dx$ *no* es un múltiplo de $du = (3x^2+6x)\,dx$.

■ **EJEMPLO 4** Resuelva $\int \operatorname{sen}(7\theta+5)\,d\theta$.

Solución Sea $u = 7\theta + 5$. Entonces, $du = 7\,d\theta$ y $\frac{1}{7}du = d\theta$. Se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}(7\theta+5)\,d\theta = \frac{1}{7}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{7}\cos u + C = -\frac{1}{7}\cos(7\theta+5) + C$$ ■

■ **EJEMPLO 5** Resuelva $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(t^{1/3})\,dt}{t^{2/3}}$.

Solución Tiene sentido probar con $u = t^{1/3}$ pues $du = \frac{1}{3}t^{-2/3}dt$ y, por tanto, $3\,du$ formará parte del integrando. En otras palabras,

$$u = t^{1/3}, \qquad \frac{dt}{t^{2/3}} = 3\,du$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(t^{1/3})\,dt}{t^{2/3}} &= \int \operatorname{sen}(t^{1/3})\frac{dt}{t^{2/3}}\\ &= \int \operatorname{sen} u\,(3\,du)\\ &= -3\cos u + C = -3\cos(t^{1/3}) + C\end{aligned}$$

■

■ **EJEMPLO 6** **Un paso extra necesario** Resuelva $\displaystyle\int x\sqrt{5x+1}\,dx$.

Solución Como $\sqrt{5x+1}$ forma parte del integrando, se podría probar con $u = 5x+1$. En tal caso:

El método de sustitución no siempre funciona, incluso cuando la integral pueda parecer relativamente simple. Por ejemplo, $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ no se puede resolver de forma explícita por sustitución, o por cualquier otro método. Con la práctica, se aprende a reconocer cuándo el método de sustitución tiene posibilidades de éxito.

$$du = 5dx \quad\Rightarrow\quad \sqrt{5x+1}\,dx = \frac{1}{5}u^{1/2}\,du$$

Sin embargo, el integrando no es $\sqrt{5x+1}$ sino $x\sqrt{5x+1}$. Para poder tener en cuenta el factor extra x, se asigna $u = 5x+1$ obteniendo $x = \frac{1}{5}(u-1)$. Entonces:

$$x\sqrt{5x+1}\,dx = \left(\frac{1}{5}(u-1)\right)\frac{1}{5}u^{1/2}\,du = \frac{1}{25}(u-1)\,u^{1/2}\,du$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5x+1}\,dx &= \frac{1}{25}\int (u-1)\,u^{1/2}\,du = \frac{1}{25}\int (u^{3/2}-u^{1/2})\,du\\ &= \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C\\ &= \frac{2}{125}(5x+1)^{5/2} - \frac{2}{75}(5x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

■

Fórmula del cambio de variables para integrales definidas

La fórmula del cambio de variables se puede aplicar a integrales definidas pero teniendo presente que los límites de integración cambian, tal y como se indica en el siguiente teorema.

Los nuevos límites de integración respecto a la variable u son $u(a)$ y $u(b)$. Se puede pensar de esta manera: cuando x varía desde a hasta b, la variable $u = u(x)$ varía desde $u(a)$ hasta $u(b)$.

Fórmula del cambio de variables para integrales definidas

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du \qquad \boxed{2}$$

Cambio de variables para integrales definidas:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Demostración Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(u(x))$ es una primitiva de $f(u(x))u'(x)$. Según el TFC (1ª parte), ambas integrales son iguales:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a))$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du = F(u(b)) - F(u(a))$$

■

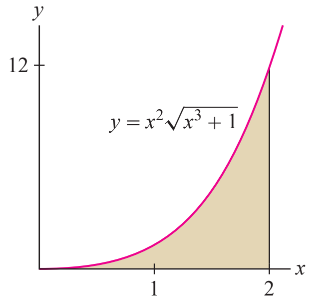


FIGURA 1 Región representada por $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$.

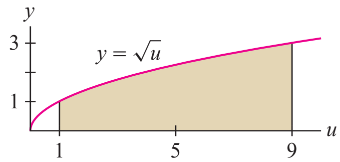


FIGURA 2 Región representada por $\int_1^9 \sqrt{u}\, du$.

■ **EJEMPLO 7** Resuelva $\displaystyle\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$.

Solución Consideremos la sustitución $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\, dx$:

$$x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \frac{1}{3} \sqrt{u}\, du$$

Según la ec. (2), los nuevos límites de integración son:

$$u(0) = 0^3 + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad u(2) = 2^3 + 1 = 9$$

Por tanto:

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \frac{1}{3} \int_1^9 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{9} u^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{52}{9}$$

Esta sustitución prueba que el área en la f gura 1 es igual a un tercio del área en la f gura 2 (aunque cabe mencionar que ambas f guras se encuentran representadas en diferentes escalas). ■

En el ejemplo anterior, se puede evitar el cambio en los límites de integración evaluando la integral en términos de x.

$$\int x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{9} u^{3/2} = \frac{2}{9} (x^3+1)^{3/2}$$

Lo que lleva al mismo resultado: $\displaystyle\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \frac{2}{9} (x^3+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{52}{9}$.

■ **EJEMPLO 8** Resuelva $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \sec^2\theta\, d\theta$.

Solución La sustitución $u = \tan\theta$ es apropiada porque $du = \sec^2\theta\, d\theta$ y, en consecuencia, $u^3\, du = \tan^3\theta \sec^2\theta\, d\theta$. Los nuevos límites de integración son:

$$u(0) = \tan 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \sec^2\theta\, d\theta = \int_0^1 u^3\, du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$ ■

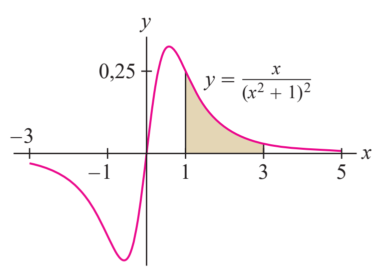


FIGURA 3 Área por debajo de $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ en $[1, 3]$.

■ **EJEMPLO 9** Calcule el área por debajo de $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ en $[1, 3]$.

Solución El área (ver la f gura 3) es igual a la integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$. Se considerará la sustitución:

$$u = x^2 + 1, \qquad du = 2x\, dx, \qquad \frac{1}{2}\frac{du}{u^2} = \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$$

Los nuevos límites de integración son $u(1) = 1^2 + 1 = 2$ y $u(3) = 3^2 + 1 = 10$; por consiguiente:

$$\int_1^3 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_2^{10} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{u}\Big|_2^{10} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$ ■

5.6 RESUMEN

- Probar con el método de sustitución cuando el integrando sea de la forma $f(u(x))\,u'(x)$. Si F es una primitiva de f, entonces:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + C$$

- La diferencial de $u(x)$ está relacionada con dx mediante $du = u'(x)\,dx$.
- El método de sustitución se expresa por medio de la fórmula del cambio de variables:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

- Fórmula del cambio de variables para integrales definidas:

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

5.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes integrales es una candidata a ser resuelta por el método de sustitución?

(a) $\int 5x^4 \operatorname{sen}(x^5)\,dx$ **(b)** $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$

(c) $\int x^5 \operatorname{sen} x\,dx$

2. Halle una elección adecuada de u para resolver las siguientes integrales por sustitución:

(a) $\int x(x^2+9)^4\,dx$ **(b)** $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$

(c) $\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$

3. Con una sustitución apropiada, ¿cuál de las siguientes integrales es igual a $\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx$?

(a) $\frac{1}{3}\int_0^2 u\,du$ **(b)** $\int_0^9 u\,du$ **(c)** $\frac{1}{3}\int_1^9 u\,du$

Problemas

En los problemas 1-6, calcular du.

1. $u = x^3 - x^2$

2. $u = 2x^4 + 8x^{-1}$

3. $u = \cos(x^2)$

4. $u = \tan x$

5. $u = \operatorname{sen}^4 \theta$

6. $u = \dfrac{t}{t+1}$

En los problemas 7-20, escriba la integral en términos de u y de du. A continuación, resuelva la integral.

7. $\int (x-7)^3\,dx, \quad u = x-7$

8. $\int (x+25)^{-2}\,dx, \quad u = x+25$

9. $\int t\sqrt{t^2+1}\,dt, \quad u = t^2+1$

10. $\int (x^3+1)\cos(x^4+4x)\,dx, \quad u = x^4+4x$

11. $\int \dfrac{t^3}{(4-2t^4)^{11}}\,dt, \quad u = 4-2t^4$

12. $\int \sqrt{4x-1}\,dx, \quad u = 4x-1$

13. $\int x(x+1)^9\,dx, \quad u = x+1$

14. $\int x\sqrt{4x-1}\,dx, \quad u = 4x-1$

15. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx, \quad u = x+1$

16. $\int \operatorname{sen}(4\theta-7)\,d\theta, \quad u = 4\theta-7$

17. $\int \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$

18. $\int \sec^2 x \tan x\,dx, \quad u = \tan x$

19. $\int x\sec^2(x^2)\,dx, \quad u = x^2$

20. $\int \sec^2(\cos x)\operatorname{sen} x\,dx, \quad u = \cos x$

En los problemas 21-24, exprese la integral como a sen$(u(x)) + C$, *para una elección adecuada de* $u(x)$ *y de la constante* a.

21. $\int x^3 \cos(x^4)\,dx$

22. $\int x^2 \cos(x^3+1)\,dx$

23. $\int x^{1/2} \cos(x^{3/2})\,dx$

24. $\int \cos x \cos(\operatorname{sen} x)\,dx$

En los problemas 25-59, resuelva la integral indefinida.

25. $\int (4x+5)^9\,dx$

26. $\int \frac{dx}{(x-9)^5}$

27. $\int \frac{dt}{\sqrt{t+12}}$

28. $\int (9t+2)^{2/3}\,dt$

29. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}\,dx$

30. $\int (x+1)(x^2+2x)^{3/4}\,dx$

31. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

32. $\int \frac{2x^2+x}{(4x^3+3x^2)^2}\,dx$

33. $\int (3x^2+1)(x^3+x)^2\,dx$

34. $\int \frac{5x^4+2x}{(x^5+x^2)^3}\,dx$

35. $\int (3x+8)^{11}\,dx$

36. $\int x(3x+8)^{11}\,dx$

37. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

38. $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

39. $\int \frac{dx}{(x+5)^3}$

40. $\int \frac{x\,dx}{(x+5)^{3/2}}$

41. $\int z^2(z^3+1)^{12}\,dz$

42. $\int (z^5+4z^2)(z^3+1)^{12}\,dz$

43. $\int (x+2)(x+1)^{1/4}\,dx$

44. $\int x^3(x^2-1)^{3/2}\,dx$

45. $\int \operatorname{sen}(8-3\theta)\,d\theta$

46. $\int \theta \operatorname{sen}(\theta^2)\,d\theta$

47. $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

48. $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+1)\,dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x+1}}\,dx$

50. $\int \operatorname{sen}^8\theta\cos\theta\,d\theta$

51. $\int \sec^2 x\,(12\tan^3 x - 6\tan^2 x)\,dx$

52. $\int x^{-1/5}\sec(x^{4/5})\tan(x^{4/5})\,dx$

53. $\int \sec^2(4x+9)\,dx$

54. $\int \sec^2 x \tan^4 x\,dx$

55. $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})\,dx}{\sqrt{x}}$

56. $\int \frac{\cos 2x}{(1+\operatorname{sen} 2x)^2}\,dx$

57. $\int \operatorname{sen} 4x\sqrt{\cos 4x+1}\,dx$

58. $\int \cos x\,(3\operatorname{sen} x - 1)\,dx$

59. $\int \sec\theta\tan\theta(\sec\theta-1)\,d\theta$

60. $\int \cos t\cos(\operatorname{sen} t)\,dt$

61. Resuelva $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$ aplicando el cambio $u = 1+\sqrt{x}$. *Indicación:* Probar que $dx = 2(u-1)du$.

62. ¿Pueden tener razón las dos? Para resolver $\int \tan x \sec^2 x\,dx$, Hannah considera la sustitución $u = \tan x$ y Akiva usa $u = \sec x$. Pruebe que cada una obtiene una respuesta diferente y explicar la aparente contradicción.

63. Resuelva $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$, por sustitución, de dos maneras: primero considerando $u = \operatorname{sen} x$ y después $u = \cos x$. Pruebe que ambas respuestas son, en realidad, correctas.

64. Algunas elecciones son mejores que otras Resuelva:

$$\int \operatorname{sen} x\cos^2 x\,dx$$

de dos maneras, tal y como se explica a continuación. En primer lugar, utilice $u = \operatorname{sen} x$ para probar que:

$$\int \operatorname{sen} x\cos^2 x\,dx = \int u\sqrt{1-u^2}\,du$$

y resuelva la integral a la derecha de la igualdad mediante una nueva sustitución. En una segunda fase, muestre que $u = \cos x$ es una elección mejor para la sustitución que la inicial.

65. ¿Cuáles son los nuevos límites de integración si se aplica la sustitución $u = 3x+\pi$ a la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen}(3x+\pi)\,dx$?

66. ¿Si se aplica la sustitución $u = 4x-9$ a la integral $\int_2^8 (4x-9)^{20}\,dx$, ¿cuál es el resultado?

(a) $\int_2^8 u^{20}\,du$

(b) $\frac{1}{4}\int_2^8 u^{20}\,du$

(c) $4\int_{-1}^{23} u^{20}\,du$

(d) $\frac{1}{4}\int_{-1}^{23} u^{20}\,du$

En los problemas 67-78, utilice la fórmula del cambio de variables para resolver la integral definida.

67. $\int_1^3 (x+2)^3\,dx$

68. $\int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$

70. $\int_{-1}^2 \sqrt{5x+6}\,dx$

71. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$

72. $\int_1^2 \frac{4x+12}{(x^2+6x+1)^2}\,dx$

73. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\,dx$

74. $\int_{10}^{17} (x-9)^{-2/3}\,dx$

75. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x+1}}$

76. $\int_0^{\pi/6} \sec^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$

77. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$

78. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cot^2 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx$

79. Resuelva $\displaystyle\int_0^2 r\sqrt{5-\sqrt{4-r^2}}\, dr$.

80. Halle dos números a y b tales que:

$$\int_a^b (u^2+1)\, du = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^4 \theta\, d\theta$$

y resuelva la integral. *Indicación:* Utilice la identidad $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$.

En los problemas 81-82, utilice el método de sustitución para expresar el resultado de la integral en términos de $f(x)$.

81. $\displaystyle\int f(x)^3 f'(x)\, dx$

82. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)^2}\, dx$

83. Pruebe que $\displaystyle\int_0^{\pi/6} f(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \int_0^{1/2} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$.

84. Resuelva $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \cos x\, dx$ para $n \geq 0$.

Problemas avanzados

85. Resuelva $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\tan^{6000}\theta}$. *Indicación:* Aplique sustitución para demostrar que I es igual $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cot^{6000}\theta}$ y, después, compruebe que $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta$.

86. Demuestre, utilizando la sustitución $u = 1 + x^{1/n}$, que:

$$\int \sqrt{1+x^{1/n}}\, dx = n\int u^{1/2}(u-1)^{n-1}\, du$$

Resuelva la integral para $n = 2$ y $n = 3$.

87. Utilice el método de sustitución para demostrar que si f es una función impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

88. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{b/a} \frac{1}{x}\, dx$ para todo $a, b > 0$. A continuación, pruebe que todas las regiones por debajo de la hipérbola a lo largo de los intervalos:

$$[1,2], \quad [2,4], \quad [4,8], \quad \ldots$$

tienen la misma área (figura 4).

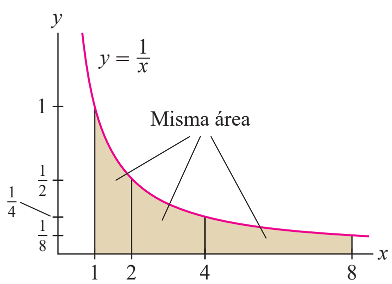


FIGURA 4 El área por debajo de $y = \frac{1}{x}$ a lo largo de $[2^n, 2^{n+1}]$ es la misma para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$.

89. Pruebe que las dos regiones de la figura 5 tienen la misma área. A continuación, utilice la identidad $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$ para calcular la segunda área.

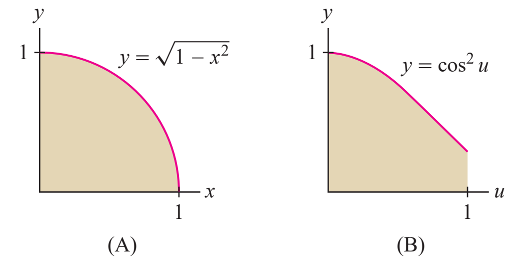


FIGURA 5

90. Área de una elipse Demuestre que el área A de una elipse (figura 6) de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es igual a πab. *Indicación:* Utilice un cambio de variables para demostrar que A es igual a ab multiplicado por el área del círculo unitario.

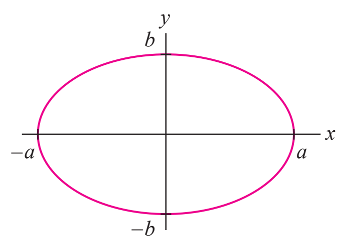


FIGURA 6 Gráfica de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

En los problemas 1-4, $f(x)$ corresponde a la función representada en la figura 1.

1. Estime L_4 y M_4 en $[0,4]$.

2. Estime R_4, L_4 y M_4 en $[1,3]$.

3. Halle un intervalo $[a,b]$ para el que R_4 sea mayor que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. Repita el problema anterior con L_4 en lugar de R_4.

4. Justifique que $\dfrac{3}{2} \leq \displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx \leq \dfrac{9}{4}$.

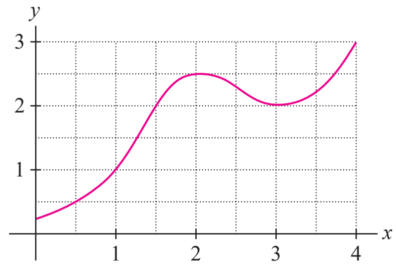


FIGURA 1

En los problemas 5-8, sea $f(x) = x^2 + 3x$.

5. Calcule R_6, M_6 y L_6 para $f(x)$ en el intervalo $[2, 5]$. Dibuje la gráf ca de $f(x)$ y los correspondientes rectángulos de cada aproximación.

6. Resuelva $A(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ aplicando la 1ª parte del TFC.

7. Consideremos $f(x)$ en $[2, 5]$. Halle una fórmula para R_N que permita calcular, pasando al límite, el valor de $\int_2^5 f(x)\,dx$.

8. Consideremos $f(x)$ en $[0, 2]$. Halle una fórmula para L_N que permita calcular, pasando al límite, el valor de $\int_2^5 f(x)\,dx$.

9. Calcule R_5, M_5 y L_5 para $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ en el intervalo $[0, 1]$.

10. Sea R_N la aproximación de orden N basada en el extremo superior para la función $f(x) = x^3$ en $[0, 4]$ (f gura 2).

(a) Pruebe que $R_N = \dfrac{64(N+1)^2}{N^2}$.

(b) Pruebe que la porción de área de los rectángulos, basados en los extremos superiores, que queda por encima de la gráf ca es igual a:

$$\frac{64(2N+1)}{N^2}$$

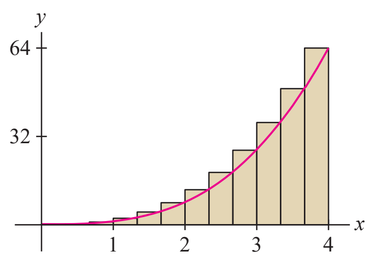


FIGURA 2 Aproximación R_N para $f(x) = x^3$ en $[0, 4]$.

11. ¿A qué aproximación del área corresponden los rectángulos sombreados de la f gura 3? Calcule R_5 y L_5.

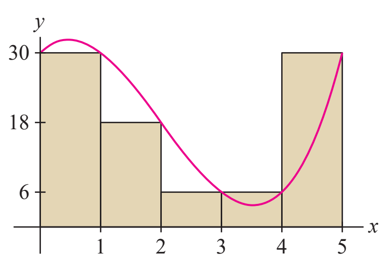


FIGURA 3

12. Calcule dos sumas de Riemann para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[2, 5]$, pero seleccione particiones que tengan, como mínimo, cinco subintervalos con diferentes longitudes y puntos intermedios que no sean ni los extremos ni los puntos medios de los subintervalos.

En los problemas 13-16, exprese el límite como una integral (o un múltiplo de una integral) y resuelva.

13. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{6N} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi j}{6N}\right)$

14. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{3}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(10 + \frac{3k}{N}\right)$

15. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{5}{N} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{4 + 5j/N}$

16. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + N^k}{N^{k+1}} \quad (k > 0)$

En los problemas 17-20, aplique la sustitución indicada para resolver la integral.

17. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{(4t+12)^2}, \qquad u = 4t + 12$

18. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x)^4}, \qquad u = x^3 + 3x$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx, \qquad u = \cos x$

20. $\displaystyle\int \sec^2(2\theta)\tan(2\theta)\,d\theta, \quad u = \tan(2\theta)$

En los problemas 21-48, resuelva la integral.

21. $\displaystyle\int (20x^4 - 9x^3 - 2x)\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^2 (12x^3 - 3x^2)\,dx$

23. $\displaystyle\int (2x^2 - 3x)^2\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^1 (x^{7/3} - 2x^{1/4})\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 3x^4}{x^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int_1^3 r^{-4}\,dr$

27. $\displaystyle\int_{-3}^3 |x^2 - 4|\,dx$

28. $\displaystyle\int_{-2}^4 |(x-1)(x-3)|\,dx$

29. $\displaystyle\int_1^3 [t]\,dt$

30. $\displaystyle\int_0^2 (t - [t])^2\,dt$

31. $\displaystyle\int (10t - 7)^{14}\,dt$

32. $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{7y - 5}\,dy$

33. $\displaystyle\int \frac{(2x^3 + 3x)\,dx}{(3x^4 + 9x^2)^5}$

34. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}$

35. $\int_0^5 15x\sqrt{x+4}\,dx$

36. $\int t^2\sqrt{t+8}\,dt$

37. $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{3}(t+2)\right)dt$

38. $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{5\theta-\pi}{6}\right)d\theta$

39. $\int t^2\sec^2(9t^3+1)\,dt$

40. $\int \operatorname{sen}^2(3\theta)\cos(3\theta)\,d\theta$

41. $\int \csc^2(9-2\theta)\,d\theta$

42. $\int \operatorname{sen}\theta\sqrt{4-\cos\theta}\,d\theta$

43. $\int_0^{\pi/3}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^{2/3}\theta}\,d\theta$

44. $\int \frac{\sec^2 t\,dt}{(\tan t-1)^2}$

45. $\int y\sqrt{2y+3}\,dy$

46. $\int_1^8 t^2\sqrt{t+8}\,dt$

47. $\int_0^{\pi/2}\sec^2(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

48. $\int_{-4}^{-2}\frac{12x\,dx}{(x^2+2)^3}$

49. Exprese la siguiente suma como una única integral:

$$\int_0^8 f(x)\,dx+\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_8^6 f(x)\,dx$$

50. Sea $A(x)=\int_0^x f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es la función representada en la figura 4. Identifique el máximo y mínimo relativos de $A(x)$ y sus puntos de inflexión. Determine también los intervalos en los que $A(x)$ es estrictamente creciente, estrictamente decreciente, convexa y cóncava. ¿En qué punto presenta $A(x)$ un máximo absoluto?

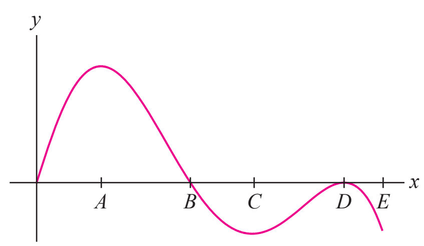


FIGURA 4

51. Halle los puntos de inflexión de $A(x)=\int_3^x \frac{t\,dt}{t^2+1}$ sin evaluar $A(x)$ de forma explícita.

52. Una partícula, que empieza su movimiento en el origen para $t=0$, se desplaza a velocidad $v(t)$, según se muestra en la figura 5.

(a) ¿Cuántas veces vuelve a pasar la partícula por el origen, durante los primeros 12 segundos?

(b) ¿Cuál es la distancia máxima entre la posición de la partícula y el origen?

(c) ¿Cuál es la distancia máxima entre la posición de la partícula a la izquierda del origen y éste?

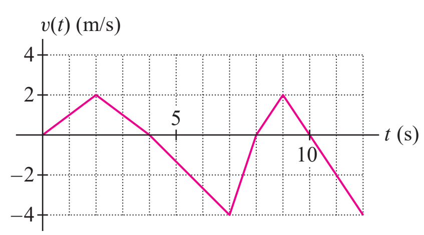


FIGURA 5

53. Un día cualquiera, el consumo de agua en una ciudad se realiza a razón de $r(t)=100+72t-3t^2$ (en miles de galones por hora), siendo t el número de horas desde la medianoche. ¿Cuál es el consumo diario de agua? ¿Cuánta agua se consume entre las 6 de la tarde y la medianoche?

54. La curva de aprendizaje para una cierta fábrica de bicicletas es $L(x)=12x^{-1/5}$ (en horas por bicicleta), lo que significa que un operario tarda $L(n)$ horas para ensamblar la n-ésima bicicleta. Si un operario ha montado 24 bicicletas, ¿cuánto ha tardado en el segundo grupo de 12?

55. La función de los ingenieros de costos de la NASA es planear y evaluar el coste P de los grandes proyectos espaciales. Se considera que el coste C de realizar un lanzamiento varía en función de P a razón de $dC/dP\approx 21P^{-0,65}$, donde C está expresado en miles de dólares y P en millones de dólares. ¿Cuál es el coste de un lanzamiento para un proyecto de coste $P=35$ millones de dólares?

56. Un astrónomo considera que, en cierta constelación, el número de estrellas por grado al cuadrado de cielo se expresa como función de la magnitud, m, de éstas, según $A(m)=2{,}4\times10^{-6}m^{7{,}4}$ (estrellas más débiles tienen magnitudes superiores). Determine el número total de estrellas de magnitud entre 6 y 15 en una región de un grado al cuadrado de cielo.

57. Resuelva $\int_{-8}^{8}\frac{x^{15}\,dx}{3+\cos^2 x}$, utilizando las propiedades de las funciones impares.

58. Evalúe $\int_0^1 f(x)\,dx$ suponiendo que $f(x)$ es una función continua y par, tal que:

$$\int_1^2 f(x)\,dx=5,\qquad \int_{-2}^1 f(x)\,dx=8$$

59. GU Represente gráficamente la función $f(x)=\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx$ en $[0,\pi]$ para los pares $(m,n)=(2,4),(3,5)$ y, en cada caso, conjeture el valor de $I=\int_0^{\pi} f(x)\,dx$. Pruebe con algunos valores más (incluyendo dos casos en los que $m=n$) y formule una conjetura sobre cuándo I es igual a cero.

60. Demuestre que:

$$\int x\,f(x)\,dx=xF(x)-G(x)$$

donde $F'(x)=f(x)$ y $G'(x)=F(x)$. Utilice este resultado para resolver $\int x\cos x\,dx$.

61. Pruebe que:

$$2\le\int_1^2 2^x\,dx\le 4\qquad\text{y}\qquad \frac{1}{9}\le\int_1^2 3^{-x}\,dx\le\frac{1}{3}$$

62. GU Represente gráficamente la función $f(x)=x^{-2}\operatorname{sen}x$ y pruebe que $0{,}2\le\int_1^2 f(x)\,dx\le 0{,}9$.

63. Halle una cota superior y una inferior de $\int_0^1 f(x)\,dx$, para la función $f(x)$ de la figura 6.

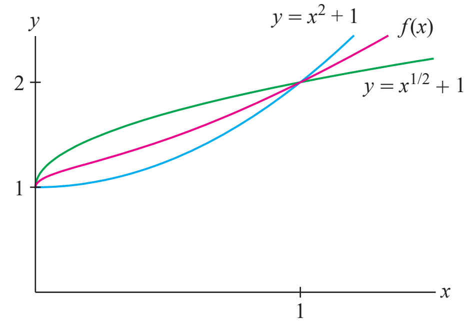


FIGURA 6

En los problemas 64-69, halle la derivada.

64. $A'(x)$, donde $A(x) = \int_3^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt$

65. $A'(\pi)$, donde $A(x) = \int_2^x \frac{\cos t}{1+t}\,dt$

66. $\frac{d}{dy}\int_{-2}^{y} 3^x\,dx$

67. $G'(x)$, donde $G(x) = \int_{-2}^{\operatorname{sen} x} t^3\,dt$

68. $G'(2)$, donde $G(x) = \int_0^{x^3} \sqrt{t+1}\,dt$

69. $H'(1)$, donde $H(x) = \int_{4x^2}^{9} \frac{1}{t}\,dt$

70. Explique con la ayuda de un gráfico: si $f(x)$ es estrictamente creciente y convexa en $[a, b]$, entonces L_N es más preciso que R_N. ¿Qué aproximación es más precisa si $f(x)$ es estrictamente creciente pero cóncava?

71. Explique, con la ayuda de un gráfico: si $f(x)$ es una función lineal en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(R_N + L_N)$ para todo N.

72. Sea $f(x)$ una función continua, positiva y estrictamente creciente en $[a, b]$, donde $0 \le a < b$, tal y como se muestra en la figura 7. Pruebe que el área de la región sombreada es igual a:

$$I = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx \qquad \boxed{1}$$

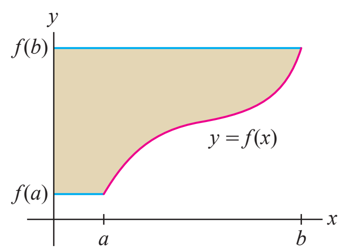


FIGURA 7

73. Si $a < b \le 0$, ¿cómo se podría interpretar I en la ec. (1)? Ilustre la explicación con un gráfico.

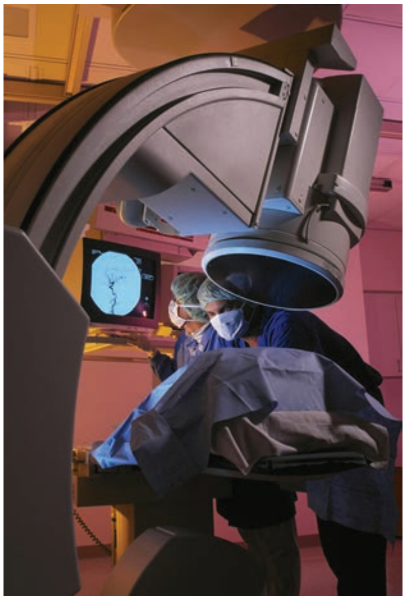


Imagen por resonancia magnética (IRM) de las venas del corazón de un paciente. Los escáneres IRM usan las matemáticas de las transformadas de Fourier para obtener imágenes bi y tridimensionales.

6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

En el capítulo anterior usamos la integral para calcular áreas por debajo de curvas y el cambio neto de una función. En este capítulo examinaremos otras cantidades, que se representan mediante integrales, como el volumen, el valor medio o esperanza, el trabajo, la masa total, la población y la tasa de f ujo.

6.1 Área limitada por dos curvas

En ocasiones estamos interesados en el área limitada por dos curvas. La f gura 1 muestra la estimación de la generación de potencia eléctrica en EE.UU. a través de recursos naturales renovables (viento, sol, biocombustibles, etc.) bajo dos escenarios diferentes: con y sin ayudas económicas gubernamentales. El área de la región sombreada, limitada por las dos curvas, representa la energía adicional estimada resultante de las ayudas gubernamentales.

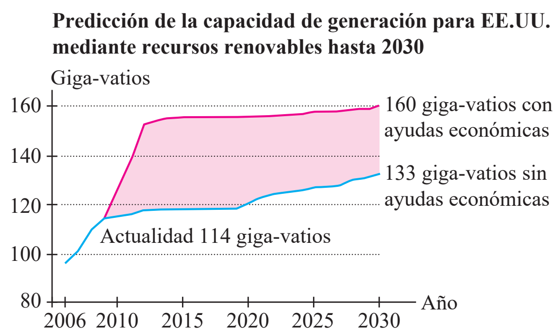


FIGURA 1 El área de la región sombreada (en unidades de *potencia* × *tiempo*, o *energía*) representa la energía adicional estimada resultante de las ayudas gubernamentales en 2009-2010. *Fuente:* Agencia de Información de la Energía (EE.UU.).

Consideremos que disponemos de dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en un intervalo $[a, b]$. Entonces, la gráf ca de $f(x)$ se encuentra por encima de la gráf ca de $g(x)$ [f gura 2], y el área limitada por las dos gráf cas es igual a la integral de $f(x) - g(x)$:

$$\text{Área limitada por las gráf cas} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \qquad \boxed{1}$$

La f gura 2 ilustra esta fórmula cuando ambas curvas se encuentran por encima del eje x. En tal caso, la región comprendida entre las dos gráf cas se puede obtener eliminando de la región por debajo de $y = f(x)$ la que corresponde a la región por debajo de $y = g(x)$.

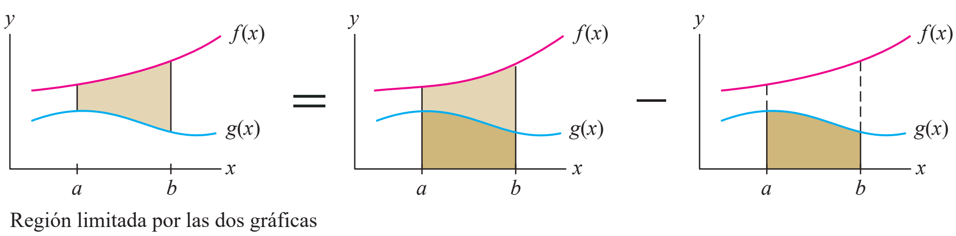


FIGURA 2 El área limitada por las dos gráf cas es la diferencia entre dos áreas.

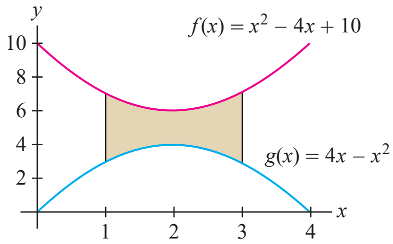


FIGURA 3

■ **EJEMPLO 1** Halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 10 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 4x - x^2 \quad \text{para} \quad 1 \le x \le 3$$

Solución En primer lugar, se debe determinar qué gráfica se encuentra por encima de la otra. En la figura 3 se muestra que $f(x) \ge g(x)$, lo que se puede verificar directamente completando cuadrados:

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 4x + 10) - (4x - x^2) = 2x^2 - 8x + 10 = 2(x-2)^2 + 2 > 0$$

Por tanto, según la ec. (1), el área limitada por las dos gráficas es:

$$\int_1^3 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_1^3 ((x^2 - 4x + 10) - (4x - x^2))\, dx =$$

$$= \int_1^3 (2x^2 - 8x + 10)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 10x\right)\Bigg|_1^3 = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3} \quad ■$$

Antes de continuar con más ejemplos, cabe observar que la igualdad (1) continúa siendo válida siempre que $f(x) \ge g(x)$, aunque $f(x)$ y $g(x)$ no fuesen positivas. Recordemos que la integral es el límite de las sumas de Riemann, es decir:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} R(f-g, P, C) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} (f(c_i) - g(c_i))\Delta x_i$$

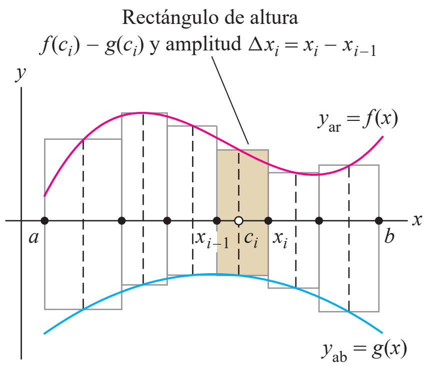


FIGURA 4 Suma de Riemann para $f(x) - g(x)$.

donde $C = \{c_1, \ldots, c_N\}$ es un conjunto de puntos intermedios para una partición P de $[a, b]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. El término i–ésimo de la suma corresponde al área de un fino rectángulo vertical (figura 4):

$$(f(c_i) - g(c_i))\Delta x_i = \text{altura} \times \text{amplitud}$$

Por tanto, $R(f-g, P, C)$ es una aproximación del área limitada por las dos gráficas, mediante finos rectángulos verticales. Cuando $\|P\|$ tiende a cero, los rectángulos son cada vez más finos y la suma de Riemann converge al área limitada por las dos gráficas. Si denotamos como $y_{\text{ar}} = f(x)$ la gráfica que se encuentra por arriba y como $y_{\text{ab}} = g(x)$ la gráfica por abajo, se obtiene:

$$\text{Área limitada por las gráficas} = \int_a^b (y_{\text{ar}} - y_{\text{ab}})\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \qquad \boxed{2}$$

Recodemos que $(y_{\text{ar}} - y_{\text{ab}})$ es la altura de una sección vertical de la región.

■ **EJEMPLO 2** Halle el área limitada por las gráficas $f(x) = x^2 - 5x - 7$ y $g(x) = x - 12$ en $[-2, 5]$.

Solución En primer lugar, se debe determinar qué gráfica se encuentra por encima de la otra.

Etapa 1. **Represente gráficamente la región (especialmente halle todos los puntos de intersección)**

La curva $y = f(x)$ es una parábola con ordenada en el origen -7 y la curva $y = g(x)$ es una recta con ordenada en el origen -12 (figura 5). Para determinar los puntos de intersección de las dos gráficas, observemos que

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 5x - 7) - (x - 12) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

Los puntos de intersección de las dos gráficas son las soluciones de $(x-1)(x-5) = 0$, es decir, intersecan en $x = 1$ y $x = 5$.

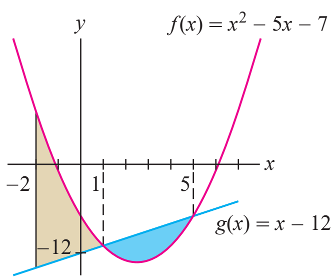


FIGURA 5

Etapa 2. **Enuncie las integrales y resuelva**

Se observa también que $f(x) - g(x) \le 0$ para $1 \le x < 5$. Por tanto:

En el ejemplo 2, se determinaron los puntos de intersección entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ por métodos algebraicos. Si las funciones son más complicadas, posiblemente se necesite un programa informático de cálculo simbólico para la resolución.

$$f(x) \geq g(x) \text{ en } [-2, 1] \qquad \text{y} \qquad g(x) \geq f(x) \text{ en } [1, 5]$$

En consecuencia, el área pedida se expresa como la suma de dos integrales, una para cada intervalo:

$$\int_{-2}^{5} (y_{\text{ar}} - y_{\text{ab}})\, dx = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{1}^{5} (g(x) - f(x))\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} ((x^2 - 5x - 7) - (x - 12))\, dx + \int_{1}^{5} ((x - 12) - (x^2 - 5x - 7))\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^2 - 6x + 5)\, dx + \int_{1}^{5} (-x^2 + 6x - 5)\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right)\bigg|_{-2}^{1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right)\bigg|_{1}^{5} =$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{(-74)}{3}\right) + \left(\frac{25}{3} - \frac{(-7)}{3}\right) = \frac{113}{3}$$

■ **EJEMPLO 3 Cálculo del área fraccionando la región** Halle el área de la región limitada por las gráf cas de $y = 8/x^2$, $y = 8x$ e $y = x$.

Solución

Etapa 1. **Represente gráf camente la región (especialmente halle todos los puntos de intersección)**

La curva $y = 8/x^2$ limita una región en el sector entre las dos rectas $y = 8x$ e $y = x$ (f gura 6). La intersección de $y = 8/x^2$ e $y = 8x$ se obtiene resolviendo la ecuación:

$$\frac{8}{x^2} = 8x \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

y la de $y = 8/x^2$ e $y = x$ resolviendo, a su vez:

$$\frac{8}{x^2} = x \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Etapa 2. **Enuncie las integrales y resuelva**

La f gura 6 ilustra que $y_{\text{ab}} = x$, pero que y_{ar} cambia en $x = 1$ de $y_{\text{ar}} = 8x$ a $y_{\text{ab}} = 8/x^2$. Por tanto, se puede fraccionar la región en dos partes, A y B, y calcular sus áreas separadamente.

$$\text{Área de } A = \int_{0}^{1} (y_{\text{ar}} - y_{\text{ab}})\, dx = \int_{0}^{1} (8x - x)\, dx = \int_{0}^{1} 7x\, dx = \frac{7}{2}x^2\bigg|_{0}^{1} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Área de } B = \int_{1}^{2} (y_{\text{ar}} - y_{\text{ab}})\, dx = \int_{1}^{2} \left(\frac{8}{x^2} - x\right) dx = \left(-\frac{8}{x} - \frac{1}{2}x^2\right)\bigg|_{1}^{2} = \frac{5}{2}$$

El área total limitada por las curvas es la suma $\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$. ■

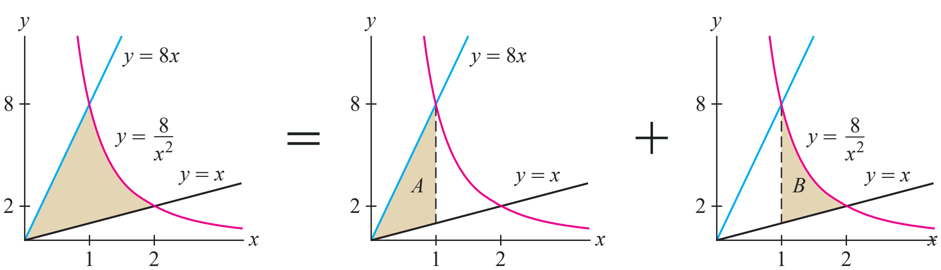


FIGURA 6 Área limitada por $y = 8/x^2$, $y = 8x$ e $y = x$ como la suma de dos áreas.

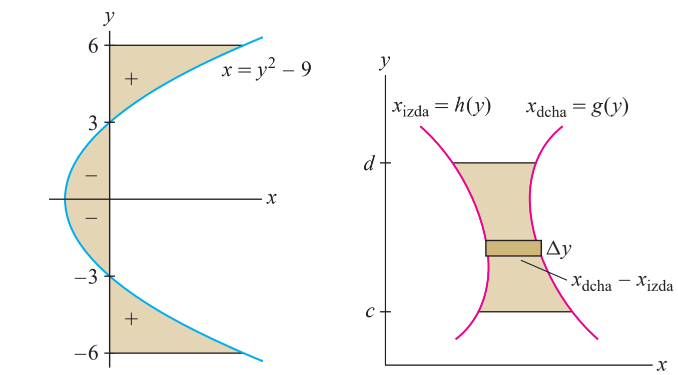
Integración sobre el eje y

Supongamos que x es una función de y, es decir, $x = g(y)$. ¿Cuál es el signif cado de la integral $\int_c^d g(y)\,dy$? Esta integral puede ser interpretada como un *área con signo*, en la que las regiones a la *derecha* del eje y tienen área positiva y las regiones a la *izquierda* tienen área negativa:

$$\int_c^d g(y)\,dy = \text{área con signo limitada por la gráf ca y el eje } y\text{, para } c \le y \le d$$

En la f gura 7(A), la parte de la región sombreada a la izquierda del eje y da lugar a una contribución negativa al área total. El área con signo de toda la región es:

$$\underbrace{\int_{-6}^{6} (y^2 - 9)\,dy}_{\substack{\text{área a la derecha del eje } y \text{ menos} \\ \text{área a la izquierda del eje } y}} = \left(\frac{1}{3}y^3 - 9y\right)\Big|_{-6}^{6} = 36$$



(A) Región limitada por $x = y^2 - 9$ y el eje y

(B) Región limitada por $x = h(y)$ y $x = g(y)$

FIGURA 7

De manera más general, si $g(y) \ge h(y)$, como en la f gura 7(B), entonces la gráf ca de $x = g(y)$ se encuentra a la derecha de la gráf ca de $x = h(y)$. En esta situación, introducimos $x_{dcha} = g(y)$ y $x_{izda} = h(y)$ con lo que, la fórmula para el área correspondiente a la ec. (2) es:

$$\boxed{\text{Área limitada por las gráf cas} = \int_c^d (x_{dcha} - x_{izda})\,dy = \int_c^d (g(y) - h(y))\,dy} \qquad \boxed{3}$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule el área limitada por las gráf cas de $h(y) = y^2 - 1$ y $g(y) = y^2 - \frac{1}{8}y^4 + 1$.

Solución En primer lugar, se deben hallar los puntos de intersección de las gráf cas resolviendo $g(y) = h(y)$ en y:

$$y^2 - \frac{1}{8}y^4 + 1 = y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8}y^4 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$$

La f gura 8 muestra que la región limitada se extiende desde $y = -2$ hasta $y = 2$. Sobre este intervalo, $g(y) \ge h(y)$. Por tanto $x_{dcha} = g(y)$, $x_{izda} = h(y)$ y

$$x_{dcha} - x_{izda} = \left(y^2 - \frac{1}{8}y^4 + 1\right) - (y^2 - 1) = 2 - \frac{1}{8}y^4$$

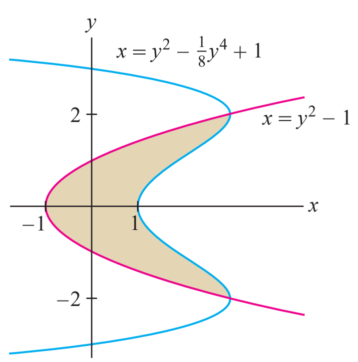


FIGURA 8

Sería más difícil calcular el área de la región en la figura 8 como una integral respecto a x porque las curvas no son de gráficas de funciones en x.

El área limitada es, por consiguiente:

$$\int_{-2}^{2} (x_{\text{dcha}} - x_{\text{izda}})\, dy = \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{1}{8}y^4\right) dy = \left(2y - \frac{1}{40}y^5\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{16}{5} - \left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{32}{5}$$ ■

6.1 RESUMEN

- Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el área limitada por sus gráf cas es:

$$\text{Área limitada por las gráf cas} = \int_a^b (y_{\text{ar}} - y_{\text{ab}})\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

- Para calcular el área limitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, representar gráf camente la región para determinar y_{ar}. Si fuere necesario, hallar los puntos de intersección entre las dos curvas resolviendo $f(x) = g(x)$.
- Integral sobre el eje y: $\displaystyle\int_c^d g(y)\, dy$ es igual al área con signo limitada por la gráf ca y el eje y, para $c \leq y \leq d$. El área a la derecha del eje y es positiva, y el área a la izquierda es negativa.
- Si $g(y) \geq h(y)$ en $[c, d]$, entonces $x = g(y)$ se encuentra a la derecha de $x = h(y)$. Y:

$$\text{Área limitada por las gráf cas} = \int_c^d (x_{\text{dcha}} - x_{\text{izda}})\, dy = \int_c^d (g(y) - h(y))\, dy$$

6.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la interpretación, en términos de área, de $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$, si $f(x) \geq g(x)$?

2. Si $f(x) \geq 0$ pero $g(x) \leq 0$, ¿continúa siendo válida la interpretación de $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ como el área limitada por las gráf cas de f y g?

3. Suponga que $f(x) \geq g(x)$ en $[0, 3]$ y que $g(x) \geq f(x)$ en $[3, 5]$. Exprese el área limitada por las gráf cas en $[0, 5]$ como la suma de dos integrales.

4. Suponga que la gráf ca de $x = f(y)$ se encuentra a la izquierda del eje y. ¿Cuál es el signo de $\int_a^b f(y)\, dy$, positivo o negativo?

Problemas

1. Halle el área de la región limitada por $y = 3x^2 + 12$ e $y = 4x + 4$ en $[-3, 3]$ (f gura 9).

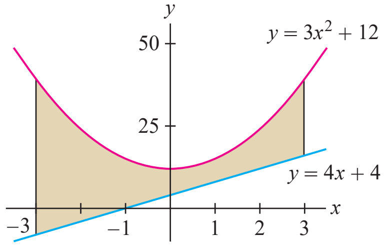


FIGURA 9

2. Halle el área de la región limitada por las gráf cas de $f(x) = 3x + 8$ y $g(x) = x^2 + 2x + 2$ en $[0, 2]$.

3. Halle el área de la región limitada por las gráf cas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 2x + 5$ (f gura 10).

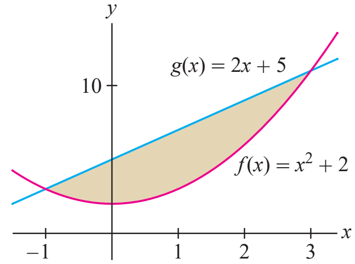


FIGURA 10

4. Halle el área de la región limitada por las gráf cas de $f(x) = x^3 - 10x$ y $g(x) = 6x$ (f gura 11).

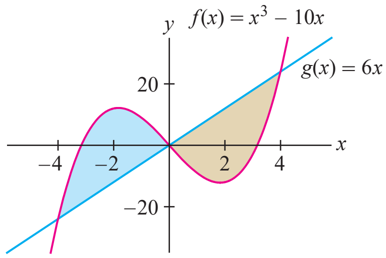


FIGURA 11

En los problemas 5 y 6, dibuje la región limitada por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ en el intervalo dado, y determine su área.

5. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ **6.** $[0, \pi]$

En los problemas 7 y 8, sean $f(x) = 20 + x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 5x$.

7. Dibuje la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$ y calcule su área.

8. Dibuje la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$ en $[4, 8]$ y calcule su área, como la suma de dos integrales.

9. GU Halle los puntos de intersección de $y = x(x^2 - 1)$ e $y = 1 - x^2$. Dibuje la región limitada por estas curvas en $[-1, 1]$ y calcule su área.

10. GU Halle los puntos de intersección de $y = x(4 - x)$ e $y = x^2(4 - x)$. Dibuje la región limitada por estas curvas en $[0, 4]$ y calcule su área.

11. Dibuje la región limitada por la recta $y = 2$ y la gráfica $y = \sec^2 x$ para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, y halle su área.

12. Dibuje la región limitada por:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para $0 \leq x \leq 0{,}8$ y halle su área.

En los problemas 13-16, halle el área de la región sombreada en las figuras 12-15.

13.

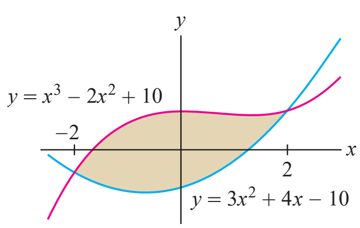


FIGURA 12

14.

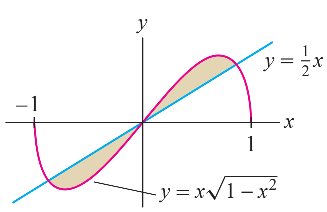


FIGURA 13

15.

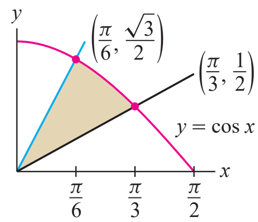


FIGURA 14

16.

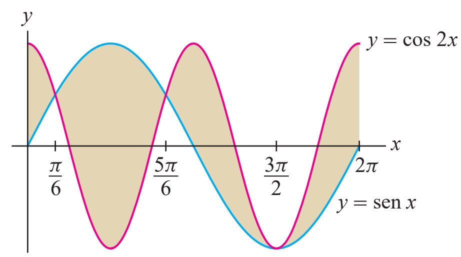


FIGURA 15

En los problemas 17 y 18, halle el área limitada por las gráficas $x = \operatorname{sen} y$ y $x = 1 - \cos y$ sobre cada intervalo facilitado (figura 16).

17. $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ **18.** $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

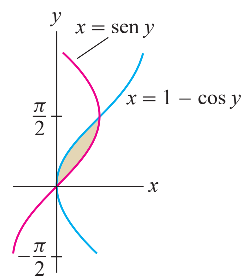


FIGURA 16

19. Halle el área de la región que se encuentra a la derecha de $x = y^2 + 4y - 22$ y a la izquierda de $x = 3y + 8$.

20. Halle el área de la región que se encuentra a la derecha de $x = y^2 - 5$ y a la izquierda de $x = 3 - y^2$.

21. En la figura 17 se muestra la región limitada por $x = y^3 - 26y + 10$ y $x = 40 - 6y^2 - y^3$. Relacione las ecuaciones con las curvas, y calcule el área de la región.

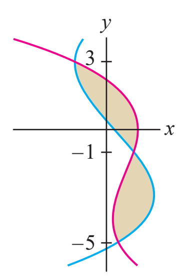


FIGURA 17

22. En la f gura 18 se muestra la región limitada por $y = x^3 - 6x$ e $y = 8 - 3x^2$. Relacione las ecuaciones con las curvas y calcule el área de la región.

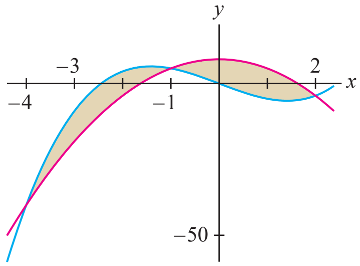


FIGURA 18 Región limitada por $y = x^3 - 6x$ e $y = 8 - 3x^2$.

En los problemas 23 y 24, halle el área limitada por las gráf cas de dos maneras: integrando sobre el eje x, e integrando sobre el eje y.

23. $x = 9 - y^2, \quad x = 5$

24. La *parábola semicúbica* $y^2 = x^3$ y la recta $x = 1$.

En los problemas 25 y 26, halle el área de la región aplicando aquel método (integración sobre el eje x o sobre el eje y) que sólo requiera resolver una única integral.

25. Región limitada por $y^2 = x + 5$ e $y^2 = 3 - x$

26. Región limitada por $y = x$ y $x + y = 8$ en $[2, 3]$

En los problemas 27-44, dibuje la región limitada por las curvas, y calcule su área como una integral sobre el eje x o sobre el eje y.

27. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 4$

28. $y = x^2 - 6, \quad y = 6 - x^3, \quad$ eje y

29. $x + y = 4, \quad x - y = 0, \quad y + 3x = 4$

30. $y = 8 - 3x, \quad y = 6 - x, \quad y = 2$

31. $y = 8 - \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

32. $y = |x^2 - 4|, \quad y = 5$

33. $x = |y|, \quad x = 1 - |y|$

34. $y = |x|, \quad y = x^2 - 6$

35. $x = y^3 - 18y, \quad y + 2x = 0$

36. $y = x\sqrt{x - 2}, \quad y = -x\sqrt{x - 2}, \quad x = 4$

37. $x = 2y, \quad x + 1 = (y - 1)^2$

38. $x + y = 1, \quad x^{1/2} + y^{1/2} = 1$

39. $y = \cos x, \quad y = \cos 2x, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{2\pi}{3}$

40. $x = \tan x, \quad y = -\tan x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

41. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \csc^2 x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

42. $x = \operatorname{sen} y, \quad x = \dfrac{2}{\pi} y$

43. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad 0 \le x \le 1$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad \pi^2 \le x \le 9\pi^2$

45. SAC Represente gráf camente:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{e} \quad y = (x - 1)^2$$

en los mismos ejes. Use un programa informático de cálculo simbólico para hallar los puntos de intersección numéricamente, y calcule el área limitada por las curvas.

46. Dibuje una región cuya área se represente mediante

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \left(\sqrt{1 - x^2} - |x|\right) dx$$

y evalúe este área aplicando argumentos de geometría plana.

46. Los atletas 1 y 2 corren a lo largo de una pista recta a velocidades $v_1(t)$ y $v_2(t)$ (en m/s), según se muestra en la f gura 19.

(a) ¿Cuál de las siguientes magnitudes se representa mediante el área de la región sombreada en $[0, 10]$?

i. La distancia entre los atletas 1 y 2 en el instante $t = 10$ s.

ii. La diferencia entre las distancias recorridas por cada uno de los dos atletas en el intervalo de tiempo $[0, 10]$.

(b) En base a la información facilitada por la f gura 19, ¿es posible determinar quién se encuentra por delante en el instante $t = 10$ s?

(c) Si los atletas empiezan a correr en el mismo momento y lugar, ¿quién está primero en el instante $t = 10$ s? ¿Y en $t = 25$ s?

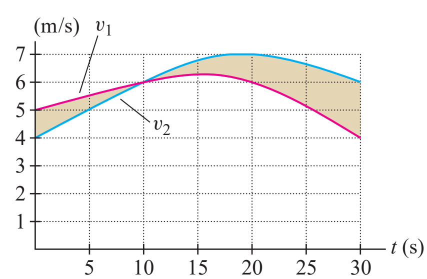


FIGURA 19

48. Exprese el área (sin signo) de la región sombreada en la f gura 20 como la suma de tres integrales que involucren a $f(x)$ y $g(x)$.

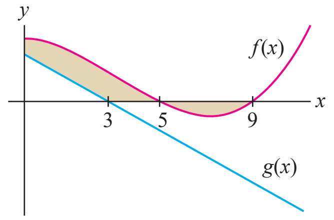


FIGURA 20

49. Halle el área limitada por las curvas $y = c - x^2$ e $y = x^2 - c$ como una función de c. Determine el valor de c para el que el área sea igual a 1.

50. Enuncie (pero no evalúe) una integral que exprese el área limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

51. Enuncie (pero no evalúe) una integral que exprese el área limitada limitada por las gráf cas $y = (1 + x^2)^{-1}$ e $y = x^2$.

52. SAC Halle una aproximación numérica al área por encima de $y = 1 - (x/\pi)$ y por debajo de $y = \operatorname{sen} x$ (determine los puntos de intersección numéricamente).

53. SAC Halle una aproximación numérica para el área por encima de $y = |x|$ y por debajo de $y = \cos x$.

54. SAC Con la ayuda de un programa informático de cálculo simbólico, halle una aproximación numérica del número c (además del cero) del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, en el que las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \tan^2 x$ se intersecan. A continuación, halle el área limitada por las dos gráf cas en $[0, c]$.

55. La parte posterior de la guitarra de Jon (f gura 21) mide 19 pulgadas de largo. Jon midió también la amplitud a intervalos de 1 pulgada, empezando y acabando a $\frac{1}{2}$ pulgada desde cada extremo. Los resultados obtenidos fueron:

6; 9; 10,25; 10,75; 10,75; 10,25; 9,75; 9,5; 10; 11,25;
12,75; 13,75; 14,25; 14,5; 14,5; 14; 13,25; 11,25; 9

Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la parte posterior de la guitarra.

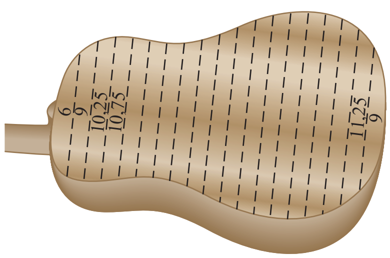


FIGURA 21 Parte posterior de la guitarra.

56. Volviendo a la f gura 1, al principio de esta sección, estime la predicción de julios extra que se generarían en los años 2009-2030 como resultado de los incentivos gubernamentales en 2009-2010. *Nota:* Un vatio es igual a un julio por segundo y un giga-vatio es 10^9 vatios.

En los problemas 57 y 58 considere la notación y resultados de los problemas 49-51 de la sección 3.4. Para un país cualquiera, se introduce $F(r)$ como la fracción de la renta de un país que corresponde al porcentaje acumulado de hogares igual al r%. La gráf ca de $y = F(r)$ se denomina curva de Lorenz.

57. Sea A el área limitada por $y = r$ e $y = F(r)$ en el intervalo $[0, 1]$ (f gura 22). El **índice de Gini** es el cociente $G = A/B$, donde B es el área por debajo de $y = r$ en $[0, 1]$.

(a) Pruebe que $G = 2\int_0^1 (r - F(r))\,dr$.

(b) Calcule G si:

$$F(r) = \begin{cases} \frac{1}{3}r & \text{para } 0 \le r \le \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3}r - \frac{2}{3} & \text{para } \frac{1}{2} \le r \le 1 \end{cases}$$

(c) El índice de Gini es una medida de la distribución de la renta, donde valores menores de G indican una distribución más equilibrada de la riqueza. Calcule G si $F(r) = r$ (en esta situación, todos los hogares tienen la misma renta, según el problema 51(b) de la sección 3.4).

(d) ¿Cuál es el valor de G si toda la renta fuese de un único hogar? *Indicación:* En esta situación entrema, $F(r) = 0$ para $0 \le r < 1$.

58. Calcule el índice de Gini para Estados Unidos en el año 2001, en base a la curva de Lorenz de la f gura 22, la cual consiste en segmentos que conectan los puntos de la siguiente tabla.

r	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$F(r)$	0	0,035	0,123	0,269	0,499	1

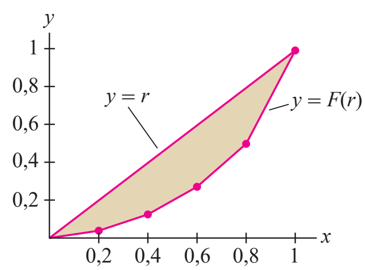


FIGURA 22 Curva de Lorenz para EE.UU. en 2001.

Problemas avanzados

59. Determine la recta $y = mx$ que divida al área por debajo de la curva $y = x(1-x)$ en $[0, 1]$ en dos regiones de, exactamente, la misma área.

60. SAC Sea c el valor para el que el área por debajo de $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ quede dividida por la mitad, mediante la recta $y = cx$ (f gura 23). Halle una ecuación para c y resuélvala *numéricamente* usando un programa informático de cálculo simbólico.

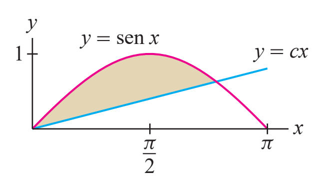


FIGURA 23

61. Ilustre geométricamente (sin cálculos):

$$\int_0^1 x^n\,dx + \int_0^1 x^{1/n}\,dx = 1 \qquad (\text{para } n > 0)$$

62. Sea $f(x)$ una función creciente y $g(x)$ su inversa. Ilustre geométricamente:

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_{f(0)}^{f(a)} g(x)\,dx = af(a)$$

6.2 Cálculo con integrales: volumen, densidad, valor medio

¿Qué cantidades se representan mediante integrales? A grandes rasgos, las integrales representan cantidades que corresponden al "total acumulado" de algo, como el área, volumen, o masa total. Existe un procedimiento en dos etapas para calcular tales cantidades: (1) Aproximar la cantidad por la suma de N términos y (2) pasar al límite cuando $N \to \infty$ para obtener una integral. Este procedimiento se aplicará en diversas ocasiones en esta y otras secciones.

Volumen

El término "sólido" o "cuerpo sólido" se refiere a un objeto sólido tridimensional.

El primer ejemplo que se va a examinar es el **volumen** de un cuerpo sólido. Antes de empezar, se debe recordar que el volumen de un *cilindro recto* (f gura 1) es Ah donde A es el área de la base y h es la altura, medida perpendicularmente a la base. Se utiliza el término "cilindro recto" en un sentido general; la base no necesariamente debe ser circular, pero los lados sí que deben ser perpendiculares, en cualquier caso, a la base.

Supongamos el cuerpo sólido que se extiende desde $y = a$ hasta $y = b$ sobre el eje y, tal y como se muestra en la f gura 2. Sea $A(y)$ el área de la **sección transversal horizontal** a la altura y (la intersección del cuerpo sólido con el plano horizontal a la altura y).

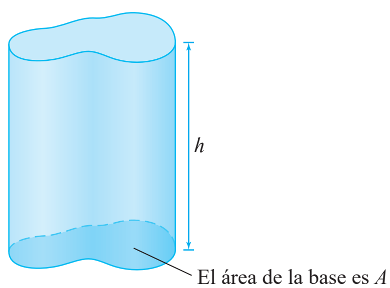


FIGURA 1 El volumen de un cilindro recto es Ah.

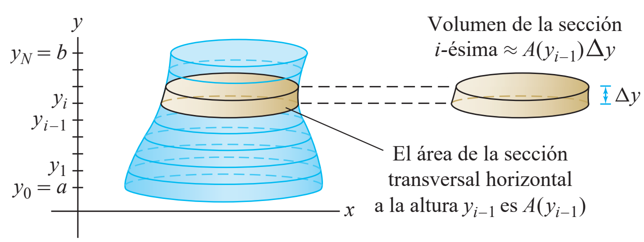


FIGURA 2 Divida el cuerpo sólido en f nas secciones horizontales. Cada sección es aproximadamente un cilindro rectangular, cuyo volumen se puede aproximar como el área de la base por la altura.

Para calcular el volumen V del cuerpo, se divide éste en N secciones horizontales de amplitud $\Delta y = (b - a)/N$. La sección i-ésima abarca desde y_{i-1} hasta y_i, donde $y_i = a + i\Delta y$. Sea V_i el volumen de la sección.

Si N es elevado, entonces Δy es muy pequeño y las secciones muy f nas. En esta situación, la sección i-ésima es aproximadamente un cilindro recto de base $A(y_{i-1})$ y altura Δy y, por tanto, $V_i \approx A(y_{i-1})\Delta y$. En conjunto se obtiene:

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i \approx \sum_{i=1}^{N} A(y_{i-1})\Delta y$$

El último sumatorio es la aproximación en base al extremo inferior de la integral $\int_a^b A(y)dy$. Si se supone que $A(y)$ es una función continua, entonces la aproximación mejora en precisión y converge a la integral cuando $N \to \infty$. Se concluye así que *el volumen del sólido es igual a la integral del área de sus secciones transversales horizontales*.

El volumen como la integral del área de las secciones transversales horizontales Sea $A(y)$ el área de la sección transversal horizontal a la altura y de un cuerpo sólido que se extienda desde $y = a$ hasta $y = b$. Entonces:

$$\text{Volumen del cuepo sólido} = \int_a^b A(y)\,dy \tag{1}$$

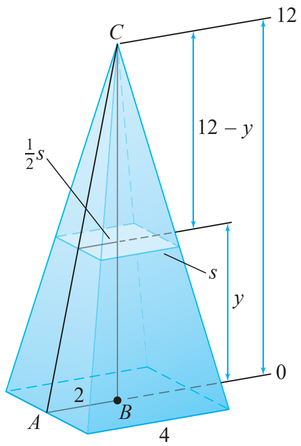


FIGURA 3 La sección transversal horizontal de esta pirámide es un cuadrado.

■ **EJEMPLO 1 Volumen de una pirámide** Calcule el volumen V de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado 4 m y de altura 12 m.

Solución Para aplicar la ec. (1), se necesita una fórmula para la sección transversal horizontal $A(y)$.

Etapa 1. **Halle una fórmula para $A(y)$**

La f gura 3 muestra que la sección horizontal a la altura y es un cuadrado. Para determinar el lado l de este cuadrado, cabe observar que el triángulo $\triangle ABC$ y el triángulo de altura $12 - y$ cuya base, en la sección transversal, tiene longitud $\frac{1}{2}l$ son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\text{Base}}{\text{Altura}} = \frac{2}{12} = \frac{\frac{1}{2}l}{12 - y} \quad \Rightarrow \quad 2(12 - y) = 6l$$

De esta manera, $l = \frac{1}{3}(12 - y)$ y, en consecuencia, $A(y) = s^2 = \frac{1}{9}(12 - y)^2$.

Etapa 2. **Calcule V como la integral de $A(y)$**

$$V = \int_0^{12} A(y)\,dy = \int_0^{12} \frac{1}{9}(12 - y)^2\,dy = -\frac{1}{27}(12 - y)^3\Big|_0^{12} = 64 \text{ m}^3$$

Este resultado concuerda con el que se obtiene aplicando la fórmula $V = \frac{1}{3}Ah$ para el volumen de una pirámide de base A y altura h, pues $\frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 12 = 64$. ■

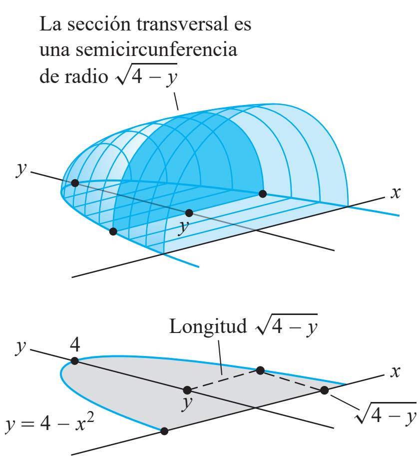


FIGURA 4

■ **EJEMPLO 2** Calcule el volumen V del sólido en la f gura 4, cuya base es la región limitada por la parábola invertida $y = 4 - x^2$ y el eje x, y cuyas secciones verticales transversales perpendiculares al eje y son semicircunferencias.

Solución Para hallar una fórmula para el área $A(y)$ de la sección transversal, cabe destacar que $y = 4 - x^2$ se puede escribir como $x = \pm\sqrt{4 - y}$. En la f gura 4 se observa que la sección transversal en y es una semicircunferencia de radio $r = \sqrt{4 - y}$. El área de esta semicircunferencia es igual a $A(y) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}(4 - y)$. Por tanto

$$V = \int_0^4 A(y)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^4 (4 - y)\,dy = \frac{\pi}{2}\left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^4 = 4\pi \qquad ■$$

En el siguiente ejemplo, se obtendrá el volumen mediante secciones transversales verticales, en lugar de horizontales. Esto dará lugar a una integración respecto a x, en lugar de respecto a y.

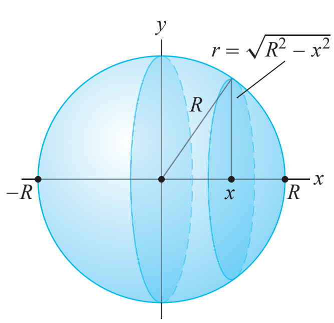


FIGURA 5

■ **EJEMPLO 3 Volumen de una esfera: secciones transversales verticales** Calcule el volumen de una esfera de radio R.

Solución Tal y como se observa en la f gura 5, la sección transversal vertical de una esfera en x es una circunferencia cuyo radio r verif ca $x^2 + r^2 = R^2$, es decir, $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. El área de la sección transversal es $A(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2)$. Por tanto, el volumen de la esfera es:

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = 2\left(\pi R^3 - \pi\frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad ■$$

FIGURA 6 Las áreas de las secciones transversales de las dos pilas de monedas son iguales y su altura es la misma. En consecuencia, y según el principio de Cavalieri, los volúmenes de las dos pilas también son el mismo.

UN APUNTE CONCEPTUAL **El principio de Cavalieri** establece que dos cuerpos sólidos de la misma altura e igual área de sus secciones transversales tienen el mismo volumen. Se suele ilustrar, de manera muy efectiva, con dos montones apilados de monedas (figura 6). La fórmula que se ha obtenido previamente $V = \int_a^b A(y)\,dy$ recoge el principio de Cavalieri, pues los volúmenes V serán iguales siempre que las áreas de las secciones transversales sean las mismas.

Densidad

A continuación, se verá como la masa total de un objeto se puede expresar como la integral de su densidad de masa. Considere una vara de longitud ℓ. La **densidad lineal de masa** ρ de la vara se define como la masa por unidad de longitud. Si ρ es constante, entonces por definición:

$$\text{masa total} = \text{densidad lineal de masa} \times \text{longitud} = \rho \cdot \ell \qquad \boxed{2}$$

El símbolo ρ (letra minúscula rho del alfabeto griego) se suele utilizar para denotar densidades.

Por ejemplo, si $\ell = 10$ cm y $\rho = 9$ g/cm, entonces la masa total es $\rho\ell = 9 \cdot 10 = 90$ g.

Considere ahora una vara en el eje x que abarque desde $x = a$ hasta $x = b$, y cuya densidad $\rho(x)$ sea una función continua de x, tal y como se muestra en la figura 7. Para calcular la masa total M, se puede fraccionar la vara en N pequeños segmentos de longitud $\Delta x = (b - a)/N$. Entonces $M = \sum_{i=1}^{N} M_i$, donde M_i es la masa del segmento i-ésimo.

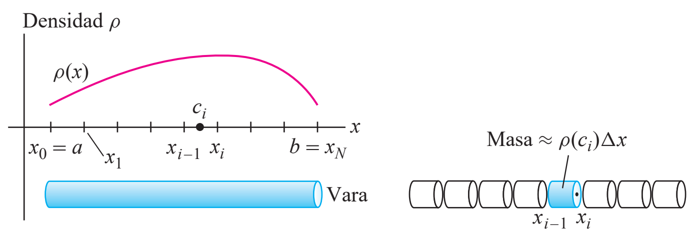


FIGURA 7 La masa total de la vara es igual al área por debajo de la gráfica de la densidad de masa ρ.

No se puede aplicar la ec. (2) porque $\rho(x)$ no es constante, pero se puede argumentar que si Δx es pequeño, entonces $\rho(x)$ es *prácticamente constante* sobre el segmento i-ésimo. Si el segmento i-ésimo abarca desde x_{i-1} hasta x_i y c_i es cualquier punto intermedio en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces $M_i \approx \rho(c_i)\Delta x$ y se verifica:

$$\text{Masa total } M = \sum_{i=1}^{N} M_i \approx \sum_{i=1}^{N} \rho(c_i)\Delta x$$

Cuando $N \to \infty$, la precisión de la aproximación mejora. Como el sumatorio a la derecha del todo es una suma de Riemann que tiende a $\int_a^b \rho(x)\,dx$, tiene sentido definir *la masa total de la vara como la integral de su densidad lineal de masa*:

$$\boxed{\text{Masa total } M = \int_a^b \rho(x)\,dx} \qquad \boxed{3}$$

Cabe mencionar la analogía entre el uso de las secciones para el cálculo de volúmenes y de los segmentos para calcular la masa total.

■ **EJEMPLO 4** **Masa total** Halle la masa total M de una vara de 2 m y con densidad lineal de masa $\rho(x) = 1 + x(2 - x)$ kg/m, donde x es la distancia desde uno de los extremos de la vara.

Solución

$$M = \int_0^2 \rho(x)\,dx = \int_0^2 (1 + x(2 - x))\,dx = \left(x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3} \text{ kg} \qquad ■$$

En general, la densidad es una función $\rho(x, y)$ que depende no sólo de la distancia al origen, sino también de las coordenadas (x, y). La masa total, o población, se calcula mediante integración doble, un tema de cálculo en varias variables.

En algunas situaciones la densidad es una función de la distancia al origen. Por ejemplo, en el estudio de las poblaciones urbanas, se puede asumir que la densidad de población $\rho(r)$ (en personas por kilómetro cuadrado) depende únicamente de la distancia r al centro de la ciudad. Este tipo de funciones de densidad se denomina **función de densidad radial.**

A continuación se va a obtener una fórmula para la población total P situada dentro de un radio R del centro de la ciudad, suponiendo una densidad radial $\rho(r)$. En primer lugar, se divide la circunferencia de radio R en N f nos anillos, todos ellos de amplitud $\Delta r = R/N$, tal y como se muestra en la f gura 8.

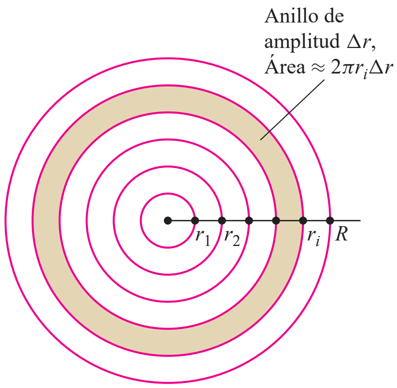


FIGURA 8 División de la circunferencia de radio R en N f nos anillos de amplitud $\Delta r = R/N$.

Sea P_i la población dentro del anillo i-ésimo; por tanto, $P = \sum_{i=1}^{N} P_i$. Si el radio exterior del anillo i-ésimo es r_i, entonces el perímetro de la circunferencia es $2\pi r_i$, y si Δr es pequeño, el área de este anillo es *aproximadamente* $2\pi r_i \Delta r$ (la circunferencia exterior multiplicada por la amplitud). Además, la densidad de población dentro de un anillo tan f no es prácticamente constante e igual a $\rho(r_i)$. Teniendo en cuenta estas aproximaciones:

$$P_i \approx \underbrace{2\pi r_i \Delta r}_{\text{Área del anillo}} \times \underbrace{\rho(r_i)}_{\substack{\text{Densidad de}\\ \text{población}}} = 2\pi r_i \rho(r_i) \Delta r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = \sum_{i=1}^{N} P_i \approx 2\pi \sum_{i=1}^{N} r_i \rho(r_i) \Delta r$$

El último sumatorio es la aproximación, en base al extremo superior, de la integral $2\pi \int_0^R r\rho(r)\, dr$. Cuando N tiende a ∞, la aproximación mejora en precisión y el sumatorio tiende a la integral. En consecuencia, para una población con función de densidad radial $\rho(r)$:

Se debe tener presente que, para una función de densidad radial, la población total se obtiene integrando $2\pi r \rho(r)$ en lugar de $\rho(r)$.

$$\boxed{\text{Población } P \text{ dentro de un radio } R = 2\pi \int_0^R r\rho(r)\, dr} \qquad \boxed{4}$$

■ **EJEMPLO 5 Cálculo de la población total** La población de una cierta ciudad se distribuye según la función de densidad radial $\rho(r) = 15(1+r^2)^{-1/2}$, donde r es la distancia al centro de la ciudad y las unidades de ρ son miles de personas por kilómetro cuadrado. ¿Cuántas personas viven en el anillo que abarca entre 10 y 30 km de distancia al centro de la ciudad?

Solución La población P (en millares) dentro del anillo es:

$$P = 2\pi \int_{10}^{30} r\left(15(1+r^2)^{-1/2}\right) dr = 2\pi(15) \int_{10}^{30} \frac{r}{(1+r^2)^{1/2}}\, dr$$

Para resolver la integral, se considera la sustitución $u = 1 + r^2$, $du = 2r\, dr$. Los nuevos límites de integración son $u(10) = 101$ y $u(30) = 901$ y la población:

$$P = 30\pi \int_{101}^{901} u^{-1/2} \left(\frac{1}{2}\right) du = 30\pi u^{1/2} \Big|_{101}^{901} \approx 1881 \text{ millares}$$

Es decir, la población es aproximadamente de 1,9 millones de personas. ■

Tasa de flujo

Cuando un f uido circula a través de un tubo, la **tasa de f ujo** Q es el *volumen por unidad de tiempo* de f uido que pasa a través del tubo (f gura 9). La tasa de f ujo depende de la velocidad de las partículas del f uido. Si todas las partículas del f uido se desplazan a la misma velocidad v (en unidades de cm^3/min), y el radio del tubo es R, entonces:

$$\underbrace{\text{Tasa de f ujo } Q}_{\text{Volumen por unidad de tiempo}} = \text{área sección transversal} \times \text{velocidad} = \pi R^2 v \text{ cm}^3/\text{min}$$

¿Por qué razón esta fórmula es cierta? Sea P un punto cualquiera de observación en el tubo: ¿cuántas partículas han pasado por P durante un intervalo de tiempo de 1 minuto? Una partícula se desplaza v centímetros cada minuto y por tanto, sobrepasa a P dentro de este minuto si se encuentra a menos de v centímetros a la izquierda de P (suponiendo que el f uido circula de izquierda a derecha). Por tanto, la columna de f uido que ha sobrepasado P en un intervalo de 1 minuto es un cilindro de radio R, longitud v y volumen $\pi R^2 v$ (f gura 9).

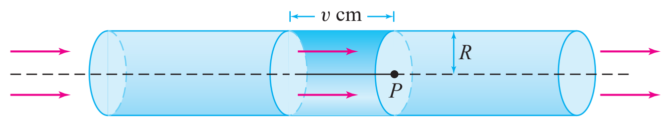


FIGURA 9 La columna de f uido que ha sobrepasado P en una unidad de tiempo es un cilindro de volumen $\pi R^2 v$.

En realidad, las partículas de un f uido no se desplazan todas a la misma velocidad, debido a la fricción. Sin embargo, para un f uido que circule lentamente, el f ujo es **laminar**, esto es, que la velocidad $v(r)$ depende únicamente de la distancia r al centro del tubo. Las partículas en el centro del tubo se desplazan a una velocidad mayor y la velocidad disminuye, tendiendo a 0, conforme nos acercamos a las paredes del tubo (f gura 10).

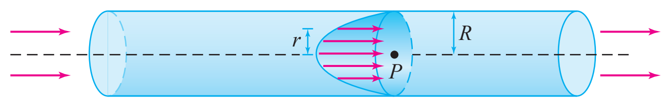


FIGURA 10 Flujo laminar: la velocidad del f uido se incrementa cerca del centro del tubo.

Si el f ujo es laminar, se puede expresar la tasa de f ujo Q como una integral. Se divide la sección transversal circular del tubo en N f nos anillos concéntricos, cada uno de ellos de amplitud $\Delta r = R/N$ (f gura 11). El área del anillo i-ésimo es aproximadamente $2\pi r_i \Delta r$, y las partículas de f uido que atraviesan este anillo lo hacen a una velocidad que es prácticamente la misma e igual a $v(r_i)$. De esta manera, se puede aproximar la tasa de f ujo Q_i a través del anillo i-ésimo mediante:

$$Q_i \approx \text{área sección transversal} \times \text{velocidad} \approx (2\pi r_i \Delta r)v(r_i)$$

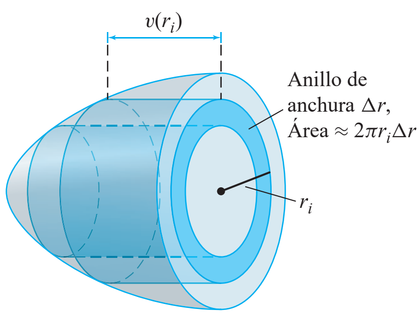


FIGURA 11 Si el f ujo es laminar, todas las partículas de f uido que pasan a través de un f no anillo que se encuentre a distancia r_i del centro, circulan prácticamente a la misma velocidad $v(r_i)$.

Por tanto:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i \approx 2\pi \sum_{i=1}^{N} r_i v(r_i)\Delta r$$

El sumatorio a la derecha es la aproximación en base al extremo superior de la integral $2\pi \int_0^R r v(r)\, dr$. De nuevo, haciendo tender N a ∞ se obtiene la fórmula:

$$\boxed{\text{Tasa de f ujo } Q = 2\pi \int_0^R r v(r)\, dr} \qquad \boxed{5}$$

Cabe observar las analogías entre esta fórmula y su deducción, y la correspondiente fórmula y proceso realizados para una población con densidad radial.

■ **EJEMPLO 6** **Flujo laminar** Según la **Ley de Poiseuille**, la velocidad a la que circula la sangre por un vaso sanguíneo de radio R cm es $v(r) = k(R^2 - r^2)$, donde r es la distancia al centro del vaso (en centímetros) y k es una constante. Calcule la tasa de f ujo Q como función de R, suponiendo que $k = 0{,}5$ (cm-s)$^{-1}$.

El físico francés Jean Poiseuille (1799-1869) descubrió la ley del flujo laminar que los cardiólogos usan para estudiar la circulación de la sangre en humanos. La ley de Poiseuille deja patente el peligro de las acumulaciones de colesterol en las paredes de los vasos sanguíneos: la tasa de flujo que circula por un vaso sanguíneo de radio R es proporcional a R^4 con lo que, si R se reduce a la mitad, la sangre se reduce en un factor de 16.

Solución Según la ec. (5), tendremos:

$$Q = 2\pi \int_0^R (0{,}5)r(R^2 - r^2)\, dr = \pi \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi}{4} R^4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Cabe observar que Q es proporcional a R^4 y que continúa siendo válido para cualquier valor de k. ■

Valor medio

Como ejemplo final, se examinará el *valor medio* de una función. Recordemos que la media de N números $a_1, a_2, \dots, a_N$, es igual a la suma de éstos dividida por N:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j$$

Por ejemplo, la media de 18, 25, 22 y 31 es $\frac{1}{4}(18 + 25 + 22 + 31) = 24$.

No se puede definir el valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como una suma porque hay infinitos valores de x que considerar. Sin embargo, volviendo sobre la fórmula de la aproximación en base al extremo superior R_N (figura 12) tendremos:

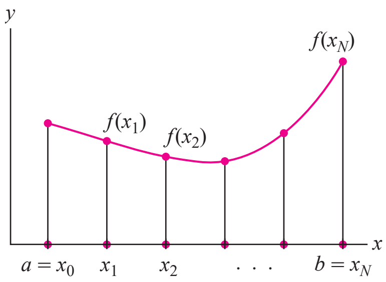


FIGURA 12 La media de los valores de $f(x)$ en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_N$ es igual a $\dfrac{R_N}{b-a}$.

$$R_N = \frac{b-a}{N}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_N))$$

donde $x_i = a + i\left(\dfrac{b-a}{N}\right)$, se puede observar que R_N dividido por $(b-a)$ es igual a la media de los valores $f(x_i)$:

$$\frac{1}{b-a}R_N = \underbrace{\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_N)}{N}}_{\text{Media de los valores de la función}}$$

Si N es suficientemente elevado, parece razonable entender esta cantidad como una *aproximación* a la media de $f(x)$ en $[a, b]$. Por tanto, se define a su vez el valor medio como el límite siguiente:

$$\text{Valor medio} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{b-a}R_N(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

DEFINICIÓN Valor medio El **valor medio** de una función integrable $f(x)$ en $[a, b]$ es la cantidad:

$$\boxed{\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \boxed{6}$$

El valor medio de una función también se denomina **valor esperado**.

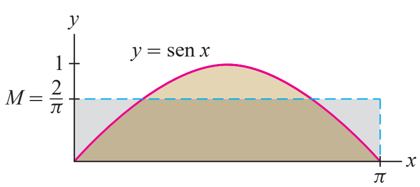


FIGURA 13 El área por debajo de la gráfica es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio M.

UN APUNTE GRÁFICO Se puede pensar en el valor medio M de una función como en la altura media de su gráfica (figura 13). La región por debajo de la gráfica tiene la misma área que el rectángulo de altura M, ya que $\int_a^b f(x)\,dx = M(b-a)$.

■ **EJEMPLO 7** Halle el valor medio de $f(x) = \text{sen}\, x$ en $[0, \pi]$.

Solución El valor medio de sen x en $[0, \pi]$ es:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(-(-1) - (-1)) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$$

Este valor solución tiene sentido porque sen x varía entre 0 y 1 en el intervalo $[0, \pi]$ y 0,637 se encuentra entre los dos extremos (figura 13). ■

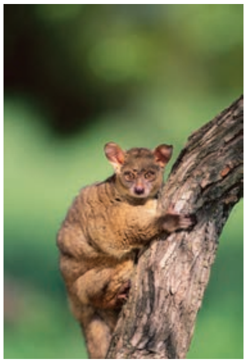


FIGURA 14 Un gálago puede llegar a saltar hasta 2 metros (su centro de masa se eleva en más de cinco veces la longitud de su cuerpo). Cuando Michael Jordan hace un mate la elevación es, a lo sumo de 0,6 veces la longitud de su cuerpo.

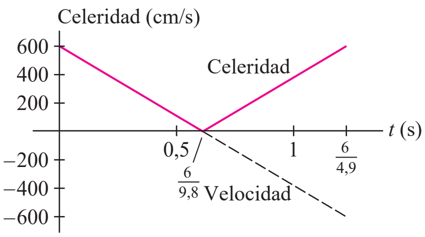


FIGURA 15 Gráfica de la velocidad $|h'(t)| = |600 - 980t|$.

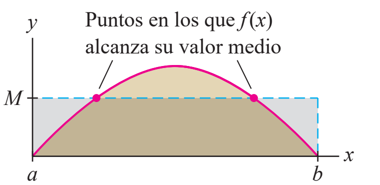


FIGURA 16 La función $f(x)$ alcanza su valor medio M en los puntos de intersección entre el lado superior del rectángulo y la gráfica.

■ **EJEMPLO 8 El salto vertical de un gálago** El gálago (*Galago senegalensis*) es un pequeño primate con una gran capacidad de salto (figura 14). Halle la rapidez o celeridad media durante un salto si la velocidad inicial fue de $v_0 = 600$ cm/s. Use la fórmula de Galileo para la altura $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (en centímetros, donde $g = 980$ cm/s^2).

Solución La posición del gálago en el salto viene dada por $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = t(v_0 - \frac{1}{2}gt)$. Esta altura es igual a cero en el instante $t = 0$ y en $t = 2v_0/g = \frac{1200}{980} = \frac{6}{4,9}$ s, que es cuando el salto ha finalizado.

La velocidad del gálago es $h'(t) = v_0 - gt = 600 - 980t$. La velocidad es negativa cuando $t > v_0/g = \frac{6}{9,8}$; así, tal y como se observa en la figura 15, la integral de la celeridad $|h'(t)|$ es igual a la suma de las áreas de dos triángulos de base $\frac{6}{9,8}$ y altura 600:

$$\int_0^{6/4,9} |600 - 980t|\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{9,8}\right)(600) + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{9,8}\right)(600) = \frac{3600}{9,8}$$

La celeridad media $\overline{c}$ es:

$$\overline{c} = \frac{1}{\frac{6}{4,9}} \int_0^{6/4,9} |600 - 980t|\, dt = \frac{1}{\frac{6}{4,9}}\left(\frac{3600}{9,8}\right) = 300 \text{ cm/s}$$ ■

Existe una diferencia importante entre la media de una lista de números y el valor medio de una función continua. Si la nota media en un examen es 84, entonces 84 se encuentra entre el mayor y la menor de las notas del examen, pero es posible que ningún estudiante obtuviera como nota 84. Por el contrario, el teorema del valor medio (TVM) para integrales establece que una función continua en un intervalo siempre alcanza su valor medio en algún punto del intervalo (figura 16).

Por ejemplo, el valor medio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ es $2/\pi$, según el ejemplo 7. Planteando $f(c) = 2/\pi$, resulta que $c = \operatorname{sen}^{-1}(2/\pi) \approx 0,69$. Como 0,69 se encuentra en $[0, \pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ alcanza su valor medio en un punto del intervalo.

TEOREMA 1 Teorema del valor medio para integrales Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Demostración Sea $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ el valor medio. Como $f(x)$ es continua, se puede aplicar el teorema 1 de la sección 4.2 y afirmar que f alcanza un valor mínimo m_{min} y uno máximo M_{max} en el intervalo cerrado $[a, b]$. Además, según la ec. (8) de la sección 5.2:

$$m_{\text{min}}(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M_{\text{max}}(b-a)$$

Dividiendo por $(b - a)$, tendremos:

$$m_{\text{min}} \leq M \leq M_{\text{max}}$$

En otras palabras, el valor medio M se encuentra entre m_{min} y M_{max}. El teorema del valor intermedio garantiza que $f(x)$ alcanza cualquier valor entre su mínimo y su máximo y, por tanto, existe algún c en $[a, b]$ tal que $f(c) = M$. ■

6.2 RESUMEN

- Fórmulas

Volumen	$V = \int_a^b A(y)\,dy$	$A(y)$ = área de la sección transversal
Masa total	$M = \int_a^b \rho(x)\,dx$	$\rho(x)$ = densidad de masa lineal
Población total	$P = 2\pi \int_0^R r\rho(r)\,dr$	$\rho(r)$ = densidad de masa radial
Tasa de flujo	$Q = 2\pi \int_0^R rv(r)\,dr$	$v(r)$ = velocidad laminar
Valor medio	$M = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$	$f(x)$ función continua

- TVM para integrales: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ de valor medio (o valor esperado) M. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M$.

6.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es el valor medio de $f(x)$ en $[0, 4]$ si el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x es igual a 12?

2. Halle el volumen de un cuerpo sólido que se extienda desde $y = 2$ hasta $y = 5$, y para el que todas las secciones transversales tengan área contante dada por $A(y) = 5$.

3. ¿Cuál es la definición de tasa de flujo?

4. Al obtener la tasa de flujo como una integral, ¿qué hipótesis se debe suponer sobre la velocidad del fluido?

5. El valor medio de $f(x)$ en $[1, 4]$ es 5. Halle $\int_1^4 f(x)\,dx$.

Problemas

1. Sea V el volumen de una pirámide de altura 20 y de base un cuadrado de lado 8.

(a) Halle el área de la sección horizontal transversal a una altura y usando triángulos semejantes, de manera análoga a como se procedió en el ejemplo 1.

(b) Calcule V integrando el área de la sección transversal.

2. Sea V el volumen de un cono de altura 10 y base un círculo de radio 4 [figura 17(A)].

(a) Considere triángulos semejantes para hallar el área de la sección horizontal transversal a altura y.

(b) Calcule V integrando el área de la sección transversal.

3. Use el método del problema 2 para hallar la fórmula del volumen de un cono circular de altura h y base un círculo de radio R [figura 17(B)].

4. Calcule el volumen de la rampa de la figura 18 de las siguientes tres maneras: mediante la integración del área las secciones transversales

(a) perpendiculares al eje x (rectángulos).

(b) perpendiculares al eje y (triángulos).

(c) perpendiculares al eje z (rectángulos).

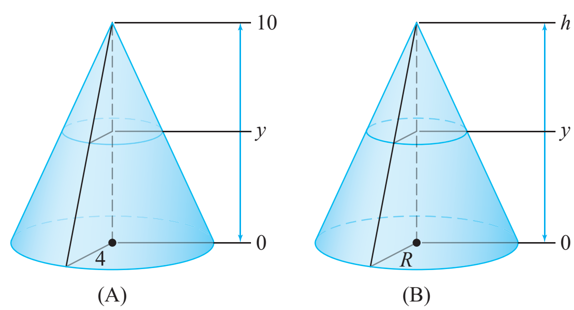


FIGURA 17 Conos circulares.

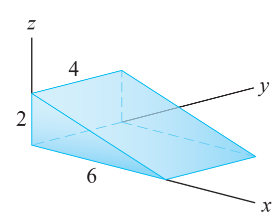


FIGURA 18 Rampa de longitud 6, amplitud 4 y altura 2.

5. Halle el volumen de líquido necesario para llenar una esfera de radio R hasta la atura h (f gura 19).

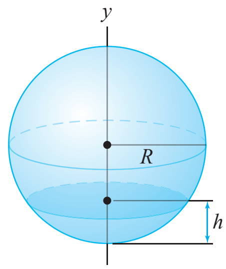
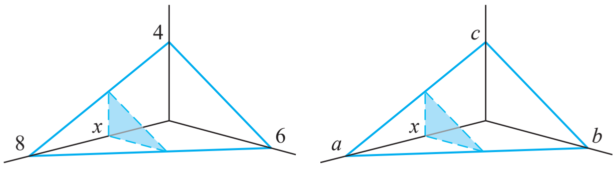


FIGURA 19 Esfera llena de líquido hasta una altura h.

6. Halle el volumen del tetraedro de la f gura 20(A) integrando el área de las secciones verticales transversales.



(A) (B)

FIGURA 20

7. Obtenga una fórmula para el volumen del tetraedro de la f gura 20(B) en términos de las constantes a, b y c.

8. Sea B el cuerpo sólido de base el interior de la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ y cuyas secciones verticales transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros. Pruebe que el área de las secciones transversales verticales es $A(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$ y calcule el volumen de B.

En los problemas 9-14, halle el volumen del cuerpo sólido de base y secciones transversales especif cadas.

9. La base es la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ y las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos de la misma base y altura.

10. La base es el triángulo limitado por $x + y = 1$, el eje x y el eje y. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son semicircunferencias.

11. La base es la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$, para $-3 \le x \le 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados.

12. La base es un cuadrado, uno de cuyos lados es el intervalo $[0, \ell]$ sobre el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos de altura $f(x) = x^2$.

13. La base es la región limitada por $y = x^2$ e $y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados.

14. La base es la región limitada por $y = x^2$ e $y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son rectángulos de altura y^3.

15. Halle el volumen del cuerpo sólido cuya base es la región $|x|+|y| \le 1$ y para el que las secciones transversales verticales, perpendiculares al eje y, son semicircunferencias (con diámetro a lo largo de la base).

16. Pruebe que el volumen de una pirámide de altura h y base un triángulo equilátero de lado l es $\frac{\sqrt{3}}{12}hl^2$.

17. El área de una elipse es πab, donde a y b son las longitudes de los semiejes mayor y menor respectivamente (f gura 21). Calcule el volumen de un cono de altura 12 cuya base sea una elipse de semieje mayor $a = 6$ y semieje menor $b = 4$.

18. Halle el volumen V de un tetraedro *regular* (f gura 22) cuyas caras son triángulos equiláteros de lado l. La altura del tetraedro es $h = \sqrt{2/3}\,l$.

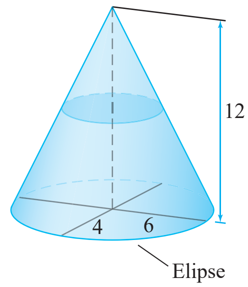


FIGURA 21

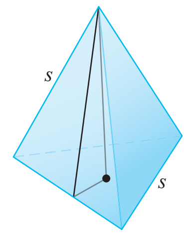


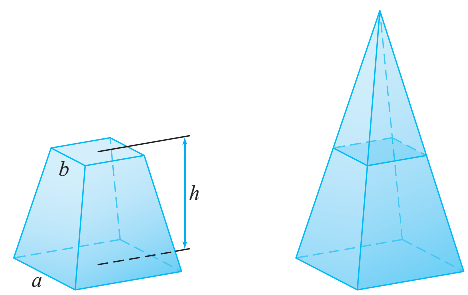
FIGURA 22

19. Un tronco de pirámide es una pirámide a la que se le ha quitado la parte superior [f gura 23(A)]. Sea V el volumen de un tronco de pirámide de altura h, base un cuadrado de lado a y techo un cuadrado de lado b siendo $a > b \ge 0$.

(a) Pruebe que si se continuara el tronco hasta obtener una pirámide completa, ésta tendría altura $ha/(a - b)$ [f gura 23(B)].

(b) Pruebe que la sección transversal a una altura x es un cuadrado de lado $(1/h)(a(h - x) + bx)$.

(c) Pruebe que $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$. Un papiro datado en el 1850 A.C. muestra que los matemáticos egipcios habían descubierto esta fórmula hace casi 4000 años.



(A) (B)

FIGURA 23

20. Un plano, inclinado en un ángulo de 45° grados, pasa por la base de un cilindro de radio r. Halle el volumen de la región interior del cilindro y situada por debajo del plano (f gura 24).

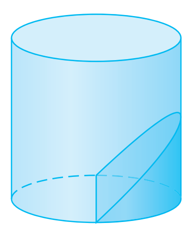


FIGURA 24

21. El cuerpo sólido S de la f gura 25 es la intersección de dos cilindros de radio r cuyos ejes son perpendiculares.

(a) La sección horizontal transversal de cada cilindro a la distancia y del eje central es una tira rectangular. Halle la amplitud de la tira.

(b) Halle el área de la sección horizontal transversal de S a la distancia y.

(c) Halle el volumen de S como función de r.

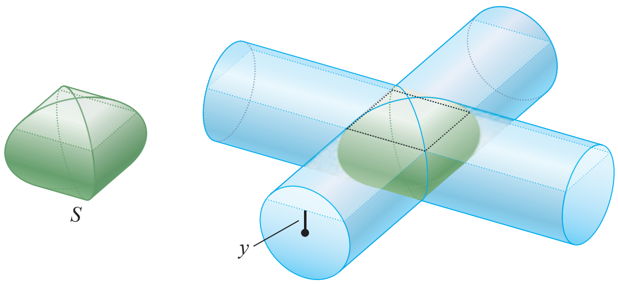


FIGURA 25 Dos cilindros que se cortan en ángulo recto.

22. Sea S la intersección de dos cilindros de radio r cuyos ejes se cortan formando un ángulo θ. Halle el volumen de S como función de r y de θ.

23. Calcule el volumen de un cilindro inclinado en un ángulo de $\theta = 30°$, de altura 10 y radio de la base igual a 4 (f gura 26).

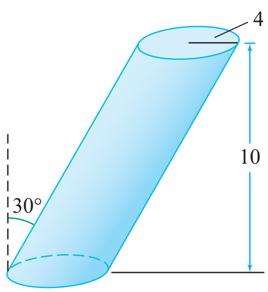


FIGURA 26 Cilindro inclinado en un ángulo de $\theta = 30°$.

24. La siguiente tabla recoge las áreas de las secciones transversales del Lago Nogebow a intervalos de 5 metros. La f gura 27 muestra un mapa de las curvas de nivel del lago. Estime el volumen V del lago, considerando la media entre las aproximaciones a la integral del área de las secciones transversales basadas en el extremo inferior y en el superior.

Profundidad (m)	0	5	10	15	20
Área (millones m^2)	2,1	1,5	1,1	0,835	0,217

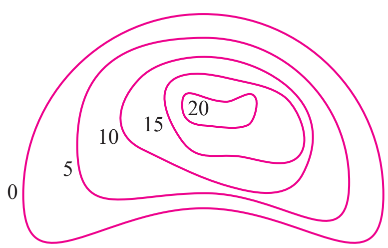


FIGURA 27 Curvas de nivel del Lago Nogebow.

25. Halle la masa total de una vara de longitud 1 m y de función de densidad lineal $\rho(x) = 10(x + 1)^{-2}$ kg/m para $0 \le x \le 1$.

26. Halle la masa total de una vara de longitud 2 m y de función de densidad lineal $\rho(x) = 1 + 0{,}5\,\text{sen}(\pi x)$ kg/m para $0 \le x \le 2$.

27. Un depósito de mineral sobre una tira de longitud 6 cm tiene densidad $s(x) = 0{,}01x(6 - x)$ g/cm para $0 \le x \le 6$. Calcule la masa total de mineral en el yacimiento.

28. La carga en un tubo de vidrio de longitud 10 cm se distribuye según una densidad de carga lineal dada por $\rho(x) = x(x^2+1)^{-2} \times 10^{-4}$ culombios por centímetro, para $0 \le x \le 10$. Calcule la carga total.

29. Calcule la población dentro de un radio de 10 kilómetros del centro de la ciudad, si la densidad radial de población es $\rho(r) = 4(1 + r^2)^{1/3}$ (en miles de personas por kilómetro cuadrado).

30. El Parque Nacional de Odzala en la República del Congo cuenta con una de las mayores concentraciones de gorilas del mundo. Suponga que la densidad de población radial es $\rho(r) = 52(1 + r^2)^{-2}$ gorilas por kilómetro cuadrado, donde r es la distancia a un claro de hierba con una fuente de agua. Calcule el número de gorilas en un radio de 5 km del claro.

31. La tabla 1 recoge la densidad de población (en personas por kilómetro cuadrado) como función de la distancia r (en kilómetros) al centro de un municipio rural. Estime la población en un radio de 1,2 km desde el centro mediante la media de las aproximaciones basadas en el extremo inferior y superior.

TABLA 1 Densidad de población

r	$\rho(r)$	r	$\rho(r)$
0,0	125,0	0,8	56,2
0,2	102,3	1,0	46,0
0,4	83,8	1,2	37,6
0,6	68,6		

32. Halle la masa total de una lámina circular de radio 20 cm cuya densidad de masa sea la función radial $\rho(r) = 0{,}03 + 0{,}01\cos(\pi r^2)$ g/cm^2.

33. La densidad de la población de ciervos en un bosque viene dada por la función radial $\rho(r) = 150(r^2 + 2)^{-2}$, en ciervos por kilómetro cuadrado, donde r es la distancia (en kilómetros) a un pequeño prado. Calcule el número de ciervos en la región $2 \le r \le 5$ km.

34. Pruebe que una placa circular de radio 2 cm y densidad de masa radial $\rho(r) = \frac{4}{r}$ g/cm^2 tiene masa f nita, aunque la densidad se vuelva inf nita en el origen.

35. Halle la tasa de f ujo a través de un tubo de radio 4 cm, suponiendo que la velocidad de las partículas de f uido que se encuentren a distancia r cm del centro sea $v(r) = (16 - r^2)$ cm/s.

36. La velocidad de las partículas de un f uido que circula a través de un tubo de radio 5 cm es $v(r) = (10 - 0{,}3r - 0{,}34r^2)$ cm/s, donde r cm es la distancia al centro. ¿Qué cantidad por segundo de f uido circula a través de la porción del tubo determinada por $0 \le r \le 2$?

37. Una vara sólida de radio 1 cm se coloca dentro de un tubo de radio 3 cm, de manera que sus ejes estén alineados. El tubo se llena de agua y ésta recubre la vara es su parte externa. Halle la tasa de f ujo si la velocidad del agua viene dada por la función radial $v(r) = 0{,}5(r - 1)(3 - r)$ cm/s.

38. Sea $v(r)$ la velocidad de la sangre en un capilar arterial de radio $R = 4 \times 10^{-5}$ m. Use la ley de Poiseuille (ejemplo 6) con $k = 10^6$ (m-s)$^{-1}$, para determinar la velocidad en el centro del capilar y la tasa de f ujo (use las unidades apropiadas).

En los problemas 39-48, calcule la media sobre el intervalo dado.

39. $f(x) = x^3, \quad [0, 4]$

40. $f(x) = x^3, \quad [-1, 1]$

41. $f(x) = \cos x, \quad [0, \frac{\pi}{6}]$

42. $f(x) = \sec^2 x, \quad [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

43. $f(s) = s^{-2}, \quad [2, 5]$

44. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{x^2}, \quad [1, 2]$

45. $f(x) = 2x^3 - 6x^2, \quad [-1, 3]$

46. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+16)^{3/2}}, \quad [0, 3]$

47. $f(x) = x^n$ para $n \geq 0, \quad [0, 1]$

48. $f(x) = \operatorname{sen}(nx), \quad [0, \pi]$

49. La temperatura en un museo de arte (en °C) en el instante t (en horas) varía según $T(t) = 20 + 5\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Halle la temperatura media para los periodos de tiempo $[0, 24]$ y $[2, 6]$.

50. Se lanza verticalmente al aire una pelota, desde el suelo y con velocidad inicial 18 m/s. En el instante t (en segundos) la altura de la pelota es $h(t) = 18t - 9{,}8t^2$. Halle la altura media y la celeridad media en el intervalo de tiempo que comprende desde el lanzamiento de la pelota hasta que vuelve a tocar el suelo.

51. La posición de una partícula en el instante t viene dada por $s(t) = t^3 - 6t^2$ m/s. Halle la celeridad media en el intervalo $[1, 5]$.

52. Un objeto, con velocidad inicial cero, acelera de manera constante y a razón de 10 m/s^2. Halle su velocidad media durante los primeros 15 segundos.

53. La aceleración de una partícula es $a(t) = 60t - 4t^3$ m/s^2. Calcule la aceleración media y la celeridad media en el intervalo $[2, 6]$, suponiendo que la velocidad inicial de la partícula sea cero.

54. ¿Cuál es el valor medio del área para los círculos cuyos radios varían de 0 a R?

55. Sea M el valor medio de $f(x) = x^4$ en $[0, 3]$. Determine un punto c de $[0, 3]$ tal que $f(c) = M$.

56. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Determine un punto c de $[4, 9]$ tal que $f(c)$ sea igual al valor medio de f en $[4, 9]$.

57. Sea M el valor medio de $f(x) = x^3$ en $[0, A]$, siendo $A > 0$. ¿En base a qué teorema se puede garantizar que existe un punto c de $[0, A]$ tal que $f(c) = M$? Halle c.

58. SAC Sea $f(x) = 2\operatorname{sen} x - x$. Use un programa informático de cálculo simbólico para representar gráf camente $f(x)$ y estime:

(a) El cero positivo α de $f(x)$.

(b) El valor medio M de $f(x)$ en $[0, \alpha]$.

(c) Un valor $c \in [0, \alpha]$ tal que $f(c) = M$.

59. Sean $f(x) = x\operatorname{sen}^2 x$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen}^2 x$. ¿Qué función presenta un valor medio en $[0, 1]$ mayor? ¿Y en $[1, 2]$?

60. Halle el valor medio de $f(x) = ax + b$ en el intervalo $[-M, M]$, siendo a, b y M constantes arbitrarias.

61. Dibuje la gráf ca de una función $f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$ en $[0, 1]$ y $f(x) \leq 0$ en $[1, 2]$, y para la que su valor medio en $[0, 2]$ sea negativo.

62. Proporcione un ejemplo de una función (necesariamente discontinua) que no cumpla la tesis del TVM para integrales.

Problemas avanzados

63. En el instante $t = 0$ y desde el suelo, se lanza un objeto verticalmente al aire con velocidad inicial v_0 ft/s. Halle la celeridad media del objeto en el intervalo de tiempo $[0, T]$, donde T es el momento en que el objeto regresa a la tierra.

64. Repase el TVM, tratado en la sección 4.3 (teorema 1, p. 194). Pruebe el TVM para integrales usando conjuntamente este teorema y el Teorema Fundamental del Cálculo.

6.3 Volúmenes de revolución

Se utilizarán los términos "revolución" y "rotación" de manera indistinta.

Un **sólido de revolución** es un cuerpo sólido obtenido al rotar una región del plano respecto a un eje. La esfera y un cono circular son ejemplos de este tipo de sólidos: cada uno de ellos se obtiene cuando una región del plano gira alrededor de un eje (f gura 1).

Este método para calcular el volumen se conoce como el método del disco, porque las secciones verticales del sólido son discos circulares.

Suponga que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. El cuerpo sólido que se obtiene rotando la región por debajo de la gráf ca respecto al eje x, tiene una característica especial: todas las secciones verticales transversales son circunferencias (f gura 2). De hecho, la sección vertical transversal en x es una circunferencia de radio $R = f(x)$ y, en consecuencia:

$$\text{Área de sección vertical transversal} = \pi R^2 = \pi f(x)^2$$

Tal y como se ha establecido en la sección 6.2, el volumen total V es igual a la integral del área de las secciones transversales. Por tanto, $V = \displaystyle\int_a^b \pi f(x)^2\, dx$.

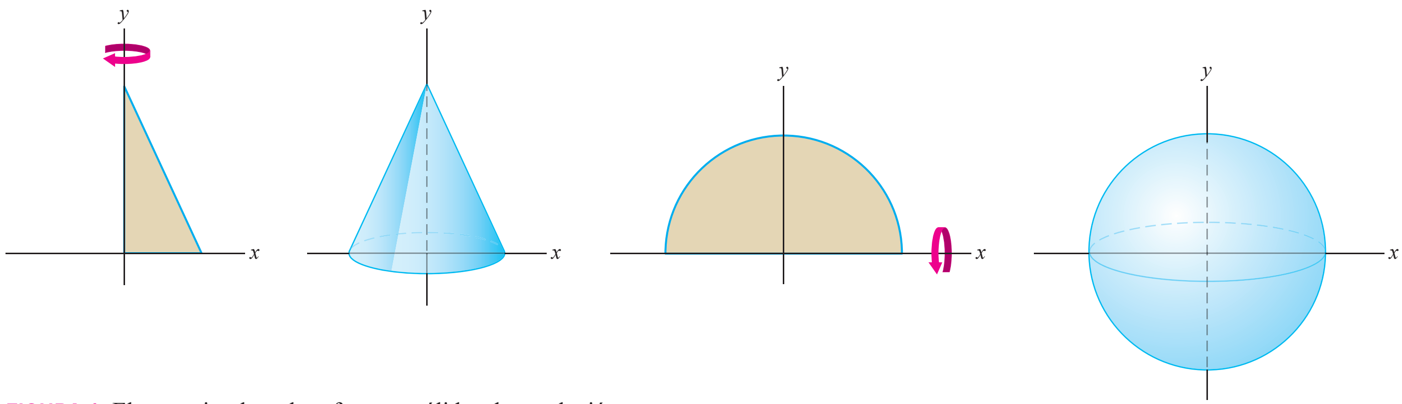
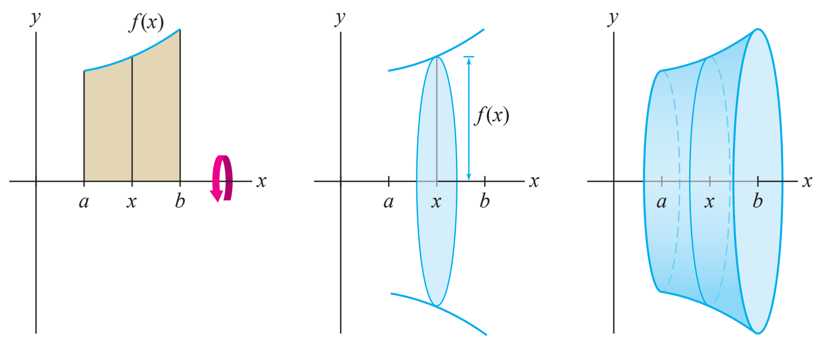


FIGURA 1 El cono circular y la esfera son sólidos de revolución.

Las secciones transversales de un sólido de revolución son circunferencias de radio $R = f(x)$ y área $\pi R^2 = \pi f(x)^2$. El volumen, dado por la ec. (1), es la integral del área de las secciones transversales.



(A)

(B) La sección transversal es un círculo de radio $f(x)$.

(C) Sólido de revolución

FIGURA 2

Volumen de Revolución: método del disco Sea $f(x)$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ on $[a, b]$. Entonces, el volumen del cuerpo sólido obtenido rotando la región por debajo de la gráf ca respecto al eje x, es [donde $R = f(x)$]:

$$V = \pi \int_a^b R^2\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \qquad \boxed{1}$$

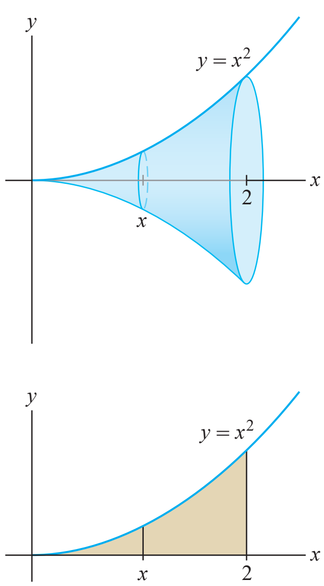


FIGURA 3 Región por debajo de $y = x^2$, rotada respecto al eje x.

■ **EJEMPLO 1** Calcule el volumen V del cuerpo sólido obtenido rotando la región por debajo de $y = x^2$ respecto al eje x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solución El cuerpo sólido se muestra en la f gura 3. Según la ec. (1), con $f(x) = x^2$, su volumen es:

$$V = \pi \int_0^2 R^2\,dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2\,dx = \pi \int_0^2 x^4\,dx = \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \pi \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5}\pi \qquad ■$$

Existen algunas variaciones útiles de esta fórmula para un volumen de revolución. En primer lugar, considere la región comprendida *entre* dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, donde $f(x) \geq g(x) \geq 0$ tal y como se muestra en la f gura 5(A). Cuando esta región se rota respecto al eje x, el segmento $\overline{AB}$ genera la **corona circular** que se muestra en la f gura 5(B). El radio externo y el radio interno de esta corona circular (también llamada annulus; ver f gura 4) son:

$$R_{\text{ext}} = f(x), \qquad R_{\text{int}} = g(x)$$

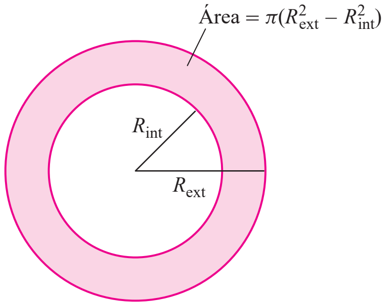


FIGURA 4 La región limitada por dos circunferencias concéntricas se denomina corona circular o, de manera más formal, annulus.

El área de la sección circular es $\pi R_{\text{ext}}^2 - \pi R_{\text{int}}^2$ o $\pi(f(x)^2 - g(x)^2)$, y el volumen del sólido de revolución [f gura 5(C)] es la integral de esta área de las secciones transversales:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)\,dx = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx} \qquad \boxed{2}$$

Cabe tener presente que el integrando es $(f(x)^2 - g(x)^2)$ y no $(f(x) - g(x))^2$.

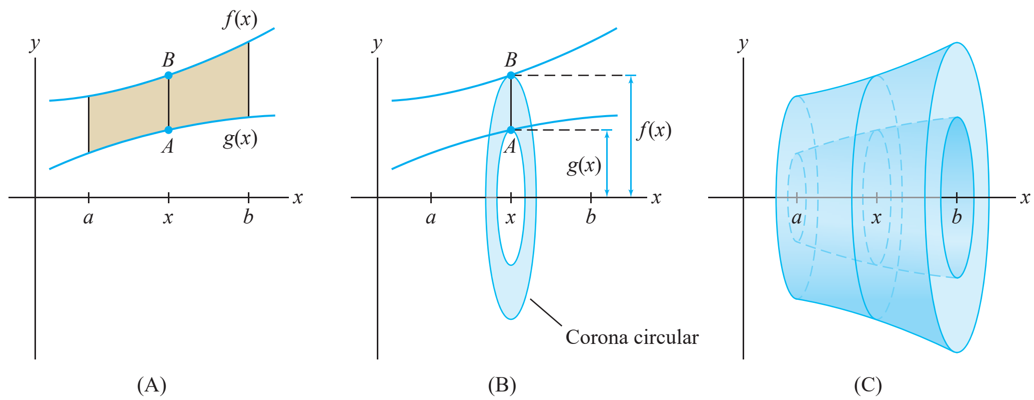


FIGURA 5 $\overline{AB}$ genera una corona circular al rotar respecto al eje x.

■ **EJEMPLO 2 La región limitada dos curvas** Halle el volumen V obtenido al rotar la región limitada por $y = x^2 + 4$ e $y = 2$ respecto al eje x, para $1 \le x \le 3$.

Solución La gráf ca de $y = x^2 + 4$ se encuentra por encima de la gráf ca de $y = 2$ (f gura 6). Por tanto, $R_{\text{ext}} = x^2 + 4$ y $R_{\text{int}} = 2$. Según la ec. (2):

$$V = \pi \int_1^3 (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)\,dx = \pi \int_1^3 ((x^2 + 4)^2 - 2^2)\,dx =$$

$$= \pi \int_1^3 (x^4 + 8x^2 + 12)\,dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 + 12x \right)\Bigg|_1^3 = \frac{2126}{15}\pi \qquad ■$$

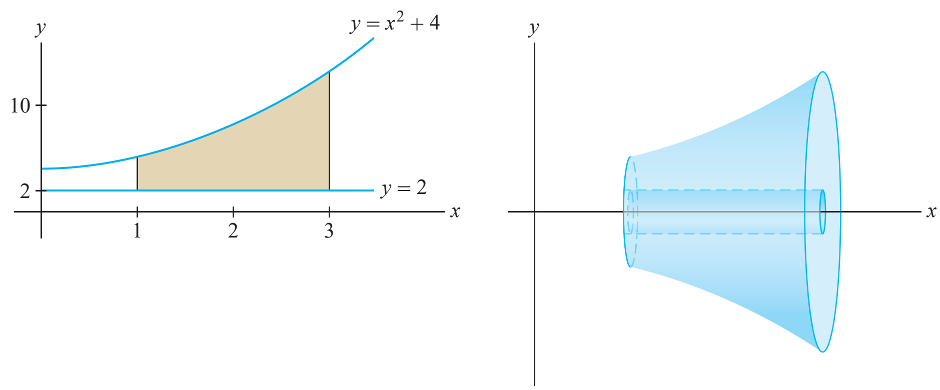


FIGURA 6 El área limitada por $y = x^2 + 4$ e $y = 2$ en $[1, 3]$ rotada respecto al eje x.

En el siguiente ejemplo se calcula un volumen de revolución respecto a un eje horizontal, paralelo al eje x.

■ **EJEMPLO 3 Revolución respecto a un eje horizontal** Halle el volumen V de la "alianza de boda" [f gura 7(C)] obtenida rotando la región entre las gráf cas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$ respecto a la recta horizontal $y = -3$.

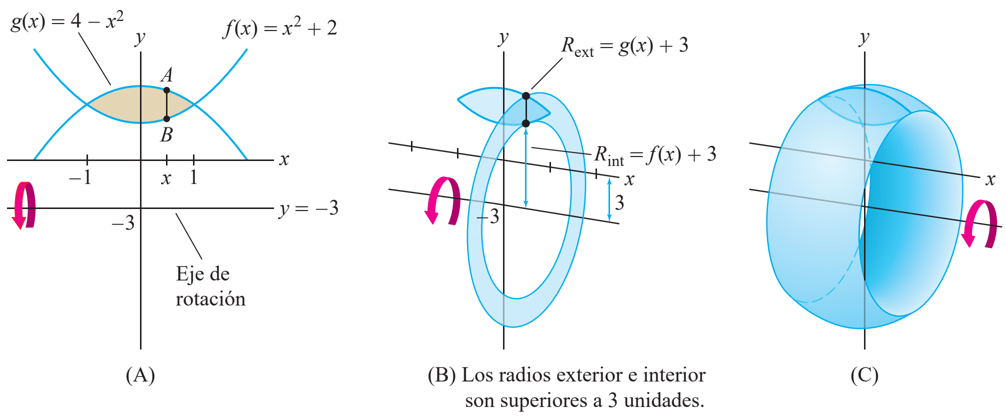


FIGURA 7

Cuando enuncie una integral para un volumen de revolución, visualice las secciones transversales. Estas secciones transversales son coronas circulares (o discos) cuyos radios interior y exterior dependen del eje de rotación.

Solución En primer lugar, se determinan los puntos de intersección de las dos gráf cas resolviendo:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

En la f gura 7(A) se muestra que $g(x) \geq f(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.

Si la revolución hubiera sido respecto al eje x, hubiéramos considerado la ec. (2). Para el eje de revolución $y = -3$, se debe determinar la variación en el radio. La f gura 7(B) muestra que si se rota respecto a $y = -3$, el segmento $\overline{AB}$ genera una corona circular cuyos radios externo e interno son ambos mayores que 3 unidades:

- $R_{ext} = g(x) - (-3) = (4 - x^2) + 3 = 7 - x^2$
- $R_{int} = f(x) - (-3) = (x^2 + 2) + 3 = x^2 + 5$

El volumen de revolución es igual a la integral del área de esta corona circular:

Se obtiene R_{ext} restando $y = -3$ de $y = g(x)$ pues la distancia vertical es la diferencia entre las ordenadas. De manera análoga, se resta -3 a $f(x)$ para obtener R_{int}.

$$V \text{ (respecto a } y = -3) = \pi \int_{-1}^{1} (R_{ext}^2 - R_{int}^2)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left((g(x) + 3)^2 - (f(x) + 3)^2\right) dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} ((7 - x^2)^2 - (x^2 + 5)^2)\, dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} ((49 - 14x^2 + x^4) - (x^4 + 10x^2 + 25))\, dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (24 - 24x^2)\, dx = \pi(24x - 8x^3)\Big|_{-1}^{1} = 32\pi$$

■

■ **EJEMPLO 4** Halle el volumen obtenido al rotar las gráf cas de $f(x) = 9 - x^2$ e $y = 12$ para $0 \leq x \leq 3$ respecto a:

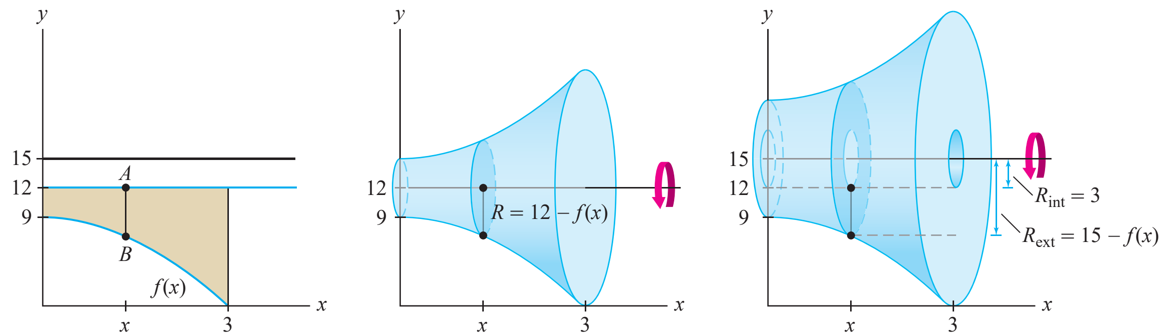
(a) la recta $y = 12$ **(b)** la recta $y = 15$

Solución En primer lugar se establecerá cada sección transversal: ¿es un disco o una corona circular? A continuación se enunciará la integral correspondiente.

En la figura 8, la longitud de $\overline{AB}$ es $12 - f(x)$ en lugar de $f(x) - 12$ pues la recta $y = 12$ se encuentra por encima de *la gráfica de $f(x)$.*

(a) En la f gura 8(B) se muestra como, al rotar respecto a $y = 12$, el segmento $\overline{AB}$ genera un *disco* de radio R, siendo:

$$R = \text{longitud de } \overline{AB} = 12 - f(x) = 12 - (9 - x^2) = 3 + x^2$$



(A) $f(x) = 9 - x^2$ (B) Rotación respecto a la recta $y = 12$ (C) Rotación respecto a la recta $y = 15$

FIGURA 8 Cuando se rota respecto a $y = 12$, el segmento $\overline{AB}$ genera un disco, pero cuando se rota respecto a $y = 15$ genera una corona circular.

Cuando se rota respecto a $y = 12$ el volumen es:

$$V = \pi \int_0^3 R^2\,dx = \pi \int_0^3 (3 + x^2)^2\,dx = \pi \int_0^3 (9 + 6x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \pi \left(9x + 2x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3 = \frac{648}{5}\pi$$

(b) La f gura 8C) muestra que cuando se rota $\overline{AB}$ respecto a $y = 15$ genera una *corona circular*. El radio externo de esta corona circular es la distancia de B a la recta $y = 15$:

$$R_{\text{ext}} = 15 - f(x) = 15 - (9 - x^2) = 6 + x^2$$

El radio interno es $R_{\text{int}} = 3$. Por tanto, el volumen de revolución respecto a $y = 15$ es:

$$V = \pi \int_0^3 (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)\,dx = \pi \int_0^3 ((6 + x^2)^2 - 3^2)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (36 + 12x^2 + x^4 - 9)\,dx =$$

$$= \pi \left(27x + 4x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3 = \frac{1188}{5}\pi$$ ■

Se puede utilizar el método del disco y el de la corona circular para sólidos de revolución respecto a ejes verticales, pero es necesario expresar la gráf ca como una función de y, es decir, $x = g(y)$.

■ **EJEMPLO 5** **Sólido de revolución respecto a un eje vertical** Halle el volumen del cuerpo sólido que se obtiene rotando la región por debajo de la gráf ca de $f(x) = 9 - x^2$, para $0 \le x \le 3$, respecto al eje vertical $x = -2$.

Solución La f gura 9 muestra que $\overline{AB}$ genera una corona circular, al rotar respecto a la recta vertical $x = -2$. Se va a integrar respecto a y, por lo que es necesario determinar el radio interno y externo, de esta corona circular, como función de y. Resolviendo, respecto a x, $y = 9 - x^2$ se obtiene $x^2 = 9 - y$, o $x = \sqrt{9 - y}$ (pues $x \ge 0$). Por tanto:

$$R_{\text{ext}} = \sqrt{9 - y} + 2, \qquad R_{\text{int}} = 2$$

$$R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2 = (\sqrt{9 - y} + 2)^2 - 2^2 = (9 - y) + 4\sqrt{9 - y} + 4 - 4 =$$
$$= 9 - y + 4\sqrt{9 - y}$$

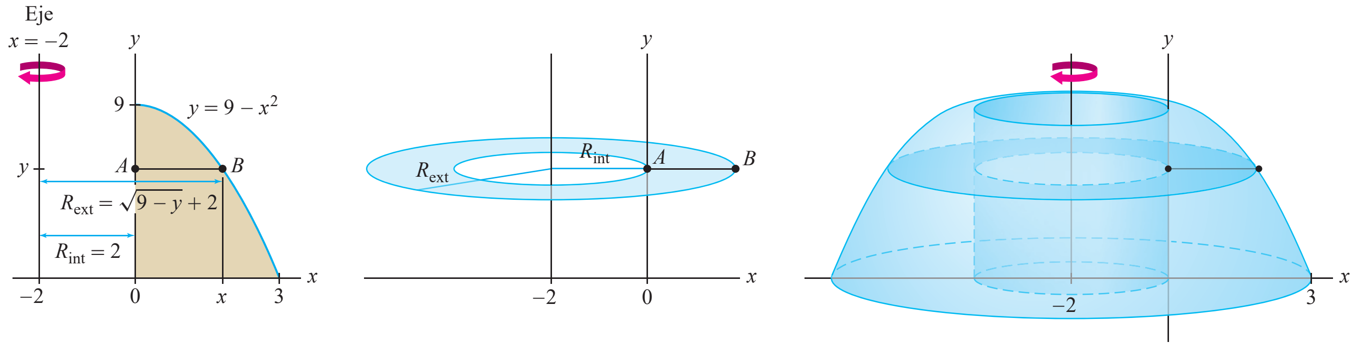


FIGURA 9

La región se extiende desde $y = 0$ hasta $y = 9$ a lo largo del eje y, por tanto:

$$V = \pi \int_0^9 (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)\, dy = \pi \int_0^9 \left(9 - y + 4\sqrt{9-y}\right) dy =$$

$$= \pi \left(9y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{8}{3}(9-y)^{3/2}\right)\Big|_0^9 = \frac{225}{2}\pi$$ ■

6.3 RESUMEN

- *Método del disco* Cuando se rota la región limitada por dos gráf cas respecto a un eje, los segmentos que son *perpendiculares* al eje generan discos o coronas circulares. El volumen V del sólido de revolución es la integral de las áreas de estos discos o coronas circulares.
- Dibuje las gráf cas para visualizar los discos o coronas.
- *Figura 10(A):* Región entre $y = f(x)$ y el eje x, rotada respecto al eje x.
  – Sección vertical transversal: una circunferencia de radio $R = f(x)$ y área $\pi R^2 = \pi f(x)^2$:

$$V = \pi \int_a^b R^2\, dx = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

- *Figura 10(B):* Región limitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, rotada respecto al eje x.
  – Sección vertical transversal: una corona circular de radio exterior $R_{\text{ext}} = f(x)$ y radio interior $R_{\text{int}} = g(x)$:

$$V = \pi \int_a^b (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)\, dx = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx$$

- Al rotar respecto a una recta horizontal $y = c$, modif que los radios de manera apropiada:
  – *Figura 10(C):* $c \geq f(x) \geq g(x)$:

$$R_{\text{ext}} = c - g(x) \qquad R_{\text{int}} = c - f(x)$$

  – *Figura 10(D):* $f(x) \geq g(x) \geq c$:

$$R_{\text{ext}} = f(x) - c \qquad R_{\text{int}} = g(x) - c$$

- Al rotar respecto a una recta vertical $x = c$, exprese R_{ext} y R_{int} como funciones de y e integre a lo largo del eje y.

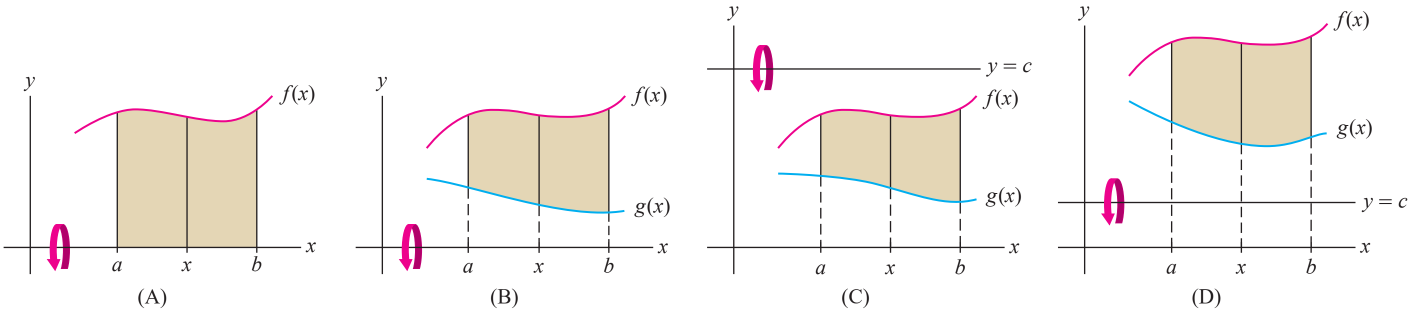


FIGURA 10

6.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes f guras es un sólido de revolución?

(a) Esfera **(b)** Pirámide **(c)** Cilindro **(d)** Cubo

2. ¿Verdadero o falso? Si la región por debajo de una única gráf ca se rota respecto al eje x, las secciones transversales del sólido, perpendiculares al eje x, son discos circulares.

3. ¿Verdadero o falso? Si la región limitada por dos gráf cas se rota respecto al eje x, las secciones transversales del sólido, perpendiculares al eje x, son discos circulares.

4. ¿Cuál de las siguientes integrales expresa el volumen obtenido al rotar el área limitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en $[a, b]$ respecto al eje x? [Suponga que $f(x) \geq g(x) \geq 0$.]

(a) $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx$

(b) $\pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx$

Problemas

En los problemas 1-4, (a) dibuje el cuerpo sólido obtenido por revolución de la región por debajo de la gráf ca de $f(x)$ respecto al eje x en el intervalo dado, (b) describa la sección transversal perpendicular al eje x, localizada en x, y (c) calcule el volumen del sólido.

1. $f(x) = x + 1, \quad [0, 3]$

2. $f(x) = x^2, \quad [1, 3]$

3. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad [1, 4]$

4. $f(x) = x^{-1}, \quad [1, 4]$

En los problemas 5-12, halle el volumen de revolución respecto al eje x para la función e intervalo dados.

5. $f(x) = x^2 - 3x, \quad [0, 3]$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad [1, 4]$

7. $f(x) = x^{5/3}, \quad [1, 8]$

8. $f(x) = 4 - x^2, \quad [0, 2]$

9. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \quad [1, 3]$

10. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}, \quad [1, 3]$

11. $f(x) = \csc x, \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

12. $f(x) = \sqrt{\cos x \operatorname{sen} x}, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

En los problemas 13 y 14, R es la región sombreada en la f gura 11.

13. ¿Cuál de los integrandos (i)-(iv) se usa en el cálculo del volumen obtenido mediante rotación de R respecto a $y = -2$?

(i) $(f(x)^2 + 2^2) - (g(x)^2 + 2^2)$

(ii) $(f(x) + 2)^2 - (g(x) + 2)^2$

(iii) $(f(x)^2 - 2^2) - (g(x)^2 - 2^2)$

(iv) $(f(x) - 2)^2 - (g(x) - 2)^2$

14. ¿Cuál de los integrandos (i)-(iv) se usa en el cálculo del volumen obtenido mediante rotación de R respecto a $y = 9$?

(i) $(9 + f(x))^2 - (9 + g(x))^2$

(ii) $(9 + g(x))^2 - (9 + f(x))^2$

(iii) $(9 - f(x))^2 - (9 - g(x))^2$

(iv) $(9 - g(x))^2 - (9 - f(x))^2$

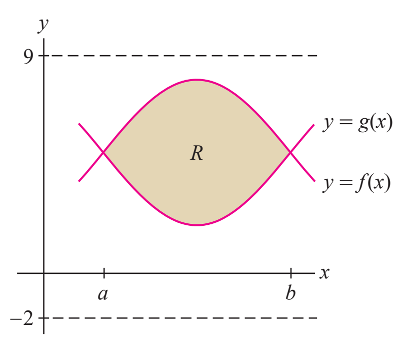


FIGURA 11

En los problemas 15-20, (a) dibuje la región limitada por las curvas, (b) describa la sección transversal, perpendicular al eje x, localizada en x y (c) halle el volumen del sólido obtenido mediante rotación de la región, respecto al eje x.

15. $y = x^2 + 2, \quad y = 10 - x^2$

16. $y = x^2, \quad y = 2x + 3$

17. $y = 16 - x, \quad y = 3x + 12, \quad x = -1$

18. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = \dfrac{5}{2} - x$

19. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\dfrac{\pi}{4}, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

20. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

En los problemas 21-24, halle el volumen del sólido de revolución respecto al eje y de la región limitada por las gráf cas sobre el intervalo dado.

21. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0; \quad 1 \le y \le 4$

22. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \quad x = 0; \quad 0 \le y \le \pi$

23. $x = y^2, \quad x = \sqrt{y}$

24. $x = 4 - y, \quad x = 16 - y^2$

25. La rotación respecto al eje y de la región de la f gura 12 da lugar a un cuerpo sólido con dos tipos diferentes de secciones transversales. Calcule el volumen de este cuerpo como una suma de dos integrales, una para $-12 \le y \le 4$ y otra para $4 \le y \le 12$.

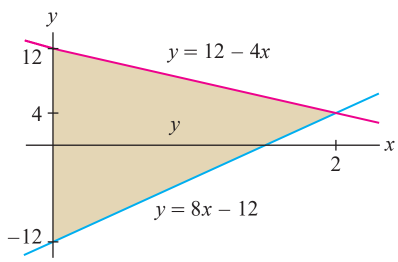


FIGURA 12

26. Sea R la región limitada por $y = x^2 + 2$, $y = (x - 2)^2$ y los ejes $x = 0$ e $y = 0$. Calcule el volumen V de revolución de R respecto al eje x. *Indicación:* exprese V como una suma de dos integrales.

En los problemas 27-32, halle el volumen de revolución de la región A de la f gura 13, respecto al eje facilitado.

27. eje x **28.** $y = -2$ **29.** $y = 2$

30. eje y **31.** $x = -3$ **32.** $x = 2$

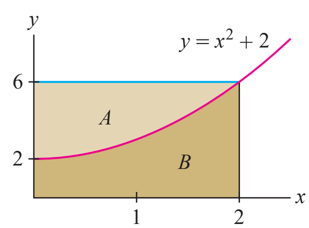


FIGURA 13

En los problemas 33-38, halle el volumen de revolución respecto al eje facilitado de la región B de la f gura 13.

33. eje x **34.** $y = -2$

35. $y = 6$ **36.** eje y

Indicación para el problema 36: exprese el volumen como una suma de dos integrales respecto a y, o utilice el problema 30.

37. $x = 2$ **38.** $x = -3$

En los problemas 39-52, halle el volumen de revolución, respecto al eje facilitado, de la región limitada por las gráf cas.

39. $y = x^2, \quad y = 12 - x, \quad x = 0,$ respecto a $y = -2$

40. $y = x^2, \quad y = 12 - x, \quad x = 0,$ respecto a $y = 15$

41. $y = 16 - 2x, \quad y = 6, \quad x = 0,$ respecto al eje x

42. $y = 32 - 2x, \quad y = 2 + 4x, \quad x = 0,$ respecto al eje y

43. $y = \sec x, \quad y = 1 + \dfrac{3}{\pi}x,$ respecto al eje x

44. $x = 2, \quad x = 3, \quad y = 16 - x^4, \quad y = 0,$ respecto al eje y

45. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = x,$ respecto a $x = -2$

46. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = x,$ respecto a $y = 4$

47. $y = x^3, \quad y = x^{1/3},$ para $x \ge 0,$ respecto al eje y

48. $y = x^2, \quad y = x^{1/2},$ respecto a $x = -2$

49. $y = \dfrac{9}{x^2}, \quad y = 10 - x^2, \quad x \ge 0,$ respecto a $y = 12$

50. $y = \dfrac{9}{x^2}, \quad y = 10 - x^2, \quad x \ge 0,$ respecto a $x = -1$

51. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = \dfrac{5}{2} - x,$ respecto al eje y

52. $y^2 = 4x, \quad y = x,$ respecto a $y = 8$

53. El cuenco de la f gura 14(A) tiene 21 cm de altura y se ha obtenido mediante la rotación indicada de la curva de la f gura 14(B). Estime la capacidad volumétrica del cuenco como la media de las aproximaciones a la integral basadas en el extremo superior e inferior con $N = 7$.

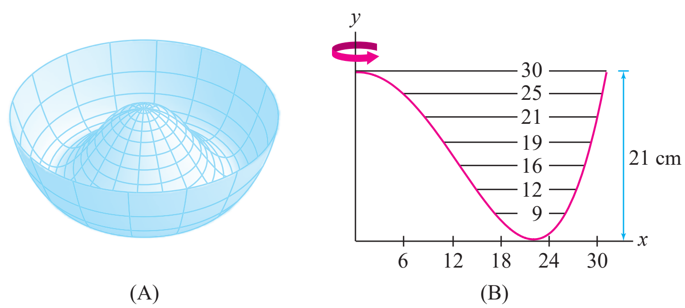


FIGURA 14

54. Considere el volumen V de revolución respecto a la recta $y = -3$ de la región limitada por las gráf cas de $f(x)$ y de $g(x)$ en $[0, 1]$. Use la siguiente tabla para construir la aproximación basada en el punto medio, y estime V.

x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$f(x)$	8	7	6	7	8
$g(x)$	2	3,5	4	3,5	2

55. Halle el volumen del cono obtenido por rotación, respecto al eje y, de la región por debajo del segmento que une $(0, h)$ y $(r, 0)$.

56. El **toro** (volumen tórico) de la f gura 15 se obtiene por rotación respecto al eje y de la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ (suponga que $a > b$). Pruebe que el volumen del toro es igual a $2\pi^2 ab^2$. *Indicación:* Evalúe la integral interpretándola como el área de una circunferencia.

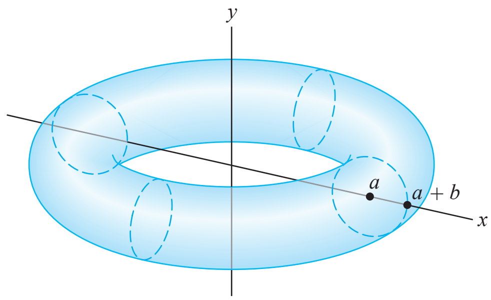


FIGURA 15 Toro obtenido por rotación respecto al eje y de una circunferencia.

57. GU Dibuje el hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y halle el volumen del sólido de revolución de éste respecto al eje x.

58. El cuerpo sólido que se genera por rotación respecto al eje x de la región comprendida entre las ramas de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ se llama un **hiperboloide** (f gura 16). Halle el volumen del hiperboloide para $-a \le x \le a$.

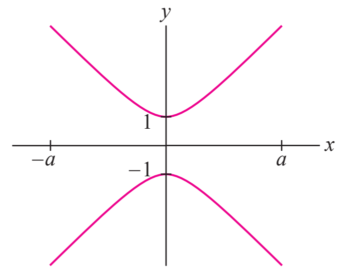


FIGURA 16 La hipérbola de ecuación $y^2 - x^2 = 1$.

59. Se puede obtener una "cuenta" o "abalorio" quitando un cilindro de radio r del centro de una esfera de radio R (f gura 17). Halle el volumen de la cuenta con $r = 1$ y $R = 2$.

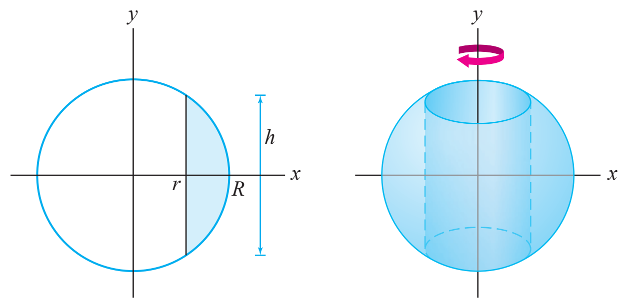


FIGURA 17 Una cuenta es una esfera a la que se le ha quitado un cilindro.

Problemas avanzados

60. Halle el volumen V de la cuenta (f gura 17) en términos de r y R. A continuación, muestre que $V = \frac{\pi}{6}h^3$, donde h es la altura de la cuenta. Esta fórmula tiene una consecuencia sorprendente: como V se puede expresar, únicamente, en términos de h, dos cuentas de altura 1 cm, una formada a partir de una esfera del tamaño de una naranja y la otra formada a partir de una esfera del tamaño de la Tierra ¡tendrían el mismo volumen! Explique, intuitivamente, cómo puede ser posible esta situación.

61. El sólido que se genera por rotación, respecto al eje x, de la elipse de ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ se denomina **elipsoide**. Pruebe que el volumen del elipsoide es $\frac{4}{3}\pi ab^2$. Si la elipse se rotara respecto al eje y, ¿cuál sería entonces el volumen?

62. La curva $y = f(x)$ que se encuentra representada en la f gura 18, llamada **tractriz**, cumple la siguiente propiedad: la recta tangente en cualquier punto de la curva (x, y) tiene pendiente igual a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Sea R la región sombreada por debajo de la gráf ca de la f gura 18 para $0 \le x \le a$. Calcule el volumen V del sólido obtenido por revolución respecto al eje x de R en términos de la constante $c = f(a)$. *Indicación:* Use la sustitución $u = f(x)$ para demostrar que:

$$V = \pi \int_c^1 u\sqrt{1 - u^2}\, du$$

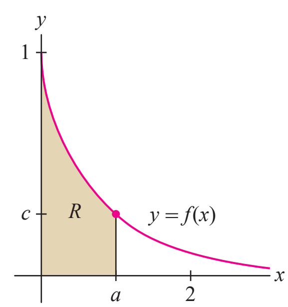


FIGURA 18 El tractriz.

63. Verif que la fórmula:

$$\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2)\, dx = \frac{1}{6}(x_1 - x_2)^3 \tag{3}$$

A continuación pruebe que el volumen V del sólido que se obtiene por rotación, respecto al eje x, de la región sombreada en la f gura 19 es $V = \frac{\pi}{6}BH^2$, donde B y H se representan en la f gura. *Indicación:* Sean x_1 y x_2 las raíces de $f(x) = ax + b - (mx + c)^2$, donde $x_1 < x_2$. Pruebe que:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

y a continuación use la ec. (3).

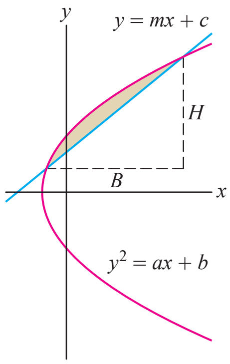


FIGURA 19 La recta $y = mx + c$ corta la parábola $y^2 = ax + b$ en dos puntos por encima del eje x.

64. Sea R la región del interior de la circunferencia unidad por encima de la intersección con la recta $y = mx + b$ (f gura 20). Suponga que los puntos donde la recta corta la circunferencia se encuentran por encima del eje x. Use el método del ejercicio 63 para probar que el volumen V del sólido obtenido mediante rotación de R respecto al eje x es $V = \frac{\pi}{6}hd^2$, donde h y d se representan en la f gura.

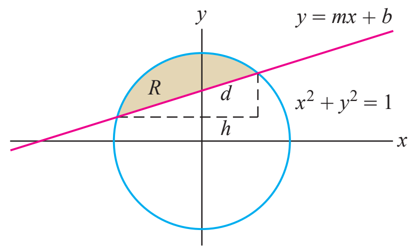


FIGURA 20

6.4 El método de las capas cilíndricas

En las dos secciones anteriores, hemos calculado volúmenes por integración del área de las secciones transversales. El **método de las capas**, basado en capas cilíndricas, resulta más apropiado en algunos casos.

Considere una capa cilíndrica (f gura 1) de altura h, radio externo R y radio interno r. Como la capa se obtiene quitando un cilindro de radio r al cilindro mayor de radio R, el volumen de ésta es:

$$\pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h(R + r)(R - r) = \pi h(R + r)\Delta r$$

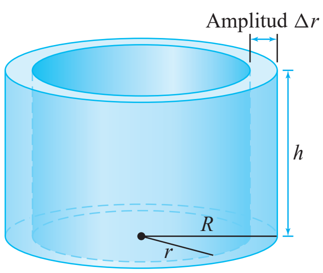


FIGURA 1 El volumen de la capa cilíndrica es aproximadamente

$2\pi R h \Delta r$

donde $\Delta r = R - r$.

donde $\Delta r = R - r$ es la amplitud de la capa. Si la capa es muy f na, entonces R y r son prácticamente iguales y se puede reemplazar $(R + r)$ por $2R$ para obtener:

$$\text{Volumen de la capa} \approx 2\pi R h \Delta r = 2\pi(\text{radio}) \times (\text{altura de la capa}) \times (\text{espesor}) \qquad \boxed{1}$$

A continuación, consideremos la rotación, respecto al eje y, de la región por debajo de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, tal y como se muestra en la f gura 2. El sólido resultante se puede dividir en f nas capas concéntricas. De forma más precisa, se divide $[a, b]$ en N subintervalos de longitud $\Delta x = (b - a)/N$ con extremos $x_0, x_1, \dots, x_N$. Al rotar, respecto al eje y, la banda que corresponde al área por encima del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se obtiene una f na capa cuyo volumen se denotará como V_i. El volumen total del sólido es igual a la suma $V = \sum_{i=1}^{N} V_i$.

El borde superior de la i-ésima capa, representada en la f gura 2, es curvado. Sin embargo, si Δx es pequeño, se puede aproximar esta f na capa por una capa cilíndrica (con borde plano) de altura $f(x_i)$.

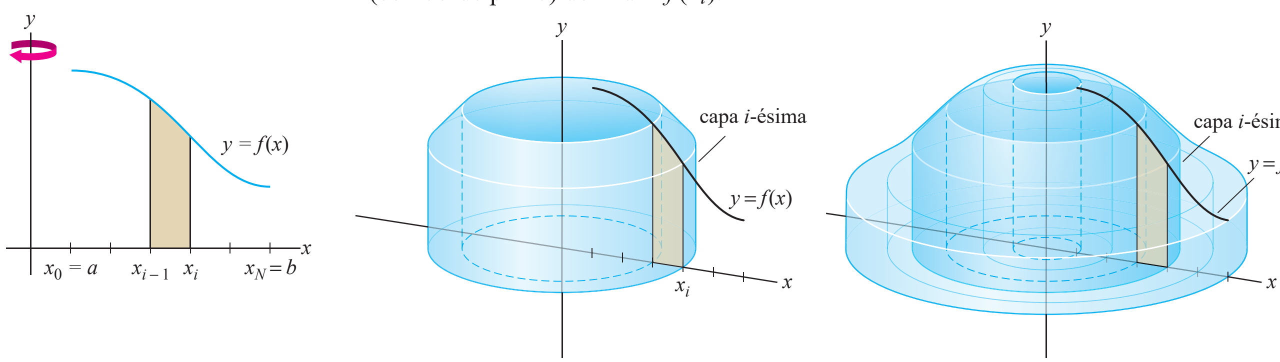


FIGURA 2 Cuando se rota respecto al eje x la banda sombreada, se obtiene una “f na capa”.

Entonces, según la ec. (1), se obtiene:

$$V_i \approx 2\pi x_i f(x_i)\Delta x = 2\pi(\text{radio})(\text{altura de la capa})(\text{espesor})$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i \approx 2\pi \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i)\Delta x$$

El último sumatorio es el volumen de una aproximación cilíndrica que converge a V cuando $N \to \infty$ (f gura 3). Este sumatorio también es una aproximación, basada en el extremo superior, que converge a $2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$. Así se obtiene la ecuación ec. (2) para el volumen del sólido.

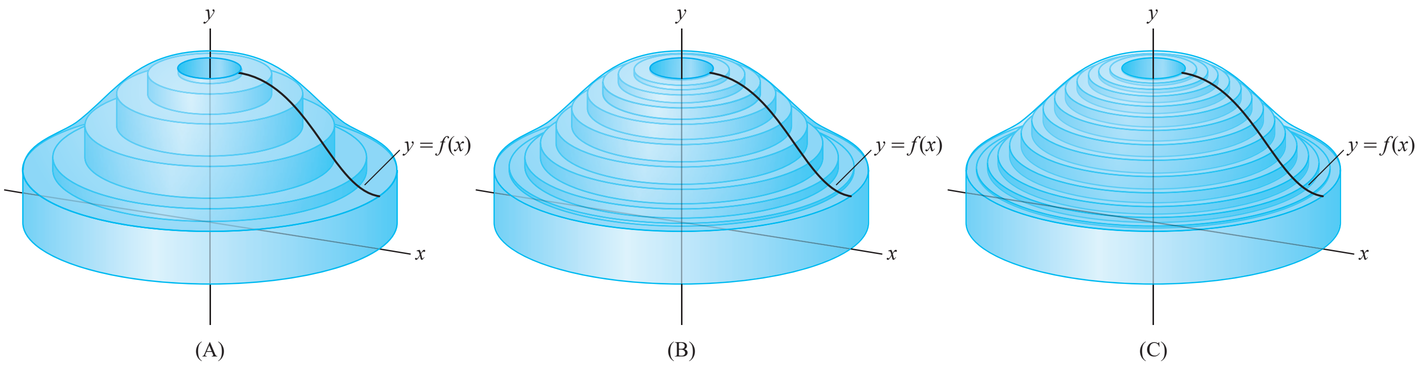


FIGURA 3 Aproximaciones por capas cilíndricas, cuando $N \to \infty$.

Nota: en el método de las capas, se integra respecto a x pero la región se rota respecto al eje y.

Volumen de revolución: el método de las capas El volumen del sólido de revolución *respecto al eje y* de la región por debajo de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es:

$$V = 2\pi \int_a^b (\text{radio})(\text{altura de la capa})\,dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx \qquad \boxed{2}$$

■ **EJEMPLO 1** Halle el volumen V del sólido de revolución, respecto al eje y, de la región por debajo de la gráf ca de $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $[0, 1]$.

Solución El sólido se representa en la f gura 4. Según la ec. (2):

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3)\,dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{30}\pi \qquad ■$$

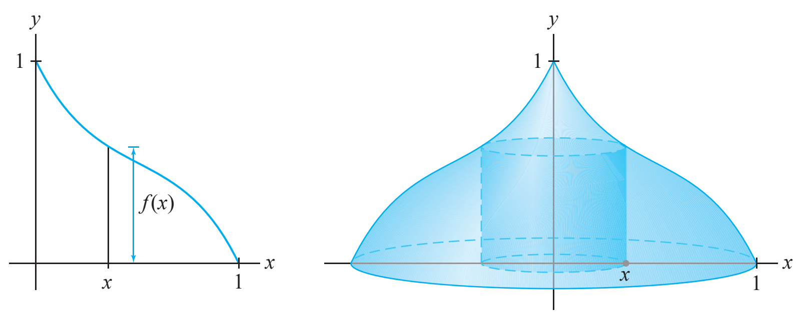


FIGURA 4 La gráf ca de $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 2x^3$ rotada respecto al eje y.

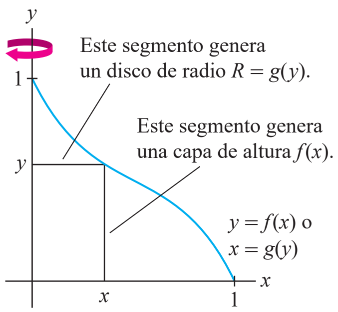


FIGURA 5 Para la rotación, respecto al eje y, el método de las capas utiliza $y = f(x)$, pero el método del disco requiere la función inversa $x = g(y)$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Capas frente a discos y coronas circulares Algunos volúmenes se pueden calcular indistintamente por el método de las capas o por el método de los discos o de las coronas circulares, pero en el ejemplo 1, el método de las capas resulta más sencillo. Para usar el método de los discos, se necesita saber el radio del disco generado a la altura y, porque se está rotando respecto al eje y (figura 5). Esto requeriría determinar la inversa $g(y) = f^{-1}(y)$. En general, use el método de las capas cuando determinar la altura de la capa (la cual es *paralela* al eje de rotación), sea más sencillo que hallar el radio del disco (el cual es *perpendicular* al eje de rotación). Use el método del disco si hallar el radio del disco es más sencillo.

Cuando se rota la región entre las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumpliendo $f(x) \geq g(x)$, el segmento vertical en la posición x genera una capa cilíndrica de radio x y altura $f(x) - g(x)$ (figura 6). Por tanto, el volumen es:

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b (\text{radio})(\text{Altura de la capa})\, dx = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx} \qquad \boxed{3}$$

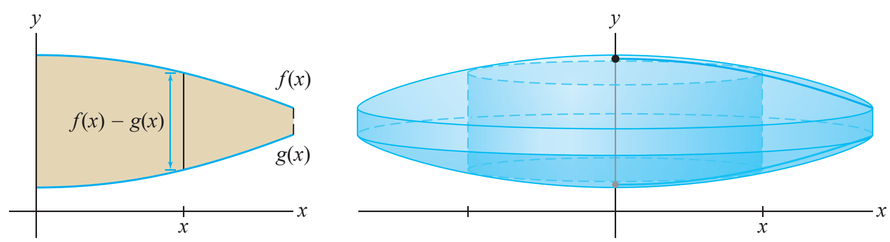


FIGURA 6 El segmento vertical en la posición x genera una capa de radio x y altura $f(x) - g(x)$.

■ **EJEMPLO 2 Región entre dos curvas** Halle el volumen V obtenido por revolución respecto al eje y de la región limitada por las gráficas de $f(x) = x(5 - x)$ y $g(x) = 8 - x(5 - x)$.

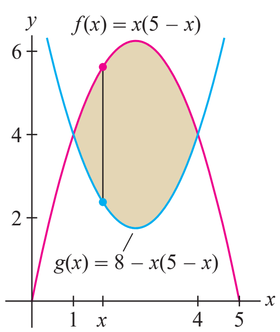


FIGURA 7

Solución En primer lugar, halle los puntos de intersección resolviendo la ecuación $x(5 - x) = 8 - x(5 - x)$. Se obtiene $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) = 0$, y por tanto, las curvas se cortan en $x = 1$ y $x = 4$. Dibujando las gráficas (figura 7), se observa que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[1, 4]$ y por tanto:

$$\text{Altura de la capa} = f(x) - g(x) = x(5 - x) - (8 - x(5 - x)) = 10x - 2x^2 - 8$$

$$V = 2\pi \int_1^4 (\text{radio})(\text{altura de la capa})\, dx = 2\pi \int_1^4 x(10x - 2x^2 - 8)\, dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 4x^2\right)\bigg|_1^4 = 2\pi\left(\frac{64}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right)\right) = 45\pi \qquad ■$$

El razonamiento empleado en el ejemplo 3 muestra que si se rota la región por debajo de $y = f(x)$ en $[a, b]$ respecto a la recta vertical $x = c$, entonces el volumen es:

$$V = 2\pi \int_a^b (x - c) f(x)\, dx \qquad \text{si } c \leq a$$

$$V = 2\pi \int_a^b (c - x) f(x)\, dx \qquad \text{si } c \geq b$$

■ **EJEMPLO 3 Rotación respecto a un eje vertical** Use el método de las capas, para calcular el volumen V obtenido por rotación, respecto a $x = -3$, de la región por debajo de la gráfica de $f(x) = x^{-1/2}$ en $[1, 4]$.

Solución Si se rotara esta región respecto al eje y (es decir, $x = 0$), se usaría la ec. (3). Para rotar respecto a $x = -3$, se debe tener en cuenta que el radio de revolución es, en esta situación, 3 unidades mayor.

La f gura 8 muestra que el radio de la capa es ahora $x - (-3) = x + 3$. La altura de la capa continúa siendo $f(x) = x^{-1/2}$. Por tanto:

$$V = 2\pi \int_1^4 (\text{radio})(\text{altura de la capa})\, dx =$$

$$= 2\pi \int_1^4 (x+3)x^{-1/2}\, dx = 2\pi \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} \right) \Bigg|_1^4 = \frac{64\pi}{3}$$ ■

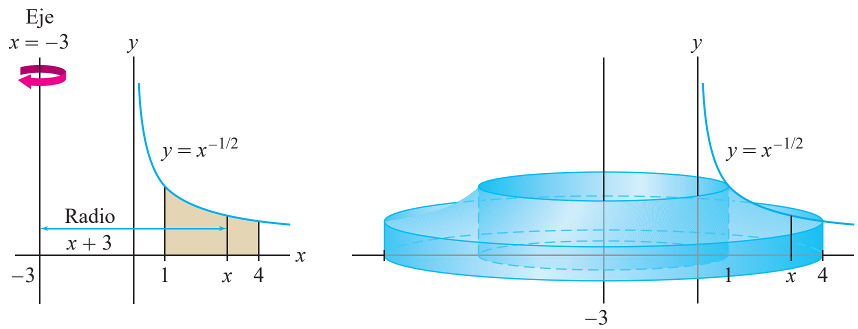


FIGURA 8 Rotación respecto a $x = -3$.

El método de las capas cilíndricas se puede aplicar a rotaciones respecto a ejes horizontales pero, en tal caso, la gráf ca debe ser descrita en la forma $x = g(y)$.

■ **EJEMPLO 4** **Rotación respecto al eje x** Utilice el método de las capas para calcular el volumen V obtenido por rotación, respecto al eje x, de la región por debajo de $y = 9 - x^2$ en $[0, 3]$.

Solución Cuando se rota respecto al eje x, las capas cilíndricas se generan mediante segmentos horizontales y el método de las capas da lugar a una integral respecto a y. Por tanto, se debe resolver $y = 9 - x^2$ en x para obtener que $x = \sqrt{9 - y}$.

El segmento $\overline{AB}$ en la f gura 9 genera una capa cilíndrica de radio y y altura $\sqrt{9 - y}$ (se usa el término “altura” aunque la capa sea horizontal). Utilizando la sustitución $u = 9 - y$, $du = -dy$ en la integral resultante, se obtiene:

RECORDATORIO *Después de haber realizado la sustitución $u = 9 - y$, se deben modificar los límites de integración. Como $u(0) = 9$ y $u(9) = 0$, se cambia $\int_0^9$ por $\int_9^0$.*

$$V = 2\pi \int_0^9 (\text{radio})(\text{altura de la capa})\, dy = 2\pi \int_0^9 y\sqrt{9 - y}\, dy = -2\pi \int_9^0 (9 - u)\sqrt{u}\, du =$$

$$= 2\pi \int_0^9 (9u^{1/2} - u^{3/2})\, du = 2\pi \left(6u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} \right) \Bigg|_0^9 = \frac{648}{5}\pi$$ ■

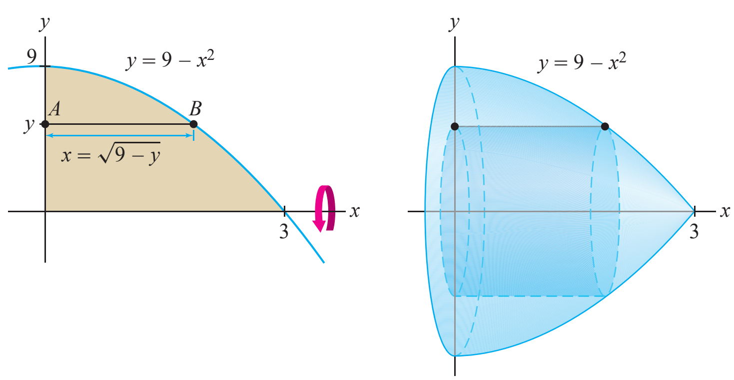


FIGURA 9 Capa generada por un segmento horizontal de la región por debajo de la gráf ca de $y = 9 - x^2$.

6.4 RESUMEN

- *Método de las capas* Cuando se rota la región comprendida entre dos gráf cas respecto a un eje, los segmentos *paralelos* al eje generan capas cilíndricas [f gura 10(A)]. El volumen V del sólido de revolución es la integral de las áreas de estas capas:

$$\text{Área de la capa} = 2\pi(\text{radio})(\text{altura de la capa})$$

- Dibuje las gráf cas para visualizar las capas.
- *Figura 10(B):* Región entre $y = f(x)$ (siendo $f(x) \geq 0$) y el eje y, rotada respecto al eje y:

$$V = 2\pi \int_a^b (\text{radio})(\text{altura de la capa})\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

- *Figura 10(C):* Región entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ (siendo $f(x) \geq g(x) \geq 0$), rotada respecto al eje y:

$$V = 2\pi \int_a^b (\text{radio})(\text{altura de la capa})\, dx = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx$$

- Rotación respecto a un eje vertical $x = c$.
  - *Figura 10(D):* Para $c \leq a$, el radio de la capa es $(x - c)$:

$$V = 2\pi \int_a^b (x - c) f(x)\, dx$$

  - *Figura 10(E):* Para $c \geq a$, el radio de la capa es $(c - x)$:

$$V = 2\pi \int_a^b (c - x) f(x)\, dx$$

- Utilización del método de las capas con una rotación respecto al eje x: exprese la gráf ca como $x = g(y)$:

$$V = 2\pi \int_c^d (\text{radio})(\text{altura de la capa})\, dy = 2\pi \int_c^d y g(y)\, dy$$

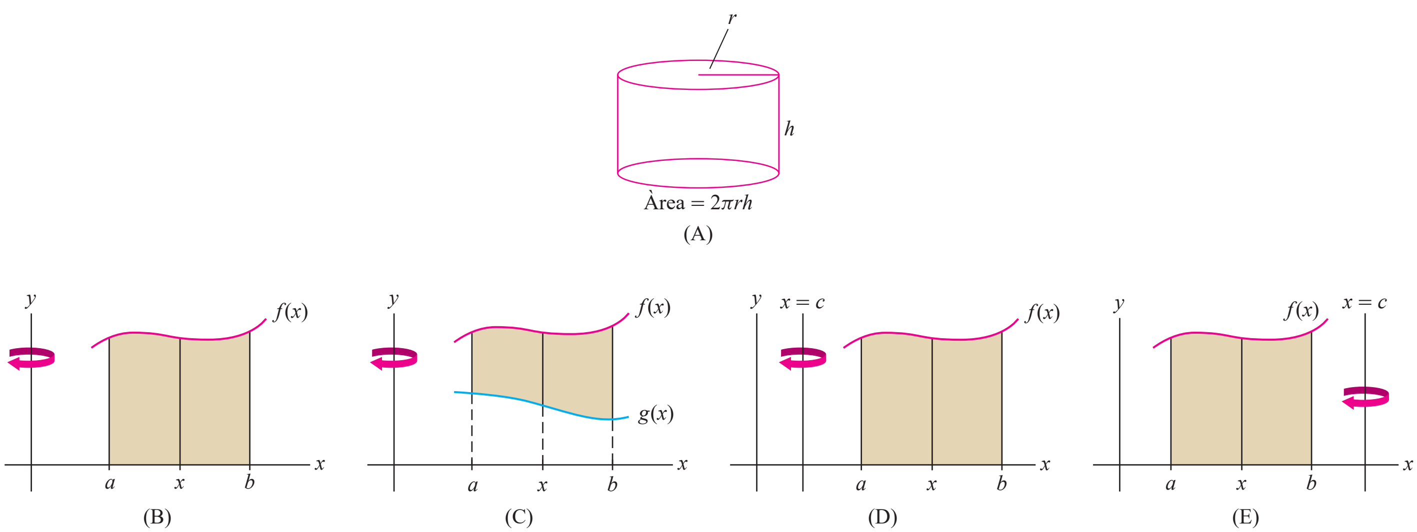


FIGURA 10

6.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Considere la región $\mathcal{R}$ por debajo de la gráf ca de la función constante $f(x) = h$, en el intervalo $[0, r]$. Obtenga la altura y el radio del cilindro que se genera cuando $\mathcal{R}$ se rota respecto al:

(a) eje x **(b)** eje y

2. Sea V el volumen de un sólido de revolución, respecto al eje y.

(a) El cálculo de V por el método de las capas, ¿da lugar a una integral respecto a x o a y?

(b) El cálculo de V por el método de los discos o el de las coronas circulares, ¿da lugar a una integral respecto a x o a y?

Problemas

En los problemas 1-6, dibuje el cuerpo sólido que se obtiene por rotación, respecto al eje y, de la región por debajo de la gráf ca de la función en el intervalo dado, y halle su volumen.

1. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$ **2.** $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

3. $f(x) = x^{-1}$, $[1, 3]$ **4.** $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 2]$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $[0, 3]$ **6.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^3}}$, $[1, 4]$

En los problemas 7-12, utilice el método de las capas para calcular el volumen obtenido por rotación, respecto al eje y, de la región limitada por las gráf cas indicadas.

7. $y = 3x - 2$, $y = 6 - x$, $x = 0$

8. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

9. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $x = 0$, para $x \ge 0$

10. $y = 8 - x^3$, $y = 8 - 4x$, para $x \ge 0$

11. $y = (x^2 + 1)^{-2}$, $y = 2 - (x^2 + 1)^{-2}$, $x = 2$

12. $y = 1 - |x - 1|$, $y = 0$

En los problemas 13 y 14, use un programa de representación gráf ca para hallar numéricamente los puntos de intersección de las curvas. A continuación, halle el volumen de revolución, respecto al eje y, de la región limitada que se indica.

13. GU $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $x \ge 0$

14. GU $y = 1 - x^4$, $y = x$, $x \ge 0$

En los problemas 15-20, dibuje el sólido de revolución de la región por debajo de la gráf ca de f(x), respecto al eje e intervalo indicados. A continuación, calcule su volumen por el método de las capas.

15. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$, respecto a $x = 2$

16. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$, respecto a $x = -2$

17. $f(x) = x^{-4}$, $[-3, -1]$, respecto a $x = 4$

18. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $[0, 2]$, respecto a $x = 0$

19. $f(x) = a - x$ con $a > 0$, $[0, a]$, respecto a $x = -1$

20. $f(x) = 1 - x^2$, $[-1, 1]$, $x = c$ con $c > 1$

En los problemas 21-26, dibuje la región limitada y use el método de las capas para calcular el volumen de revolución, respecto al eje x.

21. $x = y$, $y = 0$, $x = 1$

22. $x = \frac{1}{4}y + 1$, $x = 3 - \frac{1}{4}y$, $y = 0$

23. $x = y(4 - y)$, $y = 0$

24. $x = y(4 - y)$, $x = (y - 2)^2$

25. $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$

26. $y = x^{1/3} - 2$, $y = 0$, $x = 27$

27. Use tanto el método de las capas como el método de los discos, para calcular el volumen de revolución de la región por debajo de la gráf ca de $f(x) = 8 - x^3$ para $0 \le x \le 2$, respecto al:

(a) eje x **(b)** eje y

28. Dibuje el sólido de revolución, respecto al eje y, de la región por debajo de la gráf ca de la función constante $f(x) = c$ (donde $c > 0$) para $0 \le x \le r$.

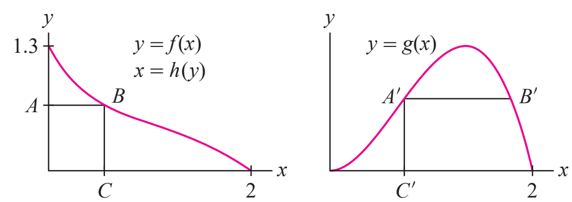
(a) Halle el volumen sin utilizar integración.

(b) Use el método de las capas para calcular el volumen.

29. La gráf ca de la f gura 11(A) se puede describir como $y = f(x)$ o bien como $x = h(y)$, siendo h la inversa de f. Sea V el volumen de revolución, respecto al eje y, de la región por debajo de la gráf ca.

(a) Describa las f guras que se generan al rotar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respecto al eje y.

(b) Enuncie las integrales que permiten calcular V tanto por el método de las capas, como por el de los discos.



(A) (B)

FIGURA 11

30. Sea W el volumen del sólido de revolución, respecto al eje y, de la región por debajo de la gráf ca de la f gura 11(B).

(a) Describa las f guras generadas por rotación, respecto al eje y, de los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$.

(b) Enuncie la integral que permite calcular W por el método de las capas.

(c) Explique la dif cultad existente en el cálculo de W por el método de la corona circular.

31. Sea R la región por debajo de la gráfica de $y = 9-x^2$ para $0 \le x \le 2$. Use el método de las capas para calcular el volumen de revolución de R, respecto al eje x, como una suma de dos integrales respecto a y. *Indicación:* al considerar las capas, se debe distinguir si $y \in [0, 5]$ o bien si $y \in [5, 9]$.

32. Sea R la región por debajo de la gráfica de $y = 4x^{-1}$ para $1 \le y \le 4$. Use el método de las capas para calcular el volumen de revolución de R, respecto al eje y, como una suma de dos integrales respecto a x.

En los problemas 33-38, use el método de las capas para halar el volumen obtenido por rotación de la región A en la figura 12, respecto al eje indicado.

33. eje y **34.** $x = -3$

35. $x = 2$ **36.** eje x

37. $y = -2$ **38.** $y = 6$

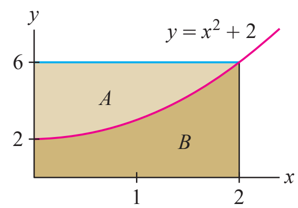


FIGURA 12

En los problemas 39-44, utilice el método más apropiado (método de los discos o método de las capas) para hallar el volumen de revolución de la región B en la figura 12, respecto al eje indicado.

39. eje y **40.** $x = -3$

41. $x = 2$ **42.** eje x

43. $y = -2$ **44.** $y = 8$

En los problemas 45-50, utilice el método más apropiado (método de los discos o método de las capas) para hallar el volumen de revolución indicado.

45. Región entre $x = y(5 - y)$ y $x = 0$, rotada respecto al eje y.

46. Región entre $x = y(5 - y)$ y $x = 0$, rotada respecto al eje x.

47. Región de la figura 13, rotada respecto al eje x.

48. Región de la figura 13, rotada respecto al eje y.

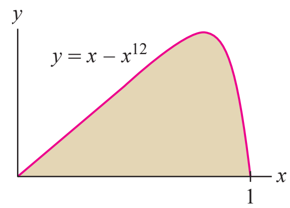


FIGURA 13

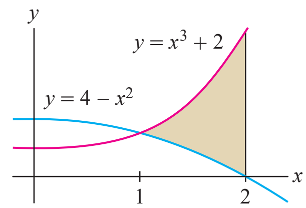


FIGURA 14

49. Región de la figura 14, rotada respecto a $x = 4$.

50. Región de la figura 14, rotada respecto a $y = -2$.

En los problemas 51-54, use el método de las capas para hallar el volumen de revolución indicado.

51. Una esfera de radio r.

52. La "cuenta" que se obtiene al quitar un cilindro de radio r de una esfera de radio R (compare con el ejercicio 59 de la sección 6.3).

53. El toro obtenido mediante rotación de la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ respecto al eje y, donde $a > b$ (compare con el ejercicio 56 en la sección 6.3). *Indicación:* evalúe la integral interpretando parte de ésta como el área de un círculo.

54. El "paraboloide" obtenido por rotación, respecto al eje y, de la región limitada por $y = x^2$ e $y = c$ ($c > 0$).

Problemas avanzados

55. El área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$. Use este resultado para obtener la fórmula del volumen V de una esfera de radio R según se indica a continuación.

(a) Demuestre que el volumen de una fina capa esférica de radio interno r y espesor Δr es aproximadamente $4\pi r^2 \Delta r$.

(b) Aproxime V descomponiendo la esfera de radio R en N capas esféricas de espesor $\Delta r = R/N$.

(c) Demuestre que la aproximación anterior es una suma de Riemann que converge a una integral. Evalúe la integral.

56. Pruebe que el volumen del sólido de revolución (un **elipsoide**) de la región R de la figura 15 respecto al eje y es $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

57. La curva con forma acampanada $y = f(x)$ de la figura 16 (conocida como campana de Gauss) cumple $dy/dx = -xy$. Use el método de las capas y la sustitución $u = f(x)$ para probar que el volumen del sólido de revolución de R, respecto al eje y, es $V = 2\pi(1 - c)$, donde $c = f(a)$. Observe que cuando $c \to 0$, la región R llega a ser infinita pero el volumen V tiende a 2π.

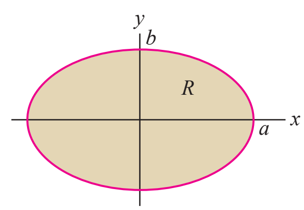


FIGURA 15 La elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

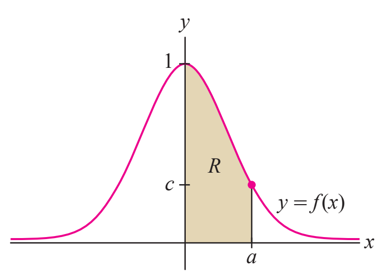


FIGURA 16 La campana de Gauss.

"Para aquellos que quieren alguna prueba de que los físicos son humanos, ésta se encuentra en la estupidez de las diferentes unidades que usan para medir la energía".

—Richard Feynman, The Character of Physical Law

6.5 Trabajo y energía

Todas las actividades físicas, desde subir a una montaña, hasta encender un ordenador, requieren un gasto de energía. Cuando se aplica una fuerza a un objeto para moverlo, la energía que se gasta de denomina **trabajo**. Cuando se aplica una fuerza *constante* para mover el objeto una distancia d en la dirección de la fuerza, se def ne el trabajo, W, como la "fuerza por distancia" (f gura 1):

$$\boxed{W = F \cdot d} \qquad \boxed{1}$$

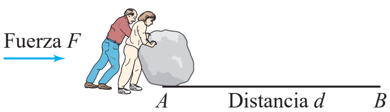


FIGURA 1 El trabajo necesario para mover el objeto desde A hasta B es $W = F \cdot d$.

La unidad de fuerza en el SI es el *newton* (abreviado como N), que se def ne como 1 kg · m/s^2. Tanto la energía como el trabajo, se miden en *julios* (J), igual a 1 N por 1 m. En el sistema anglosajón, la unidad de fuerza es la libra y tanto el trabajo como la energía se miden en pies por libra (ft-lb). Otra unidad de energía es la *caloría*. Un pie por libra es, aproximadamente, 0,738 J o bien 3,088 calorías.

Para familiarizarse con las unidades, se va a calcular el trabajo W necesario para elevar 3 m por encima del suelo una piedra de 2 kg. La fuerza de la gravedad sobre la piedra de masa m es igual a $-mg$, donde $g = 9,8$ m/s^2. Por tanto, la elevación de la piedra requiere una fuerza vertical hacia arriba igual a $F = mg$ y el trabajo realizado es:

$$W = \underbrace{(mg)h}_{F \cdot d} = 2\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 3\text{ m} = 58{,}8\text{ J}$$

El kilogramo es una unidad de masa, pero la libra es una unidad de fuerza. Por tanto, el factor g no aparece cuando se calcula el trabajo contra la gravedad en el sistema anglosajón. El trabajo necesario para elevar 3 pies una piedra de 2 libras es:

$$W = \underbrace{2\text{ lb} \cdot 3\text{ ft}}_{F \cdot d} = 6\text{ ft-lb}$$

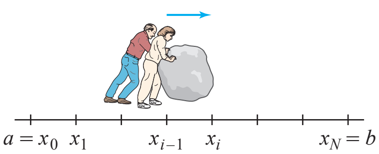


FIGURA 2 El trabajo necesario para desplazar un objeto desde x_{i-1} hasta x_i es, aproximadamente, $F(x_i)\Delta x$.

Se va a considerar la situación en la que la fuerza $F(x)$ varía cuando el objeto se desplaza de a a b sobre el eje x. En este caso, la ec. (1) no se puede aplicar directamente, pero se puede desglosar la tarea global en un gran número de pequeñas tareas para las que la ec. (1) facilite una buena aproximación. Divida el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de longitud $\Delta x = (b - a)/N$, tal y como se muestra en la f gura 2, y sea W_i el trabajo necesario para desplazar el objeto desde x_{i-1} hasta x_i. Si Δx es pequeño, entonces la fuerza $F(x)$ es prácticamente constante en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e igual a $F(x_i)$, por tanto $W_i \approx F(x_i)\Delta x$. Agregando todas las contribuciones, se obtiene:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i \approx \underbrace{\sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x}_{\text{Aproximación basada en el extremo superior}}$$

El último sumatorio, es una aproximación basada en el extremo superior, que converge a $\int_a^b F(x)\,dx$. Esto da lugar a la siguiente def nición:

DEFINICIÓN Trabajo El trabajo realizado al desplazar un objeto a lo largo del eje x, desde a hasta b, mediante la aplicación de una fuerza de magnitud $F(x)$ es:

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)\,dx} \qquad \boxed{2}$$

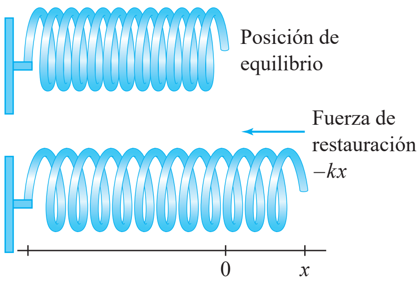


FIGURA 3 Ley de Hooke.

La ley de Hooke es debida al científico, inventor y arquitecto Robert Hooke (1635–1703), quien realizó importantes descubrimientos en física, astronomía, química y biología. Fue pionero en el uso del microscopio para el estudio de organismos. Desafortunadamente, Hooke estuvo involucrado en diferentes y amargas disputas con otros científicos, especialmente con su contemporáneo Isaac Newton. Newton enfureció cuando Hooke criticó su trabajo en óptica. Más tarde, Hooke explicó a Newton que creía que las leyes de Kepler se podrían obtener como una ley cuadrática inversa de la gravitación, pero Newton rehusó agradecer las contribuciones de Hooke en su obra maestra Principia. *Justo antes de su muerte, en 1955, Albert Einstein mencionó, sobre el comportamiento de Newton: "Esto, ¡ay!, es vanidad. Se encuentra en tantos científicos... Siempre me duele pensar que Galileo no agradeció el trabajo de Kepler".*

En la superficie de la Tierra, el trabajo contra la gravedad es igual a la fuerza mg por la distancia vertical a la que el objeto se eleva. No se realiza un trabajo contra la gravedad cuando un objeto se desplaza lateralmente.

Un ejemplo típico, corresponde a hallar el trabajo necesario para alargar un muelle. Suponga que el extremo libre del muelle se encuentra en equilibrio en la posición $x = 0$, es decir, donde no actúa ninguna fuerza (f gura 3). Según la **ley de Hooke**, cuando se alarga el muelle (o se comprime) hasta la posición x, éste ejerce una fuerza de restauración de magnitud $-kx$ en sentido opuesto, siendo k la **constante del muelle**. Si se quiere alargar el muelle aún más, se debe aplicar una fuerza $F(x) = kx$ para contrarrestar la fuerza ejercida por aquél.

■ **EJEMPLO 1 Ley de Hooke** Considere un muelle de constante $k = 400$ N/m. Halle el trabajo necesario para:

(a) Alargar el muelle 10 cm más allá de su posición de equilibrio.

(b) Si ya se encuentra comprimido 3 cm, comprimir el muelle 2 cm más.

Solución Se necesita una fuerza de $F(x) = 400x$ N para alargar el muelle (con x en metros). Observe que los centímetros se deben convertir a metros.

(a) El trabajo necesario para alargar el muelle 10 cm (0,1 m) más allá de su posición de equilibrio es:

$$W = \int_0^{0,1} 400x\,dx = 200x^2\Big|_0^{0,1} = 2\text{ J}$$

(b) Si el muelle se encuentra en la posición $x = -3$ cm, entonces el trabajo W necesario para comprimirlo, aún más, hasta $x = -5$ cm es:

$$W = \int_{-0,03}^{-0,05} 400x\,dx = 200x^2\Big|_{-0,03}^{-0,05} = 0,5 - 0,18 = 0,32\text{ J}$$

Observe que se integra desde punto inicial $x = -0,03$ hasta el f nal $x = -0,05$ (aunque, en este caso, el límite inferior de la integral sea superior al límite superior). ■

En los dos ejemplos siguientes no se desplaza un único objeto una distancia f jada, por lo que no se puede aplicar la ec. (2). En realidad, cada f na capa del objeto se va a desplazar una distancia diferente: el trabajo realizado se va a calcular "sumando" (es decir, *integrando*) el trabajo efectuado sobre cada una de estas f nas capas.

■ **EJEMPLO 2 Construcción de una columna de cemento** Calcule el trabajo (contra la gravedad) necesario para contruir una columna de cemento de altura 5 m y base cuadrada de lado 2 m. Suponga que la densidad del cemento es 1500 kg/m^3.

Solución Considere la columna como una pila de n f nas capas de amplitud $\Delta y = 5/n$. Cada capa se debe elevar y posicionar en la pila (f gura 4) pero el trabajo realizado en una capa concreta, depende de la altura a la que se eleve. En primer lugar, calcule la fuerza gravitacional sobre una f na capa de amplitud Δy:

Volumen de la capa	$=$ área $\times$ amplitud	$= 4\Delta y$ m^3
Masa de la capa	$=$ densidad $\times$ volumen	$= 1500 \cdot 4\Delta y$ kg
Fuerza sobre la capa	$= g \times$ masa	$= 9,8 \cdot 1500 \cdot 4\Delta y = 58\ 800\,\Delta y$ N

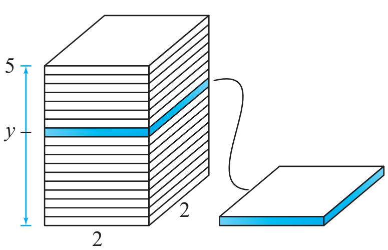


FIGURA 4 El trabajo total es la suma del trabajo realizado sobre cada capa de la columna.

El trabajo realizado para elevar esta capa hasta la altura y es igual a la fuerza por la distancia y, esto es $(58\ 800\Delta y)y$. Sea $L(y) = 58\ 800y$, entonces:

$$\boxed{\text{Trabajo de elevación de una capa hasta la altura } y \approx (58\ 800\Delta y)y = L(y)\Delta y}$$

Esto es sólo una aproximación (aunque muy buena si Δy es pequeño), porque la amplitud de la capa es diferente de cero y las partículas de cemento en la parte superior se han desplazado algo más que aquellas en la parte inferior de la columna. La capa i-ésima se desplaza hasta la altura y_i y, por tanto, el trabajo total efectuado es:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} L(y_i)\,\Delta y$$

Este sumatorio es una aproximación, en base al extremo superior, de la integral $\int_0^5 L(y)\,dy$. Cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$W = \int_0^5 L(y)\,dy = \int_0^5 58\ 800y\,dy = 58\ 800\frac{y^2}{2}\bigg|_0^5 = 735\ 000 \text{ J}$$ ■

En los ejemplos 2 y 3, el trabajo realizado sobre una fina capa se expresa como:

$$L(y)\Delta y$$

Si se considera la suma y se hace tender Δy a cero, se obtiene la integral de $L(y)$. Simbólicamente, Δy "da lugar" al dy de la integral. Observe que:

$$L(y) = g \times \text{densidad} \times A(y) \times$$
$$\times \text{ (distancia vertical elevada)}$$

donde $A(y)$ es el área de la sección transversal.

■ **EJEMPLO 3 Bombeo de agua de un depósito** Se llena de agua un depósito esférico de radio R metros. Calcule el trabajo W realizado (contra la gravedad) para bombear el agua a través de un pequeño agujero en la parte superior del depósito. La densidad del agua es 1000 kg/m^3.

Solución El primer paso, tal y como se hizo en el ejemplo previo, es realizar el trabajo efectuado contra la gravedad, sobre una f na capa de agua de amplitud Δy. Se sitúa el origen de coordenadas en el centro de la esfera, pues así se obtiene una fórmula más simple para el radio r de la sección transversal a altura y (f gura 5).

Etapa 1. **Calcule el trabajo realizado sobre una capa**

La f gura 5 muestra que la sección transversal a altura y es una circunferencia de radio $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ y área $A(y) = \pi r^2 = \pi(R^2 - y^2)$. El volumen de una capa f na es $A(y)\Delta y$ y, para elevarla, se debe ejercer una fuerza contra la gravedad igual a:

$$\text{Fuerza sobre la capa} = g \times \overbrace{\text{densidad} \times A(y)\Delta y}^{\text{masa}} \approx (9{,}8)1000\pi(R^2 - y^2)\Delta y$$

Se debe elevar la capa una distancia vertical $R - y$ y, por tanto:

$$\boxed{\text{Trabajo sobre la capa} \approx \overbrace{9800\pi(R^2 - y^2)\Delta y}^{\text{Fuerza contra gravedad}} \times \overbrace{(R - y)}^{\text{Distancia vertical elevada}} = L(y)\Delta y}$$

donde $L(y) = 9800\pi(R^3 - R^2y - Ry^2 + y^3)$.

Etapa 2. **Calcule el trabajo total**

A continuación, divida la esfera en N capas y sea y_i la altura de la capa i-ésima. El trabajo realizado sobre la capa i-ésima es, aproximadamente, $L(y_i)\,\Delta y$ y, en consecuencia:

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} L(y_i)\,\Delta y$$

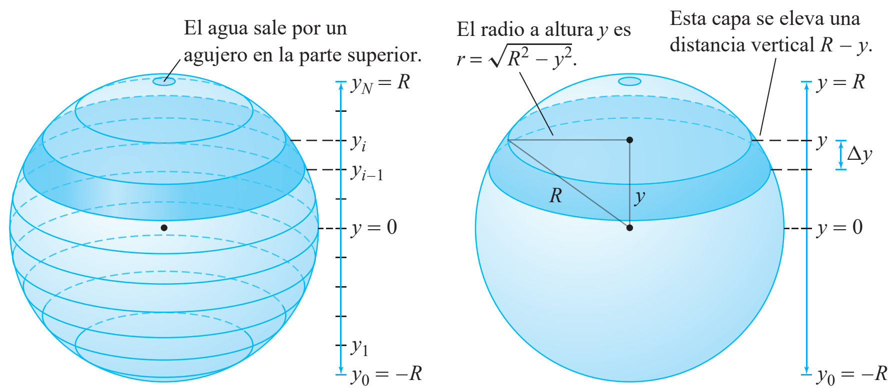


FIGURA 5 Se divide la esfera en N capas f nas.

Este sumatorio tiende a la integral de $L(y)$ cuando $N \to \infty$ (es decir, $\Delta y \to 0$) y:

$$W = \int_{-R}^{R} L(y)\,dy = 9800\pi \int_{-R}^{R} (R^3 - R^2 y - R y^2 + y^3)\,dy =$$
$$= 9800\pi \left(R^3 y - \frac{1}{2}R^2 y^2 - \frac{1}{3}R y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{39\,200\pi}{3} R^4 \text{ J}$$

Observe que los límites de la integral son $-R$ y R, pues la coordenada y en la esfera varía desde $-R$ hasta R. ■

Un litro de gasolina tiene un contenido energético de, aproximadamente, $3{,}4 \times 10^7$ julios. En el ejemplo previo, se muestra que el trabajo necesario para bombear agua de una esfera de radio $R = 5$ metros es:

$$W = \frac{39\,200\pi}{3} \cdot 5^4 \approx 2{,}6 \times 10^7 \text{ J}$$

o el contenido energético de, aproximadamente, tres cuartos de litro de gasolina.

6.5 RESUMEN

- Trabajo realizado para mover un objeto:

$$\text{Fuerza constante: } W = F \cdot d \qquad \text{Fuerza variable: } W = \int_a^b F(x)\,dx$$

- Ley de Hooke's: un muelle que se alarga en x unidades por encima de su posición de equilibrio, ejerce una fuerza de restitución de magnitud $-kx$. Se necesita una fuerza $F(x) = kx$ para alargar el muelle aún más.
- Para calcular el trabajo contra la gravedad, mediante descomposición de un objeto en N f nas capas de espesor Δy, exprese el trabajo realizado sobre una de las f nas capas como $L(y)\Delta y$, donde:

$$L(y) = g \times \text{densidad} \times A(y) \times (\text{distancia vertical de elevación})$$

El trabajo total realizado es $W = \int_a^b L(y)\,dy$.

6.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Por qué se necesita integrar para calcular el trabajo realizado al alargar un muelle?

2. ¿Por qué se necesita integrar para calcular el trabajo realizado al bombear agua de un tanque, pero no al calcular el trabajo realizado al elevar el tanque?

3. ¿Cuál de las siguientes cantidades representa el trabajo necesario para alargar un muelle (con constante de muelle k) una distancia x más allá de su posición de equilibrio: kx, $-kx$, $\frac{1}{2}mk^2$, $\frac{1}{2}kx^2$ o $\frac{1}{2}mx^2$?

Problemas

1. ¿Cuánto trabajo se realiza al elevar una masa de 4 kg a una altura de 16 m por encima del suelo?

2. ¿Cuánto trabajo se realiza al elevar una masa de 4 lb mass a una altura de 16 ft por encima del suelo?

En los problemas 3-6, calcule el trabajo (en julios) necesario para alargar (elongar) o comprimir un muelle, tal y como se indica, suponiendo que la constante del muelle sea $k = 800$ N/m.

3. Elongación desde la posición de equilibrio hasta 12 cm más allá de ésta.

4. Compresión desde la posición de equilibrio hasta 4 cm más allá de ésta.

5. Elongación desde 5 cm hasta 15 cm más allá de la posición de equilibrio.

6. Compresión de 4 cm más, si el muelle ya está comprimido 5 cm.

7. Si se necesita un trabajo de 5 J para alargar un muelle 10 cm más allá de su posición de equilibrio, ¿cuánto trabajo se necesitará para alargarlo 15 cm más allá de su posición de equilibrio?

8. Para crear imágenes de muestras a nivel molecular, los microscopios de fuerza atómica utilizan micro-voladizos de silicona que cumplen la ley de Hooke $F(x) = -kx$, donde x es la distancia a la que se desvía la punta (f gura 6). Suponga que se requiere 10^{-17} J de trabajo para desviar la punta una distancia de 10^{-8} m. Halle la desviación si se aplica sobre la punta una fuerza de 10^{-9} N.

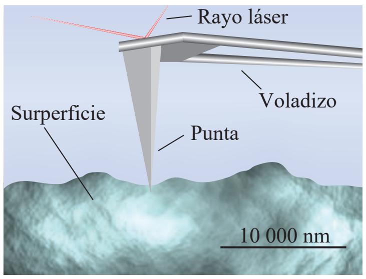


FIGURA 6

9. Un muelle cumple la siguiente ley de fuerza $F(x) = -kx^{1,1}$, siendo $k = 100$ N/m. Halle el trabajo necesario para alargar el muelle 0,3 m más allá de su posición de equilibrio.

10. Muestre que el etrabajo necesario para alargar un muelle desde una posición a hasta una posición b es $\frac{1}{2}k(b^2 - a^2)$, donde k es la constante del muelle. ¿Cómo interpreta el trabajo negativo que resulta cuando $|b| < |a|$?

En los problemas 11-14, use el método de los ejemplos 2 y 3 para calcular el trabajo contra la gravedad necesario para construir la estructura, en base a un material ligero de densidad 600 kg/m^3.

11. Caja de altura 3 m y base cuadrada de lado 2 m.

12. Columna cilíndrica de altura 4 m y radio 0,8 m.

13. Cono circular de altura 4 m y radio de la base 1,2 m.

14. Semiesfera de radio 0,8 m.

15. Construida alrededor de 2600 A.C., la Gran Pirámide de Giza en Egipto (f gura 7) tiene 146 m de alto y una base cuadrada de lado 230 m. Halle el trabajo (contra la gravedad) necesario para construir la pirámide si se estima que la densidad de la piedra es 2000 kg/m^3.

FIGURA 7 La Gran Pirámide de Giza, Egipto.

16. Calcule el trabajo (contra la gravedad) necesario para construir una caja de altura 3 m y base cuadrada de lado 2 m en base a un material de densidad variable, suponiendo que la densidad a altura y es $f(y) = 1000 - 100y$ kg/m^3.

En los problemas 17-22, calcule el trabajo (en julios) necesario para bombear toda el agua fuera del tanque. Las distancias son en metros y la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.

17. Tanque rectangular de la f gura 8; el agua sale de un pequeño agujero en la parte superior.

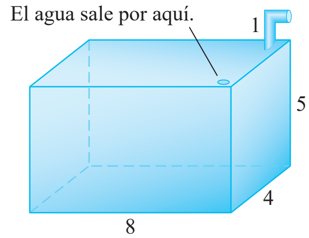


FIGURA 8

18. Tanque rectangular de la f gura 8; el agua sale por el caño.

19. Semiesfera de la f gura 9; el agua sale por el caño.

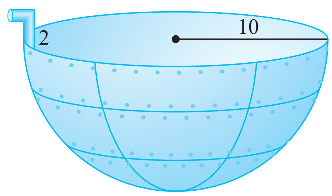


FIGURA 9

20. Tanque cónico de la f gura 10; el agua sale por el caño.

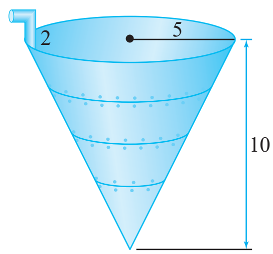


FIGURA 10

21. Cilindro horizontal de la f gura 11; el agua sale por un pequeño agujero en la parte superior. *Indicación:* Evalúe la integral interpretando parte de ésta como el área de un círculo.

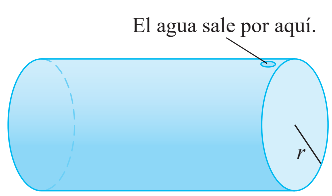


FIGURA 11

22. En la f gura 12; el agua sale derramándose por los lados.

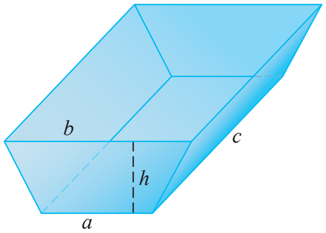


FIGURA 12

23. Halle el trabajo W necesario para vaciar el tanque de la f gura 8 a través del agujero de la parte superior, si el tanque está inicialmente medio lleno de agua.

24. Suponga que el tanque de la f gura 8 está lleno de agua y sea W el trabajo necesario para bombear la mitad del agua a través del agujero en la parte superior. ¿Espera que W sea igual al trabajo calculado en el ejercicio 23? Razone su respuesta y a continuación calcule W.

25. Suponga que el tanque de la f gura 10 esté lleno. Halle el trabajo necesario para bombear la mitad del agua. *Indicación:* En primer lugar, determine el nivel H para el que el agua que queda en el tanque sea igual a la mitad de la capacidad total de éste.

26. Suponga que el tanque de la f gura 10 esté lleno.

(a) Calcule el trabajo $F(y)$ necesario para bombear agua hasta que el nivel de ésta alcance la altura y.

(b) SAC Represente gráf camente $F(y)$.

(c) ¿Cuál es el signif cado de $F'(y)$ como tasa de cambio?

(d) SAC Si su objetivo es bombear todo el agua, ¿para qué nivel de agua y_0 habrá realizado ya la mitad del trabajo?

27. Calcule el trabajo necesario para elevar una cadena de 10 m por el lateral de un edif cio (f gura 13). Suponga que la cadena tiene una densidad de 8 kg/m. *Indicación:* Divida la cadena en N segmentos, estime el trabajo realizado sobre un segmento y calcule el límite cuando $N \to \infty$ como una integral.

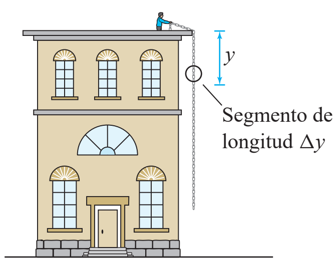


FIGURA 13 El segmento de la cadena, de longitud Δy y situado a y metros de la parte superior del edif cio, se eleva una distancia vertical y.

28. ¿Cuánto vale el trabajo realizado al elevar una cadena de 3 m por el lateral de un edif cio, si la cadena tiene una densidad de masa de 4 kg/m?

29. La masa de una cadena de 6 m es 18 kg. Halle el trabajo necesario para elevar la cadena por el lateral de un edif cio.

30. Una cadena de 10 m con densidad de masa igual 4 kg/m se encuentra inicialmente enroscada en el suelo. ¿Cuánto vale el trabajo realizado para elevar la cadena de tal manera que quede completamente extendida (y uno de sus extremos toque el suelo)?

31. ¿Cuánto vale el trabajo realizado para elevar una cadena de 12 m, que tiene densidad de masa 3 kg/m (y que se encuentra inicialmente enroscada en el suelo), de tal manera que su extremo superior quede 10 m por encima del suelo?

32. Una bola de demolición de 500 kg cuelga de un cable de 12 m y densidad 15 kg/m unido a una grúa. Calcule el trabajo realizado si la grúa eleva la bola, tirando del cable, desde el nivel del suelo hasta una altura de 12 m en el aire.

33. Calcule el trabajo necesario para elevar una cadena de 3 m, por el lateral de un edif cio, si la cadena tiene una densidad variable de $\rho(x) = x^2 - 3x + 10$ kg/m para $0 \le x \le 3$.

34. Una cadena de 3 m y densidad de masa lineal $\rho(x) = 2x(4 - x)$ kg/m está en el suelo. Calcule el trabajo necesario para elevar la cadena, de tal manera que su extremo inferior quede 2 m por encima del suelo.

Problemas 35-37: la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos objetos de masas m y M, separados por una distancia r, es GMm/r^2, *donde* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-1}}$.

35. Muestre que, si dos objetos de masas M y m están separados por una distancia r_1, entonces el trabajo necesario para aumentar la separación de éstos hasta una distancia r_2 es igual a $W = GMm(r_1^{-1} - r_2^{-1})$.

36. Utilice el resultado del ejercicio 35 para calcular el trabajo necesario para situar un satélite de 2000 kg en una órbita de 1200 km por encima de la superf cie de la Tierra. Suponga que la Tierra es una esfera de radio $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m y masa $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. Considere el satélite como una masa puntual.

37. Use el resultado del ejercicio 35 para calcular el trabajo necesario para desplazar un satélite de 1500 kg de una órbita a 1000 km por encima de la superf cie de la Tierra a otra a 1500 km por encima de la superf cie de la Tierra.

38. La presión P y volumen V del gas en un cilidro de longitud 0,8 m y radio 0,2 m, con un pistón móvil están relacionados mediante $PV^{1{,}4} = k$, donde k es una constante (f gura 14). Cuando el pistón está completamente extendido, la presión del gas es de 2000 kilo pascales (un kilo pascal es 10^3 newtons por metro cuadrado).

(a) Calcule k.

(b) La fuerza sobre el pistón es PA, donde A es el área del pistón. Calcule la fuerza como función de la longitud x de la columna de gas.

(c) Calcule el trabajo necesario para comprimir la columna de gas de 1,5 m a 1,2 m.

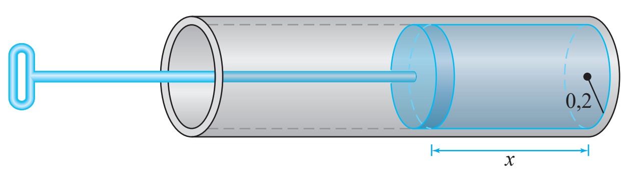


FIGURA 14 Gas en un cilindro con un pistón.

Problemas avanzados

39. Teorema del trabajo-energía Un objeto de masa m se desplaza desde x_1 hasta x_2, a lo largo del intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, debido a una fuerza $F(x)$ que actúa en la dirección del movimiento. Sean $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ la posición, la velocidad y la aceleración, respectivamente, en el instante t. La energía cinética del objecto es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

(a) Use la fórmula del cambio de variable, para demostrar que el trabajo realizado es igual a:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t))v(t)\,dt$$

(b) Utilice la segunda ley de Newton, $F(x(t)) = ma(t)$, para demostrar que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv(t)^2\right) = F(x(t))v(t)$$

(c) Use el TFC para demostrar el teorema del trabajo-energía: el cambio en la energía cinética, a lo largo del intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, es igual al trabajo realizado.

40. Una maqueta de tren de masa 0,5 kg se sitúa en el extremo de una pista eléctrica recta de 3 m. Suponga que una fuerza de $F(x) = (3x - x^2)$ N actúa sobre el tren a una distancia x a lo largo de la pista. Use el teorema del trabajo-energía (ejercicio 39) para determinar la velocidad del tren cuando llega al final de la pista.

41. ¿Con qué velocidad inicial v_0 se debe lanzar un cohete, de tal manera que alcance una altura máxima r por encima de la superficie de la Tierra? *Indicación:* Use los resultados de los ejercicios 35 y 39. Cuando el cohete alcanza su altura máxima, su E_c decrece de $\frac{1}{2}mv_0^2$ a cero.

42. ¿Con qué velocidad inicial se debe lanzar un cohete, de tal manera que alcance una altura máxima $r = 20$ km por encima de la superficie de la Tierra?

43. Calcule la **velocidad de escape,** la mínima velocidad inicial de un objeto para asegurar que continuará viajando en el espacio y que nunca volverá a caer sobre la Tierra (suponiendo que ninguna otra fuerza se aplique después del lanzamiento). *Indicación:* considere el límite cuando $r \to \infty$ en el problema 41.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Calcule el área de la región, en la figura 1(A), limitada por $y = 2 - x^2$ e $y = -2$.

2. Calcule el área de la región, en la figura 1(B), limitada por $y = 2 - x^2$ e $y = x$.

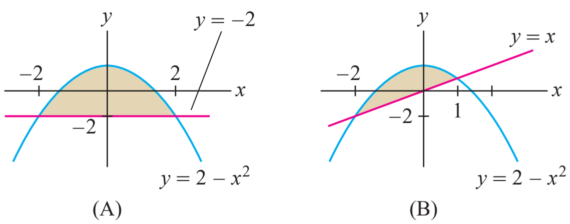


FIGURA 1

En los problemas 3-12, halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones.

3. $y = x^3 - 2x^2 + x, \quad y = x^2 - x$

4. $y = x^2 + 2x, \quad y = x^2 - 1, \quad h(x) = x^2 + x - 2$

5. $x = 4y, \quad x = 24 - 8y, \quad y = 0$

6. $x = y^2 - 9, \quad x = 15 - 2y$

7. $y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 4$

8. GU $x = \frac{1}{2}y, \quad x = y\sqrt{1 - y^2}, \quad 0 \le y \le 1$

9. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{5\pi}{4}$

10. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \pi$

11. $y = \sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right), \quad y = \sec^2\left(\frac{\pi x}{8}\right), \quad 0 \le x \le 1$

12. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad -1 \le x \le 1$

13. GU Use un programa de representación gráfica para localizar los puntos de intersección de $y = x^2$ e $y = \cos x$, y halle (aproximadamente) el área entre las dos curvas.

14. La figura 2 muestra un sólido cuya sección horizontal transversal a altura y es una circunferencia de radio $(1 + y)^{-2}$ para $0 \le y \le H$. Halle el volumen del sólido.

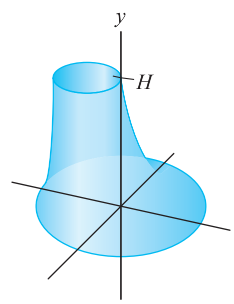


FIGURA 2

15. La base de un cierto sólido es la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ y sus secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos de altura 4. Halle su volumen.

16. La base de un cierto sólido es el triángulo formado por los ejes y la recta $2x + 3y = 12$, y el área de las secciones transversales perpendiculares al eje y es $A(y) = (y + 2)$. Halle su volumen.

17. Halle la masa total de una vara de longitud 1,2 m y densidad $\rho(x) = (1 + 2x + \frac{2}{9}x^3)$ kg/m.

18. Halle la tasa de flujo (en las unidades correctas) a través de una cañería de diámetro 6 cm, si la velocidad de las partículas de fluido que se encuentran a una distancia r del centro de la cañería es $v(r) = (3 - r)$ cm/s.

En los problemas 19-24, halle el valor medio de la función en el intervalo.

19. $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $[-1, 2]$

20. $f(x) = |x|$, $[-4, 4]$

21. $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 1)^{4/5}$, $[0, 4]$

22. $f(x) = |x^2 - 1|$, $[0, 4]$

23. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $[0, 3]$ *Indicación:* Aplique geometría plana para evaluar la integral.

24. $f(x) = x[x]$, $[0, 3]$, donde $[x]$ es la función parte entera de x.

25. Halle $\int_2^5 g(t)\,dt$, si el valor medio de $g(t)$ en $[2, 5]$ es 9.

26. El valor medio de $R(x)$ en $[0, x]$ es igual a x para todo x. Aplique el TFC para determinar $R(x)$.

27. Aplique el método de las coronas circulares para hallar el volumen de revolución respecto al eje x de la región de la f gura 3.

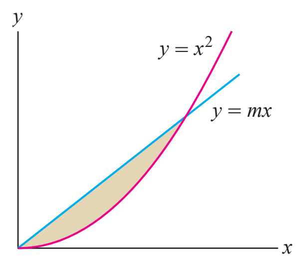


FIGURA 3

28. Aplique el método de las capas para hallar el volumen de revolución respecto al eje x de la región de la f gura 3.

En los problemas 29-40, use el método que considere conveniente para hallar el volumen del sólido de revolución de la región limitada por las curvas, respecto al eje indicado.

29. $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$, eje x

30. $y = x^2 + 6$, $y = 8x - 1$, eje y

31. $x = y^2 - 3$, $x = 2y$, eje $y = 4$

32. $y = 2x$, $y = 0$, $x = 8$, eje $x = -3$

33. $y = x^2 - 1$, $y = 2x - 1$, eje $x = -2$

34. $y = x^2 - 1$, $y = 2x - 1$, eje $y = 4$

35. $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 0$, eje $y = -1$

36. $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 0$, eje $x = 4$

37. $x = 4y - y^3$, $x = 0$, $y \geq 0$, eje x

38. $y^2 = x^{-1}$, $x = 1$, $x = 3$, eje $y = -3$

39. $y = \cos(x^2)$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$, eje y

40. $y = \sec x$, $y = \csc x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, eje x

En los problemas 41-44, halle el volumen obtenido por rotación de la región respecto al eje indicado. Las regiones se ref eren a la gráf ca de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ de la f gura 4.

41. La región sombreada entre la rama superior de la hipérbola y el eje x para $-c \leq x \leq c$, respecto al eje x.

42. La región entre la rama superior de la hipérbola y el eje x para $0 \leq x \leq c$, respecto al eje y.

43. La región entre la rama superior de la hipérbola y la recta $y = x$ para $0 \leq x \leq c$, respecto al eje x.

44. La región entre la rama superior de la hipérbola e $y = 2$, respecto al eje y.

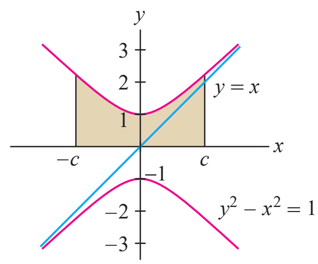


FIGURA 4

45. Sea R la intersección de las circunferencias de radio 1 centradas en $(1, 0)$ y en $(0, 1)$. Exprese como una integral (pero no evalúe): **(a)** el área de R y **(b)** el volumen de revolución de R respecto al eje x.

46. Sea $a > 0$. Pruebe que el volumen obtenido cuando la región limitada por $y = a\sqrt{x - ax^2}$ y el eje x se rota, respecto al eje x, no depende de la constante a.

47. Si se necesitan 12 J de trabajo para alargar un muelle 20 cm más allá de su posición de equilibrio, ¿cuánto trabajo se necesita para poderlo comprimir 6 cm más allá de su posición de equilibrio?

48. Un muelle cuya longitud de equilibrio es 15 cm ejerce una fuerza de 50 N cuando se alarga hasta 20 cm. Halle el trabajo necesario para alargar el muelle desde 22 hasta 24 cm.

49. Si se necesitan 18 ft lb de trabajo para alargar un muelle 1,5 ft más allá de su posición de equilibrio, ¿hasta dónde se alargará el muelle si se engancha un peso de 12 lb a su extremo libre?

50. Sea W el trabajo (contra la fuerza gravitacional del Sol) necesario para transportar una persona de 80 kg desde la Tierra hasta Marte, cuando ambos planetas están alineados con el Sol, a su mínima distancia de $55{,}7 \times 10^6$ km. Aplique la ley de gravitación universal de Newton (vea los problemas 35-37 en la sección 6.5) para expresar W como una integral y evalúela. La masa del Sol es $M_s = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg y la distancia del Sol a la Tierra es $149{,}6 \times 10^6$ km.

En los problemas 51 y 52, se bombea agua desde un tanque esférico de radio 2 m *a una fuente situada* 1 m *por debajo de un agujero situado en la parte inferior del tanque (figura 5). La densidad del agua es* 1000 kg/m^3.

51. Calcule el trabajo necesario para llenar el tanque.

52. Calcule el trabajo $F(h)$ necesario para llenar el tanque hasta el nivel de h metros en el interior de la esfera.

53. Un depósito de masa 20 kg que contiene 100 kg de agua (densidad 1000 kg/m^3) se eleva verticalmente a velocidad constante de 100 m/min durante un minuto. Durante este periodo, el tanque pierde agua a razón 40 kg/min. Calcule el trabajo total realizado al elevar el contenedor.

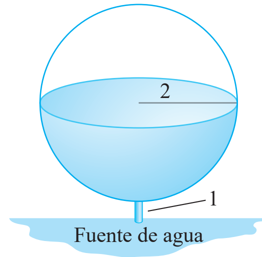


FIGURA 5

Detalle de bisonte y otros animales de una réplica de la pintura mural de la cueva de Lascaux.

Gordon Moore (1929–). Moore, quien llegó a ser presidente de la Compañía Intel, predijo que en las décadas posteriores a 1965, el número de transistores por circuito integrado crecería "exponencialmente." Esta predicción, se ha cumplido durante casi cinco décadas y puede continuar siendo cierta durante algunos años más. Moore af rmó, "la ley de Moore es un término que se aplicó a una curva que representé a mediados de los sesenta para mostrar el incremento en la complejidad de los circuitos integrados respecto al tiempo. Se ha ampliado su uso a otros ámbitos y estoy satisfecho de ser mencionado también por éstos."

7 FUNCIONES EXPONENCIALES

Este capítulo está dedicado a las funciones exponenciales y sus aplicaciones. Estas funciones se utilizan para modelar una gran variedad de fenómenos, tales como la desintegración radiactiva el crecimiento de poblaciones, las tasas de interés y la difusión de moléculas a través de una membrana celular. El cálculo diferencial pone de manif esto por qué las funciones exponenciales representan un papel importante en tan variadas situaciones. La clave es la relación entre la función exponencial y su derivada.

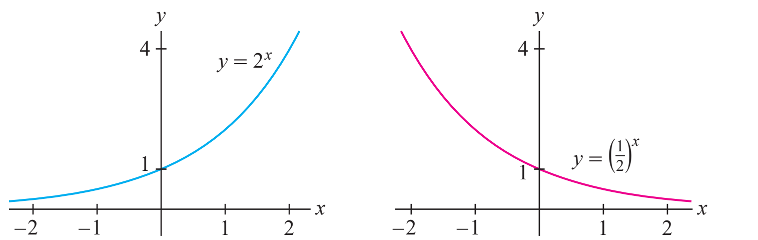
7.1 Derivada de $f(x) = b^x$ y el número e

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = b^x$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$. El número b se denomina **base**. Algunos ejemplos son 2^x, $(1{,}4)^x$ y 10^x. Se excluye el caso $b = 1$ porque $f(x) = 1^x$ es una función constante. Las calculadoras facilitan buenas aproximaciones decimales de los valores de las funciones exponenciales:

$$2^4 = 16, \quad 2^{-3} = 0{,}125, \quad (1{,}4)^3 = 2{,}744, \quad 10^{4{,}6} \approx 39\ 810{,}717$$

Ya desde un inicio, se deben señalar tres propiedades relevantes de las funciones exponenciales (vea la f gura 1 para los casos $b = 2$ y $b = \frac{1}{2}$):

- *Las funciones exponenciales son positivas*: $b^x > 0$ para todo x.
- El *rango* de $f(x) = b^x$ es el conjunto de todos los reales positivos.
- $f(x) = b^x$ es estrictamente creciente si $b > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < b < 1$.



$y = 2^x$ es estrictamente creciente $\qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es estrictamente decreciente

FIGURA 1

Si $b > 1$, la función exponencial $f(x) = b^x$ no es simplemente creciente sino que es, en cierto modo, creciente de una manera muy rápida. Aunque el término "crecimiento rápido" sea quizás subjetivo, sí que es cierta (y precisa) la siguiente af rmación: $f(x) = b^x$ crece más rápido que cualquiera de las funciones potenciales x^n para todo n (se demostrará en la sección 7.7). Por ejemplo, en la f gura 2 se muestra que $f(x) = 3^x$ eventualmente alcanza y crece más rápido que las funciones potenciales x^3, x^4, y x^5. La tabla 1 compara 3^x y x^5.

A continuación, se recuerdan las reglas de los exponentes. La regla más importante es:

$$\boxed{b^x b^y = b^{x+y}}$$

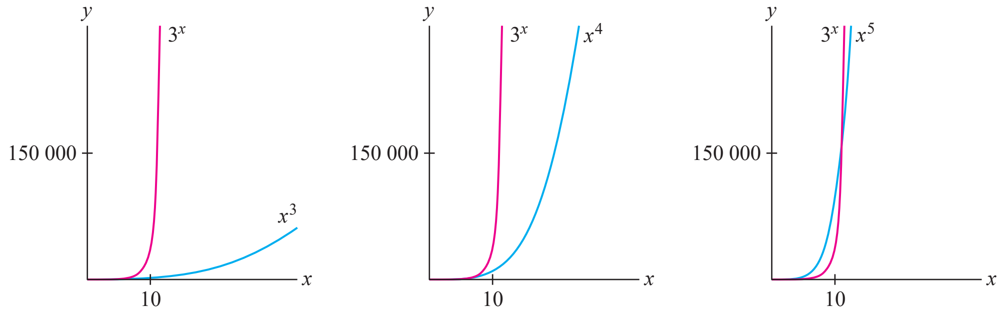


FIGURA 2 Comparación de 3^x y algunas funciones potenciales.

En otras palabras, *bajo la multiplicación, los exponentes se suman*, siempre que las bases sean la misma. Esta regla no se aplica a un producto como $3^2 \cdot 5^4$.

TABLA 1

x	x^5	3^x
1	1	3
5	3125	243
10	100 000	59 049
15	759 375	14 348 907
25	9 765 625	847 288 609 443

Asegúrese de que está familiarizado con las reglas de los exponentes. Se utilizan en todo este texto.

Reglas de los exponentes ($b > 0$)

	Regla	Ejemplo
Exponente cero	$b^0 = 1$	
Productos	$b^x b^y = b^{x+y}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$
Cocientes	$\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$\dfrac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$
Exponentes negativos	$b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$	$3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$
Potencia de una potencia	$\left(b^x\right)^y = b^{xy}$	$\left(3^2\right)^4 = 3^{2\cdot 4} = 3^8$
Raíces	$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$	$5^{1/2} = \sqrt{5}$

■ **EJEMPLO 1** Exprese como un único número natural o una fracción:

(a) $16^{-1/2}$ **(b)** $27^{2/3}$ **(c)** $4^{16} \cdot 4^{-18}$ **(d)** $\dfrac{9^3}{3^7}$

Solución

(a) $16^{-1/2} = \dfrac{1}{16^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$

(b) $27^{2/3} = \left(27^{1/3}\right)^2 = 3^2 = 9$

(c) $4^{16} \cdot 4^{-18} = 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

(d) $\dfrac{9^3}{3^7} = \dfrac{\left(3^2\right)^3}{3^7} = \dfrac{3^6}{3^7} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ ■

En el siguiente ejemplo, se aplicará la inyectividad de $f(x) = b^x$. En otras palabras, si $b^x = b^y$, entonces $x = y$.

■ **EJEMPLO 2** Halle el valor de la incógnita:

(a) $2^{3x+1} = 2^5$ **(b)** $b^3 = 5^6$ **(c)** $7^{t+1} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{2t}$

Solución

(a) Si $2^{3x+1} = 2^5$, entonces $3x + 1 = 5$ y por tanto $x = \frac{4}{3}$.

(b) Eleve ambos lados de $b^3 = 5^6$ a la potencia $\frac{1}{3}$. Según la regla de la "potencia de una potencia", tendremos:

$$b = (b^3)^{1/3} = (5^6)^{1/3} = 5^{6/3} = 5^2 = 25$$

(c) Como $\frac{1}{7} = 7^{-1}$, la expresión de la derecha de la ecuación es igual a $(\frac{1}{7})^{2t} = (7^{-1})^{2t} = 7^{-2t}$. De esta manera, la ecuación queda $7^{t+1} = 7^{-2t}$. Por tanto, $t + 1 = -2t$ o $t = -\frac{1}{3}$. ■

Derivada de $f(x) = b^x$

En este punto, es natural preguntarse ¿cuál es la derivada de $f(x) = b^x$? Las reglas de derivación que se han tratado hasta el momento, no ayudan porque b^x no es un producto, ni un cociente, ni una composición de funciones con derivadas conocidas. Debemos volver a la def nición de derivada. El cociente incremental (para $h \neq 0$) es:

Se dará por sentado que $f(x) = b^x$ es derivable. Aunque la demostración es algo técnica, la derivabilidad es plausible pues la gráfica de $y = b^x$ es suave y sin picos.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \frac{b^x b^h - b^x}{h} = \frac{b^x(b^h - 1)}{h}$$

A continuación, considere el límite cuando $h \to 0$. El factor b^x no depende de h, por lo que se puede sacar fuera del límite:

$$\frac{d}{dx}b^x = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \lim_{h\to 0}\left(\frac{b^h - 1}{h}\right)$$

Este último límite (que existe porque b^x es derivable) no depende de x. Se denotará su valor como $m(b)$:

$$m(b) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{b^h - 1}{h}\right)$$

De esta manera, lo que se ha demostrado es que *la derivada de b^x es proporcional a b^x*:

$$\boxed{\frac{d}{dx}b^x = m(b)\, b^x} \qquad \boxed{1}$$

¿A qué es igual el factor $m(b)$? En estos momentos, no se puede determinar su valor exacto (en la sección 7.3, se verá que $m(b)$ es igual a $\ln b$, el logaritmo neperiano (o natural) de b). En el siguiente ejemplo, se examina numéricamente el valor de $m(b)$.

■ **EJEMPLO 3** Estime $m(b)$ numéricamente para $b = 2$, 2,5, 3 y 10.

Solución

La siguiente tabla contiene los valores de los cocientes diferenciales para estimar $m(b)$:

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{(2{,}5)^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$	$\frac{10^h - 1}{h}$
0,01	0,69556	0,92050	1,10467	2,32930
0,001	0,69339	0,91671	1,09921	2,30524
0,0001	0,69317	0,91633	1,09867	2,30285
0,00001	0,69315	0,916295	1,09861	2,30261
	$m(2) \approx 0{,}69$	$m(2{,}5) \approx 0{,}92$	$m(3) \approx 1{,}10$	$m(10) \approx 2{,}30$

■

Estos cálculos sugieren que $m(b)$ es una función estrictamente creciente de b. De hecho, se puede demostrar que $m(b)$, como función de b, es tanto estrictamente creciente como continua (cuestiones que se darán por sentado). Entonces, como $m(2{,}5) \approx 0{,}92$ y $m(3) \approx 1{,}10$, existe un único número b *entre* 2,5 y 3 tal que $m(b) = 1$. Éste es el número e, cuyo valor aproximado es 2,718.

Utilizando series inf nitas (problema 87 en la sección 10.7), se puede demostrar que e es irracional y que se puede calcular su valor con la precisión que se quiera.

Como e se define por la propiedad $m(e) = 1$, la ec. (1) prueba que $(e^x)' = e^x$. En otras palabras, *e^x es igual a su derivada.*

Siempre que se mencione la función exponencial sin especificar la base, se sobreentiende que es $f(x) = e^x$. En muchos libros, e^x se denota $\exp(x)$.

El número *e* Existe un único número real positivo e que cumple la propiedad:

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x} \qquad (2)$$

El número e es irracional, de valor aproximado $e \approx 2{,}718$.

UN APUNTE GRÁFICO La gráfica de $f(x) = b^x$ pasa por $(0, 1)$ para todo $b > 0$, pues $b^0 = 1$ (figura 3). El número $m(b)$ es simplemente la pendiente de la recta tangente en $x = 0$:

$$\left.\frac{d}{dx}b^x\right|_{x=0} = m(b) \cdot b^0 = m(b)$$

Estas rectas tangentes son más inclinadas cuanto mayor sea b y $b = e$ es el único valor para el que la pendiente de la recta tangente es igual a 1. En la sección 7.3, se demostrará que $m(b) = \ln b$, el logaritmo neperiano de b.

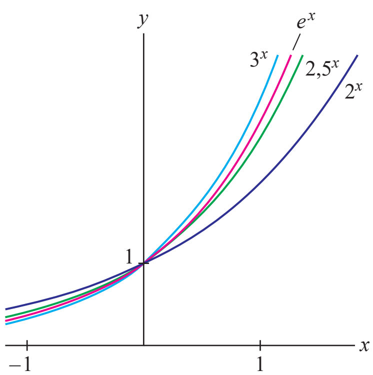


FIGURA 3 Las rectas tangentes a $y = b^x$ en $x = 0$ son más inclinadas si b es mayor.

UN APUNTE CONCEPTUAL En cierta forma, el número e es “complicado”. Se ha calculado con una precisión de más de 100 billones de dígitos, pero es irracional y no se puede definir sin utilizar límites. Con 20 decimales:

$$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$$

Sin embargo, la elegante fórmula $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ muestra que e es “simple” desde el punto de vista del cálculo diferencial y que e^x es más simple que las, aparentemente, más naturales funciones exponenciales como 2^x o 10^x.

Aunque las referencias escritas al número π se remontan a más de 4000 años, los matemáticos se dieron cuenta por primera vez del destacado papel que desempeña el número e en el siglo XVII. La notación e la introdujo hacia 1730 Leonhard Euler, que descubrió muchas de las propiedades fundamentales de este importante número.

■ **EJEMPLO 4** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3e^x - 5x^2$ en $x = 2$.

Solución Calcule tanto $f'(2)$ como $f(2)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3e^x - 5x^2) = 3\frac{d}{dx}e^x - 5\frac{d}{dx}x^2 = 3e^x - 10x$$

$$f'(2) = 3e^2 - 10 \cdot 2 \approx 2{,}17$$

$$f(2) = 3e^2 - 5 \cdot 2^2 \approx 2{,}17$$

La ecuación de la recta tangente es $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$. Usando estos valores aproximados, se puede escribir la ecuación como (figura 4):

$$y = 2{,}17 + 2{,}17(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2{,}17(x - 1)$$ ■

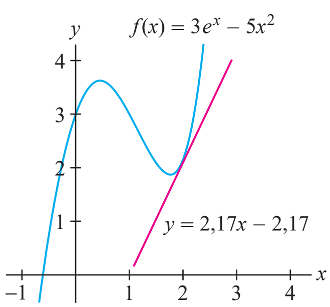


FIGURA 4

■ **EJEMPLO 5** Calcule $f'(0)$, donde $f(x) = e^x \cos x$.

Solución Aplicando la regla del producto:

$$f'(x) = e^x \cdot (\cos x)' + \cos x \cdot (e^x)' = -e^x \operatorname{sen} x + \cos x \cdot e^x = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Entonces $f'(0) = e^0(1 - 0) = 1$. ■

Para calcular la derivada de una función de la forma $e^{g(x)}$, escriba $e^{g(x)}$ como una función compuesta $e^{g(x)} = f(g(x))$ donde $f(u) = e^u$ y aplique la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)}g'(x) \quad [\text{pues } f'(x) = e^x]$$

Un caso particular es $(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$, donde k y b son constantes.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = g'(x)e^{g(x)} \qquad \frac{d}{dx}(e^{kx+b}) = ke^{kx+b} \quad (k, b \text{ constantes})} \qquad \boxed{3}$$

■ **EJEMPLO 6** Derive:

$$\textbf{(a)}\quad f(x) = e^{9x-5} \quad \text{y} \quad \textbf{(b)}\quad f(x) = e^{\cos x}$$

Solución Aplique la ec. (3):

$$\textbf{(a)}\quad \frac{d}{dx}e^{9x-5} = 9e^{9x-5} \quad \text{y} \quad \textbf{(b)}\quad \frac{d}{dx}(e^{\cos x}) = -(\operatorname{sen} x)e^{\cos x}$$ ■

■ **EJEMPLO 7 Representación gráfica que involucra e^x** Dibuje la gráf ca de $f(x) = xe^x$ en el intervalo $[-4, 2]$.

Solución Como es habitual, el primer paso es determinar los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\, xe^x = xe^x + e^x = (x + 1)e^x = 0$$

Como $e^x > 0$ para todo x, el único punto crítico es $x = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{para} \quad x < -1 \\ > 0 & \text{para} \quad x > -1 \end{cases}$$

Por tanto, $f'(x)$ cambia de signo, de $-$ a $+$, en $x = -1$ y $f(-1)$ es un mínimo local. Respecto a la segunda derivada,

$$f''(x) = (x + 1) \cdot (e^x)' + e^x \cdot (x + 1)' = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{para} \quad x < -2 \\ > 0 & \text{para} \quad x > -2 \end{cases}$$

Por tanto, $x = -2$ es un punto de inf exión, en el que la gráf ca cambia de cóncava a convexa. La f gura 5 muestra la gráf ca con su mínimo local y su punto de inf exión. ■

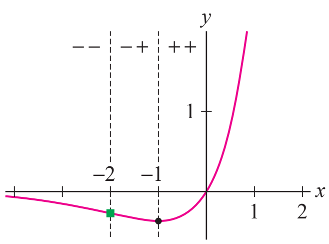


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x) = xe^x$. Las combinaciones de signo $--$, $-+$, $++$ indican los signos de f' y f''.

Integrales que involucran e^x

La fórmula $(e^x)' = e^x$ establece que la función $f(x) = e^x$ es igual a su propia derivada. Pero también signif ca que $f(x) = e^x$ es *su propia primitiva*. En otras palabras,

$$\boxed{\int e^x\, dx = e^x + C}$$

De manera más general, para cualquier constante b y k con $k \neq 0$:

$$\boxed{\int e^{kx+b}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C}$$

Se puede verificar esta fórmula por sustitución, o bien observando que $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{k}e^{kx+b}\right) = e^{kx+b}$.

EJEMPLO 8 Evalúe:

(a) $\displaystyle\int e^{7x-5}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int xe^{2x^2}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+2e^t+e^{2t}}\,dt$

Solución

(a) $\displaystyle\int e^{7x-5}\,dx = \frac{1}{7}e^{7x-5} + C.$

(b) Aplique la sustitución $u = 2x^2$, $du = 4x\,dx$:

$$\int xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{2x^2} + C$$

(c) Se verif ca que $1 + 2e^t + e^{2t} = (1+e^t)^2$. La sustitución $u = e^t$, $du = e^t\,dt$ da lugar a

$$\int \frac{e^t}{1+2e^t+e^{2t}}\,dt = \int \frac{du}{(1+u)^2} = -(1+u)^{-1} + C = -(1+e^t)^{-1} + C$$

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Qué signif ca exactamente b^x? Se ha dado por sentado que b^x tiene sentido para cualquier número real x, pero no se ha especif cado cómo se def ne b^x si x es irracional. Si n es un número natural, entonces b^n es simplemente el producto $b \cdot b \cdots b$ (n veces) y para cualquier número racional $x = m/n$,

$$b^x = b^{m/n} = \left(b^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$$

Si x es irracional, esta def nición no se puede aplicar y b^x no se puede def nir directamente mediante raíces y potencias de b. Sin embargo, tiene sentido entender $b^{m/n}$ como una aproximación a b^x, cuando m/n es un número racional cercano a x. Por ejemplo, $3^{\sqrt{2}}$ debe ser aproximadamente igual a $3^{1{,}4142} \approx 4{,}729$ pues 1,4142 es una buena aproximación racional de $\sqrt{2}$. Así, de manera formal, se puede def nir b^x como un límite sobre los números racionales m/n tendiendo a x:

$$b^x = \lim_{m/n \to x} b^{m/n}$$

Se puede demostrar que este límite existe y que la función, así def nida, $f(x) = b^x$ no es sólo continua sino que también es diferenciable.

7.1 RESUMEN

- $f(x) = b^x$ es la *función exponencial* de base b (donde $b > 0$ y $b \neq 1$).
- $f(x) = b^x$ es estrictamente creciente si $b > 1$ y estrictamente decreciente si $b < 1$.
- La derivada de b^x es proporcional a b^x:

$$\frac{d}{dx}b^x = m(b)b^x$$

donde $m(b) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{b^h - 1}{h}$.

- Existe un único número $e \approx 2{,}718$ que cumple $m(e) = 1$ y, por tanto:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

- Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = f'(x) e^{f(x)} \qquad \frac{d}{dx} e^{kx+b} = k e^{kx+b} \quad (k, b \text{ constantes})$$

- $\int e^x\, dx = e^x + C$
- $\int e^{kx+b}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C \quad (k, b \text{ constantes con } k \neq 0)$

7.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones es incorrecta?

(a) $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$ **(b)** $(\sqrt{5})^{4/3} = 5^{2/3}$

(c) $3^2 \cdot 2^3 = 1$ **(d)** $(2^{-2})^{-2} = 16$

2. ¿Cuál es el dominio y el rango de $\ln x$? ¿Para qué valores de x es negativo $\ln x$?

3. ¿Sobre cuál de las siguientes funciones se puede aplicar la regla del producto?

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = 2^e$ **(c)** $f(x) = x^e$

(d) $f(x) = e^x$ **(e)** $f(x) = x^x$ **(f)** $f(x) = x^{-4/5}$

4. ¿Para qué valores de b la derivada de b^x es negativa?

5. ¿Para qué valores de b la gráf ca de $y = b^x$ es convexa?

6. ¿Qué punto se encuentra en la gráf ca de $y = b^x$ para cualquier valor de b?

7. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones no es cierta?

(a) $(e^x)' = e^x$

(b) $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

(c) La pendiente de la recta tangente a $y = e^x$ en $x = 0$ es igual a e.

(d) La pendiente de la recta tangente a $y = e^x$ en $x = 0$ es igual a 1.

Problemas

1. Exprese como un número natural (sin utilizar una calculadora):

(a) 7^0 **(b)** $10^2(2^{-2} + 5^{-2})$

(c) $\frac{(4^3)^5}{(4^5)^3}$ **(d)** $27^{4/3}$

(e) $8^{-1/3} \cdot 8^{5/3}$ **(f)** $3 \cdot 4^{1/4} - 12 \cdot 2^{-3/2}$

2. Calcule $(16^{-1/16})^4$.

En los problemas 3-10, halle el valor de la incógnita.

3. $9^{2x} = 9^8$ **4.** $e^{t^2} = e^{4t-3}$

5. $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ **6.** $(\sqrt{5})^x = 125$

7. $4^{-x} = 2^{x+1}$ **8.** $b^4 = 10^{12}$

9. $k^{3/2} = 27$ **10.** $(b^2)^{x+1} = b^{-6}$

En los problemas 11-14, halle el límite.

11. $\lim_{x \to +\infty} 4^x$ **12.** $\lim_{x \to +\infty} 4^{-x}$

13. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$ **14.** $\lim_{x \to +\infty} e^{x - x^2}$

En los problemas 15-18, halle la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

15. $y = 4e^x, \quad x_0 = 0$ **16.** $y = e^{4x}, \quad x_0 = 0$

17. $y = e^{x+2}, \quad x_0 = -1$ **18.** $y = e^{x^2}, \quad x_0 = 1$

En los problemas 19-40, halle la derivada.

19. $f(x) = 7e^{2x} + 3e^{4x}$ **20.** $f(x) = e^{-5x}$

21. $f(x) = e^{\pi x}$ **22.** $f(x) = e^3$

23. $f(x) = e^{-4x+9}$ **24.** $f(x) = 4e^{-x} + 7e^{-2x}$

25. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ **26.** $f(x) = x^2 e^{2x}$

27. $f(x) = (1 + e^x)^4$ **28.** $f(x) = (2e^{3x} + 2e^{-2x})^4$

29. $f(x) = e^{x^2+2x-3}$ **30.** $f(x) = e^{1/x}$

31. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ **32.** $f(x) = e^{(x^2+2x+3)^2}$

33. $f(\theta) = \operatorname{sen}(e^{\theta})$ **34.** $f(t) = e^{\sqrt{t}}$

35. $f(t) = \frac{1}{1 - e^{-3t}}$ **36.** $f(t) = \cos(te^{-2t})$

37. $f(x) = \dfrac{e^x}{3x+1}$

38. $f(x) = \tan(e^{5-6x})$

39. $f(x) = \dfrac{e^{x+1}+x}{2e^x - 1}$

40. $f(x) = e^{e^x}$

En los problemas 41-46, calcule la derivada que se indica.

41. $f''(x); \quad f(x) = e^{4x-3}$

42. $f'''(x); \quad f(x) = e^{12-3x}$

43. $\dfrac{d^2y}{dt}; \quad y = e^t \operatorname{sen} t$

44. $\dfrac{d^2y}{dt}; \quad y = e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$

45. $\dfrac{d^2}{dt} e^{t-t^2}$

46. $\dfrac{d^3}{d\theta} \cos(e^\theta)$

En los problemas 47-52, halle los puntos críticos y determine si se trata de un mínimo local, máximo local o ninguna de las dos cosas.

47. $f(x) = e^x - x$

48. $f(x) = x + e^{-x}$

49. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ para $x > 0$

50. $f(x) = x^2 e^x$

51. $g(t) = \dfrac{e^t}{t^2+1}$

52. $g(t) = (t^3 - 2t)e^t$

En los problemas 53-58, halle los puntos críticos y los puntos de inf e-xión. A continuación, dibuje la gráf ca.

53. $y = xe^{-x}$

54. $y = e^{-x} + e^x$

55. $y = e^{-x}\cos x$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

56. $y = e^{-x^2}$

57. $y = e^x - x$

58. $y = x^2 e^{-x}$

59. Halle $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráf ca de $f(x) = x^2e^{-x}$ en $x = a$ pase por el origen de coordenadas (f gura 6).

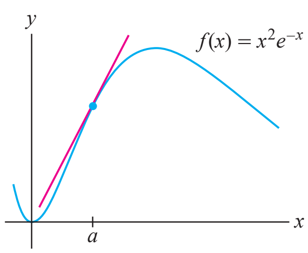


FIGURA 6

60. Use el método de Newton para hallar las dos soluciones de $e^x = 5x$ con tres decimales de precisión (f gura 7).

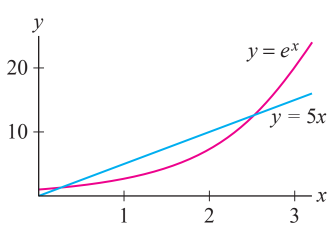


FIGURA 7 Gráf cas de e^x y $5x$.

61. Calcule la aproximación lineal de $f(x) = e^{-2x} \operatorname{sen} x$ en $a = 0$.

62. Calcule la aproximación lineal de $f(x) = xe^{6-3x}$ en $a = 2$.

63. Halle la aproximación lineal de $f(x) = e^x$ en $a = 0$ y utilícela para estimar $e^{-0,1}$.

64. Use la aproximación lineal para estimar $f(1{,}03) - f(1)$ donde $y = x^{1/3}e^{x-1}$.

65. Un estudio de 2005 de los Servicios de Investigación Pesquera en Aberdeen (Escocia) mostró que la longitud media de la especie Clupea Harengus (arenque del Atlántico), como función de la edad t (en años), se puede modelar como $L(t) = 32(1 - e^{-0,37t})$ cm para $0 \le t \le 13$.

(a) ¿En qué medida está cambiado la longitud media para $t = 6$ años?

(b) ¿A qué edad la longitud media cambia a razón de 5 cm/año?

(c) Calcule $L = \lim\limits_{t\to+\infty} L(t)$.

66. Según un estudio de 1999 de Starkey y Scarnecchia, el peso medio (kg) para la edad t (años) del pez gato americano en el río Yellowstone Inferior, se puede modelar por:

$$W(t) = \left(3{,}46293 - 3{,}32173e^{-0{,}03456t}\right)^{3{,}4026}$$

Halle la tasa de variación del peso para la edad $t = 10$.

67. Las funciones de los problemas 65 y 66 son ejemplos de la **función de crecimiento de Von Bertalanffy**:

$$M(t) = (a + (b-a)e^{kmt})^{1/m}$$

introducida hacia el 1930 por el biólogo, nacido en Austria, Karl Ludwig Von Bertalanffy. Calcule $M'(0)$ en términos de las constantes a, b, k y m.

68. Halle una aproximación a $m(4)$ aplicando la def nición de límite y estime la pendiente de la recta tangente a $y = 4^x$ en $x = 0$ y en $x = 2$.

En los problemas 69-86, evalúe la integral.

69. $\displaystyle\int (e^x + 2)\,dx$

70. $\displaystyle\int e^{4x}\,dx$

71. $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x}\,dx$

72. $\displaystyle\int_2^6 e^{-x/2}\,dx$

73. $\displaystyle\int_0^3 e^{1-6t}\,dt$

74. $\displaystyle\int_2^3 e^{4t-3}\,dt$

75. $\displaystyle\int (e^{4x} + 1)\,dx$

76. $\displaystyle\int (e^x + e^{-x})\,dx$

77. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2/2}\,dx$

78. $\displaystyle\int_0^2 ye^{3y^2}\,dy$

79. $\displaystyle\int e^t\sqrt{e^t+1}\,dt$

80. $\displaystyle\int (e^{-x} - 4x)\,dx$

81. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{4x}}{e^x}\,dx$

82. $\displaystyle\int e^x\cos(e^x)\,dx$

83. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

84. $\displaystyle\int e^x(e^{2x}+1)^3\,dx$

85. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

86. $\displaystyle\int x^{-2/3}e^{x^{1/3}}\,dx$

87. Halle el área entre $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ a lo largo de $[0, 1]$.

88. Halle el área entre $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ a lo largo de $[0, 2]$.

89. Halle el área limitada por $y = e^2$, $y = e^x$ y $x = 0$.

90. Halle el volumen de revolución, respecto al eje x, de $y = e^x$ para $0 \le x \le 1$.

91. Los ingenieros de viento, han determinado que la velocidad del viento v (en m/s) en una cierta localidad sigue una **distribución de Rayleigh** del tipo:

$$W(v) = \frac{1}{32} v e^{-v^2/64}$$

Esto signif ca que la probabilidad de que v se encuentre entre a y b es igual al área sombreada en la f gura 8.

(a) Pruebe que la probabilidad de que $v \in [0, b]$ es $1 - e^{-b^2/64}$.

(b) Calcule la probabilidad de que $v \in [2, 5]$.

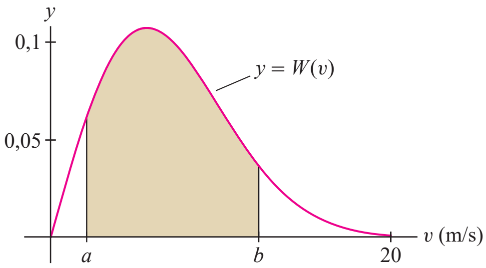


FIGURA 8 El área sombreada es la probabilidad de que v se encuentre entre a y b.

92. La función $f(x) = e^x$ verif ca que $f'(x) = f(x)$. Demuestre que si $g(x)$ es otra función tal que $g'(x) = g(x)$, entonces $g(x) = Ce^x$ para alguna constante C. *Indicación:* calcule la derivada de $g(x)e^{-x}$.

Problemas avanzados

93. Demuestre que $f(x) = e^x$ no es una función polinómica. *Indicación:* La diferenciación rebaja el grado de un polinomio en 1.

94. Recuerde la siguiente propiedad de las integrales: si $f(t) \ge g(t)$ para todo $t \ge 0$, entonces para todo $x \ge 0$ se tiene:

$$\int_0^x f(t)\,dt \ge \int_0^x g(t)\,dt \qquad \boxed{4}$$

La desigualdad $e^t \ge 1$ es cierta para $t \ge 0$ al ser $e > 1$. Aplique (4) para demostrar que $e^x \ge 1 + x$ para $x \ge 0$. A continuación, demuestre, mediante sucesivas integraciones, las siguientes desigualdades (para $x \ge 0$):

$$e^x \ge 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad e^x \ge 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

95. Generalice el problema 94; es decir, aplique inducción completa (si está familiarizado con este método de demostración), para probar que para todo $n \ge 0$, se verif ca:

$$e^x \ge 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \qquad (x \ge 0)$$

96. Aplique el problema 94 para mostrar que $\dfrac{e^x}{x^2} \ge \dfrac{x}{6}$ y concluya que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. A continuación, aplique el problema 95 para demostrar que, en general, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ para todo n.

97. Calcule las primeras tres derivadas de $f(x) = xe^x$. A continuación, establezca una conjetura para la fórmula de $f^{(n)}(x)$ (aplique inducción completa para probarla, si está familiarizado con este método de demostración).

98. Considere la ecuación $e^x = \lambda x$, donde λ es una constante.

(a) ¿Para qué λ existe una única solución? Como ayuda, dibuje la gráf ca de $y = e^x$ y la recta $y = \lambda x$.

(b) ¿Para qué λ existe, por lo menos, una solución?

99. Demuestre, por los dos métodos que se indican, que los números $m(a)$ cumplen:

$$m(ab) = m(a) + m(b)$$

(a) Primer método: use la def nición de límite de $m(b)$ y

$$\frac{(ab)^h - 1}{h} = b^h\left(\frac{a^h - 1}{h}\right) + \frac{b^h - 1}{h}$$

(b) Segundo método: aplique la regla del producto a $a^x b^x = (ab)^x$.

7.2 Funciones inversas

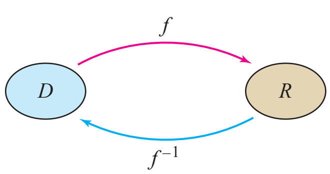


FIGURA 1 Una función y su inversa.

En la siguiente sección, se van a def nir las funciones logarítmicas como las inversas de las funciones exponenciales. Pero antes, se examinarán las funciones inversas y se calcularán sus derivadas.

La inversa de $f(x)$, que se denota $f^{-1}(x)$, es la función que *invierte* el efecto de $f(x)$ (f gura 1). Por ejemplo, la inversa de $f(x) = x^3$ es la función raíz cúbica $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Dada una tabla de valores para una función $f(x)$, se obtiene una tabla para $f^{-1}(x)$ intercambiando las columnas de x y de y:

Función	
x	$y = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

(Intercambie columnas) $\Longrightarrow$

Inversa	
x	$y = x^{1/3}$
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2
27	3

Si se aplican f y f^{-1} a un número x en cualquier orden, se recupera x. Por ejemplo:

$$\text{Aplicar } f \text{ y después } f^{-1}: \quad 2 \xrightarrow{(\text{Aplicar } x^3)} 8 \xrightarrow{(\text{Aplicar } x^{1/3})} 2$$

$$\text{Aplicar } f^{-1} \text{ y después } f: \quad 8 \xrightarrow{(\text{Aplicar } x^{1/3})} 2 \xrightarrow{(\text{Aplicar } x^3)} 8$$

Esta propiedad es utilizada en la def nición formal de función inversa.

DEFINICIÓN Inversa Sea $f(x)$ una función de dominio D y rango R. Si existe una función $g(x)$ con dominio R tal que:

$$g(f(x)) = x \quad \text{para } x \in D \qquad \text{y} \qquad f(g(x)) = x \quad \text{para } x \in R$$

se dice que $f(x)$ es **invertible**. La función $g(x)$ es su **función inversa** y se denota $f^{-1}(x)$.

RECORDATORIO El "dominio de f" es el conjunto de los números x tales que $f(x)$ está definido (el conjunto de los puntos admisibles), y el "rango de f" es el conjunto de todos los valores $f(x)$ (el conjunto de los resultados).

■ **EJEMPLO 1** Muestre que $f(x) = 2x - 18$ es invertible. ¿Cuál es el dominio y el rango de $f^{-1}(x)$?

Solución Se va a demostrar que $f(x)$ es invertible calculando su inversa. Se procederá en dos etapas.

***Etapa 1.* Aísle x, en términos de y, de la ecuación $y = f(x)$**

$$y = 2x - 18$$
$$y + 18 = 2x$$
$$x = \frac{1}{2}y + 9$$

Se obtiene así la inversa como una función de la variable y: $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 9$.

***Etapa 2.* Intercambie variables**

Se suele preferir expresar la inversa como una función de x, por lo que se intercambian los papeles de x e y (f gura 2):

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 9$$

Para comprobar los cálculos efectuados, se va a verif car que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 18) = \frac{1}{2}(2x - 18) + 9 = (x - 9) + 9 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x + 9\right) = 2\left(\frac{1}{2}x + 9\right) - 18 = (x + 18) - 18 = x$$

Como f^{-1} es una función lineal, tanto su dominio como su rango es **R**. ■

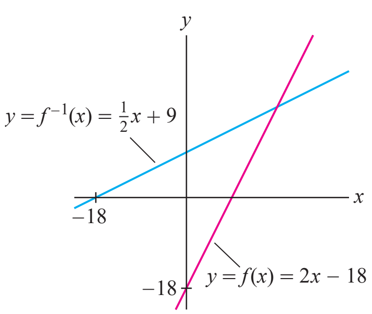


FIGURA 2

La función inversa, si existe, es única. Sin embargo, algunas funciones no tienen inversa. Considere, por ejemplo, $f(x) = x^2$; cuando se intercambian las columnas en la tabla de valores (lo que debería dar lugar a una tabla de valores para f^{-1}), la tabla resultante no define una función:

Función

x	$y = x^2$
-2	4
-1	**1**
0	0
1	**1**
2	4

(Intercambie columnas) $\Longrightarrow$

Inversa (?)

x	y
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2

$f^{-1}(1)$ tiene dos valores: 1 y -1.

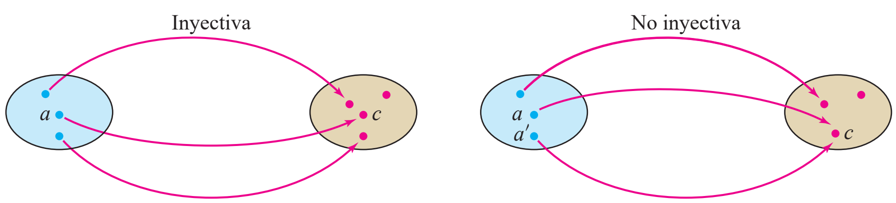
Otra denominación estándar para inyectiva es uno-a-uno.

El problema es que cualquier número positivo se obtiene dos veces como un resultado de $f(x) = x^2$. Por ejemplo, 1 se obtiene en dos ocasiones como *resultado* en la primera tabla y, en consecuencia, acontece dos veces como *input* en la segunda tabla. Por tanto, la segunda tabla proporciona dos posibles valores para $f^{-1}(1)$, que son $f^{-1}(1) = 1$ y $f^{-1}(1) = -1$, pero ninguno cumple la propiedad de la inversa. Por ejemplo, si se asigna $f^{-1}(1) = 1$, entonces $f^{-1}(f(-1)) = f^{-1}(1) = 1$, pero una inversa debería verificar que $f^{-1}(f(-1)) = -1$.

Entonces, ¿cuándo tiene inversa una función $f(x)$? La respuesta es: si $f(x)$ es **inyectiva**, lo que significa que $f(x)$ alcanza cada valor, a lo sumo, en una ocasión (figura 3). A continuación se encuentra la definición formal:

DEFINICIÓN Función inyectiva Una función $f(x)$ es inyectiva sobre un dominio D si, para cualquier valor c, la ecuación $f(x) = c$ tiene, a lo sumo, una solución para $x \in D$. O, equivalentemente, si para todo $a, b \in D$ se tiene:

$$f(a) \neq f(b) \qquad \text{salvo si} \qquad a = b$$



$f(x) = c$ tiene, a lo sumo, una solución para cada c

$f(x) = c$ tiene dos soluciones: $x = a$ y $x = a'$

FIGURA 3 Una función inyectiva alcanza cada valor, a lo sumo, una vez.

Piense en una función como en un instrumento para "etiquetar" elementos del rango por elementos del dominio. Cuando f es inyectiva, este etiquetado es único y f^{-1} asigna a cada número en el rango su etiqueta.

Cuando $f(x)$ es inyectiva sobre su dominio D, la función inversa $f^{-1}(x)$ existe y su dominio es igual al rango R de f (figura 4). De hecho, para cada $c \in R$, existe un único elemento $a \in D$ tal que $f(a) = c$ y se puede definir $f^{-1}(c) = a$. Con esta definición, $f(f^{-1}(c)) = f(a) = c$ y $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(c) = a$. Esto prueba el siguiente teorema.

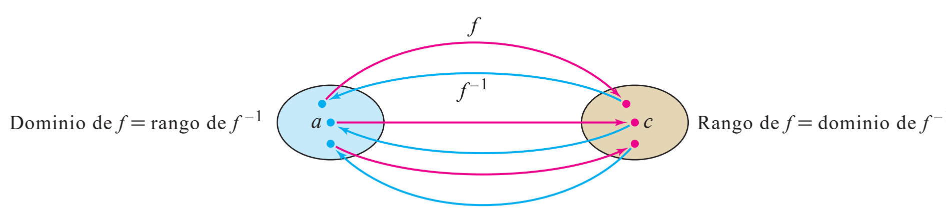


FIGURA 4 Al pasar de f a f^{-1}, el dominio y el rango se intercambian.

TEOREMA 1 Existencia de inversas La función inversa $f^{-1}(x)$ existe si y sólo si $f(x)$ es inyectiva sobre su dominio D. Además,

- Dominio de f = rango de f^{-1}.
- Rango de f = dominio de f^{-1}.

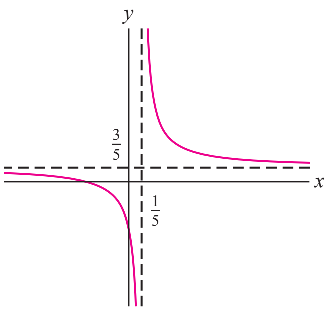


FIGURA 5 Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x+2}{5x-1}$.

■ **EJEMPLO 2** Pruebe que $f(x) = \dfrac{3x+2}{5x-1}$ es invertible. Determine el dominio y el rango de f y de f^{-1}.

Solución El dominio de $f(x)$ es $D = \left\{x : x \neq \frac{1}{5}\right\}$ (figura 5). Sea $x \in D$ y aísle x, en términos de y, de la ecuación $y = f(x)$:

$$y = \frac{3x+2}{5x-1}$$

$$y(5x-1) = 3x+2$$

$$5xy - y = 3x + 2$$

$$5xy - 3x = y + 2 \qquad \text{(agrupe términos involucrando a } x\text{)}$$

$$x(5y-3) = y + 2 \qquad \text{(saque factor común } x\text{, para aislar } x\text{)} \qquad \boxed{1}$$

$$x = \frac{y+2}{5y-3} \qquad \text{(divida por } 5y-3\text{)} \qquad \boxed{2}$$

A menudo no es posible hallar una expresión para la inversa, pues no se puede resolver de forma explícita la ecuación $y = f(x)$ en x. Por ejemplo, la función $f(x) = x + e^x$ tiene inversa pero se debe prescindir de una expresión explícita para ella.

El último paso es válido si $5y - 3 \neq 0$, es decir si $y \neq \frac{3}{5}$. Pero observe que $y = \frac{3}{5}$ no se encuentra en el rango de $f(x)$; si estuviera, la ec. (1) daría lugar a $0 = \frac{3}{5} + 2$, que es una expresión falsa. Según la ec. (2), para todo $y \neq \frac{3}{5}$ existe un único número x tal que $f(x) = y$. Por tanto, $f(x)$ es inyectiva sobre su dominio. Por el teorema 1, $f(x)$ es invertible. El rango de $f(x)$ es $R = \left\{x : x \neq \frac{3}{5}\right\}$ y su inversa será:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5x-3}$$

El dominio de la función inversa es R y su rango es D. ■

Se puede determinar si $f(x)$ es inyectiva mediante su gráfica. La recta horizontal $y = c$ corta la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(a, f(a))$, donde $f(a) = c$ (figura 6). Entonces, si $f(x) = c$ tiene, a lo sumo, una solución, debe existir, a lo sumo, un punto de corte. Se obtiene así el siguiente test:

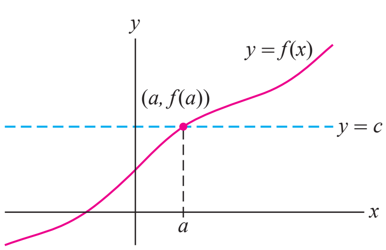


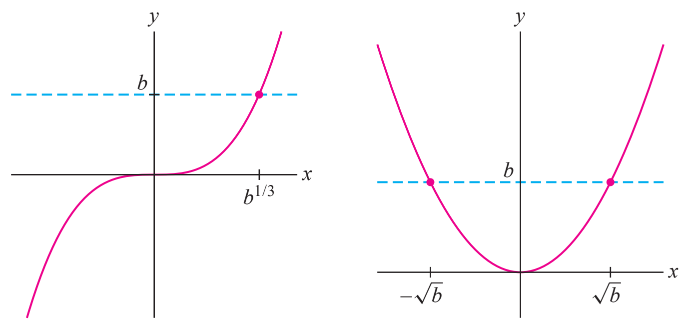
FIGURA 6 La recta $y = c$ corta la gráfica en los puntos para los que $f(a) = c$.

Test de la recta horizontal Una función $f(x)$ es inyectiva si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de $f(x)$ en, a lo sumo, un punto.

En la figura 7, se observa que $f(x) = x^3$ cumple el test de la recta horizontal y es, por tanto, inyectiva; $f(x) = x^2$ no lo cumple y no es inyectiva.

■ **EJEMPLO 3 Las funciones estrictamente crecientes son inyectivas** Pruebe que las funciones estrictamente crecientes son inyectivas. A continuación, muestre que $f(x) = x^5 + 4x + 3$ es inyectiva.

Solución Una función estrictamente creciente cumple que $f(a) < f(b)$ si $a < b$. Por tanto, f no puede alcanzar cualquier valor más de una vez, por lo que f es inyectiva. Observe que, de manera análoga, las funciones estrictamente decrecientes son también inyectivas.



(A) $f(x) = x^3$ es inyectiva. (B) $f(x) = x^2$ no es inyectiva.

FIGURA 7

Observe que:

- Si n es impar y $c > 0$, entonces cx^n es estrictamente creciente.
- Una suma de funciones estrictamente crecientes es estrictamente creciente.

Así, x^5, $4x$ y la suma $x^5 + 4x$ son estrictamente crecientes. También $f(x) = x^5 + 4x + 3$ es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva (figura 8). ■

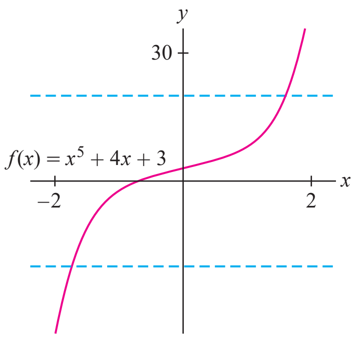


FIGURA 8 La función estrictamente creciente $f(x) = x^5 + 4x + 3$ cumple el test de la recta horizontal.

Se puede conseguir que una función sea inyectiva, restringiendo adecuadamente su dominio.

■ **EJEMPLO 4 Restricción del dominio** Halle un dominio sobre el que $f(x) = x^2$ sea inyectiva y determine su inversa para dicho dominio.

Solución La función $f(x) = x^2$ es inyectiva sobre el dominio $D = \{x : x \geq 0\}$, pues si $a^2 = b^2$, donde a y b son ambos no negativos, entonces $a = b$ (figura 9). La inversa de $f(x)$ sobre D es la determinación positiva de la raíz cuadrada $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. De manera alternativa, se puede restringir $f(x)$ al dominio $\{x : x \leq 0\}$, sobre el que la función inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. ■

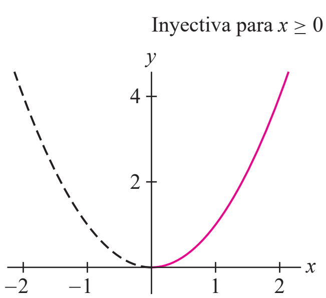


FIGURA 9 $f(x) = x^2$ cumple el test de la recta horizontal en el dominio $\{x : x \geq 0\}$.

A continuación, se examina la gráfica de la función inversa. La **reflexión** de un punto (a, b) a través de la recta $y = x$ es, por definición, el punto (b, a) (figura 10). Observe que si los ejes x e y están representados en la misma escala, entonces (a, b) y (b, a) son equidistantes a la recta $y = x$ y el segmento que los une es perpendicular a $y = x$.

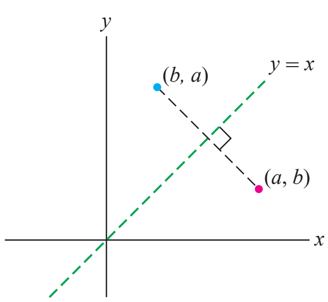


FIGURA 10 La reflexión de (a, b) a través de $y = x$ es el punto (b, a).

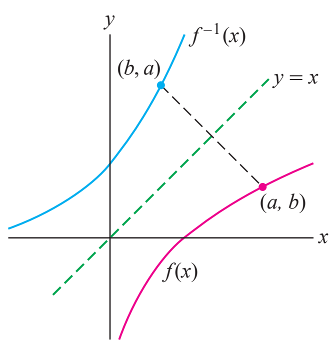


FIGURA 11 La gráfica de $f^{-1}(x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ a través de la recta $y = x$.

La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f a través de $y = x$ (figura 11). Para comprobarlo, observe que (a, b) se encuentra en la gráfica de f si $f(a) = b$. Pero $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$ y, en tal caso, (b, a) se encuentra en la gráfica de f^{-1}.

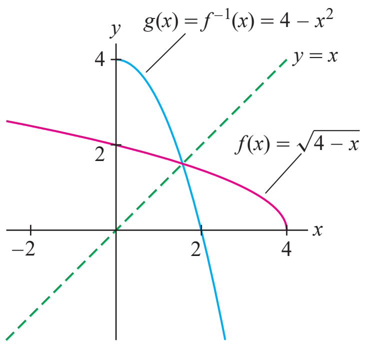


FIGURA 12 Gráf ca de $g(x)$, la inversa de $f(x) = \sqrt{4-x}$.

■ **EJEMPLO 5 Dibujando la gráfica de la inversa** Dibuje la gráf ca de la inversa de $f(x) = \sqrt{4-x}$.

Solución Sea $g(x) = f^{-1}(x)$. Observe que el dominio de $f(x)$ es $\{x : x \leq 4\}$ y el rango es $\{x : x \geq 0\}$. No se necesita una expresión explícita para $g(x)$, si sólo se quiere dibujar su gráf ca: simplemente se ref eja la gráf ca de f a través de la recta $y = x$, tal y como se muestra en la f gura 12. Sin embargo, si se desea, se puede resolver fácilmente $y = \sqrt{4-x}$ y obtener $x = 4 - y^2$; así $g(x) = 4 - x^2$ y su dominio es $\{x : x \geq 0\}$. ■

Derivadas de funciones inversas

A continuación, se va a obtener una fórmula para la derivada de la inversa $f^{-1}(x)$. Se aplicará esta fórmula para derivar las funciones logarítmicas en la sección 7.3.

TEOREMA 2 Derivada de la inversa Suponga que $f(x)$ es derivable e inyectiva con inversa $g(x) = f^{-1}(x)$. Si b pertenece al dominio de $g(x)$ y $f'(g(b)) \neq 0$, entonces $g'(b)$ existe y se verif ca:

$$\boxed{g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}} \qquad \boxed{3}$$

Demostración La primera af rmación, que $g(x)$ es derivable si $f'(g(x)) \neq 0$, se prueba en el apéndice D (vea el teorema 6). Para demostrar la ecuación (3), observe que $f(g(x)) = x$, por la def nición de inversa. Derive a ambos lados de la igualdad y aplique la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x \quad \Rightarrow \quad f'(g(x))g'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Sustituya $x = b$ para obtener la ecuación (3). ■

UN APUNTE GRÁFICO La fórmula de la derivada de la función inversa tiene una clara interpretación gráf ca. Considere una recta L de pendiente m y sea L' su ref exión a través de $y = x$, tal y como se ilustra en la f gura 13(A). Entonces, la pendiente de L' es $1/m$. De hecho, si (a, b) y (c, d) son dos puntos cualesquiera de L, entonces (b, a) y (d, c) se encuentran en L' y tendremos:

$$\underbrace{\text{Pendiente de } L = \frac{d-b}{c-a} \qquad \text{Pendiente de } L' = \frac{c-a}{d-b}}_{\text{Pendientes recíprocas}}$$

Recuerde que la gráf ca de la inversa $g(x)$ se obtiene por ref exión de la de $f(x)$ a través de la recta $y = x$. Tal y como se observa en la f gura 13(B), la recta tangente a $y = g(x)$ en $x = b$ es la ref exión de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$ [donde $b = f(a)$ y $a = g(b)$]. Estas rectas tangentes tienen pendientes inversas y, por tanto, $g'(b) = 1/f'(a) = 1/f'(g(b))$ según se establece en el teorema 2.

■ **EJEMPLO 6 Aplicación de la ecuación (3)** Calcule $g'(x)$, donde $g(x)$ es la inversa de la función $f(x) = x^4 + 10$ sobre el dominio $\{x : x \geq 0\}$.

Solución Aislando x en $y = x^4 + 10$ se obtiene $x = (y - 10)^{1/4}$. Así $g(x) = (x - 10)^{1/4}$. Como $f'(x) = 4x^3$, se tiene que $f'(g(x)) = 4g(x)^3$ y por la ec. (3):

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{4g(x)^3} = \frac{1}{4(x-10)^{3/4}} = \frac{1}{4}(x-10)^{-3/4}$$

Se obtiene el mismo resultado derivando $g(x) = (x - 10)^{1/4}$ directamente. ■

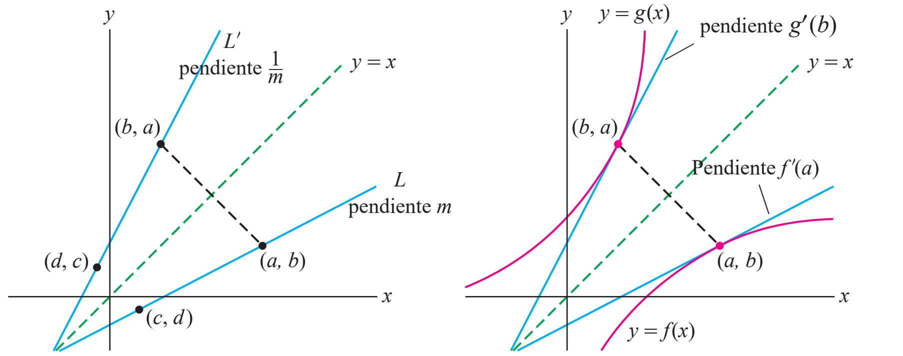


FIGURA 13 Ilustración gráf ca de la fórmula $g'(b) = 1/f'(g(b))$.

(A) Si la pendiente de L es m, entonces la pendiente de su ref exión L' es $1/m$

(B) La recta tangente a la inversa $y = g(x)$ es la ref exión de la recta tangente a $y = f(x)$

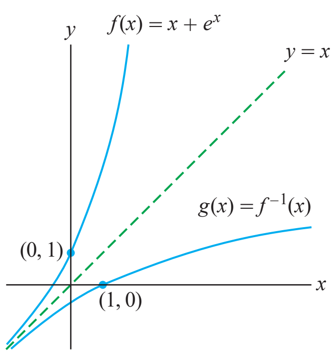


FIGURA 14 Gráf ca de $f(x) = x + e^x$ y de su inversa $g(x)$.

■ **EJEMPLO 7 Cálculo de $g'(x)$ sin resolver $g(x)$** Calcule $g'(1)$, donde $g(x)$ es la inversa de $f(x) = x + e^x$.

Solución En esta situación, no se puede obtener $g(x)$ de forma explícita, pero en realidad no se necesita una fórmula para $g(x)$ (f gura 14). Todo lo que se necesita es el valor concreto de $g(1)$, que se puede hallar resolviendo $f(x) = 1$. Por tanteo, $x = 0$ es solución de $x + e^x = 1$. Así, $f(0) = 1$ y, por def nición de inversa, $g(1) = 0$. Como $f'(x) = 1 + e^x$, entonces:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$ ■

7.2 RESUMEN

- Una función $f(x)$ es *inyectiva* sobre un dominio D si para cualquier valor c, la ecuación $f(x) = c$ tiene, a lo sumo, una solución $x \in D$; o, equivalentemente, si para todo $a, b \in D$, $f(a) \neq f(b)$ salvo cuando $a = b$.
- Sea $f(x)$ una función con dominio D y rango R. La *inversa* $f^{-1}(x)$ (si existe) es la única función de dominio R y rango D cumpliendo $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.
- La inversa de $f(x)$ existe si y sólo si $f(x)$ es inyectiva sobre su dominio.
- Para hallar la función inversa, aísle x, en términos de y, para obtener $x = g(y)$. La inversa es la función $g(x)$.
- *Test de la recta horizontal:* $f(x)$ es inyectiva si y sólo si cualquier recta horizontal corta la gráf ca de $f(x)$ en, a lo sumo, un punto.
- La gráf ca de $f^{-1}(x)$ se obtiene por ref exión de la gráf ca de $f(x)$ a través de la recta $y = x$.
- Derivada de la inversa: si $f(x)$ es derivable e inyectiva con inversa $g(x)$, entonces para cualquier x tal que $f'(g(x)) \neq 0$, se tiene:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

7.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes funciones verif ca que $f^{-1}(x) = f(x)$?

(a) $f(x) = x$ **(b)** $f(x) = 1 - x$

(c) $f(x) = 1$ **(d)** $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = |x|$ **(f)** $f(x) = x^{-1}$

2. La gráf ca de una función parece la pista de una montaña rusa. ¿Es inyectiva esta función?

3. La función f asigna a los adolescentes de los Estados Unidos sus apellidos. Explique por qué la función inversa f^{-1} no existe.

4. El siguiente fragmento de un horario de trenes de la corporación de transporte de New Jersey define una función f de las localidades en los instantes temporales. ¿Es f inyectiva? ¿A qué es igual $f^{-1}(6{:}27)$?

Trenton	6:21
Hamilton Township	6:27
Princeton Junction	6:34
New Brunswick	6:38

5. En un problema de deberes se pide dibujar la gráfica de la *inversa* de $f(x) = x + \cos x$. Frank, después de intentar determinar infructuosamente una fórmula para $f^{-1}(x)$, dice que es imposible representar la inversa. Bianca consigue una representación gráfica precisa, sin obtener f^{-1}. ¿Cómo resolvió Bianca el problema?

6. ¿Cuál es la pendiente de la recta que se obtiene por reflexión de la recta $y = \frac{x}{2}$ a través de la recta $y = x$?

7. Suponga que $P = (2, 4)$ se encuentra en la gráfica de $f(x)$ y que la pendiente de la recta tangente en P es $m = 3$. Dando por sentado que $f^{-1}(x)$ existe, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}(x)$ en el punto $Q = (4, 2)$?

Problemas

1. Pruebe que $f(x) = 7x - 4$ es invertible y halle su inversa.

2. ¿Es inyectiva $f(x) = x^2 + 2$? Si la respuesta es negativa, describa un dominio en el que sea inyectiva.

3. ¿Cuál es el mayor intervalo, conteniendo al cero, sobre el que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es inyectiva?

4. Pruebe que $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ es invertible y halle su inversa.

(a) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$? ¿Y el rango de $f^{-1}(x)$?

(b) ¿Cuál es el dominio de $f^{-1}(x)$? ¿Y el rango de $f(x)$?

5. Compruebe que $f(x) = x^3 + 3$ y $g(x) = (x-3)^{1/3}$ son inversas una de la otra, al verificarse que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.

6. Repita el problema 5 para $f(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ y $g(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$.

7. La velocidad de escape de un planeta de radio R es

$$v(R) = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

donde G es la constante de gravitación universal y M es la masa. Halle la inversa de $v(R)$ expresando R en términos de v.

En los problemas 8-15, halle un dominio sobre el que f sea inyectiva y una fórmula para la inversa de f restringida a ese dominio. Dibuje las gráficas de f y de f^{-1}.

8. $f(x) = 3x - 2$

9. $f(x) = 4 - x$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{7x-3}$

12. $f(s) = \dfrac{1}{s^2}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

14. $f(z) = z^3$

15. $f(x) = \sqrt{x^3 + 9}$

16. Para cada una de las funciones de la figura 15, dibuje la gráfica de la inversa (si fuera necesario, restrinja el dominio de la función).

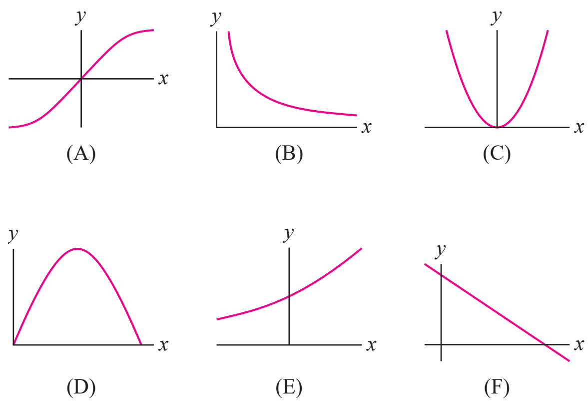


FIGURA 15

17. ¿Cuál de las gráficas de la figura 16 es la gráfica de una función que cumple $f^{-1} = f$?

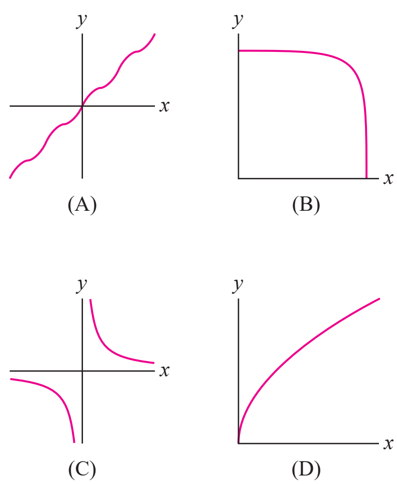


FIGURA 16

18. Sea n un entero no negativo. Halle un dominio sobre el que $f(x) = (1 - x^n)^{1/n}$ coincida con su inversa. *Indicación:* la respuesta depende de si n es par o impar.

19. Sea $f(x) = x^7 + x + 1$.

(a) Pruebe que f^{-1} existe (pero no intente hallarla). *Indicación:* Pruebe que f es estrictamente creciente.

(b) ¿Cuál es el dominio de f^{-1}?

(c) Halle $f^{-1}(3)$.

20. Pruebe que $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ es inyectiva sobre $(-\infty, 0]$, y halle una fórmula de f^{-1}, para este dominio de f.

21. Sea $f(x) = x^2 - 2x$. Determine un domino sobre el que f^{-1} exista, y halle una fórmula de f^{-1}, para este dominio de f.

22. Pruebe que la inversa de $f(x) = e^{-x}$ existe (sin obtenerla de forma explícita). ¿Cuál es el dominio de f^{-1}?

23. Halle la inversa $g(x)$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ con dominio $x \geq 0$ y calcule $g'(x)$ de dos maneras: aplicando el teorema 2 y derivando directamente.

24. Sea $g(x)$ la inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Halle una fórmula para $g(x)$ y calcule $g'(x)$ de dos maneras: aplicando el teorema 2 y, después, derivando directamente.

En los problemas 25-30, aplique el teorema 2 para calcular $g'(x)$,donde $g(x)$ es la inversa de $f(x)$.

25. $f(x) = 7x + 6$

26. $f(x) = \sqrt{3 - x}$

27. $f(x) = x^{-5}$

28. $f(x) = 4x^3 - 1$

29. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

30. $f(x) = 2 + x^{-1}$

31. Sea $g(x)$ la inversa de $f(x) = x^3 + 2x + 4$. Calcule $g(7)$ [sin hallar una fórmula para $g(x)$] y, a continuación, calcule $g'(7)$.

32. Halle $g'(-\frac{1}{2})$, donde $g(x)$ es la inversa de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

En los problemas 33-38, calcule $g(b)$ y $g'(b)$, donde g es la inversa de f (en el dominio dado, si así se indica).

33. $f(x) = x + \cos x, \quad b = 1$

34. $f(x) = 4x^3 - 2x, \quad b = -2$

35. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$ para $x \geq 0, \quad b = 4$

36. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$ para $x \leq -6, \quad b = 4$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad b = \dfrac{1}{4}$

38. $f(x) = e^x, \quad b = e$

39. Sea $f(x) = x^n$ y $g(x) = x^{1/n}$. Calcule $g'(x)$ aplicando el teorema 2 y compruebe su respuesta mediante la regla del producto.

40. Razone gráf camente si las siguientes af rmaciones son verdaderas o falsas. Si fueran falsas, modif que la frase para que sea correcta.

(a) Si $f(x)$ es estrictamente creciente, entonces $f^{-1}(x)$ es estrictamente creciente.

(b) Si $f(x)$ es estrictamente decreciente, entonces $f^{-1}(x)$ es estrictamente decreciente.

(c) Si $f(x)$ es convexa, entonces $f^{-1}(x)$ es convexa.

(d) Si $f(x)$ es cóncava, entonces $f^{-1}(x)$ es cóncava.

(e) Las funciones lineales $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ siempre son inyectivas.

(f) Las polinomios cuadráticos $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ siempre son inyectivos.

(g) sen x no es inyectiva.

Problemas avanzados

42. Demuestre que si $f(x)$ es impar y $f^{-1}(x)$ existe, entonces $f^{-1}(x)$ es impar. Demuestre también que una función par no tiene inversa.

43. Sea g la inversa de una función f tal que $f'(x) = f(x)$. Pruebe que $g'(x) = x^{-1}$. Se aplicará este resultado en la siguiente sección, para demostrar que la inversa de $f(x) = e^x$ (el logaritmo neperiano) es una primitiva de x^{-1}.

FIGURA 1 Renato Solidum, director del Instituto Filipino de Vulcanología y Sismología, comprueba la intensidad del terremoto del 8 de Octubre de 2004 en Manila, que fue de una magnitud de 6,2 en la escala de Richter. La escala de Richter se basa en el logaritmo (en base 10) de la amplitud de las ondas sísmicas. Cada aumento de un natural de la magnitud de Richter corresponde a un incremento de 10 veces la amplitud y a, aproximadamente, 31 veces más energía.

7.3 Logaritmos y sus derivadas

Las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales. De manera más concreta, si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces el *logaritmo en base b*, que se denota $\log_b x$, es la inversa de $f(x) = b^x$. Por def nición, $y = \log_b x$ si y solo si $b^y = x$.

$$\boxed{b^{\log_b x} = x \qquad \text{y} \qquad \log_b(b^x) = x}$$

Por tanto, $\log_b x$ es el número al que se debe elevar b para obtener x. Por ejemplo,

$$\log_2(8) = 3 \qquad \text{pues} \qquad 2^3 = 8$$

$$\log_{10}(1) = 0 \qquad \text{pues} \qquad 10^0 = 1$$

$$\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2 \qquad \text{pues} \qquad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

En este libro, el logaritmo neperiano se denota como $\ln x$. *Otras notaciones habituales son* $\log x$ *o* $\operatorname{Log} x$.

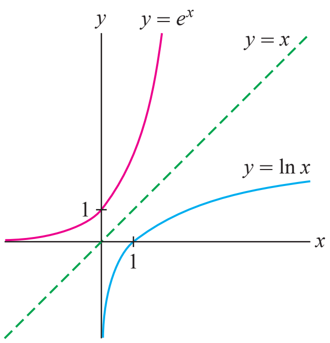


FIGURA 2 $y = \ln x$ es la inversa de $y = e^x$.

El logaritmo en base e, que se denota $\ln x$, desempeña un papel destacado y se denomina **logaritmo neperiano** o natural. Se utiliza una calculadora para evaluar los logaritmos numéricamente. Por ejemplo,

$$\ln 17 \approx 2{,}83321 \quad \text{pues} \quad e^{2{,}83321} \approx 17$$

Recuerde que el dominio de b^x es $\mathbb{R}$ y su rango es el conjunto de los reales positivos $\{x : x > 0\}$. Como el dominio y el rango se intercambian en la función inversa,

- El *dominio* de $\log_b x$ es $\{x : x > 0\}$.
- El *rango* de $\log_b x$ es el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$.

Si $b > 1$, entonces $\log_b x$ es positivo para $x > 1$ y negativo para $0 < x < 1$, y

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty}$$

La f gura 2 ilustra estas af rmaciones cuando la base $b = e$. Recuerde que el logaritmo de un número negativo no existe. Por ejemplo, $\log_{10}(-2)$ no existe pues $10^y = -2$ no tiene solución.

Para cada regla de los exponentes, existe una versión en los logaritmos. A la regla $b^{x+y} = b^x b^y$ le corresponde

$$\boxed{\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y}$$

Expresado en palabras: *El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de sus factores*. Para verif car esta regla, observe que:

$$b^{\log_b(xy)} = xy = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y} = b^{\log_b x + \log_b y}$$

Así, los exponentes $\log_b(xy)$ y $\log_b x + \log_b y$ son iguales, tal y como se había anunciado. Las reglas para los logaritmos se encuentran resumidas en la siguiente tabla.

Reglas de los logaritmos

	Regla	Ejemplo
Logaritmo de 1	$\log_b(1) = 0$	
Logaritmo de b	$\log_b(b) = 1$	
Productos	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	$\log_5(2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3$
Cocientes	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	$\log_2\left(\frac{3}{7}\right) = \log_2 3 - \log_2 7$
Recíprocos	$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x$	$\log_2\left(\frac{1}{7}\right) = -\log_2 7$
Potencias (cualquier n)	$\log_b(x^n) = n \log_b x$	$\log_{10}(8^2) = 2 \cdot \log_{10} 8$

Cabe mencionar, también, que todas las funciones logarítmicas son proporcionales. De forma más concreta, se verif ca la siguiente fórmula de **cambio de base** (vea el problema 119):

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}} \tag{1}$$

■ **EJEMPLO 1** **Aplicación de las reglas de los logaritmos** Evalúe:

(a) $\log_6 9 + \log_6 4$ **(b)** $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ **(c)** $10 \log_b(b^3) - 4 \log_b(\sqrt{b})$

Solución

(a) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9 \cdot 4) = \log_6(36) = \log_6(6^2) = 2$

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \ln(e^{-1/2}) = -\dfrac{1}{2}\ln(e) = -\dfrac{1}{2}$

(c) $10\log_b(b^3) - 4\log_b(\sqrt{b}) = 10 \cdot 3 - 4\log_b(b^{1/2}) = 30 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right) = 28$ ■

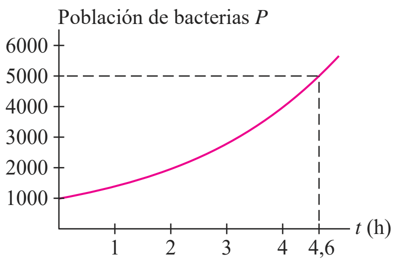


FIGURA 3 Población de bacterias como función del tiempo.

■ **EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación exponencial** El tamaño de la población de bacterias en una botella en el momento t (en horas) es $P(t) = 1000e^{0,35t}$. ¿Al cabo de cuántas horas habrá 5000 bacterias?

Solución Se debe resolver $P(t) = 1000e^{0,35t} = 5000$ en t (f gura 3):

$$
\begin{aligned}
e^{0,35t} &= \frac{5000}{1000} = 5 \\
\ln(e^{0,35t}) &= \ln 5 && \text{(aplique logaritmos en ambos lados)} \\
0,35t &= \ln 5 \approx 1,609 && [\text{pues } \ln(e^a) = a] \\
t &\approx \frac{1,609}{0,35} \approx 4,6 \text{ horas}
\end{aligned}
$$
■

Cálculo de logaritmos

En la sección 7.1 se ha demostrado que, para cualquier base $b > 0$, se tiene:

$$\frac{d}{dx}b^x = m(b)\,b^x \qquad \text{donde} \qquad m(b) = \lim_{h\to 0}\frac{b^h - 1}{h}$$

Sin embargo, no se ha podido identif car el factor $m(b)$ (excepto para af rmar que e es el único valor para el que $m(e) = 1$). Ahora se puede aplicar la regla de la cadena para demostrar que $m(b) = \ln b$. La clave es que cualquier función exponencial se puede expresar en términos de e, pues $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{(\ln b)x}$. Por la regla de la cadena:

RECORDATORIO $\ln x$ *es el logaritmo neperiano, es decir,* $\ln x = \log_e x$.

$$\frac{d}{dx}b^x = \frac{d}{dx}e^{(\ln b)x} = (\ln b)e^{(\ln b)x} = (\ln b)b^x$$

TEOREMA 1 Derivada de $f(x) = b^x$

$$\boxed{\frac{d}{dx}b^x = (\ln b)b^x \qquad \text{para } b > 0} \qquad (2)$$

Por ejemplo, $(10^x)' = (\ln 10)10^x$.

■ **EJEMPLO 3** Derive: **(a)** $f(x) = 4^{3x}$ y **(b)** $f(x) = 5^{x^2}$.

Solución

(a) La función $f(x) = 4^{3x}$ es una composición de 4^u y $u = 3x$:

$$\frac{d}{dx}4^{3x} = \left(\frac{d}{du}4^u\right)\frac{du}{dx} = (\ln 4)4^u(3x)' = (\ln 4)4^{3x}(3) = (3\ln 4)4^{3x}$$

(b) La función $f(x) = 5^{x^2}$ es una composición de 5^u y $u = x^2$:

$$\frac{d}{dx}5^{x^2} = \left(\frac{d}{du}5^u\right)\frac{du}{dx} = (\ln 5)5^u(x^2)' = (\ln 5)5^{x^2}(2x) = (2\ln 5)\,x\,5^{x^2}$$ ■

A continuación, se va a determinar la derivada de $\ln x$. Sea $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$. Entonces $f(g(x)) = x$ y $g'(x) = 1/f'(g(x))$ pues $g(x)$ es la inversa de $f(x)$. Sin embargo, $f'(x) = f(x)$ y, por tanto,

$$\frac{d}{dx}\ln x = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x}$$

En términos de cálculo diferencial, lo más importante sobre exponenciales y logaritmos es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

TEOREMA 2 Derivada del logaritmo neperiano

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \text{para } x > 0} \tag{3}$$

■ **EJEMPLO 4** Describa la gráf ca de $f(x) = \ln x$. ¿Es $f(x)$ estrictamente creciente o estrictamente decreciente?

Solución La derivada de $f'(x) = x^{-1}$ es positiva en el dominio $\{x : x > 0\}$, por tanto $f(x) = \ln x$ es estrictamente creciente. Sin embargo, $f'(x) = x^{-1}$ es estrictamente decreciente, por lo que la gráf ca de $f(x)$ es cóncava y crece de manera más plana cuando $x \to +\infty$ (f gura 4). ■

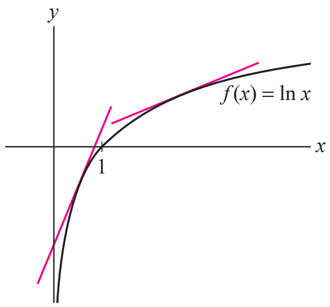


FIGURA 4 Las rectas tangentes a $y = \ln x$ son más planas cuando $x \to +\infty$.

■ **EJEMPLO 5** Derive: **(a)** $y = x\ln x$ y **(b)** $y = (\ln x)^2$.

Solución

(a) Aplique la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(x\ln x) = x\cdot(\ln x)' + (x)'\cdot\ln x = x\cdot\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

(b) Aplique la regla general para las potencias:

$$\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2\ln x\cdot\frac{d}{dx}\ln x = \frac{2\ln x}{x}$$ ■

En la sección 3.2, se demostró la regla de las potencias para exponentes naturales. Ahora se puede demostrar para cualquier exponente real n y $x > 0$ escribiendo x^n como una exponencial y aplicando la regla de la cadena:

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n\ln x}$$
$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\ln x} = \left(\frac{d}{dx}n\ln x\right)e^{n\ln x}$$
$$= \left(\frac{n}{x}\right)x^n = nx^{n-1}$$

Existe una expresión útil para la derivada de una función compuesta de la forma $\ln(f(x))$. Sea $u = f(x)$ y aplique la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{d}{du}\ln(u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{f(x)}f'(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}} \tag{4}$$

■ **EJEMPLO 6** Derive: **(a)** $y = \ln(x^3 + 1)$ y **(b)** $y = \ln(\sqrt{\operatorname{sen} x})$.

Solución Aplique la ec. (4):

(a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\ln(x^3+1) = \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} = \frac{3x^2}{x^3+1}$.

(b) La manipulación algebraica es más simple si se expresa $\ln(\sqrt{\operatorname{sen} x}) = \ln\left((\operatorname{sen} x)^{1/2}\right) =$ $= \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sen} x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{\operatorname{sen} x}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}\frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}\cot x$$ ■

La fórmula del "cambio de base" [ec. (1)]

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

muestra que para cualquier base $b > 0$, $b \neq 1$:

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{(\ln b)x}$$

■ **EJEMPLO 7 Logaritmo en otra base** Calcule $\dfrac{d}{dx}\log_{10} x$.

Solución Por la fórmula del cambio de base que se ha recordado al margen, $\log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ y, por tanto:

$$\frac{d}{dx}\log_{10} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right) = \frac{1}{\ln 10}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{(\ln 10)x}$$ ■

El siguiente ejemplo ilustra la **derivación logarítmica**. Esta técnica es útil cuando una función es un producto o un cociente con diferentes factores.

■ **EJEMPLO 8 Derivación logarítmica** Halle la derivada de:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(2x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solución En la derivación logarítmica, se deriva $\ln(f(x))$ en lugar de $f(x)$. En primer lugar, desarrolle $\ln(f(x))$ usando las reglas logarítmicas:

$$\ln(f(x)) = \ln\left((x+1)^2\right) + \ln(2x^2-3) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) =$$

$$= 2\ln(x+1) + \ln(2x^2-3) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

A continuación, aplique la ec. (4):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln(f(x)) = 2\frac{d}{dx}\ln(x+1) + \frac{d}{dx}\ln(2x^2-3) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x^2+1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\frac{1}{x+1} + \frac{4x}{2x^2-3} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}$$

Finalmente, multiplique por $f(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2(2x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x}{2x^2-3} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$ ■

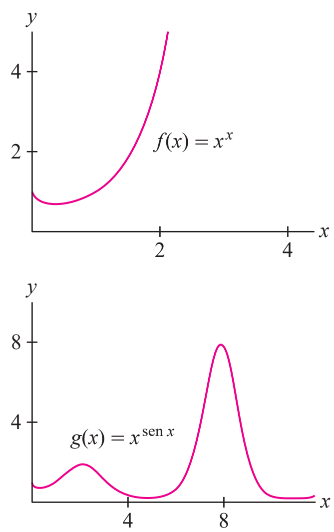


FIGURA 5 Gráf cas de $f(x) = x^x$ y $g(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.

■ **EJEMPLO 9** Derive (para $x > 0$): **(a)** $f(x) = x^x$ y **(b)** $g(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.

Solución Los dos problemas son análogos (f gura 5). Se ilustrarán dos métodos diferentes.

(a) Método 1: utilice la identidad $x = e^{\ln x}$ para escribir $f(x)$ como una exponencial:

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$$
$$f'(x) = (x\ln x)'e^{x\ln x} = (1+\ln x)e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^x$$

(b) Método 2: aplique la ec. (1) a $\ln(g(x))$. Como $\ln(g(x)) = \ln(x^{\operatorname{sen} x}) = (\operatorname{sen} x)\ln x$:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{d}{dx}\left((\operatorname{sen} x)\ln x\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\cos x)\ln x$$

$$g'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\cos x)\ln x\right)g(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\cos x)\ln x\right)x^{\operatorname{sen} x}$$ ■

El logaritmo como una integral

En el capítulo 5, se ha recordado que la regla para el cálculo de integrales de potencias es válida para cualquier exponente $n \neq -1$:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

Esta fórmula no es cierta (o no tiene sentido) si $n = -1$. Entonces: *¿cuál es la primitiva de $y = x^{-1}$?* Llegados a este punto, se puede responder la pregunta: es el logaritmo neperiano. De hecho la fórmula $(\ln x)' = x^{-1}$ establece que $\ln x$ es una primitiva de $y = x^{-1}$ para $x > 0$:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

Estamos interesados en una primitiva de $y = \frac{1}{x}$ sobre su dominio completo, es decir, sobre el dominio $\{x : x \neq 0\}$. Con este objetivo en mente, se introduce $F(x) = \ln|x|$ (f gura 6). Observe que $F(x) = F(-x)$ y que, por la regla de la cadena, $F'(x) = -F'(-x)$. Si $x < 0$, entonces:

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = F'(x) = -F'(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

De esta manera $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$.

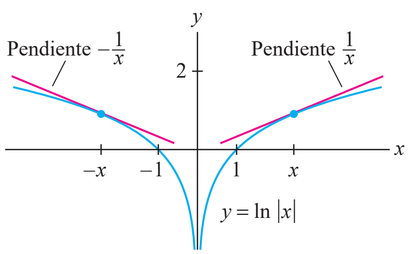


FIGURA 6

TEOREMA 3 Primitiva de $y = \frac{1}{x}$ La función $F(x) = \ln|x|$ es una primitiva de $y = \frac{1}{x}$ en el dominio $\{x : x \neq 0\}$, es decir:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C} \qquad \mathbf{5}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la siguiente fórmula es cierta si a y b son ambos positivos, o ambos negativos (f gura 7):

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{b}{a}} \qquad \mathbf{6}$$

Sustituyendo $a = 1$ y $b = x$, se obtiene una fórmula para el logaritmo neperiano como una integral:

$$\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}} \qquad \mathbf{7}$$

■ **EJEMPLO 10 El logaritmo como una primitiva** Evalúe:

$$\textbf{(a)} \int_2^8 \frac{dx}{x} \quad \text{y} \quad \textbf{(b)} \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x}$$

Solución Por la ec. (6),

$$\int_2^8 \frac{dx}{x} = \ln\frac{8}{2} = \ln 4 \approx 1{,}39 \quad \text{y} \quad \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{-2}{-4}\right) = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}69$$

En las f guras 7(B) y (C) se muestra el área que representan estas integrales. ■

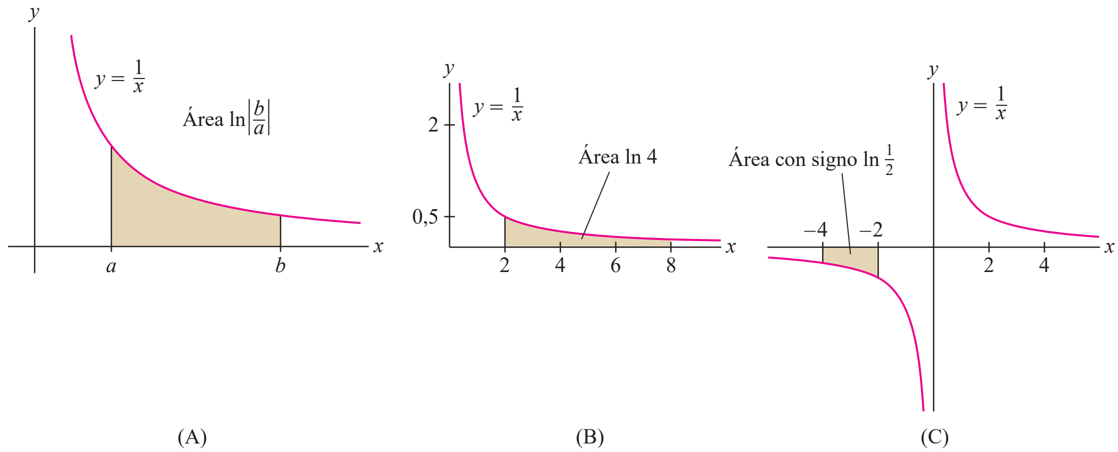


FIGURA 7

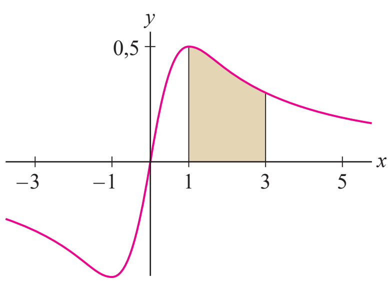


FIGURA 8 Área por debajo de la gráf ca de $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en $[1, 3]$.

■ **EJEMPLO 11** Evalúe:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \tan x\,dx$

Solución

(a) Use la sustitución $u = x^2 + 1$, $\frac{1}{2}du = x\,dx$. En la variable u, los nuevos límites para la integral son $u(1) = 2$ y $u(3) = 10$. La integral es igual al área que se muestra en la f gura 8:

$$\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_2^{10} = \frac{1}{2}\ln 10 - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}805$$

(b) Use la sustitución $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x$:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C =$$
$$= -\ln|\cos x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$$

■

7.3 RESUMEN

- Para $b > 0$ y $b \neq 1$, la *función logarítmica* $\log_b x$ es la inversa de b^x:

$$x = b^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_b x$$

- Si $b > 1$, entonces $\log_b x$ es positivo si $x > 1$ y negativo si $0 < x < 1$, y:

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

- El *logaritmo neperiano* es el logaritmo en base e, y se denota $\ln x$.
- Reglas de los logaritmos:

(i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ **(ii)** $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

(iii) $\log_b(x^n) = n\log_b x$ **(iv)** $\log_b 1 = 0$ y $\log_b b = 1$

- Fórmulas de derivación:

$$(e^x)' = e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad (b^x)' = (\ln b)b^x \qquad \frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{(\ln b)\,x}$$

- Fórmulas de integración:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

7.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Calcule $\log_{b^2}(b^4)$.
2. ¿Cuándo es $\ln x$ negativo?
3. ¿A qué es igual $\ln(-3)$? Razone su respuesta.
4. Explique la af rmación “El logaritmo convierte la multiplicación en adición.”
5. ¿Cuál es el dominio $\ln x$? ¿Y el rango?
6. ¿Existe una primitiva de x^{-1} para $x < 0$? En caso af rmativo, facilite una.
7. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a $y = 4^x$ en $x = 0$?
8. ¿Cuál es la tasa de cambio de $y = \ln x$ en $x = 10$?

Problemas

En los problemas 1-16, halle el resultado sin utilizar una calculadora.

1. $\log_3 27$
2. $\log_5 \frac{1}{25}$
3. $\ln 1$
4. $\log_5(5^4)$
5. $\log_2(2^{5/3})$
6. $\log_2(8^{5/3})$
7. $\log_{64} 4$
8. $\log_7(49^2)$
9. $\log_8 2 + \log_4 2$
10. $\log_{25} 30 + \log_{25} \frac{5}{6}$
11. $\log_4 48 - \log_4 12$
12. $\ln(\sqrt{e}\cdot e^{7/5})$
13. $\ln(e^3) + \ln(e^4)$
14. $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 24$
15. $7^{\log_7(29)}$
16. $8^{3\log_8(2)}$

17. Escriba como el logaritmo natural de una única expresión:

(a) $2\ln 5 + 3\ln 4$ **(b)** $5\ln(x^{1/2}) + \ln(9x)$

18. Resuelva, para x: $\ln(x^2 + 1) - 3\ln x = \ln(2)$

En los problemas 19-24, resuelva para la incógnita.

19. $7e^{5t} = 100$
20. $6e^{-4t} = 2$
21. $2^{x^2-2x} = 8$
22. $e^{2t+1} = 9e^{1-t}$
23. $\ln(x^4) - \ln(x^2) = 2$
24. $\log_3 y + 3\log_3(y^2) = 14$

25. Muestre, con un contraejemplo, que $\ln(ab)$ no es igual a $(\ln a)(\ln b)$.

26. ¿A qué es igual b si $(\log_b x)' = \dfrac{1}{3x}$?

27. La población de una ciudad (en millones) en el instante t (años) es $P(t) = 2{,}4e^{0{,}06t}$, donde $t = 0$ es el año 2000. ¿En qué momento será la población el doble de la que había en $t = 0$?

28. La ley de **Gutenberg-Richter** establece que el número de terremotos por año en todo el mundo de una magnitud en la escala de Richter de, como mínimo, M cumple una relación aproximada dada por $\log_{10} N = a - M$, para alguna constante a. Halle a, suponiendo que hay un terremoto de magnitud $M \geq 8$ por año. ¿Cuántos terremotos de magnitud $M \geq 5$ acontecen por año?

En los problemas 29-48, halle la derivada.

29. $y = x\ln x$
30. $y = t\ln t - t$
31. $y = (\ln x)^2$
32. $y = \ln(x^5)$
33. $y = \ln(9x^2 - 8)$
34. $y = \ln(t5^t)$
35. $y = \ln(\operatorname{sen} t + 1)$
36. $y = x^2\ln x$
37. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
38. $y = e^{(\ln x)^2}$
39. $y = \ln(\ln x)$
40. $y = \ln(\cot x)$
41. $y = (\ln(\ln x))^3$
42. $y = \ln((\ln x)^3)$
43. $y = \ln((x + 1)(2x + 9))$
44. $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x^3+1}\right)$
45. $y = 11^x$
46. $y = 7^{4x-x^2}$
47. $y = \dfrac{2^x - 3^{-x}}{x}$
48. $y = 16^{\operatorname{sen} x}$

En los problemas 49-52, calcule la derivada.

49. $f'(x)$, $f(x) = \log_2 x$
50. $f'(3)$, $f(x) = \log_5 x$
51. $\dfrac{d}{dt}\log_3(\operatorname{sen} t)$
52. $\dfrac{d}{dt}\log_{10}(t + 2^t)$

En los problemas 53-64, halle la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

53. $f(x) = 6^x$, $x = 2$
54. $y = (\sqrt{2})^x$, $x = 8$

55. $s(t) = 3^{9t}, \quad t = 2$

56. $y = \pi^{5x-2}, \quad x = 1$

57. $f(x) = 5^{x^2-2x}, \quad x = 1$

58. $s(t) = \ln t, \quad t = 5$

59. $s(t) = \ln(8 - 4t), \quad t = 1$

60. $f(x) = \ln(x^2), \quad x = 4$

61. $R(z) = \log_5(2z^2 + 7), \quad z = 3$

62. $y = \ln(\operatorname{sen} x), \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

63. $f(w) = \log_2 w, \quad w = \frac{1}{8}$

64. $y = \log_2(1 + 4x^{-1}), \quad x = 4$

En los problemas 65-72, halle la derivada mediante derivación logarítmica como en el ejemplo 8.

65. $y = (x + 5)(x + 9)$

66. $y = (3x + 5)(4x + 9)$

67. $y = (x - 1)(x - 12)(x + 7)$

68. $y = \dfrac{x(x + 1)^3}{(3x - 1)^2}$

69. $y = \dfrac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x + 1}}$

70. $y = (2x + 1)(4x^2)\sqrt{x - 9}$

71. $y = \sqrt{\dfrac{x(x + 2)}{(2x + 1)(3x + 2)}}$

72. $y = (x^3 + 1)(x^4 + 2)(x^5 + 3)^2$

En los problemas 73-78, halle la derivada usando cualquiera de los métodos del ejemplo 9.

73. $f(x) = x^{3x}$

74. $f(x) = x^{\cos x}$

75. $f(x) = x^{e^x}$

76. $f(x) = x^{x^2}$

77. $f(x) = x^{3^x}$

78. $f(x) = e^{x^x}$

En los problemas 79-82, halle los extremos en el dominio $\{x : x > 0\}$ y utilice el test de la segunda derivada para determinar si estos valores son máximos o mínimos locales.

79. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

80. $g(x) = x \ln x$

81. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

82. $g(x) = x - \ln x$

En los problemas 83 y 84, halle los extremos y los puntos de inf exión y dibuje la gráf ca de $y = f(x)$ en el intervalo $[1, 4]$.

83. $f(x) = \dfrac{10 \ln x}{x^2}$

84. $f(x) = x^2 - 8 \ln x$

En los problemas 85-105, evalúe la integral indef nida. Use sustitución si fuere necesario.

85. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{x}$

86. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + 7}$

87. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x + 4}$

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x - 3}$

89. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{t^2 + 4}$

90. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^3 + 2}$

91. $\displaystyle\int \frac{(3x - 1)\,dx}{9 - 2x + 3x^2}$

92. $\displaystyle\int \tan(4x + 1)\,dx$

93. $\displaystyle\int \cot x\,dx$

94. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x + 3}\,dx$

95. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

96. $\displaystyle\int \frac{4 \ln x + 5}{x}\,dx$

97. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

98. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$

99. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x - 1)\ln(8x - 2)}$

100. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\,dx$

101. $\displaystyle\int \cot x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

102. $\displaystyle\int 3^x\,dx$

103. $\displaystyle\int x 3^{x^2}\,dx$

104. $\displaystyle\int \cos x\, 3^{\operatorname{sen} x}\,dx$

105. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2} dx$

En los problemas 106-111, evalúe la integral def nida.

106. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

107. $\displaystyle\int_4^{12} \frac{1}{x}\,dx$

108. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

109. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dt}{3t + 4}$

110. $\displaystyle\int_{-e^2}^{-e} \frac{1}{t}\,dt$

111. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t}\,dt$

112. SAC Halle una buena aproximación numérica de las coordenadas del punto de la gráf ca de $y = \ln x - x$ más cercano al origen (f gura 9).

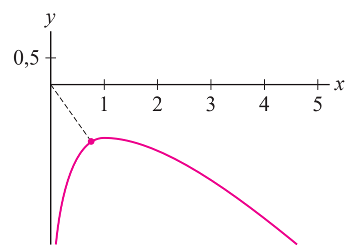


FIGURA 9 Gráf ca de $y = \ln x - x$.

113. Halle el valor mínimo de $f(x) = x^x$ para $x > 0$.

114. Aplique la fórmula $(\ln f(x))' = f'(x)/f(x)$ para demostrar que $\ln x$ y $\ln(2x)$ tienen la misma derivada. ¿Existe una explicación más simple para este resultado?

115. Según un modelo simplif cado, el poder adquisitivo de un dólar en el año 2000 + t es igual a $P(t) = 0{,}68(1{,}04)^{-t}$ (respecto al dólar de 1983). Calcule la tasa prevista de disminución del poder adquisitivo (en céntimos por año) para el año 2020.

116. La energía E (en julios) radiada en forma de ondas sísmicas, como consecuencia de un terremoto de magnitud M en la escala de Richter, verif ca $\log_{10} E = 4{,}8 + 1{,}5M$.

(a) Pruebe que si M aumenta en 1 unidad, la energía se incrementa en un factor de aproximadamente 31,5.

(b) Calcule dE/dM.

117. La Escala Técnica de Amenaza de Impacto de Palermo P se usa para cuantif car el riesgo asociado al impacto de un asteroide contra la Tierra:

$$P = \log_{10}\left(\frac{p_i E^{0,8}}{0,03T}\right)$$

donde p_i es la probabilidad del impacto, T es el número de años hasta el impacto y E es la energía de impacto (en megatones de TNT). El riesgo es mayor que el de un suceso aleatorio de igual magnitud cuando $P > 0$.

(a) Calcule dP/dT, suponiendo que $p_i = 2\times 10^{-5}$ y $E = 2$ megatones.

(b) Use la derivada para estimar el cambio en P, si T aumenta de 8 a 9 años.

Problemas avanzados

118. (a) Pruebe que si f y g son derivables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)g(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad \boxed{8}$$

(b) Proporcione una nueva demostración de la regla del producto para el cálculo de integrales, utilizando que la expresión a la izquierda de la ec. (8) es igual a $\dfrac{(f(x)g(x))'}{f(x)g(x)}$.

119. Demuestre que, para todo a y b positivos con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, se cumple:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

120. Demuestre que, para todo a y b positivos con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, se cumple $\log_a b \log_b a = 1$.

Los problemas 121-123 construyen una elegante aproximación a las funciones exponencial y logarítmica. Para $x > 0$, sea $G(x)$ la función:

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

121. Def nición de ln x como una integral En este problema se procede como si no se supiera que $G(x) = \ln x$ y se muestra directamente que $G(x)$ cumple todas las propiedades básicas del logaritmo. Demuestre las siguientes af rmaciones:

(a) $\displaystyle\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^b \frac{1}{t}\,dt$ para todo $a, b > 0$. *Indicación:* use la sustitución $u = t/a$.

(b) $G(ab) = G(a) + G(b)$. *Indicación:* divida la integral desde 1 hasta ab en dos integrales y aplique (a).

(c) $G(1) = 0$ y $G(a^{-1}) = -G(a)$ para $a > 0$.

(d) $G(a^n) = nG(a)$ para todo $a > 0$ y entero n.

(e) $G(a^{1/n}) = \dfrac{1}{n}G(a)$ para todo $a > 0$ y entero $n \neq 0$.

(f) $G(a^r) = rG(a)$ para todo $a > 0$ y racional r.

(g) $G(x)$ es estrictamente creciente. *Indicación:* aplique el TFC II.

(h) Existe un número a tal que $G(a) > 1$. *Indicación:* pruebe que $G(2) > 0$ y considere $a = 2^m$ para $m > 1/G(2)$.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0+} G(x) = -\infty$

(j) Existe un único número E tal que $G(E) = 1$.

(k) $G(E^r) = r$ para cualquier número racional r.

122. Def nición de e^x Aplique el problema 121 para demostrar las siguientes af rmaciones:

(a) $G(x)$ admite una inversa de dominio $\mathbb{R}$ y rango $\{x : x > 0\}$. Denote la inversa como $F(x)$.

(b) $F(x + y) = F(x)F(y)$ para todo x, y. Indicación: es suf ciente demostrar que $G(F(x)F(y)) = G(F(x + y))$.

(c) $F(r) = E^r$ para todo r. En particular, $F(0) = 1$.

(d) $F'(x) = F(x)$. *Indicación:* Use la fórmula para la derivada de una función inversa.

Así se ha demostrado que $E = e$ y que $F(x)$ es la función e^x tal y como se ha def nido en este libro.

123. Def nición de b^x Sea $b > 0$ y $f(x) = F(xG(b))$ siendo F la función del ejercicio 122. Aplique el ejercicio 121 (f) para demostrar que $f(r) = b^r$ para cualquier número racional r. De esta manera, se puede def nir b^x para un irracional x, como $b^x = f(x)$. Con esta def nición, b^x es una función de x derivable, pues F lo es.

7.4 Crecimiento y decrecimiento exponencial

En esta sección se tratarán algunas aplicaciones de la función exponencial. Considere una cantidad $P(t)$ que dependa de manera exponencial del tiempo:

La constante k tiene unidades de "tiempo inverso"; si t está medido en días, entonces las unidades de k son (días)$^{-1}$.

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{kt}}$$

Si $k > 0$, entonces $P(t)$ *crece exponencialmente* y k se denomina la *constante de crecimiento*. Observe que P_0 es el valor inicial (el valor en $t = 0$):

$$P(0) = P_0 e^{k\cdot 0} = P_0$$

Se puede escribir también $P(t) = P_0 b^t$ siendo $b = e^k$, pues $b^t = (e^k)^t = e^{kt}$.

FIGURA 1 Bacteria *E. coli*, que se encuentra en el intestino humano.

El crecimiento exponencial no puede mantenerse durante largos periodos de tiempo. Una colonia que inicialmente tuviera una sola célula E. coli *crecería hasta estar formada por* 5×10^{89} *células después de 3 semanas, más que el número estimado de átomos en el universo observable. En el crecimiento real de las células, a la fase exponencial le sigue un periodo en el que el crecimiento se desacelera y puede disminuir.*

Una cantidad que disminuye exponencialmente, se dice que presenta un *decrecimiento exponencial*. En tal caso, $P(t) = P_0 e^{-kt}$ siendo $k > 0$; k es la *constante de decrecimiento* o de *decaimiento*.

La población es un ejemplo típico de una cantidad que crece exponencialmente, como mínimo bajo condiciones adecuadas. Para entender por qué, considere una colonia de células de $P_0 = 100$ unidades inicialmente y suponga que cada célula se divide en dos, pasada 1 hora. Entonces, la población se dobla cada hora que pasa:

$$\begin{array}{lcccl} P(0) & & & = 100 & \text{(población inicial)} \\ P(1) & = & 2 \cdot 100 & = 200 & \text{(la población se dobla)} \\ P(2) & = & 2 \cdot 200 & = 400 & \text{(la población se vuelve a doblar)} \end{array}$$

Después de t horas, $P(t) = 100 \cdot 2^t$.

EJEMPLO 1 En el laboratorio, el número de *bacterias Escherichia coli* (f gura 1) crece exponencialmente, siendo la constante de crecimiento $k = 0{,}41$ (horas)$^{-1}$. Suponga que en $t = 0$ hay 1000 bacterias.

(a) Halle una expresión para el número de bacterias $P(t)$ en el instante t.

(b) ¿Cuál es el tamaño de la población de bacterias, pasadas 5 horas?

(c) ¿Cuándo llegará la población a ser igual a 10 000?

Solución El crecimiento es exponencial, por tanto $P(t) = P_0 e^{kt}$.

(a) El tamaño inicial de la población es $P_0 = 1000$ y $k = 0{,}41$, por lo que $P(t) = 1000e^{0{,}41t}$ (t en horas).

(b) Pasadas 5 horas, $P(5) = 1000e^{0{,}41 \cdot 5} = 1000e^{2{,}05} \approx 7767{,}9$. Como el número de bacterias es natural, se redondea la respuesta a 7768.

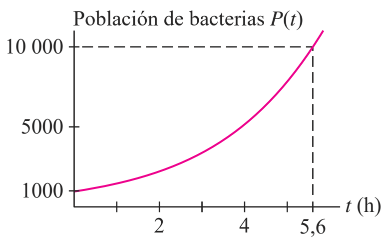


FIGURA 2 Crecimiento de la población de *E. coli*.

(c) Se pide el instante t en el que $P(t) = 10\ 000$, por lo que se debe resolver:

$$1000e^{0{,}41t} = 10\ 000 \quad \Rightarrow \quad e^{0{,}41t} = \frac{10\ 000}{1000} = 10$$

Aplicando logaritmos en ambos lados de la ecuación, se obtiene $\ln(e^{0{,}41t}) = \ln 10$, o:

$$0{,}41t = \ln 10 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{0{,}41} \approx 5{,}62$$

Entonces, $P(t)$ llega a ser 10 000 pasadas, aproximadamente, 5 horas y 37 minutos (f gura 2). ■

El papel destacado que desempeñan las funciones exponenciales se entiende mejor en términos de la *ecuación diferencial* $y' = ky$. La función $y = P_0 e^{kt}$ cumple esta ecuación diferencial, tal y como se puede comprobar directamente:

$$y' = \frac{d}{dt}(P_0 e^{kt}) = kP_0 e^{kt} = ky$$

El teorema 1 va más allá y establece que las funciones exponenciales son las *únicas* funciones que cumplen esta ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función $y = f(x)$ *con su derivada* y' *(o derivadas de orden superior* $y', y'', y''', \ldots$*).*

TEOREMA 1 Si $y(t)$ es una función derivable cumpliendo la ecuación diferencial

$$\boxed{y' = ky}$$

entonces $y(t) = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es el valor inicial $P_0 = y(0)$.

Demostración Calcule la derivada de ye^{-kt}. Si $y' = ky$, entonces:

$$\frac{d}{dt}(ye^{-kt}) = y'e^{-kt} - ke^{-kt}y = (ky)e^{-kt} - ke^{-kt}y = 0$$

Como la derivada es cero, $y(t)e^{-kt} = P_0$ para alguna constante P_0 y $y(t) = P_0e^{kt}$ tal y como se ha anunciado. El valor inicial es $y(0) = P_0e^0 = P_0$. ■

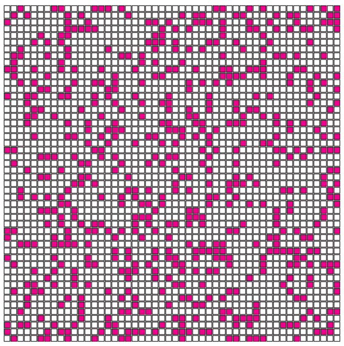


FIGURA 3 Simulación por ordenador de la desintegración radiactiva como un proceso aleatorio. Los cuadrados rojos son átomos que todavía no se han desintegrado. Una fracción f ja de cuadrados rojos se vuelven blancos por cada unidad de tiempo.

UN APUNTE CONCEPTUAL El teorema 1 establece que un proceso sigue una ley exponencial cuando *su tasa de cambio es proporcional a la cantidad presente*. Esto ayuda a entender por qué algunas cantidades crecen, o decrecen, exponencialmente.

Una población crece exponencialmente porque cada organismo contribuye al crecimiento a través de la reproducción y, en consecuencia, la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población. Sin embargo, esto sólo es verdadero bajo ciertas condiciones: si los organismos interaccionan (por ejemplo, compitiendo por comida o por compañeros) entonces la tasa de crecimiento puede no ser proporcional al tamaño de la población y no se puede esperar un crecimiento exponencial.

De manera análoga, los experimentos muestran que las sustancias radiactivas se desintegran exponencialmente. Esto sugiere que la desintegración radiactiva es un experimento aleatorio en el que una fracción f ja de átomos, seleccionados al azar, se desintegra por cada unidad de tiempo (f gura 3). Si no se observara desintegración exponencial, se podría sospechar que la desintegración estaría inf uenciada por alguna interacción entre los átomos.

■ **EJEMPLO 2** Halle todas las soluciones de $y' = 3y$. ¿Qué solución cumple $y(0) = 9$?

Solución Las soluciones de $y' = 3y$ son las funciones $y(t) = Ce^{3t}$, donde C es el valor inicial $C = y(0)$. La solución particular que cumple $y(0) = 9$ es $y(t) = 9e^{3t}$. ■

■ **EJEMPLO 3 Modelo para la penicilina** Los farmacólogos han demostrado que el nivel de penicilina en sangre de un persona disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad presente.

(a) Exprese esta af rmación mediante una ecuación diferencial.

(b) Halle la constante de decaimiento si se sabe que después de 7 horas de una inyección inicial de 450 mg, la cantidad de penicilina presente en sangre es de 50 mg.

(c) Bajo la hipótesis de (b), ¿en qué momento fue el nivel de penicilina en sangre de 200 mg?

Solución

(a) Sea $A(t)$ el nivel de penicilina en sangre en el instante t. Como la tasa de disminución del nivel de penicilina es proporcional a $A(t)$, se tiene que:

$$A'(t) = -kA(t) \qquad \boxed{1}$$

donde $k > 0$, pues $A(t)$ es estrictamente decreciente.

(b) La ec. (1) y la condición $A(0) = 450$ da lugar a que $A(t) = 450e^{-kt}$. La condición adicional $A(7) = 50$ hace posible determinar el valor de k:

$$A(7) = 450e^{-7k} = 50 \quad \Rightarrow \quad e^{-7k} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad -7k = \ln\frac{1}{9}$$

Por tanto, $k = -\frac{1}{7}\ln\frac{1}{9} \approx 0{,}31$.

(c) Para hallar el instante t en el que había 200 mg de penicilina en sangre, se debe resolver:

$$A(t) = 450e^{-0{,}31t} = 200 \quad \Rightarrow \quad e^{-0{,}31t} = \frac{4}{9}$$

Por tanto, $t = -\frac{1}{0{,}31}\ln\left(\frac{4}{9}\right) \approx 2{,}62$ horas (f gura 4). ■

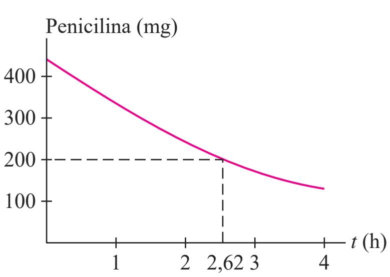
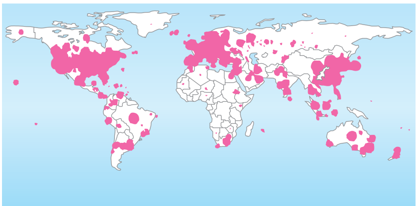


FIGURA 4 El nivel de penicilina en sangre decrece exponencialmente.

La constante k tiene unidades de tiempo^{-1} y, por tanto, las unidades del tiempo de duplicación $T = (\ln 2)/k$ son de tiempo, como cabría esperar. Un cálculo análogo, muestra que el tiempo de triplicación es $(\ln 3)/k$, el de cuadruplicación es $(\ln 4)/k$ y, en general, el tiempo para multiplicarse por n es $(\ln n)/k$.



Número de servidores infectados por Sapphire: 74855

FIGURA 5 Alcance de la infección por el virus informático Sapphire 30 minutos después de su lanzamiento. Los equipos infectados arrojaron miles de millones de copias del virus en el ciberespacio, ralentizando de forma signif cativa el tráf co de Internet y por ello interf riendo en empresas, horarios de vuelo y cajeros automáticos.

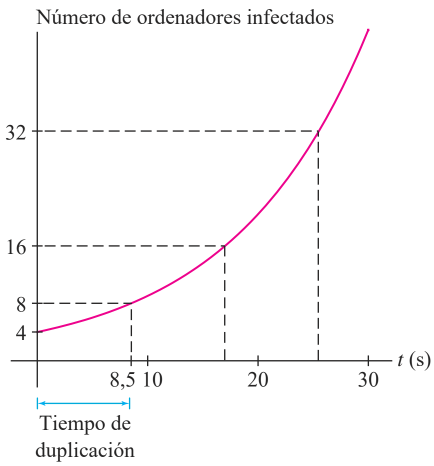


FIGURA 6 La duplicación (de 4 a 8, a 16 etc.) tiene lugar en intervalos de tiempo de la misma longitud.

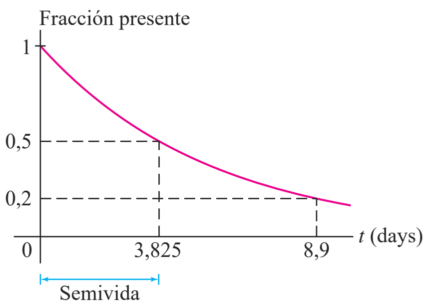


FIGURA 7 Fracción de radón-222 presente en el momento t.

Las cantidades que crecen exponencialmente, poseen una propiedad importante: existe un tiempo T, llamado de duplicación, para el que $P(t)$ se duplica en cualquier intervalo de tiempo de longitud T. Para demostrarlo, sea $P(t) = P_0 e^{kt}$ y, aislando T de la ecuación $P(t+T) = 2P(t)$, se tiene:

$$\begin{aligned} P_0 e^{k(t+T)} &= 2P_0 e^{kt} \\ e^{kt} e^{kT} &= 2e^{kt} \\ e^{kT} &= 2 \end{aligned}$$

De donde $kT = \ln 2$, es decir, $T = (\ln 2)/k$.

Tiempo de duplicación

Si $P(t) = P_0 e^{kt}$ con $k > 0$, entonces el tiempo de duplicación de P es:

$$\boxed{\text{tiempo de duplicación} = \frac{\ln 2}{k}}$$

■ **EJEMPLO 4 Propagación del gusano informático Sapphire** Un virus informático apodado el *gusano Sapphire* se propagó por Internet el 25 de Enero de 2003 (f gura 5). Los análisis sugieren que, durante los primeros minutos, la población de los equipos infectados creció exponencialmente con constante de crecimiento $k = 0{,}0815\ \mathrm{s}^{-1}$.

(a) ¿Cuál fue el tiempo de duplicación del virus?

(b) Si el virus se inició en cuatro equipos, ¿cuántos ordenadores estaban infectados después de 2 minutos? ¿Y después de 3 minutos?

Solución

(a) El tiempo de duplicación es $(\ln 2)/0{,}0815 \approx 8{,}5$ segundos (f gura 6).

(b) Si $P_0 = 4$, el número de ordenadores infectados después de t segundos es $P(t) = 4e^{0{,}0815t}$. Pasados 2 minutos (120 segundos), el número de ordenadores infectados fue:

$$P(120) = 4e^{0{,}0815(120)} \approx 70\ 700$$

Pasados 3 minutos, este número hubiera sido igual a $P(180) = 4e^{0{,}0815(180)} \approx 9{,}4$ millones. Sin embargo, se estima que fueron infectados un total de, aproximadamente, 75 000 equipos, por lo que la fase exponencial del virus no pudo haber durado más de 2 minutos. ■

En la situación de decaimiento exponencial $P(t) = P_0 e^{-kt}$, la **semivida** o vida media es el tiempo necesario para que se reduzca la cantidad a la mitad. Un cálculo análogo al del tiempo de duplicación prueba que:

$$\boxed{\text{semivida} = \frac{\ln 2}{k}}$$

■ **EJEMPLO 5** El isótopo radón-222 se desintegra exponencialmente con semivida 3,825 días. ¿Cuánto tiempo se necesita para que el 80 % del isótopo se haya desintegrado?

Solución Según la fórmula para la semivida, k es igual a $\ln 2$ dividido por la semivida:

$$k = \frac{\ln 2}{3{,}825} \approx 0{,}181$$

Por tanto, la cantidad de radón-222 en el momento t es $R(t) = R_0 e^{-0{,}181t}$, donde R_0 es la cantidad presente en el momento $t = 0$ (f gura 7). Si el 80 % se ha desintegrado, queda el

20 %, y aislando t en la ecuación $R_0e^{-0{,}181t} = 0{,}2R_0$, se tiene:

$$e^{-0{,}181t} = 0{,}2$$

$$-0{,}181t = \ln(0{,}2) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(0{,}2)}{-0{,}181} \approx 8{,}9 \text{ días}$$

El 80 % del radón-222 se ha desintegrado pasados 8,9 días. ■

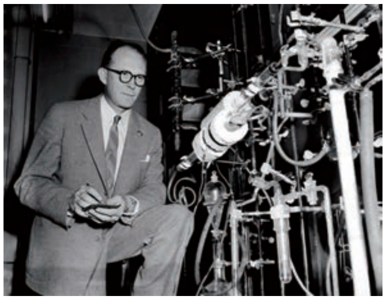


FIGURA 8 El químico norteamericano Willard Libby (1908-1980) desarrolló la técnica de datación por carbono en 1946, para determinar la antigüedad de fósiles, y recibió el premio Nobel de química en 1960 por su trabajo. Desde entonces, la técnica se ha perfeccionado considerablemente.

Datación por carbono

La datación por carbono (f gura 8) se basa en el hecho que todos los organismos vivos contienen carbono; éste entra en la cadena alimentaria a través del dióxido de carbono absorbido por las plantas de la atmósfera. El carbono de la atmósfera está formado de C^{12} no radiactivo y de una mínima cantidad de C^{14} que se desintegra en nitrógeno. La proporción de C^{14} respecto al C^{12} es aproximadamente $R_{\text{atm}} = 10^{-12}$.

El carbono en un organismo vivo sigue la misma proporción R_{atm} pues éste se origina en la atmósfera pero, cuando el organismo muere, su carbono ya no se repone. El C^{14} empieza a desintegrase exponencialmente, mientras que el C^{12} se mantiene inalterado. En consecuencia, la proporción de C^{14} respecto a C^{12} en el organismo decrece exponencialmente. Midiendo esta proporción, se puede determinar en qué momento aconteció la muerte. La constante de decaimiento para C^{14} es $k = 0{,}000121$ años^{-1}, por tanto:

$$\text{Proporción de } C^{14} \text{ respecto a } C^{12} \text{ pasados } t \text{ años} = R_{\text{atm}}e^{-0{,}000121t}$$

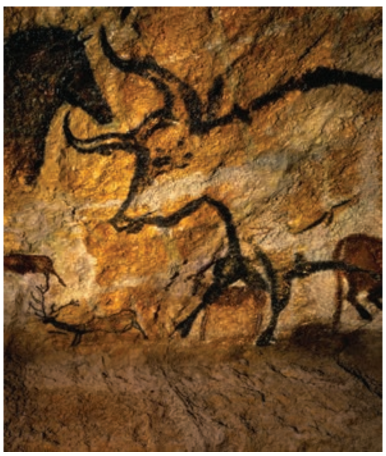


FIGURA 9 Réplica de la pintura mural de la cueva de Lascaux de un toro y un caballo.

■ **EJEMPLO 6 Pinturas murales de una cueva** En 1940, se descubrió una importante galería de pinturas murales de animales prehistóricos en la cueva de Lascaux en Dordogne, Francia (f gura 9). Una muestra de carbón vegetal de las paredes de la cueva presentó una proporción de C^{14} respecto a C^{12} igual al 15 % del que se encuentra en la atmósfera. ¿Cuál es la antiguedad aproximada de las pinturas?

Solución La proporción de C^{14} respecto a C^{12} en el carbón vegetal es igual en la actualidad a $0{,}15R_{\text{atm}}$. Así:

$$R_{\text{atm}}e^{-0{,}000121t} = 0{,}15R_{\text{atm}}$$

donde t es la antigüedad de las pinturas murales. Aislando t:

$$e^{-0{,}000121t} = 0{,}15$$

$$-0{,}000121t = \ln(0{,}15) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(0{,}15)}{0{,}000121} \approx 15\ 700$$

Las pinturas murales de la cueva tienen una antigüedad aproximada de 16 000 años (f gura 10). ■

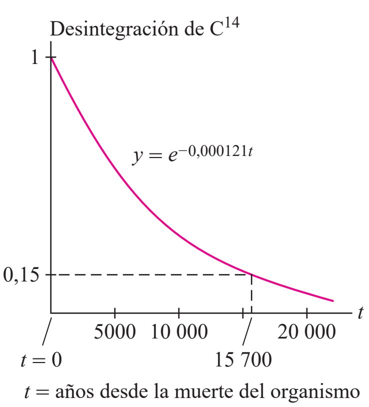


FIGURA 10 Si únicamente queda el 15 % del C^{14}, la antigüedad del objecto es, aproximadamente, de 16 000 años.

7.4 RESUMEN

- *Crecimiento exponencial* con constante de crecimiento $k > 0$: $P(t) = P_0e^{kt}$.
- *Decrecimiento exponencial* con constante de decrecimiento o decaimiento $k > 0$: $P(t) = P_0e^{-kt}$.
- Las soluciones de la ecuación diferencial $y' = ky$ son las funciones exponenciales $y = Ce^{kt}$, donde C es una constante.
- Una cantidad $P(t)$ crece exponencialmente si aumenta con una tasa proporcional a su tamaño, es decir, si $P'(t) = kP(t)$.
- El *tiempo de duplicación* para el crecimiento exponencial y la *semivida* para el decrecimiento exponencial son ambos iguales a $(\ln 2)/k$.
- Para aplicar en la datación por carbono: la constante de decaimiento del C^{14} es $k = 0{,}000121$.

7.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dos cantidades aumentan exponencialmente, siendo las constantes de crecimiento respectivas $k = 1{,}2$ y $k = 3{,}4$. ¿Qué cantidad se duplica antes?

2. Una población de células crece exponencialmente a partir de una única célula. ¿Qué tarda más, pasar de una a dos células o de 15 millones a 20 millones de células?

3. Ref riéndose a su conocido libro *Breve historia del tiempo*, el renombrado físico Stephen Hawking dijo: "Alguien me contó que cada ecuación que incluyera en el libro, bajaría a la mitad sus ventas." Determine una ecuación diferencial para la función $S(n)$, el número de copias vendidas si el libro tiene n ecuaciones.

4. La datación por carbono, se basa en la hipótesis que el cociente R de C^{14} entre C^{12} en la atmósfera se ha mantenido constante durante los pasados 50 000 años. Si, en realidad, R fuera menor en el pasado que en la actualidad, las estimaciones de la edad resultantes por datación con carbono ¿serían mayores o menores?

Problemas

1. Una determinada población de bacterias P sigue una ley de crecimiento exponencial dada por $P(t) = 2000e^{1,3t}$ (t en horas).

(a) ¿Cuántas bacterias hay inicialmente?

(b) ¿En qué momento habrá 10 000 bacterias?

2. Una cantidad P sigue una ley de crecimiento exponencial $P(t) = e^{5t}$ (t en años).

(a) ¿En qué momento t, P es igual a 10?

(b) ¿Cuál es el tiempo de duplicación de P?

3. Exprese $f(t) = 5(7)^t$ de la forma $f(t) = P_0e^{kt}$ para P_0 y k constantes apropiadas.

4. Exprese $f(t) = 9e^{1,4t}$ de la forma $f(t) = P_0b^t$ para P_0 y b constantes apropiadas.

5. Una determinada molécula de ARN se replica cada tres minutos. Halle una ecuación diferencial para el número $N(t)$ de moléculas presentes en el instante t (en minutos). Al cabo de una hora, ¿cuántas moléculas habrá, si en $t = 0$ había una sola molécula?

6. Una cantidad P sigue una ley de crecimiento exponencial $P(t) = Ce^{kt}$ (t en años). Halle una expresión para $P(t)$, suponiendo que el tiempo de duplicación es de 7 años y que $P(0) = 100$.

7. Halle todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -5y$. ¿Qué solución cumple la condición inicial $y(0) = 3{,}4$?

8. Halle la solución de $y' = \sqrt{2}y$ cumpliendo $y(0) = 20$.

9. Halle la solución de $y' = 3y$ cumpliendo $y(2) = 1000$.

10. Determine la función $y = f(t)$ que cumpla la ecuación diferencial $y' = -0{,}7y$ y la condición inicial $y(0) = 10$.

11. La constante de decaimiento del cobalto-60 es 0,13 año^{-1}. Halle su semivida.

12. La semivida del radio-226 es 1622 años. Halle su constante de decaimiento.

13. Una de las plantas con f ores más pequeñas del mundo, *Wolff a globosa* (f gura 11), tiene un tiempo de duplicación de 30 horas aproximadamente. Halle la constante de crecimiento k y determine la población inicial, si la población creció hasta 1000 individuos pasadas 48 horas.

FIGURA 11 Las pequeñas plantas son *Wolff a*, cuyas partes son más pequeñas que la cabeza de un alf ler.

14. Una cantidad de 10-kg de un isótopo radiactivo se desintegra, quedando 3 kg pasados 17 años. Halle la constante de decaimiento del isótopo.

15. La población de una ciudad es $P(t) = 2 \cdot e^{0,06t}$ (en millones), donde t se mide en años. Calcule el tiempo de duplicación de la población, el tiempo necesario para que ésta se triplique, y el necesario para que se multiplique por siete.

16. ¿Qué ecuación diferencial cumple $P(t)$, el número de equipos informáticos infectados en el ejemplo 4? ¿A lo largo de qué intervalo de tiempo $P(t)$ multiplicará su tamaño por cien?

17. La constante de decrecimiento para una determinada droga es $k = 0{,}35$ día^{-1}. Calcule el tiempo que tarda la cantidad presente en sangre en disminuir a la mitad, a la tercera parte y a la décima parte.

18. Intensidad de la luz La intensidad de la luz que pasa a través de un medio absorbente decrece exponencialmente con la distancia recorrida. Suponga que la constante de decrecimiento para un determinado bloque de plástico es $k = 4$ m^{-1}. ¿Cuál debe ser el espesor del bloque para reducir la intensidad en un factor de un tercio?

19. Suponiendo que el crecimiento de una población es aproximadamente exponencial, ¿cuál de los siguientes conjuntos de datos es más probable que represente a la población (en millones) de una ciudad en un periodo de 5 años?

Año	2000	2001	2002	2003	2004
Datos I	3,14	3,36	3,60	3,85	4,11
Datos II	3,14	3,24	3,54	4,04	4,74

20. La **presión atmosférica** $P(h)$ (en kilo pascales) a una altura de h metros por encima del nivel del mar cumple la ecuación diferencial $P' = -kP$ para alguna constante positiva k.

(a) Según las mediciones barométricas $P(0) = 101{,}3$ y $P(30\,900) = 1{,}013$. ¿Cuál es la constante de decrecimiento k?

(b) Determine la presión atmosférica para $h = 500$.

21. Licenciados en Física Según un estudio, el número de licenciados en Física por año en universidades de EE.UU. desde 1955 to 1970 ha crecido exponencialmente, siendo la constante de crecimiento $k = 0{,}1$.

(a) Si continua el crecimiento exponencial, ¿cuánto tardaría el número de licenciados por año en multiplicarse por 14?

(b) Si en 1955 se licenciaron 2500 estudiantes, ¿en qué año se licenciaron 10 000?

22. La **Ley Beer-Lambert** se utiliza en espectroscopia para determinar la absorbencia molar α, es decir, la concentración c de un compuesto disuelto en una solución en bajas concentraciones (f gura 12). Esta ley establece que la intensidad I de la luz cuando pasa a través de la solución cumple $\ln(I/I_0) = \alpha c x$, donde I_0 es la intensidad inicial y x es la distancia recorrida por la luz. Demuestre que I cumple la ecuación diferencial $dI/dx = -kI$, para alguna constante k.

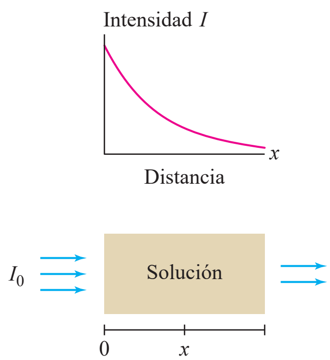


FIGURA 12 Luz de intensidad I_0 que atraviesa una solución.

23. Un fragmento de un pergamino de piel de oveja descubierto por unos arqueólogos presentó un cociente de C^{14} respecto a C^{12} igual al 40 % del que se encuentra en la atmósfera. ¿Cuál es la antigüedad aproximada del pergamino?

24. Cuevas de Chauvet En 1994, tres espeleólogos franceses (geólogos especializados en cuevas) descubrieron una cueva en el sur de Francia con pinturas murales prehistóricas. Un análisis del C^{14}, llevado a cabo por la arqueóloga Helene Valladas, mostró que las pinturas tenían entre 29 700 y 32 400 años, mucho más antiguas que cualquier otra representación artística conocida. Puesto que la razón de C^{14} respecto a C^{12} en la atmósfera es $R = 10^{-12}$, ¿qué rango de valores, para el cociente de C^{14} respecto a C^{12}, halló Valladas para los restos de carboncillo?

25. Un paleontólogo descubre restos de animales que parecen haber muerto en el inicio de la edad de hielo del Holoceno, hace entre 10 000 y 12 000 años. ¿Qué rango de valores, para el cociente de C^{14} respecto a C^{12}, esperaría hallar el científ co en estos restos animales?

26. Inversión de azúcar Cuando el azúcar común se disuelve en el agua, se convierte en azúcar invertido durante un período de varias horas. El porcentaje $f(t)$ de azúcar no invertido en el instante t (en horas) cumple $f' = -0{,}2f$. ¿Qué porcentaje de azúcar común continúa presente pasadas 5 horas? ¿Y pasadas 10 horas?

27. Continuando con el problema 26, suponga que se disuelven 50 gramos de azúcar en un depósito con agua. ¿Después de cuántas horas la cantidad de azúcar invertido presente será de 20?

28. Se cultivan dos colonias de bacterias en un laboratorio. La primera colonia tiene un tiempo de duplicación de 2 horas y la segunda, de 3 horas. Inicialmente, la primera colonia está formada por 1000 bacterias y la segunda, por 3000. ¿En qué momento t el tamaño de ambas colonias será el mismo?

29. Ley de Moore En 1965, Gordon Moore predijo que el número N de transistores en un microchip aumentaría exponencialmente.

(a) La tabla adjunta, ¿conf rma la predicción de Moore para el periodo que va de 1971 a 2000? En caso af rmativo, estime la constante de crecimiento k.

(b) SAC Represente gráf camente los valores de la tabla.

(c) Sea $N(t)$ el número de transistores transcurridos t años a partir de 1971. Halle una fórmula aproximada $N(t) \approx Ce^{kt}$, donde t sea el número de años transcurridos después de 1971.

(d) Estime el tiempo de duplicación en la ley de Moore para el periodo que va de 1971 a 2000.

(e) ¿Cuántos transistores tendrá un chip en 2015 si la ley de Moore continúa manteniéndose?

(f) ¿Puede esperar Moore que su predicción se siga manteniendo indef nidamente?

Procesador	Año	Nº. Transistores
4004	1971	2250
8008	1972	2500
8080	1974	5000
8086	1978	29 000
286	1982	120 000
386 procesador	1985	275 000
486 DX procesador	1989	1 180 000
Pentium procesador	1993	3 100 000
Pentium II procesador	1997	7 500 000
Pentium III procesador	1999	24 000 000
Pentium 4 procesador	2000	42 000 000
Xeon procesador	2008	1 900 000 000

30. Suponga que en un determinado país, la razón a la que se crea empleo es proporcional al número de personas que ya tienen trabajo. Si en $t = 0$ hay 15 millones de personas con trabajo y 15,1 millones tres meses después, ¿cuántos empleos habrá después de 2 años?

31. Las únicas funciones que tienen un tiempo de duplicación *constante* son las funciones exponenciales P_0e^{kt} con $k > 0$. Pruebe que el tiempo de duplicación de una función lineal $f(t) = at + b$ en el instante t_0 es $t_0 + b/a$ (el cual se incrementa al hacerlo t_0). Calcule los tiempos de duplicación de $f(t) = 3t + 12$ en $t_0 = 10$ y en $t_0 = 20$.

32. Verif que que la semivida de una cantidad que se desintegra exponencialmente, con constante de decaimiento k, es igual a $(\ln 2)/k$.

33. **Fármaco a dosis periódicas** Sea $y(t)$ la concentración de un determinado fármaco (en mg/kg) en el cuerpo de un paciente en el instante t. La concentración inicial es $y(0) = L$. Se administran dosis adicionales en intervalos regulares de tiempo de longitud T, las cuales incrementan la concentración en una cantidad d. Entre cada dosis, $y(t)$ decrece exponencialmente, es decir, $y' = -ky$. Halle el valor de T (en términos de k y de d) para el que la concentración varía entre L y $L - d$, tal y como se ilustra en la f gura 13.

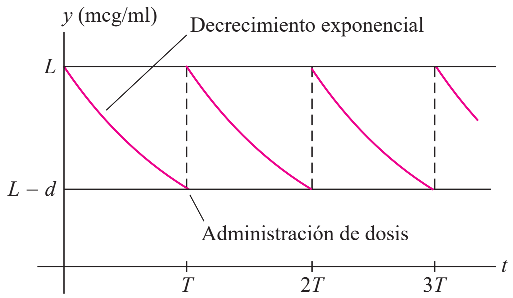


FIGURA 13 Concentración de fármaco con dosis periódicas.

Problemas 34 y 35: La ***ecuación diferencial de Gompertz***

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln\left(\frac{y}{M}\right) \qquad \boxed{2}$$

(donde M y k son constantes) fue introducida en 1825 por el matemático inglés Benjamin Gompertz y todavía se utiliza hoy en día para modelar el envejecimiento y la mortalidad.

34. Pruebe $y = Me^{ae^{kt}}$ cumple la ec. (2) para cualquier constante a.

35. Para modelar la mortalidad en una población de 200 ratas de laboratorio, un científico supone que el número $P(t)$ de ratas vivas en el instante t (en meses) cumple la ec. (2) con $M = 204$ y $k = 0{,}15$ mes^{-1} (figura 14). Halle $P(t)$ [observe que $P(0) = 200$] y determine la población al cabo de 20 meses.

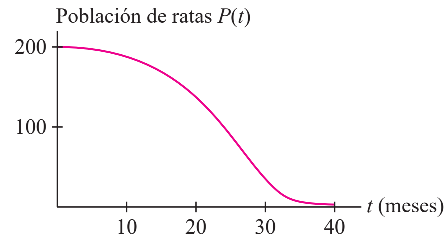


FIGURA 14

36. **Datación por isótopos** ¿Cual de los siguientes isótopos sería más apropiado para datar rocas extremadamente antiguas: carbono-14 (semivida 5570 años), plomo-210 (semivida 22,26 años) o potasio-49 (semivida 1,3 miles de millones de años)? Explique por qué.

Problemas avanzados

37. Sea $P = P(t)$ una cantidad que sigue una ley exponencial con constante de crecimiento k. Pruebe que P se multiplica por m pasado un periodo de tiempo de $(\ln m)/k$ años.

38. **Tiempo medio de decaimiento** Los físicos utilizan la ley de desintegración radiactiva $R = R_0 e^{-kt}$ para calcular el promedio o *tiempo medio* M hasta que el átomo se desintegra. Sea $F(t) = R/R_0 = e^{-kt}$ la fracción de átomos que ha sobrevivido hasta el instante t sin desintegrarse.

(a) Halle la función inversa $t(F)$.

(b) Por definición de $t(F)$, una fracción de átomos $1/N$ se desintegra en el intervalo de tiempo:

$$\left[t\left(\frac{j}{N}\right), t\left(\frac{j-1}{N}\right)\right]$$

Aplique esta afirmación para justificar la aproximación

$$M \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t\left(\frac{j}{N}\right).$$

A continuación razone, pasando al límite cuando $N \to +\infty$, que $M = \int_0^1 t(F)\,dF$. Estrictamente hablando, se trata de una *integral impropia* porque $t(0)$ es infinito (se tarda una cantidad infinita de tiempo para que todos los átomos se desintegren). Por tanto, se define M como un límite:

$$M = \lim_{c\to 0}\int_c^1 t(F)\,dF$$

(c) Verifique la fórmula $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$ mediante derivación y aplíquela para demostrar que, para todo $c > 0$, se tiene:

$$M = \lim_{c\to 0}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}(c\ln c - c)\right)$$

(d) Compruebe numéricamente que $\lim_{c\to 0}(c - \ln c) = 0$ (se demostrará usando la regla de L'Hôpital, que se encuentra en la sección 7.7). Use este resultado para demostrar que $M = 1/k$.

(e) ¿Cuál es el tiempo medio de desintegración del radón, cuya semivida es de 3,825 días?

7.5 Interés compuesto y valor actual

Las funciones exponenciales se utilizan con asiduidad en cálculos financieros. Dos aplicaciones básicas son el interés compuesto y el valor actual.

Cuando una cantidad de dinero, P_0, denominada el **capital**, se deposita en una cuenta que devenga intereses, el valor o **saldo** en la cuenta depende de dos factores: la **tasa de interés** r y la frecuencia con la que el interés se **compone**. El interés que se paga al cabo de un año, al final de éste, se dice que se ha *compuesto anualmente*. El saldo se incrementa en un factor $(1 + r)$ después de cada año transcurrido, dando lugar a un crecimiento exponencial:

Convención: El tiempo t se mide en años y las tasas de interés se expresan como tasas anuales, ya sea en forma decimal o como porcentaje. Por tanto, $r = 0{,}05$ corresponde a una tasa de interés del 5 % por año.

	Capital	+	Interés	=	Saldo
Pasado 1 año	P_0	+	rP_0	=	$P_0(1+r)$
Pasados 2 años	$P_0(1+r)$	+	$rP_0(1+r)$	=	$P_0(1+r)^2$
...		...			
Pasados t años	$P_0(1+r)^{t-1}$	+	$rP_0(1+r)^{t-1}$	=	$P_0(1+r)^t$

Suponga que el interés se abona trimestralmente (cada 3 meses). Entonces, el interés generado después de 3 meses es $\frac{r}{4}P_0$ dólares y el saldo se incrementa en un factor $(1+\frac{r}{4})$. Transcurrido un año (4 trimestres), el saldo se incrementa hasta $P_0\left(1+\frac{r}{4}\right)^4$ y pasados t años:

$$\text{Saldo pasados } t \text{ años} = P_0\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4t}$$

Por ejemplo, si $P_0 = 100$ y $r = 0{,}09$, entonces transcurrido un año el saldo es:

$$100\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{12} = 100(1{,}0075)^{12} \approx 100(1{,}09381) \approx 109{,}38$$

De manera más general:

TABLA 1 **Interés compuesto, para un capital $P_0 = 100$ \$ y $r = 0{,}09$**

	Capital pasado 1 año
Anual	$100(1+0{,}09) = 109$ \$
Trimestral	$100(1+\frac{0{,}09}{4})^4 \approx 109{,}31$ \$
Mensual	$100(1+\frac{0{,}09}{12})^{12} \approx 109{,}38$ \$
Semanal	$100(1+\frac{0{,}09}{52})^{52} \approx 109{,}41$ \$
Diario	$100(1+\frac{0{,}09}{365})^{365} \approx 109{,}42$ \$

Interés compuesto Si se depositan P_0 dólares en una cuenta que devenga un interés anual de razón r, compuesto M veces anualmente, entonces el valor de la cuenta pasados t años será:

$$\boxed{P(t) = P_0\left(1+\frac{r}{M}\right)^{Mt}}$$

El factor $(1+\frac{r}{M})^M$ se denomina **multiplicador anual**.

La tabla 1 muestra el efecto de componer más frecuentemente. ¿Qué ocurre en el límite, cuando M tiende a inf nito? Esta pregunta se responde en el siguiente teorema (se facilita una demostración al f nal de esta sección).

TEOREMA 1 **Fórmula para e y e^x en términos de límites**

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{y} \quad e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{para todo } x}$$

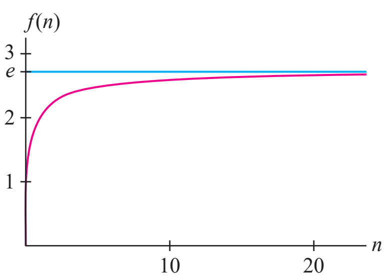


FIGURA 1 La función $f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$ tiende a e cuando $n \to +\infty$.

La f gura 1 ilustra el primer límite gráf camente. Para calcular el límite del multiplicador anual, cuando $M \to +\infty$, se considera el segundo límite con $x = r$ y $n = M$:

$$\lim_{M\to+\infty}\left(1+\frac{r}{M}\right)^M = e^r \qquad \boxed{1}$$

El multiplicador, para t años, es $(e^r)^t = e^{rt}$. De esta manera, se obtiene la siguiente def nición.

Interés compuesto continuo Si se depositan P_0 dólares en una cuenta que devenga un interés anual de razón r, continuamente compuesto, entonces el valor de la cuenta pasados t años será:

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{rt}}$$

EJEMPLO 1 Se deposita un capital de $P_0 = 100\ 000$ ¥ (yen japonés) en una cuenta que devenga un interés anual del 6 %. Halle el saldo pasados 3 años si el interés se compone trimestralmente y si el interés es continuo.

Nota: La matemática de las tasas de interés es la misma para todas las monedas (dólares, euros, pesos, yen, etc.).

Solución Pasados 3 años, el saldo es:

$$\text{Compuesto trimestralmente}: \quad 100\ 000\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4(3)} \approx 119\ 562\ \text{¥}$$

$$\text{Compuesto continuo}: \quad 100\ 000e^{(0{,}06)3} \approx 119{,}722\ \text{¥}$$

Valor actual

El concepto de *valor actual* (VA) se utiliza en negocios y finanzas para comparar pagos realizados en diferentes momentos temporales. Suponga que la tasa de interés (compuesto) a la que un inversor puede prestar, o pedir prestado, es r. Por definición, el VA de P dólares que se recibirán al cabo de t años, en el futuro, es Pe^{-rt}:

El VA de P dólares recibidos en el instante t es Pe^{-rt}.

En el mundo financiero hay diferentes tasas de interés (tasa de fondos federales, tasa de interés preferencial, LIBOR, etc). Se simplifica la exposición suponiendo que existe una sola tasa.

¿Cuál es el razonamiento que se encuentra tras esta definición? Si se invierte a una tasa r durante t años, su capital se incrementa en el factor e^{rt} y, por tanto, si se invierten Pe^{-rt} dólares, su capital crece hasta un valor de $(Pe^{-rt})e^{rt} = P$ dólares en el instante t. El valor actual Pe^{-rt} es la cantidad que debería invertir *hoy* para disponer de P dólares en el instante t.

EJEMPLO 2 ¿Es mejor recibir 2000 \$ hoy o 2200 \$ dentro de 2 años? Considere $r = 0{,}03$ y $r = 0{,}07$.

Solución Se compara los 2000 \$ de hoy con el VA de 2200 \$ recibidos de aquí a 2 años.

- Si $r = 0{,}03$, el VA es $2200e^{-(0{,}03)2} \approx 2071{,}88$ \$. Este VA resulta superior a 2000 \$, por tanto un pago de 2200 \$ de aquí a 2 años es preferible a un pago de 2000 \$ hoy.
- Si $r = 0{,}07$, el VA es $2200e^{-(0{,}07)2} \approx 1912{,}59$ \$. Este VA es menor que 2000 \$, por tanto, es mejor recibir 2000 \$ si $r = 0{,}07$.

EJEMPLO 3 **¿Conviene invertir?** El director de operaciones Ryan Martínez debe decidir sobre la mejora del sistema informático de su empresa. El coste de la mejora es de 400 000 \$ y dará lugar a un ahorro de 150 000 \$ cada año, durante los tres siguientes. ¿Se trata de una buena inversión si $r = 7\,\%$?

Solución Ryan debe comparar el coste actual de renovación con el VA del dinero ahorrado. Por simplicidad, suponga que el ahorro anual de 150 000 \$ dólares se recibe como una única suma al final de cada año.

Si $r = 0{,}07$, el VA de los ahorros a lo largo de los 3 años es:

$$150\ 000e^{-(0{,}07)} + 150\ 000e^{-(0{,}07)2} + 150\ 000e^{-(0{,}07)3} \approx 391\ 850\ \$$$

La cantidad ahorrada es *menor* que el coste de 400 000 \$, por tanto la mejora no vale la pena.

Un **flujo de ingresos** es una sucesión de pagos periódicos que tiene lugar a lo largo de un intervalo de T años. Considere una inversión que produce unos ingresos de 800 \$/año durante 5 años. Se paga un total de 4000 \$ a lo largo de los 5 años, pero el VA del flujo de ingresos es menor. Por ejemplo, si $r = 0{,}06$ y los pagos se realizan al final de cada año, entonces el VA es:

$$800e^{-0,06} + 800e^{-(0,06)2} + 800e^{-(0,06)3} + 800e^{-(0,06)4} + 800e^{-(0,06)5} \approx 3353{,}12\ \$$$

Es más conveniente, a nivel matemático, suponer que los pagos se realizan de forma *continua* a razón de $R(t)$ dólares por año. Se puede calcular entonces el VA como una integral. Divida el intervalo de tiempo $[0, T]$ en N subintervalos de longitud $\Delta t = T/N$. Si Δt es pequeña, la cantidad que se paga entre los instantes t y $t + \Delta t$ es aproximadamente:

$$\underbrace{R(t)}_{\text{Tasa}} \times \underbrace{\Delta t}_{\text{Intervalo de tiempo}} = R(t)\Delta t$$

El VA de este pago es aproximadamente $e^{-rt}R(t)\Delta t$. Si $t_i = i\Delta t$, se obtiene la aproximación:

$$\text{VA del f ujo de ingresos} \approx \sum_{i=1}^{N} e^{-rt_i}R(t_i)\Delta t$$

Se trata de una suma de Riemann cuyo valor tiende a $\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$ cuando $\Delta t \to 0$.

En Abril de 1720, Isaac Newton duplicó su capital invirtiendo en la Compañía de los Mares del Sur, una compañía inglesa creada para llevar a cabo el comercio con las Indias Occidentales y Sudamérica. Habiendo ganado 7000 libras, Newton invirtió en una segunda ocasión pero, como muchos otros, no se dio cuenta de que la compañía estaba basada en el fraude y la manipulación. En lo que se conoció como la burbuja de los Mares del Sur, el activo perdió el 80 % de su valor y el famoso científico sufrió una pérdida de 20 000 libras.

VA de un flujo de ingresos Si la tasa de interés es r, el valor actual de un f ujo de ingresos que paga $R(t)$ dólares por año, de forma continua, durante T años es:

$$\text{VA} = \int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt \qquad \boxed{2}$$

■ **EJEMPLO 4** Para una cierta inversión se pagan 800 000 pesos mejicanos por año, de manera continua, durante 5 años. Halle el VA para la inversión si $r = 0{,}04$ y $r = 0{,}06$.

Solución En esta situación, $R(t) = 800\ 000$. Si $r = 0{,}04$, el VA del f ujo de ingresos es igual (en pesos) a:

$$\int_0^5 800\ 000e^{-0,04t}\,dt = -800\ 000\left.\frac{e^{-0,04t}}{0{,}04}\right|_0^5 \approx -16\ 374\ 615 - (-20\ 000\ 000) =$$
$$= 3\ 625\ 385$$

Si $r = 0{,}06$, el VA es igual (en pesos) a:

$$\int_0^5 800\ 000e^{-0,06t}\,dt = -800\ 000\left.\frac{e^{-0,06t}}{0{,}06}\right|_0^5 \approx -9\ 877\ 576 - (-13\ 333\ 333) =$$
$$= 3\ 455\ 757$$
■

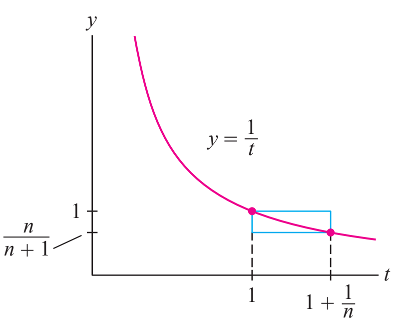


FIGURA 2

Demostración del teorema 1 Aplique la fórmula $\ln b = \int_1^b t^{-1}\,dt$ con $b = 1 + 1/n$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+1/n} \frac{dt}{t}$$

La f gura 2 muestra que el área representada por esta integral se encuentra entre las áreas de dos rectángulos de alturas $n/(n+1)$ y 1, ambos de base $1/n$. Las áreas de estos rectángulos son $1/(n + 1)$ y $1/n$ respectivamente, por tanto:

$$\frac{1}{n+1} \le \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n} \qquad \boxed{3}$$

Multiplique por n y aplique que $n \ln a = \ln a^n$:

$$\frac{n}{n+1} \le \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \le 1$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ y, según el teorema de compresión, la cantidad que se encuentra entre las desigualdades debe tender a 1, se tiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$$

Ahora se puede aplicar e^x (ya que es una función continua) y obtener el resultado deseado:

$$e^1 = e^{\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Vea el problema 27 para una demostración de la fórmula general $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. ■

7.5 RESUMEN

- Tasa de interés r, compuesta M veces por año:

$$P(t) = P_0(1 + r/M)^{Mt}$$

- Tasa de interés r, compuesta de forma continua: $P(t) = P_0e^{rt}$.
- El *valor actual* (VA) de P dólares (o cualquier otra divisa) que serán pagados dentro de t años, en el futuro, es Pe^{-rt}.
- El valor actual de un f ujo de ingresos que paga $R(t)$ dólares por año de forma continua durante T años es:

$$\text{VA} = \int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$$

7.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué es preferible: una tasa de interés del 12 % compuesta trimestralmente o una tasa de interés del 11 % compuesta de forma continua?

2. Halle el multiplicador anual si $r = 9\,\%$ y el interés se compone (a) de forma continua y (b) trimestralmente.

3. El VA de N dólares que se reciben en el instante T es (seleccione la respuesta correcta):

(a) El valor en el instante T de N dólares que se invierten hoy.

(b) La cantidad que se tendría que invertir hoy para obtener N dólares en el instante T.

4. Dentro de un año, usted recibirá 1 \$. Si la tasa de interés aumenta, ¿el VA crecerá o decrecerá?

5. Xavier espera recibir un cheque de 1000 \$ dentro de un año. Explique, mediante el concepto de VA, si se alegrará o no de saber que la tasa de interés acaba de aumentar del 6 % al 7 %.

Problemas

1. Si se depositan 2000 \$ en una cuenta al 9 % de interés, calcule el saldo pasados 10 años cuando el interés se compone (a) trimestralmente, (b) mensualmente y (c) de forma continua.

2. Suponga que se hace un depósito de 500 \$ en una cuenta al interés continuo del 7 %. Halle una fórmula para el valor de la cuenta en el instante t. ¿Cuál es el valor de la cuenta pasados 3 años?

3. Un banco paga un interés del 5 %. Averigüe cuál es el multiplicador anual si el interés se compone:

(a) Tres veces al año **(b)** De forma continua

4. Si se depositan 4000 \$ en una cuenta que devenga un interés continuo del 7 % ¿Cuánto tardan en duplicar su valor?

5. ¿Qué cantidad se debe invertir hoy para obtener 20 000 $ al cabo de 5 años, si la tasa de interés continuo es del $r = 9\,\%$?

6. Una inversión aumenta su valor según una tasa de interés continuo del 9 %. ¿Cuál debe ser la inversión inicial para conseguir 50 000 $ a lo largo de un periodo de 7 años?

7. Calcule el VA de 5000 $ recibidos dentro de 3 años, si la tasa de interés es (a) 6 % y (b) 11 %. ¿Cuál es el VA en estas dos situaciones si la suma se recibiera dentro de 5 años?

8. ¿Es preferible recibir 1000 $ hoy o 1300 $ dentro de 4 años? Considere $r = 0{,}08$ y $r = 0{,}03$.

9. Halle la tasa de interés r si el VA de 8000 $ que se recibirá dentro de 1 año es 7300 $.

10. Una empresa puede obtener unos benef cios adicionales de 500 000 $/año durante 5 años invirtiendo 2 $ millones en mejoras de modernización para su fábrica. Vale la pena la inversión, si la tasa de interés es del 6 %? (Suponga que los benef cios se reciben como una única suma al f nal de cada año.)

11. Un nuevo sistema informático que cuesta 25 000 $ disminuirá los costes laborales en 7000 $/año durante 5 años.

(a) Si $r = 8\,\%$, ¿se trata de una buena inversión?

(b) ¿Cuánto dinero ahorrará la empresa?

12. Después de ganar 25 $ millones en la lotería estatal, Jessica se entera que lo que recibirá serán cinco pagos anuales de 5 $ millones, siendo el primero de ellos inminente.

(a) ¿Cuál es el VA del premio de Jessica si $r = 6\,\%$?

(b) ¿Cuánto se revalorizaría el premio si la totalidad del premio se pagara hoy mismo?

13. Aplique la ec. (2) para calcular el VA de un f ujo de ingresos que paga $R(t) = 5000$ $/año de forma continua durante 10 años, suponiendo que $r = 0{,}05$.

14. Halle el VA de una inversión en la que se paga de forma continua a una tasa de 800 $/año durante 5 años, suponiendo $r = 0{,}08$.

15. Halle el VA de un f ujo de ingresos que paga de forma continua a una tasa $R(t) = 5000\ \$\ e^{0{,}1t}$/año durante 7 años, suponiendo $r = 0{,}05$.

16. Una propiedad comercial genera ingresos según una tasa $R(t)$. Suponga que $R(0) = 70\ 000$ $/año y que $R(t)$ aumenta según una tasa de interés continuo del 5 %. Halle el VA de los ingresos generados en los 4 primeros años si $r = 6\,\%$.

17. Muestre que una inversión en que se paga R dólares por año de forma continua durante T años tiene un VA de $R(1 - e^{-rT})/r$.

18. Explique la siguiente af rmación: si T es suf cientemente elevado, entonces el VA del f ujo de ingresos descrito en el problema 17 es aproximadamente R/r.

19. Suponga que $r = 0{,}06$. Aplique el resultado del problema 18 para estimar la tasa de pago R necesaria para obtener un f ujo de ingresos cuyo VA sea 20 000 $, suponiendo que el f ujo continúa durante un periodo de tiempo suf cientemente grande.

20. Verif que mediante derivación:

$$\int te^{-rt}\,dt = -\frac{e^{-rt}(1+rt)}{r^2} + C \qquad \boxed{4}$$

Use la ec. (4) para calcular el VA de una inversión que genera benef cios de forma continua a una tasa $R(t) = (5000 + 1000t)$ dólares por año durante 5 años, suponiendo que $r = 0{,}05$.

21. Use la ec. (4) para calcular el VA de una inversión que genera benef cios de forma continua a una tasa $R(t) = (5000 + 1000t)e^{0{,}02t}$ dólares por año durante 10 años, suponiendo que $r = 0{,}08$.

22. **Regla del 70 en la banca** Si se percibe una tasa de interés continuo del R por ciento, su capital duplica su valor al cabo de, aproximadamente, $70/R$ años. Por ejemplo, si $R = 5\,\%$, su dinero se duplica después de $70/5$ o 14 años. Utilice el concepto de tiempo de duplicación para justif car esta regla de la banca. (*Nota:* En algunas ocasiones, se utiliza la regla del $72/R$. Es menos precisa pero más fácil de aplicar porque 72 es divisible por más números que 70.)

En los problemas 23-26, calcule el límite.

23. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{6n}$

24. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}$

25. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$

26. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{12n}$

Problemas avanzados

27. Modif que la demostración de la identidad $e = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ dada en el texto para demostrar que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$. *Indicación:* Exprese $\ln(1 + xn^{-1})$ como una integral y estime superior e inferiormente la integral mediante rectángulos.

28. Demuestre que, si $n > 0$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Indicación: Considere logaritmos y aplique la ec. (3).

29. Un banco paga intereses a una tasa r, compuesta M veces anualmente. La **tasa de interés efectivo** r_e es la tasa a la que el interés, si se compusiera anualmente, tendría que ser pagado para producir el mismo rendimiento anual.

(a) Halle r_e si $r = 9\,\%$, compuesta mensualmente.

(b) Pruebe que $r_e = (1 + r/M)^M - 1$ y que $r_e = e^r - 1$, si el interés es continuo.

(c) Halle r_e si $r = 11\,\%$ y el interés es continuo.

(d) Halle la tasa r que, compuesta semanalmente, daría lugar a una tasa efectiva del 20 %.

7.6 Modelos que involucran $y' = k(y - b)$

Cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden con ***coeficientes constantes*** *se puede expresar en la forma de la ec. (1). Esta ecuación se utiliza para modelar una gran variedad de fenómenos, tales como los procesos de enfriamiento, la caida libre con resistencia al aire y la corriente en un circuito.*

Tal y como se ha visto, una cantidad crece o decae exponencialmente si su *tasa de variación* es proporcional al total presente. Esta propiedad característica se expresa mediante la ecuación diferencial $y' = ky$. A continuación, se estudiará la siguiente ecuación diferencial, relacionada con la anterior:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = k(y - b)} \tag{1}$$

donde k y b son constantes y $k \neq 0$. Esta ecuación diferencial describe una cantidad y cuya *tasa de variación es proporcional a la diferencia* $y - b$. La solución general es:

$$\boxed{y(t) = b + Ce^{kt}} \tag{2}$$

Para verif car este resultado, observe que $(y - b)' = y'$ pues b es una constante. Por tanto, la ec. (1) se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt}(y - b) = k(y - b)$$

En otras palabras, $y - b$ cumple la ecuación diferencial de una función exponencial y, en consecuencia, $y - b = Ce^{kt}$ o $y = b + Ce^{kt}$, tal y como se había af rmado.

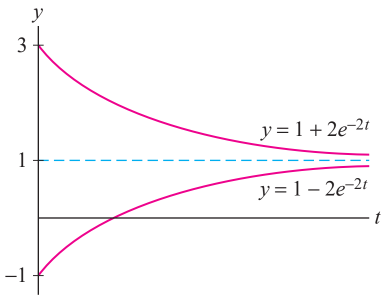


FIGURA 1 Dos soluciones de $y' = -2(y - 1)$ correspondientes a $C = 2$ y a $C = -2$.

UN APUNTE GRÁFICO El comportamiento de la solución $y(t)$ cuando $t \to +\infty$ depende de si C y k son positivas o negativas. Si $k > 0$, e^{kt} tiende a $+\infty$ y, en consecuencia, $y(t)$ tiende a $+\infty$ si $C > 0$ y a $-\infty$ si $C < 0$. Cuando $k < 0$, se suele reescribir la ecuación diferencial como $y' = -k(y - b)$ con $k > 0$. En este caso, $y(t) = b + Ce^{-kt}$ e $y(t)$ se aproxima a la asíntota vertical $y = b$, ya que Ce^{-kt} tiende a cero cuando $t \to +\infty$ (f gura 1). Sin embargo, $y(t)$ se puede aproximar a la asíntota por arriba o por abajo, dependiendo de si $C > 0$ o $C < 0$.

La ley del enfriamiento de Newton implica que el objeto se enfría rápidamente cuando está más caliente que su entorno (cuando $y - T_0$ es elevado). La tasa de enfriamiento se ralentiza cuando y se aproxima a T_0. Cuando la temperatura inicial del objeto es menor que T_0, y' es positiva y la ley de Newton modela el calentamiento.

A continuación, se consideran algunas aplicaciones de la ec. (1). En primer lugar, se tratará la ley del enfriamiento de Newton. Sea $y(t)$ la temperatura de un objeto caliente que se está enfriando en un entorno cuya temperatura ambiente es T_0. Newton supuso que la *tasa de enfriamiento* era proporcional a la diferencia de temperaturas $y - T_0$. Se puede expresar esta hipótesis de forma precisa mediante la ecuación diferencial:

$$\boxed{y' = -k(y - T_0) \qquad (T_0 = \text{temperatura ambiente})}$$

La constante k, en unidades de $(\text{tiempo})^{-1}$, se denomina la **constante de enfriamiento** y depende de las propiedades físicas del objeto.

■ **EJEMPLO 1 Ley del enfriamiento de Newton** Se sumerge una barra caliente de metal, con constante de enfriamiento $k = 2{,}1\ \text{min}^{-1}$, en un gran depósito de agua que se mantiene a temperatura $T_0 = 10\ °\text{C}$. Sea $y(t)$ la temperatura de la barra en el instante t (en minutos).

(a) Halle la ecuación diferencial que cumple $y(t)$ y determine su solución general.

(b) ¿Cuál es la temperatura de la barra pasado 1 minuto si su temperatura inicial era de 180 °C?

(c) ¿Cuál era la temperatura inicial de la barra si se enfrió hasta 80 °C en 30 segundos?

Solución

(a) Como $k = 2{,}1\ \text{min}^{-1}$, $y(t)$ (con t en minutos) cumple:

$$y' = -2{,}1(y - 10)$$

← RECORDATORIO *La ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dt} = k(y - b)$$

tiene como solución general:

$$y = b + Ce^{kt}$$

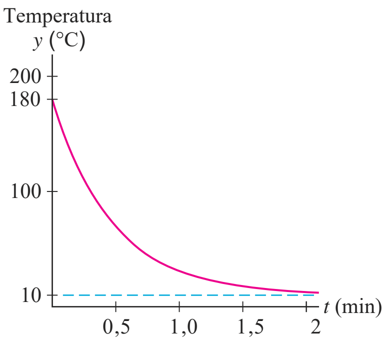


FIGURA 2 Temperatura de la barra de metal al enfriarse.

Según la ec. (2), la solución general es $y(t) = 10 + Ce^{-2,1t}$ para alguna constante C.

(b) La solución general es $y(t) = 10 + Ce^{-2,1t}$. Si la temperatura inicial fue de 180 °C, entonces $y(0) = 10 + C = 180$. Por tanto, $C = 170$ e $y(t) = 10 + 170e^{-2,1t}$ (f gura 2). Pasado 1 minuto, tendremos:

$$y(1) = 10 + 170e^{-2,1(1)} \approx 30{,}8\ °\mathrm{C}$$

(c) Si la temperatura al cabo de 30 segundos es de 80 °C, entonces $y(0{,}5) = 80$ y:

$$10 + Ce^{-2,1(0,5)} = 80 \quad \Rightarrow \quad Ce^{-1,05} = 70 \quad \Rightarrow \quad C = 70e^{1,05} \approx 200$$

Así, en esta situación, $y(t) = 10 + 200e^{-2,1t}$ y la temperatura inicial fue de:

$$y(0) = 10 + 200e^{-2,1(0)} = 10 + 200 = 210\ °\mathrm{C}$$ ■

El efecto de la resistencia del aire depende de la situación física. El efecto sobre una bala de alta velocidad es diferente que sobre un paracaidista. El modelo presentado es bastante realista para un objeto grande, como un paracaidista que se lanza desde una altitud elevada.

La ecuación diferencial $y' = k(y - b)$ se utiliza también para modelar la caída libre cuando la resistencia del aire se tiene en consideración. Suponga que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad v y que actúa en la dirección opuesta a la de la caída. Exprese esta fuerza como $-kv$, donde $k > 0$. Se considera el sentido hacia arriba como el positivo, por lo que $v < 0$ para un objeto en caída y $-kv$ es una fuerza que actúa hacia arriba.

La fuerza debida a la gravedad para un objeto de masa m en caída es $-mg$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Así, la fuerza total es $F = -mg - kv$. Según la ley de Newton:

$$F = ma = mv' \qquad (a = v' \text{ es la aceleración})$$

En este modelo de caída libre, las unidades de k son de masa por tiempo como, por ejemplo, kg/s.

De esta manera $mv' = -mg - kv$, que se puede expresar como:

$$\boxed{v' = -\frac{k}{m}\left(v + \frac{mg}{k}\right)} \qquad \boxed{3}$$

Esta ecuación es de la forma $v' = -k(v - b)$ con k/m, en lugar de k y $b = -mg/k$. Según la ec. (2) la solución general es:

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + Ce^{-(k/m)t} \qquad \boxed{4}$$

Como $Ce^{-(k/m)t}$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, $v(t)$ lo hace a una velocidad terminal o velocidad límite:

$$\text{Velocidad terminal} = \lim_{t\to+\infty} v(t) = -\frac{mg}{k} \qquad \boxed{5}$$

Sin la resistencia del aire, la velocidad aumentaría indef nidamente.

■ **EJEMPLO 2** Una paracaidista que pesa 80 kg salta desde un aeroplano.

(a) ¿Cuál es su velocidad terminal si $k = 8$ kg/s?

(b) Pasados 30 segundos, ¿cuál es su velocidad?

Solución

(a) Según la ec. (5), con $k = 8$ kg/s y $g = 9{,}8$ m/s^2, la velocidad terminal es:

$$-\frac{mg}{k} = -\frac{(80)9{,}8}{8} = -98 \text{ m/s}$$

(b) Con t en segundos, según la ec. (4), se tiene:

$$v(t) = -98 + Ce^{-(k/m)t} = -98 + Ce^{-(8/80)t} = -98 + Ce^{-0,1t}$$

Paracaidista en caída libre.

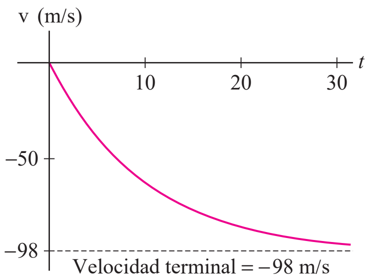


FIGURA 3 Velocidad de la paracaidista de 80 kg en caída libre y con resistencia al aire ($k = 8$).

Suponga que la paracaidista salta del aeroplano sin velocidad inicial, por tanto $v(0) = -98 + C = 0$ y $C = 98$. Así $v(t) = -98(1 - e^{-0,1t})$ [f gura 3]. La velocidad de la paracaidista al cabo de 30 segundos será:

$$v(30) = -98(1 - e^{-0,1(30)}) \approx -93,1 \text{ m/s}$$

■

Observe en la ec. (6) que $P'(t)$ queda determinada por la tasa de crecimiento r y por la razón de reintegro N. Si no hay ningún reintegro, $P(t)$ aumentaría en base a un interés compuesto y cumpliría $P'(t) = rP(t)$.

Una **anualidad** es una inversión en la que se deposita un capital P_0 en una cuenta que devenga intereses continuos según una tasa r, y se realizan reintegros de dinero a intervalos regulares. Para modelar una anualidad mediante una ecuación diferencial, se supondrá que el dinero se reintegra continuamente a razón de N dólares por año. Sea $P(t)$ el saldo de la anualidad pasados t años. Entonces:

$$\underbrace{P'(t)}_{\substack{\text{Tasa de}\\ \text{variación}}} = \underbrace{rP(t)}_{\substack{\text{Crecimiento debido}\\ \text{al interés}}} - \underbrace{N}_{\substack{\text{Razón de}\\ \text{reintegro}}} = r\left(P(t) - \frac{N}{r}\right) \qquad \boxed{6}$$

Esta ecuación es de la forma $y' = k(y - b)$ con $k = r$ y $b = N/r$, por tanto, según la ec. (2), la solución general es:

$$P(t) = \frac{N}{r} + Ce^{rt} \qquad \boxed{7}$$

Como e^{rt} tiende a inf nito cuando $t \to +\infty$, el saldo $P(t)$ tiende a $+\infty$ si $C > 0$. Si $C < 0$, entonces $P(t)$ tiende a $-\infty$ (i.e., la anualidad f nalmente se queda sin dinero). Si $C = 0$, entonces $P(t)$ se mantiene constante e igual a N/r.

■ **EJEMPLO 3** **¿Puede ser perpetua una anualidad?** Una anualidad devenga intereses a una tasa de $r = 0,07$ y se realizan reintegros a razón de $N = 500$ \$/año.

(a) ¿Cuándo se quedará sin dinero la anualidad si el depósito inicial es de $P(0) = 5000$ \$?

(b) Pruebe que el saldo crece indef nidamente si $P(0) = 9000$ \$.

Solución Como $N/r = \frac{500}{0,07} \approx 7143$, según la ec. (7) $P(t) = 7143 + Ce^{0,07t}$.

(a) Si $P(0) = 5000 = 7143 + Ce^0$, entonces $C = -2143$ y:

$$P(t) = 7143 - 2143e^{0,07t}$$

La cuenta se queda sin dinero cuando $P(t) = 7143 - 2143e^{0,07t} = 0$ o:

$$e^{0,07t} = \frac{7143}{2143} \quad \Rightarrow \quad 0,07t = \ln\left(\frac{7143}{2143}\right) \approx 1,2$$

es decir, pasados $t = \frac{1,2}{0,07} \approx 17$ años.

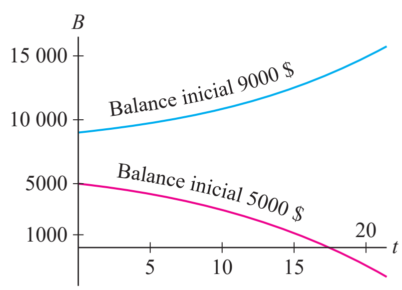


FIGURA 4 El saldo en una anualidad puede aumentar indef nidamente o disminuir a cero (llegando a ser negativo), en función de la cantidad del depósito inicial P_0.

(b) Si $P(0) = 9000 = 7143 + Ce^0$, entonces $C = 1857$ y:

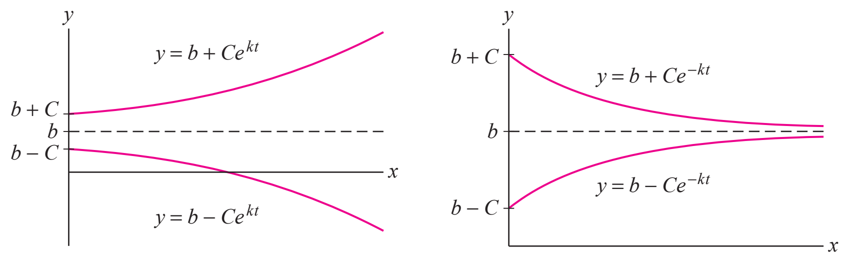
$$P(t) = 7143 + 1857e^{0,07t}$$

Como el coef ciente $C = 1857$ es positivo, la cuenta nunca se queda sin dinero. De hecho, $P(t)$ aumenta indef nidamente cuando $t \to +\infty$. La f gura 4 ilustra los dos casos. ■

7.6 RESUMEN

- La solución general de $y' = k(y - b)$ es $y = b + Ce^{kt}$, donde C es una constante.
- Las siguientes tablas describen las soluciones de $y' = k(y - b)$ (vea la f gura 5).

Ecuación ($k > 0$)	Solución	Comportamiento cuando $t \to +\infty$
$y' = k(y - b)$	$y(t) = b + Ce^{kt}$	$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } C > 0 \\ -\infty & \text{si } C < 0 \end{cases}$
$y' = -k(y - b)$	$y(t) = b + Ce^{-kt}$	$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = b$



Soluciones de $y' = k(y - b)$ con $k, C > 0$ Soluciones de $y' = -k(y - b)$ con $k, C > 0$

FIGURA 5

- Tres aplicaciones:
  - Ley de enfriamiento de Newton: $y' = -k(y - T_0)$, $y(t)$ = temperatura del objeto, T_0 = temperatura ambiente, k = constante de enfriamiento.
  - Caída libre con resistencia al aire: $v' = -\dfrac{k}{m}\left(v + \dfrac{mg}{k}\right)$, $v(t)$ = velocidad, m = masa, k = constante de resistencia al aire, g = aceleración debida a la gravedad.
  - Anualidad continua: $P' = r\left(P - \dfrac{N}{r}\right)$, $P(t)$ = saldo en la anualidad, r = tasa de interés, N = razón de reintegro.

7.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Escriba una solución de $y' = 4(y - 5)$ que tienda a $-\infty$ cuando $t \to +\infty$.

2. ¿Tiene $y' = -4(y - 5)$ una solución que tienda a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$?

3. ¿Verdadero o falso? Si $k > 0$, entonces todas las soluciones de $y' = -k(y - b)$ se aproximan al mismo límite cuando $t \to +\infty$.

4. Cuando un objeto se enfría su tasa de enfriamiento se ralentiza. Explique por qué esta af rmación se deduce de la ley de enfriamiento de Newton.

Problemas

1. Halle la solución general de:

$$y' = 2(y - 10)$$

A continuación, determine las dos soluciones cumpliendo $y(0) = 25$ e $y(0) = 5$ y dibuje sus gráf cas.

2. Verif que directamente que $y = 12 + Ce^{-3t}$ cumple:

$$y' = -3(y - 12) \quad \text{para todo } C$$

A continuación, determine las dos soluciones cumpliendo $y(0) = 20$ e $y(0) = 0$ y dibuje sus gráf cas.

3. Resuelva $y' = 4y + 24$ con la condición $y(0) = 5$.

4. Resuelva $y' + 6y = 12$ con la condición $y(2) = 10$.

En los problemas 5-12, aplique la ley de enfriamiento de Newton.

5. Un yunque caliente $k = 0{,}02\ \mathrm{s}^{-1}$ se sumerge en una gran piscina de agua cuya temperatura es de 10 °C. Sea $y(t)$ es la temperatura del yunque t segundos más tarde.

(a) ¿Qué ecuación diferencial cumple $y(t)$?

(b) Halle una expresión para $y(t)$, suponiendo que la temperatura inicial del objeto es de 100 °C.

(c) ¿Cuánto tarda el objeto en enfriarse hasta 20 °?

6. El motor del automóvil de Frank funciona a 100 °C. En un día, cuando la temperatura exterior es de 21 °C, apaga el contacto del motor y observa que cinco minutos más tarde, el motor se ha enfriado a 70 °C.

(a) Determine la constante de enfriamiento del motor k.

(b) ¿Cuál es la expresión de $y(t)$?

(c) ¿Cuándo se enfriará el motor a 40 °C?

7. A las 10:30 AM, unos detectives descubren un cadáver en una habitación y miden su temperatura, resultando ser de 26 °C. Una hora después, la temperatura del cuerpo se había reducido hasta 24,8 °C. Determine el momento de la muerte (cuando la temperatura corporal era la normal de 37 °C), suponiendo que la temperatura en la habitación se mantuvo constante a 20 °C.

8. Una taza de café, con constante de enfriamiento $k = 0{,}09\ \mathrm{min}^{-1}$, se deja dentro de una habitación que está a una temperatura de 20 °C.

(a) ¿Cuánto tarda el café en enfriarse (en grados por minuto) cuando su temperatura es de $T = 80$ °C?

(b) Use la aproximación lineal para estimar la variación en la temperatura en los siguientes 6 s cuando $T = 80$ °C.

(c) Si el café se sirve a 90 °C, ¿cuánto tardará en llegar a una temperatura óptima de 65 °C para ser bebido?

9. Una barra de metal fría, que se encuentra a una temperatura de −30 °C, se sumerge en una piscina que se mantiene a una temperatura de 40 °C. Medio minuto más tarde, la temperatura de la barra es de 20 °C. ¿Cuánto tarda la barra en alcanzar una temperatura de 30 °C?

10. Cuando un objeto caliente se sumerge en agua, cuya temperatura es de 25 °C, el objeto se enfría desde 100 °C hasta 50 °C en 150 s. En otro baño, el mismo enfriamiento tiene lugar en 120 s. Halle la temperatura del segundo baño.

11. GU Dos objetos A y B se sumergen en agua templada, cuya temperatura es de $T_0 = 40$ °C. El objeto A tiene una temperatura inicial de −20 °C y constante de enfriamiento $k = 0{,}004\ \mathrm{s}^{-1}$. El objeto B tiene una temperatura inicial de 0 °C y constante de refrigeración $k = 0{,}002\ \mathrm{s}^{-1}$. Represente gráf camente las teperaturas de A y de B para $0 \le t \le 1000$. ¿Cuántos segundos son necesarios para que ambos objetos tengan la misma temperatura?

12. En la ley de enfriamiento de Newton, la constante $\tau = 1/k$ se denomina el “tiempo característico.” Demuestre que τ es el tiempo necesario para que la diferencia de temperaturas $(y - T_0)$ disminuya en el factor $e^{-1} \approx 0{,}37$. Por ejemplo, si $y(0) = 100$ °C y $T_0 = 0$ °C, entonces el objeto se enfría hasta $100/e \approx 37$ °C en un tiempo τ, hasta $100/e^2 \approx 13{,}5$ °C en un tiempo 2τ y así sucesivamente.

En los problemas 13-16, aplique la ec. (3) como modelo para la caída libre con resistencia al aire.

13. Una paracaidista que pesa 60 kg salta desde un aeroplano. ¿Cuál es su velocidad terminal, en metros por segundo, suponiendo que $k = 10$ kg/s para caída libre (sin paracaídas)?

14. Halle la velocidad terminal de un paracaidista de masa $w = 192$ lb si $k = 1{,}2$ lb-s/ft. ¿Cuánto tarda en alcanzar la mitad de su velocidad terminal si su velocidad inicial es cero? La masa y el peso están relacionados mediante $w = mg$ y la ec. (3) resulta $v' = -(kg/w)(v + w/k)$ con $g = 32\ \mathrm{ft/s^2}$.

15. Un paracaidista que pesa 80 kg salta desde un aeroplano (con velocidad inicial igual a cero). Suponga que $k = 12$ kg/s con el paracaídas cerrado y que $k = 70$ kg/s con el paracaídas abierto.¿Cuál es la velocidad del paracaidista en $t = 25$ s si el paracaídas se abre pasados 20 s de caída libre?

16. ¿Quién alcanza antes su velocidad terminal: un paracaidista más ligero o uno más pesado?

17. Una anualidad continua con razón de reintegro $N = 5000$ \$/año y tasa de interés $r = 5\,\%$ se constituye en base a un depósito inicial de $P_0 = 50\ 000$ \$.

(a) ¿Cuál es el saldo de la anualidad pasados 10 años?

(b) ¿Cuándo se queda la anualidad sin dinero?

18. Pruebe que una anualidad continua con razón de reintegro $N = 5000$ \$/año y tasa de interés $r = 8\,\%$, establecida en base a un depósito inicial $P_0 = 75\ 000$ \$, nunca se queda sin dinero.

19. Halle el mínimo depósito inicial P_0 que hace posible que una anualidad pague 6000 \$/año indef nidamente, si devenga intereses a una tasa del 5 %.

20. Halle el mínimo depósito inicial P_0 necesario para establecer una anualidad durante 20 años, si los reintegros se realizan a razón de 10 000 \$/año y la tasa de interés es del 7 %.

21. Se realiza un depósito inicial de 100 000 euros en una anualidad en un banco francés. ¿Cuál es la mínima tasa de interés que la anualidad debe tener para permitir que reintegros a razón de 8000 euros/año continúen indef nidamente?

22. Pruebe que una anualidad continua nunca se queda sin dinero si el saldo inicial es mayor o igual que N/r, donde N es la razón de reintegro y r la tasa de interés.

23. Sam pide prestados 10 000 \$ a un banco a una tasa de interés del 9 % y devuelve el préstamo continuamente a razón de N dólares por año. Sea $P(t)$ la cantidad que aún se adeuda en el instante t.

(a) Explique por qué $P(t)$ cumple la ecuación diferencial:

$$y' = 0{,}09y - N$$

(b) ¿Cuánto tiempo tarda Sam en pagar el préstamo si $N = 1200$ \$?

(c) Si $N = 800$ \$, ¿llegará Sam a devolver el préstamo?

24. April pide prestados 18 000 $ a una tasa de interés del 5 % para comprar un nuevo automóvil. ¿Cuál es la razón (en dólares por año) a la que debe devolver el préstamo, si éste debe de ser devuelto al cabo de 5 años? *Indicación:* Enuncie la ecuación diferencial análoga a la del problema 23.

25. Sea $N(t)$ la fracción de la población que ha escuchado un fragmento de las noticias t horas después de su publicación. Según un modelo, la tasa $N'(t)$ a la que las noticias se difunden es igual a k, la fracción de la población que todavía no ha oído las noticias, para alguna constante $k > 0$.

(a) Determine la ecuación diferencial que cumple $N(t)$.

(b) Halle la solución de esta ecuación diferencial, con la condición inicial $N(0) = 0$, en términos de k.

(c) Suponga que la mitad de la población está informada de un terremoto, 8 horas después de que éste haya ocurrido. Use el modelo para estimar k y estime el porcentaje de la población que estará informado sobre el terremoto, 12 horas después de que éste haya ocurrido.

26. Corriente en un circuito Cuando el circuito de la f gura 6 (que consiste en una batería de V voltios, una resistencia de R ohmios y un inductor de L henrios) se conecta, la corriente $I(t)$ que circula por el circuito satisface la igualdad:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

con la condición inicial $I(0) = 0$.

(a) Halle una expresión para $I(t)$ en términos de L, V y R.

(b) Pruebe que $\lim_{t\to+\infty} I(t) = V/R$.

(c) Pruebe que $I(t)$ alcanza el 63 % de su máximo valor en el "tiempo característico" $\tau = L/R$.

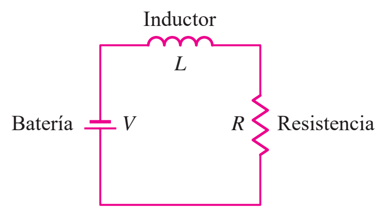


FIGURA 6 El f ujo de la corriente se aproxima al nivel $I_{\text{máx}} = V/R$.

Problemas avanzados

27. Demuestre que la constante de enfriamiento de un objeto se puede determinar de dos lecturas de temperatura $y(t_1)$ e $y(t_2)$ en instantes t_1 y t_2, $t_1 \neq t_2$, mediante la fórmula:

$$k = \frac{1}{t_1 - t_2}\ln\left(\frac{y(t_2) - T_0}{y(t_1) - T_0}\right)$$

28. Demuestre que, según la ley de enfriamiento de Newton, el tiempo necesario para enfriar un objeto desde la temperatura A hasta la temperatura B es:

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{A - T_0}{B - T_0}\right)$$

donde T_0 es la temperatura ambiente.

29. Resistencia al aire Un proyectil de masa $m = 1$ se desplaza en línea recta desde el nivel del suelo y con velocidad inicial v_0. Suponga que la velocidad v cumple $v' = -g - kv$.

(a) Halle una expresión para $v(t)$.

(b) Demuestre que la altura del proyectil $h(t)$ viene dada por:

$$h(t) = C(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$

donde $C = k^{-2}(g + kv_0)$.

(c) Demuestre que el proyectil alcanza su altura máxima en el instante $t_{\max} = k^{-1}\ln(1 + kv_0/g)$.

(d) Sin la resistencia al aire, la altura máxima se alcanza en el instante $t = v_0/g$. Según esto, explique por qué se debe esperar que:

$$\lim_{k\to 0}\frac{\ln(1 + \frac{kv_0}{g})}{k} = \frac{v_0}{g} \tag{8}$$

(e) Verif que la ec. (8). *Indicación:* aplique el teroema 1 de la sección 7.5 para demostrar que $\lim_{k\to 0}\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right)^{1/k} = e^{v_0/g}$.

7.7 Regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital es una importante herramienta para calcular ciertos límtes que, de otra manera, serían difícicles de evaluar y también para determinar "comportamientos asintóticos" (límites en el inf nito).

Considere el límite de un cociente:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

En términos generales, la regla de L'Hôpital establece que *cuando $f(x)/g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0/0$ o ∞/∞ en $x = a$, entonces se puede reemplazar $f(x)/g(x)$ por el cociente de las derivadas $f'(x)/g'(x)$.*

La regla de l'Hôpital debe su nombre al matemático francés Guillaume François Antoine Marqués de L'Hôpital (1661–1704), que escribió el primer libro de texto sobre cálculo en 1696. El nombre L'Hôpital se pronuncia "Lo-pi-tal."

TEOREMA 1 Regla de L'Hôpital Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un intervalo abierto que contiene el punto a y que:

$$f(a) = g(a) = 0$$

Suponga también que $g'(x) \neq 0$ (excepto posiblemente en a). Entonces:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

siempre que el límite de la derecha exista o sea inf nito ($+\infty$ o $-\infty$). Esta conclusión también es cierta si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables para x en un entorno reducido de a y:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

Además, esta regla es válida también para límites laterales.

ATENCIÓN *Cuando aplique la regla de L'Hôpital, tenga presente efectuar la derivada del numerador y la del denominador por separado:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

No derive la función cociente $f(x)/g(x)$.

■ **EJEMPLO 1** Aplique la regla de L'Hôpital para evaluar $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^4 + 2x - 20}$.

Solución Sea $f(x) = x^3 - 8$ y $g(x) = x^4 + 2x - 20$. Tanto f como g son derivables y $f(x)/g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0/0$ en $a = 2$ pues $f(2) = g(2) = 0$:

- Numerador: $f(2) = 2^3 - 1 = 0$
- Denominador: $g(1) = 2^4 + 2(2) - 20 = 0$

Además, $g'(x) = 4x^3 + 2$ es diferente de cero en un entorno de $x = 2$, por tanto se puede aplicar la regla de L'Hôpital. Si se reemplazan el numerador y el denominador por sus derivadas, se obtiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 + 2x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{4x^3 + 2} = \frac{3 \cdot 2^2}{4 \cdot 2^3 + 2} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$$ ■

■ **EJEMPLO 2** Evalúe $\lim_{x\to 2} \dfrac{4 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$.

Solución El cociente presenta una indeterminación del tipo $0/0$ en $x = 2$:

- Numerador: $4 - x^2 = 4 - 2^2 = 0$
- Denominador: $\operatorname{sen} \pi x = \operatorname{sen} 2\pi = 0$

Las restantes hipótesis (que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ para x en un entorno de $a = 2$) también se cumplen y, por tanto, se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x} = \lim_{x\to 2} \frac{(4 - x^2)'}{(\operatorname{sen} \pi x)'} = \lim_{x\to 2} \frac{-2x}{\pi \cos \pi x} = \frac{-2(2)}{\pi \cos 2\pi} = \frac{-4}{\pi}$$ ■

■ **EJEMPLO 3** Evalúe $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

Solución De nuevo, el cociente presenta una indeterminación del tipo $0/0$ en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad 1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$$

El resto de las hipótesis se cumplen, por tanto se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos^2 x)'}{(1-\operatorname{sen} x)'}=\underbrace{\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\cos x\,\operatorname{sen} x}{-\cos x}}_{\text{Regla de L'Hôpital}}=\underbrace{\lim_{x\to\pi/2}(2\operatorname{sen} x)=2}_{\text{Simplifique}}$$

Observe que el cociente $\dfrac{-2\cos x\,\operatorname{sen} x}{-\cos x}$ continúa siendo indeterminado en $x=\pi/2$. Se solventa esta indeterminación cancelando el factor $-\cos x$. ■

■ **EJEMPLO 4 La forma $0\cdot\infty$** Evalúe $\lim_{x\to 0+} x\ln x$.

Solución Se trata de un límite lateral porque $f(x)=x\ln x$ no está definida si $x\le 0$. Además, cuando $x\to 0+$:

- x tiende a 0
- $\ln x$ tiende a $-\infty$

De esta manera $f(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$. Para aplicar la regla de L'Hôpital se reescribe la función como $f(x)=(\ln x)/x^{-1}$ de manera que $f(x)$ presente una indeterminación del tipo $-\infty/\infty$. Se puede aplicar entonces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=\underbrace{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}\right)}_{\text{Regla de L'Hôpital}}=\underbrace{\lim_{x\to 0+}(-x)}_{\text{Simplifique}}=0$$ ■

■ **EJEMPLO 5 Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital** Evalúe $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{\cos x-1}$.

Solución Si $x=0$, entonces:

$$e^x-x-1=e^0-0-1=0\qquad \cos x-1=\cos 0-1=0$$

una primera aplicación de la regla de L'Hôpital da lugar a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{-\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\operatorname{sen} x}$$

Este último límite vuelve a ser indeterminado, del tipo $0/0$, por lo que se puede aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\cos x}=\frac{-e^0}{\cos 0}=-1$$ ■

■ **EJEMPLO 6 Las hipótesis importan** ¿Se puede aplicar la regla de L'Hôpital a $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{2x+1}$?

Solución La respuesta es que no. La función *no* presenta ninguna indeterminación pues:

$$\left.\frac{x^2+1}{2x+1}\right|_{x=1}=\frac{1^2+1}{2\cdot 1+1}=\frac{2}{3}$$

De hecho, el límite se puede evaluar directamente por sustitución: $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}$. Una aplicación de la regla de L'Hôpital da lugar a la respuesta incorrecta de que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2}=1\quad\text{(que no es igual al límite original)}$$ ■

■ **EJEMPLO 7** **La forma $\infty - \infty$** Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$.

Solución

Tanto $1/\operatorname{sen} x$ como $1/x$ llegan a ser inf nitos en $x = 0$, por lo que se tiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Se debe reescribir la función como:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

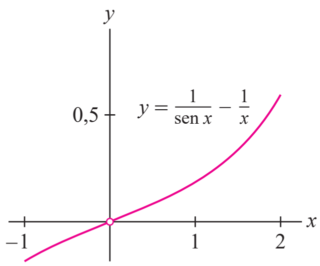


FIGURA 1 La gráf ca conf rma que $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}$ tiende a 0 cuando $x \to 0$.

para así obtener una indeterminación del tipo $0/0$. La regla de L'Hôpital da lugar a (vea f gura 1):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}}_{\text{Regla de L'Hôpital}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{-x\operatorname{sen} x + 2\cos x}}_{\text{Regla de L'Hôpital necesaria de nuevo}} = \frac{0}{2} = 0$$ ■

Los límites de la forma $f(x)^{g(x)}$ pueden ocasionar indeterminaciones del tipo 0^0, 1^∞ o ∞^0. En estos casos, considere el logaritmo y, a continuación, aplique la regla de L'Hôpital.

■ **EJEMPLO 8** **La forma 0^0** Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$.

Solución

En primer lugar, calcule el límite del logaritmo $\ln x^x = x\ln x$:

$$\lim_{x\to 0+}\ln(x^x) = \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = 0 \qquad \text{(según el ejemplo 4)}$$

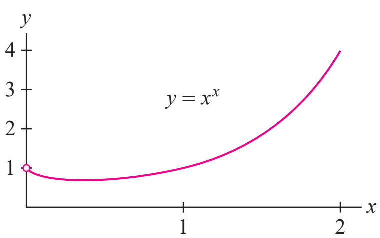


FIGURA 2 La función $y = x^x$ tiende a 1 cuando $x \to 0+$.

Como $f(x) = e^x$ es una función continua, se puede aplicar la exponencial para obtener el límite del enunciado (vea la f gura 2):

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^x)} = e^{\lim_{x\to 0+}\ln(x^x)} = e^0 = 1$$ ■

Comparación de crecimiento de funciones

A veces interesa determinar para dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, cuál de ellas crece más rápido. Por ejemplo, existen dos algoritmos informáticos estándar para ordenar datos (alfabéticamente, ordenando según el rango, etc): el **Quick Sort** y **Bubble Sort**. El tiempo medio necesario para ordenar una lista de tamaño n tiene un orden de magnitud de $n\ln n$ para el Quick Sort y n^2 para Bubble Sort. ¿Qué algoritmo es más rápido cuando n es elevado? Aunque n es un número entero, este problema se resuelve al comparar el crecimiento de $f(x) = x\ln x$ y de $g(x) = x^2$ cuando $x \to +\infty$.

Se dice que $f(x)$ crece *más rápido* que $g(x)$ si:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Para indicar que $f(x)$ crece más rápido que $g(x)$, se usa la notación $g(x) \ll f(x)$. Por ejemplo, $x \ll x^2$ pues:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

Para comparar el crecimiento de funciones, es necesaria una versión de la regla de L'Hôpital que se pueda aplicar a límites en el inf nito.

TEOREMA 2 La regla de L'Hôpital para límites en el infinito Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un intervalo $(b, +\infty)$ y que $g'(x) \neq 0$ para $x > b$. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ existen y ambos son iguales a cero o ambos iguales a inf nito, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

siempre que el límite de la derecha exista. Un resultado análogo es también cierto para límites $x \to -\infty$.

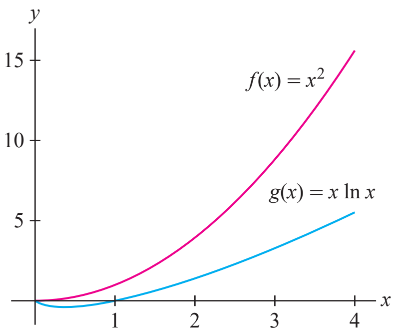


FIGURA 3

■ **EJEMPLO 9 La forma $\frac{\infty}{\infty}$** ¿Cuál de las siguientes funciones crece más rápido cuando $x \to +\infty$: $f(x) = x^2$ o $g(x) = x \ln x$?

Solución Tanto $f(x)$ como $g(x)$ tienden a inf nito cuando $x \to +\infty$, por tanto, se puede aplicar la regla de L'Hôpital al cociente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x \ln x} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{-1}}}_{\text{Regla de L'Hôpital}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

La conclusión es que $x \ln x \ll x^2$ (f gura 3). ■

■ **EJEMPLO 10** Jonathan quiere comparar dos algoritmos informáticos cuyos tiempos medios de ejecución son, aproximadamente, $(\ln n)^2$ y $\sqrt{n}$ respectivamente. ¿Qué algoritmo tarda menos para valores elevados de n?

Solución Reemplace n por la variable continua x y aplique la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{2x^{-1} \ln x}}_{\text{Regla de L'Hôpital}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1/2}}{4 \ln x}}_{\text{Simplif que}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{4x^{-1}}}_{\text{Regla de L'Hôpital nuevamente}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1/2}}{8}}_{\text{Simplif que}} = +\infty$$

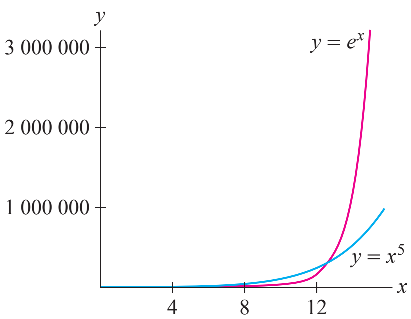


FIGURA 4 Gráf ca ilustrando que $x^5 \ll e^x$.

De esta manera se prueba que $(\ln x)^2 \ll \sqrt{x}$. La conclusión es que el algoritmo cuyo tiempo medio es proporcional a $(\ln n)^2$ tarda menos, para valores grandes de n. ■

En la sección 7.1, se af rmó que las funciones exponenciales tiene un crecimiento más rápido que las funciones potenciales. A continuación se demuestra esta af rmación, probando que $x^n \ll e^x$ para cualquier exponente n (f gura 4).

TEOREMA 3 Crecimiento de e^x

$$\boxed{x^n \ll e^x \qquad \text{para cualquier exponente } n}$$

En otras palabras, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ para todo n.

Demostración El teorema es cierto para $n = 0$ pues $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Se aplicará la regla de L'Hôpital reiteradamente para demostrar que e^x/x^n tiende a $+\infty$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Entonces, al haber demostrado que $e^x/x \to +\infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

De esta manera, se demuestra el resultado para cualquier natural n. Una demostración más formal utilizaría el principio de inducción. Finalmente, si k es cualquier exponente, considere cualquier número natural n tal que $n > k$. Entonces $e^x/x^n < e^x/x^k$ para $x > 1$ y, por tanto, e^x/x^k debe tender asimismo a infinito cuando $x \to +\infty$. ■

Demostración de la regla de L'Hôpital

Una demostración completa de la regla de L'Hôpital, sin simplificaciones, se facilita en un suplemento en el Text Companion Website.

Se demuestra aquí la regla de L'Hôpital únicamente en el primer caso del teorema 1, es decir, en la situación en que $f(a) = g(a) = 0$. Se supondrá también que f' y g' son continuas en $x = a$ y que $g'(a) \neq 0$. Entonces $g(x) \neq g(a)$ para x en un entorno reducido de a y:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

Por la regla del cociente para límites y la definición de derivada, se tiene:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ ■

7.7 RESUMEN

- *La regla de L'Hôpital:* Suponga que f y g son derivables en un entorno de a y que:

$$f(a) = g(a) = 0$$

Suponga también que $g'(x) \neq 0$ (excepto posiblemente en a). Entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista o sea infinito ($+\infty$ o $-\infty$).
- La regla de L'Hôpital también se puede aplicar a límites cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.
- Límites que presenten indeterminaciones de las formas 0^0, 1^∞ o ∞^0 se suelen poder evaluar aplicando primero el logaritmo y después utilizando la regla de L'Hôpital.
- En la comparación de las tasas de crecimiento de funciones, se dice que $f(x)$ crece más rápido que $g(x)$, y se escribe $g \ll f$, si:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

7.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Por qué es incorrecto aplicar la regla de L'Hôpital a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x}{3x - 2}$?

2. ¿Se puede aplicar la regla de L'Hôpital a $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ si tanto $f(x)$ como $g(x)$ tienden a $+\infty$ cuando $x \to a$?

Problemas

En los problemas 1-10, use la regla de L'Hôpital para evaluar el límite o constate que la regla de L'Hôpital no se puede aplicar.

1. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 4}$

2. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 - 25}{5 - 4x - x^2}$

3. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x^2 + 16}$

4. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^4 + 2x + 1}{x^5 - 2x - 1}$

5. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^{1/2} + x - 6}{x^{3/2} - 27}$

6. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x^3 - 7x - 6}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x^2 + 3x + 1}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x - x}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\operatorname{sen} 5x}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$

En los problemas 11-16, pruebe que la regla de L'Hôpital es aplicable al límite cuando $x \to \pm\infty$ y evalúe este límite.

11. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{9x + 4}{3 - 2x}$

12. $\lim_{x\to -\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

13. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{1/2}}$

14. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$

15. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(x^4 + 1)}{x}$

16. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

En los problemas 17-50, evalúe el límite.

17. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{8+x} - 3x^{1/3}}{x^2 - 3x + 2}$

18. $\lim_{x\to 4} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x} - 2} - \dfrac{4}{x - 4}\right]$

19. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x - 2}{1 - 5x}$

20. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^{2/3} + 3x}{x^{5/3} - x}$

21. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{7x^2 + 4x}{9 - 3x^2}$

22. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3 + 4x^2}{4x^3 - 7}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(1+3x)^{1/2} - 2}{(1+7x)^{1/3} - 2}$

24. $\lim_{x\to 8} \dfrac{x^{5/3} - 2x - 16}{x^{1/3} - 2}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 7x}$

26. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan 4x}{\tan 5x}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

28. $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x - \operatorname{sen} x}$

30. $\lim_{x\to \pi/2} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\operatorname{sen} x}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

33. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}(2x)}$

34. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \csc^2 x\right)$

35. $\lim_{x\to \pi/2} (\sec x - \tan x)$

36. $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x^2} - e^4}{x - 2}$

37. $\lim_{x\to 1} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\ln x$

38. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x(\ln x - 1) + 1}{(x-1)\ln x}$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

40. $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{\ln x}$

41. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - x}{x^2}$

42. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1 - x}{x^2}$

43. $\lim_{t\to 0+} (\operatorname{sen} t)(\ln t)$

44. $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}(x^3 - x^2 + 9)$

45. $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$

46. $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x^2}$

47. $\lim_{x\to 1} (1 + \ln x)^{1/(x-1)}$

48. $\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen} x}$

49. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{3/x^2}$

50. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

51. Evalúe $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos mx}{\cos nx}$, donde $m, n \neq 0$ son números enteros.

52. Evalúe $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ para cualquier $m, n \neq 0$.

53. Demuestre la siguiente expresión para el número e como un límite:

$$e = \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$$

A continuación, halle un valor x tal que $|(1 + x)^{1/x} - e| \leq 0{,}001$.

54. GU ¿Puede aplicarse la regla de L'Hôpital a $\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen}(1/x)}$? ¿Puede usted establecer, mediante un estudio gráf co o numérico, si este límite existe?

55. Sea $f(x) = x^{1/x}$ para $x > 0$.

(a) Calcule $\lim_{x\to 0+} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

(b) Halle el valor máximo de $f(x)$, y determine los intervalos en los que $f(x)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

56. (a) Use los resultados del problema 55 para demostrar que $x^{1/x} = c$ tiene una única solución si $0 < c \leq 1$ o $c = e^{1/e}$, dos soluciones si $1 < c < e^{1/e}$ y ninguna solución si $c > e^{1/e}$.

(b) GU Represente gráf camente $f(x) = x^{1/x}$ y verif que que esta representación gráf ca conf rma las conclusiones de (a).

57. Determine si $f \ll g$ o $g \ll f$ (o ninguna de las dos cosas) para las funciones $f(x) = \log_{10} x$ y $g(x) = \ln x$.

58. Pruebe que $(\ln x)^2 \ll \sqrt{x}$ y $(\ln x)^4 \ll x^{1/10}$.

59. De igual manera que las funciones exponenciales se distinguen por su rápido crecimiento, las funciones logarítmicas crecen particularmente despacio. Pruebe que $\ln x \ll x^a$ para todo $a > 0$.

60. Pruebe que $(\ln x)^N \ll x^a$ para todo N y todo $a > 0$.

61. Determine si $\sqrt{x} \ll e^{\sqrt{\ln x}}$ o bien $e^{\sqrt{\ln x}} \ll \sqrt{x}$. *Indicación:* Use la sustitución $u = \ln x$ en vez de la regla de L'Hôpital.

62. Pruebe que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ para cualquier número entero $n > 0$.

63. Las hipótesis son importantes Sea $f(x) = x(2 + \operatorname{sen} x)$ y $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Pruebe directamente que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$.

(b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ pero que el $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x)$ no existe.

¿Contradicen los resultados de (a) y (b) la regla de L'Hôpital? Razone su respuesta.

64. Sea $H(b) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1 + b^x)}{x}$ para $b > 0$.

(a) Demuestre que $H(b) = \ln b$ si $b \geq 1$.

(b) Determine $H(b)$ para $0 < b \leq 1$.

65. Sea $G(b) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + b^x)^{1/x}$.

(a) Use el resultado del problema 64 para evaluar $G(b)$ para todo $b > 0$.

(b) GU Verif que su resultado gráf camente, representando $y = (1 + b^x)^{1/x}$ junto con la recta horizontal $y = G(b)$ para los valores $b = 0{,}25$, $0{,}5$, 2 y 3.

66. Demuestre que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^k e^{-t^2} = 0$ para todo k. *Indicación:* Compare con $\lim\limits_{t\to+\infty} t^k e^{-t} = 0$.

En los problemas 67-69, sea:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \textit{para } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

Estos ejercicios ponen de manif esto que $f(x)$ tiene una propiedad inusual: todas sus derivadas en $x = 0$ existen y son iguales a cero.

67. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^k} = 0$ para todo k. *Indicación:* Considere $t = x^{-1}$ y aplique el resultado del problema 66.

68. Demuestre que $f'(0)$ existe y es igual a cero. Verif que que $f''(0)$ existe y también es igual a cero.

69. Demuestre que para $k \geq 1$ y $x \neq 0$, se cumple:

$$f^{(k)}(x) = \frac{P(x)e^{-1/x^2}}{x^r}$$

para algún polinomio $P(x)$ y algún exponente $r \geq 1$. Use el resultado del ejercicio 67 para demostrar que $f^{(k)}(0)$ existe y es igual a cero para todo $k \geq 1$.

70. (a) Verif que que para $r \neq 0$:

$$\int_0^T te^{rt}\, dt = \frac{e^{rT}(rT - 1) + 1}{r^2} \qquad \boxed{1}$$

Indicación: Fijado r, sea $F(T)$ el valor de la integral de la izquierda. Según la 2^a parte del TFC, $F'(t) = te^{rt}$ y $F(0) = 0$. Pruebe que esto mismo es cierto para la función a la derecha de la igualdad.

(b) Use la regla de L'Hôpital para demostrar que, f jado T, el límite cuando $r \to 0$ del término a la derecha de la igualdad en la ec. (1) es igual a la integral para $r = 0$.

71. La fórmula $\displaystyle\int_1^x t^n dt = \frac{x^{n+1} - 1}{n + 1}$ es válida para $n \neq -1$. Use la regla de L'Hôpital para demostrar que:

$$\lim_{n\to -1} \frac{x^{n+1} - 1}{n + 1} = \ln x$$

Use este resultado para demostrar que:

$$\lim_{n\to -1} \int_1^x t^n dt = \int_1^x t^{-1} dt$$

En consecuencia, la integral def nida de x^{-1} es un límite de integrales def nidas de x^n cuando n tiende a -1.

Problemas avanzados

72. Pruebe que la regla de L'Hôpital se puede aplicar a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ pero que no ayuda. A continuación, evalúe este límite directamente.

73. El criterio de la segunda derivada para puntos críticos falla si $f''(c) = 0$. En este problema se elabora un **criterio de la derivada de mayor orden** basado en el signo de la primera derivada no nula. Suponga que:

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad \text{pero} \quad f^{(n)}(c) \neq 0$$

(a) Demuestre, aplicando la regla de L'Hôpital n veces, que:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$$

donde $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots(2)(1)$.

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que si n es par, entonces $f(c)$ es un mínimo local si $f^{(n)}(c) > 0$, y es un máximo local si $f^{(n)}(c) < 0$. *Indicación:* Si n es par, entonces $(x - c)^n > 0$ para $x \neq c$, y, por tanto, $f(x) - f(c)$ debe ser positivo para x en un entorno de c si $f^{(n)}(c) > 0$.

(c) Utilice el resultado de (a) para demostrar que si n es impar, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo local ni un máximo local.

74. Cuando a un muelle con frecuencia natural $\lambda/2\pi$ se le aplica una fuerza sinusoidal $\operatorname{sen}(\omega t)$ con $\omega \neq \lambda$, éste oscila según:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2}(\lambda \operatorname{sen}(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\lambda t))$$

Sea $y_0(t) = \lim\limits_{\omega\to\lambda} y(t)$.

(a) Use la regla de L'Hôpital para determinar $y_0(t)$.

(b) Demuestre que $y_0(t)$ deja de ser periódico y que su amplitud $|y_0(t)|$ tiende a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$ (se dice que el sistema está en **resonancia**; f nalmente, el muelle se estira más allá de sus límites).

(c) SAC Represente gráf camente $y(t)$ para $\lambda = 1$ y $\omega = 0{,}8$, $0{,}9$, $0{,}99$ y $0{,}999$. ¿Conf rman las gráf cas su conclusión del apartado (b)?

75. Se realizó un gran esfuerzo para evaluar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el capítulo 2. Pruebe que se podría haber evaluado de manera sencilla mediante la regla de L'Hôpital. A continuación, explique por qué este método daría lugar a un razonamiento *circular*.

76. Según un resultado de álgebra, si f y g son polinomios tales que $f(a) = g(a) = 0$, entonces existen polinomios f_1 y g_1 tales que:

$$f(x) = (x - a)f_1(x) \qquad g(x) = (x - a)g_1(x)$$

Aplique este resultado para verif car la regla de L'Hôpital directamente para $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$.

77. Se requiere paciencia Aplique la regla de L'Hôpital para evaluar y compruebe sus respuestas numéricamente:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

78. En los siguientes casos, compruebe que $x = c$ es un punto crítico y aplique el problema 73 para determinar si $f(c)$ es un mínimo local o un máximo local.

(a) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 16x^2 + 9x + 12 \quad (c = 1)$

(b) $f(x) = x^6 - x^3 \quad (c = 0)$

7.8 Funciones trigonométricas inversas

En esta sección, se tratarán las funciones trigonométricas inversas y sus derivadas. Recuerde que una inversa $f^{-1}(x)$ existe si y sólo si la función $f(x)$ es inyectiva en su dominio. Sin embargo, las funciones trigonométricas no son inyectivas (al ser periódicas). En consecuencia, para def nir sus inversas, se debe restringir sus dominios de forma que las funciones resultantes sean inyectivas.

No confunda la inversa $\operatorname{sen}^{-1} x$ *con el* recíproco

$$(\operatorname{sen} x)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

Las funciones inversas $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x, \dots$ *se suelen denotar* $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, *etc.*

Considere en primer lugar la función seno. La f gura 1 muestra que $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ es inyectiva en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Con este intervalo como dominio, la función inversa se denomina **función arcoseno** y se denota $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$ o bien $\theta = \operatorname{arcsen} x$. Por def nición:

$$\boxed{\theta = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } \operatorname{sen}\theta = x}$$

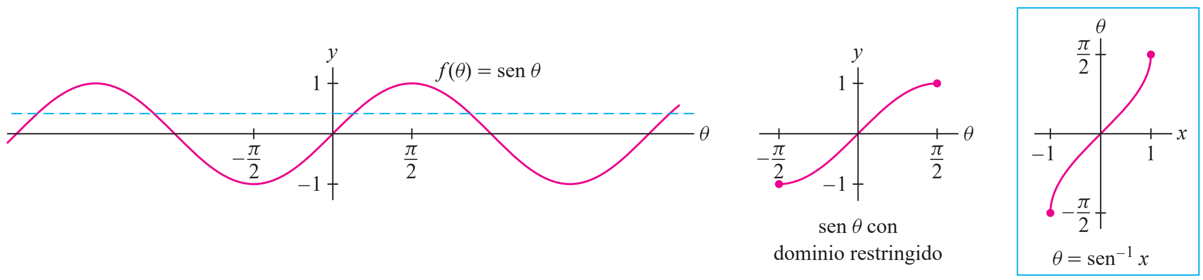


FIGURA 1

El rango de $\operatorname{sen} x$ es $[-1, 1]$ y, por tanto, el dominio de $\operatorname{sen}^{-1} x$ es $[-1, 1]$. Se obtiene una tabla de valores para el arcoseno (tabla 1) intercambiando las columnas en una tabla de valores para el $\operatorname{sen} x$.

Resumen de la relación inversa entre la función seno y la función arcoseno:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \le x \le 1$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\theta) = \theta \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

TABLA 1

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

■ **EJEMPLO 1** **(a)** Pruebe que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

(b) Explique por qué $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \neq \frac{5\pi}{4}$.

Solución La relación $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\theta) = \theta$ es cierta únicamente si θ se encuentra en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Como $\frac{\pi}{4}$ se encuentra en el intervalo requerido, $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

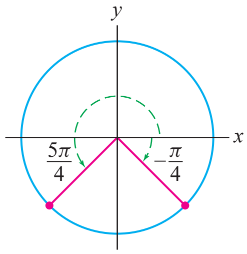


FIGURA 2 $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{4}) = \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4})$.

Resumen de la relación inversa entre el coseno y el arcocoseno:

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \le x \le 1$$
$$\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta \quad \text{para } 0 \le \theta \le \pi$$

(b) Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$. Por def nición, θ es el ángulo en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Por la identidad $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$ (f gura 2),

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

El ángulo $-\frac{\pi}{4}$ se encuentra en el intervalo requerido, por tanto $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$. ■

La función coseno es inyectiva en $[0, \pi]$ en lugar de en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (f gura 3). Con este dominio, la inversa se denomina **función arcocoseno** y se denota $\theta = \cos^{-1} x$ o bien $\theta = \arccos x$. Su dominio es $[-1, 1]$. Por def nición:

$$\boxed{\theta = \cos^{-1} x \text{ es el único ángulo en } [0, \pi] \text{ tal que } \cos\theta = x}$$

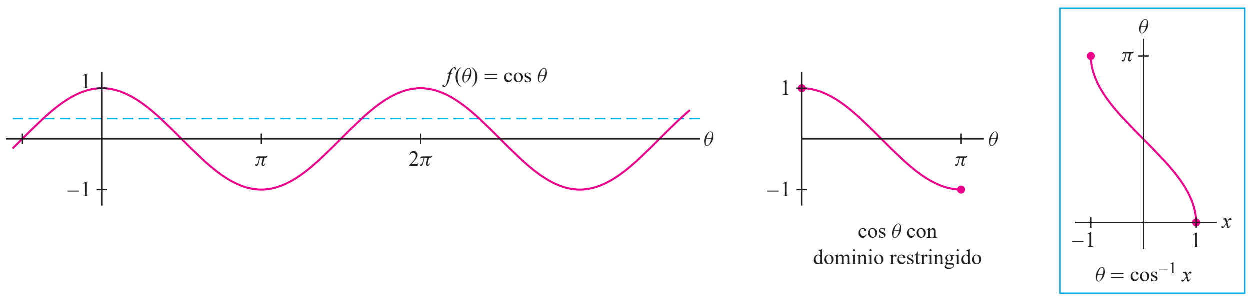


FIGURA 3

Para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, se necesita simplif car expresiones compuestas tales como $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ y $\tan(\sec^{-1} x)$. Esto se puede realizar de dos maneras: haciendo referencia a un triángulo rectángulo apropiado, o utilizando identidades trigonométricas.

■ **EJEMPLO 2** Simplif que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ y $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$.

Solución Se pide determinar los valores de $\cos\theta$ y de $\tan\theta$ para el ángulo $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$. Considere un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga longitud 1 y ángulo θ tal que $\operatorname{sen}\theta = x$, como se ilustra en la f gura 4. Por el teorema de Pitágoras, la longitud del cateto contiguo es $\sqrt{1 - x^2}$. Ahora, se pueden obtener los valores de la f gura 4:

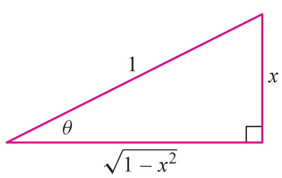


FIGURA 4 Triángulo rectángulo construido de forma que $\operatorname{sen}\theta = x$.

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{sen}^{-1} x) &= \cos\theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \sqrt{1 - x^2} \\ \tan(\operatorname{sen}^{-1} x) &= \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{contiguo}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

Alternativamente, se puede razonar en base a identidades trigonométricas. Como $\operatorname{sen}\theta = x$,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - x^2}$$

Se considera la determinación positiva de la raíz cuadrada porque $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$ se encuentra en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $\cos\theta$ es positivo en éste. ■

En el siguiente teorema, se calculan las derivadas del arcoseno y del arcocoseno mediante la fórmula para la derivada de la función inversa, que se recuerda al margen [ec. (3)].

TEOREMA 1 Derivadas del arcoseno y del arcocoseno

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \boxed{2}$$

RECORDATORIO Si $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \qquad \boxed{3}$$

Demostración Aplique la ec. (3) al margen, a $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{f'(\operatorname{sen}^{-1} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En el último paso, se ha utilizado la ec. (1) del ejemplo 2. La derivada de $\cos^{-1} x$ se obtiene de forma análoga (vea el problema 49 o el siguiente ejemplo). ■

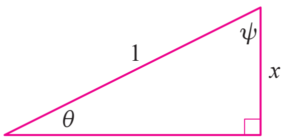


FIGURA 5 Los ángulos $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $\psi = \cos^{-1} x$ son complementarios y, por tanto, suman $\pi/2$.

■ **EJEMPLO 3 Ángulos complementarios** Las derivadas de $\operatorname{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$ son iguales salvo por un signo negativo. Justifique esta afirmación demostrando que:

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Solución En la figura 5, se tiene que $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $\psi = \cos^{-1} x$. Estos ángulos son complementarios y, por tanto, suman $\theta + \psi = \pi/2$ como se había afirmado. De esta manera:

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x\right) = -\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x \qquad ■$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule $f'(\frac{1}{2})$, donde $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2)$.

Solución Recuerde que $\operatorname{arcsen} x$ es otra notación para $\operatorname{sen}^{-1} x$. Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x^2) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\frac{d}{dx}x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{15}} \qquad ■$$

A continuación se consideran el resto de las funciones trigonométricas. La función $f(\theta) = \tan\theta$ es inyectiva en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $f(\theta) = \cot\theta$ es inyectiva en $(0, \pi)$ [vea la figura 10 en la sección 1.4]. Se definen sus inversas restringiéndolas a estos dominios:

$$\boxed{\theta = \tan^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } \tan\theta = x}$$

$$\boxed{\theta = \cot^{-1} x \text{ es el único ángulo en } (0, \pi) \text{ tal que } \cot\theta = x}$$

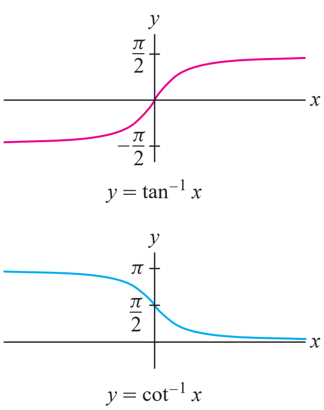


FIGURA 6

Tanto el rango de $\tan\theta$ como el de $\cot\theta$ es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$. De esta manera, el dominio de $\theta = \tan^{-1} x$ y de $\theta = \cot^{-1} x$ es, en ambos casos, $\mathbb{R}$ (figura 6).

La función $f(\theta) = \sec\theta$ no está def nida en $\theta = \frac{\pi}{2}$ pero, tal y como se observa en la f gura 7, es inyectiva en $[0, \frac{\pi}{2})$ y en $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. De manera análoga, $f(\theta) = \csc\theta$ no está def nida en $\theta = 0$, pero es inyectiva en $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(0, \frac{\pi}{2}]$. Se def nen las funciones inversas de la siguiente manera:

$$\boxed{\theta = \sec^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ tal que } \sec\theta = x}$$

$$\boxed{\theta = \csc^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } \csc\theta = x}$$

La f gura 7 muestra que $f(\theta) = \sec\theta$ es el conjunto de los números reales x tales que $|x| \geq 1$. Lo mismo es cierto para $f(\theta) = \csc\theta$. En consecuencia, el dominio de $\theta = \sec^{-1} x$ y $\theta = \csc^{-1} x$ es $\{x : |x| \geq 1\}$.

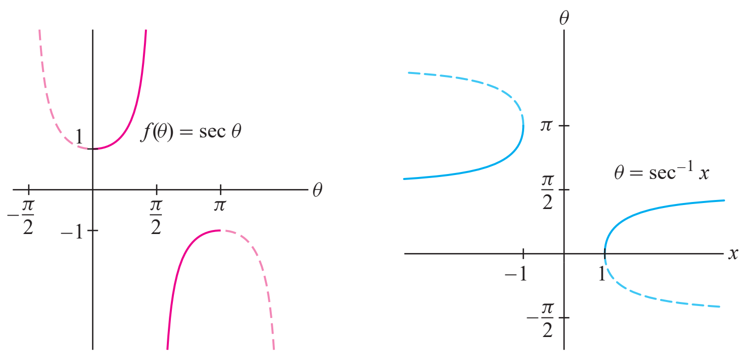


FIGURA 7 $f(\theta) = \sec\theta$ es inyectiva en el intervalo $[0, \pi]$, sin el punto $\pi/2$.

Las demostraciones de las fórmulas del teorema 2 son análogas a la demostración del teorema 1. Vea los problemas 50 y 52.

TEOREMA 2 Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{x^2+1} \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

EJEMPLO 5 Calcule:

$$\textbf{(a)}\ \frac{d}{dx}\tan^{-1}(3x+1) \quad \text{y} \quad \textbf{(b)}\ \frac{d}{dx}\csc^{-1}(e^x+1)\bigg|_{x=0}$$

Solución

(a) Aplique la regla de la cadena usando la fórmula $\dfrac{d}{du}\tan^{-1} u = \dfrac{1}{u^2+1}$:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(3x+1) = \frac{1}{(3x+1)^2+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{9x^2+6x+2}$$

(b) Aplique la regla de la cadena usando la fórmula $\dfrac{d}{du}\csc^{-1} u = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}$:

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}(e^x+1) = -\frac{1}{|e^x+1|\sqrt{(e^x+1)^2-1}}\ \frac{d}{dx}(e^x+1) =$$
$$= -\frac{e^x}{(e^x+1)\sqrt{e^{2x}+2e^x}}$$

Se ha reemplazado $|e^x + 1|$ por $e^x + 1$ ya que esta cantidad es positiva. Así:

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}(e^x+1)\bigg|_{x=0} = -\frac{e^0}{(e^0+1)\sqrt{e^0+2e^0}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$ ■

Las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, conducen a las siguientes fórmulas de integración.

Fórmulas de integración

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x + C \qquad \boxed{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C \qquad \boxed{5}$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C \qquad \boxed{6}$$

En esta lista se han omitido las fórmulas de integrales correspondientes a las derivadas de $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ porque las integrales resultantes difieren únicamente en un signo menos de las que ya se encuentran en la lista. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

Se pueden utilizar estas fórmulas para expresar las funciones trigonométricas inversas como integrales definidas. Por ejemplo, como $\operatorname{sen}^{-1} 0 = 0$, se tiene (figura 8):

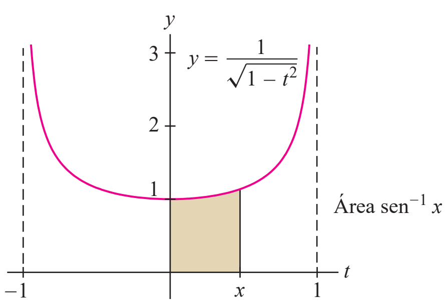


FIGURA 8

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{para } -1 < x < 1}$$

■ **EJEMPLO 6** Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$.

Solución Esta integral es el área de la región de la figura 9. Según la ec. (5):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x\bigg|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$ ■

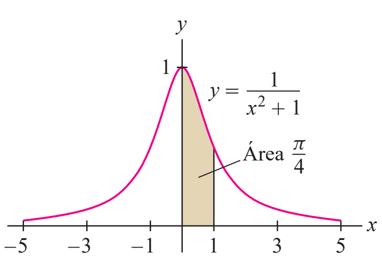


FIGURA 9

■ **EJEMPLO 7 Usando sustitución** Evalúe $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

Solución Observe que $\sqrt{4x^2-1}$ se puede escribir como $\sqrt{(2x)^2-1}$; así, parece razonable intentar la sustitución $u = 2x$, $du = 2\,dx$. Entonces:

$$u^2 = 4x^2 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4x^2-1} = \sqrt{u^2-1}$$

Los nuevos límites de integración son $u(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ y $u(1) = 2$. Aplique ahora la ec. (6). Observe que se puede omitir el valor absoluto en la ec. (6) al ser positivos los límites de integración:

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\frac{1}{2}\,du}{\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} =$$

$$= \sec^{-1} 2 - \sec^{-1}\sqrt{2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

■

■ **EJEMPLO 8 Usando sustitución** Evalúe $\displaystyle\int_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$.

Solución En primer lugar, reescriba el integrando:

$$\sqrt{9-16x^2} = \sqrt{9\left(1-\frac{16x^2}{9}\right)} = 3\sqrt{1-\left(\frac{4x}{3}\right)^2}$$

Así, parece razonable intentar la sustitución $u = \frac{4}{3}x$. Entonces $du = \frac{4}{3}\,dx$ y:

$$x = \frac{3}{4}u \qquad dx = \frac{3}{4}\,du \qquad \sqrt{9-16x^2} = 3\sqrt{1-u^2}$$

Los nuevos límites de integración son $u(-\frac{3}{4}) = -1$ y $u(0) = 0$. Según la ec. (4):

$$\int_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{\frac{3}{4}\,du}{3\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}^{-1} 0 - \operatorname{sen}^{-1}(-1)\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

■

7.8 RESUMEN

- Las funciones *arcoseno* y *arcocoseno* están definidas para $-1 \le x \le 1$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } \operatorname{sen}\theta = x$$

$$\theta = \cos^{-1} x \text{ es el único ángulo en } [0, \pi] \text{ tal que } \cos\theta = x$$

- $\tan^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ están definidas para todo x:

$$\theta = \tan^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } \tan\theta = x$$

$$\theta = \cot^{-1} x \text{ es el único ángulo en } (0, \pi) \text{ tal que } \cot\theta = x$$

- $\sec^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ están definidas para $|x| \ge 1$:

$$\theta = \sec^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ tal que } \sec\theta = x$$

$$\theta = \csc^{-1} x \text{ es el único ángulo en } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } \csc\theta = x$$

- Fórmulas de derivación:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{x^2+1} \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

- Fórmulas de integración:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{sen}^{-1}x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + C$$

7.8 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes cantidades no está definida?

(a) $\mathrm{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$ **(b)** $\cos^{-1}(2)$

(c) $\csc^{-1}(\frac{1}{2})$ **(d)** $\csc^{-1}(2)$

2. Dé un ejemplo de un ángulo θ tal que $\cos^{-1}(\cos\theta) \neq \theta$. ¿Existe contradicción con la definición de inversa?

3. Dé la interpretación geométrica de la identidad:

$$\mathrm{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

¿Qué información facilita esta identidad sobre las derivadas de $\mathrm{sen}^{-1}x$ y de $\cos^{-1}x$?

4. Halle b tal que $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$.

5. ¿Qué relación entre x y u conduce a $\sqrt{16+x^2} = 4\sqrt{1+u^2}$?

Problemas

En los problemas 1-6, evalúe sin utilizar una calculadora.

1. $\cos^{-1}1$ **2.** $\mathrm{sen}^{-1}\frac{1}{2}$

3. $\cot^{-1}1$ **4.** $\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **6.** $\mathrm{sen}^{-1}(-1)$

En los problemas 7-16, calcule sin utilizar una calculadora.

7. $\mathrm{sen}^{-1}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ **8.** $\mathrm{sen}^{-1}\left(\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$

9. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$ **10.** $\mathrm{sen}^{-1}\left(\mathrm{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ **12.** $\tan^{-1}(\tan\pi)$

13. $\sec^{-1}(\sec 3\pi)$ **14.** $\sec^{-1}\left(\sec\frac{3\pi}{2}\right)$

15. $\csc^{-1}(\csc(-\pi))$ **16.** $\cot^{-1}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

En los problemas 17-20, simplifique haciendo referencia al triángulo apropiado o a una identidad trigonométrica.

17. $\tan(\cos^{-1}x)$ **18.** $\cos(\tan^{-1}x)$

19. $\cot(\sec^{-1}x)$ **20.** $\cot(\mathrm{sen}^{-1}x)$

En los problemas 21-28, haga referencia al triángulo apropiado o a una identidad trigonométrica para calcular el valor indicado.

21. $\cos(\mathrm{sen}^{-1}\frac{2}{3})$ **22.** $\tan(\cos^{-1}\frac{2}{3})$

23. $\tan(\mathrm{sen}^{-1}0{,}8)$ **24.** $\cos(\cot^{-1}1)$

25. $\cot(\csc^{-1}2)$ **26.** $\tan(\sec^{-1}(-2))$

27. $\cot(\tan^{-1}20)$ **28.** $\mathrm{sen}(\csc^{-1}20)$

En los problemas 29-32, calcule la derivada en el punto indicado pero sin utilizar una calculadora.

29. $y = \text{sen}^{-1} x, \quad x = \frac{3}{5}$

30. $y = \tan^{-1} x, \quad x = \frac{1}{2}$

31. $y = \sec^{-1} x, \quad x = 4$

32. $y = \text{arc}\cos(4x), \quad x = \frac{1}{5}$

En los problemas 33-48, halle la derivada.

33. $y = \text{sen}^{-1}(7x)$

34. $y = \text{arc}\tan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

35. $y = \cos^{-1}(x^2)$

36. $y = \sec^{-1}(t+1)$

37. $y = x\tan^{-1} x$

38. $y = e^{\cos^{-1} x}$

39. $y = \text{arcsen}(e^x)$

40. $y = \csc^{-1}(x^{-1})$

41. $y = \sqrt{1-t^2} + \text{sen}^{-1} t$

42. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$

43. $y = (\tan^{-1} x)^3$

44. $y = \dfrac{\cos^{-1} x}{\text{sen}^{-1} x}$

45. $y = \cos^{-1} t^{-1} - \sec^{-1} t$

46. $y = \cos^{-1}(x + \text{sen}^{-1} x)$

47. $y = \text{arc}\cos(\ln x)$

48. $y = \ln(\text{arcsen}\, x)$

49. Use la f gura 10 para demostrar que $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

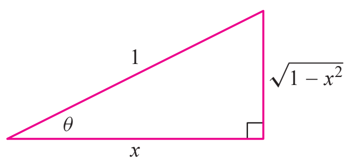


FIGURA 10 Triángulo rectángulo en el que $\theta = \cos^{-1} x$.

50. Demuestre que $(\tan^{-1} x)' = \cos^2(\tan^{-1} x)$ y, a continuación, use la f gura 11 para demostrar que $(\tan^{-1} x)' = (x^2+1)^{-1}$.

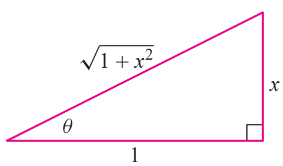


FIGURA 11 Triángulo rectángulo en el que $\theta = \tan^{-1} x$.

51. Sea $\theta = \sec^{-1} x$. Demuestre que $\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$ si $x \geq 1$ y que $\tan\theta = -\sqrt{x^2-1}$ si $x \leq -1$. *Indicación:* $\tan\theta \geq 0$ en $(0, \frac{\pi}{2})$ y $\tan\theta \leq 0$ en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

52. Use el problema 51 para verif car la fórmula:

$$(\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

En los problemas 53-56, evalúe la integral def nida.

53. $\displaystyle\int_{\tan 1}^{\tan 8} \frac{dx}{x^2+1}$

54. $\displaystyle\int_{2}^{7} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

55. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

56. $\displaystyle\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

57. Use la sustitución $u = x/3$ para demostrar:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$$

58. Use la sustitución $u = 2x$ para evaluar $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+1}$.

En los problemas 59-72, calcule la integral.

59. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2+3}$

60. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dt}{4t^2+9}$

61. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-16t^2}}$

62. $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$

63. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{5-3t^2}}$

64. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{16x^2-1}}$

65. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{12x^2-3}}$

66. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

68. $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

69. $\displaystyle\int \frac{\ln(\cos^{-1} x)\,dx}{(\cos^{-1} x)\sqrt{1-x^2}}$

70. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1} x\,dx}{1+x^2}$

71. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(\tan^{-1} x)(1+x^2)}$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5^{2x}-1}}$

En los problemas 73-110, evalúe la integral mediante los métodos que se han tratado hasta el momento en este libro.

73. $\displaystyle\int ye^{y^2}\,dy$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+5}$

75. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+9}}$

76. $\displaystyle\int (x - x^{-2})^2\,dx$

77. $\displaystyle\int 7^{-x}\,dx$

78. $\displaystyle\int e^{9-12t}\,dt$

79. $\displaystyle\int \sec^2\theta\tan^7\theta\,d\theta$

80. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)\,dt}{t}$

81. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}}$

82. $\displaystyle\int 2^x e^{4x}\,dx$

83. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,dx}{x^2+4}$

84. $\displaystyle\int \tan(4x+1)\,dx$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

86. $\displaystyle\int e^t\sqrt{e^t+1}\,dt$

87. $\displaystyle\int (e^{-x} - 4x)\,dx$

88. $\displaystyle\int (7 - e^{10x})\,dx$

89. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{4x}}{e^x}\,dx$

90. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$

91. $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

92. $\displaystyle\int (t+1)\sqrt{t+1}\,dt$

93. $\displaystyle\int e^x \cos(e^x)\,dx$

94. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

95. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x-1)\ln(8x-2)}$

97. $\displaystyle\int e^x(e^{2x}+1)^3\,dx$

98. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)^5}$

99. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^3+2}$

100. $\displaystyle\int \frac{(3x-1)\,dx}{9-2x+3x^2}$

101. $\displaystyle\int \cot x\,dx$

102. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x+3}\,dx$

103. $\displaystyle\int \frac{4\ln x+5}{x}\,dx$

104. $\displaystyle\int (\sec\theta\tan\theta)5^{\sec\theta}\,d\theta$

105. $\displaystyle\int x3^{x^2}\,dx$

106. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx$

107. $\displaystyle\int \cot x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

108. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^4}}$

109. $\displaystyle\int t^2\sqrt{t-3}\,dt$

110. $\displaystyle\int \cos x5^{-2\operatorname{sen} x}\,dx$

111. Use la f gura 12 para demostrar:

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x$$

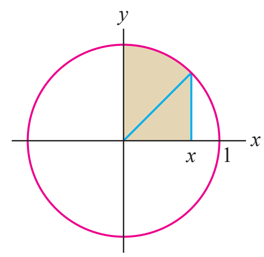


FIGURA 12

112. Use la sustitución $u = \tan x$ para evaluar:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$$

Indicación: Demuestre que:

$$\frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \frac{du}{1+2u^2}$$

113. Demuestre:

$$\int \operatorname{sen}^{-1} t\,dt = \sqrt{1-t^2} + t\operatorname{sen}^{-1} t$$

Problemas avanzados

114. Un tanque cilíndrico de radio R y longitud L en posición horizontal, tal y como se ilustra en la f gura 13, se llena de aceite hasta una altura h.

(a) Demuestre que el volumen $V(h)$ de aceite en el tanque, en función de la altura h es:

$$V(h) = L\left(R^2\cos^{-1}\left(1-\frac{h}{R}\right) - (R-h)\sqrt{2hR-h^2}\right)$$

(b) Demuestre que $\dfrac{dV}{dh} = 2L\sqrt{h(2R-h)}$.

(c) Suponga que $R = 2$ m y $L = 12$ m y que el tanque se llena a razón constante de 1,5 m^3/min. ¿Cuál es la rapidez en el incremento de h cuando $h = 3$ m?

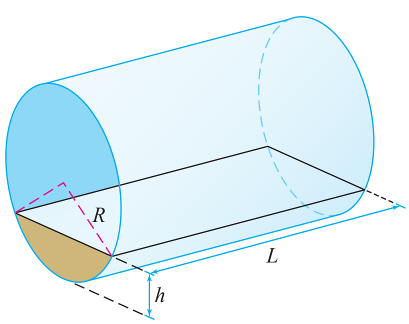


FIGURA 13 El nivel de aceite en el tanque es h.

115. **(a)** Explique por qué el área de la región sombreada en la f gura 14 es:

$$\int_0^{\ln a} e^y\,dy$$

(b) Demuestre la fórmula $\int_1^a \ln x\,dx = a\ln a - \int_0^{\ln a} e^y\,dy$.

(c) Concluya que $\int_1^a \ln x\,dx = a\ln a - a + 1$.

(d) Use el resultado de (a) para hallar una primitiva de $\ln x$.

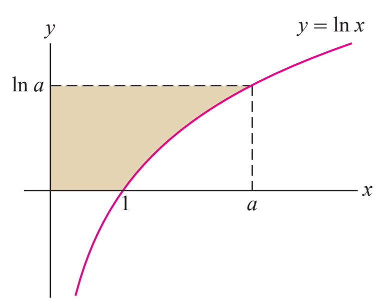


FIGURA 14

FIGURA 1 El Arco de St. Louis tiene la forma de un coseno hiperbólico invertido.

7.9 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas son ciertas combinaciones especiales de e^x y e^{-x} de relevancia en ingeniería y en física (vea la figura 1 para un ejemplo de la vida real). El seno y el coseno hiperbólicos se definen de la siguiente manera:

$$\boxed{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

Como sugiere la terminología, existen similitudes entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas. Algunos ejemplos son:

- **Paridad:** Las funciones trigonométricas y sus análogas hiperbólicas tienen la misma paridad. De esta manera, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{senh} x$ son ambas impares y $\cos x$ y $\cosh x$ son ambas pares (figura 2):

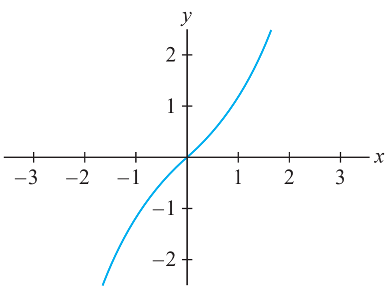
$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

- **Identidades:** La identidad trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ tiene su análoga hiperbólica:

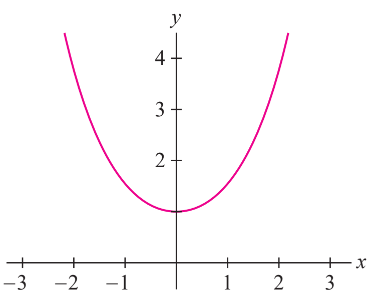
$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1} \qquad \boxed{1}$$

Las fórmulas de adición que verifican $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ también tienen sus análogas hiperbólicas:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \end{aligned}}$$



$y = \operatorname{senh} x$



$y = \cosh x$

FIGURA 2 $y = \operatorname{senh} x$ es una función impar, $y = \cosh x$ es una función par.

- **Hipérbola en lugar de la circunferencia:** La identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ establece que el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ se encuentra en la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$. De manera análoga, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ indica que el punto $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ se encuentra en la *hipérbola* $x^2 - y^2 = 1$ (figura 3).

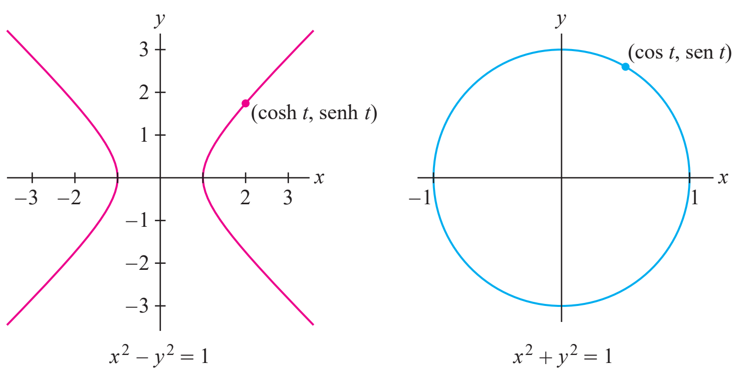


FIGURA 3

- **Otras funciones hiperbólicas:** Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas (vea las figuras 4 y 5) se definen de manera análoga a sus homólogas trigonométricas:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

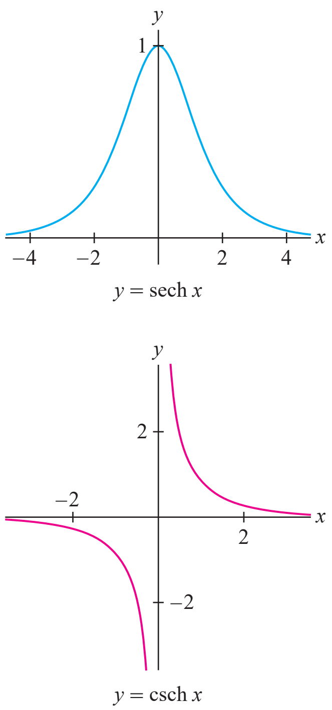


FIGURA 4 La secante y cosecante hiperbólicas.

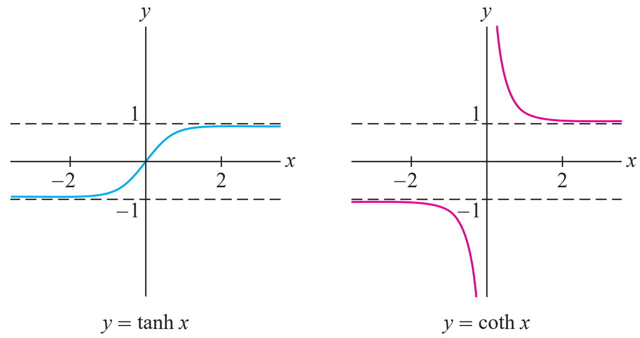


FIGURA 5 La tangente y cotangente hiperbólicas.

■ **EJEMPLO 1 Verificando la identidad fundamental** Verif que la ec. (1).

Solución Según las def niciones:

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x \qquad \cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$$

Se obtiene la ec. (1) multiplicando estas dos ecuaciones entre sí:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = (\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh x - \operatorname{senh} x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$$ ■

Derivadas de las funciones hiperbólicas

Las fórmulas para las derivadas de las funciones hiperbólicas son similares a las correspondientes de las funciones trigonométricas, siendo las diferencias, a lo sumo, de un signo. Para el seno y el coseno hiperbólico se verif ca:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x}$$

La comprobación es inmediata. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Estas fórmulas son análogas a las fórmulas $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$. Las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se calculan de manera similar. Se observa que las fórmulas para sus derivadas dif eren, a lo sumo en un signo, de las de sus homólogas trigonométricas.

Derivadas de las funciones hiperbólicas y trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\tfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad \tfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

RECORDATORIO

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

■ **EJEMPLO 2** Verif que: $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$.

Solución Por la regla del cociente y la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$:

$$\frac{d}{dx}\coth x = \left(\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{senh} x)(\cosh x)' - (\cosh x)(\operatorname{senh} x)'}{\operatorname{senh}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{senh}^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$$ ■

■ **EJEMPLO 3** Calcule **(a)** $\frac{d}{dx}\cosh(3x^2+1)$ y **(b)** $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x \tanh x$.

Solución

(a) Por la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}\cosh(3x^2+1) = 6x\operatorname{senh}(3x^2+1)$

(b) Por la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x \tanh x) = \operatorname{senh} x \operatorname{sech}^2 x + \tanh x \cosh x = \operatorname{sech} x \tanh x + \operatorname{senh} x$$ ■

Las fórmulas para las derivadas de las funciones hiperbólicas son equivalentes a las siguientes fórmulas de integración:

Fórmulas de integración

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + C$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule $\int x\cosh(x^2)\,dx$.

Solución Aplicando la sustitución $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ se obtiene:

$$\int x\cosh(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cosh u\,du = \frac{1}{2}\operatorname{senh} u =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x^2) + C$$ ■

Funciones hiperbólicas inversas

Cada una de las funciones hiperbólicas, salvo $y = \cosh x$ e $y = \operatorname{sech} x$, es inyectiva en su dominio y tiene, por tanto, una inversa bien def nida. Las funciones $y = \cosh x$ e $y = \operatorname{sech} x$ son inyectivas en el dominio restringido $\{x : x \geq 0\}$. Denote como $\cosh^{-1} x$ y $\operatorname{sech}^{-1} x$ sus correspondientes inversas. Se verif can las siguientes fórmulas de derivación.

Funciones hiperbólicas inversas y sus derivadas

Función	Dominio	Derivada
$y = \operatorname{senh}^{-1} x$	todo x	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{senh}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$y = \cosh^{-1} x$	$x \geq 1$	$\dfrac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$y = \tanh^{-1} x$	$\lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1 - x^2}$
$y = \coth^{-1} x$	$\lvert x\rvert > 1$	$\dfrac{d}{dx} \coth^{-1} x = \dfrac{1}{1 - x^2}$
$y = \operatorname{sech}^{-1} x$	$0 < x \leq 1$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{csch}^{-1} x$	$x \neq 0$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert \sqrt{x^2 + 1}}$

Cada fórmula para derivadas de esta tabla se puede expresar como una fórmula de primitivas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{senh}^{-1} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \cosh^{-1} x + C$$

■ **EJEMPLO 5** Verif que la fórmula $\dfrac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Solución Recuerde que si $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, entonces $g'(x) = 1/f'(g(x))$. Aplicando este resultado a $f(x) = \tanh x$ y utilizando la fórmula $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{\operatorname{sech}^2(\tanh^{-1} x)}$$

Ahora sea $t = \tanh^{-1} x$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t &= 1 && \text{(identidad fundamental)} \\ 1 - \tanh^2 t &= \operatorname{sech}^2 t && \text{(divida por } \cosh^2 t) \\ 1 - x^2 &= \operatorname{sech}^2(\tanh^{-1} x) && \text{(al ser } x = \tanh t) \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el resultado del enunciado:

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{\operatorname{sech}^2(\tanh^{-1} x)} = \frac{1}{1 - x^2}$$ ■

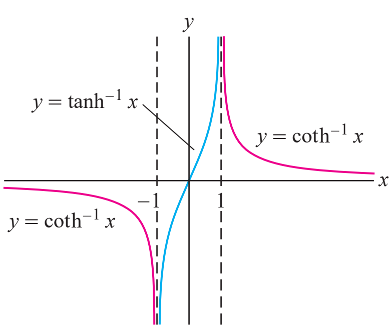


FIGURA 6 Los dominios de las funciones $y = \tanh^{-1} x$ e $y = \coth^{-1} x$ son disjuntos.

■ **EJEMPLO 6** Las funciones $y = \tanh^{-1} x$ e $y = \coth^{-1} x$ parece que tienen la misma derivada. ¿Signif ca esto que se diferencian en un constante?

Solución Según la tabla anterior, la derivada de $y = \tanh^{-1} x$ e $y = \coth^{-1} x$ es, en ambos casos, $1/(1 - x^2)$. Aunque funciones con la misma derivada dif eren en una constante, esto es cierto únicamente si las funciones están def nidas sobre el mismo dominio. En este caso, los dominios de $y = \tanh^{-1} x$ e $y = \coth^{-1} x$ son disjuntos y, por tanto, las funciones no dif eren en una constante (f gura 6). ■

■ **EJEMPLO 7** Evalúe:

$$\textbf{(a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{y} \quad \textbf{(b)} \int_{0,2}^{0,6} \frac{x\,dx}{1 - x^4}$$

Solución Se utilizará la tabla de derivadas de la página 402.

(a) La segunda fórmula de la tabla corresponde a la fórmula de derivación $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Esta fórmula se puede expresar en términos de primitivas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + C$$

(b) En primer lugar, considere la sustitución $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Los nuevos límites de integración son $u = (0{,}2)^2 = 0{,}04$ y $u = (0{,}6)^2 = 0{,}36$, y se obtiene:

$$\int_{0,2}^{0,6} \frac{x\,dx}{1-x^4} = \int_{0,04}^{0,36} \frac{\frac{1}{2}\,du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int_{0,04}^{0,36} \frac{du}{1-u^2}$$

Según la tercera y cuarta fórmulas de la tabla, tanto $\tanh^{-1} u$ como $\coth^{-1} u$ son primitivas de $(1-u^2)^{-1}$. Se debe considerar $\tanh^{-1} u$ porque el dominio de $\tanh^{-1} u$ es $(-1, 1)$ y los límites de integración $u = 0{,}04$ y $u = 0{,}36$ están contenidos dentro de este intervalo (si los límites de integración estuvieran contenidos en $|u| > 1$, se consideraría $\coth^{-1} u$). Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_{0,04}^{0,36} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\tanh^{-1}(0{,}36) - \tanh^{-1}(0{,}04)\right) \approx 0{,}1684$$

Ley de suma de velocidades de Einstein

La tangente hiperbólica tiene importancia en la teoría especial de la relatividad, desarrollada por Albert Einstein en 1905. Una consecuencia de esta teoría es que ningún objeto puede desplazarse a una velocidad mayor que la de la luz, $c \approx 3\times 10^8$ m/s. Einstein se dio cuenta que ésto contradice una ley formulada por Galileo 250 años antes, que establece que las *velocidades se suman*. Imagine un tren que se desplaza a velocidad $u = 50$ m/s y un hombre que camina por el pasillo a velocidad $v = 2$ m/s. Según Galileo, la velocidad relativa del hombre respecto al suelo es $u + v = 52$ m/s. Esta af rmación concuerda con la experiencia diaria. Pero imagine ahora un (irrealista) cohete viajando hacia el exterior desde la Tierra a $u = 2\times 10^8$ m/s y suponga que el cohete lanza un misil con velocidad $v = 1{,}5\times 10^8$ m/s (respecto al cohete). Si la ley de Galileo fuera cierta, la velocidad del misil respecto a la Tierra sería $u + v = 3{,}5\times 10^8$ m/s, que sobrepasa la velocidad máxima de Einstein $c \approx 3\times 10^8$ m/s.

La ley de Einstein (2) se reduce a la de Galileo, $w = u + v$, cuando u y v son pequeñas respecto a la velocidad de la luz c. Vea el problema 67 para otra formulación (2).

No obstante, la teoría de Einstein reemplaza la ley de Galileo con una nueva ley que establece que *la inversa de las tangentes hiperbólicas de las velocidades se suman*. De manera más precisa, si u es la velocidad del cohete respecto a la Tierra y v es la velocidad del misil respecto al cohete, entonces, la velocidad del misil respecto a la Tierra (f gura 7) es w, donde:

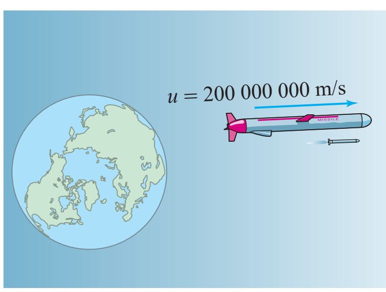


FIGURA 7 ¿Cuál es la velocidad del misil respecto a la Tierra?

$$\tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{u}{c}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) \qquad \boxed{2}$$

EJEMPLO 8 Un cohete viaja al exterior desde la Tierra a 2×10^8 m/s. Se lanza un misil a velocidad $1{,}5\times 10^8$ m/s (respecto al cohete) desde la Tierra. Aplique la ley de suma de velocidades de Einstein para hallar la velocidad w del misil respecto a la Tierra.

Solución Según la ec. (2):

$$\tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{2\times 10^8}{3\times 10^8}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{1{,}5\times 10^8}{3\times 10^8}\right) \approx 0{,}805 + 0{,}549 \approx 1{,}354$$

En consecuencia, $\dfrac{w}{c} \approx \tanh(1{,}354) \approx 0{,}875$ y $w \approx 0{,}875c \approx 2{,}6 \times 10^8$ m/s. Este valor respeta la velocidad límite de Einstein de 3×10^8 m/s. ■

■ **EJEMPLO 9 Velocidades bajas** Un avión que se desplaza a 300 m/s lanza un misil a velocidad de 200 m/s. Calcule la velocidad del misil w respecto a la Tierra (en m/s) mediante la ley de Einstein y la de Galileo.

Solución Según la ley de Einstein:

$$\tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{300}{c}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{200}{c}\right)$$

$$w = c \cdot \tanh\left(\tanh^{-1}\left(\frac{300}{c}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{200}{c}\right)\right) \approx 499{,}99999999967$$

Este valor resulta prácticamente indistinguible de $w = 300 + 200 = 500$ m/s, que se obtiene aplicando la ley de Galileo. ■

Visita guiada: un salto de la imaginación

Los términos "seno hiperbólico" y "coseno hiperbólico" sugieren una conexión entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas. En este apartado se exploran las fuentes de esta conexión, que lleva hasta los **números complejos** y a una conocida fórmula de Euler (f gura 8).

Recuerde que $y = e^t$ cumple la ecuación diferencial $y' = y$. De hecho, se sabe que *toda* solución es de la forma $y = Ce^t$ para alguna contante C. Observe que tanto $y = e^t$ como $y = e^{-t}$ cumplen la **ecuación diferencial de segundo orden**:

Esta ecuación diferencial se denomina de "segundo orden" porque involucra la segunda derivada y''.

$$\boxed{y'' = y} \qquad (3)$$

En efecto, $(e^t)'' = e^t$ y $(e^{-t})'' = (-e^{-t})' = e^{-t}$. Además, *toda* solución de la ec. (3) es de la forma $y = Ae^t + Be^{-t}$ para algunas constantes A y B.

Ahora examinemos qué ocurre cuando se modif ca la ec. (3) con un signo menos:

$$\boxed{y'' = -y} \qquad (4)$$

En este caso, $y = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$ son soluciones, ya que:

$$(\operatorname{sen} t)'' = (\cos t)' = -\operatorname{sen} t \qquad (\cos t)'' = (-\operatorname{sen} t)' = -\cos t$$

Como antes, toda solución de la ec. (4) es de la forma:

$$\boxed{y = A\cos t + B\operatorname{sen} t}$$

Esto podría parecer el f nal de la historia. Sin embargo, se pueden expresar las soluciones de la ec. (4) mediante las funciones exponenciales $y = e^{it}$ e $y = e^{-it}$. En este contexto:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

es el número complejo *imaginario* que cumple $i^2 = -1$. Como i no es un número real, e^{it} no está def nido, sin una explicación adicional. Pero supongamos que e^{it} se *pueda* def nir y que las reglas habituales del cálculo diferencial son aplicables:

$$(e^{it})' = ie^{it}$$
$$(e^{it})'' = (ie^{it})' = i^2e^{it} = -e^{it}$$

FIGURA 8 Leonhard Euler (1707-1783). Euler (que se pronuncia "oil-er") se encuentra entre los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Su trabajo (publicado en más de 70 volúmenes) aporta contribuciones fundamentales a casi todos los aspectos de las matemáticas y la física de su tiempo. El matemático francés Pierre Simon de Laplace, declaró en una ocasión: " Lean a Euler, él es nuestro maestro en todo".

De esta manera, $y = e^{it}$ $y'' = -y$, por lo que deben existir constantes A y B tales que:

$$e^{it} = A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t \tag{5}$$

Estas constantes quedan determinadas por las condiciones iniciales. En primer lugar, considere $t = 0$ en la ec. (5):

$$1 = e^{i0} = A\cos 0 + B\,\mathrm{sen}\,0 = A$$

Luego, derive a lado y lado de la ec. (5) y considere de nuevo $t = 0$:

$$ie^{it} = \frac{d}{dt}e^{it} = A\cos' t + B\,\mathrm{sen}'\,t = -A\,\mathrm{sen}\,t + B\cos t$$

$$i = ie^{i0} = -A\,\mathrm{sen}\,0 + B\cos 0 = B$$

Así, $A = 1$ y $B = i$ y la ec. (5) da lugar a la **fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t}$$

Euler demostró esta fórmula mediante series de potencias, que se pueden utilizar para def nir e^{it} de manera precisa. En $t = \pi$, la fórmula de Euler es:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Se trata de una simple, pero sorprendente, relación entre cuatro números importantes: e, i, π y -1.

La fórmula de Euler también pone de manif esto la analogía entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas. Si se calcula el coseno hiperbólico en $x = it$:

$$\cosh(it) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t}{2} + \frac{\cos(-t) + i\,\mathrm{sen}(-t)}{2} = \cos t$$

Un cálculo similar, muestra que $\mathrm{senh}(it) = i\,\mathrm{sen}\,t$. En otras palabras, las funciones hiperbólicas y las trigonométricas no son simplemente análogas: teniendo presentes los números complejos, se observa que son casi las mismas funciones.

7.9 RESUMEN

- El seno y coseno hiperbólicos:

$$\mathrm{senh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{(función impar)} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(función par)}$$

El resto de las funciones hiperbólicas:

$$\tanh x = \frac{\mathrm{senh}\,x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\mathrm{senh}\,x} \qquad \mathrm{sech}\,x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \mathrm{csch}\,x = \frac{1}{\mathrm{senh}\,x}$$

- Identidad fundamental: $\cosh^2 x - \mathrm{senh}^2 x = 1$

- Fórmulas de derivación y de integración:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \qquad \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x\tanh x \qquad \int \operatorname{sech} x\tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x\coth x \qquad \int \operatorname{csch} x\coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + C$$

- Funciones hiperbólicas inversas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1) \qquad \frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1) \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}} \quad (x \neq 0)$$

Cada fórmula de derivación de esta tabla se puede escribir como una fórmula de integración. Por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{senh}^{-1} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + C$$

7.9 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué funciones hiperbólicas presentan únicamente valores positivos?

2. ¿Qué funciones hiperbólicas son crecientes en sus dominios?

3. Describa tres propiedades de las funciones hiperbólicas para las que existan sus correspondientes análogas trigonométricas.

4. ¿A qué es igual $y^{(100)}$ e $y^{(101)}$ para $y = \cosh x$?

Problemas

1. Use una calculadora para calcular $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ para $x = -3$, 0 y 5.

2. Calcule $\operatorname{senh}(\ln 5)$ y $\tanh(3\ln 5)$ sin utilizar una calculadora.

3. ¿Para qué valores de x son $y = \operatorname{senh} x$ e $y = \cosh x$ estrictamente crecientes y para cuáles estrictamente decrecientes?

4. Demuestre que $y = \tanh x$ es una función impar.

5. Haga referencia a las gráf cas apropiadas para explicar por qué la ecuación $\operatorname{senh} x = t$ tiene una única solución para cualquier t y por qué $\cosh x = t$ tiene dos soluciones para todo $t > 1$.

6. Calcule $\cosh x$ y $\tanh x$, suponiendo que $\operatorname{senh} x = 0{,}8$.

7. Demuestre la fórmula de la adición para $\cosh x$.

8. Utilice las fórmulas de adición para demostrar que:

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\cosh x \operatorname{senh} x$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

En los problemas 9-32, calcule la derivada.

9. $y = \operatorname{senh}(9x)$

10. $y = \operatorname{senh}(x^2)$

11. $y = \cosh^2(9 - 3t)$

12. $y = \tanh(t^2 + 1)$

13. $y = \sqrt{\cosh x + 1}$

14. $y = \operatorname{senh} x \tanh x$

15. $y = \dfrac{\coth t}{1 + \tanh t}$

16. $y = (\ln(\cosh x))^5$

17. $y = \operatorname{senh}(\ln x)$

18. $y = e^{\coth x}$

19. $y = \tanh(e^x)$

20. $y = \operatorname{senh}(\cosh^3 x)$

21. $y = \operatorname{sech}(\sqrt{x})$

22. $y = \ln(\coth x)$

23. $y = \operatorname{sech} x \coth x$

24. $y = x^{\operatorname{senh} x}$

25. $y = \cosh^{-1}(3x)$

26. $y = \tanh^{-1}(e^x + x^2)$

27. $y = (\operatorname{senh}^{-1}(x^2))^3$

28. $y = (\operatorname{csch}^{-1} 3x)^4$

29. $y = e^{\cosh^{-1} x}$

30. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\sqrt{x^2 + 1})$

31. $y = \tanh^{-1}(\ln t)$

32. $y = \ln(\tanh^{-1} x)$

33. Demuestre que para cualesquiera constantes M, k y a, la función:

$$y(t) = \frac{1}{2}M\left(1 + \tanh\left(\frac{k(t-a)}{2}\right)\right)$$

cumple la **ecuación logística** $\dfrac{y'}{y} = k\left(1 - \dfrac{y}{M}\right)$.

34. Demuestre que $V(x) = 2\ln(\tanh(x/2))$ cumple la ecuación de **Poisson-Boltzmann** $V''(x) = \operatorname{senh}(V(x))$, que se utiliza para describir las fuerzas electrostáticas en ciertas moléculas.

En los problemas 35-46, calcule la integral.

35. $\displaystyle\int \cosh(3x)\,dx$

36. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x+1)\,dx$

37. $\displaystyle\int x\operatorname{senh}(x^2+1)\,dx$

38. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 x \cosh x\,dx$

39. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(1-2x)\,dx$

40. $\displaystyle\int \tanh(3x)\operatorname{sech}(3x)\,dx$

41. $\displaystyle\int \tanh x \operatorname{sech}^2 x\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{3\operatorname{senh} x + 4}\,dx$

43. $\displaystyle\int \tanh x\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\,dx$

45. $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{senh} x\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx$

En los problemas 47-52, demuestre la fórmula.

47. $\dfrac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

48. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

49. $\cosh(\operatorname{senh}^{-1} t) = \sqrt{t^2+1}$

50. $\operatorname{senh}(\cosh^{-1} t) = \sqrt{t^2-1}$ para $t \geq 1$

51. $\dfrac{d}{dt}\operatorname{senh}^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

52. $\dfrac{d}{dt}\cosh^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ para $t > 1$

En los problemas 53-60, calcule la integral en términos de funciones hiperbólicas inversas

53. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

57. $\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

59. $\displaystyle\int_2^{10} \frac{dx}{4x^2-1}$

60. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$

61. Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$. *Indicación:* Sea $t = \operatorname{senh} x$. Demuestre que $\cosh x = \sqrt{t^2+1}$ y use la relación:

$$\operatorname{senh} x + \cosh x = e^x$$

62. Demuestre que $\cosh^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$ para $t > 1$.

63. Demuestre que $\tanh^{-1} t = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ para $|t| < 1$.

64. Use la sustitución $u = \operatorname{senh} x$ para demostrar:

$$\int \operatorname{sech} x\,dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x) + C$$

65. Un tren (imaginario) se desplaza por una vía a una velocidad v. Bionica camina por el pasillo del tren a una velocidad u, en la dirección del movimiento del tren. Calcule la velocidad w de Bionica, respecto al suelo, utilizando las leyes de Galileo y de Einstein en los siguientes casos:

(a) $v = 500$ m/s y $u = 10$ m/s. ¿Es su calculadora lo suf cientemente precisa para detectar la diferencia entre las dos leyes?

(b) $v = 10^7$ m/s y $u = 10^6$ m/s.

Problemas avanzados

66. Demuestre que la linealización de la función $y = \tanh^{-1} x$ en $x = 0$ es $\tanh^{-1} x \approx x$. Use este resultado para explicar la siguiente af rmación: La ley de suma de velocidades de Einstein [ec. (2)] se reduce a la de Galileo si las velocidades son pequeñas respecto a la velocidad de la luz.

67. (a) Utilice las fórmulas de adición para $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ para demostrar:

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v}$$

(b) Utilice (a) para demostrar que la ley de suma de velocidades de Einstein [ec. (2)] es equivalente a:

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

68. Demuestre que $\int_{-a}^{a} \cosh x \operatorname{senh} x \, dx = 0$ para todo a.

69. (a) Demuestre que $y = \tanh t$ cumple la ecuación diferencial $dy/dt = 1 - y^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

(b) Pruebe que para cualesquiera constantes arbitrarias A y B, la función:

$$y = A \tanh(Bt)$$

satisface:

$$\frac{dy}{dt} = AB - \frac{B}{A}y^2 \qquad y(0) = 0$$

(c) Sea $v(t)$ la velocidad en caída de un objeto de masa m. Para velocidades elevadas, la resistencia al aire es proporcional a $v(t)^2$. Para un sistema de coordenadas en que $v(t) > 0$ para un objeto en caída, por la ley del movimiento de Newton, existe una constante $k > 0$ tal que:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

Determine $v(t)$ aplicando el resultado de (b) con $A = \sqrt{gm/k}$ y $B = \sqrt{gk/m}$.

(d) Calcule la velocidad terminal $\lim_{t \to +\infty} v(t)$.

(e) Halle k si $m = 150$ lb y la velocidad terminal es 100 mph.

En los problemas 70-72, una cadena f exible de longitud L se encuentra suspendida entre dos postes de igual altura separados por una distancia 2M (f gura 9). Según las leyes de Newton, la cadena describe una curva (llamada ***catenaria****) de ecuación $y = a\cosh(x/a) + C$. La constante C es arbitraria y a es el número tal que $L = 2a \operatorname{senh}(M/a)$. La inf exión s es la distancia vertical desde el punto más alto al más bajo en la cadena.*

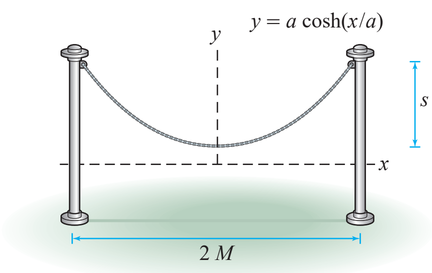


FIGURA 9 Una cadena suspendida entre dos postes describe la curva $y = a\cosh(x/a)$.

70. GU Suponga que $L = 120$ y que $M = 50$. Experimente con su calculadora para hallar un valor aproximado de a que cumpla $L = 2a \operatorname{senh}(M/a)$ (para una mayor precisión, utilice el método de Newton o un programa informático de cálculo simbólico).

71. Sea M una constante f jada. Demuestre que la inf exión viene dada por $s = a\cosh(M/a) - a$.

(a) Calcule $\frac{ds}{da}$.

(b) Calcule da/dL por derivación implícita utilizando la relación $L = 2a \operatorname{senh}(M/a)$.

(c) Aplique (a) y (b) y la regla de la cadena para demostrar que:

$$\frac{ds}{dL} = \frac{ds}{da}\frac{da}{dL} = \frac{\cosh(M/a) - (M/a)\operatorname{senh}(M/a) - 1}{2\operatorname{senh}(M/a) - (2M/a)\cosh(M/a)} \tag{6}$$

72. Suponga que $M = 50$ y $L = 160$. En esta situación, se puede utilizar un programa informático de cálculo simbólico para probar que $a \approx 28{,}46$.

(a) Utilice la ec. (6) y la aproximación lineal para estimar el incremento en la inf exión si L se aumenta de $L = 160$ a $L = 161$ y de $L = 160$ a $L = 165$.

(b) SAC Si dispone de un programa informático de cálculo simbólico, calcule $s(161) - s(160)$ y $s(165) - s(160)$ directamente y compare con sus estimaciones de (a).

73. Demuestre que cualquier función $f(x)$ es la suma de una función par $f_+(x)$ y de una función impar $f_-(x)$. [*Indicación:* $f_\pm(x) = \frac{1}{2}(f(x) \pm f(-x))$.] Exprese $f(x) = 5e^x + 8e^{-x}$ en términos de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$.

74. Aplique el método del problema precedente para para expresar

$$f(x) = 7e^{-3x} + 4e^{3x}$$

en términos de $\operatorname{senh}(3x)$ y $\cosh(3x)$.

75. En la "Visita guiada", se comentaron las relaciones:

$$\cosh(it) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}(it) = i \operatorname{sen} t$$

Utilice estas relaciones para demostrar que la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ se obtiene de $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ sustituyendo $x = it$.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Relacione, si es posible, cada expresión en (a)-(d) con (i), (ii) o (iii), o bien establezca que no existe ninguna relación:

(a) $2^a 3^b$ **(b)** $\frac{2^a}{3^b}$

(c) $(2^a)^b$ **(d)** $2^{a-b}3^{b-a}$

(i) 2^{ab} **(ii)** 6^{a+b} **(iii)** $(\frac{2}{3})^{a-b}$

2. Relacione, si es posible, cada expresión en (a)-(d) con (i), (ii) o (iii), o bien establezca que no existe ninguna relación:

(a) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ **(b)** $\frac{\ln a}{\ln b}$

(c) $e^{\ln a - \ln b}$ **(d)** $(\ln a)(\ln b)$

(i) $\ln a + \ln b$ **(ii)** $\ln a - \ln b$ **(iii)** $\dfrac{a}{b}$

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $\dfrac{d}{dx}2^x$?

(a) 2^x **(b)** $(\ln 2)2^x$

(c) $x2^{x-1}$ **(d)** $\dfrac{1}{\ln 2}2^x$

4. Halle la inversa de $f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$ y determine su dominio y su rango.

5. Halle la inversa de $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ y determine su dominio y su rango.

6. Halle un dominio sobre el que $h(t) = (t-3)^2$ sea inyectiva y determine la inversa sobre este domino.

7. Demuestre que $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ es igual a su inversa sobre el dominio $\{x : x \neq -1\}$.

8. Describa la interpretación gráf ca de la relación $g'(x) = 1/f'(g(x))$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son inversas una de la otra.

9. Suponga que $g(x)$ es la inversa de $f(x)$. Relacione las funciones (a)-(d) con sus inversas (i)-(iv):

(a) $f(x)+1$ **(b)** $f(x+1)$

(c) $4f(x)$ **(d)** $f(4x)$

(i) $g(x)/4$ **(ii)** $g(x/4)$

(iii) $g(x-1)$ **(iv)** $g(x)-1$

10. Halle $g'(8)$ donde $g(x)$ es la inversa de una función diferenciable $f(x)$ tal que $f(-1) = 8$ y $f'(-1) = 12$.

11. Suponga que $f(g(x)) = e^{x^2}$, donde $g(1) = 2$ y $g'(1) = 4$. Halle $f'(2)$.

12. Demuestre que si $f(x)$ es una función que cumple $f'(x) = f(x)^2$, entonces su inversa $g(x)$ verif ca $g'(x) = x^{-2}$.

En los problemas 13-42, halle la derivada.

13. $f(x) = 9e^{-4x}$ **14.** $f(x) = \ln(4x^2+1)$

15. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ **16.** $f(x) = \ln(x + e^x)$

17. $G(s) = (\ln(s))^2$ **18.** $G(s) = \ln(s^2)$

19. $g(t) = e^{4t-t^2}$ **20.** $g(t) = t^2 e^{1/t}$

21 $f(\theta) = \ln(\operatorname{sen}\theta)$ **22** $f(\theta) = \operatorname{sen}(\ln\theta)$

23 $f(x) = \ln(e^x - 4x)$ **24** $h(z) = \sec(z + \ln z)$

25 $f(x) = e^{x+\ln x}$ **26** $f(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

27 $h(y) = 2^{1-y}$ **28** $h(y) = \dfrac{1+e^y}{1-e^y}$

29 $f(x) = 7^{-2x}$ **30** $g(x) = \tan^{-1}(\ln x)$

31. $G(s) = \cos^{-1}(s^{-1})$ **32.** $G(s) = \tan^{-1}(\sqrt{s})$

33. $f(x) = \ln(\csc^{-1} x)$ **34.** $f(x) = e^{\sec^{-1} x}$

35. $R(s) = s^{\ln s}$ **36.** $f(x) = (\cos^2 x)^{\cos x}$

37. $G(t) = (\operatorname{sen}^2 t)^t$ **38.** $h(t) = t^{(t^t)}$

39. $g(t) = \operatorname{senh}(t^2)$ **40.** $h(y) = y\tanh(4y)$

41. $g(x) = \tanh^{-1}(e^x)$ **42.** $g(t) = \sqrt{t^2-1}\,\operatorname{senh}^{-1} t$

43. La ecuación la de recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 4$ es $y = -2x+12$. Halle la ecuación de la recta tangente a $y = g(x)$ en $x = 4$, donde $g(x)$ es la inversa de $f(x)$.

En los problemas 44-46, sea $f(x) = xe^{-x}$.

44. GU Represente gráf camente $f(x)$ y utilice la función de zoom para encontrar dos soluciones de $f(x) = 0{,}3$.

45. Pruebe que $f(x)$ admite una inversa en $[1, \infty)$. Sea $g(x)$ esta inversa. Halle el dominio y el rango de $g(x)$ y calcule $g'(2e^{-2})$.

46. Pruebe que $f(x) = c$ tiene dos soluciones si $0 < c < e^{-1}$.

47. Halle los extremos locales de $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

48. Halle los puntos de inf exión de $f(x) = \ln(x^2+1)$ y determine si el cambio que se produce es de cóncava a convexa o viceversa.

En los problemas 49-52, halle los extremos locales y los puntos de inf exión y dibuje la gráf ca en el intervalo especif cado. Utilice la regla de L'Hôpital para determinar los límites cuando $x \to 0+$ o $x \to \pm\infty$, si fuera necesario.

49. $y = x\ln x, \quad x > 0$ **50.** $y = xe^{-x^2/2}$

51. $y = x(\ln x)^2, \quad x > 0$ **52.** $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^2}{4}\right)$

En los problemas 53-58, utilice derivación logarítmica para hallar la derivada.

53. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(4x-2)^2}$ **54.** $y = \dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)(x+4)}$

55. $y = e^{(x-1)^2}e^{(x-3)^2}$ **56.** $y = \dfrac{e^x \operatorname{sen}^{-1} x}{\ln x}$

57. $y = \dfrac{e^{3x}(x-2)^2}{(x+1)^2}$ **58.** $y = x^{\sqrt{x}}(x^{\ln x})$

59. Procesamiento de imágenes La intensidad de un píxel en una imagen digital se mide por un número u entre 0 y 1. A menudo, las imágenes se puede mejorar mediante un reescalado de la intensidad (f gura 1), donde los píxeles de intensidad u se muestran con una intensidad de $g(u)$ para una función adecuada $g(u)$. Una opción habitual es la **corrección sigmoidal**, que se def ne para constantes a y b como:

$$g(u) = \frac{f(u) - f(0)}{f(1) - f(0)} \quad \text{donde} \quad f(u) = (1 + e^{b(a-u)})^{-1}$$

La f gura 2 muestra que $g(u)$ reduce la intensidad de los píxeles de baja intensidad (aquellos para los que $g(u) < u$) e incrementa la intensidad de los píxeles de alta densidad.

(a) Verifique que $f'(u) > 0$ y utilice este resultado para demostrar que $g(u)$ crece de 0 a 1 para $0 \le u \le 1$.

(b) ¿Cuál es el punto de inflexión de $g(u)$?

Original Corrección sigmoidal

FIGURA 1

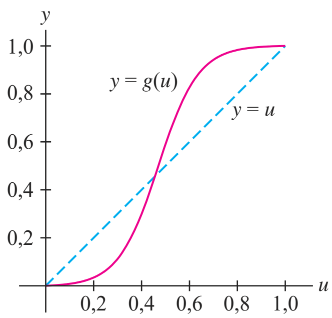


FIGURA 2 Corrección sigmoidal con $a = 0{,}47$, $b = 12$.

60. Sea $N(t)$ el tamaño de un tumor (en unidades de 10^6 células) en el instante t (en días). Según el **modelo de Gompertz**,

$$dN/dt = N(a - b \ln N)$$

donde a y b son constantes positivas. Demuestre que el valor máximo de N es $e^{\frac{a}{b}}$ y que el tumor aumenta más rápido cuando $N = e^{\frac{a}{b}-1}$.

En los problemas 61-66, use la sustitución facilitada para evaluar la integral.

61. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x}, \quad u = \ln x$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+9}, \quad u = \frac{2x}{3}$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}, \quad u = e^{-x}$

64. $\displaystyle\int \frac{\cos^{-1} t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad u = \cos^{-1} t$

65. $\displaystyle\int \frac{dt}{t(1+(\ln t)^2)}, \quad u = \ln t$

66. $\displaystyle\int \frac{dt}{\cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t}, \quad u = \tanh t$

En los problemas 67-92, calcule la integral.

67. $\displaystyle\int e^{9-2x}\,dx$

68. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

69. $\displaystyle\int e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{-2x})\,dx$

70. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)\,dx}{x}$

71. $\displaystyle\int_1^3 e^{4x-3}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

73. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x}$

74. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^{x-e^x}\,dx$

75. $\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

76. $\displaystyle\int_4^{12} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

77. $\displaystyle\int_0^1 \cosh(2t)\,dt$

78. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{4t+12}$

79. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,dx}{x^2+9}$

80. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$

81. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

82. $\displaystyle\int e^x 10^x\,dx$

83. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}\,dx}{(e^{-x}+2)^3}$

84. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, e^{\cos^2\theta+1}\,d\theta$

85. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \tan 2\theta\,d\theta$

86. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cot\left(\frac{1}{2}\theta\right)d\theta$

87. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

88. $\displaystyle\int \tanh 5x\,dx$

89. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\cosh x\,dx$

90. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{25-x^2}$

91. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{2x^2+1}$

92. $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+12}}$

93. El isótopo torio-234 tiene una semivida de 24,5 días.

(a) Halle la ecuación diferencial que cumple la cantidad $y(t)$ de torio-234 en una muestra, en el instante t.

(b) En $t = 0$, una muestra contiene 2 kg de torio-234. ¿Cuánto quedará pasado 1 año?

94. El aperitivo más antiguo En Bat Cave, Nuevo México, unos arqueólogos hallaron restos humanos antiguos, incluyendo mazorcas de maíz, que presentaron una proporción de C^{14} respecto a C^{12} aproximadamente del 48 % de la que se encuentra en la materia viva. Estime la edad de las mazorcas de maíz.

95. La proporción de C^{14} respecto a C^{12} en una muestra es proporcional a la tasa de desintegración (el número de partículas beta emitidas por minuto) que se mide directamente con un contador Geiger. La tasa de desintegración del carbono en un organismo vivo es de 15,3 partículas beta/min por gramo. Halle la edad de una muestra que emite 9,5 partículas beta/min por gramo.

96. En una inversión se pagan 5000 $ al año, al final de cada año y durante 3 años. Calcule el AV, suponiendo una tasa de interés del 8 %.

97. En una reacción química de primer orden, la cantidad $y(t)$ de reactivo en el momento t cumple $y' = -ky$, donde $k > 0$. La dependencia de k respecto de la temperatura T (en grados kelvin) viene dada por la **ecuación de Arrhenius** $k = Ae^{-E_a/(RT)}$, donde E_a es la energía de activación (J-mol^{-1}), $R = 8{,}314$ J-mol^{-1}-K^{-1} y A es una constante. Suponga que $A = 72 \times 10^{12}$ hora^{-1} y que $E_a = 1{,}1 \times 10^5$. Calcule dk/dT para $T = 500$ y utilice la aproximación lineal para estimar la variación en k si T se aumenta de 500 a 510 K.

98. Halle las soluciones de $y' = 4(y - 12)$ cumpliendo $y(0) = 20$ e $y(0) = 0$ y dibuje sus gráf cas.

99. Halle las soluciones de $y' = -2y + 8$ cumpliendo $y(0) = 3$ e $y(0) =$ $= 4$ y dibuje sus gráf cas.

100. Demuestre que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ cumple la ecuación diferencial $y' =$ $= \sec y$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

101. Averigüe $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ si $y(t)$ es una solución de:

(a) $\dfrac{dy}{dt} = -4(y - 12)$?

(b) $\dfrac{dy}{dt} = 4(y - 12)$?

(c) $\dfrac{dy}{dt} = -4y - 12$?

102. Sean A y B dos constantes. Demuestre que si $A > 0$, entonces todas las soluciones de $\frac{dy}{dt} + Ay = B$ tienden al mismo límite cuando $t \to +\infty$.

103. Una actualización de maquinaria que cuesta 1 millón de dólares, permitirá ahorrar una empresa 320 000 dólares anuales durante 4 años. ¿Se trata de una buena inversión si la tasa de interés es de $r = 5\,\%$? ¿Cuál es la mayor tasa de interés que hace que la inversión valga? Suponga que los ahorros se reciben como una suma global al f nal de cada año.

104. Halle el VA de un f ujo de ingresos que paga de manera continua $5000e^{-0{,}1t}$ dólares por año durante 5 años, suponiendo una tasa de interés del $r = 4\,\%$.

En los problemas 105-108, sea $P(t)$ el saldo en el instante t (años) de una anualidad que devenga interés continuo del 5 % y que paga, también de forma continua, a razón de 2000 \$/año.

105. Halle la ecuación diferencial que verif ca $P(t)$.

106. Determine $P(2)$ si $P(0) = 5000$ \$.

107. ¿En qué momento se queda la anualidad sin dinero, si $P(0) =$ $= 2000$ \$?

108. ¿Cuál es el mínimo saldo inicial que debe tener la anualidad para que los pagos puedan continuar indef nidamente?

En los problemas 109-120, verif que que la regla de L'Hôpital se puede aplicar y evalúe el límite.

109. $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{4x - 12}{x^2 - 5x + 6}$

110. $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^3 - 4x - 8}$

111. $\displaystyle\lim_{x\to0+} x^{1/2} \ln x$

112. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(e^t + 1)}{t}$

113. $\displaystyle\lim_{\theta\to0} \frac{2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta}$

114. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2\sqrt[8]{1 + x}}{x^2}$

115. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t + 2)}{\log_2 t}$

116. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$

117. $\displaystyle\lim_{y\to0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} y - y}{y^3}$

118. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos^{-1} x}$

119. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{senh}(x^2)}{\cosh x - 1}$

120. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tanh x - \operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x - x}$

121. Explique por qué la regla de L'Hôpital no proporciona información sobre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{3x + \cos 2x}$. Evalúe el límite por otro método.

122. Sea $f(x)$ una función diferenciable con inversa $g(x)$ tal que $f(0) =$ $= 0$ y $f'(0) \neq 0$. Demuestre que:

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = f'(0)^2$$

123. Calcule el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$$

124. Calcule el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{3n}$$

125. En este ejercicio se demostrará que, para todo $x > 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x \qquad \boxed{1}$$

(a) Pruebe que $\ln(1 + x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 + t}$ para $x > 0$.

(b) Verif que que $1 - t \leq \dfrac{1}{1 + t} \leq 1$ para todo $t > 0$.

(c) Use (b) para probar la ec. (1).

(d) Verif que la ec. (1) para $x = 0{,}5$, $0{,}1$ y $0{,}01$.

126. Sea:

$$F(x) = x\sqrt{x^2 - 1} - 2\int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt$$

Pruebe que $F(x)$ y $\cosh^{-1} x$ dif eren en una constante, calculando sus derivadas respectivas. A continuación, pruebe que son iguales evaluándolas en $x = 1$.

En los problemas 127-130, sea $gd(y) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} y)$ la conocida ***función de Gudermann****, utilizada en cartografía. En un mapa de la Tierra obtenido mediante la proyección de Mercator, puntos situados a y unidades radiales desde el ecuador corresponden a puntos en el globo de latitud $gd(y)$.*

127. Demuestre que $\dfrac{d}{dy} gd(y) = \operatorname{sech} y$.

128. Sea $f(y) = 2\tan^{-1}(e^y) - \pi/2$. Demuestre que $gd(y) = f(y)$. *Indicación:* Pruebe que $gd'(y) = f'(y)$ y $f(0) = gd(0)$.

129. Demuestre que $t(y) = \operatorname{senh}^{-1}(\tan y)$ es la inversa de $gd(y)$ para $0 \le y < \pi/2$.

130. Verif que que la función $t(y)$ del problema 129 cumple $t'(y) = \sec y$, y halle un valor a tal que:

$$t(y) = \int_a^y \frac{dt}{\cos t}$$

131. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que para todo $a > 0$ y $b > 0$, se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}$$

132. Sean:

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Verif que que la regla de L'Hôpital se puede aplicar al límite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{G(x)}$$

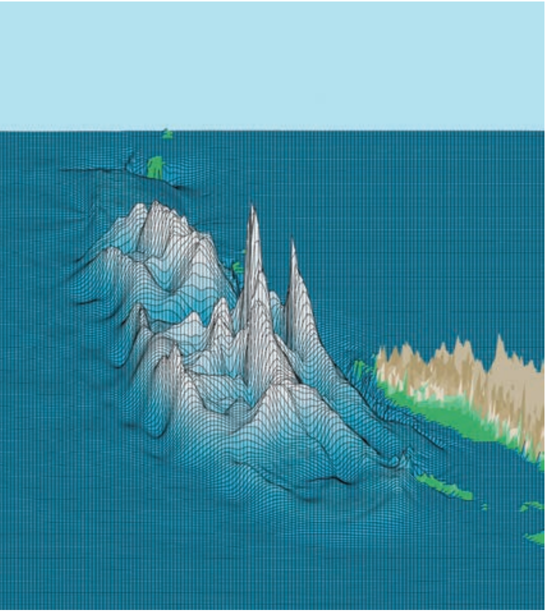
y evalúe L.

133. Sea $f(x) = e^{-Ax^2/2}$, donde $A > 0$. Fijados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sea:

$$\Phi(x) = f(x - a_1) f(x - a_2) \cdots f(x - a_n)$$

(a) Suponga que $n = 2$ y demuestre que $\Phi(x)$ alcanza su valor máximo en la media $x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. *Indicación:* Demuestre que $d/dx \ln(f(x)) = -Ax$ y calcule $\Phi'(x)$ utilizando derivación logarítmica.

(b) Pruebe que para cualquier n, $\Phi(x)$ alcanza su valor máximo en $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Este resultado se encuentra relacionado con el papel de $f(x)$ (cuya gráf ca es la curva de Gauss) en estadística.



Simulación por ordenador del tsunami de Indonesia del 26 de diciembre de 2004 (8 minutos después del terremoto), creado mediante modelos de movimiento ondulatorio, que utilizan técnicas de cálculo diferencial avanzado, por Steven Ward, de la Universidad de California en Santa Cruz.

8 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

En la sección 5.6 se introdujo el método de sustitución, una de las técnicas más importantes de integración. En esta sección se desarrolla una segunda técnica fundamental, la integración por partes, asi como con diferentes técnicas para tratar casos particulares de funciones, tales como las funciones trigonométricas y las funciones racionales. Sin embargo, no existe ningún método infalible y, de hecho, muchas primitivas no se pueden expresar en términos elementales. Así pues, en la última parte se tratará la integración numérica. Cualquier integral def nida se puede aproximar numéricamente con el grado de precisión que se precise.

8.1 Integración por partes

La fórmula de integración por partes se deduce de la regla del producto:

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

Según esta fórmula, $u(x)v(x)$ es una primitiva de la función de la derecha de la igualdad, por tanto:

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)\,dx + \int u'(x)v(x)\,dx$$

Despejando la primera integral de la derecha, se obtiene:

La fórmula de integración por partes se suele escribir también utilizando diferenciales:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

donde $dv = v'(x)\,dx$ y $du = u'(x)\,dx$.

Fórmula de integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \qquad \boxed{1}$$

Como la fórmula de integración por por partes se aplica al producto $u(x)v'(x)$, se debe considerar su utilización cuando el integrando sea un producto de dos funciones.

■ **EJEMPLO 1** Evalúe $\int x\cos x\,dx$.

Solución El integrando es un producto, por lo que se intenta escribir $x\cos x = uv'$ siendo

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = \cos x$$

en este caso, $u'(x) = 1$ y $v(x) = \operatorname{sen} x$. Por la fórmula de integración por partes,

$$\int \underbrace{x\cos x}_{uv'}\,dx = \underbrace{x\operatorname{sen} x}_{uv} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{u'v}\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Al aplicar la ec. (1), se puede utilizar cualquier primitiva $v(x)$ de $v'(x)$.

Se puede comprobar la respuesta considerando la derivada:

$$\frac{d}{dx}(x\operatorname{sen} x + \cos x + C) = x\cos x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = x\cos x$$ ■

El punto clave en la integración por partes es decidir cómo escribir el integrando como un producto uv'. Recuerde que la integración por partes expresa $\int uv'\,dx$ en términos de uv y de $\int u'v\,dx$. *Esta técnica resulta útil si $u'v$ es más fácil de integrar que uv'.* Aquí tiene dos indicaciones:

- Considere u tal que u' sea "más simple" que el propio u.
- Considere v' tal que $v = \displaystyle\int v'\,dx$ pueda ser evaluada.

■ **EJEMPLO 2** **Buenas y malas elecciones de u y v'** Evalúe $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

Solución Según las indicaciones proporcionadas, parece razonable escribir $xe^x = uv'$ siendo:

- $u = x$ (pues $u' = 1$ es más simple)
- $v' = e^x$ (ya que se puede evaluar $v = \displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$)

Mediante integración por partes, se obtiene:

$$\int xe^x\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Si la elección hubiera sido $xe^x = uv'$ con $u = e^x$, $v' = x$, entonces:

$$u'(x) = e^x, \qquad v(x) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int \underbrace{xe^x}_{uv'}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2e^x}_{uv} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2e^x}_{u'v}\,dx$$

Se trata de una mala elección de u y v' pues la integral resultante es más complicada que la original. ■

■ **EJEMPLO 3** **Integrando por partes más de una vez** Evalúe $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$.

En el ejemplo 3, es razonable considerar $u = x^2$ porque la integración por partes de $x^2\cos x$ se reduce a la integración de $2x\,\mathrm{sen}\,x$, que es más sencilla.

Solución Aplique integración por partes en una primera ocasión con $u = x^2$ y $v' = \cos x$:

$$\int \underbrace{x^2\cos x}_{uv'}\,dx = \underbrace{x^2\,\mathrm{sen}\,x}_{uv} - \int \underbrace{2x\,\mathrm{sen}\,x}_{u'v}\,dx = x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx \qquad \boxed{2}$$

Ahora, vuelva a aplicar la integración por partes, esta vez con $u = x$ y $v' = \mathrm{sen}\,x$:

$$\int \underbrace{x\,\mathrm{sen}\,x}_{uv'}\,dx = \underbrace{-x\cos x}_{uv} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u'v}\,dx = -x\cos x + \mathrm{sen}\,x + C$$

Utilizando este resultado en la ec. (2), se obtiene:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2(-x\cos x + \mathrm{sen}\,x) + C =$$
$$= x^2\,\mathrm{sen}\,x + 2x\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x + C$$ ■

La integración por partes se puede aplicar a *integrales definidas*:

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$$

De manera sorprendente, la elección $v' = 1$ es efectiva en algunos casos. Utilizándola como en el ejemplo 4, se obtiene:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

Esta elección también funciona para las funciones trigonométricas inversas (vea el problema 6).

■ **EJEMPLO 4 Considerando $v' = 1$** Evalúe $\displaystyle\int_1^3 \ln x\,dx$.

Solución El integrando no es un producto, por lo que a primera vista, esta integral no parece ser una buena candidata para la integración por partes. Sin embargo, se puede añadir un factor 1 y escribir $\ln x = (\ln x)\cdot 1 = uv'$. Entonces:

$$u = \ln x, \qquad v' = 1$$
$$u' = x^{-1}, \qquad v = x$$

$$\int_1^3 \underbrace{\ln x}_{uv'}\,dx = \underbrace{x\ln x}_{uv}\Big|_1^3 - \int_1^3 \underbrace{1}_{u'v}\,dx = (3\ln 3 - 0) - 2 = 3\ln 3 - 2$$ ■

En el ejemplo 5, la elección $u = e^x$, $v' = \cos x$ funciona igual de bien.

■ **EJEMPLO 5 ¿Círculo?** Evalúe $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$.

Solución Hay dos maneras posibles de expresar $e^x\cos x$ como uv'. Considere $u = \cos x$ y $v' = e^x$. Entonces:

$$\int \underbrace{e^x\cos x}_{uv'}\,dx = \underbrace{e^x\cos x}_{uv} + \int \underbrace{e^x \operatorname{sen} x}_{-u'v}\,dx \qquad \boxed{3}$$

Ahora, aplique integración por partes a la integral de la derecha con $u = \operatorname{sen} x$ y $v' = e^x$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\cos x\,dx \qquad \boxed{4}$$

La ec. (4) lleva de nuevo a la integral original de $e^x\cos x$, por lo que parece como si se estuviera describiendo un círculo. Pero se puede sustituir la ec. (4) en la ec. (3) y aislar la integral de $e^x\cos x$:

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x\operatorname{sen} x\,dx = e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\cos x\,dx$$
$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x + C$$
$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$ ■

*Una fórmula de reducción (también llamada **fórmula recursiva**) expresa la integral para un valor determinado de n en términos de una integral similar pero para un valor menor de n. La integral de origen se evalúa aplicando la fórmula de reducción en repetidas ocasiones.*

La integración por partes se puede utilizar para obtener **fórmulas de reducción** para integrales que dependen de un entero positivo n, como por ejemplo $\displaystyle\int x^n e^x\,dx$ o $\displaystyle\int \ln^n x\,dx$.

■ **EJEMPLO 6 Una fórmula de reducción** Obtenga la fórmula de reducción:

$$\boxed{\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx} \qquad \boxed{5}$$

A continuación evalúe $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$.

Solución Se aplica integración por partes con $u = x^n$ y $v' = e^x$:

En general, $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = P_n(x)e^x + C$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n (vea el problema 78).

$$\int x^n e^x\,dx = uv - \int u'v\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

Para evaluar $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$, se necesita la fórmula de reducción para $n = 3, 2, 1$:

$$\int x^3e^x\,dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx =$$
$$= x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\right) =$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x\,dx =$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) =$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C =$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$$

■

8.1 RESUMEN

- Fórmula de *integración por partes*: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$.
- El punto clave en la integración por partes es decidir cómo escribir el integrando como un producto uv'. Recuerde que la integración por partes es útil si $u'v$ es más fácil (o como mínimo menos difícil) de integrar que uv'. Aquí tiene dos indicaciones:
  - Considere u tal que u' sea "más simple" que el propio u.
  - Considere v' tal que $v = \int v'\,dx$ pueda ser evaluada.
  - En algunas ocasiones, $v' = 1$ es una buena elección.

8.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué regla de derivación se utiliza para deducir la fórmula de integración por partes?

2. Para cada una de las siguientes integrales, indique qué método se debería utilizar en su resolución: sustitución o integración por partes.

$$\int x\cos(x^2)\,dx \qquad \int x\cos x\,dx \qquad \int x^2e^x\,dx \qquad \int xe^{x^2}\,dx$$

3. ¿Por qué $u = \cos x$, $v' = x$ no es una buena elección para resolver la integral $\int x\cos x\,dx$?

Problemas

En los problemas 1-6, resuelva la integral mediante la fórmula de integración por partes, con la elección de u y de v' facilitadas.

1. $\int x\,\text{sen}\,x\,dx$; $u = x$, $v' = \text{sen}\,x$

2. $\int xe^{2x}\,dx$; $u = x$, $v' = e^{2x}$

3. $\int (2x+9)e^x\,dx$; $u = 2x+9$, $v' = e^x$

4. $\int x\cos 4x\,dx$; $u = x$, $v' = \cos 4x$

5. $\int x^3\ln x\,dx$; $u = \ln x$, $v' = x^3$

6. $\int \tan^{-1}x\,dx$; $u = \tan^{-1}x$, $v' = 1$

En los problemas 7-36, resuelva mediante integración por partes.

7. $\int (4x-3)e^{-x}\,dx$

8. $\int (2x+1)e^x\,dx$

9. $\int x\,e^{5x+2}\,dx$

10. $\int x^2e^x\,dx$

11. $\int x\cos 2x\,dx$

12. $\int x\,\text{sen}(3-x)\,dx$

13. $\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx$

14. $\int x^2\cos 3x\,dx$

15. $\int e^{-x}\,\text{sen}\,x\,dx$

16. $\int e^x\,\text{sen}\,2x\,dx$

17. $\int e^{-5x} \operatorname{sen} x\, dx$

18. $\int e^{3x} \cos 4x\, dx$

19. $\int x \ln x\, dx$

20. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

21. $\int x^2 \ln x\, dx$

22. $\int x^{-5} \ln x\, dx$

23. $\int (\ln x)^2\, dx$

24. $\int x(\ln x)^2\, dx$

25. $\int x \sec^2 x\, dx$

26. $\int x \tan x \sec x\, dx$

27. $\int \cos^{-1} x\, dx$

28. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

29. $\int \sec^{-1} x\, dx$

30. $\int x 5^x\, dx$

31. $\int 3^x \cos x\, dx$

32. $\int x \operatorname{senh} x\, dx$

33. $\int x^2 \cosh x\, dx$

34. $\int \cos x \cosh x\, dx$

35. $\int \tanh^{-1} 4x\, dx$

36. $\int \operatorname{senh}^{-1} x\, dx$

En los problemas 37-38, resuelva la integral mediante sustitución, primero, e integración por partes, después.

37. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

Indicación: Considere $u = x^{1/2}$

38. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

En los problemas 39-48, resuelva mediante integración por partes, sustitución, o ambas técnicas si fuera necesario.

39. $\int x \cos 4x\, dx$

40. $\int \frac{\ln(\ln x)\, dx}{x}$

41. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}}$

42. $\int x^2(x^3+9)^{15}\, dx$

43. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

44. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

45. $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}\, dx$

46. $\int \frac{\tan \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$

47. $\int \frac{\ln(\ln x) \ln x\, dx}{x}$

48. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

En los problemas 49-54, calcule la integral definida.

49. $\int_0^3 x e^{4x}\, dx$

50. $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} 2x\, dx$

51. $\int_1^2 x \ln x\, dx$

52. $\int_1^e \frac{\ln x\, dx}{x^2}$

53. $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx$

54. $\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$

55. Utilice la ec. (5) para resolver $\int x^4 e^x\, dx$.

56. Utilice sustitución y la ec. (5), después, para resolver $\int x^4 e^{7x}\, dx$.

57. Halle una fórmula de reducción para $\int x^n e^{-x}\, dx$ análoga a la de la ec. (5).

58. Resuelva $\int x^n \ln x\, dx$ para $n \neq -1$. ¿Qué método se debe utilizar para resolver $\int x^{-1} \ln x\, dx$?

En los problemas 59-66, indique un buen método para resolver la integral (pero no la resuelva). Sus elecciones pueden ser manipulación algebraica, sustitución (especifque u y du) e integración por partes (especifque u y v′). Si considera que las técnicas que ha aprendido de momento no son suf cientes, indíquelo también.

59. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$

60. $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{2x}\, dx$

61. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

63. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+3}\, dx$

64. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4x+3)}$

65. $\int x \operatorname{sen}(3x+4)\, dx$

66. $\int x \cos(9x^2)\, dx$

67. Resuelva $\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\, dx$. *Indicación:* Use integración por partes primero y, a continuación, sustitución.

68. Resuelva $\int \frac{(\ln x)^2\, dx}{x^2}$. *Indicación:* Use sustitución primero y, a continuación, integración por partes.

69. Resuelva $\int x^7 \cos(x^4)\, dx$.

70. Halle $f(x)$, suponiendo que:

$$\int f(x) e^x\, dx = f(x) e^x - \int x^{-1} e^x\, dx$$

71. Halle el volumen del sólido de revolución de la región por debajo de $y = e^x$ para $0 \le x \le 2$, respecto al eje y.

72. Halle el área limitada por $y = \ln x$ e $y = (\ln x)^2$.

73. Recuerde que el *valor actual* (VA) de una inversión que paga de forma continua a razón de $R(t)$ durante T años es $\int_0^T R(t) e^{-rt}\, dt$, donde r es la tasa de interés. Halle el VA si $R(t) = 5000 + 100t$ \$/año, $r = 0{,}05$ y $T = 10$ años.

74. Deduzca la fórmula de reducción:

$$\int (\ln x)^k\, dx = x(\ln x)^k - k \int (\ln x)^{k-1}\, dx \qquad \boxed{6}$$

75. Utilice la ec. (6) para calcular $\int (\ln x)^k\, dx$ para $k = 2, 3$.

76. Deduzca las fórmulas de reducción:

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx$$

77. Demuestre que $\int x b^x\, dx = b^x \left(\frac{x}{\ln b} - \frac{1}{\ln^2 b} \right) + C$.

78. Considere $P_n(x)$ def nido por:

$$\int x^n e^x\, dx = P_n(x) e^x + C$$

Aplique la ec. (5) para demostrar que $P_n(x) = x^n - nP_{n-1}(x)$. Utilice esta relación recursiva para hallar $P_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$. Observe que $P_0(x) = 1$.

Problemas avanzados

79. La fórmula de integración por partes se puede escribir como:

$$\int u(x)v(x)\,dx = u(x)V(x) - \int u'(x)V(x)\,dx \tag{7}$$

donde $V(x)$ verif ca $V'(x) = v(x)$.

(a) Demuestre directamente que la expresión de la derecha de la igualdad de la ec. (7) no cambia si $V(x)$ se sustituye por $V(x) + C$, donde C es una constate.

(b) Considere $u = \tan^{-1} x$ y $v = x$ en la ec. (7) para calcular $\int x \tan^{-1} x\,dx$, pero realice el cálculo dos veces: primero con $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ y después con $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. ¿Qué elección de $V(x)$ da lugar a unos cálculos más sencillos?

80. Demuestre de dos maneras que:

$$\int_0^a f(x)\,dx = af(a) - \int_0^a xf'(x)\,dx \tag{8}$$

Primero utilice integración por partes. Después, suponga que $f(x)$ es estrictamente creciente. Utilice la sustitución $u = f(x)$ para demostrar que $\int_0^a xf'(x)\,dx$ es igual al área de la región sombreada de la f gura 1 y deduzca la ec. (8) de nuevo.

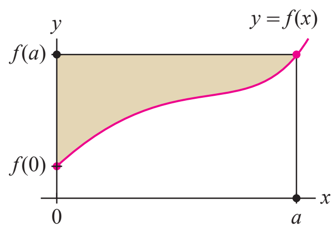


FIGURA 1

81. Suponga que $f(0) = f(1) = 0$ y que f'' existe. Demuestre que:

$$\int_0^1 f''(x)f(x)\,dx = -\int_0^1 f'(x)^2\,dx \tag{9}$$

Utilice este resultado para demostrar que si $f(0) = f(1) = 0$ y $f''(x) = \lambda f(x)$ para alguna constante λ, entonces $\lambda < 0$. ¿Conoce usted alguna función que cumpla estas condiciones para algún λ?

82. Sea $I(a, b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$, donde a y b son números enteros.

(a) Utilice sustitución para demostrar que $I(a, b) = I(b, a)$.

(b) Pruebe que $I(a, 0) = I(0, a) = \dfrac{1}{a+1}$.

(c) Demuestre que para $a \geq 1$ y $b \geq 0$, se cumple:

$$I(a, b) = \frac{a}{b+1} I(a-1, b+1)$$

(d) Utilice (b) y (c) para calcular $I(1, 1)$ e $I(3, 2)$.

(e) Pruebe que $I(a, b) = \dfrac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$.

83. Sea $I_n = \int x^n \cos(x^2)\,dx$ y $J_n = \int x^n \operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

(a) Halle una fórmula de reducción que exprese I_n en términos de J_{n-2}. *Indicación:* Exprese $x^n \cos(x^2)$ como $x^{n-1}(x\cos(x^2))$.

(b) Utilice el resultado de (a) para probar que I_n se puede resolver explícitamente si n es impar.

(c) Evalúe I_3.

8.2 Integrales trigonométricas

Muchas funciones trigonométricas se pueden integrar combinando los métodos de sustitución y de integración con identidades trigonométricas apropiadas. Considere, en primer lugar, una integral del tipo:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

donde m, n són números enteros. El caso más sencillo es cuando, como mínimo, uno de los dos, m o n, es *impar*.

■ **EJEMPLO 1** **Potencia impar de sen x** Resuelva $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Solución Como $\operatorname{sen}^3 x$ es una potencia impar, la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ permite permite separar un factor $\operatorname{sen} x\,dx$ y escribir:

$$\operatorname{sen}^3 x\,dx = \operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen} x\,dx) = (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx$$

Si ahora se utiliza la sustitución $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-u^2)\,du =$$

$$= \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \qquad ■$$

Integración de $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$

Caso 1: $m = 2k + 1$ impar

Exprese $\operatorname{sen}^{2k+1} x$ *como* $(1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x$.

Entonces $\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx$ *es igual a*

$$\int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x\, dx$$

Sustituya $u = \cos x, -du = \operatorname{sen} x\, dx$.

Caso 2: $n = 2k + 1$ impar

Exprese $\cos^{2k+1} x$ *como* $(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x$

Entonces $\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ *es igual a*

$$\int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

Sustituya $u = \operatorname{sen} x, du = \cos x\, dx$.

Caso 3: m, n ambos par

Utilice las fórmulas de reducción (1) o (2) como se describe más abajo, o bien utilice el método de los problemas 65-68.

La estrategia del ejemplo previo funciona para $\operatorname{sen}^m x$ con m impar. De manera similar, si n es impar, escriba $\cos^n x$ como una potencia de $(1 - \operatorname{sen}^2 x)$ veces $\cos x$.

■ **EJEMPLO 2** **Potencia impar de $\operatorname{sen} x$ o de $\cos x$** Resuelva $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx$.

Solución Como $\cos^5 x$ es una potencia impar, se puede escribir:

$$\operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx = \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x (\cos x\, dx) = \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 (\cos x\, dx)$$

Así, mediante la sustitución $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^4 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx = \\ &= \int u^4 (1 - u^2)^2\, du = \int (u^4 - 2u^6 + u^8)\, du = \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2 \operatorname{sen}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{sen}^9 x}{9} + C\end{aligned}$$ ■

Las siguientes fórmulas de reducción se pueden utilizar para integrar $\operatorname{sen}^n x$ y $\cos^n x$ para cualquier exponente n, par o impar (las demostraciones se han dejado como problemas; vea el problema 64).

Fórmulas de reducción para el seno y el coseno

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx \qquad (1)$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx \qquad (2)$$

■ **EJEMPLO 3** Resuelva $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solución Aplique la ec. (1) con $n = 4$:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = -\frac{1}{4} \operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \operatorname{sen}^2 x\, dx \qquad (3)$$

A continuación, aplique la ec. (1) de nuevo, con $n = 2$, a la integral de la derecha de la igualdad:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} \int dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} x + C \qquad (4)$$

Utilizando la ec. (4) en la ec. (3), se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = -\frac{1}{4} \operatorname{sen}^3 x \cos x - \frac{3}{8} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{3}{8} x + C$$ ■

Las integrales trigonométricas se pueden expresar de muchas maneras diferentes, ya que las funciones trigonométricas cumplen un gran número de identidades. Por ejemplo, un programa informático de cálculo simbólico podría dar como resultado de la integral del ejemplo anterior:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{32}(x - 8 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x) + C$$

Se puede comprobar que este resultado concuerda con el que se ha obtenido en el ejemplo 3 (problema 61).

RECORDATORIO *Identidades de interés:*

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Se necesita algo más de esfuerzo para integrar $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$ cuando m y n son ambos pares. Se dispone de las siguientes fórmulas, que se comprueban mediante las identidades que se recuerdan al margen de esta página.

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + C}$$

$$\boxed{\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + C}$$

He aquí un método para la integración de $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$ cuando m y n son ambos pares. Se proporciona otro método en los problemas 65-68.

- Si $m \le n$, utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar:

  $$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^{m/2} \cos^n x\, dx$$

  Expanda la integral de la derecha para obtener una suma de integrales de potencias de $\cos x$ y utilice la fórmula de reducción (2).
- Si $m \ge n$, utilice la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar:

  $$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int (\operatorname{sen}^m x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)^{n/2}\, dx$$

  Expanda la integral de la derecha para obtener una suma de integrales de potencias de $\operatorname{sen} x$ y, de nuevo, resuelva utilizando la fórmula de reducción (1).

■ **EJEMPLO 4 Potencias pares de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$** Resuelva $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

Solución En este ejemplo $m = 2$ y $n = 4$. Como $m < n$, se sustituye $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x\, dx = \int \cos^4 x\, dx - \int \cos^6 x\, dx \qquad \boxed{5}$$

Según la fórmula de reducción para $n = 6$:

$$\int \cos^6 x\, dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x\, dx$$

Utilizando este resultado en la expresión a la derecha de la igualdad, en la ec. (5), se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int \cos^4 x\, dx - \left(\frac{1}{6} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x\, dx \right) =$$
$$= -\frac{1}{6} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{6} \int \cos^4 x\, dx$$

A continuación, se resuelve $\int \cos^4 x\, dx$ utilizando las fórmulas de reducción para $n = 4$ y $n = 2$:

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} x \right) + C =$$
$$= \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} x + C$$

Como se ha señalado, las integrales trigonométricas se puede expresar de más de una forma. Según Mathematica:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx =$$
$$= \tfrac{1}{16}x + \tfrac{1}{64}\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{64}\operatorname{sen} 4x - \tfrac{1}{192}\operatorname{sen} 6x$$

Las identidades trigonométricas muestran que esto concuerda con la ec. (6).

En conjunto,

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = -\frac{1}{6}\cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{24}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{16}\cos x \operatorname{sen} x + \frac{1}{16}x + C \qquad \boxed{6}$$

■

Pasamos ahora a las integrales de las restantes funciones trigonométricas.

■ **EJEMPLO 5** **Integral de la tangente y de la secante** Deduzca las fórmulas:

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \sec x\, dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

Solución Para integrar $\tan x$, considere la sustitución $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C =$$

$$= \ln \frac{1}{|\cos x|} + C = \ln|\sec x| + C$$

La integral $\int \sec x\, dx$ fue calculada por primera vez numéricamente en la década del 1590 por el matemático inglés Edward Wright, muchos años antes de la invención del cálculo diferencial. Aunque él no inventó el concepto de integral, Wright se dio cuenta de que las sumas que aproximan a la integral son la clave para entender el mapa de proyección de Mercator, de gran importancia en la navegación marítima, ya que permitía a los navegantes llegar a sus destinos a lo largo de líneas marcadas por una dirección fija de la brújula. La fórmula para la integral se demostró por primera vez por James Gregory en 1668.

Para integrar $\sec x$, se emplea un cambio ingenioso: $u = \sec x + \tan x$. Entonces:

$$du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = (\sec x)\underbrace{(\tan x + \sec x)}_{u}\, dx = (\sec x) u\, dx$$

Por tanto $du = (\sec x) u\, dx$ y, dividiendo por u, se obtiene $du/u = \sec x\, dx$. Así:

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

■

La tabla de integrales al f nal de esta sección, (página 423) contiene una lista de integrales trigonométricas adicionales y de fórmulas de reducción.

■ **EJEMPLO 6** **Utilizando una tabla de integrales** Calcule $\int_0^{\pi/4} \tan^3 x\, dx$.

Solución Aplicando la fórmula de reducción (16) de la tabla, con $k = 3$.

$$\int_0^{\pi/4} \tan^3 x\, dx = \frac{\tan^2 x}{2}\bigg|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = \left(\frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\sec x|\right)\bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\tan^2 \frac{\pi}{4} - \ln\left|\sec \frac{\pi}{4}\right|\right) - \left(\frac{1}{2}\tan^2 0 - \ln|\sec 0|\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1)^2 - \ln\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{2}0^2 - \ln|1|\right) = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$$

■

En el texto al margen, se describe un método para integrar $\tan^m x \sec^n x$.

Integración de $\tan^m x \sec^n x$

Caso 1: $m = 2k + 1$ impar y $n \geq 1$

Utilice la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ *para expresar* $\tan^{2k+1} x \sec^n x$ *como:*

$$(\sec^2 x - 1)^k (\sec^{n-1} x)(\sec x \tan x)$$

A continuación sustituya $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x\, dx$, *para obtener una integral que involucre únicamente potencias de* u.

Caso 2: $n = 2k$ par

Utilice la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ *para expresar* $\tan^m x \sec^n x$ *como:*

$$(\tan^m x)(1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x$$

A continuación sustituya $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$, *para obtener una integral que involucre únicamente potencias de* u.

Caso 3: m par y n impar

Utilice la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ *para expresar* $\tan^m x \sec^n x$ *como:*

$$(\sec^2 x - 1)^{m/2} \sec^n x$$

Expanda para obtener una integral que involucre únicamente potencias de $\sec x$ *y aplique la fórmula de reducción (20).*

■ **EJEMPLO 7** Resuelva $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$.

Solución La integral del enunciado corresponde al caso 3 del texto al margen, por que el integrando es $\tan^m x \sec^n x$, con $m = 2$ y $n = 3$.

El primer paso, es utilizar la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\, dx = \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx \qquad \boxed{7}$$

A continuación, aplique la fórmula de reducción (20) en la tabla de la página 423 con $m = 5$:

$$\int \sec^5 x\, dx = \frac{\tan x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\, dx$$

Sustituya este resultado en la ec. (7):

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \left(\frac{\tan x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\, dx\right) - \int \sec^3 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x - \frac{1}{4}\int \sec^3 x\, dx \qquad \boxed{8}$$

y utilice la fórmula de reducción (20) de nuevo, pero ahora con $m = 3$, y la fórmula (19):

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{\tan x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

Entonces, la ec. (8) resulta:

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x - \frac{1}{8}\tan x \sec x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$$ ■

Las fórmulas (23)-(25) de la tabla, describen las integrales de $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$, $\cos mx \cos nx$ y $\operatorname{sen} mx \cos nx$. Estas integrales aparecen en la teoría de series de Fourier, que es una técnica fundamental y muy utilizada en ingeniería y física.

■ **EJEMPLO 8 Integral de sen mx cos nx** Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 4x \cos 3x\, dx$.

Solución Aplique la fórmula de reducción (24), con $m = 4$ y $n = 3$:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 4x \cos 3x\, dx = \left(-\frac{\cos(4-3)x}{2(4-3)} - \frac{\cos(4+3)x}{2(4+3)}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 7x}{14}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{14}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{14}\right) = \frac{8}{7}$$ ■

TABLA DE INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + C \qquad \boxed{9}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + C \qquad \boxed{10}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \qquad \boxed{11}$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad \boxed{12}$$

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx \qquad \boxed{13}$$

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x\,dx \qquad \boxed{14}$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C = -\ln|\cos x| + C \qquad \boxed{15}$$

$$\int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx \qquad \boxed{16}$$

$$\int \cot x\,dx = -\ln|\csc x| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C \qquad \boxed{17}$$

$$\int \cot^m x\,dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx \qquad \boxed{18}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \boxed{19}$$

$$\int \sec^m x\,dx = \frac{\tan x \sec^{m-2} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\,dx \qquad \boxed{20}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \qquad \boxed{21}$$

$$\int \csc^m x\,dx = -\frac{\cot x \csc^{m-2} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \csc^{m-2} x\,dx \qquad \boxed{22}$$

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + C \quad (m \neq \pm n) \qquad \boxed{23}$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C \quad (m \neq \pm n) \qquad \boxed{24}$$

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + C \quad (m \neq \pm n) \qquad \boxed{25}$$

8.2 RESUMEN

- Para integrar una potencia impar de sen x veces $\cos^n x$, exprese:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx$$

A continuación, utilice la sustitución $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$.

- Para integrar una potencia impar de $\cos x$ veces $\operatorname{sen}^m x$, exprese:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \int (\operatorname{sen}^m x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx$$

A continuación, utilice la sustitución $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$.

- Si, tanto $\operatorname{sen} x$ como $\cos x$ están afectados por una potencia par, exprese:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^{m/2} \cos^n x\,dx \quad (\text{si } m \le n)$$
$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x(1 - \operatorname{sen}^2 x)^{n/2}\,dx \quad (\text{si } m \ge n)$$

Expanda la integral de la derecha de la igualdad para obtener una suma de potencias de $\cos x$ o de potencias de $\operatorname{sen} x$. Entonces, utilice las fórmulas de reducción:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

- La integral $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ se puede evaluar por sustitución. Vea el texto al margen en la página 422.

8.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Explique la técnica utilizada para resolver $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.
2. Explique un procedimiento de resolución de $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$.
3. ¿Se necesitan fórmulas de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^7 x \cos^2 x\,dx$? Razone su respuesta.
4. Explique un procedimiento de resolución de $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^2 x\,dx$.
5. ¿Qué integral requiere mayor esfuerzo para ser resuelta?

$$\int \operatorname{sen}^{798} x \cos x\,dx \qquad \text{o} \qquad \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$$

Justif que su respuesta.

Problemas

En los problemas 1-6, utilice el método para las potencias impares para resolver la integral.

1. $\int \cos^3 x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \theta\,d\theta$
4. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\,dt$
6. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\,dx$
7. Halle el área de la región sombreada en la f gura 1.
8. Utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$ como una suma de dos integrales y, a continuación, resuelva la integral mediante la fórmula de reducción.

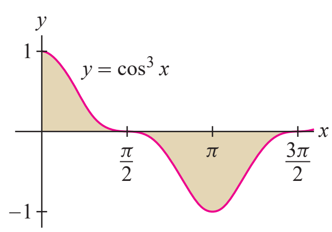


FIGURA 1 Gráf ca de $y = \cos^3 x$.

En los problemas 9-12, resuelva la integral por los métodos empleados en los ejemplos 3 y 4.

9. $\int \cos^4 y\,dy$
10. $\int \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta\,d\theta$
11. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx$
12. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^6 x\,dx$

En los problemas 13 y 14, resuelva utilizando la ec. (13).

13. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$

En los problemas 15-18, resuelva la integral mediante el método descrito en la página 422 y las fórmulas de reducción de la 423 que necesite.

15. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$ **16.** $\int \tan^2 x \sec x\, dx$

17. $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$ **18.** $\int \tan^8 x \sec^2 x\, dx$

En los problemas 19-22, resuelva la integral mediante métodos análogos a aquellos que se pueden aplicar a la integral $\tan^m x \sec^n$.

19. $\int \cot^3 x\, dx$ **20.** $\int \sec^3 x\, dx$

21. $\int \cot^5 x \csc^2 x\, dx$ **22.** $\int \cot^4 x \csc x\, dx$

En los problemas 23-46, resuelva la integral.

23. $\int \cos^5 x \operatorname{sen} x\, dx$ **24.** $\int \cos^3(2-x)\operatorname{sen}(2-x)\, dx$

25. $\int \cos^4(3x+2)\, dx$ **26.** $\int \cos^7 3x\, dx$

27. $\int \cos^3(\pi\theta)\operatorname{sen}^4(\pi\theta)\, d\theta$ **28.** $\int \cos^{498} y \operatorname{sen}^3 y\, dy$

29. $\int \operatorname{sen}^4(3x)\, dx$ **30.** $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^6 x\, dx$

31. $\int \csc^2(3-2x)\, dx$ **32.** $\int \csc^3 x\, dx$

33. $\int \tan x \sec^2 x\, dx$ **34.** $\int \tan^3\theta \sec^3\theta\, d\theta$

35. $\int \tan^5 x \sec^4 x\, dx$ **36.** $\int \tan^4 x \sec x\, dx$

37. $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$ **38.** $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$

39. $\int \cot^5 x \csc^5 x\, dx$ **40.** $\int \cot^2 x \csc^4 x\, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\, dx$ **42.** $\int \cos 4x \cos 6x\, dx$

43. $\int t\cos^3(t^2)\, dt$ **44.** $\int \frac{\tan^3(\ln t)}{t}\, dt$

45. $\int \cos^2(\operatorname{sen} t)\cos t\, dt$ **46.** $\int e^x \tan^2(e^x)\, dx$

En los problemas 47-60, evalúe la integral definida.

47. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ **48.** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$

49. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$ **50.** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$

51. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$ **52.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

53. $\int_0^{\pi/3} \tan x\, dx$ **54.** $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x\, dx$

55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^4 x\, dx$ **56.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/2} \cot^4 x \csc^2 x\, dx$

57. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cos 4x\, dx$ **58.** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$

59. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2x \cos 4x\, dx$ **60.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 7x \cos 2x\, dx$

61. Utilice las identidades para sen $2x$ y cos $2x$ de la página 420 y verifique que las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{32}(12x - 8\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{3}{8}x + C$$

62. Resuelva $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$ mediante el método descrito en el texto y verifique que su resultado es equivalente a:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\, dx = \frac{1}{30}(7 + 3\cos 2x)\operatorname{sen}^3 x + C$$

que se obtuvo mediante un programa informático de cálculo simbólico.

63. Halle el volumen del sólido de revolución, respecto al eje x, de $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le \pi$.

64. Use integración por partes para demostrar las ecuaciones (1) y (2).

En los problemas 65-68, use el siguiente método alternativo para resolver la integral $J = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ *donde m y n son ambos pares. Utilice las identidades:*

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

para expresar $J = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^{m/2}(1+\cos 2x)^{n/2}\, dx$ *y expanda la integral de la derecha como una suma de integrales que involucren potencias menores de seno y de coseno, en la variable 2x.*

65. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$ **66.** $\int \cos^4 x\, dx$

67. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$ **68.** $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx$

69. Demuestre la fórmula de reducción:

$$\int \tan^k x\, dx = \frac{\tan^{k-1} x}{k-1} - \int \tan^{k-2} x\, dx$$

Indicación: $\tan^k x = (\sec^2 x - 1)\tan^{k-2} x$.

70. Use la sustitución $u = \csc x - \cot x$ para resolver $\int \csc x\, dx$ (vea el ejemplo 5).

71. Sea $I_m = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\, dx$.

(a) Pruebe que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ e $I_1 = 1$.

(b) Demuestre que, para $m \ge 2$, se verifica:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

(c) Utilice (a) y (b) para calcular I_m para $m = 2, 3, 4, 5$.

72. Resuelva $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\, dx$, siendo m un entero arbitrario.

73. Resuelva $\int \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$. *Indicación:* utilice integración por partes como primer paso.

74. Energía total Una bombilla de 100 W tiene una resistencia $R = 144\ \Omega$ (ohmios) cuando está conectada a la corriente, donde la tensión varía según $V = V_0 \operatorname{sen}(2\pi f t)$ ($V_0 = 110$ V, $f = 60$ Hz). La energía (en julios) gastada por la bombilla durante un período de T segundos es:

$$U = \int_0^T P(t)\,dt$$

donde $P = V^2/R$ (J/s) es la potencia. Calcule U si la bombilla está encendida durante 5 horas.

75. Sean m y n enteros con $m \neq \pm n$. Utilice las ecuaciones (23)-(25) para demostrar las conocidas **relaciones ortogonales** que desempeñan un papel fundamental en las series de Fourier (f gura 2):

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = 0$$

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0$$

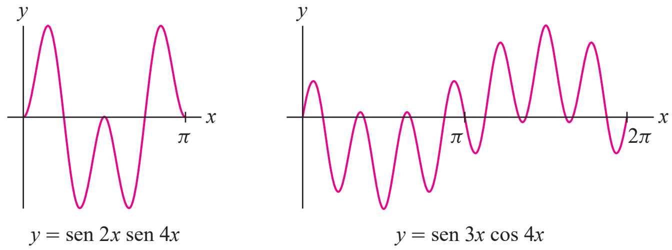


FIGURA 2 Las integrales son cero por las relaciones ortogonales.

Problemas avanzados

76. Utilice la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x)$$

para demostrar la ec. (24) en la tabla de integrales de la página 423.

77. Aplique integración por partes para demostrar que (para $m \neq 1$):

$$\int \sec^m x\,dx = \frac{\tan x \sec^{m-2} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\,dx$$

78. Sea $I_m = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\,dx$. Utilice el ejercicio 71 para demostrar que:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}$$

Concluya que $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}\,\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}$

79. Este problema se trata de una continuación del problema 78.

(a) Demuestre que $I_{2m+1} \le I_{2m} \le I_{2m-1}$. *Indicación:*

$$\operatorname{sen}^{2m+1} x \le \operatorname{sen}^{2m} x \le \operatorname{sen}^{2m-1} x \quad \text{para} \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}$$

(b) Muestre que $\displaystyle\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = 1 + \frac{1}{2m}$.

(c) Muestre que $\displaystyle 1 \le \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \le 1 + \frac{1}{2m}$.

(d) Demuestre que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$.

(e) Finalmente, deduzca el producto inf nito para $\frac{\pi}{2}$ descubierto por el matemático inglés John Wallis (1616–1703):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to+\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}$$

8.3 Sustitución trigonométrica

El siguiente objetivo es la integración de funciones que impliquen una de siguientes las expresiones con raíz cuadrada:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

En cada caso, una sustitución apropiada transforma la integral en una integral trigonométrica.

■ **EJEMPLO 1** Resuelva $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

Solución

Etapa 1. **Sustituya para eliminar la raíz cuadrada**

El integrando está def nido para $-1 \le x \le 1$, por lo que se puede def nir $x = \operatorname{sen}\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Como $\cos\theta \geq 0$ para tales θ, se obtiene:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta \qquad \boxed{1}$$

Etapa 2. **Resuelva la integral trigonométrica**

Como $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$ y $\sqrt{1 - x^2}\, dx = \cos\theta(\cos\theta\, d\theta)$. En consecuencia:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C$$

RECORDATORIO

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C$$

Etapa 3. **Recupere la variable original**

Sólo queda expresar el resultado en términos de x:

$$x = \operatorname{sen}\theta \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \sqrt{1 - x^2} = \cos\theta$$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + C \qquad \blacksquare$$

Nota: Si $x = a\operatorname{sen}\theta$ y $a > 0$, entonces:

$$a^2 - x^2 = a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$

Para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta \geq 0$ y por tanto:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$

Integrales que involucran $\sqrt{a^2 - x^2}$ Si una integral involucra $\sqrt{a^2 - x^2}$, con $a > 0$, intente la sustitución:

$$x = a\operatorname{sen}\theta \qquad dx = a\cos\theta\, d\theta \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$

El siguiente ejemplo muestra que la sustitución trigonométrica se puede utilizar en integrandos que involucren $(a^2 - x^2)^{n/2}$, donde n es cualquier entero.

■ **EJEMPLO 2 Integrando que involucra $(a^2 - x^2)^{3/2}$** Resuelva $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4 - x^2)^{3/2}}\, dx$.

Solución

Etapa 1. **Sustituya para eliminar la raíz cuadrada**

En este caso $a = 2$, pues $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2^2 - x^2}$. Por tanto, se utilizará:

$$x = 2\operatorname{sen}\theta \qquad dx = 2\cos\theta\, d\theta \qquad \sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta$$

$$\int \frac{x^2}{(4 - x^2)^{3/2}}\, dx = \int \frac{4\operatorname{sen}^2\theta}{2^3\cos^3\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \int \tan^2\theta\, d\theta$$

RECORDATORIO

$$\int \tan^m x\, dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m - 1} - \int \tan^{m-2} x\, dx$$

Etapa 2. **Resuelva la integral trigonométrica**

Use la fórmula de reducción en el texto al margen, con $m = 2$:

$$\int \tan^2\theta\, d\theta = \tan\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + C$$

También se puede resolver la integral utilizando la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$.

Etapa 3. **Recupere la variable original**

Se debe escribir $\tan\theta$ y θ en términos de x. Por def nición, $x = 2\operatorname{sen}\theta$, con lo que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2}$$

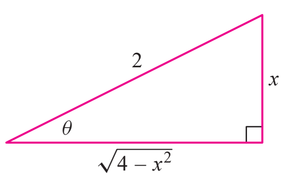


FIGURA 1 Triángulo rectángulo con $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$.

Para expresar $\tan\theta$ en términos de x, se utiliza el triángulo rectángulo de la f gura 1. El ángulo θ cumple $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$ y:

$$\tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

En consecuencia, se obtiene:

$$\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx = \tan\theta - \theta + C = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2} + C \qquad \blacksquare$$

Cuando el integrando involucre $\sqrt{x^2+a^2}$, intente la sustitución $x = a\tan\theta$. Entonces:

$$x^2 + a^2 = a^2\tan^2\theta + a^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$$

y por tanto, $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec\theta$.

En la sustitución $x = a\tan\theta$, se considera $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Por tanto, $a\sec\theta$ es la determinación positiva de $\sqrt{x^2+a^2}$.

Integrales involucrando $\sqrt{x^2+a^2}$ Si una integral involucra $\sqrt{x^2+a^2}$, con $a > 0$, intente la sustitución:

$$x = a\tan\theta \qquad dx = a\sec^2\theta\,d\theta \qquad \sqrt{x^2+a^2} = a\sec\theta$$

■ **EJEMPLO 3** Resuelva $\int \sqrt{4x^2+20}\,dx$.

Solución En primer lugar, saque factor común la constante:

$$\int \sqrt{4x^2+20}\,dx = \int \sqrt{4(x^2+5)}\,dx = 2\int \sqrt{x^2+5}\,dx$$

Así, se obtiene una integral de la forma $\sqrt{x^2+a^2}$ siendo $a = \sqrt{5}$.

***Etapa 1.* Sustituya para eliminar la raíz cuadrada**

$$x = \sqrt{5}\tan\theta \qquad dx = \sqrt{5}\sec^2\theta\,d\theta \qquad \sqrt{x^2+5} = \sqrt{5}\sec\theta$$

$$2\int \sqrt{x^2+5}\,dx = 2\int (\sqrt{5}\sec\theta)\,\sqrt{5}\sec^2\theta\,d\theta = 10\int \sec^3\theta\,d\theta$$

***Etapa 2.* Resuelva la integral trigonométrica**

RECORDATORIO

$$\int \sec^m x\,dx = \frac{\tan x\sec^{m-2}x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2}x\,dx$$

Aplique la fórmula de reducción que se ha recordado en el texto al margen, con $m = 3$:

$$\int \sqrt{4x^2+20}\,dx = 10\int \sec^3\theta\,d\theta = 10\frac{\tan\theta\sec\theta}{2} + 10\left(\frac{1}{2}\right)\int \sec\theta\,dx =$$

$$= 5\tan\theta\sec\theta + 5\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

Nota: No es necesario escribir $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ con el valor absoluto porque la sustitución que se ha realizado, $x = \sqrt{5}\tan\theta$, supone que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, donde $\sec\theta + \tan\theta > 0$.

***Etapa 3.* Recupere la variable original**

Al ser $x = \sqrt{5}\tan\theta$, se puede utilizar el triángulo rectángulo de la f gura 2.

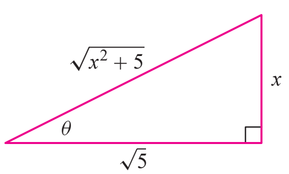


FIGURA 2

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$$

$$\int \sqrt{4x^2+20}\,dx = 5\frac{x}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + 5\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C =$$

$$= x\sqrt{x^2+5} + 5\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

El término logarítmico se puede reescribir como:

$$5\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{5}}\right)+C = 5\ln\left(\sqrt{x^2+5}+x\right) - \underbrace{5\ln\sqrt{5}+C}_{\text{constante}}$$

Como la constante C es arbitraria, se puede incorporar $-5\ln\sqrt{5}$ en C y escribir:

$$\int \sqrt{4x^2+20}\,dx = x\sqrt{x^2+5}+5\ln\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)+C$$ ■

La última sustitución trigonométrica $x = a\sec\theta$ transforma $\sqrt{x^2-a^2}$ en $a\tan\theta$ ya que:

$$x^2-a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta-1) = a^2\tan^2\theta$$

En la sustitución $x = a\sec\theta$, se considera $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ si $x \ge a$ y $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$ si $x \le -a$. Con estas elecciones, $a\tan\theta$ es la determinación positiva de la raíz $\sqrt{x^2-a^2}$.

Integrales que involucran $\sqrt{x^2-a^2}$ Si una integral involucra $\sqrt{x^2-a^2}$, con $a > 0$, intente la sustitución:

$$x = a\sec\theta \qquad dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$$

■ **EJEMPLO 4** Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

Solución En este caso, considere la sustitución:

$$x = 3\sec\theta \qquad dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \sqrt{x^2-9} = 3\tan\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(9\sec^2\theta)(3\tan\theta)} = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta + C$$

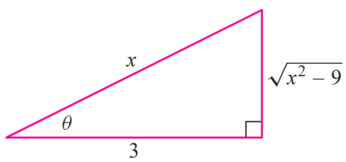


FIGURA 3

Al ser $x = 3\sec\theta$, se puede utilizar el triángulo rectángulo de la f gura 3:

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{x}{3} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$$ ■

De momento, se han considerado expresiones del tipo $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ y $\sqrt{a^2-x^2}$. Completando cuadrados (sección 1.2), se puede tratar la forma más general $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

■ **EJEMPLO 5 Completando cuadrados** Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-6x+11)^2}$.

Solución

Etapa 1. **Complete el cuadrado**

$$x^2-6x+11 = (x^2-6x+9)+2 = \underbrace{(x-3)^2}_{u^2}+2$$

Etapa 2. **Utilice sustitución**

Sea $u = x-3$, $du = dx$:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 11)^2} = \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} \qquad \boxed{2}$$

Etapa 3. **Sustitución trigonométrica**

Resuelva la integral utilizando una sustitución trigonométrica:

$$u = \sqrt{2}\tan\theta \qquad \sqrt{u^2+2} = \sqrt{2}\sec\theta \qquad du = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{du}{(u^2+2)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{4\sec^4\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right) + C \qquad \boxed{3}$$

Al ser $\theta = \tan^{-1}\dfrac{u}{\sqrt{2}}$, se puede utilizar el triángulo de la f gura 4 para obtener:

RECORDATORIO

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2} + C$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)\left(\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u^2+2}} = \frac{\sqrt{2}u}{u^2+2}$$

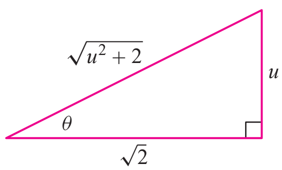


FIGURA 4

De esta manera, ec. (3) resulta:

$$\int \frac{du}{(u^2+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\,u}{u^2+2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{4(u^2+2)} + C \qquad \boxed{4}$$

Etapa 4. **Recupere la variable original**

Como $u = x - 3$ y $u^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$, la ec. (4) resulta:

$$\int \frac{du}{(u^2+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-3}{\sqrt{2}} + \frac{x-3}{4(x^2-6x+11)} + C$$

Finalmente, según la ec. (2):

$$\int \frac{dx}{(x^2-6x+11)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-3}{\sqrt{2}} + \frac{x-3}{4(x^2-6x+11)} + C \qquad ■$$

8.3 RESUMEN

- Sustitución trigonométrica:

Expresión de la raíz cuadrada en el integrando	Sustitución trigonométrica
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta,\quad dx = a\cos\theta\, d\theta,\quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\tan\theta,\quad dx = a\sec^2\theta\, d\theta,\quad \sqrt{x^2+a^2} = a\sec\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta,\quad dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta,\quad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$

Etapa 1. Sustituya para eliminar la raíz cuadrada.

Etapa 2. Evalúe la integral trigonométrica.

Etapa 3. Recupere la variable original.

- Las tres sustituciones trigonométricas corresponden a los tres triángulos rectángulos (f gura 5) que se consideran para expresar las funciones trigonométricas de θ en términos de x.
- Integrandos que involucran $\sqrt{x^2 + bx + c}$ se tratan completando el cuadrado (vea ejemplo 5).

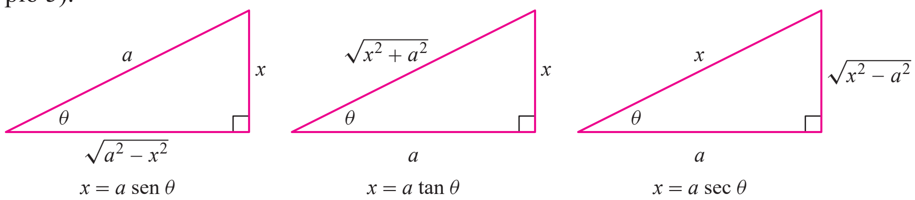


FIGURA 5

8.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Enuncie la sustitución trigonométrica adecuada para cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$ **(b)** $\int x^2(x^2 - 16)^{3/2}\, dx$

(c) $\int x^2(x^2 + 16)^{3/2}\, dx$ **(d)** $\int (x^2 - 5)^{-2}\, dx$

2. ¿Se necesita sustitución trigonométrica para resolver la integral $\int x\sqrt{9 - x^2}\, dx$?

3. Exprese $\operatorname{sen} 2\theta$ en términos de $x = \operatorname{sen}\theta$.

4. Dibuje un triángulo que se utilizaría en la sustitución $x = 3 \sec\theta$.

Problemas

En los problemas 1-4, resuelva la integral siguiendo los pasos que se indican.

1. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

(a) Pruebe que la sustitución $x = 3 \operatorname{sen}\theta$ transforma I en $\int d\theta$ y resuelva I en términos de θ.

(b) Resuelva I en términos de x.

2. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 2}}$

(a) Pruebe que la sustitución $x = \sqrt{2}\sec\theta$ transforma la integral I en $\frac{1}{2}\int \cos\theta\, d\theta$ y resuelva I en términos de θ.

(b) Utilice un triángulo rectángulo para probar que, con la sustitución anterior, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2 - 2}/x$.

(c) Resuelva I en términos de x.

3. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$

(a) Pruebe que la sustitución $x = \frac{3}{2}\tan\theta$ transforma I en $\frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$.

(b) Resuelva I en términos de θ (haga referencia a la tabla de integrales de la página 423 en la sección 8.2 si fuere necesario).

(c) Exprese I en términos de x.

4. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$

(a) Pruebe que la sustitución $x = 2\tan\theta$ transforma la integral I en $\frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta$.

(b) Utilice la fórmula $\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ para resolver I en términos de θ.

(c) Pruebe que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ y $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

(d) Exprese I en términos de x.

En los problemas 5-10, utilice la sustitución indicada para resolver la integral.

5. $\displaystyle\int \sqrt{16 - 5x^2}\, dx, \quad x = \frac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad x = \operatorname{sen}\theta$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}, \quad x = 3\sec\theta$

8. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}, \quad x = 2\tan\theta$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^{3/2}}, \quad x = 2\sec\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(4 + 9x^2)^2}, \quad x = \frac{2}{3}\tan\theta$

11. Resuelva la integral $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$ de dos maneras: mediante la sustitución directa $u = x^2 - 4$, y por sustitución trigonométrica.

12. ¿Es ef caz la sustitución $u = x^2 - 4$ para resolver la integral $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$? Si la respuesta es negativa, resuelva la integral mediante sustitución trigonométrica.

13. Resuelva mediante la sustitución $u = 1 - x^2$ o por sustitución trigonométrica.

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **(b)** $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(c) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ **(d)** $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

14. Resuelva:

(a) $\int \frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}}$ **(b)** $\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^{3/2}}$

En los problemas 15-32, resuelva mediante sustitución trigonométrica. Haga referencia a la tabla de integrales trigonométricas, si fuere necesario.

15. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **16.** $\int \frac{dt}{(16-t^2)^{3/2}}$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$ **18.** $\int \sqrt{12+4t^2}\,dt$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ **20.** $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-25}}$

21. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{5-y^2}}$ **22.** $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+2}}$ **24.** $\int \frac{dt}{(9t^2+4)^2}$

25. $\int \frac{dz}{z^3\sqrt{z^2-4}}$ **26.** $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-9}}$

27. $\int \frac{x^2\,dx}{(6x^2-49)^{1/2}}$ **28.** $\int \frac{dx}{(x^2-4)^2}$

29. $\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}$ **30.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

31. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$ **32.** $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

33. Demuestre que, para $a > 0$:

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a}} + C$$

34. Demuestre que, para $a > 0$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{x}{x^2+a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$$

35. Sea $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$.

(a) Complete el cuadrado y pruebe que $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$.

(b) Utilice la sustitución $u = x - 2$ para demostrar que $I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+2^2}}$. Resuelva la integral en u.

(c) Pruebe que $I = \ln\left|\sqrt{(x-2)^2+4} + x - 2\right| + C$.

36. Resuelva $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-x^2}}$. Previamente, complete el cuadrado para expresar $12x - x^2 = 36 - (x-6)^2$.

En los problemas 37-42, resuelva la integral completando el cuadrado y utilizando sustitución trigonométrica.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$ **38.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+6x^2}}$ **40.** $\int \sqrt{x^2-4x+7}\,dx$

41. $\int \sqrt{x^2-4x+3}\,dx$ **42.** $\int \frac{dx}{(x^2+6x+6)^2}$

En los problemas 43-52, indique un método apropiado de resolución de la integral (pero no la resuelva). Sus elecciones son: sustitución (especif que u y du), integración por partes (especif que u y v'), un método trigonométrico o sustitución trigonométrica (especif que la sustitución). Si considera que estas técnicas no son suf cientes, exprese esta circunstancia como su respuesta.

43. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{12-6x-x^2}}$ **44.** $\int \sqrt{4x^2-1}\,dx$

45. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx$ **46.** $\int x\sec^2 x\,dx$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **48.** $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$

49. $\int \operatorname{sen}^{3/2} x\,dx$ **50.** $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

51. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^3}$ **52.** $\int \frac{dx}{(x+12)^4}$

En los problemas 53-56, resuelva utilizando integración por partes como primer paso.

53. $\int \sec^{-1} x\,dx$ **54.** $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x^2}\,dx$

55. $\int \ln(x^2+1)\,dx$ **56.** $\int x^2\ln(x^2+1)\,dx$

57. Halle la altura media de un punto de la semicircunferencia $y = \sqrt{1-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$.

58. Halle el volumen del sólido de revolución, respecto al eje y, de la gráf ca de $y = x\sqrt{1-x^2}$ en $[0, 1]$.

59. Halle el volumen del sólido de revolución, respecto a la recta $y = 2$ de la región entre la gráf ca de $y^2 - x^2 = 1$ y la recta $y = 2$.

60. Halle el volumen del sólido de revolución de la región del problema 59, pero respecto al eje de revolución determinado por $y = 3$.

61. Calcule $\int \frac{dx}{x^2-1}$ de dos maneras y compruebe que las dos respuestas coinciden: en primer lugar, mediante sustitución trigonométrica y después utilizando la identidad:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

62. SAC Se quiere dividir una pizza de 18 centímetros de radio en porciones iguales, para tres amigos. Se cortará la pizza a altura $\pm x$, tal y como se ilustra en la figura 6. Halle la ecuación que debe verificar x y determine el valor aproximado de x, utilizando un programa informático de cálculo simbólico.

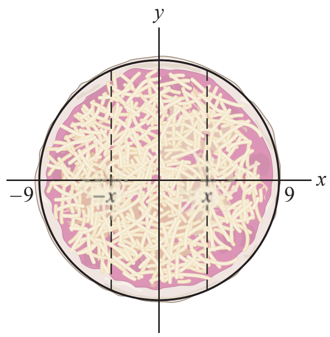


FIGURA 6 División de una pizza en tres partes iguales.

63. Un cable crea un campo eléctrico en un punto P situado a una distancia D del cable (figura 7). La componente $E_\perp$ del campo, perpendicular al cable, (en N/C) es

$$E_\perp = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k\lambda D}{(x^2 + D^2)^{3/2}}\,dx$$

donde λ es la densidad de carga (culombios por metro), $k = 8{,}99 \times 10^9$ $\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$ (constante de Coulomb) y x_1, x_2 son los puntos de la figura. Suponga que $\lambda = 6 \times 10^{-4}$ C/m, y $D = 3$ m. Halle $E_\perp$ si (a) $x_1 = 0$ y $x_2 = 30$ m y (b) $x_1 = -15$ m y $x_2 = 15$ m.

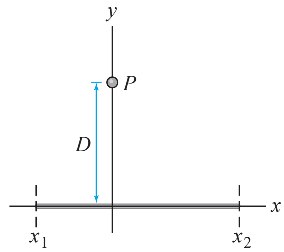


FIGURA 7

Problemas avanzados

64. Sea $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$. Utilice integración por partes para demostrar que:

$$J_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) J_n + \left(\frac{1}{2n}\right) \frac{x}{(x^2+1)^n}$$

A continuación, utilice esta relación recurrente para calcular J_2 y J_3.

65. Demuestre la fórmula:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C$$

mediante argumentos de geometría plana e interpretando la integral como el área de una parte del círculo unidad.

8.4 Integrales involucrando funciones hiperbólicas y funciones hiperbólicas inversas

En la sección 7.9, se mencionaron las analogías entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas. También se vio que las fórmulas de sus derivadas se parecen entre sí, difiriendo a lo sumo en un signo. Recuerde las siguientes fórmulas de integración.

RECORDATORIO

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Fórmulas de integración para funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + C$$

■ **EJEMPLO 1** Resuelva $\displaystyle\int x \operatorname{sech}^2(9 - x^2)\,dx$.

Solución Utilice la sustitución $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$. Entonces $-\frac{1}{2}\,du = x\,dx$ y

$$\int x\operatorname{sech}^2(9-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int \operatorname{sech}^2 u\,du = -\frac{1}{2}\tanh u + C = -\frac{1}{2}\tanh(9-x^2) + C \quad ■$$

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$
$$\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$$
$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$
$$\operatorname{senh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$$
$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Las técnicas para calcular integrales trigonométricas que se trataron en la sección 8.2 también se pueden aplicar, con pequeños cambios, a las funciones hiperbólicas. En lugar de las identidades trigonométricas, se utilizan las correspondientes identidades hiperbólicas (vea el texto en el margen).

EJEMPLO 2 Potencias de senh x y de cosh x Resuelva:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x \cosh^5 x\, dx$ **(b)** $\displaystyle\int \cosh^2 x\, dx$

Solución

(a) Como el $\cosh x$ está afectado por una potencia impar, utilice la identidad $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$ para expresar:

$$\cosh^5 x = \cosh^4 x \cdot \cosh x = (\operatorname{senh}^2 x + 1)^2 \cosh x$$

A continuación, aplique la sustitución $u = \operatorname{senh} x$, $du = \cosh x\, dx$:

$$\int \operatorname{senh}^4 x \cosh^5 x\, dx = \int \underbrace{\operatorname{senh}^4 x}_{u^4}\underbrace{(\operatorname{senh}^2 x + 1)^2}_{(u^2+1)^2}\underbrace{\cosh x\, dx}_{du} =$$
$$= \int u^4(u^2+1)^2\, du = \int (u^8 + 2u^6 + u^4)\, du =$$
$$= \frac{u^9}{9} + \frac{2u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{\operatorname{senh}^9 x}{9} + \frac{2\operatorname{senh}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{senh}^5 x}{5} + C$$

(b) Utilice la identidad $\cosh^2 x = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$:

$$\int \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x + 1)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{senh} 2x}{2} + x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2}x + C$$

■

La sustitución hiperbólica se puede utilizar como una alternativa a la sustitución trigonométrica, para integrar funciones relacionadas con las siguientes expresiones en raíces cuadradas:

Expresión en raíz cuadrada	Sustitución hiperbólica
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \operatorname{senh} u$, $dx = a\cosh u$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a\cosh u$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\cosh u$, $dx = a \operatorname{senh} u$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{senh} u$

En la sustitución trigonométrica, se aborda $\sqrt{x^2 + a^2}$ mediante la sustitución $x = a\tan\theta$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ utilizando $x = a\sec\theta$. Se pueden utilizar identidades para mostrar que los resultados coinciden con aquellos que se obtienen mediante sustitución hiperbólica (vea los problemas 31-35).

EJEMPLO 3 Sustitución hiperbólica Resuelva $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 16}\, dx$.

Solución

***Etapa 1.* Sustituya para eliminar la raíz cuadrada**

Utilice la sustitución hiperbólica $x = 4 \operatorname{senh} u$, $dx = 4\cosh u\, du$. Así:

$$x^2 + 16 = 16(\operatorname{senh}^2 u + 1) = (4\cosh u)^2$$

Además, $4\cosh u > 0$, por tanto $\sqrt{x^2 + 16} = 4\cosh u$ y, en consecuencia:

$$\int \sqrt{x^2 + 16}\, dx = \int (4\cosh u) 4\cosh u\, du = 16\int \cosh^2 u\, du$$

***Etapa 2.* Resuelva la integral hiperbólica**

En el ejemplo 2(b) se resolvió la integral $\cosh^2 u$:

$$\int \sqrt{x^2+16}\,dx = 16\int \cosh^2 u\,du = 16\left(\frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u + \frac{1}{2}u + C\right) =$$

$$= 4\operatorname{senh} 2u + 8u + C \qquad \boxed{1}$$

***Etapa 3.* Recupere la variable original**

Para expresar la respuesta en términos de la variable original x, observe que:

$$\operatorname{senh} u = \frac{x}{4} \qquad u = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{4}$$

Use las identidades que se recuerdan al margen, para expresar:

$$4\operatorname{senh} 2u = 4(2\operatorname{senh} u\cosh u) = 8\operatorname{senh} u\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + 1} =$$

$$= 8\left(\frac{x}{4}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1} = 2x\sqrt{\frac{x^2}{16}+1} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16}$$

RECORDATORIO

$$\operatorname{senh} 2u = 2\operatorname{senh} u\cosh u$$

$$\cosh u = \sqrt{\operatorname{senh}^2 u + 1}$$

Entonces, la ec. (1) resulta:

$$\int \sqrt{x^2+16}\,dx = 4\operatorname{senh} 2u + 8u + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{4} + C \qquad ■$$

El siguiente teorema enuncia las fórmulas de integración correspondientes a las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas inversas que se trataron en la sección 7.9. Cada fórmula es válida en el dominio en que el integrando y la función hiperbólica inversa estén def nidos.

TEOREMA 1 Integrales que involucran funciones hiperbólicas inversas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{senh}^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x + C \qquad (\text{para } x > 1)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + C \qquad (\text{para } |x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \coth^{-1} x + C \qquad (\text{para } |x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{sech}^{-1} x + C \qquad (\text{para } 0 < x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{csch}^{-1} x + C \qquad (\text{para } x \neq 0)$$

Si su calculadora no proporciona valores para las funciones hiperbólicas inversas, puede utilizar un recurso on-line, como por ejemplo http://wolframalpha.com.

■ **EJEMPLO 4** Calcule: **(a)** $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ y **(b)** $\displaystyle\int_{0,2}^{0,6} \frac{x\,dx}{1-x^4}$.

Solución

(a) Según el teorema 1:

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x\Big|_2^4 = \cosh^{-1} 4 - \cosh^{-1} 2 \approx 0{,}75$$

(b) En primer lugar, utilice la sustitución $u = x^2$, $du = 2x\,du$. Los nuevos límites de integración son $u = (0{,}2)^2 = 0{,}04$ y $u = (0{,}6)^2 = 0{,}36$, por tanto:

$$\int_{0,2}^{0,6} \frac{x\,dx}{1 - x^4} = \int_{0,04}^{0,36} \frac{\frac{1}{2}du}{1 - u^2} = \frac{1}{2}\int_{0,04}^{0,36} \frac{du}{1 - u^2}$$

Según el teorema 1, tanto $\tanh^{-1} u$ como $\coth^{-1} u$ son primitivas de $f(u) = (1 - u^2)^{-1}$. Se utiliza $\tanh^{-1} u$ porque el intervalo de integración $[0{,}04, 0{,}36]$ está contenido en el dominio $(-1, 1)$ de $\tanh^{-1} u$. Si los límites de integración estuvieran contenidos en $(1, \infty)$ o $(-\infty, -1)$, se utilizaría $\coth^{-1} u$. El resultado es:

$$\frac{1}{2}\int_{0,04}^{0,36} \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2}(\tanh^{-1}(0{,}36) - \tanh^{-1}(0{,}04)) \approx 0{,}1684$$ ■

8.4 RESUMEN

- Integrales de funciones hiperbólicas:

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + C$$

- Integrales que involucran las funciones hiperbólicas inversas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{senh}^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \cosh^{-1} x + C \qquad (\text{para } x > 1)$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tanh^{-1} x + C \qquad (\text{para } |x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \coth^{-1} x + C \qquad (\text{para } |x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = -\operatorname{sech}^{-1} x + C \qquad (\text{para } 0 < x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{1 + x^2}} = -\operatorname{csch}^{-1} x + C \qquad (\text{para } x \neq 0)$$

8.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué sustitución hiperbólica se puede utilizar para resolver las siguientes integrales?

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

2. ¿Cuál de las dos fórmulas de integración para las funciones hiperbólicas dif eren de sus homólogas trigonométricas en un signo menos?

3. ¿Qué primitiva de $y = (1 - x^2)^{-1}$ se debe considerar para integrar $\displaystyle\int_3^5 (1 - x^2)^{-1}\,dx$?

Problemas

En los problemas 1-16, resuelva la integral.

1. $\int \cosh(3x)\,dx$

2. $\int \operatorname{senh}(x+1)\,dx$

3. $\int x\operatorname{senh}(x^2+1)\,dx$

4. $\int \operatorname{senh}^2 x\cosh x\,dx$

5. $\int \operatorname{sech}^2(1-2x)\,dx$

6. $\int \tanh(3x)\operatorname{sech}(3x)\,dx$

7. $\int \tanh x\operatorname{sech}^2 x\,dx$

8. $\int \dfrac{\cosh x}{3\operatorname{senh} x+4}\,dx$

9. $\int \tanh x\,dx$

10. $\int x\operatorname{csch}(x^2)\coth(x^2)\,dx$

11. $\int \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\,dx$

12. $\int \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx$

13. $\int \operatorname{senh}^2(4x-9)\,dx$

14. $\int \operatorname{senh}^3 x\cosh^6 x\,dx$

15. $\int \operatorname{senh}^2 x\cosh^2 x\,dx$

16. $\int \tanh^3 x\,dx$

En los problemas 17-30, resuelva la integral, expresando el resultado en términos de las funciones hiperbólicas inversas.

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16+25x^2}}$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+3x^2}}$

21. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

22. $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

23. $\int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{dx}{1-x^2}$

24. $\int_4^5 \dfrac{dx}{1-x^2}$

25. $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

26. $\int_2^{10} \dfrac{dx}{4x^2-1}$

27. $\int_{-3}^{-1} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$

28. $\int_{0,2}^{0,8} \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

29. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x^2}$

30. $\int_1^9 \dfrac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}$

31. Compruebe las fórmulas:

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln|x+\sqrt{x^2+1}|$$

$$\cosh^{-1} x = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| \qquad (\text{para } x \geq 1)$$

32. Compruebe que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ para $|x|<1$.

33. Resuelva $\int \sqrt{x^2+16}\,dx$ mediante sustitución trigonométrica. A continuación, utilice el problema 31 para comprobar que su respuesta coincide con la del ejemplo 3.

34. Resuelva $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ se dos maneras: utilizando sustitución trigonométrica y utilizando sustitución hiperbólica. A continuación, utilice el problema 31 para comprobar que las dos respuestas coinciden.

35. Demuestre la fórmula de recurrencia, para $n \geq 2$:

$$\int \cosh^n x\,dx = \frac{1}{n}\cosh^{n-1} x\operatorname{senh} x + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} x\,dx \qquad \boxed{2}$$

36. Utilice la ec. (2) para resolver $\int \cosh^4 x\,dx$.

En los problemas 37-40, resuelva la integral.

37. $\int \dfrac{\tanh^{-1} x\,dx}{x^2-1}$

38. $\int \operatorname{senh}^{-1} x\,dx$

39. $\int \tanh^{-1} x\,dx$

40. $\int x\tanh^{-1} x\,dx$

Problemas avanzados

41. Muestre que si $u = \tanh(x/2)$, entonces:

$$\cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{2u}{1-u^2} \qquad dx = \frac{2du}{1-u^2}$$

Indicación: para la primera relación, utilice las identidades:

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh x - 1) \qquad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh x + 1)$$

Problemas 41 y 42: resuelva utilizando la sustitución del problema 41.

42. $\int \operatorname{sech} x\,dx$

43. $\int \dfrac{dx}{1+\cosh x}$

44. Suponga que $y = f(x)$ cumple $y'' = y$. Demuestre que:

(a) $f(x)^2 - (f'(x))^2$ es constante.

(b) Si $f(0) = f'(0) = 0$, entonces $f(x)$ es la función constante e igual a cero.

(c) $f(x) = f(0)\cosh x + f'(0)\operatorname{senh} x$.

Los problemas 45-48 hacen referencia a la función

$$gd(y) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} y),$$

denominada la ***función de Gudermann****. En un mapa de la Tierra, obtenido mediante la proyección de Mercator, los puntos que se encuentran a y unidades radiales del ecuador corresponden a los de latitud gd(y) en el globo terrestre.*

45. Demuestre que $\dfrac{d}{dy}gd(y) = \operatorname{sech} y$.

46. Sea $f(y) = 2\tan^{-1}(e^y) - \pi/2$. Demuestre que $gd(y) = f(y)$. *Indicación:* Muestre que $gd'(y) = f'(y)$ y que $f(0) = g(0)$.

47. Sea $t(y) = \operatorname{senh}^{-1}(\tan y)$. Pruebe que $t(y)$ es la inversa de $gd(y)$ para $0 \leq y < \pi/2$.

48. Compruebe que la función $t(y)$ del problema 47 cumple que $t'(y) = \sec y$ y determine un valor de a tal que:

$$t(y) = \int_a^y \frac{dt}{\cos t}$$

49. Las relaciones $\cosh(it) = \cos t$ y $\operatorname{senh}(it) = i \operatorname{sen} t$ se trataron en la *Visita guiada*. Utilice estas relaciones para probar que la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ se obtiene al sustituir $x = it$ en la identidad

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

8.5 El método de las fracciones parciales

El método de las fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. La idea es expresar $f(x)$ como una suma de funciones racionales más simples, que puedan ser integradas directamente. Por ejemplo, en el caso más sencillo, se utiliza la identidad:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

para resolver la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

Es un resultado de álgebra (conocido como el "teorema fundamental del Álgebra") que cualquier polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales se puede escribir como un producto de factores lineales y cuadráticos de coeficientes reales. Sin embargo, no siempre es posible determinar estos factores explícitamente.

Una función racional $P(x)/Q(x)$ se denomina **propia** si el grado de $P(x)$ [que se denota grad(P)] es *menor que* el grado de $Q(x)$. Por ejemplo:

$$\underbrace{\frac{x^2-3x+7}{x^4-16}}_{\text{Propia}} \qquad \underbrace{\frac{2x^2+7}{x-5} \qquad \frac{x-2}{x-5}}_{\text{No propias}}$$

Cada uno de los diferentes factores lineales de la forma $(x-a)$ del denominador, contribuye en un término

$$\frac{A}{x-a}$$

a la descomposición en fracciones parciales.

Suponga, en primer lugar, que $P(x)/Q(x)$ es propia y que el denominador $Q(x)$ se puede factorizar como producto de *factores lineales distintos*. En otras palabras:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$$

donde las raíces $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todas distintas y grad$(P) < n$. Entonces, existe una **descomposición en fracciones parciales**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

para constantes $A_1, \ldots, A_n$ apropiadas. Por ejemplo:

$$\frac{5x^2+x-28}{(x+1)(x-2)(x-3)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

Cuando se ha determinado la descomposición en fracciones parciales, se puede integrar cada uno de los términos individuales.

■ EJEMPLO 1 Determinación de las constantes Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

Solución El denominador factoriza como $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, por lo que se considera una descomposición en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5}$$

Para hallar A y B, primero multiplique por $(x-2)(x-5)$ para cancelar los denominadores:

$$1 = (x-2)(x-5)\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5}\right)$$

$$1 = A(x-5) + B(x-2) \qquad \boxed{1}$$

Esta ecuación es válida para cualquier valor de x (incluyendo $x = 2$ y $x = 5$, por continuidad). Se puede determinar A sustituyendo $x = 2$ (así, el segundo término desaparece):

$$1 = A(2-5) + \underbrace{B(2-2)}_{\text{Igual a cero}} = -3A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{1}{3}}$$

De manera similar, para hallar B, sustituya $x = 5$ en la ec. (1):

$$1 = A(5-5) + B(5-2) = 3B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

La descomposición en fracciones parciales resultante es:

$$\boxed{\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-5}}$$

Ahora ya se puede llevar a cabo la integración:

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x-5)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-5} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x-5| + C$$

En la ec. (2), el factor lineal $2x - 8$ no es una expresión del tipo $(x - a)$, las expresiones que se utilizaron previamente, pero la descomposición en fracciones parciales se puede llevar a cabo de la misma manera.

EJEMPLO 2 Resuelva $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)(2x-8)(x+2)}\,dx.$

Solución

***Etapa 1.* Halle la descomposición en fracciones parciales**

La descomposición es de la forma:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(2x-8)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-8} + \frac{C}{x+2} \qquad \boxed{2}$$

Tal y como se procedió en el ejemplo anterior, multiplique por $(x-1)(2x-8)(x+2)$ para cancelar denominadores:

$$x^2 + 2 = A(2x-8)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(2x-8) \qquad \boxed{3}$$

Como A está asociado al factor $(x-1)$, se sustituye $x = 1$ en la ec. (3) para determinar A:

$$1^2 + 2 = A(2-8)(1+2) + \overbrace{B(1-1)(1+2) + C(1-1)(2-8)}^{\text{Cero}}$$

$$3 = -18A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{1}{6}}$$

De manera análoga, 4 es la raíz de $2x - 8$, por lo que se determina B sustituyendo $x = 4$ en la ec. (3):

$$4^2 + 2 = A(8-8)(4+2) + B(4-1)(4+2) + C(4-1)(8-8)$$

$$18 = 18B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 1}$$

Finalmente, C se determina sustituyendo $x = -2$ en la ec. (3):

$$(-2)^2 + 2 = A(-4-8)(-2+2) + B(-2-1)(-2+2) + C(-2-1)(-4-8)$$

$$6 = 36C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{6}}$$

El resultado es:

$$\boxed{\frac{x^2+2}{(x-1)(2x-8)(x+2)} = -\frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{1}{2x-8} + \frac{\frac{1}{6}}{x+2}}$$

***Etapa 2.* Efectúe la integración**

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x-1)(2x-8)(x+2)}\,dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{2x-8} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} = \\ &= -\frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x-8| + \frac{1}{6}\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

■

Si $P(x)/Q(x)$ no es propia (es decir, si $\operatorname{grad}(P) \geq \operatorname{grad}(Q)$) se debe realizar una división euclidiana de polinomios y expresar:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $g(x)$ es un polinomio y $R(x)/Q(x)$ es propia. Entonces, se puede integrar $P(x)/Q(x)$ utilizando la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$.

División de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + \quad 1 & x^2 - 4 \\ \hline x^3 - 4x & x \\ \hline 4x + 1 & \end{array}$$

El cociente de $\dfrac{x^3+1}{x^2-4}$ *es igual a* x *y el resto es* $4x + 1$.

■ **EJEMPLO 3 Es necesaria la división de polinomios** Resuelva $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\,dx$.

Solución Realizando la división euclidiana de los dos polinomios, se puede expresar:

$$\frac{x^3+1}{x^2-4} = x + \frac{4x+1}{x^2-4} = x + \frac{4x+1}{(x-2)(x+2)}$$

No es difícil probar que la descomposición en fracciones parciales del segundo término es:

$$\frac{4x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{9}{4}}{x-2} + \frac{\frac{7}{4}}{x+2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2-4} &= \int x\,dx + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}\ln|x-2| + \frac{7}{4}\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

■

Suponga ahora que el denominador presenta factores lineales con multiplicidad mayor que 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{M_1}(x-a_2)^{M_2}\cdots(x-a_n)^{M_n}}$$

Cada factor $(x-a_i)^{M_i}$ aporta la siguiente suma de términos a la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{B_1}{(x-a_i)} + \frac{B_2}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{B_{M_i}}{(x-a_i)^{M_i}}$$

EJEMPLO 4 Factores lineales repetidos Resuelva $\displaystyle\int \frac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$.

Solución Se necesita una descomposición en fracciones parciales del tipo:

$$\frac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}$$

Cancelando los denominadores, se obtiene:

$$3x-9 = A(x+2)^2 + B_1(x-1)(x+2) + B_2(x-1) \qquad \boxed{4}$$

Se determina A y B_2 sustituyendo en la ec. (4) de la forma habitual:

- Sea $x=1$: entonces $-6 = 9A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{2}{3}}$
- Sea $x=-2$: entonces $-15 = -3B_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_2 = 5}$

Con estas constantes, la ec. (4) resulta:

$$3x-9 = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + B_1(x-1)(x+2) + 5(x-1) \qquad \boxed{5}$$

No se puede determinar B_1 de la misma manera que A y B_2. He aquí dos maneras de proceder.

- **Primer método (sustitución):** No tiene sentido sustituir $x=1$ o $x=-2$ en la ec. (5) porque el término que involucra B_1 desaparece. Pero se puede considerar cualquier otro valor de x. Para $x=2$, la ec. (5) resulta:

$$\begin{aligned} 3(2)-9 &= -\frac{2}{3}(2+2)^2 + B_1(2-1)(2+2) + 5(2-1) \\ -3 &= -\frac{32}{3} + 4B_1 + 5 \\ B_1 &= \frac{1}{4}\left(-8 + \frac{32}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- **Segundo método (coeficientes indeterminados):** Desarrolle cada término de la ec. (5):

$$3x-9 = -\frac{2}{3}(x^2+4x+4) + B_1(x^2+x-2) + 5(x-1)$$

Los coeficientes de potencias de x a cada lado de la ecuación deben ser iguales. Como x^2 no aparece en la expresión a la izquierda de la igualdad, $0 = -\frac{2}{3} + B_1$, es decir, $B_1 = \frac{2}{3}$.

En cualquier caso, se ha obtenido que:

$$\boxed{\frac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2} = -\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2}\,dx &= -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+2} + 5\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \\ &= -\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| - \frac{5}{x+2} + C\end{aligned}$$

Factores cuadráticos

Un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ se denomina **irreducible** si no se puede expresar como producto de dos factores lineales (sin utilizar números complejos). Una potencia de un factor cuadrático irreducible $(ax^2 + bx + c)^M$ aporta una suma de las siguientes características a una descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_Mx + B_M}{(ax^2 + bx + c)^M}$$

Por ejemplo,

$$\frac{4-x}{x(x^2+4x+2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+4}{x^2+4x+2} - \frac{2x+9}{(x^2+4x+2)^2}$$

Se puede necesitar sustitución trigonométrica para integrar estos términos. En particular, puede ser útil el siguiente resultado (vea el problema 33 de la sección 8.3).

RECORDATORIO *Si $b > 0$, entonces $x^2 + b$ es irreducible, pero $x^2 - b$ es reducible pues:*

$$x^2 - b = (x + \sqrt{b})(x - \sqrt{b})$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C \quad (\text{para } a > 0)} \tag{6}$$

EJEMPLO 5 Factores cuadráticos irreducibles y reducibles Resuelva:

(a) $\displaystyle\int \frac{18}{(x+3)(x^2+9)}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{18}{(x+3)(x^2-9)}\,dx$

Solución

(a) El factor cuadrático $x^2 + 9$ es irreducible, por tanto, la descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$\boxed{\frac{18}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+9}}$$

Cancele los denominadores y obtenga:

$$18 = A(x^2+9) + (Bx+C)(x+3) \tag{7}$$

Para hallar A, sustituya $x = -3$:

$$18 = A((-3)^2 + 9) + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 1}$$

A continuación, sustituya $A = 1$ en la ec. (7) para obtener:

$$18 = (x^2+9) + (Bx+C)(x+3) = (B+1)x^2 + (C+3B)x + (9+3C)$$

Igualando coef cientes, se obtiene $B + 1 = 0$ y $9 + 3C = 18$. De esta manera (vea el texto al margen):

$$\boxed{B = -1 \qquad C = 3}$$

En la segunda igualdad, se utiliza que:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C$$

y la ec. (6):

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$$

$$\int \frac{18\,dx}{(x+3)(x^2+9)} = \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{(-x+3)\,dx}{x^2+9} =$$

$$= \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{x\,dx}{x^2+9} + \int \frac{3\,dx}{x^2+9} =$$

$$= \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \tan^{-1}\frac{x}{3} + C$$

(b) El polinomio $x^2 - 9$ no es irreducible porque $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Así, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\boxed{\frac{18}{(x+3)(x^2-9)} = \frac{18}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}}$$

Cancele los denominadores:

$$18 = A(x+3)^2 + B(x+3)(x-3) + C(x-3)$$

Para $x = 3$, la ecuación anterior da lugar a $18 = 6^2 \cdot A$ y, para $x = -3$, resulta $18 = -6C$. Así:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \quad C = -3} \quad \Rightarrow \quad 18 = \frac{1}{2}(x+3)^2 + B(x+3)(x-3) - 3(x-3)$$

Para determinar B, se puede considerar cualquier valor de x que no sea ± 3. La elección $x = 2$ da lugar a $18 = \frac{1}{2}(25) - 5B + 3$, de donde $B = -\frac{1}{2}$ y:

$$\int \frac{18}{(x+3)(x^2-9)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3} - 3\int \frac{dx}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + 3(x+3)^{-1} + C$$

■

■ **EJEMPLO 6 Factor cuadrático repetido** Resuelva $\displaystyle\int \frac{4-x}{x(x^2+2)^2}\,dx$.

Solución La descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$\frac{4-x}{x(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Cancele los denominadores multiplicando a lado y lado de la igualdad por $x(x^2+2)^2$:

$$4 - x = A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x(x^2+2)) + (Dx+E)x \tag{8}$$

Se puede calcular A directamente considerando $x = 0$. Entonces, la ec. (8) se reduce a $4 = 4A$, de donde $A = 1$. Se obtienen los coef cientes restantes por el método de los coef cientes indeterminados. Sustituya $A = 1$ en la ec. (8) y desarrolle:

$$4 - x = (x^4 + 4x^2 + 4) + (Bx^4 + 2Bx^2 + Cx^3 + 2C) + (Dx^2 + Ex) =$$

$$= (1+B)x^4 + Cx^3 + (4 + 2B + D)x^2 + Ex + 2C + 4$$

Ahora iguale los coef cientes en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} 1 + B &= 0 && \text{(Coef ciente de } x^4) \\ C &= 0 && \text{(Coef ciente de } x^3) \\ 4 + 2B + D &= 0 && \text{(Coef ciente de } x^2) \\ E &= -1 && \text{(Coef ciente de } x) \\ 2C + 4 &= 4 && \text{(Término constante)} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se obtiene que $B = -1$, $C = 0$, $D = -2$ y $E = -1$. Así:

$$\begin{aligned} \int \frac{(4-x)\,dx}{x(x^2+2)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+2} - \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2)^2} = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

La segunda integral se resolvió utilizando la sustitución $u = x^2 + 2$, $du = 2x\,dx$. La tercera integral se expresa como la suma:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2)^2} &= \overbrace{\int \frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2}}^{\text{Utilice la sustitución } u = x^2+2} + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \\ &= -(x^2+2)^{-1} + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \end{aligned} \qquad \boxed{9}$$

Para resolver la integral de la ec. (9), se utiliza la sustitución trigonométrica:

$$x = \sqrt{2}\tan\theta \qquad dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta \qquad x^2 + 2 = 2\tan^2\theta + 2 = 2\sec^2\theta$$

Según la f gura 1, se obtiene:

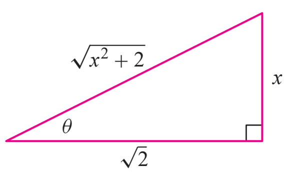


FIGURA 1

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta}{(2\tan^2\theta+2)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta}{4\sec^4\theta} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}} + C = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2} + C \end{aligned}$$

Agrupando todos los términos:

$$\int \frac{4-x}{x(x^2+2)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1-\frac{1}{4}x}{x^2+2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C \qquad \blacksquare$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Los ejemplos en esta sección ilustran un resultado general: la integral de una función racional se puede expresar como una suma de funciones racionales, arco-tangentes de polinomios lineales o cuadráticos y logaritmos de polinomios lineales o cuadráticos (siempre que se pueda factorizar el denominador). Otros tipos de funciones, como las funciones exponenciales y las trigonométricas, no aparecen.

Utilizando un programa informático de cálculo simbólico

Determinar una descomposición en fracciones parciales requiere a menudo mucho cálculo. Afortunadamente, la mayor parte de los programas informáticos de cálculo simbólico tienen una instrucción por la que se obtiene la descomposición en fracciones parciales (con nombres tales como "Apart" o "parfrac"). Por ejemplo, con la instrucción:

```
Apart[(x^2 - 2)/((x + 2)(x^2 + 4)^3)]
```

se obtiene la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{x^2-2}{(x+2)(x^2+4)^3} = \frac{1}{256(2+x)} + \frac{3(x-2)}{4(4+x^2)^3} + \frac{2-x}{32(4+x^2)^2} + \frac{2-x}{256(4+x^2)}$$

Sin embargo, un programa informático de cálculo simbólico no permite obtener la descomposición en fracciones parciales en los casos en los que $Q(x)$ no se puede factorizar explícitamente.

El polinomio $x^5 + 2x + 2$ no se puede factorizar explícitamente, por lo que la instrucción:

```
Apart[1/(x^5 + 2x + 2)]
```

devuelve la, nada útil, respuesta:

$$\frac{1}{x^5+2x+2}$$

8.5 RESUMEN

Método de la descomposición en fracciones parciales: suponga, en primer lugar, que $P(x)/Q(x)$ es una función racional *propia* [es decir que, grad(P) < grad(Q)] y que $Q(x)$ se puede factorizar explícitamente como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.

- Si $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, donde las raíces a_j son todas distintas, entonces:
$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$
Para calcular las constantes, cancele los denominadores y sustituya, uno por uno, los valores $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Si $Q(x)$ es igual a un producto de potencias de factores lineales del tipo $(x-a)^M$ y factores cuadráticos irreducibles $(x^2+b)^N$ con $b > 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ es una suma de términos de la siguiente forma:
$$(x-a)^M \quad \text{contribuye con} \quad \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_M}{(x-a)^M}$$
$$(x^2+b)^N \quad \text{contribuye con} \quad \frac{A_1x+B_1}{x^2+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+b)^2} + \cdots + \frac{A_Nx+B_N}{(x^2+b)^N}$$
Se puede necesitar sustitución y sustitución trigonométrica para integrar los términos correspondientes a $(x^2+b)^N$ (vea el ejemplo 6).
- Si $P(x)/Q(x)$ es impropia, realice la división euclidiana de los dos polinomios (vea el ejemplo 3).

8.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Suponga que $\int f(x)\,dx = \ln x + \sqrt{x+1} + C$. ¿Podría ser $f(x)$ una función racional? Razone su respuesta.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones racionales son *propias*?

(a) $\dfrac{x}{x-3}$ **(b)** $\dfrac{4}{9-x}$

(c) $\dfrac{x^2+12}{(x+2)(x+1)(x-3)}$ **(d)** $\dfrac{4x^3-7x}{(x-3)(2x+5)(9-x)}$

3. ¿Cuáles de los siguientes polinomios cuadráticos son irreducibles? Para comprobarlo, complete el cuadrado si fuera necesario.

(a) x^2+5 **(b)** x^2-5

(c) x^2+4x+6 **(d)** x^2+4x+2

4. Sea $P(x)/Q(x)$ una función racional propia, donde $Q(x)$ factoriza como producto de factores lineales distintos $(x - a_i)$. Entonces:

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)}$$

(seleccione la opción correcta):

(a) es una suma de términos logarítmicos $A_i \ln(x - a_i)$ para algunas constantes A_i.

(b) puede contener un término en arcotangente.

Problemas

1. Relacione las funciones racionales de (a)-(d) con las correspondientes descomposiciones en fracciones parciales (i)-(iv).

(a) $\dfrac{x^2 + 4x + 12}{(x+2)(x^2+4)}$ **(b)** $\dfrac{2x^2 + 8x + 24}{(x+2)^2(x^2+4)}$

(c) $\dfrac{x^2 - 4x + 8}{(x-1)^2(x-2)^2}$ **(d)** $\dfrac{x^4 - 4x + 8}{(x+2)(x^2+4)}$

(i) $x - 2 + \dfrac{4}{x+2} - \dfrac{4x-4}{x^2+4}$

(ii) $\dfrac{-8}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2} + \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{5}{(x-1)^2}$

(iii) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{(x+2)^2} + \dfrac{-x+2}{x^2+4}$ **(iv)** $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{4}{x^2+4}$

2. Determine las constantes A, B:

$$\frac{2x-3}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$$

3. Cancele los denominadores en la siguiente descomposición en fracciones parciales y determine la constante B (sustituya un valor de x o utilice el método de los coef cientes indeterminados).

$$\frac{3x^2 + 11x + 12}{(x+1)(x+3)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{B}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}$$

4. Halle las constantes en la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{2x+4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

En los problemas 5-8, resuelva la integral utilizando división de polinomios primero, para escribir $f(x)$ como la suma de un polinomio y una función racional propia.

5. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x-4}$ **6.** $\displaystyle\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x+3}$

7. $\displaystyle\int \frac{(x^3+2x^2+1)\,dx}{x+2}$ **8.** $\displaystyle\int \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2+1}$

En los problemas 9-44, resuelva la integral.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x-4)}$ **10.** $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{x+4}$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2x+1)}$ **12.** $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-5x+6}$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+9}$ **14.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)(x+2)}$

15. $\displaystyle\int \frac{(x^2+3x-44)\,dx}{(x+3)(x+5)(3x-2)}$ **16.** $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{(x+1)(x^2+x)}$

17. $\displaystyle\int \frac{(x^2+11x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$ **18.** $\displaystyle\int \frac{(4x^2-21x)\,dx}{(x-3)^2(2x+3)}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^2}$ **20.** $\displaystyle\int \frac{(x^2-8x)\,dx}{(x+1)(x+4)^3}$

21. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{x(x+2)^3}$ **22.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+3}$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-3}$ **24.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-4)^2(x-1)}$

25. $\displaystyle\int \frac{4x^2-20}{(2x+5)^3}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{3x+6}{x^2(x-1)(x-3)}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^3}$ **28.** $\displaystyle\int \frac{(3x^2-2)\,dx}{x-4}$

29. $\displaystyle\int \frac{(x^2-x+1)\,dx}{x^2+x}$ **30.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

31. $\displaystyle\int \frac{(3x^2-4x+5)\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ **32.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+25)}$ **34.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+25)}$

35. $\displaystyle\int \frac{(6x^2+2)\,dx}{x^2+2x-3}$ **36.** $\displaystyle\int \frac{6x^2+7x-6}{(x^2-4)(x+2)}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{10\,dx}{(x-1)^2(x^2+9)}$ **38.** $\displaystyle\int \frac{10\,dx}{(x+1)(x^2+9)^2}$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+8)^2}$ **40.** $\displaystyle\int \frac{100x\,dx}{(x-3)(x^2+1)^2}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4x+10)}$ **42.** $\displaystyle\int \frac{9\,dx}{(x+1)(x^2-2x+6)}$

43. $\displaystyle\int \frac{25\,dx}{x(x^2+2x+5)^2}$ **44.** $\displaystyle\int \frac{(x^2+3)\,dx}{(x^2+2x+3)^2}$

En los problemas 45-48, resuelva utilizando en primer lugar sustitución y después fracciones parciales, si fuera necesario.

45. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ **46.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)^4}$

47. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-e^x}$ **48.** $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan^2\theta-1}$

49. Resuelva $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$. *Indicación:* Use la sustitución $u = \sqrt{x}$ (a veces llamada la **sustitución de racionalización**).

50. Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/3}}$.

51. Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ de dos maneras: utilizando fracciones parciales y mediante sustitución trigonométrica. Compruebe que las dos respuestas coinciden.

52. GU Represente la ecuación $(x-40)y^2 = 10x(x-30)$ y halle el volumen del sólido de revolución, respecto al eje x, de la región limitada por la gráf ca y el eje x, para $0 \le x \le 30$.

En los problemas 53-66, resuelva la integral utilizando el método apropiado, o bien una combinación de los métodos que se han tratado en este libro hasta el momento.

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

55. $\displaystyle\int \cos^2 4x\,dx$

56. $\displaystyle\int x\sec^2 x\,dx$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$

58. $\displaystyle\int \theta\sec^{-1}\theta\,d\theta$

59. $\displaystyle\int \tan^5 x\sec x\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{(3x^2-1)\,dx}{x(x^2-1)}$

61. $\displaystyle\int \ln(x^4-1)\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

63. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

64. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+4x+8)^2}$

65. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^3+1}$

66. $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{1/3}+1}$

67. Prueba que la sustitución $\theta = 2\tan^{-1} t$ (f gura 2) conduce a las fórmulas:

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad d\theta = \frac{2\,dt}{1+t^2} \qquad \boxed{10}$$

Esta sustitución transforma la integral de cualquier función racional de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ en una integral de una función racional de t (que se puede resolver utilizando fracciones parciales). Use esta sustitución para resolver $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta}$.

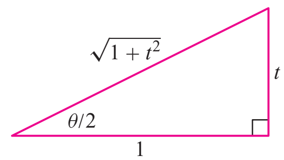


FIGURA 2

68. Use la sustitución del problema 67 para resolver $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$.

Problemas avanzados

69. Demuestre la fórmula:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b} + C$$

donde a, b son constantes tales que $a \ne b$.

70. Según el método de las fracciones parciales:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

El programa de cálculo simbólico Mathematica resuelve esta integral como $-\tanh^{-1} x$, donde $\tanh^{-1} x$ es la inversa de la función tangente hiperbólica. ¿Considera que las dos respuestas coinciden?

71. Suponga que $Q(x) = (x-a)(x-b)$, donde $a \ne b$ y sea $P(x)/Q(x)$ una función racional propia tal que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

(a) Pruebe que $A = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ y $B = \dfrac{P(b)}{Q'(b)}$.

(b) Use este resultado para hallar la descomposición en fracciones parciales, para $P(x) = 3x-2$ y $Q(x) = x^2-4x-12$.

72. Suponga que $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, donde las raíces a_j son todas distintas. Sea $P(x)/Q(x)$ una función racional propia tal que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

(a) Pruebe que $A_j = \dfrac{P(a_j)}{Q'(a_j)}$ para $j = 1, \ldots, n$.

(b) Use este resultado para hallar la descomposición en fracciones parciales, para $P(x) = 2x^2-1$, $Q(x) = x^3-4x^2+x+6 = (x+1)(x-2)(x-3)$.

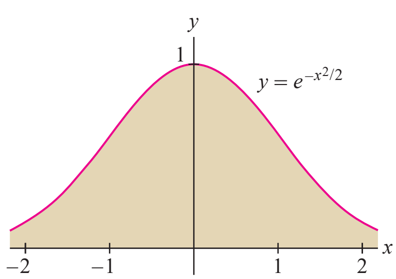


FIGURA 1 Campana de Gauss. La región se extiende inf nitamente en ambas direcciones, pero el área total es f nita.

8.6 Integrales impropias

Las integrales que se han considerado hasta el momento, representan áreas con signo de regiones acotadas. Sin embargo, las áreas de regiones no acotadas (f gura 1) también aparecen en las aplicaciones y se representan mediante **integrales impropias**.

Hay dos maneras en las que una integral puede ser impropia: (1) el intervalo de integración puede ser inf nito, o (2) el integrando puede tender a inf nito. Nos ocupamos primero de las integrales impropias en intervalos inf nitos. Uno o ambos extremos del intervalo de integración pueden ser inf nitos:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

¿Cómo puede ser que una región no acotada tenga área f nita? Para responder a esta pregunta, se debe especif car qué se entiende por área de una región no acotada. Considere el área [f gura 2(A)] por debajo de la gráf ca de $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo acotado $[0, R]$:

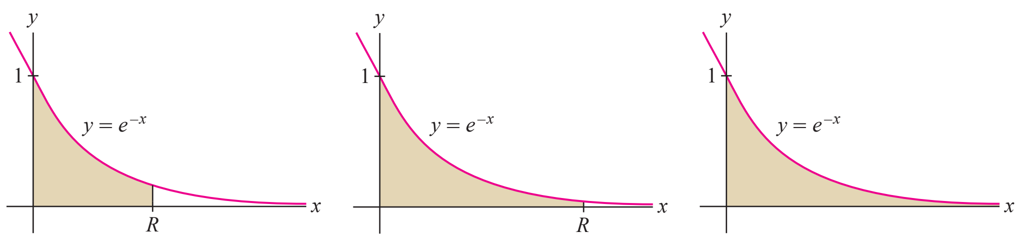
$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^R = -e^{-R} + e^0 = 1 - e^{-R}$$

*El destacado matemático británico G. H. Hardy (1877-1947) puso de manifiesto que, en cálculo diferencial no se pregunta " ¿Qué es esto?" sino "¿Cómo se puede **definir** esto?" Se ha visto que las rectas tangentes y las áreas por debajo de curvas no tienen un significado claro, hasta que se definen de forma precisa mediante límites. De nuevo, la pregunta clave es "¿Cómo se debe definir el área de una región no acotada?".*

Cuando $R \to +\infty$, esta área tiende a un valor f nito [f gura 2(B)]:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}(1 - e^{-R}) = 1 \qquad \boxed{1}$$

Parece razonable considerar este límite como la *def nición* del área por debajo de la gráf ca en el intervalo inf nito $[0, +\infty)$. De esta manera, el área de la región no acotada de la f gura 2(C) es 1.



(A) El área de la región f nita es $1 - e^{-R}$

(B) El área tiende a 1 cuando $R \to +\infty$

(C) El área de la región no acotada es 1

FIGURA 2

DEFINICIÓN Integral impropia Considere un número f jo a de manera que $f(x)$ sea integrable en $[a, b]$ para todo $b > a$. La *integral impropia* de $f(x)$ en $[a, +\infty)$ se def ne como el siguiente límite (si existe):

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

Se dice que la integral impropia *converge* si el límite existe (y es f nito) y que *diverge* si el límite no existe.

De manera análoga, se def ne

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^a f(x)\,dx$$

Una integral impropia doblemente inf nita se def ne como una suma (siempre que las dos integrales a la derecha del igual converjan):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \boxed{2}$$

EJEMPLO 1 Pruebe que $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ converge y calcule su valor.

Solución

Etapa 1. **Integre en un intervalo f nito [2, *R*]**

$$\int_2^R \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_2^R = -\frac{1}{2}(R^{-2}) + \frac{1}{2}(2^{-2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2R^2}$$

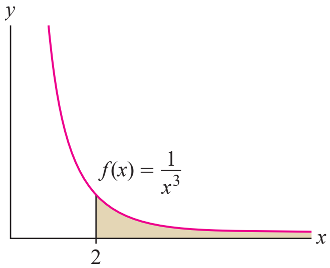


FIGURA 3 El área en $[2, +\infty)$ es igual a $\frac{1}{8}$.

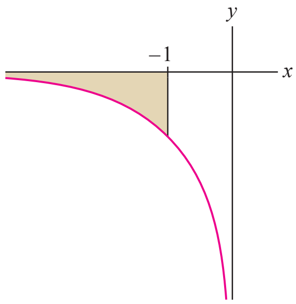


FIGURA 4 La integral de $f(x) = x^{-1}$ en $(-\infty, -1]$ es inf nita.

Etapa 2. **Calcule el límite cuando $R \to +\infty$**

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{R\to+\infty} \int_2^R \frac{dx}{x^3} = \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2R^2}\right) = \frac{1}{8}$$

Se concluye que el área de la región inf nita sombreada en la f gura 3 es $\frac{1}{8}$. ■

■ **EJEMPLO 2** Determine si $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x}$ converge.

Solución En primer lugar, se resuelve la integral def nida en el intervalo f nito $[R, -1]$. Como el límite inferior de integración es $-\infty$, se considera $R < -1$:

$$\int_R^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_R^{-1} = \ln|-1| - \ln|R| = -\ln|R|$$

Ahora, se puede calcular el límite cuando $R \to -\infty$:

$$\lim_{R\to-\infty} \int_R^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to-\infty} (-\ln|R|) = -\lim_{R\to-\infty} \ln|R| = -\infty$$

El límite es inf nito, por tanto la integral impropia diverge. Se concluye que el área de la región no acotada de la f gura 4 es inf nita. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL Si se comparan las regiones sombreadas no acotadas de las f guras 3 y 4, cabe preguntarse por qué una tiene área f nita y la otra área inf nita. La convergencia de una integral impropia depende de lo rápido que la función $f(x)$ tiende a cero cuando $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$). Según los cálculos realizados, x^{-2} decrece lo suf cientemente rápido para converger mientras que x^{-1} no lo hace.

Una integral impropia de una función potencial $f(x) = x^{-p}$ se denomina una ***p*-integral**. Observe que $f(x) = x^{-p}$ decrece más rápido al aumentar p. Es interesante ver que, según el siguiente teorema, el exponente $p = -1$ es la frontera entre convergencia y divergencia.

Las p-integrales son particularmente importantes porque se suelen utilizar para determinar la convergencia o divergencia de integrales impropias más complicadas por medio del test de comparación (vea el ejemplo 8).

TEOREMA 1 La *p*-Integral en $[a, +\infty)$ Para $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \le 1 \end{cases}$$

Demostración Denote la p-integral como J. Entonces:

$$J = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^R = \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right)$$

Si $p > 1$, entonces $1 - p < 0$ y R^{1-p} tiende a cero cuando $R \to +\infty$. En esta situación, $J = \dfrac{a^{1-p}}{p-1}$. Si $p < 1$, entonces $1 - p > 0$ y R^{1-p} tiende a $+\infty$. En esta situación, J diverge.

Si $p = 1$, entonces J diverge pues $\lim_{R\to+\infty} \int_a^R x^{-1}\,dx = \lim_{R\to+\infty} (\ln R - \ln a) = +\infty$. ■

En ocasiones, es necesario utilizar la regla de L'Hôpital para determinar los límites que aparecen en el cálculo de integrales impropias.

■ **EJEMPLO 3 Utilizando la regla de L'Hôpital** Calcule $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

Solución En primer lugar, utilice integración por partes con $u = x$ y $v' = e^{-x}$:

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} + C$$

$$\int_0^R xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^R = -(R+1)e^{-R} + 1 = 1 - \frac{R+1}{e^R}$$

A continuación, calcule la integral impropia como un límite mediante la regla de L'Hôpital:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1 - \lim_{R\to+\infty} \frac{R+1}{e^R} = 1 - \underbrace{\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{e^R}}_{\text{Regla de Hôpital}} = 1 - 0 = 1$$

■

Las integrales impropias surgen en aplicaciones en las que tiene sentido tratar ciertas cantidades grandes como si fueran inf nitas. Por ejemplo, un objeto lanzado con la velocidad de escape nunca vuelve a caer a la Tierra y se entiende que, más bien, viaja "inf nitamente lejos en el espacio".

En física, se habla de desplazar un objeto "infinitamente lejos". En la práctica, esto quiere decir "bastante lejos", pero es más conveniente trabajar con una integral impropia.

■ **EJEMPLO 4 Velocidad de escape** La Tierra ejerce una fuerza gravitacional de magnitud $F(r) = GM_e m/r^2$ sobre un objeto de masa m situado a distancia r del centro de la Tierra.

(a) Encuentre el trabajo necesario para mover el objeto inf nitamente lejos de la Tierra.

(b) Calcule la velocidad de escape v_{esc} sobre la superf cie de la Tierra.

◄·· ***RECORDATORIO*** *La masa de la Tierra es:*

$$M_e \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

El radio de la Tierra es:

$$r_e \approx 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}$$

La constante de gravitación universal es:

$$G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N-m}^2/\text{kg}^2$$

Un newton es 1 kg-m/s² y un julio es 1 N-m.

Solución Se trata de calcular una p-integral con $p = 2$. Recuerde que el trabajo es la integral de la fuerza como función de la distancia (sección 6.5).

(a) El trabajo necesario para mover un objeto desde la superf cie de la Tierra ($r = r_e$) a una distancia R del centro de la Tierra es:

$$\int_{r_e}^R \frac{GM_e m}{r^2}\,dr = -\frac{GM_e m}{r}\Big|_{r_e}^R = GM_e m\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{R}\right) \text{ julios}$$

El trabajo realizado para mover el objeto "inf nitamente lejos" es la integral impropia:

$$GM_e m \int_{r_e}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{R\to+\infty} GM_e m\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{R}\right) = \frac{GM_e m}{r_e} \text{ julios}$$

(b) Por el principio de conservación de la energía, un objeto lanzado con una velocidad v_0 escapa del campo gravitatorio de la Tierra si su energía cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$ es, al menos, tan grande como el trabajo necesario para mover el objeto hasta el inf nito, es decir, si:

La velocidad de escape en millas por hora es, aproximadamente, 25 000 mph.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \ge \frac{GM_e m}{r_e} \quad \Rightarrow \quad v_0 \ge \left(\frac{2GM_e}{r_e}\right)^{1/2}$$

Utilizando los valores que se recuerdan en la nota al margen, se obtiene que $v_0 \ge 11\ 200$ m/s. La velocidad minima es la velocidad de escape $v_{\text{esc}} = 11\ 200$ m/s. ■

■ **EJEMPLO 5 Anualidad perpetua** Una inversión paga un dividendo de forma continua y a razón de 6000 \$/año. Calcule el valor actual del f ujo de ingresos si la tasa de interés es del 4 % y los dividendos continúan indef nidamente.

En la práctica, la palabra "para siempre" significa "un período largo, pero indeterminado, de tiempo". Por ejemplo, si la inversión paga dividendos durante 100 años, entonces su valor actual es:

$$\int_0^{100} 6000e^{-0{,}04t}\,dt \approx 147\ 253\ \$$$

La integral impropia (150 000 \$) proporciona una útil y conveniente aproximación a este valor.

Solución Recuerde, de la sección 7.5, que el valor actual (VA) pasados T años a una tasa de interés de $r = 0{,}04$ es $\int_0^T 6000e^{-0{,}04t}\,dt$. Sobre un intervalo de tiempo inf nito:

$$\text{VA} = \int_0^{+\infty} 6000e^{-0{,}04t}\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{6000e^{-0{,}04t}}{-0{,}04}\Big|_0^T = \frac{6000}{0{,}04} = 150\ 000\ \$$$

Aunque se pagan un número inf nito de dólares durante el intervalo de tiempo inf nito, su valor actual total es f nito. ■

Discontinuidades esenciales en los extremos

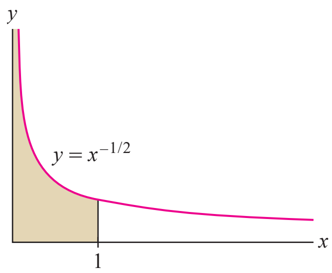


FIGURA 5 El área de la región inf nita sombreada es 2, según el ejemplo 2(a).

Una integral en un intervalo $[a, b]$ es impropia si el integrando se hace inf nito en uno o ambos extremos del intervalo. En este caso, la región en cuestión es no acotada en la dirección vertical. Por ejemplo, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ es impropia porque el integrando $f(x) = x^{-1/2}$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to 0+$ (f gura 5). Las integrales impropias de este tipo se def nen mediante límites laterales.

DEFINICIÓN Integrandos con discontinuidades esenciales Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ pero discontinua en $x = b$, se def ne:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to b-} \int_a^R f(x)\,dx$$

De manera análoga, si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ pero discontinua en $x = a$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to a+} \int_R^b f(x)\,dx$$

En ambos casos, se dice que la integral impropia converge si el límite existe, y que diverge en caso contrario.

■ **EJEMPLO 6** Calcule: **(a)** $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ y **(b)** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x}$.

Solución Ambas integrales son impropias puesto que los integrandos presentan discontinuidades esenciales en $x = 0$. La primera integral converge:

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{R\to 0+} \int_R^9 x^{-1/2}\,dx = \lim_{R\to 0+} 2x^{1/2}\Big|_R^9$$

$$= \lim_{R\to 0+} (6 - 2R^{1/2}) = 6$$

La segunda integral diverge:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to 0+} \int_R^{1/2} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to 0+} \left(\ln\frac{1}{2} - \ln R\right)$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \lim_{R\to 0+} \ln R = +\infty$$ ■

La demostración del siguiente teorema es similar a la del teorema 1 (vea el problema 52).

El teorema 2 es cierto para cualquier exponente p. Sin embargo, la integral no es impropia si $p < 0$.

TEOREMA 2 La p-integral en $[0, a]$ Para $a > 0$, se verif ca:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{si } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

UN APUNTE GRÁFICO Las p-integrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^{-p}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx$ presentan un comportamiento opuesto para $p \neq 1$. La primera converge únicamente para $p > 1$ y la segunda converge sólo si $p < 1$ (ambas divergen para $p = 1$). Esto se ref eja en las gráf cas de $y = x^{-p}$ e $y = x^{-q}$, que intercambian sus posiciones en $x = 1$ (f gura 6). Se observa que un valor elevado de p ayuda a que $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^{-p}\,dx$ converja, pero provoca que $\displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx$ diverja.

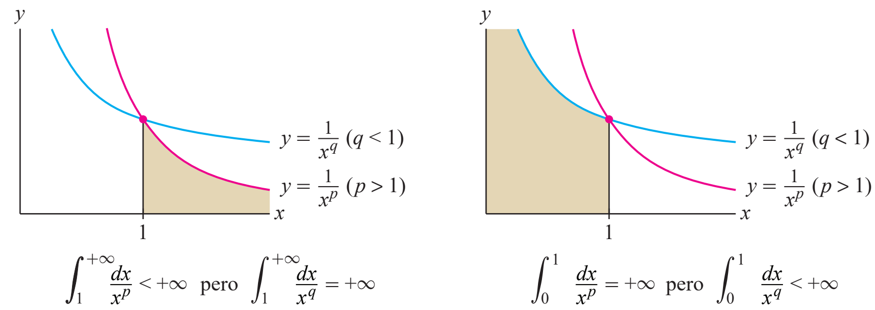


FIGURA 6

En la sección 9.1, se calculará la longitud de una curva como una integral. Resulta así que la integral impropia del siguiente ejemplo representa la longitud de una cuarta parte de la circunferencia unitaria. Por tanto, cabe esperar que su valor sea $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$.

■ **EJEMPLO 7** Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

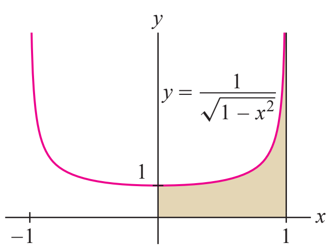


FIGURA 7 El área de la región inf nita sombreada es $\frac{\pi}{2}$.

Solución Esta integral es impropia con una discontinuidad esencial en $x = 1$ (f gura 7). Utilizando la fórmula $\int dx/\sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen}^{-1} x + C$, se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{R\to 1-} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \lim_{R\to 1-} (\operatorname{sen}^{-1} R - \operatorname{sen}^{-1} 0) =$$
$$= \operatorname{sen}^{-1} 1 - \operatorname{sen}^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$ ■

Comparando integrales

En ocasiones interesa determinar si una integral impropia converge, aunque no se pueda determinar su valor exacto. Por ejemplo, la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

no se puede evaluar explícitamente. Sin embargo, si $x \geq 1$, entonces:

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$$

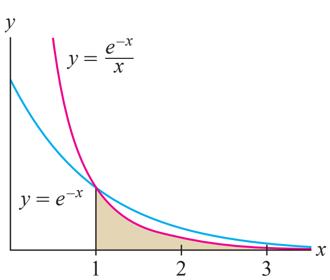


FIGURA 8 Hay menos área por debajo de $y = e^{-x}/x$ que por debajo de $y = e^{-x}$, en el intervalo $[1, +\infty)$.

En otras palabras, la gráf ca de $y = e^{-x}/x$ se encuentra *por debajo* de la gráf ca de $y = e^{-x}$ para $x \geq 1$ (f gura 8). Por tanto,

$$0 \quad\leq\quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \quad\leq\quad \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1}}_{\text{Converge, por cálculo directo}}$$

Como la integral mayor converge, cabe esperar que la menor también converja y que su valor sea un número positivo menor que e^{-1}. Este tipo de conclusión se enuncia de forma precisa en el siguiente teorema. Se proporciona una demostración en el sitio web de acompañamiento del texto.

Lo que el test de comparación afirma (para funciones no negativas) es que:

- *Si la integral de la función mayor converge, entonces la integral de la función menor también converge.*
- *Si la integral de la función menor diverge, entonces la integral de la función mayor también diverge.*

TEOREMA 3 Test de comparación para integrales impropias Suponga que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ también converge.
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también diverge.

El test de comparación también es válido para integrales impropias con discontinuidades esenciales en los extremos.

■ **EJEMPLO 8** Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge.

Solución No se puede evaluar esta integral, pero se puede utilizar el test de comparación. Para probar la convergencia, se debe comparar el integrando $(x^3+1)^{-1/2}$ con una función *mayor* cuya integral se pueda calcular.

Tiene sentido comparar con $x^{-3/2}$ ya que $\sqrt{x^3} \leq \sqrt{x^3+1}$ y por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-3/2}$$

La integral de la función mayor converge, por lo que la integral de la función menor también converge:

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}}_{p\text{-integral con } p>1} \quad \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}}_{\text{Integral de la función menor}} \quad \text{converge}$$

■

■ **EJEMPLO 9 Elección de la comparación apropiada** La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+e^{3x}}$, ¿es convergente?

Solución Como $\sqrt{x} \geq 0$, resulta que $\sqrt{x}+e^{3x} \geq e^{3x}$ y por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+e^{3x}} \leq \frac{1}{e^{3x}}$$

Además:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x}} = \lim_{R\to+\infty} -\frac{1}{3}e^{-3x}\bigg|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{3}\left(e^{-3}-e^{-3R}\right) = \frac{1}{3}e^{-3} \qquad \text{(converge)}$$

Según el test de comparación, la integral del enunciado converge:

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x}}}_{\text{Integral de la función mayor}} \quad \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+e^{3x}}}_{\text{Integral de la función menor}} \quad \text{también converge}$$

Se podría haber pensado en utilizar la desigualdad:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+e^{3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

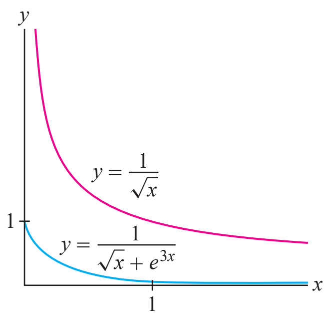


FIGURA 9 La divergencia de una integral mayor no proporciona información sobre la integral menor.

Sin embargo, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge (p-integral con $p < 1$) y esto no proporciona ninguna información sobre la integral menor (f gura 9). ■

■ **EJEMPLO 10 Discontinuidad en el extremo** La integral $J = \displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{x^8 + x^2}$, ¿es convergente?

Solución Esta integral presenta una discontinuidad en $x = 0$. Se puede intentar la comparación en base a:

$$x^8 + x^2 > x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^8 + x^2} < \frac{1}{x^2}$$

Sin embargo, la p-integral $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{x^2}$ diverge y esto no facilita información sobre la integral J, que es menor. Pero observe que si $0 < x < 0,5$, entonces $x^8 < x^2$ y por tanto:

$$x^8 + x^2 < 2x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^8 + x^2} > \frac{1}{2x^2}$$

Como $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{2x^2}$ diverge, la integral J, que es mayor, también diverge. ■

8.6 RESUMEN

- Una *integral impropia* se def ne como el límite de integrales ordinarias:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

La integral impropia *converge* si este límite existe y *diverge* en caso contrario.

- Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ pero discontinua en $x = b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to b-} \int_a^R f(x)\,dx$$

- Una integral impropia de x^{-p} se denomina una p-integral. Para $a > 0$:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} p > 1: & \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge} & \text{y} & \displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{x^p} \text{ diverge} \\ p < 1: & \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ diverge} & \text{y} & \displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{x^p} \text{ converge} \\ p = 1: & \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ y } \int_0^{a} \frac{dx}{x} \text{ divergen} & & \end{array}}$$

- El test de comparación: suponga que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$. Entonces:

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge, entonces } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge.}$$

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ diverge, entonces } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge.}$$

- Recuerde que el test de comparación no proporciona información si la integral mayor $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge o si la integral menor $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.
- El test de comparación también es válido para integrales impropias con discontinuidades esenciales en los extremos.

8.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Determine si la integral converge o diverge:

(a) $\int_1^{+\infty} x^{-3}\,dx$ **(b)** $\int_0^1 x^{-3}\,dx$

(c) $\int_1^{+\infty} x^{-2/3}\,dx$ **(d)** $\int_0^1 x^{-2/3}\,dx$

2. ¿Es impropia la integral $\int_0^{\pi/2} \cot x\,dx$? Justifique su respuesta.

3. Determine un valor $b > 0$ para el que $\int_0^b \frac{1}{x^2-4}\,dx$ sea impropia.

4. ¿Qué comparación probaría que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+e^x}$ converge?

5. Explique por qué no es posible extraer ninguna información sobre la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ comparándola con la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Problemas

1. ¿Cuál de las siguientes integrales es impropia? Justifique su respuesta pero no evalúe la integral.

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{x^{1/3}}\,dx$ **(b)** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{0,2}}$ **(c)** $\int_{-1}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

(d) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ **(e)** $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ **(f)** $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$

(g) $\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$ **(h)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ **(i)** $\int_1^{+\infty} \ln x\,dx$

(j) $\int_0^3 \ln x\,dx$

2. Sea $f(x) = x^{-4/3}$.

(a) Evalúe $\int_1^R f(x)\,dx$.

(b) Evalúe $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ calculando el límite:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R f(x)\,dx$$

3. Demuestre que $\int_1^{+\infty} x^{-2/3}\,dx$ diverge probando que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R x^{-2/3}\,dx = \infty$$

4. Determine si $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}$ converge calculando:

$$\lim_{R\to 3-} \int_0^R \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}$$

En los problemas 5-40, determine si la integral impropia converge y, en caso afirmativo, evalúe la integral.

5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{19/20}}$ **6.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{20/19}}$

7. $\int_{-\infty}^4 e^{0,0001t}\,dt$ **8.** $\int_{20}^{+\infty} \frac{dt}{t}$

9. $\int_0^5 \frac{dx}{x^{20/19}}$ **10.** $\int_0^5 \frac{dx}{x^{19/20}}$

11. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ **12.** $\int_5^6 \frac{dx}{(x-5)^{3/2}}$

13. $\int_2^{+\infty} x^{-3}\,dx$ **14.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$

15. $\int_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)^{3/2}}$ **16.** $\int_2^{+\infty} e^{-2x}\,dx$

17. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0,2}}$ **18.** $\int_2^{+\infty} x^{-1/3}\,dx$

19. $\int_4^{+\infty} e^{-3x}\,dx$ **20.** $\int_4^{+\infty} e^{3x}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx$ **22.** $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

23. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ **24.** $\int_{-2}^4 \frac{dx}{(x+2)^{1/3}}$

25. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ **26.** $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx$

27. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ **28.** $\int_3^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}}$

29. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

32. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

33. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta$

35. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$

38. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x\ln x}$

39. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

41. Sea $I=\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$.

(a) Pruebe que para $R>4$, se verifica:

$$\int_4^{R}\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\ln\left|\frac{R-3}{R-2}\right|-\ln\frac{1}{2}$$

(b) A continuación, pruebe que $I=\ln 2$.

42. Evalúe la integral $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(2x+5)}$.

43. Evalúe $I=\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{x(2x+5)}$ o determine que ésta diverge.

44. Evalúe $I=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)(x+1)^2}$ o determine que ésta diverge.

En los problemas 45-48, determine si la integral impropia doblemente infinita converge y, en caso afirmativo, evalúe la integral. Utilice la definición (2).

45. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$

46. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

47. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

49. Defina $J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{1/3}}$ como la suma de las dos integrales impropias $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{1/3}}+\int_0^{1}\frac{dx}{x^{1/3}}$. Pruebe que J converge y que $J=0$.

50. Determine si $J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ (definida como en el problema 49) converge.

51. ¿Para qué valores de a la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx$ converge?

52. Pruebe que $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{x^p}$ converge si $p<1$ y que diverge si $p\geq 1$.

53. Dibuje la región por debajo de la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ para $-\infty<x<+\infty$ y pruebe que esta área es igual a π.

54. Pruebe que $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}\leq\dfrac{1}{x^2}$ para todo x y use esta desigualdad para demostrar que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ converge.

55. Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+4}$ converge comparándola con $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{-3}\,dx$.

56. Pruebe que $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3-4}$ converge comparándola con $\displaystyle\int_2^{+\infty}2x^{-3}\,dx$.

57. Pruebe que $0\leq e^{-x^2}\leq e^{-x}$ para $x\geq 1$ (figura 10). Use el test de comparación, para probar que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge. *Indicación:* Es suficiente (¿por qué?) realizar la comparación para $x\geq 1$ pues:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\int_0^{1} e^{-x^2}\,dx+\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

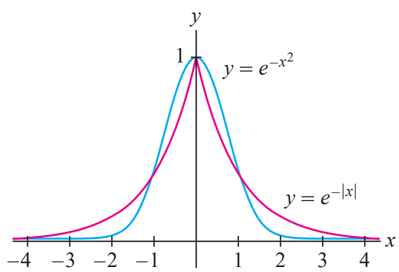


FIGURA 10 Comparación de $y=e^{-|x|}$ e $y=e^{-x^2}$.

58. Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge comparándola con $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (figura 10).

59. Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1-\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ converge.

60. Sea $a>0$. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\ln x}=+\infty$. A continuación:

(a) Pruebe que $x^a>2\ln x$ para todo x suficientemente grande.

(b) Pruebe que $e^{-x^a}<x^{-2}$ para todo x suficientemente grande.

(c) Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^a}\,dx$ converge.

En los problemas 61-74, utilice el test de comparación para demostrar si la integral converge o si no lo hace.

61. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^5+2}}\,dx$

62. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^3+2x+4)^{1/2}}$

63. $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

64. $\displaystyle\int_0^{5}\frac{dx}{x^{1/3}+x^3}$

65. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}}\,dx$

67. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}\,dx$

68. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+e^x}\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4+\sqrt{x}}\,dx$

70. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\operatorname{senh} x}\,dx$

71. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^{1/3}+x^3}}$

72. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(8x^2+x^4)^{1/3}}$

73. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+x^2)^{1/3}}$

74. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{xe^x+x^2}$

Indicación para el problema 73: Pruebe que si $x \geq 1$, se cumple:

$$\frac{1}{(x+x^2)^{1/3}} \geq \frac{1}{2^{1/3}x^{2/3}}$$

Indicación para el problema 74: Pruebe que si $0 \leq x \leq 1$, se cumple:

$$\frac{1}{xe^x+x^2} \geq \frac{1}{(e+1)x}$$

75. Def na $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}(x+1)}$ como la suma de las dos integrales impropias:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}(x+1)}$$

Utilice el test de comparación para probar que J converge.

76. Determine si $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}(x+1)}$ (def nida como en el problema 75) converge.

77. Una inversión paga un dividendo de 250 \$/año continuamente y para siempre. Si la tasa de interés es del 7 %, ¿cuál es el valor actual de f ujo de ingresos total generado por la inversión?

78. En una inversión se espera obtener benef cios a razón de $10\,000e^{0{,}01t}$ dólares al año y para siempre. Halle el valor actual del f ujo de ingresos si la tasa de interés es del 4 %.

79. Calcule el valor actual de una inversión que genera ingresos a razón de $5000te^{0{,}01t}$ dólares al año y para siempre, suponiendo una tasa de interés del 6 %.

80. Halle el volumen del sólido de revolución, respecto al eje x, de la región por debajo de la gráf ca de $y = e^{-x}$, para $0 \leq x < +\infty$.

81. El sólido S de revolución, respecto al eje x, de la región por debajo de la gráf ca de $y = x^{-1}$ para $1 \leq x < +\infty$, se denomina **el cuerno de Gabriel** (f gura 11).

(a) Use el método del disco (sección 6.3) para calcular el volumen de S. Observe que el volumen es f nito aunque S es una región inf nita.

(b) Se puede demostrar que el área lateral de S es:

$$A = 2\pi \int_1^{+\infty} x^{-1}\sqrt{1+x^{-4}}\,dx$$

Pruebe que A es inf nita. Si S fuera un recipiente, podría llenar su interior con una cantidad f nita de pintura pero no podría pintar su superf cie con una cantidad f nita de pintura.

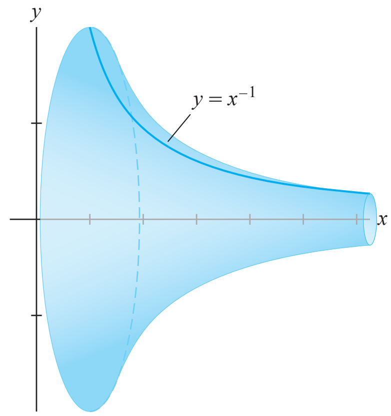


FIGURA 11

82. Calcule el volumen del sólido de revolución, respecto al eje x, de la región por debajo de la gráf ca de $y = e^{-|x|/2}$ para $-\infty < x < +\infty$.

83. Cuando un condensador de capacidad C se carga mediante una fuente de voltaje V, la potencia gastada en el instante t es:

$$P(t) = \frac{V^2}{R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)$$

donde R es la resistencia del circuito. La energía total almacenada en el condensador es:

$$W = \int_0^{+\infty} P(t)\,dt$$

Pruebe que $W = \frac{1}{2}CV^2$.

84. ¿Para qué valores enteros de p la integral $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converge?

85. La conservación de la energía puede ser utilizada para demostrar que cuando una masa m oscila en el extremo de un muelle de constante k, el periodo de oscilación es:

$$T = 4\sqrt{m}\int_0^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{2E-kx^2}}$$

donde E es la energía total de la masa. Pruebe que se trata de una integral impropia de valor $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

*En los problemas 86-89, la **transformada de Laplace** de una función $f(x)$ es la función $Lf(s)$ de la variable s def nida mediante la integral impropia (si ésta converge):*

$$Lf(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

Las transformadas de Laplace son muy utilizadas en física e ingeniería.

86. Pruebe que si $f(x) = C$, donde C es una constante, entonces $Lf(s) = C/s$ para $s > 0$.

87. Pruebe que si $f(x) = \operatorname{sen} \alpha x$, entonces $Lf(s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$.

88. Calcule $Lf(s)$, donde $f(x) = e^{\alpha x}$ y $s > \alpha$.

89. Calcule $Lf(s)$, donde $f(x) = \cos \alpha x$ y $s > 0$.

90. Cuando una sustancia radiactiva se desintegra, la fracción de átomos que quedan en el instante t es $f(t) = e^{-kt}$, donde $k > 0$ es la constante de desintegración. Se puede probar que la vida *media* de un átomo (hasta que se desintegra) es $A = -\int_0^{+\infty} t f'(t)\, dt$. Utilice integración por partes para probar que $A = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ y calcule A. ¿Cuál es el tiempo medio hasta la desintegración para el radón-222, cuya semivida es igual a 3,825 días?

91. Sea $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\, dx$, donde $n \geq 1$ es un entero y $\alpha > 0$. Demuestre que:

$$J_n = \frac{n}{\alpha} J_{n-1}$$

y que $J_0 = 1/\alpha$. Use estos resultados para obtener J_4. Pruebe que $J_n = n!/\alpha^{n+1}$.

92. Sea $a > 0$ y $n > 1$. Sea $f(x) = \dfrac{x^n}{e^{ax} - 1}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

(a) Use la regla de L'Hôpital para probar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(b) Pruebe que $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. *Indicación:* Pruebe que

$$f(x) \leq 2x^n e^{-ax}$$

si x es suficientemente grande. A continuación, utilice el test de comparación y el problema 91.

93. Según la **Ley de Radiación de Planck**, la cantidad de energía electromagnética con frecuencia entre ν y $\nu + \Delta\nu$ emitida por lo que se conoce como un cuerpo negro a temperatura T es proporcional a $F(\nu)\,\Delta\nu$, donde

$$F(\nu) = \left(\frac{8\pi h}{c^3}\right) \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

y siendo c, h, k constantes físicas. Aplique el problema 92 para probar que la energía total emitida

$$E = \int_0^{+\infty} F(\nu)\, d\nu$$

es finita. Para deducir su ley, Planck introdujo la hipótesis sobre los quantum en 1900, lo que marcó el inicio de la mecánica cuántica.

Problemas avanzados

94. Sea $I = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\, dx$.

(a) Pruebe que I diverge para $p = -1$.

(b) Pruebe que si $p \neq -1$, entonces:

$$\int x^p \ln x\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\left(\ln x - \frac{1}{p+1}\right) + C$$

(c) Use la regla de L'Hôpital para probar que I converge si $p > -1$ y que diverge si $p < -1$.

95. Sea:

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Compruebe que se puede aplicar la regla de L'Hôpital al límite $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{G(x)}$ y evalúe L.

*En los problemas 96-98, se dice que una integral impropia $I = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ es **absolutamente convergente** si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge. Se puede demostrar que si I es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

96. Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$ es absolutamente convergente.

97. Pruebe que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx$ es absolutamente convergente.

98. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ y $I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$. Se define $f(0) = 1$. Entonces $f(x)$ es continua e I no es impropia en $x = 0$.

(a) Pruebe que:

$$\int_1^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

(b) Pruebe que $\int_1^{+\infty} (\cos x/x^2)\, dx$ converge. Concluya que el límite cuando $R \to +\infty$ de la integral del apartado (a) existe y es finito.

(c) Pruebe que I converge.

Se sabe que $I = \frac{\pi}{2}$. Sin embargo, I *no* es absolutamente convergente. La convergencia depende de la cancelación que se muestra en la figura 12.

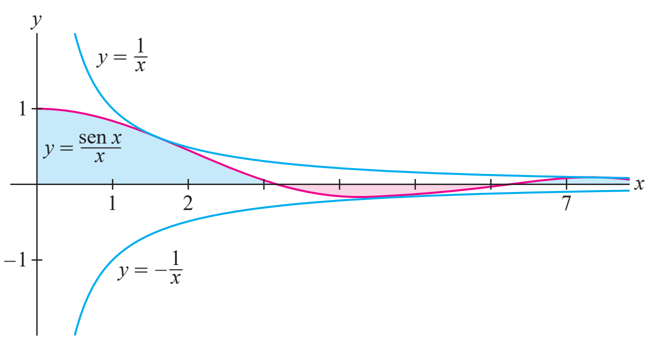


FIGURA 12 La convergencia de $\int_1^{+\infty} (\operatorname{sen} x/x)\, dx$ es debida a la cancelación que tiene lugar por el cambio periódico de signo.

99. La **función gamma**, que desempeña un papel importante en aplicaciones avanzadas, se define para $n \geq 1$ como:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t}\, dt$$

(a) Pruebe que la integral por la que se define $\Gamma(n)$ converge para $n \geq 1$ (de hecho converge para todo $n > 0$). *Indicación:* Pruebe que

$$t^{n-1} e^{-t} < t^{-2} \text{ para } t$$

suficientemente grande.

(b) Pruebe que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, mediante integración por partes.

(c) Pruebe que $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \geq 1$ es un entero. *Indicación:* Utilice (a) repetidamente. Por tanto, $\Gamma(n)$ proporciona una manera de definir n-factorial cuando n no es un entero.

100. Utilice los resultados del problema 99 para probar que la transformada de Laplace (vea los problemas 86-89 precedentes) de x^n es $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

8.7 Probabilidad e integración

¿Cuál es la probabilidad de que un cliente llegue a un restaurante de comida rápida en los siguientes 45 segundos? ¿o de obtener una puntuación por encima del 90 % es un test estandarizado? Probabilidades como éstas se describen en términos de áreas por debajo de la gráf ca de una función $p(x)$ denominada **función de densidad de probabilidad** (f gura 1). Los métodos de integración desarrollados en este capítulo se utilizan extensivamente en el estudio de dichas funciones.

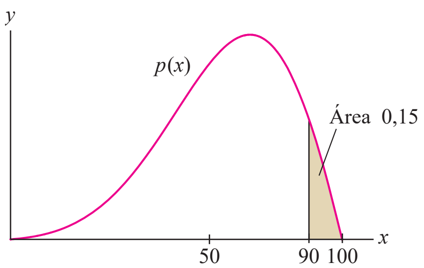


FIGURA 1 Función de densidad de probabilidad para las puntuaciones obtenidas en un examen. El área de la región sombreada es 0,15, con lo que existe un 15 % de probabilidad de que un examen escogido al azar tenga una puntuación mayor que 90.

En teoría de probabilidad, la cantidad X que se intenta predecir (tiempo de llegada, puntuación en un examen, etc.) se denomina una **variable aleatoria**. La probabilidad de que X se encuentre en un rango f jado $[a, b]$ se denota como:

$$P(a \le X \le b)$$

Por ejemplo, la probabilidad de que un cliente llegue, entre los siguientes 30 a 45 segundos, se denota como $P(30 \le X \le 45)$.

Se dice que X es una **variable aleatoria continua** si existe una función de densidad de probabilidad $p(x)$ continua tal que:

$P(X \le b)$ denota la probabilidad de que X sea, a lo sumo, b y $P(X \ge b)$ la probabilidad de que X sea como mínimo b.

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

Una función de densidad de probabilidad $p(x)$ debe cumplir dos condiciones. En primer lugar, debe verif car que $p(x) \ge 0$ para todo x, pues una probabilidad no puede ser negativa. En segundo lugar:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) = 1} \qquad \boxed{1}$$

Esta integral representa $P(-\infty < X < +\infty)$. Debe ser igual a 1 porque es cierto (la probabilidad es 1) que el valor de X se encuentra entre $-\infty$ y $+\infty$.

■ **EJEMPLO 1** Determine la constante C para la que $p(x) = \dfrac{C}{x^2+1}$ es una función de densidad de probabilidad. A continuación, calcule $P(1 \le X \le 4)$.

Solución Se debe seleccionar C de manera que la ec. (1) se cumpla. La integral impropia es la suma de dos integrales (vea la nota al margen):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + C\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = C\frac{\pi}{2} + C\frac{\pi}{2} = C\pi$$

Así, la ec. (1) se cumple si $C\pi = 1$, es decir, $C = \pi^{-1}$. Finalmente:

$$P(1 < X < 4) = \int_1^4 p(x)\,dx = \int_1^4 \frac{\pi^{-1}\,dx}{x^2+1} = \pi^{-1}(\tan^{-1} 4 - \tan^{-1} 1) \approx 0{,}17$$

Por tanto, X se encuentra entre 1 y 4 con probabilidad 0,17 o 17 % (f gura 2). ■

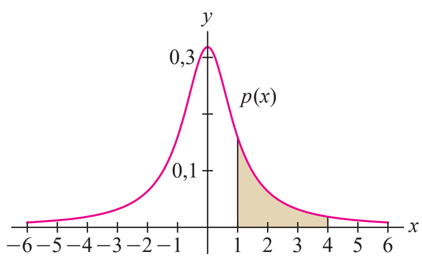


FIGURA 2 La función de densidad de probabilidad $p(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.

← RECORDATORIO

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to-\infty} \tan^{-1} x\Big|_R^0$$
$$= \lim_{R\to-\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} R)$$
$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

De manera análoga, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Si X es una variable aleatoria continua, entonces la probabilidad de que X sea exactamente igual a un valor concreto a es *cero* porque $\displaystyle\int_a^a p(x)\,dx = 0$. Si esto es así, ¿cuál es el signif cado de $p(a)$? Se debe mirar de esta forma: la probabilidad de que X se encuentre en un *pequeño intervalo* $[a, a + \Delta x]$ es aproximadamente $p(a)\Delta x$:

$$P(a \le X \le a + \Delta x) = \int_a^{a+\Delta x} p(x)\,dx \approx p(a)\Delta x$$

Una densidad de probabilidad es similar a una densidad lineal de masa $\rho(x)$. La masa de un pequeño segmento $[a, a + \Delta x]$ es aproximadamente $\rho(a)\Delta x$, pero la masa de un punto concreto $x = a$ es cero.

La *media* o *valor medio* de una variable aleatoria es la cantidad:

$$\boxed{\mu = \mu(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx} \qquad \boxed{2}$$

El símbolo μ es la letra minúscula griega mu. Si $p(x)$ está definida en $[0, +\infty)$ en lugar de en $(-\infty, +\infty)$, o en cualquier otro intervalo, entonces μ se calcularía integrando sobre tal intervalo. Análogamente, en la ec. (1) se integraría en el intervalo en el que $p(x)$ estuviera definida.

En el siguiente ejemplo, se considera la **densidad de probabilidad exponencial** de parámetro $r > 0$, definida en $[0, +\infty)$ por:

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{r}e^{-t/r}}$$

Esta función de densidad se suele utilizar para modelar "tiempos de espera" entre sucesos aleatorios. En el problema 10 se pide comprobar que $p(t)$ cumple la ec. (1).

■ **EJEMPLO 2 Media de una densidad exponencial** Sea $r > 0$. Calcule la media de la densidad de probabilidad exponencial $p(t) = \frac{1}{r}e^{-t/r}$ en $[0, +\infty)$.

Solución La media es la integral de $tp(t)$ en $[0, +\infty)$. Considere integración por partes con $u = t/r$ y $v' = e^{-t/r}$; entonces $u' = 1/r$, $v = -re^{-t/r}$ y se tiene:

$$\int tp(t)\,dt = \int \left(\frac{t}{r}e^{-t/r}\right)dt = -te^{-t/r} + \int e^{-t/r}dt = -(r+t)e^{-t/r}$$

De esta manera (utilizando que tanto $re^{-R/r}$ como $Re^{-R/r}$ tienden a cero cuando $R \to +\infty$ en el último paso),

$$\mu = \int_0^{+\infty} tp(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\left(\frac{1}{r}e^{-t/r}\right)dt = \lim_{R\to+\infty} -(r+t)e^{-t/r}\Big|_0^R$$
$$= \lim_{R\to+\infty}\left(r - (r+R)\,e^{-R/r}\right) = r$$ ■

■ **EJEMPLO 3 Tiempo de espera** El tiempo de espera T entre las llegadas de dos clientes a restaurante de comida rápida es una variable aleatoria con densidad de probabilidad exponencial. Si el tiempo medio de espera es de 60 segundos, ¿cuál es la probabilidad de que un nuevo cliente llegue entre 30 y 45 segundos después de la última llegada?

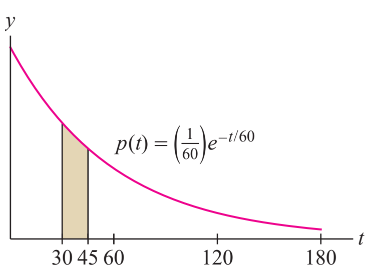


FIGURA 3 Las llegadas de clientes siguen una distribución exponencial.

Solución Si el tiempo medio es de 60 segundos, entonces $r = 60$ y $p(t) = \frac{1}{60}e^{-t/60}$ pues la media de $p(t)$ es r según el ejemplo previo. De esta manera, la probabilidad de esperar entre 30 y 45 segundos hasta la llegada del siguiente cliente es:

$$P(30 \le T \le 45) = \int_{30}^{45} \frac{1}{60}e^{-t/60} = -e^{-t/60}\Big|_{30}^{45} = -e^{-3/4} + e^{-1/2} \approx 0{,}134$$

Esta probabilidad es el área de la región sombreada en la figura 3. ■

Las **funciones de densidad normal**, cuyas gráficas son las conocidas campanas de Gauss, aparecen en una sorprendente variedad de aplicaciones. La función de densidad **normal estándar** se define mediante:

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}} \qquad \boxed{3}$$

Se puede demostrar que $p(x)$ cumple la ec. (1) utilizando cálculo multivariable.

En general, se def ne la función de densidad normal de media μ y desviación estándar σ:

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}$$

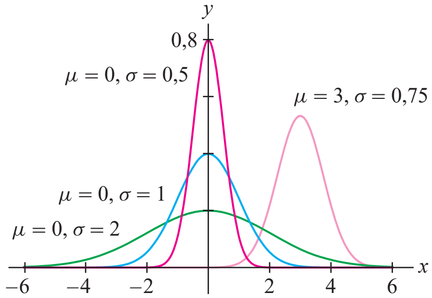


FIGURA 4 Funciones de densidad normal.

La desviación estándar σ mide la dispersión; para valores grandes de σ la gráf ca está más dispersa alrededor de μ (f gura 4). La densidad normal estándar de la ec. (3) tiene media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Se dice que una variable aleatoria con función de densidad normal sigue una **distribution normal** o **gaussiana** .

Una dif cultad que aparece en este contexto es que las funciones de densidad normales no tienen primitivas elementales. Como resultado, no se pueden evaluar explícitamente las probabilidades:

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx$$

Sin embargo, el siguiente teorema establece que estas probabilidades se pueden expresar en términos de una única función, denominada **función de distribución de la normal estándar**:

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx}$$

Observe que $F(z)$ es igual al área por debajo de la gráf ca de la f gura 5 a lo largo de $(-\infty, z]$. Se pueden obtener los valores numéricos de $F(z)$ con la mayoría de calculadoras científ cas, de programas informáticos de cálculo simbólico y on-line (busque "función de distribución de la normal estándar").

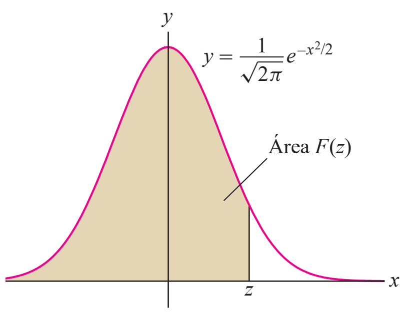


FIGURA 5 $F(z)$ es es el área de la región sombreada.

TEOREMA 1 Si X sigue una distribución normal de media μ y desviación estándar σ, entonces para todo $a \le b$, se verif ca:

$$\boxed{P(X \le b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)} \qquad \boxed{4}$$

$$\boxed{P(a \le X \le b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} \qquad \boxed{5}$$

Demostración Se utilizarán dos cambios de variable, primero $u = x - \mu$ y después $t = u/\sigma$:

$$P(X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b-\mu} e^{-u^2/(2\sigma^2)}\,du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

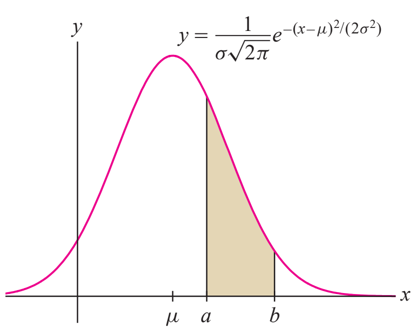


FIGURA 6 El área de la región sombreada es $F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Esto demuestra la ec. (4). La ec. (5) es cierta al ser $P(a \le X \le b)$ el área por debajo de la gráf ca entre a y b, y esto es igual al área a la izquierda de b menos el área a la izquierda de a (f gura 6). ■

EJEMPLO 4 Suponga que las puntuaciones X en un examen estandarizado se distribuyen según una normal de media $\mu = 500$ y desviación estándar $\sigma = 100$. Halle la probabilidad de que la puntuación de un examen seleccionado al azar sea de:

(a) a lo sumo 600. **(b)** entre 450 y 650.

Solución Se utilizará un programa informático de cálculo simbólico para evaluar $F(z)$ numéricamente.

(a) Aplique ec. (4) con $\mu = 500$ y $\sigma = 100$:

$$P(x \le 600) = F\left(\frac{600 - 500}{100}\right) = F(1) \approx 0{,}84$$

Por tanto, la puntuación de un examen seleccionado al azar es de 600 o menos con probabilidad 0,84, o del 84 %.

(b) Según la ec. (5), la puntuación de un examen seleccionado al azar se encuentra entre 450 y 650 con una probabilidad del 62,5 %:

$$P(450 \le x \le 650) = F(1{,}5) - F(-0{,}5) \approx 0{,}933 - 0{,}308 = 0{,}625$$

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Por qué se ha definido la media de una variable aleatoria continua X como la integral $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$?

Suponga, en primer lugar, que se dispone de N números $a_1, a_2, \ldots, a_N$ y para cada valor x, sea $N(x)$ el número de ocasiones que x se observa entre los a_j. Entonces un valor al azar a_j es igual a x con probabilidad $p(x) = N(x)/N$. Por ejemplo, para $4, 4, 5, 5, 5, 8$, se tiene que $N = 6$ y que $N(5) = 3$. La probabilidad de seleccionar el 5 es $p(5) = N(5)/N = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ahora observe que se puede escribir la media (valor medio) de los a_j en términos de las probabilidades $p(x)$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_x N(x)x = \sum_x xp(x)$$

Por ejemplo:

$$\frac{4+4+5+5+5+8}{6} = \frac{1}{6}(2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 1\cdot 8) = 4p(4) + 5p(5) + 8p(8)$$

Al definir la media de una variable aleatoria continua X, se reemplaza la suma $\sum_x xp(x)$ por la integral $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$. Esto tiene sentido porque la integral es el límite de las sumas $\sum x_i p(x_i)\Delta x$ y, tal y como se ha visto, $p(x_i)\Delta x$ es la probabilidad aproximada de que X se encuentre en $[x_i, x_i + \Delta x]$.

8.7 RESUMEN

- Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $p(x)$, entonces:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

- Las densidades de probabilidad cumplen dos condiciones: $p(x) \ge 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

- Media (o valor medio) de X:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx$$

- Función de densidad exponencial de media r:

$$p(x) = \frac{1}{r} e^{-x/r}$$

- Función de densidad normal de media μ y desviación estándar σ:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

- Función de distribución de la normal estándar:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt$$

- Si X sigue una distribución normal de media μ y desviación estándar σ, entonces:

$$P(X \le b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \le X \le b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

8.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. La función $p(x) = \frac{1}{2}\cos x$ cumple $\int_0^{\pi} p(x)\, dx = 1$. ¿Es $p(x)$ una función de densidad de probabilidad en $[0, \pi]$?

2. Estime $P(2 \le X \le 2{,}1)$ suponiendo que la función de densidad de probabilidad de X cumple $p(2) = 0{,}2$.

3. ¿Cuál es la densidad de probabilidad exponencial de media $\mu = \frac{1}{4}$?

Problemas

En los problemas 1-6, halle una constante C para la que $p(x)$ sea una función de densidad de probabilidad en el intervalo dado y calcule la probabilidad indicada.

1. $p(x) = \dfrac{C}{(x+1)^3}$ en $[0, +\infty)$; $P(0 \le X \le 1)$

2. $p(x) = Cx(4-x)$ en $[0, 4]$; $P(3 \le X \le 4)$

3. $p(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ en $(-1, 1)$; $P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2})$

4. $p(x) = \dfrac{Ce^{-x}}{1+e^{-2x}}$ en $(-\infty, +\infty)$; $P(X \le -4)$

5. $p(x) = C\sqrt{1-x^2}$ en $(-1, 1)$; $P(-\frac{1}{2} \le X \le 1)$

6. $p(x) = Ce^{-x}e^{-e^{-x}}$ en $(-\infty, +\infty)$; $P(-4 \le X \le 4)$

Esta función, denominada la **densidad de Gumbel**, se utiliza para modelar sucesos excepcionales, como inundaciones y terremotos.

7. Compruebe que $p(x) = 3x^{-4}$ es una función de densidad de probabilidad en $[1, +\infty)$ y calcule su valor medio.

8. Pruebe que la función de densidad $p(x) = \dfrac{2}{\pi(x^2+1)}$ en $[0, +\infty)$ tiene media inf nita.

9. Compruebe que $p(t) = \frac{1}{50}e^{-t/50}$ cumple la condición $\int_0^{+\infty} p(t)\, dt = 1$.

10. Compruebe que para todo $r > 0$, la función de densidad exponencial $p(t) = \frac{1}{r}e^{-t/r}$ cumple la condición $\int_0^{+\infty} p(t)\, dt = 1$.

11. La vida X (en horas) de una batería en uso constante es una variable aleatoria con densidad exponencial. ¿Cuál es la probabilidad de que la batería dure más de 12 horas si la vida media es de 8 horas?

12. El tiempo entre las llamadas telefónicas entrantes en una centralita es una variable aleatoria con densidad exponencial. Existe un 50 % de probabilidad de esperar 20 segundos o más entre llamadas. ¿Cuál es el tiempo medio entre llamadas?

13. La distancia r entre el electrón y el núcleo (en su estado de energía más bajo) es una variable aleatoria con densidad de probabilidad $p(r) = 4a_0^{-3}r^2e^{-2r/a_0}$ para $r \ge 0$, donde a_0 es el radio de Bohr (f -

gura 7). Calcule la probabilidad P de que el electrón se encuentre a una distancia de 1 radio de Bohr del núcleo. El valor de a_0 es aproximadamente $5{,}29 \times 10^{-11}$ m, pero no lo necesita para calcular P.

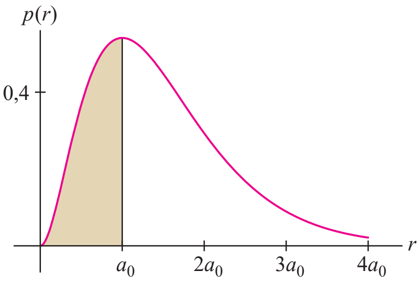


FIGURA 7 Función de densidad de probabilidad $p(r) = 4a_0^{-3} r^2 e^{-2r/a_0}$.

14. Pruebe que la distancia media r entre el electrón y el núcleo en el problema 13 es $\mu = 3a_0/2$.

En los problemas 15-21, $F(z)$ denota la función de distribución de la normal estándar. Utilice una calculadora, un programa informático de cálculo simbólico o un recurso on-line para obtener los valores de $F(z)$.

15. Exprese el área de la región A de la figura 8 en términos de $F(z)$ y calcule su valor.

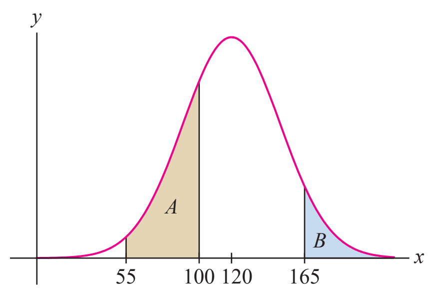


FIGURA 8 Función de densidad normal de $\mu = 120$ y $\sigma = 30$.

16. Pruebe que el área de la región B en la figura 8 es igual a $1 - F(1{,}5)$ y calcule su valor. Compruebe numéricamente que esta área también es igual a $F(-1{,}5)$ y explique por qué gráficamente.

17. Suponga que la distribución de X es normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma = 1$). Determine:

(a) $P(X \le 1{,}2)$ **(b)** $P(X \ge -0{,}4)$

18. Evalúe numéricamente: $\displaystyle \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_{14{,}5}^{+\infty} e^{-(z-10)^2/18}\, dz.$

19. Utilice una gráfica para probar que $F(-z) = 1 - F(z)$ para todo z. A continuación pruebe que si $p(x)$ es una función de densidad normal de media μ y desviación estándar σ, entonces para todo $r \ge 0$:

$$P(\mu - r\sigma \le X \le \mu + r\sigma) = 2F(r) - 1$$

20. Para los meses de septiembre, el promedio de las precipitaciones de lluvia en Erie, Pennsylvania, es una variable aleatoria X de media $\mu = 102$ mm. Suponga que la cantidad de precipitaciones se distribuye según una normal de $\sigma = 48$.

(a) Exprese $P(128 \le X \le 150)$ en términos de $F(z)$ y calcule su valor numéricamente.

(b) Sea P la probabilidad de que el promedio de precipitaciones en septiembre sea como mínimo de 120 mm. Exprese P como la integral de una función de densidad apropiada y calcule su valor numéricamente.

21. Una empresa embotelladora produce botellas de zumo de fruta que se llenan, en promedio, con 32 onzas de zumo. Debido a las fluctuaciones aleatorias en la maquinaria, el volumen real de zumo se distribuye normalmente con una desviación estándar de 0,4 onzas. Sea P la probabilidad de que una botella se haya llenado con menos de 31 onzas de zumo. Exprese P como la integral de una función de densidad adecuada y calcule su valor numéricamente.

22. Según la **distribución de Maxwell**, para un gas de masa molecular m, la velocidad v de una molécula en un gas a temperatura T (en grados kelvin) es una variable aleatoria de densidad:

$$p(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} \quad (v \ge 0)$$

donde k es la constante de Boltzmann. Pruebe que la velocidad media es $(8kT/\pi m)^{1/2}$. La velocidad media de las moléculas de oxígeno a temperatura ambiente es, aproximadamente, de 450 m/s.

*En los problemas 23-26, calcule μ y σ, donde σ es la **desviación estándar**, definida por:*

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, p(x)\, dx$$

Conforme menor sea el valor de σ, más concentrados están los valores de la variable X alrededor de la media μ.

23. $p(x) = \dfrac{5}{2x^{7/2}}$ en $[1, +\infty)$

24. $p(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ en $(-1, 1)$

25. $p(x) = \dfrac{1}{3}e^{-x/3}$ en $[0, +\infty)$

26. $p(x) = \dfrac{1}{r}e^{-x/r}$ en $[0, +\infty)$, donde $r > 0$

Problemas avanzados

27. El tiempo de desintegración de un átomo en una sustancia radiactiva es una variable aleatoria X. La ley de desintegración radiactiva establece que si en el instante $t = 0$ hay N átomos, entonces habrá $Nf(t)$ átomos en el instante t, donde $f(t) = e^{-kt}$ ($k > 0$ es la constante de desintegración). Explique las siguientes afirmaciones:

(a) La fracción de átomos que se desintegra en un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es aproximadamente $-f'(t)\Delta t$.

(b) La función de densidad de probabilidad de X es $-f'(t)$.

(c) El tiempo medio de desintegración es $1/k$.

28. La semivida del radón-222 es de 3,825 días. Aplique el problema 27 para calcular:

(a) el tiempo medio de desintegración de un átomo de radón-222.

(b) la probabilidad de que un átomo concreto se desintegre en las próximas 24 horas.

8.8 Integración numérica

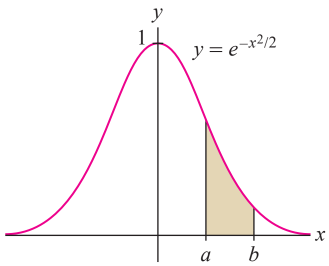


FIGURA 1 Las áreas por debajo de la curva de Gauss se calculan mediante integración numérica.

La integración numérica es el proceso de aproximar una integral def nida mediante sumas de valores de la función, convenientemente seleccionados. Se necesita cuando no se puede determinar una primitiva explícitamente, como en el caso de la función Gaussiana $f(x) = e^{-x^2/2}$ (f gura 1).

Para aproximar la integral def nida $\int_a^b f(x)\,dx$, se f ja un número natural N y se divide $[a, b]$ en N subintervalos de longitud $\Delta x = (b - a)/N$. Los extremos de los subintervalos (f gura 2) son:

$$\boxed{x_0 = a \qquad x_1 = a + \Delta x \qquad x_2 = a + 2\Delta x \qquad \ldots \qquad x_N = b}$$

Denote los valores de $f(x)$ en estos extremos como y_j:

$$\boxed{y_j = f(x_j) = f(a + j\Delta x)}$$

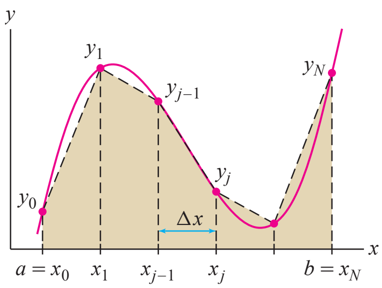


FIGURA 2 T_N aproxima el área por debajo de la gráf ca mediante trapecios.

En particular, $y_0 = f(a)$ e $y_N = f(b)$.

La **regla del trapecio** T_N aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ por el área de los trapecios que se obtienen uniendo los puntos (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ con segmentos rectilíneos, tal y como se muestra en la f gura 2. El área del trapecio j-ésimo es $\frac{1}{2}\Delta x(y_{j-1} + y_j)$ y, por tanto:

$$T_N = \frac{1}{2}\Delta x(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\Delta x(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{1}{2}\Delta x(y_{N-1} + y_N) =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta x\Big((y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \cdots + (y_{N-1} + y_N)\Big)$$

Observe que cada valor y_j aparece en dos ocasiones, excepto y_0 e y_N. Se obtiene:

$$T_N = \frac{1}{2}\Delta x\Big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{N-1} + y_N\Big)$$

Regla del trapecio La aproximación trapezoidal de orden N a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es:

$$\boxed{T_N = \frac{1}{2}\Delta x(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{N-1} + y_N)}$$

donde $\Delta x = \dfrac{b - a}{N}$ y $y_j = f(a + j\Delta x)$.

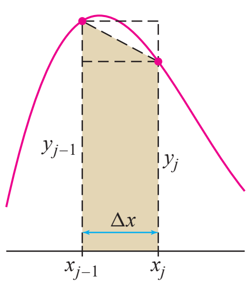


FIGURA 3 El área de la región sombreada es $\frac{1}{2}\Delta x(y_{j-1} + y_j)$. Se trata del promedio de las áreas de los rectángulos basados en los extremos inferior y superior.

UN APUNTE CONCEPTUAL Según se observa en la f gura 3, el área del trapecio j-ésimo es igual a la media de las áreas de los rectángulos basados en los extremos, con alturas y_{j-1} e y_j. De esta manera, T_N es igual al promedio de las aproximaciones basadas en el extremos superior y en el extremo inferior que se introdujeron en la sección 5.1:

$$T_N = \frac{1}{2}(R_N + L_N)$$

En general, este promedio resulta una mejor aproximación que R_N o L_N.

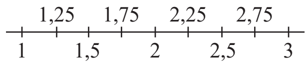


FIGURA 4 División de $[1,3]$ en $N = 8$ subintervalos.

■ **EJEMPLO 1** SAC Calcule T_8 para la integral $\int_1^3 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$. A continuación, utilice un programa informático de cálculo simbólico para calcular T_N para $N = 50$, 100, 500, 1000, y 10 000.

Solución Divida $[1,3]$ en $N = 8$ subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$. A continuación, sume los valores de la función en los extremos (f gura 4) ponderando por los coef cientes adecuados:

$$T_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\big[\operatorname{sen}(1^2) + 2\operatorname{sen}(1{,}25^2) + 2\operatorname{sen}(1{,}5^2) + 2\operatorname{sen}(1{,}75^2)+$$
$$+\, 2\operatorname{sen}(2^2) + 2\operatorname{sen}(2{,}25^2) + 2\operatorname{sen}(2{,}5^2) + 2\operatorname{sen}(2{,}75^2) + \operatorname{sen}(3^2)\big] \approx$$
$$\approx 0{,}4281$$

TABLA 1

N	T_N
50	0,4624205
100	0,4630759
500	**0,4632**855
1000	**0,4632**920
10 000	**0,4632**942

En general, $\Delta x = (3-1)/N = 2/N$ y $x_j = 1 + 2j/N$. En notación sumatoria:

$$T_N = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}\right)\left[\operatorname{sen}(1^2) + 2\underbrace{\sum_{j=1}^{N-1}\operatorname{sen}\left(\left(1+\frac{2j}{N}\right)^2\right)}_{\text{Suma de términos con coef ciente 2}} + \operatorname{sen}(3^2)\right]$$

Se evalúa la suma con un programa informático, utilizando una instrucción como:

```
Sum[Sin[(1 + 2j/N)^2], {j, 1, N − 1}]
```

Los resultados de la tabla 1 sugieren que $\int_1^3 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ es aproximadamente 0,4633. ■

La aproximación basada en el punto medio M_N, que se introdujo en la sección 5.1, es la suma de las áreas de los rectángulos de altura $f(c_j)$ y base Δx, donde c_j es el punto medio del intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ [f gura 6(A)].

Regla del punto medio La aproximación de orden N, basada en el punto medio, de $\int_a^b f(x)\,dx$ es:

$$\boxed{M_N = \Delta x\big(f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_N)\big)}$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ y $c_j = a + (j - \frac{1}{2})\Delta x$ es el punto medio de $[x_{j-1}, x_j]$.

UN APUNTE GRÁFICO M_N tiene una segunda interpretación gráf ca como la suma de las áreas de los trapecios tangenciales, es decir, trapecios cuyos lados superiores son tangentes a la gráf ca de $f(x)$ en los puntos medios c_j [f gura 6(B)]. El área de los trapecios es la misma que la de los rectángulos pues el lado superior de los trapecios pasa por el punto medio del lado superior del rectángulo, tal y como se ilustra en la f gura 5.

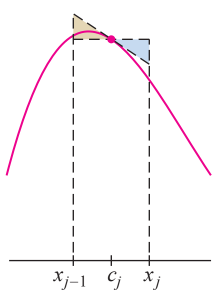
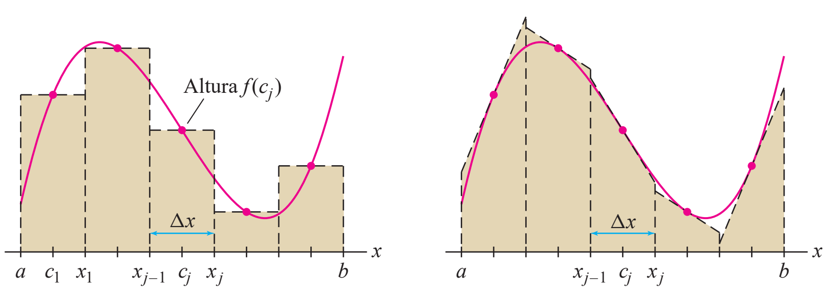


FIGURA 5 El rectángulo y y el trapecio tienen la misma área.



(A) M_N es la suma de las áreas de los rectángulos basados en el punto medio.

(B) M_N también es la suma de las áreas de los trapecios tangenciales.

FIGURA 6 Dos interpretaciones de M_N.

Cotas para el error

En las aplicaciones prácticas, es importante conocer la precisión de una aproximación numérica. Se def ne el error para T_N y para M_N como:

$$\text{Error}(T_N) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - T_N \right| \qquad \text{Error}(M_N) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - M_N \right|$$

Según el siguiente teorema, las magnitudes de estos errores están relacionadas con el valor de la *segunda* derivada $f''(x)$. Se proporciona una demostración del teorema 1 como suplemento, que se puede consultar desde el sitio web de acompañamiento del texto.

En la cota de error, se puede considerar K_2 como el valor máximo de $|f''(x)|$ en $[a, b]$, pero si no es posible o conveniente determinar el máximo explícitamente, considere K_2 como cualquier número que, pueda asegurar, es superior al máximo.

TEOREMA 1 Cota de error para T_N y para M_N Suponga que $f''(x)$ existe y que es continua. Sea K_2 un valor tal que $|f''(x)| \le K_2$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

$$\text{Error}(T_N) \le \frac{K_2(b-a)^3}{12N^2} \qquad \text{Error}(M_N) \le \frac{K_2(b-a)^3}{24N^2}$$

UN APUNTE GRÁFICO Observe que la cota de error cometido con M_N es la mitad de la cota de error para T_N, lo que sugiere que, en general, M_N es más preciso que T_N. ¿Por qué ambas cotas de error dependen de $f''(x)$? La segunda derivada mide la concavidad, por lo que si $|f''(x)|$ es grande, entonces f se curva demasiado y los trapecios no proporcionan una buena aproximación de la región por debajo de la gráf ca. De esta manera, tanto los errores cometidos con T_N como con M_N (que utiliza trapecios tangenciales) es probable que sean grandes (f gura 7).

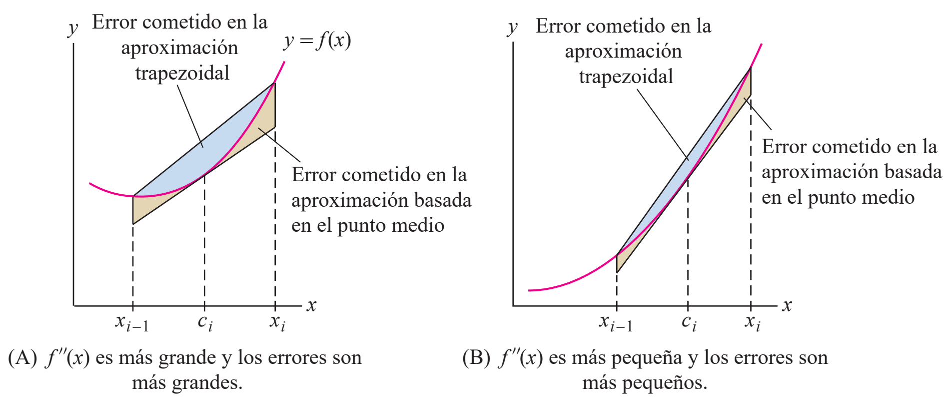


FIGURA 7 T_N y M_N son más precisas cuando $|f''(x)|$ es pequeña.

■ **EJEMPLO 2 Comprobación de la cota de error** Calcule T_6 y M_6 para $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

(a) Calcule las cotas de error.

(b) Calcule la integral de manera exacta y compruebe que las cotas de error son ciertas.

Solución Divida $[1, 4]$ en seis subintervalos de amplitud $\Delta x = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$. Utilizando los extremos y puntos medios que se muestran en la f gura 8, se obtiene

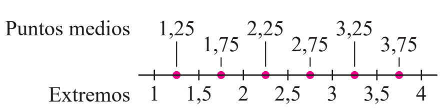


FIGURA 8 Intervalo $[1, 4]$ dividido en $N = 6$ subintervalos.

$$T_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{1} + 2\sqrt{1,5} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2,5} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3,5} + \sqrt{4}\right) \approx 4{,}661488$$

$$M_6 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1,25} + \sqrt{1,75} + \sqrt{2,25} + \sqrt{2,75} + \sqrt{3,25} + \sqrt{3,75}\right) \approx 4{,}669245$$

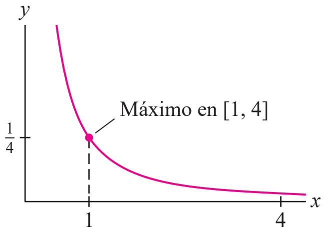


FIGURA 9 Gráf ca de $y = |f''(x)| = \frac{1}{4}x^{-3/2}$ para $f(x) = \sqrt{x}$.

En el ejemplo 2, el error cometido con T_6 es aproximadamente dos veces el error cometido con M_6. En la práctica, ésta es una situación común.

(a) Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Se debe determinar un valor K_2 tal que $|f''(x)| \le K_2$ para $1 \le x \le 4$. Se tiene que $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. El valor absoluto $|f''(x)| = \frac{1}{4}x^{-3/2}$ es decreciente en $[1, 4]$, por lo que su máximo se alcanza en $x = 1$ (f gura 9). De esta manera, se puede considerar $K_2 = |f''(1)| = \frac{1}{4}$. Según el teorema 1:

$$\text{Error}(T_6) \le \frac{K_2(b-a)^3}{12N^2} = \frac{\frac{1}{4}(4-1)^3}{12(6)^2} = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156$$

$$\text{Error}(M_6) \le \frac{K_2(b-a)^3}{24N^2} = \frac{\frac{1}{4}(4-1)^3}{24(6)^2} = \frac{1}{128} \approx 0{,}0078$$

(b) El valor exacto es $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$, de modo que los errores reales son:

$$\text{Error}(T_6) \approx \left|\frac{14}{3} - 4{,}661488\right| \approx 0{,}00518 \quad \text{(menor que la cota de error 0,0156)}$$

$$\text{Error}(M_6) \approx \left|\frac{14}{3} - 4{,}669245\right| \approx 0{,}00258 \quad \text{(menor que la cota de error 0,0078)}$$

Los errores reales son menores que las cotas de error, por lo que se cumple el teorema 1. ■

La cota de error se puede utilizar para determinar valores de N que proporcionen una precisión f jada.

■ **EJEMPLO 3 Obtención de la precisión requerida** Determine N tal que T_N aproxime a $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ con un error máximo de 10^{-4}.

Una manera rápida de hallar un valor de K_2 es representar gráficamente $f''(x)$ mediante un programa informático y determinar una cota de $|f''(x)|$ de forma visual, tal y como se procede en el ejemplo 3.

Solución Sea $f(x) = e^{-x^2}$. Para aplicar la cota de error, se debe determinar un valor K_2 tal que $|f''(x)| \le K_2$ para todo $x \in [0, 3]$. Se tiene que $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ y

$$f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Con la ayuda de un programa informático adecuado, se ha representado $f''(x)$ (f gura 10). La gráf ca muestra que el valor máximo de $|f''(x)|$ en $[0, 3]$ es $|f''(0)| = |-2| = 2$, por lo que se va a considerar $K_2 = 2$ en la cota de error:

$$\text{Error}(T_N) \le \frac{K_2(b-a)^3}{12N^2} = \frac{2(3-0)^3}{12N^2} = \frac{9}{2N^2}$$

El error será a lo sumo de 10^{-4} si:

$$\frac{9}{2N^2} \le 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad N^2 \ge \frac{9 \times 10^4}{2} \quad \Rightarrow \quad N \ge \frac{300}{\sqrt{2}} \approx 212{,}1$$

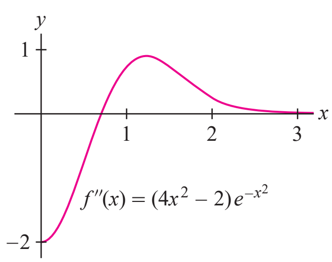
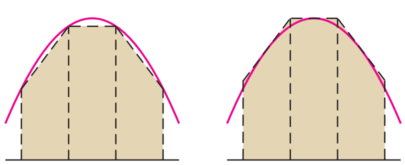


FIGURA 10 Gráf ca de la segunda derivada de $f(x) = e^{-x^2}$.

La conclusión es que el error cometido con T_{213} es menor que 10^{-4}. Se puede comprobar esta af rmación mediante un programa informático de cálculo simbólico. Con esta ayuda, se puede verif car que $T_{213} \approx 0{,}886207$, mientras que la integral, evaluada con una precisión de nueve cifras decimales es 0,886207348. Por tanto, el error es menor que 10^{-6}. ■

¿Se pueden mejorar las reglas del trapecio y del punto medio? Una pista es que el verdadero valor de la integral se encuentra entre T_N y M_N si $f(x)$ es o bien cóncava, o bien convexa. De hecho, se observa geométricamente (f gura 11) que:



(A) Trapecios utilizados para calcular T_N (B) Trapecios utilizados para calcular M_N

FIGURA 11 Si $f(x)$ es cóncava, entonces T_N es menor y M_N es mayor que la integral.

- $f(x)$ cóncava $\quad \Rightarrow \quad T_N \le \int_a^b f(x)\,dx \le M_N$
- $f(x)$ es convexa $\quad \Rightarrow \quad M_N \le \int_a^b f(x)\,dx \le T_N$

Esto sugiere que los errores cometidos con T_N y con M_N se pueden cancelar parcialmente si se considera su promedio.

La **regla de Simpson** aprovecha esta idea, pero tiene en cuenta que M_N es aproximadamente dos veces más preciso que T_N. Para minimizar el error, la regla de Simpson S_N se def ne como una **media ponderada** que asigna un peso a M_N dos veces mayor que el de T_N. Para N par, sea:

$$S_N = \frac{1}{3} T_{N/2} + \frac{2}{3} M_{N/2} \tag{1}$$

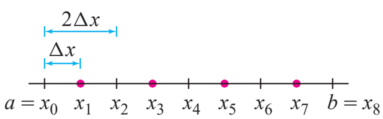


FIGURA 12 Se calcula S_8 utilizando ocho subintervalos. Los extremos pares se utilizan para calcular T_4, los extremos impares para M_4 y $S_8 = \frac{1}{3}T_4 + \frac{2}{3}M_4$.

Para obtener una fórmula para S_N, se divide $[a, b]$ en N subintervalos. Observe que los extremos etiquetados como pares dividen $[a, b]$ en $N/2$ subintervalos de longitud $2\Delta x$ (recuerde que N es par):

$$[x_0, x_2], \quad [x_2, x_4], \quad \dots, \quad [x_{N-2}, x_N] \tag{2}$$

Los *extremos* de estos intervalos son $x_0, x_2, \dots, x_N$. Se utilizan para calcular $T_{N/2}$. Los *puntos medios* $x_1, x_3, \dots, x_{N-1}$ se utilizan para calcular $M_{N/2}$ (vea la f gura 12 para el caso $N = 8$):

$$T_{N/2} = \frac{1}{2}(2\Delta x)(y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \cdots + 2y_{N-2} + y_N)$$

$$M_{N/2} = 2\Delta x(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{N-1}) = \Delta x(2y_1 + 2y_3 + 2y_5 + \cdots + 2y_{N-1})$$

De esta manera:

$$S_N = \frac{1}{3}T_{N/2} + \frac{2}{3}M_{N/2} = \frac{1}{3}\Delta x(y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \cdots + 2y_{N-2} + y_N) +$$
$$+ \frac{1}{3}\Delta x(4y_1 + 4y_3 + 4y_5 + \cdots + 4y_{N-1})$$

Patrón de los coeficientes en S_N:

$$1, 4, 2, 4, 2, 4, \dots, 4, 2, 4, 1$$

Los coeficientes intermedios alternan $4, 2, 4, 2, \dots, 2, 4$ (empezando y finalizando en 4).

La regla de Simpson Si N es par, la aproximación de orden N a $\int_a^b f(x)\,dx$ según la regla de Simpson es:

$$S_N = \frac{1}{3}\Delta x[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{N-3} + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N] \tag{3}$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ y $y_j = f(a + j\Delta x)$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Tanto T_N como M_N proporcionan el valor exacto de la integral para todo N cuando $f(x)$ es una función lineal (problema 59). Sin embargo, de todas las combinaciones de $T_{N/2}$ y $M_{N/2}$, únicamente la combinación particular $S_N = \frac{1}{3}T_{N/2} + \frac{2}{3}M_{N/2}$ proporciona el valor exacto para cualquier polinomio cuadrático (problemas 60 y 61). De hecho, S_N también es exacta para polinomios cúbicos (problema 62).

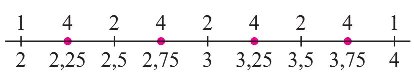


FIGURA 13 Coef cientes para S_8 en $[2, 4]$ y el correspondiente extremo, por debajo de ellos.

■ **EJEMPLO 4** Utilice la regla de Simpson con $N = 8$ para aproximar $\int_2^4 \sqrt{1 + x^3}\,dx$.

Solución Se tiene que $\Delta x = \frac{4-2}{8} = \frac{1}{4}$. La f gura 13 muestra los extremos y los coef cientes necesarios para calcular S_8 utilizando la ec. (3):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\left[\sqrt{1 + 2^3} + 4\sqrt{1 + 2{,}25^3} + 2\sqrt{1 + 2{,}5^3} + 4\sqrt{1 + 2{,}75^3} + 2\sqrt{1 + 3^3} +\right.$$
$$\left. + 4\sqrt{1 + 3{,}25^3} + 2\sqrt{1 + 3{,}5^3} + 4\sqrt{1 + 3{,}75^3} + \sqrt{1 + 4^3}\right] \approx$$
$$\approx \frac{1}{12}[3 + 4(3{,}52003) + 2(4{,}07738) + 4(4{,}66871) + 2(5{,}2915) +$$
$$+ 4(5{,}94375) + 2(6{,}62382) + 4(7{,}33037) + 8{,}06226] \approx 10{,}74159$$ ■

La precisión de la regla de Simpson es impresionante. Mediante un programa informático de cálculo simbólico, se obtuvo que el error cometido con la aproximación del ejemplo 4 era menor que 3×10^{-6}.

EJEMPLO 5 Estimación de integrales con una tabla de valores Se registra la velocidad (en km/h) de un avión Piper Cub que viaja hacia el oeste en cada minuto de los primeros diez de vuelo. Utilice la regla de Simpson para estimar la distancia recorrida.

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$ (km/h)	0	80	100	128	144	160	152	136	128	120	136

Solución La distancia recorrida es la integral de la velocidad. Se convertirán los datos de minutos a horas, porque la velocidad se expresa en km/h. Se aplica la regla de Simpson con un número de intervalos $N = 10$ y longitud de cada intervalo igual a $\Delta t = \frac{1}{60}$ horas:

$$S_{10} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{60}\right)(0 + 4(80) + 2(100) + 4(128) + 2(144) + 4(160)+ \\ + 2(152) + 4(136) + 2(128) + 4(120) + 136) \approx 21{,}2 \text{ km}$$

La distancia recorrida es aproximadamente de 21,2 km (f gura 14). ■

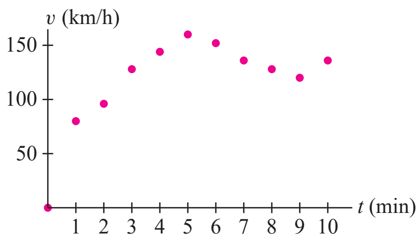


FIGURA 14 Velocidad de un Piper Cub.

A continuación se enuncia (sin demostración) la cota de error para la regla de Simpson:

$$\text{Error}(S_N) = \left| \int_a^b f(x) - S_N(f)\, dx \right|$$

Este error involucra la cuarta derivada que, se asume, existe y es continua.

Aunque la regla de Simpson proporciona buenas aproximaciones, en los programas informáticos de cálculo simbólico se encuentran implementadas técnicas más sofisticadas. Éstas se estudian en un área de las matemáticas que se denomina análisis numérico.

TEOREMA 2 Cota de error para S_N Sea K_4 un valor tal que $|f^{(4)}(x)| \le K_4$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

$$\boxed{\text{Error}(S_N) \le \frac{K_4(b-a)^5}{180N^4}}$$

EJEMPLO 6 Calcule S_8 para $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$. A continuación:

(a) Halle una cota para el error cometido con S_8.

(b) Determine N tal que el error cometido con S_N sea como mucho de 10^{-6}.

Solución La amplitud es $\Delta x = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$ y los extremos de la partición de $[1, 3]$ son $1, 1{,}25, 1{,}5, \dots, 2{,}75, 3$. Utilizando la ec. (3) con $f(x) = x^{-1}$, se obtiene:

$$S_8 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{1}{1} + \frac{4}{1{,}25} + \frac{2}{1{,}5} + \frac{4}{1{,}75} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2{,}25} + \frac{2}{2{,}5} + \frac{4}{2{,}75} + \frac{1}{3}\right] \approx \\ \approx 1{,}09873$$

(a) La cuarta derivada $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$ es decreciente, por lo que el máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en $[1, 3]$ es $|f^{(4)}(1)| = 24$. Así, se utilizará la cota de error con $K_4 = 24$:

$$\text{Error}(S_N) \le \frac{K_4(b-a)^5}{180N^4} = \frac{24(3-1)^5}{180N^4} = \frac{64}{15N^4}$$

$$\text{Error}(S_8) \le \frac{K_4(b-a)^5}{180(8)^4} = \frac{24(3-1)^5}{180(8^4)} \approx 0{,}001$$

Con un programa informático de cálculo simbólico, se obtiene:

$$S_{46} \approx 1{,}09861241$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \ln 3 \approx 1{,}09861229$$

Efectivamente el error es menor que 10^{-6}.

(b) El error será a lo sumo de 10^{-6} si N verif ca:

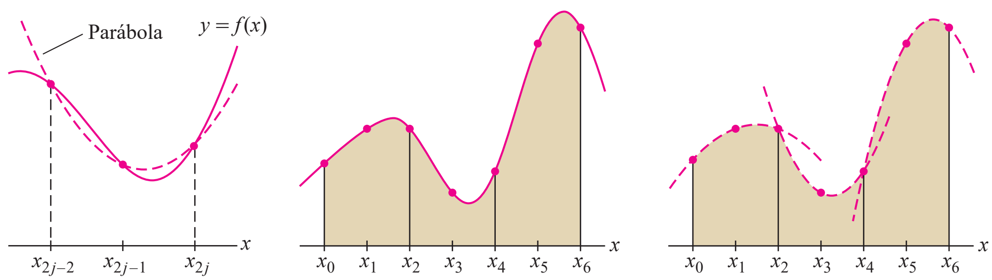
$$\text{Error}(S_N) = \frac{64}{15N^4} \le 10^{-6}$$

En otras palabras:

$$N^4 \ge 10^6\left(\frac{64}{15}\right) \qquad \text{o} \qquad N \ge \left(\frac{10^6 \cdot 64}{15}\right)^{1/4} \approx 45{,}45$$

De esta manera, se debe considerar $N = 46$ (vea el comentario al margen). ■

UN APUNTE GRÁFICO La regla de Simpson tiene una interpretación en términos de parábolas (f gura 15). Existe una única parábola que pasa por la gráf ca de $f(x)$ en los tres puntos $x_{2j-2}, x_{2j-1}, x_{2j}$ [f gura 15(A)]. En el intervalo $[x_{2j-2}, x_{2j}]$, el área por debajo de la parábola, aproxima al área por debajo de la gráf ca. La regla de Simpson S_N es igual a la suma de esas aproximaciones parabólicas (vea los problemas 60-61).



(A) Única parábola por tres puntos.
(B) Gráfica de $y = f(x)$
(C) Arcos parabólicos que se usan en la regla de Simpson.

FIGURA 15 La regla de Simpson aproxima la gráf ca por medio de arcos parabólicos.

8.7 RESUMEN

- Considere tres aproximaciones numéricas a $\int_a^b f(x)dx$: la *regla del trapecio* T_N, la *regla del punto medio* M_N y la *regla de Simpson* S_N (para N par).

$$T_N = \frac{1}{2}\Delta x(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{N-1} + y_N)$$

$$M_N = \Delta x(f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_N)) \qquad \left(c_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

$$S_N = \frac{1}{3}\Delta x[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{N-3} + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N]$$

donde $\Delta x = (b-a)/N$ y $y_j = f(a + j\,\Delta x)$.

- T_N es igual a la suma de las áreas de los trapecios que se obtienen uniendo los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ mediante segmentos rectilíneos.
- M_N tiene dos interpretaciones geométricas: se puede interpretar como la suma de las áreas de los rectángulos basados en los puntos medios, o como la suma de las áreas de los trapecios tangenciales.
- S_N es igual a $\frac{1}{3}T_{N/2} + \frac{2}{3}M_{N/2}$.
- Cotas de error:

$$\text{Error}(T_N) \le \frac{K_2(b-a)^3}{12N^2} \qquad \text{Error}(M_N) \le \frac{K_2(b-a)^3}{24N^2} \qquad \text{Error}(S_N) \le \frac{K_4(b-a)^5}{180N^4}$$

donde K_2 es cualquier número tal que $|f''(x)| \le K_2$ para todo $x \in [a, b]$ y K_4 es cualquier número tal que $|f^{(4)}(x)| \le K_4$ para todo $x \in [a, b]$.

8.8 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es el valor de T_1 y de T_2 para una función en $[0, 2]$ tal que $f(0) = 3$, $f(1) = 4$ y $f(2) = 3$?

2. ¿Para qué gráf ca de las de la f gura 16 *sobrestimará* T_N la integral? ¿Y para M_N?

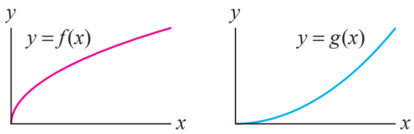


FIGURA 16

3. ¿Cuál es el error cometido al aplicar la regla del trapecio a una función lineal? Justif que su respuesta gráf camente.

4. ¿Cuál es el error máximo que se puede cometer al utilizar T_4 para aproximar

$$\int_0^3 f(x)\,dx$$

donde $|f''(x)| \le 2$ para todo x.

5. ¿Cuáles son las dos interpretaciones gráf cas de la regla del punto medio?

Problemas

En los problemas 1-12, calcule T_N y M_N para el valor de N indicado.

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx, \quad N = 4$

2. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx, \quad N = 4$

3. $\displaystyle\int_1^4 x^3\,dx, \quad N = 6$

4. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^4+1}\,dx, \quad N = 5$

5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x}, \quad N = 6$

6. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}, \quad N = 5$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx, \quad N = 6$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec x\,dx, \quad N = 6$

9. $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx, \quad N = 5$

10. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}, \quad N = 5$

11. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad N = 5$

12. $\displaystyle\int_{-2}^1 e^{x^2}\,dx, \quad N = 6$

En los problemas 13-22, calcule el valor de S_N dado por la regla de Simpson, para el valor de N indicado.

13. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx, \quad N = 4$

14. $\displaystyle\int_3^5 (9 - x^2)\,dx, \quad N = 4$

15. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^4+1}, \quad N = 6$

16. $\displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)\,dx, \quad N = 6$

17. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad N = 4$

18. $\displaystyle\int_1^2 e^{-x}\,dx, \quad N = 6$

19. $\displaystyle\int_1^4 \ln x\,dx, \quad N = 8$

20. $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^4+1}\,dx, \quad N = 8$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan\theta\,d\theta, \quad N = 10$

22. $\displaystyle\int_0^2 (x^2+1)^{-1/3}\,dx, \quad N = 10$

En los problemas 23-26, calcule la aproximación al volumen del sólido de revolución obtenido rotando la gráf ca respecto al eje que se indica.

23. $y = \cos x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$; eje x; M_8

24. $y = \cos x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$; eje y; S_8

25. $y = e^{-x^2}$; $[0, 1]$; eje x; T_8

26. $y = e^{-x^2}$; $[0, 1]$; eje y; S_8

27. Se registra la velocidad de un avión durante un periodo de 1 hora a intervalos de 5 minutos. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos, en millas por hora:

550	575	600	580	610	640	625
595	590	620	640	640	630	

Utilice la regla de Simpson para estimar la distancia recorrida en esta hora.

28. Use la regla de Simpson para determinar la temperatura media en un museo para un periodo de 3 horas, si las temperaturas (en grados Celsius), registradas a intervalos de 15 minutos, son:

21	21,3	21,5	21,8	21,6	21,2	20,8
20,6	20,9	21,2	21,1	21,3	21,2	

29. **Tiempos de llegada de un Tsunami** Los científ cos estiman el tiempo de llegada de tsunamis (ondas sísmicas oceánicas) en función del punto de origen P y de la profundidad del océano. La velocidad s de un tsunami, en millas por hora, es aproximadamente $s = \sqrt{15d}$, donde d es la profundidad del océano en pies.

(a) Sea $f(x)$ la profundidad del océano a una distancia de x millas de P (en la dirección de la costa). Razone, utilizando sumas de Riemann, que el tiempo T necesario para que el tsunami recorra M millas hacia la costa es:

$$T = \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{15 f(x)}}$$

(b) Use la regla de Simpson para estimar T si $M = 1000$ y la profundidad del océano (en pies), medida a intervalos de 100 millas, empezando en P, son:

13 000	11 500	10 500	9000	8500	
7000	6000	4400	3800	3200	2000

30. Use S_8 para estimar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, considerando que el valor de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$ es 1.

31. Calcule T_6 para la integral $I = \int_0^2 x^3\,dx$.

(a) ¿Es T_6 demasiado grande o demasiado pequeño? Justif que gráf camente su respuesta.

(b) Pruebe que $K_2 = |f''(2)|$ se puede utilizar en la cota de error y halle una cota para el error.

(c) Evalúe I y compruebe que el error real es menor que la cota que ha obtenido en (b).

32. Calcule M_4 para la integral $I = \int_0^1 x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$.

(a) GU Con la ayuda de una representación gráf ca de $f''(x)$, pruebe que se puede utilizar $K_2 = 3{,}2$ para la cota del error y halle una cota para el error.

(b) SAC Evalúe I numéricamente y compruebe que el error real es menor que la cota que ha obtenido en (a).

En los problemas 33-36, determine si T_N o M_N subestiman o sobrestiman la integral, y halle una cota para el error (pero no calcule T_N ni M_N).

33. $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$, T_{10}

34. $\int_0^2 e^{-x/4}\,dx$, T_{20}

35. $\int_1^4 \ln x\,dx$, M_{10}

36. $\int_0^{\pi/4} \cos x$, M_{20}

SAC *En los problemas 37-40, use la cota de error para hallar un valor de N para el que Error $(T_N) \le 10^{-6}$. Si dispone de un programa informático de cálculo simbólico, calcule la correspondiente aproximación y conf rme que el error cumple la cota establecida.*

37. $\int_0^1 x^4\,dx$

38. $\int_0^3 (5x^4 - x^5)\,dx$

39. $\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx$

40. $\int_0^3 e^{-x}\,dx$

41. Calcule la cota del error cometido en las aproximaciones T_{10} y M_{10} de $\int_0^3 (x^3+1)^{-1/2}\,dx$, utilizando la f gura 17 para determinar un valor de K_2. A continuación, halle un valor de N tal que el error cometido con M_N sea, a lo sumo, de 10^{-6}.

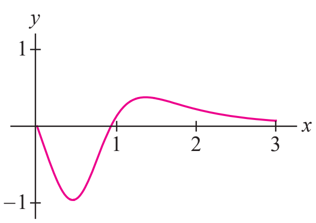


FIGURA 17 Gráf ca de $f''(x)$, donde $f(x) = (x^3+1)^{-1/2}$.

42. **(a)** Calcule S_6 para la integral $I = \int_0^1 e^{-2x}\,dx$.

(b) Pruebe que se puede utilizar $K_4 = 16$ para la cota de error y calcule dicha cota.

(c) Evalúe I y compruebe que el error real es menor que la cota de error que ha obtenido en (b).

43. Calcule S_8 para $\int_1^5 \ln x\,dx$ y calcule la cota de error. A continuación halle un valor de N para el que el error cometido al considerar S_N sea, a lo sumo, de 10^{-6}.

44. Halle una cota del error cometido en la aproximación S_{10} a $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ (use la f gura 18 para determinar un valor de K_4). A continuación halle un valor de N para el que el error cometido al considerar S_N sea, a lo sumo, de 10^{-6}.

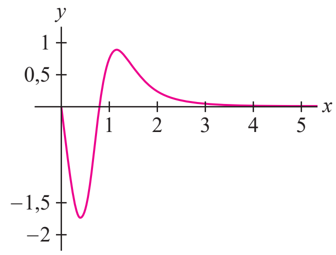


FIGURA 18 Gráf ca de $f^{(4)}(x)$, donde $f(x) = e^{-x^2}$.

45. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para obtener y representar gráf camente $f^{(4)}(x)$ para $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ y halle una cota del error cometido en la aproximación S_{40} de $\int_0^5 f(x)\,dx$.

46. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para obtener y representar gráf camente $f^{(4)}(x)$ para $f(x) = \tan x - \sec x$, y halle una cota del error cometido en la aproximación S_{40} de

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx.$$

En los problemas 47-50, utilice la cota de error para hallar un valor N para el que Error $(S_N) \le 10^{-9}$.

47. $\int_1^6 x^{4/3}\,dx$

48. $\int_0^4 xe^x\,dx$

49. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

50. $\int_1^4 \mathrm{sen}(\ln x)\,dx$

51. SAC Pruebe que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ [aplique la ec. (3) de la sección 7.8].

(a) Use un programa informático de cálculo simbólico para representar gráf camente $f^{(4)}(x)$ para $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ y determine su máximo en $[0,1]$.

(b) Halle un valor de N tal que el error cometido al aproximar la integral por S_N sea, a lo sumo, de 10^{-6}. Calcule la correspondiente aproximación y verif que que ha calculado $\frac{\pi}{4}$ con cuatro cifras decimales de precisión, como mínimo.

52. Sea $J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ y $J_N = \int_0^N e^{-x^2}\,dx$. Aunque e^{-x^2} no tiene una primitiva elemental, se sabe que $J = \sqrt{\pi}/2$. Sea T_N la aproximación trapezoidal de orden N de J_N. Calcule T_4 y pruebe que T_4 aproxima a J con tres decimales de precisión.

53. Sea $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$ y $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

(a) Compruebe que $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\,\mathrm{sen}(x^2)$. A continuación, pruebe que $|f''(x)| \le 6$ para $x \in [0,1]$. *Indicación:* Observe que $|2\cos(x^2)| \le 2$ y $|4x^2\,\mathrm{sen}(x^2)| \le 4$ para $x \in [0,1]$.

(b) Pruebe que Error (M_N) es, a lo sumo, $\frac{1}{4N^2}$.

(c) Determine N tal que $|I - M_N| \le 10^{-3}$.

54. SAC La cota de error para M_N es proporcional a $1/N^2$, por lo que el error disminuye en $\frac{1}{4}$ si N se aumenta a $2N$. Calcule el error real cometido con M_N para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y $N = 4, 8, 16, 32$ y 64. ¿Considera que el error disminuye en $\frac{1}{4}$ al duplicar N?

55. SAC Observe que la cota de error para T_N (que tiene un 12 en el denominador) es dos veces mayor que la cota de error de para M_N (que tiene un 24 en el denominador). Calcule el error real cometido con T_N para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y $N = 4, 8, 16, 32$ y 64 y compare con los resultados del problema 54. ¿Considera que el error real cometido con T_N es aproximadamente dos veces mayor que el error cometido con M_N en este caso?

56. SAC Explique por qué la cota de error para S_N decrece en $\frac{1}{16}$ si N aumenta a $2N$. Calcule el error real cometido con S_N para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y $N = 4, 8, 16, 32$ y 64. ¿Considera que el error real cometido disminuye en $\frac{1}{16}$ cuando se duplica N?

57. Compruebe que S_2 da como resultado el valor exacto de
$\int_0^1 (x - x^3)\,dx.$

58. Compruebe que S_2 da como resultado el valor exacto de
$\int_a^b (x - x^3)\,dx$ para todo $a < b$.

Problemas avanzados

59. Pruebe que si $f(x) = rx + s$ es una función lineal (r, s constantes), entonces $T_N = \int_a^b f(x)\,dx$ para todo N y extremos a, b.

60. Pruebe que si $f(x) = px^2 + qx + r$ es un polinomio cuadrático, entonces $S_2 = \int_a^b f(x)\,dx$. En otras palabras, pruebe que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

donde $y_0 = f(a)$, $y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y $y_2 = f(b)$. *Indicación:* Pruebe este resultado primero para $f(x) = 1, x, x^2$ y aplique linealidad.

61. Para N par, divida $[a, b]$ en N subintervalos de longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$. Sean $x_j = a + j\,\Delta x$, $y_j = f(x_j)$ y

$$S_2^{2j} = \frac{b-a}{3N}(y_{2j} + 4y_{2j+1} + y_{2j+2})$$

(a) Pruebe que S_N es la suma de las aproximaciones en los intervalos $[x_{2j}, x_{2j+2}]$, es decir, $S_N = S_2^0 + S_2^2 + \cdots + S_2^{N-2}$.

(b) Según el problema 60, $S_2^{2j} = \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)\,dx$ si $f(x)$ es un polinomio cuadrático. Aplique (a) para probar que S_N es exacta *para todo* N si $f(x)$ es un polinomio cuadrático.

62. Pruebe que S_2 también proporciona el valor exacto para $\int_a^b x^3\,dx$ y concluya, como en el problema 61, que S_N es exacta para cualquier polinomio cúbico. Proporcione un contraejemplo donde se muestre que S_2 no es exacta para integrales de x^4.

63. Utilice la cota de error de S_N para obtener otra demostración de que la regla de Simpson es exacta para cualquier polinomio cúbico.

64. **A veces, la regla de Simpson no funciona bien** Calcule M_{10} y S_{10} para la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, cuyo valor se sabe que es $\frac{\pi}{4}$ (una cuarta parte del área del círculo unitario).

(a) Se suele esperar que S_N sea más preciso que M_N. Cuál de los dos resulta más preciso en este caso: ¿M_{10} o S_{10}?

(b) ¿Cómo explica el resultado del apartado (a)? *Indicación:* Las cotas de error no son válidas porque $|f''(x)|$ y $|f^{(4)}(x)|$ tienden a $+\infty$ cuando $x \to 1$, y $|f^{(4)}(x)|$ tiende a inf nito más rápido.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Relacione las integrales (a)-(e) con sus primitivas (i)-(v) sobre la base de la forma general (no evalúe las integrales).

(a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 - 4}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{(2x+9)\,dx}{x^2+4}$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 - 1}}$

(e) $\displaystyle\int \frac{16\,dx}{x(x-4)^2}$

(i) $\sec^{-1} 4x + C$

(ii) $\log|x| - \log|x-4| - \dfrac{4}{x-4} + C$

(iii) $\dfrac{1}{30}(3\cos^5 x - 3\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x - 7\cos^3 x) + C$

(iv) $\dfrac{9}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{2} + \ln(x^2+4) + C$

2. Evalúe $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x+2}$ de dos maneras: utilizando sustitución y por el método de las fracciones parciales.

En los problemas 3-12, resuelva por el método indicado.

3. $\displaystyle\int \cos^3\theta \operatorname{sen}^8\theta\,d\theta$ [exprese $\cos^3\theta$ como $\cos\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta)$]

4. $\displaystyle\int xe^{-12x}\,dx$ (integración por partes)

5. $\displaystyle\int \sec^3\theta \tan^4\theta\,d\theta$ (identidad trigonométrica, fórmula de reducción)

6. $\displaystyle\int \frac{4x+4}{(x-5)(x+3)}\,dx$ (fracciones parciales)

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)^{3/2}}\,dx$ (sustitución trigonométrica)

8. $\int (1+x^2)^{-3/2}\,dx$ (sustitución trigonométrica)

9. $\int \frac{dx}{x^{3/2}+x^{1/2}}$ (sustitución)

10. $\int \frac{dx}{x+x^{-1}}$ (reescriba el integrando)

11. $\int x^{-2}\tan^{-1} x\,dx$ (integración por partes)

12. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$ (complete el cuadrado, sustitución, fracciones parciales)

En los problemas 13-64, resuelva utilizando un método adecuado o una combinación de métodos.

13. $\int_0^1 x^2 e^{4x}\,dx$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

15. $\int \cos^9 6\theta \operatorname{sen}^3 6\theta\,d\theta$

16. $\int \sec^2\theta \tan^4\theta\,d\theta$

17. $\int \frac{(6x+4)\,dx}{x^2-1}$

18. $\int_4^9 \frac{dt}{(t^2-1)^2}$

19. $\int \frac{d\theta}{\cos^4\theta}$

20. $\int \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$

21. $\int_0^1 \ln(4-2x)\,dx$

22. $\int (\ln(x+1))^2\,dx$

23. $\int \operatorname{sen}^5\theta\,d\theta$

24. $\int \cos^4(9x-2)\,dx$

25. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx$

26. $\int \operatorname{sen} 2x \sec^2 x\,dx$

27. $\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\,dx$

28. $\int (\sec x+\tan x)^2\,dx$

29. $\int \operatorname{sen}^5\theta\cos^3\theta\,d\theta$

30. $\int \cot^3 x \csc x\,dx$

31. $\int \cot^2 x \csc^2 x\,dx$

32. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cot^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$

33. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x\csc^3 x\,dx$

34. $\int_4^6 \frac{dt}{(t-3)(t+4)}$

35. $\int \frac{dt}{(t-3)^2(t+4)}$

36. $\int \sqrt{x^2+9}\,dx$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

38. $\int_8^{27} \frac{dx}{x+x^{2/3}}$

39. $\int \frac{dx}{x^{3/2}+ax^{1/2}}$

40. $\int \frac{dx}{(x-b)^2+4}$

41. $\int \frac{(x^2-x)\,dx}{(x+2)^3}$

42. $\int \frac{(7x^2+x)\,dx}{(x-2)(2x+1)(x+1)}$

43. $\int \frac{16\,dx}{(x-2)^2(x^2+4)}$

44. $\int \frac{dx}{(x^2+25)^2}$

45. $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$

46. $\int \frac{dx}{x^2+8x+4}$

47. $\int \frac{(x^2-x)\,dx}{(x+2)^3}$

48. $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$

49. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$

50. $\int \frac{dx}{(x^2+5)^{3/2}}$

51. $\int (x+1)e^{4-3x}\,dx$

52. $\int x^{-2}\tan^{-1} x\,dx$

53. $\int x^3\cos(x^2)\,dx$

54. $\int x^2(\ln x)^2\,dx$

55. $\int x\tanh^{-1} x\,dx$

56. $\int \frac{\tan^{-1} t\,dt}{1+t^2}$

57. $\int \ln(x^2+9)\,dx$

58. $\int (\operatorname{sen} x)(\cosh x)\,dx$

59. $\int_0^1 \cosh 2t\,dt$

60. $\int \operatorname{senh}^3 x\cosh x\,dx$

61. $\int \coth^2(1-4t)\,dt$

62. $\int_{-0,3}^{0,3} \frac{dx}{1-x^2}$

63. $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

64. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{x^2}$

65. Use la sustitución $u = \tanh t$ para resolver $\int \frac{dt}{\cosh^2 t+\operatorname{senh}^2 t}$.

66. Halle el volumen de revolución, respecto al eje y, de la región limitada por $y = \ln x$ e $y = (\ln x)^2$.

67. Sea $I_n = \int \frac{x^n\,dx}{x^2+1}$.

(a) Demuestre que $I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$.

(b) Aplique (a) para calcular I_n para $0 \le n \le 5$.

(c) Pruebe que, en general:

$$I_{2n+1} = \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-2}}{2n-2} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^2}{2} + (-1)^n\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$
$$I_{2n} = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}x + (-1)^n\tan^{-1} x + C$$

68. Sea $J_n = \int x^n e^{-x^2/2}\,dx$.

(a) Pruebe que $J_1 = -e^{-x^2/2}$.

(b) Demuestre que $J_n = -x^{n-1}e^{-x^2/2} + (n-1)J_{n-2}$.

(c) Aplique (a) y (b) para calcular J_3 y J_5.

69. Calcule $p(X \leq 1)$, donde X es una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad $p(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.

70. Pruebe que $p(x) = \frac{1}{4}e^{-t/2} + \frac{1}{6}e^{-t/3}$ es una función de densidad de probabilidad, y halle su media.

71. Determine una constante C tal que $p(x) = Cx^3e^{-x^2}$ sea una densidad de probabilidad, y calcule $p(0 \leq X \leq 1)$.

72. El intervalo de tiempo entre la llegada de pacientes en un servicio de urgencias hospitalarias es una variable aleatoria con función de densidad exponencial $p(x) = 0{,}125e^{-0{,}125t}$ (t en minutos). ¿Cuál es el tiempo medio entre la llegada de pacientes? ¿Cuál es la probabilidad de que dos pacientes lleguen al servicio con una diferencia de 3 minutos entre ellos?

73. Calcule las siguientes probabilidades, suponiendo que X sigue una distribución normal con media $\mu = 40$ y desviación estándar $\sigma = 5$.

(a) $p(X \geq 45)$ **(b)** $p(0 \leq X \leq 40)$

74. Según la teoría cinética, las moléculas de la materia común se encuentran en constante movimiento aleatorio. La energía E de una molécula es una variable aleatoria con función de densidad $p(E) = \frac{1}{kT}e^{-E/(kT)}$, donde T es la temperatura (en grados kelvin) y k es la constante de Boltzmann. Calcule la energía cinética *media*, $\overline{E}$, en términos de k y T.

En los problemas 75-84, determine si la integral impropia converge y, en caso afirmativo, evalúe la integral.

75. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$ **76.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^{2/3}}$

77. $\displaystyle\int_9^{+\infty} \frac{dx}{x^{12/5}}$ **78.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cot\theta\, d\theta$

79. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(2x+3)}$ **80.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} (5+x)^{-1/3}\, dx$

81. $\displaystyle\int_2^5 (5-x)^{-1/3}\, dx$ **82.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(2x+3)}$

83. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (5+x)^{-1/3} dx$ **84.** $\displaystyle\int_2^5 (5-x)^{-1/3} dx$

En los problemas 85-90, utilice el test de comparación para determinar si la integral impropia converge o bien diverge.

85. $\displaystyle\int_8^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4}$ **86.** $\displaystyle\int_8^{+\infty} (\text{sen}^2\, x)e^{-x}\, dx$

87. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4+\cos^2 x}$ **88.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/3}+x^{2/3}}$

89. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}+x^{2/3}}$ **90.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^3}\, dx$

91. Calcule el volumen del sólido infinito obtenido por revolución de la región por debajo de $y = (x^2+1)^{-2}$ para $0 \leq x < +\infty$ respecto al eje y.

92. Sea R la región por debajo de la gráfica de $y = (x+1)^{-1}$ para $0 \leq x < +\infty$. ¿Cuál de las siguientes cantidades es finita?

(a) El área de R.

(b) El volumen del sólido que se obtiene rotando R respecto al eje x.

(c) El volumen del sólido que se obtiene rotando R respecto al eje y.

93. Pruebe que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\, dx$ converge para todo $n > 0$. *Indicación:* En primer lugar, observe que $x^n e^{-x^2} < x^n e^{-x}$ para $x > 1$. A continuación, pruebe que $x^n e^{-x} < x^{-2}$ para x suficientemente grande.

94. Calcule la transformada de Laplace $Lf(s)$ de la función $f(x) = x$ para $s > 0$. Vea los problemas 86-89 en la sección 8.6 para la definición de $Lf(s)$.

95. Calcule la transformada de Laplace $Lf(s)$ de la función $f(x) = x^2e^{\alpha x}$ para $s > \alpha$.

96. Estime $\displaystyle\int_2^5 f(x)\, dx$ calculando T_2, M_3, T_6 y S_6 para una función $f(x)$ de la que se dispone la siguiente tabla de valores:

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$-\frac{3}{2}$	-4	-2

97. Determine si las aproximaciones M_N y T_N son mayores o menores que la integral:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{x^2}$ **(d)** $\displaystyle\int_2^5 \ln x\, dx$

98. Se registró la tasa de precipitación por lluvia (en pulgadas por hora) cada hora, durante un periodo de 10 horas de tormenta, con los siguientes resultados:

0 0,41 0,49 0,32 0,3 0,23

0,09 0,08 0,05 0,11 0,12

Use la regla de Simpson para estimar la precipitación total de lluvia durante el periodo de 10 horas.

En los problemas 99-104, calcule la aproximación, que se indica, a la integral.

99. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx, \quad M_5$ **100.** $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{6t^3+1}\, dt, \quad T_3$

101. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\text{sen}\,\theta}\, d\theta, \quad M_4$ **102.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x^3+1}, \quad T_6$

103. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx, \quad S_4$ **104.** $\displaystyle\int_5^9 \cos(x^2)\, dx, \quad S_8$

105. La siguiente tabla proporciona el área $A(h)$ de una sección transversal horizontal de una cierta laguna a profundidad h. Utilice la regla del trapecio para estimar el volumen V de la laguna (figura 1).

h (ft)	$A(h)$ (acres)	h (ft)	$A(h)$ (acres)
0	2,8	10	0,8
2	2,4	12	0,6
4	1,8	14	0,2
6	1,5	16	0,1
8	1,2	18	0

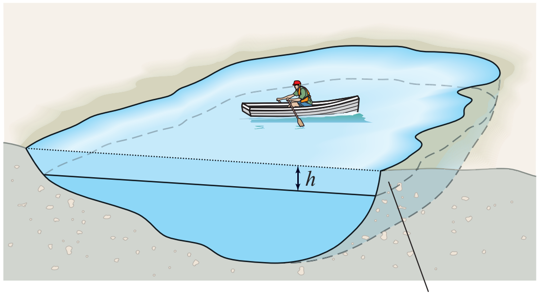


FIGURA 1

106. Suponga que la segunda derivada de la función $A(h)$ del problema 105 cumple $|A''(h)| \leq 1{,}5$. Utilice la cota de error para hallar el error máximo que puede cometer en su estimación del volumen V de la laguna.

107. Halle una cota para el error $\left|M_{16} - \int_1^3 x^3\,dx\right|$.

108. GU Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$. Halle una cota para el error

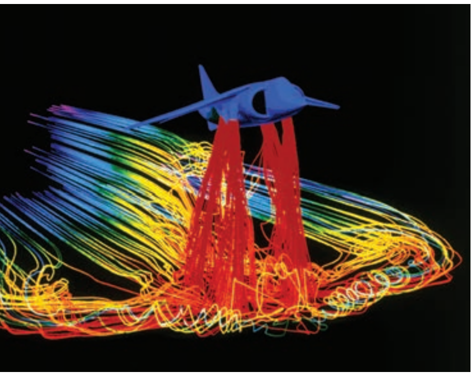
$$\left|T_{24} - \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx\right|$$

Indicación: Halle una cota K_2 para $|f''(x)|$ representando $f''(x)$ con un programa informático adecuado.

109. Halle un valor de N tal que:

$$\left|M_N - \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx\right| \leq 10^{-4}$$

110. Halle un valor de N tal que el error cometido al aproximar $\int_2^5 x^{-1/4}\,dx$ por S_N sea, a lo sumo, de 10^{-2} (pero no calcule S_N).



Esta simulación de la NASA, que representa las líneas de corriente del aire caliente que sale de las toberas de un jet Harrier durante un despegue vertical, se basa en una rama de las matemáticas denominada mecánica de f uidos computacional.

9 OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL Y POLINOMIOS DE TAYLOR

Las primeras tres secciones de este capítulo tratan sobre aspectos adicionales de la integración, incluyendo dos importantes aplicaciones en el ámbito de la física. En la última sección se introducen los polinomios de Taylor, las generalizaciones de orden superior de la aproximación lineal. Los polinomios de Taylor ilustran perfectamente la potencia de cálculo diferencial para obtener valiosa información sobre las funciones.

9.1 Longitud de arco y área de una superficie

Tal y como se ha visto anteriormente, las integrales permiten calcular "cantidades totales" (como una distancia recorrida, masa total, coste total, etc.). Otra cantidad de este tipo es la longitud de una curva (también denominada **longitud de arco**). Se deducirá una fórmula para la longitud de arco por medio de nuestro procedimiento estándar: aproximación seguida de paso al límite.

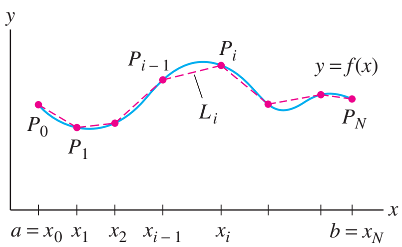


FIGURA 1 Una aproximación poligonal L a $y = f(x)$.

Considere la gráf ca de $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Seleccione una partición P de $[a, b]$ en N subintervalos con extremos

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

y sea $P_i = (x_i, f(x_i))$ el punto de la gráf ca por encima de x_i. Ahora, una estos puntos por medio de segmentos rectilíneos $L_i = \overline{P_{i-1}P_i}$. La curva resultante L se denomina **aproximación poligonal** (f gura 1). La longitud de L, que se denotará $|L|$, es la suma de las longitudes $|L_i|$ de cada uno de los segmentos:

$$|L| = |L_1| + |L_2| + \cdots + |L_N| = \sum_{i=1}^{N} |L_i|$$

Tal y como cabe esperar, las aproximaciones poligonales L se aproximan mejor a la curva cuando la amplitud de la partición decrece (f gura 2). Siguiendo esta idea, se def ne la longitud de arco s de la gráf ca como el límite de las longitudes $|L|$ cuando la norma $\|P\|$ de la partición tiende a cero:

La letra s se suele utilizar para denotar la longitud de arco.

$$\text{longitud de arco } s = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} |L_i|$$

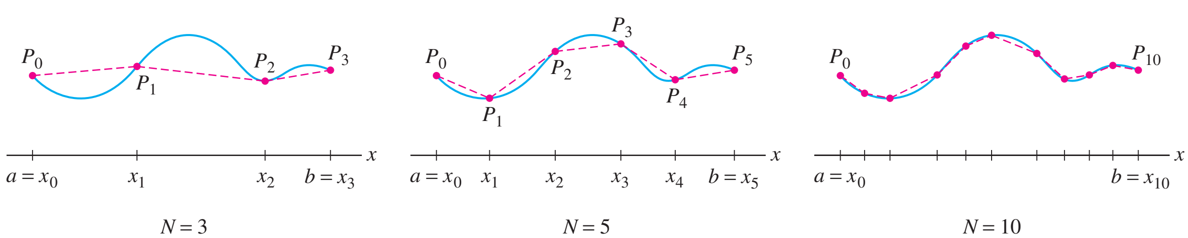


FIGURA 2 Las aproximaciones poligonales mejoran cuando las longitudes de los subintervalos decrecen.

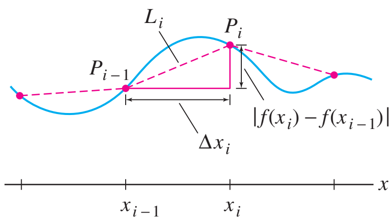


FIGURA 3

Para calcular la longitud de arco s, se debe expresar el límite de las aproximaciones poligonales como una integral. La figura 3 muestra que el segmento L_i es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $|f(x_i) - f(x_{i-1})|$. Por el teorema de Pitágoras:

$$|L_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Se supondrá que $f'(x)$ existe y es continua. Entonces, por el teorema del valor medio de Lagrange, existe un valor c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$$

Y, por tanto:

$$|L_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2(1 + [f'(c_i)]^2)} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

← ***RECORDATORIO*** *Una suma de Riemann para la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ es una suma*

$$\sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_N$ es una partición de $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y c_i es número cualquiera que pertenezca a $[x_{i-1}, x_i]$.

Se obtiene que la longitud $|L|$ es una suma de Riemann para la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$:

$$|L| = |L_1| + |L_2| + \cdots + |L_N| = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

Esta función es continua y por tanto integrable. Así la suma de Riemann tiende a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

cuando la norma de la partición (el máximo de las amplitudes Δx_i) tiende a cero.

En los problemas 20-22, se comprueba que la ec. (1) proporciona correctamente las longitudes de los segmentos rectilíneos y de las circunferencias.

TEOREMA 1 Fórmula para la longitud de arco Suponga que $f'(x)$ existe y es continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de arco s de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es igual a:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \qquad \boxed{1}$$

■ **EJEMPLO 1** Halle la longitud de arco s de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^{-1}$ en $[1, 3]$ (figura 4).

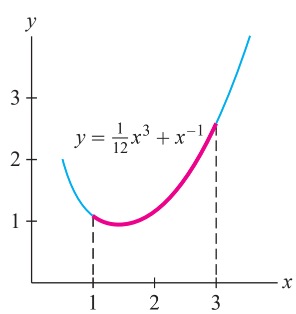


FIGURA 4 La longitud de arco en $[1, 3]$ es $\frac{17}{6}$.

Solución En primer lugar, se calcula $1 + f'(x)^2$. Como $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - x^{-2}$,

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}x^2 - x^{-2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2} + x^{-4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2} + x^{-4} = \left(\frac{1}{4}x^2 + x^{-2}\right)^2$$

Afortunadamente, $1 + f'(x)^2$ es un cuadrado perfecto, por lo que se puede calcular fácilmente la longitud de arco:

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^2 + x^{-2}\right)dx = \left(\frac{1}{12}x^3 - x^{-1}\right)\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{17}{6}$$ ■

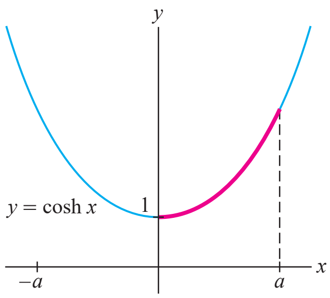


FIGURA 5

EJEMPLO 2 La longitud de arco como función del límite superior Halle la longitud de arco $s(a)$ de $y = \cosh x$ en $[0, a]$ (f gura 5). Después, halle la longitud de arco en $[0, 2]$.

Solución Recuerde que $y' = (\cosh x)' = \operatorname{senh} x$. Según la ec. (2) en la nota al margen:

$$1 + (y')^2 = 1 + \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x$$

Como $\cosh x > 0$, se tiene que $\sqrt{1 + (y')^2} = \cosh x$, y por tanto:

$$s(a) = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^a \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x \Big|_0^a = \operatorname{senh} a$$

La longitud de arco en $[0, 2]$ es $s(2) = \operatorname{senh} 2 \approx 3{,}63$. ■

RECORDATORIO

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \boxed{2}$$

En los ejemplos 1 y 2, la cantidad $1 + f'(x)^2$ ha resultado ser un cuadrado perfecto y se ha podido calcular s de manera exacta. Habitualmente, $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ no tiene una primitiva elemental y no se puede obtener una fórmula explícita para la longitud de arco. Sin embargo, siempre se puede aproximar la longitud de arco utilizando integración numérica.

EJEMPLO 3 No se dispone de una fórmula exacta para la longitud de arco SAC
Aproxime la longitud s de $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ mediante la regla de Simpson S_N con $N = 6$.

Solución Se tiene que $y' = \cos x$ y $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}$. La longitud de arco es:

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

Esta integral no se puede evaluar de manera explícita, por lo que se aproximará por medio de la regla de Simpson (sección 8.8) el integrando $g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$. Divida $[0, \pi]$ en $N = 6$ subintervalos de amplitud $\Delta x = \pi/6$. Entonces:

$$S_6 = \frac{\Delta x}{3}\left(g(0) + 4g\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2g\left(\frac{2\pi}{6}\right) + 4g\left(\frac{3\pi}{6}\right) + 2g\left(\frac{4\pi}{6}\right) + 4g\left(\frac{5\pi}{6}\right) + g(\pi)\right) \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{18}(1{,}4142 + 5{,}2915 + 2{,}2361 + 4 + 2{,}2361 + 5{,}2915 + 1{,}4142) \approx 3{,}82$$

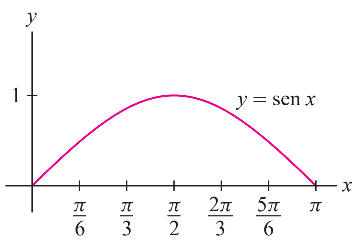


FIGURA 6 La longitud de arco de 0 a π es aproximadamente 3,82.

Así $s \approx 3{,}82$ (f gura 6). Un programa informático de cálculo simbólico proporciona la aproximación más precisa de $s \approx 3{,}820198$. ■

El área S de una superf cie de revolución (f gura 7) se puede calcular por medio de una integral similar a la de la longitud de arco. Suponga que $f(x) \geq 0$ de manera que la gráf ca de la función se encuentra por encima del eje x. Se puede aproximar la superf cie rotando una aproximación poligonal a $y = f(x)$ respecto al eje x. El resultado es una superf cie construida de troncos de cono (f gura 8).

El área de un cono truncado es igual a π por la suma de los radios menor y mayor y por la longitud de la parte inclinada. Utilizando la notación que se introdujo en la parte correspondiente a la fórmula de longitud de arco, se obtiene que el área del tronco de cono en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es:

$$\pi \underbrace{\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)}_{\text{Suma de los radios}} \underbrace{\overline{|P_{i-1}P_i|}}_{\text{Longitud de la parte inclinada}} = 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}\,\Delta x_i$$

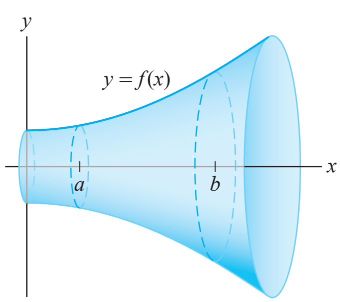


FIGURA 7 Superf cie obtenida por rotación de $y = f(x)$ respecto al eje x.

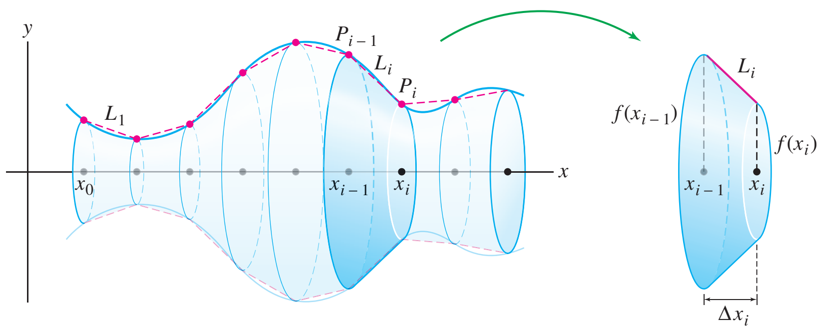


FIGURA 8 La rotación de una aproximación poligonal da lugar a una aproximación por troncos de cono.

El área de la superficie S es igual al límite de las sumas de las área de los troncos de cono, cuando $N \to \infty$. Se puede demostrar que el límite no queda afectado si se reemplaza x_{i-1} y x_i por c_i. Así:

$$S = 2\pi \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i$$

Se trata de un límite de sumas de Riemann que converge a la integral de la ec. (3) que se encuentra a continuación.

Área de una superficie de revolución Suponga que $f(x) \geq 0$ y que $f'(x)$ existe y es continua en $[a, b]$. El área de la superficie S obtenida por rotación de la gráfica de $f(x)$ respecto al eje x para $a \leq x \leq b$ es igual a:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx} \qquad \boxed{3}$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule la superficie de una esfera de radio R.

Solución La gráfica de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ es una semicircunferencia de radio R (figura 9). Al rotar respecto al eje x, se obtiene una esfera. Se tiene:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad 1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

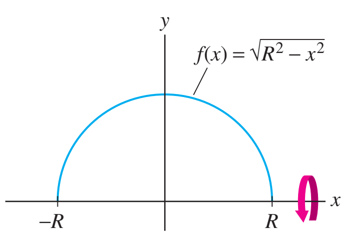


FIGURA 9 Una esfera se obtiene por revolución de una semicircunferencia respecto al eje x.

La integral para el área de la superficie proporcionará la fórmula habitual de la superficie de una esfera:

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 2\pi R(2R) = 4\pi R^2.$$ ■

■ **EJEMPLO 5** Halle el área de la superficie S obtenida por rotación de $y = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$ respecto al eje x para $1 \leq x \leq 3$.

Solución Sea $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{2}(x^{-1/2} - x^{1/2})$ y por tanto:

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(\frac{x^{-1/2} - x^{1/2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{x^{-1} - 2 + x}{4} =$$

$$= \frac{x^{-1} + 2 + x}{4} = \left(\frac{x^{1/2} + x^{-1/2}}{2}\right)^2$$

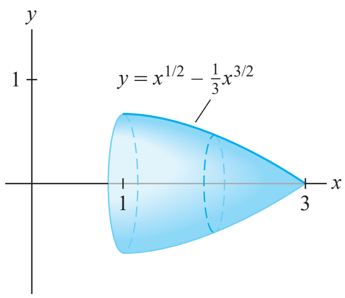


FIGURA 10

Luego el área de la superf cie (f gura 10) será igual a:

$$S = 2\pi \int_1^3 f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_1^3 \left(x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}\right)\left(\frac{x^{1/2}+x^{-1/2}}{2}\right)dx =$$

$$= \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2\right)dx = \pi\left(x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^3\right)\Bigg|_1^3 = \frac{16\pi}{9}$$ ■

9.1 RESUMEN

- La *longitud de arco* s de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

- Utilice integración numérica para aproximar la longitud de arco cuando la integral de la longitud de arco no se pueda resolver de forma explícita.
- Suponga que $f(x) \geq 0$. El *área* de la superf cie que se obtiene por rotación de la gráf ca de $f(x)$ respecto al eje x para $a \leq x \leq b$ es:

$$\text{Área} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

9.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué integral representa la longitud de la curva $y = \cos x$ entre 0 y π?

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx, \qquad \int_0^\pi \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

2. Utilice la fórmula de la longitud de arco para probar que si C es una constante cualquiera, las gráf cas $y = f(x)$ e $y = f(x) + C$ tienen la misma longitud, sobre cualquier intervalo $[a, b]$. Justif que su respuesta geométricamente.

3. Utilice la fórmula de la longitud de arco para probar que la longitud de una gráf ca en $[1, 4]$ no puede ser menor que 3.

Problemas

1. Exprese la longitud de arco de la curva $y = x^4$ entre $x = 2$ y $x = 6$ como una integral (pero no la evalúe).

2. Exprese la longitud de arco de la curva $y = \tan x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ como una integral (pero no la evalúe).

3. Halle la longitud de arco de $y = \frac{1}{12}x^3 + x^{-1}$ para $1 \leq x \leq 2$. *Indicación:* pruebe que $1 + (y')^2 = \left(\frac{1}{4}x^2 + x^{-2}\right)^2$.

4. Halle la longitud de arco de $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{2x^2}$ para $[1, 4]$. *Indicación:* pruebe que $1 + (y')^2$ es un cuadrado perfecto.

En los problemas 5-10, calcule la longitud de arco para el intervalo dado.

5. $y = 3x + 1$, $[0, 3]$

6. $y = 9 - 3x$, $[1, 3]$

7. $y = x^{3/2}$, $[1, 2]$

8. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$, $[2, 8]$

9. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $[1, 2e]$

10. $y = \ln(\cos x)$, $[0, \frac{\pi}{4}]$

En los problemas 11-14, aproxime la longitud de arco de la curva para el intervalo utilizando, según se indique, la regla del trapecio T_N, la regla del punto medio M_N o la regla de Simpson S_N.

11. $y = \frac{1}{4}x^4$, $[1, 2]$, T_5

12. $y = \operatorname{sen} x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$, M_8

13. $y = x^{-1}$, $[1, 2]$, S_8

14. $y = e^{-x^2}$, $[0, 2]$, S_8

15. Calcule la longitud del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (f gura 11).

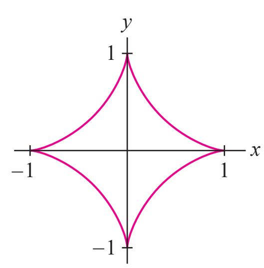


FIGURA 11 Gráf ca de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

16. Pruebe que la longitud de arco del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (para $a > 0$) es proporcional a a.

17. Sea $a, r > 0$. Pruebe que la longitud de arco de la curva $x^r + y^r = a^r$ para $0 \le x \le a$ es proporcional a a.

18. Halle la longitud de arco de la curva que se muestra en la figura 12.

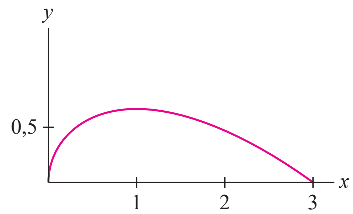


FIGURA 12 Gráfica de $9y^2 = x(x-3)^2$.

19. Halle el valor de a para el que la longitud de arco de la *catenaria* $y = \cosh x$, con $-a \le x \le a$, sea igual a 10.

20. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = mx + r$ para $[a, b]$ de dos maneras: mediante el teorema de Pitágoras (figura 13) y utilizando la integral de la longitud de arco.

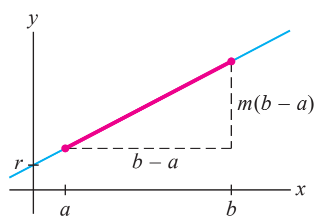


FIGURA 13

21. Pruebe que la longitud de la circunferencia unidad es igual a:

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(una integral impropia)}$$

Evalúe y compruebe, de esta manera, que la longitud en cuestión es igual a 2π.

22. Generalice el resultado del problema 21 para probar que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$.

23. Calcule la longitud de arco de $y = x^2$ para $[0, a]$. *Indicación:* use sustitución trigonométrica. Evalúe para $a = 1$.

24. Exprese la longitud de arco de $g(x) = \sqrt{x}$ para $[0, 1]$ como una integral definida. A continuación, use la sustitución $u = \sqrt{x}$ con el fin de probar que esta longitud de arco es igual a la longitud de arco de x^2 para $[0, 1]$ (pero no evalúe las integrales). Explique este resultado geométricamente.

25. Halle la longitud de arco de $y = e^x$ para $[0, a]$. *Indicación:* intente la sustitución $u = \sqrt{1 + e^{2x}}$ seguida de fracciones parciales.

26. Pruebe que la longitud de arco de $y = \ln(f(x))$ para $a \le x \le b$ es:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{f(x)^2 + f'(x)^2}}{f(x)}\, dx$$

$\boxed{4}$

27. Aplique la ec. (4) para calcular la longitud de arco de $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, para $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

28. Aplique la ec. (4) para calcular la longitud de arco de

$y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ en $[1, 3]$.

29. Pruebe que si $0 \le f'(x) \le 1$ para todo x, entonces la longitud de arco de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es, a lo sumo, $\sqrt{2}(b-a)$. Pruebe que para $f(x) = x$, la longitud de arco es igual a $\sqrt{2}(b-a)$.

30. Aplique el teorema de comparación (sección 5.2) para demostrar que la longitud de arco de $y = x^{4/3}$ en $[1, 2]$ no es menor que $\frac{5}{3}$.

31. Aproxime la longitud de arco de una cuarta parte de la circunferencia unitaria (que, se sabe, es igual a $\frac{\pi}{2}$) calculando la longitud de la aproximación poligonal con $N = 4$ segmentos (figura 14).

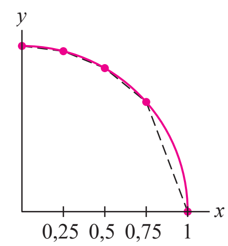


FIGURA 14 Una cuarta parte de la circunferencia unitaria.

32. SAC Un comerciante tiene la intención de producir alfombras especiales con la forma de la región de la figura 15, limitada por los ejes y por la gráfica de $y = 1 - x^n$ (en unidades de yardas). Suponga que el material cuesta 50 \$/yd^2 y que cuesta $50L$ dólares cortar cada alfombra, donde L es la longitud del lado curvado de la alfombra. Se puede vender cada alfombra por $150A$ dólares, donde A es el área de la alfombra. Utilizando integración numérica, con la ayuda de un programa informático de cálculo simbólico, halle el número n (natural) de alfombras para el que los beneficios del comerciante serán máximos.

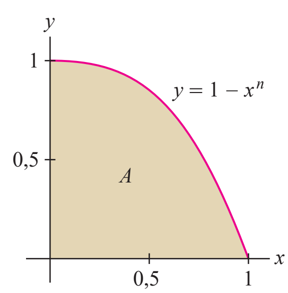


FIGURA 15

En los problemas 33-40, calcule el área de la superficie de revolución respecto del eje x, para el intervalo indicado.

33. $y = x, \quad [0, 4]$

34. $y = 4x + 3, \quad [0, 1]$

35. $y = x^3, \quad [0, 2]$

36. $y = x^2, \quad [0, 4]$

37. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}, \quad [0, 8]$

38. $y = e^{-x}, \quad [0, 1]$

39. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad [1, e]$

40. $y = \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

SAC *En los problemas 41-44, utilice un programa informático de cálculo simbólico para hallar el área aproximada del sólido que se genera por rotación de la curva respecto al eje x.*

41. $y = x^{-1}$, $[1, 3]$

42. $y = x^4$, $[0, 1]$

43. $y = e^{-x^2/2}$, $[0, 2]$

44. $y = \tan x$, $[0, \frac{\pi}{4}]$

45. Halle el área de la superficie que se genera por rotación de $y = \cosh x$ para $[-\ln 2, \ln 2]$ respecto al eje x.

46. Pruebe que el área de un casquete esférico de altura h y radio R (figura 16) es $2\pi Rh$.

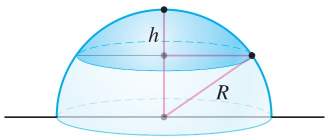


FIGURA 16

47. Halle el área del toro obtenido por rotación de la circunferencia $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ respecto al eje x (figura 17).

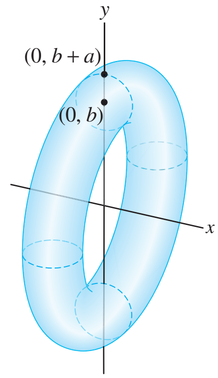


FIGURA 17 Toro obtenido por rotación de una circunferencia respecto al eje x.

48. Pruebe que el área de un cono circular recto de radio r y altura h es $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. *Indicación:* considere la rotación de una recta $y = mx$ respecto al eje x, para $0 \leq x \leq h$, donde m quede determinado convenientemente por el radio r.

Problemas avanzados

49. Halle el área del elipsoide obtenido por rotación de la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ respecto al eje x.

50. Pruebe que si la longitud de arco de $f(x)$ para $[0, a]$ es proporcional a a, entonces $f(x)$ debe ser una función lineal.

51. SAC Sea L la longitud de arco de la mitad superior de la elipse de ecuación

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

(figura 18) y sea $\eta = \sqrt{1 - (b^2/a^2)}$. Aplique sustitución para probar que:

$$L = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \eta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

Utilice un programa informático de cálculo simbólico para aproximar L, para $a = 2$, $b = 1$.

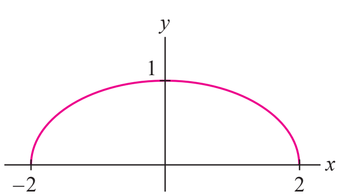


FIGURA 18 Gráfica de la elipse $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

52. Demuestre que el área de la porción de una esfera de radio R, vista por un observador situado a una distancia d por encima del Polo Norte, es igual a $A = 2\pi dR^2/(d + R)$. *Indicación:* según el problema 46, el área del casquete es igual a $2\pi Rh$. Pruebe que $h = dR/(d + R)$ aplicando el teorema de Pitágoras a los tres triángulos rectángulos de la figura 19.

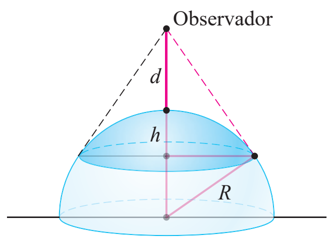


FIGURA 19 Casquete esférico que se observa desde una distancia d por encima del Polo Norte.

53. Suponga que el observador del problema 52 se desplaza hacia el infinito, es decir, $d \to \infty$. ¿A qué espera que sea igual el valor del área límite? Compruebe su conjetura calculando el límite con la fórmula para el área del ejercicio previo.

54. Sea M la masa total de una barra de metal con la forma de la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$, cuya densidad de masa $\rho(x)$ varía como función de x. Utilice sumas de Riemann para justificar la fórmula:

$$M = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

55. Sea $f(x)$ una función creciente en $[a, b]$ y sea $g(x)$ su inversa. Razone, en base a la longitud del arco, que la siguiente igualdad se cumple:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy \qquad \boxed{5}$$

A continuación, considere la sustitución $u = f(x)$ para demostrar la ec. (5).

FIGURA 1 Como la presión en el agua es proporcional a la profundidad, los buceadores respiran aire comprimido para igualar la presión y evitar daños pulmonares.

*La **presión**, por definición, es la fuerza por unidad de área.*

- *La unidad de presión en el SI es el pascal (Pa) (1 Pa = 1 $\mathrm{N/m^2}$).*
- *La densidad de masa (masa por unidad de volumen) se denota por ρ (letra griega rho).*
- *El factor ρg es la densidad por peso, donde $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ es la aceleración debida a la gravedad.*

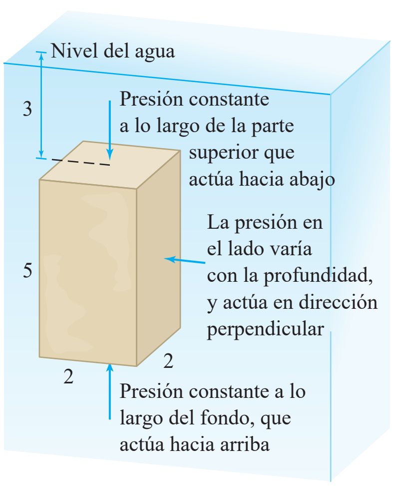


FIGURA 2 La presión del fluido actúa sobre cada cara en dirección perpendicular a la misma.

9.2 Presión en un fluido y fuerza

La fuerza de un fluido es la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo sumergido en el fluido. Los buceadores sienten esta fuerza cuando descienden por debajo de la superficie del agua (figura 1). Los cálculos que se van a realizar sobre la fuerza de un fluido atienden a dos leyes que determinan la presión que ejerce un fluido:

- La presión de un fluido p es proporcional a la profundidad.
- La presión de un fluido no actúa en una dirección específica. Por el contrario, un fluido ejerce una presión sobre cada lado del cuerpo en dirección perpendicular a dicho lado (figura 2).

Este segundo hecho, conocido como el principio de Pascal, pone de manifiesto una diferencia importante entre la presión de un fluido y la presión ejercida por un cuerpo sólido sobre otro.

Presión de fluido La presión p a profundidad h en un fluido de densidad de masa ρ es:

$$\boxed{p = \rho g h} \qquad \boxed{1}$$

La presión actúa en cada punto sobre un cuerpo, y lo hace en la dirección perpendicular a la superficie del cuerpo en ese punto.

En el primer ejemplo no se necesita integración porque la presión p es constante. En este caso, la fuerza total que actúa sobre una superficie de área A es:

$$\boxed{\text{Fuerza} = \text{presión} \times \text{área} = pA}$$

■ **EJEMPLO 1** Calcule la fuerza del fluido en la parte superior y en la inferior de una caja de dimensiones $2 \times 2 \times 5$ m, que se encuentra sumergida en un depósito de agua, con su parte superior a 3 m por debajo de la superficie del agua (figura 2). La densidad del agua es $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

Solución La parte superior de la caja se encuentra a $h = 3$ m, por lo que, según la ec. (1) con $g = 9{,}8$, se tiene:

$$\text{Presión sobre la parte superior} = \rho g h = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 3 = 29\ 400\ \text{Pa}$$

El área de la parte superior es $A = 4\ \mathrm{m^2}$ y la presión es constante, por tanto:

$$\text{Fuerza, hacia abajo, sobre la parte superior} = pA = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 3 \cdot 4 = 117\ 600\ \text{N}$$

La parte inferior de la caja se encuentra a $h = 8$ m, por lo que la fuerza total sobre el fondo es:

$$\text{Fuerza, hacia arriba, sobre la parte inferior} = pA = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 8 \cdot 4 = 313\ 600\ \text{N} \quad ■$$

En el siguiente ejemplo, la presión varía con la profundidad y será necesario calcular la fuerza como una integral.

■ **EJEMPLO 2 Cálculo de la fuerza mediante integración** Calcule la fuerza del fluido F sobre el lado de la caja del ejemplo 1.

Solución Como la presión varía con la profundidad, se divide el lado de la caja en N estrechas tiras horizontales (figura 3). Sea F_j la fuerza sobre la tira j-ésima. La fuerza total F es igual a la suma de las fuerzas sobre las tiras:

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_N$$

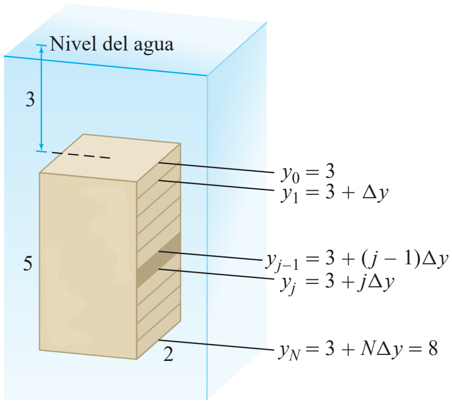


FIGURA 3 El área de cada tira es $2\Delta y$.

Etapa 1. **Aproxime la fuerza sobre una tira**

Se va a usar la variable y para denotar la profundidad, siendo $y = 0$ el nivel de la superf cie del agua e y será positiva en la dirección hacia abajo. Así, un valor de y mayor, denotará mayor profundidad. Cada banda es un rectángulo de altura $\Delta y = 5/N$ y base 2, por lo que el área de una tira es $2\Delta y$. El borde inferior de la tira j-ésima se encuentra a profundidad $y_j = 3 + j\Delta y$.

Si Δy es pequeño, la presión sobre la tira j-ésima es prácticamente constante e igual a $\rho g y_j$ (ya que todos los puntos sobre la tira se encuentran prácticamente a la misma profundidad y_j), y se puede aproximar la fuerza sobre la j-ésima tira:

$$F_j \approx \underbrace{\rho g y_j}_{\text{Presión}} \times \underbrace{(2\Delta y)}_{\text{Área}} = (\rho g) 2 y_j \Delta y$$

Etapa 2. **Aproxime la fuerza total por una suma de Riemann**

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_N \approx \rho g \sum_{j=1}^{N} 2 y_j \Delta y$$

La suma a la derecha es una suma de Riemann que converge a la integral $\rho g \int_3^8 2y\,dy$. El intervalo de integración es [3, 8] porque la caja se extiende desde $y = 3$ hasta $y = 8$ (la suma de Riemann se tiene que construir con $y_0 = 3$ e $y_N = 8$).

Etapa 3. **Evalúe la fuerza total como una integral**

Cuando Δy tiende a cero, la suma de Riemann tiende a la integral y se obtiene:

$$F = \rho g \int_3^8 2y\,dy = (\rho g) y^2 \Big|_3^8 = (10^3)(9{,}8)(8^2 - 3^2) = 539\ 000\ \text{N} \qquad \blacksquare$$

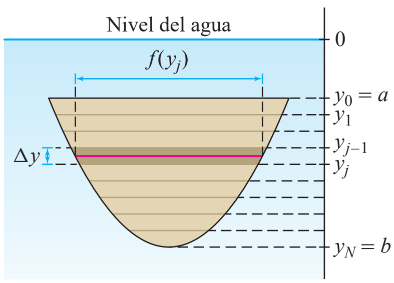


FIGURA 4 El área de la tira sombreada es aproximadamente $f(y_j)\,\Delta y$.

Ahora se debe añadir una nueva complicación: permitir que el ancho de las tiras horizontales varíe con la profundidad (f gura 4). Denote la amplitud a la profundidad y como $f(y)$:

$$f(y) = \text{amplitud del lado a la profundidad } y$$

Tal y como se procedió anteriormente, suponga que el cuerpo se extiende desde $y = a$ hasta $y = b$. Divida el lado plano del cuerpo en N tiras horizontales de amplitud $\Delta y = (b - a)/N$. Si Δy es pequeña, la j-ésima tira es prácticamente rectangular y de área $f(y)\Delta y$. Como la tira se encuentra a profundidad $y_j = a + j\Delta y$, la fuerza F_j sobre la j-ésima tira se puede aproximar:

$$F_j \approx \underbrace{\rho g y_j}_{\text{Presión}} \times \underbrace{f(y_j)\Delta y}_{\text{Área}} = (\rho g) y_j f(y_j) \Delta y$$

La fuerza F se aproxima por una suma de Riemann que converge a una integral:

$$F = F_1 + \cdots + F_N \approx \rho g \sum_{j=1}^{N} y_j f(y_j) \Delta y \quad \Rightarrow \quad F = \rho g \int_a^b y f(y)\,dy$$

TEOREMA 1 Fuerza de fluido sobre una superficie plana sumergida verticalmente
La fuerza del f uido F sobre el lado plano de un cuerpo sumergido verticalmente en un f uido es

$$F = \rho g \int_a^b y f(y)\,dy \qquad \boxed{2}$$

donde $f(y)$ es la amplitud horizontal del lado a profundidad y, y el cuerpo se extiende desde la profundidad $y = a$ hasta la profundidad $y = b$.

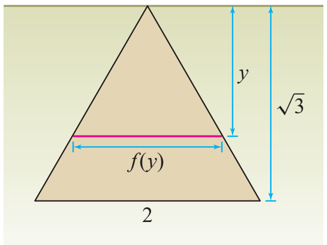


FIGURA 5 Lámina triangular sumergida en un depósito de petróleo.

■ **EJEMPLO 3** Calcule la fuerza del f uido F sobre el lado de una placa con la forma de un triángulo equilátero de lado 2 m sumergida verticalmente en un depósito de petróleo de densidad de masa $\rho = 900$ kg/m^3 (f gura 5).

Solución Para aplicar la ec. (2), de necesita hallar la amplitud horizontal $f(y)$ de la placa a la profundidad y. La altura de un triángulo equilátero de lado $s = 2$ es $\sqrt{3}s/2 = \sqrt{3}$. Por las semejanzas de triángulos, $y/f(y) = \sqrt{3}/2$ y, por tanto, $f(y) = 2y/\sqrt{3}$. Según la ec. (2):

$$F = \rho g \int_0^{\sqrt{3}} y\, f(y)\, dy = 900 \cdot 9{,}8 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} y^2\, dy = \left(\frac{17\ 640}{\sqrt{3}}\right) \frac{y^3}{3}\bigg|_0^{\sqrt{3}} = 17\ 640 \text{ N}$$ ■

El siguiente ejemplo muestra cómo modif car el cálculo de la fuerza cuando el lado del cuerpo sumergido esté inclinado.

La presa Hoover, con el recién f nalizado puente del río Colorado.

■ **EJEMPLO 4** **Fuerza sobre una superficie inclinada** El lado de una presa está inclinado 45°. La altura de la presa es de 700 ft y la amplitud 1500 ft, como se muestra en la f gura 6. Calcule la fuerza F sobre la presa si el embalse está lleno hasta la parte superior de la presa. La densidad del agua es $w = 62{,}5$ lb/ft^3.

Solución La altura vertical de la presa es de 700 ft, por lo que se divide el eje vertical desde 0 hasta 700 en N subintervalos de longitud $\Delta y = 700/N$. De esta manera, se divide la cara de la presa en N tiras, como se ilustra en la f gura 6. Aplicando trigonometría, la amplitud de cada tira es $\Delta y/\operatorname{sen}(45°) = \sqrt{2}\Delta y$. Así, tendremos:

$$\text{Área de cada tira} = \text{longitud} \times \text{amplitud} = 1500(\sqrt{2}\,\Delta y)$$

Tal y como se viene procediendo, se aproximará la fuerza F_j sobre la j-ésima tira. El factor ρg es igual al peso por unidad de volumen, por lo que se utilizará $w = 62{,}5$ lb/ft^3 en lugar de ρg:

$$F_j \approx \overbrace{wy_j}^{\text{Presión}} \times \overbrace{1500\sqrt{2}\Delta y}^{\text{Área de la tira}} = wy_j \times 1500\sqrt{2}\,\Delta y \quad \text{lb}$$

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j \approx \sum_{j=1}^{N} wy_j(1500\sqrt{2}\,\Delta y) = 1500\sqrt{2}\,w \sum_{j=1}^{N} y_j \Delta y$$

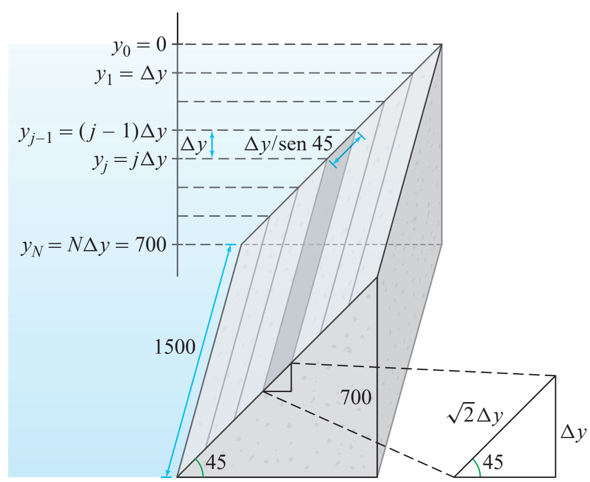


FIGURA 6

Se trata de una suma de Riemann para la integral $1500\sqrt{2}w\int_0^{700} y\,dy$. Así:

$$F = 1500\sqrt{2}w\int_0^{700} y\,dy = 1500\sqrt{2}(62{,}5)\frac{700^2}{2} \approx 3{,}25 \times 10^{10}\ \text{lb}$$

9.2 RESUMEN

- Si la presión es constante, entonces la fuerza = presión × área.
- La presión del fuido a la profundidad h es igual a ρgh, donde ρ es la densidad de fuido (masa por unidad de volumen) y $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ es la aceleración debida a la gravedad. La presión del fuido actúa sobre una superfcie en la dirección perpendicular a la superfcie. La densidad de masa del agua es 1000 kg/m^3.
- Si se sumerge verticalmente un cuerpo en un fuido y éste se extiende desde una profundidad $y = a$ hasta $y = b$, entonces la fuerza total del fuido sobre un lado del cuerpo es

$$F = \rho g\int_a^b yf(y)\,dy$$

donde $f(y)$ es la amplitud horizontal del lado a la profundidad y.
- Si la densidad de fuido se facilita como *peso* por unidad de volumen, el factor g no aparece. La densidad de peso para el agua es de 62,5 lb/ft^3.

9.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la defnición de presión?

2. La presión de un fuido es proporcional a la profundidad. ¿Cuál es el factor de proporcionalidad?

3. Cuando una fuerza de un fuido actúa sobre un cuerpo sumergido, ¿en qué dirección actúa?

4. ¿Por qué se calcula la presión de un fuido sobre una superfcie mediante tiras horizontales y no se consideran tiras verticales?

5. Si se sumerge horizontalmente una placa fna, entonces la fuerza del fuido sobre un lado de la placa es igual a la presión por el área. ¿Es esto cierto si se sumerge verticalmente?

Problemas

1. Una caja de altura 6 m y base cuadrada de lado 3 m se sumerge en un depósito de agua. La parte superior de la caja se encuentra a 2 m por debajo de la superfcie del agua.

(a) Calcule la fuerza del fuido sobre la parte superior e inferior de la caja.

(b) Escriba una suma de Riemann que aproxime la fuerza del fuido sobre un lado de la caja, dividiendo el lado en N tiras horizontales de amplitud $\Delta y = 6/N$.

(c) ¿A qué integral converge la suma de Riemann?

(d) Calcule la fuerza del fuido sobre un lado de la caja.

2. Una placa con la forma de un triángulo isósceles de base 1 m y altura 2 m se sumerge verticalmente en un tanque de manera que su vértice toque la superfcie del agua (fgura 7).

(a) Pruebe que la amplitud del triángulo a la profundidad y es $f(y) = \frac{1}{2}y$.

(b) Considere una fna tira de amplitud Δy a la profundidad y. Explique por qué la fuerza del fuido sobre un lado de esta tira es aproximadamente igual a $\rho g\frac{1}{2}y^2\Delta y$.

(c) Escriba una aproximación para la fuerza total del fuido F sobre un lado de la placa como una suma de Riemann e indique la integral a la que esta suma converge.

(d) Calcule F.

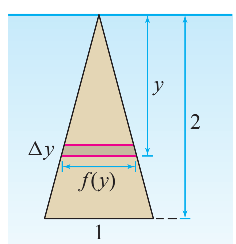


FIGURA 7

3. Repita el problema 2, pero suponga que su vértice se encuentra a 3 m por debajo de la superfcie del agua.

4. La placa R de la f gura 8, acotada por la parábola $y = x^2$ e $y = 1$, se sumerge verticalmente en agua (la distancia está expresada en metros).

(a) Pruebe que la amplitud de R a la altura y es $f(y) = 2\sqrt{y}$, y que la fuerza del f uido sobre una tira horizontal de amplitud Δy a la altura y es aproximadamente $(\rho g)2y^{1/2}(1-y)\Delta y$.

(b) Escriba una suma de Riemann que aproxime la fuerza del f uido F sobre un lado de R y utilice esta suma para explicar por qué:

$$F = \rho g \int_0^1 2y^{1/2}(1-y)\,dy$$

(c) Calcule F.

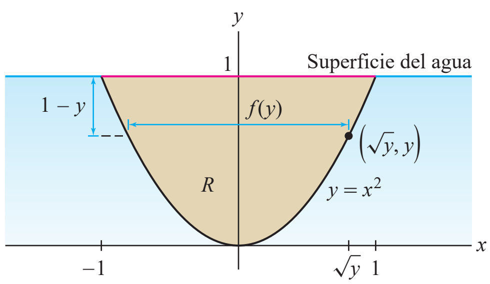


FIGURA 8

5. Sea F la fuerza del f uido sobre un lado de una placa semicircular de radio r metros, sumergida verticalmente en agua de manera que su diámetro esté alineado con la superf cie del agua (f gura 9).

(a) Pruebe que la amplitud de la placa a la profundidad y es $2\sqrt{r^2 - y^2}$.

(b) Calcule F como función de r aplicando la ec. (2).

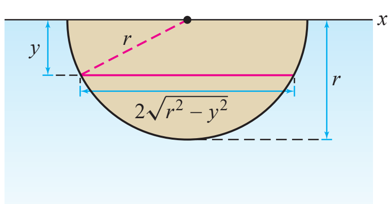


FIGURA 9

6. Calcule la fuerza sobre un lado de una placa circular de radio 2 m, sumergida verticalmente en agua de manera que la parte superior de la circunferencia sea tangente a la superf cie del agua.

7. Una placa semicircular de radio r metros, orientada como en la f gura 9, se sumerge en agua de manera que su diámetro se encuentra a la profundidad de m metros. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa en términos de m y r.

8. Una placa que se extiende desde la profundidad $y = 2$ m hasta $y = 5$ m se sumerge en un f uido de densidad $\rho = 850$ kg/m^3. La amplitud horizontal de la placa a la profundidad y es $f(y) = 2(1 + y^2)^{-1}$. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa.

9. En la f gura 10 se muestra la pared de una presa en un embalse de agua. Utilice la regla del trapecio y los registros de amplitud y de profundidad de la f gura para estimar la fuerza del f uido sobre la pared.

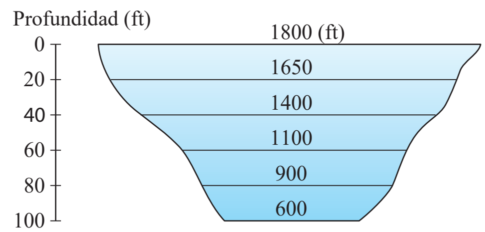


FIGURA 10

10. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa de la f gura 11(A), sumergida en agua.

11. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa de la f gura 11(B), sumergida en un f uido de densidad $\rho = 800$ kg/m^3.

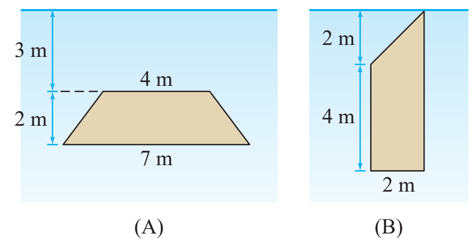


FIGURA 11

12. Halle la fuerza del f uido sobre un lado de la placa de la f gura 12, sumergida en un f uido de densidad $\rho = 1200$ kg/m^3. La parte superior de la placa se encuentra alineada con la superf cie del f uido. Los bordes de la placa son las curvas $y = x^{1/3}$ e $y = -x^{1/3}$.

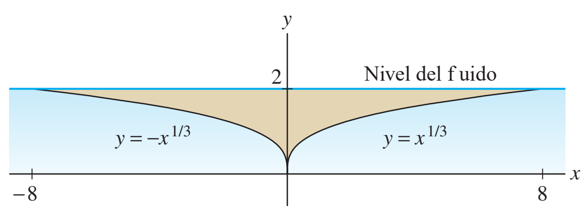


FIGURA 12

13. Sea R la placa con la forma de la región por debajo de $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ que se muestra en la f gura 13(A). Halle la fuerza del f uido sobre un lado de R si ésta se rota 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj, y se sumerge en un f uido de densidad 1100 kg/m^3 con su borde superior alineado con la superf cie del líquido, como en (B).

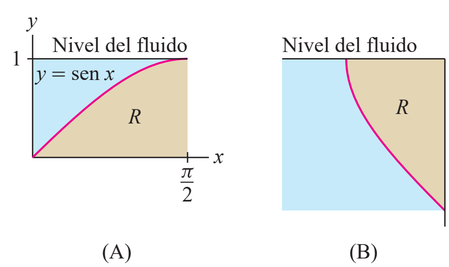


FIGURA 13

14. Con la notación del problema 13, calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa R si ésta se orienta como en la f gura 13(A). Puede necesitar integración por partes y sustitución trigonométrica.

15. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de una placa con la forma de la región A que se muestra en la f gura 14. La superf cie del agua se encuentra a $y = 1$ y la densidad del f uido es $\rho = 900\ \mathrm{kg/m^3}$.

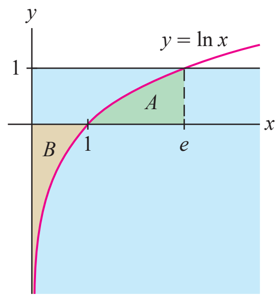
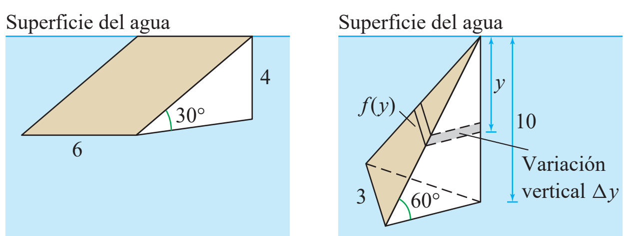


FIGURA 14

16. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa “inf nita” B de la f gura 14, suponiendo que la densidad del f uido es $\rho = 900\ \mathrm{kg/m^3}$.

17. La f gura 15(A) muestra una rampa con una inclinación de 30° que conduce a una piscina. Calcule la fuerza del f uido sobre la rampa.

18. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa (un triángulo isósceles) que se muestra en la f gura 15(B).



(A) (B)

FIGURA 15

19. La enorme presa de las Tres Gargantas en el río Yangtze en China tiene una altura de 185 m (f gura 16). Calcule la fuerza sobre la presa, suponiendo que ésta sea un trapecio de base 2000 m y borde superior 3000 m, inclinado en un ángulo de 55° respecto a la horizontal (f gura 17).

FIGURA 16 Presa de las Tres Gargantas en el río Yangtze.

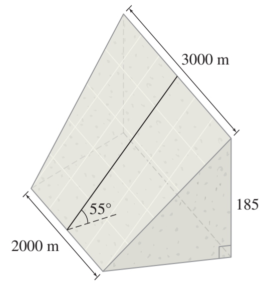


FIGURA 17

20. Se sumerge en agua una placa cuadrada de lado 3 m con una inclinación de 30° con la horizontal. Calcule la fuerza del f uido sobre un lado de la placa si el borde superior de ésta se encuentra a una profundidad de 6 m.

21. La artesa de la f gura 18 se llena de jarabe de maíz, cuya densidad de peso es $90\ \mathrm{lb/ft^3}$. Calcule la fuerza sobre la parte frontal de la artesa.

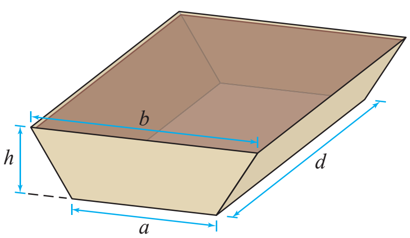


FIGURA 18

22. Calcule la presión del f uido sobre uno de los lados inclinados de la artesa de la f gura 18, cuando se llena de jarabe de maíz como en el problema 21.

Problemas avanzados

23. El f nal de la artesa de la f gura 19 es un triángulo equilátero de lado 3. Suponga que la artesa se llena de agua hasta una altura H. Calcule la fuerza del f uido sobre cada lado como función de H y de la longitud l de la artesa.

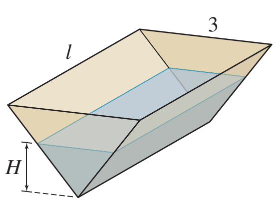


FIGURA 19

24. Una placa rectangular de lado ℓ se sumerge verticalmente en un f uido de densidad w, con su borde superior a la profundidad h. Pruebe que si la profundidad se incrementa en una cantidad Δh, entonces la fuerza sobre un lado de la placa aumenta en $wA\Delta h$, donde A es al área de la placa.

25. Demuestre que la fuerza sobre un lado de una placa rectangular de área A sumergida verticalmente en un f uido es igual a $p_0 A$, donde p_0 es la presión del f uido en el punto central del rectángulo.

26. Si la densidad de un f uido varía con la profundidad, entonces la presión a una profundidad y es una función $p(y)$ (que no es necesariamente igual a wy como en el caso de densidad constante). Utilice sumas de Riemann para justif car que la fuerza total F sobre el lado plano de un cuerpo sumergido verticalmente es $F = \int_a^b f(y)p(y)\,dy$, donde $f(y)$ es la amplitud del lado a la profundidad y.

FIGURA 1 Este acróbata del Cirque du Soleil debe distribuir su peso de tal manera que su brazo proporcione apoyo justo debajo de su centro de masas.

9.3 Centro de masa

Todo cuerpo tiene un punto de equilibrio llamado *centro de masas* (f gura 1). Cuando un cuerpo rígido, como un martillo, se lanza al aire, puede girar de una manera complicada pero su centro de masas sigue siempre la misma trayectoria parabólica sencilla que la de una piedra cuando se tira al aire. En esta sección, se utilizará integración para calcular el centro de masas de una plancha f na (también llamada **lámina**) de densidad de masa constante ρ.

El centro de masas (CM) se expresa en términos de cantidades llamadas **momentos**. El momento de una única partícula de masa m respecto a una recta L es igual al producto de la masa de la partícula m por su distancia dirigida (positiva o negativa) a la recta:

$$\text{Momento respecto a la recta } L = m \times \text{distancia dirigida a } L$$

Los momentos respecto a los ejes x e y se denotan como M_x y M_y. Si una partícula se encuentra en la posición (x, y) (f gura 2),

$$M_x = my \qquad \text{(masa por la distancia dirigida al eje } x\text{)}$$

$$M_y = mx \qquad \text{(masa por la distancia dirigida al eje } y\text{)}$$

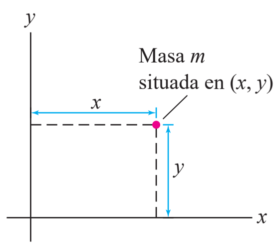


FIGURA 2

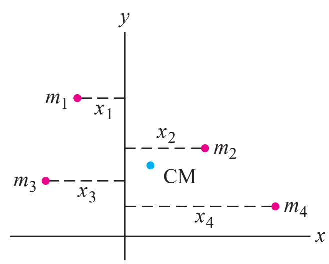


FIGURA 3

Por def nición, los momentos son aditivos: el momento de un sistema de n partículas con coordenadas (x_j, y_j) y masas m_j (f gura 3) es la suma:

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n$$
$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n$$

ATENCIÓN *La notación puede llevar a cierta confusión: M_x se define en términos de las coordenadas y, mientras que M_y lo hace en términos de las coordenadas x.*

El **centro de masas** (CM) es el punto $P = (x_{CM}, y_{CM})$ de coordenadas

$$\boxed{x_{CM} = \frac{M_y}{M}, \qquad y_{CM} = \frac{M_x}{M}}$$

donde $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema.

EJEMPLO 1 Halle el CM del sistema de tres partículas de la f gura 4, de masas 2, 4 y 8 y coordenadas (0, 2), (3, 1) y (6, 4).

Solución La masa total es $M = 2 + 4 + 8 = 14$ y los momentos son:

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 4 = 40$$

$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 6 = 60$$

Por tanto, $x_{CM} = \frac{60}{14} = \frac{30}{7}$ e $y_{CM} = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}$. El CM es, por tanto, $\left(\frac{30}{7}, \frac{20}{7}\right)$. ■

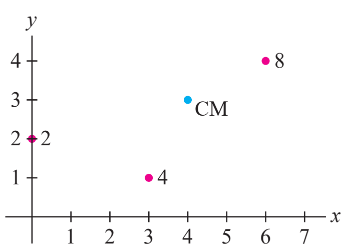


FIGURA 4 Centro de masas para el ejemplo 1.

Láminas (planchas finas)

En esta sección, nos vamos a centrar en planchas finas con densidad de masa constante (también llamada "densidad uniforme"). Los cálculos del CM cuando la densidad de masa no es constante requieren integración múltiple y se tratan en la sección 16.5.

Considere una lámina (plancha f na) de densidad de masa constante e igual a ρ que se encuentra ocupando la región por debajo de la gráf ca de $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, donde $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ (f gura 5). En los cálculos que se van a realizar a continuación, se aplicará el principio de *aditividad de los momentos* que se mencionó anteriormente para las masas puntuales:

Si una región se descompone en regiones más pequeñas que no se superpongan, entonces el momento de la región es la suma de los momentos de las regiones más pequeñas.

Para calcular el y-momento, M_y, empezamos como de costumbre, dividiendo $[a, b]$ en N subintervalos de amplitud $\Delta x = (b - a)/N$ y extremos $x_j = a + j\Delta x$. Así se consigue dividir la lámina en N tiras verticales (f gura 6). Si Δx es pequeña, la tira j-ésima es prácticamente rectangular, de área $f(x_j)\Delta x$ y de masa $\rho f(x_j)\Delta x$. Como todos los puntos de la tira se encuentran, aproximadamente, a la misma distancia x_j del eje y, el momento $M_{y,j}$ de la j-ésima tira es aproximadamente

$$M_{y,j} \approx (\text{masa}) \times (\text{distancia dirigida al eje } y) = (\rho f(x_j)\Delta x)x_j$$

Por la aditividad de los momentos:

$$M_y = \sum_{j=1}^{N} M_{y,j} \approx \rho \sum_{j=1}^{N} x_j f(x_j)\Delta x$$

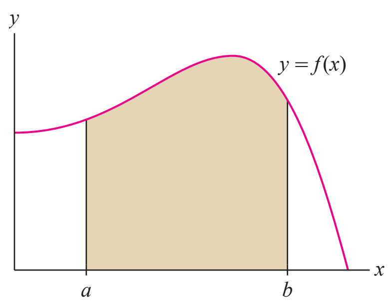


FIGURA 5 Lámina ocupando la región por debajo de la gráf ca de $f(x)$ sobre $[a, b]$.

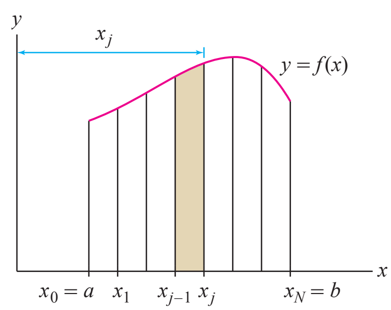


FIGURA 6 La tira sombreada es prácticamente rectangular y de área $f(x_j)\Delta x$.

Se trata de una suma de Riemann que tiende a $\rho \int_a^b x f(x)\,dx$ cuando $N \to +\infty$ y, por tanto:

$$\boxed{M_y = \rho \int_a^b x f(x)\,dx}$$

En general, si la lámina ocupa la región *entre* las gráf cas de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en $[a, b]$, donde $f_1(x) \geq f_2(x)$, entonces:

$$\boxed{M_y = \rho \int_a^b x(\text{longitud de la sección vertical})\,dx = \rho \int_a^b x(f_1(x) - f_2(x))\,dx} \qquad \boxed{1}$$

Piense en la lámina como si estuviera formada de tiras verticales de longitud $f_1(x) - f_2(x)$ a una distancia x del eje y (f gura 7).

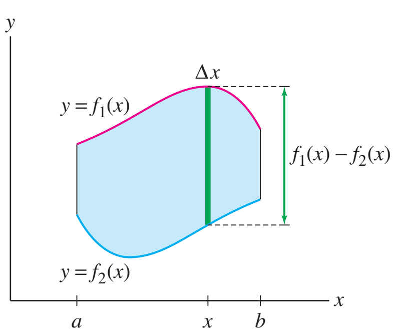


FIGURA 7

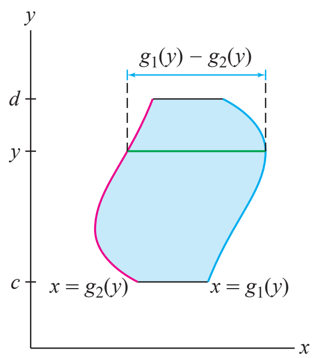


FIGURA 8

Se puede calcular el momento x dividiendo la lámina en tiras *horizontales*, pero esto requiere describir la lámina como una región entre dos curvas $x = g_1(y)$ y $x = g_2(y)$ con $g_1(y) \geq g_2(y)$ en un intervalo $[c, d]$ a lo largo del eje y (f gura 8):

$$M_x = \rho \int_c^d y(\text{longitud de la sección horizontal})\, dy = \rho \int_c^d y(g_1(y) - g_2(y))\, dy \qquad \boxed{2}$$

La masa total de la lámina es $M = \rho A$, donde A es el área de la lámina:

$$M = \rho A = \rho \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx \qquad \text{o} \qquad \rho \int_c^d (g_1(y) - g_2(y))\, dy$$

Las coordenadas del centro de masas son los momentos divididos por la masa total:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_y}{M} \qquad y_{\text{CM}} = \frac{M_x}{M}$$

EJEMPLO 2 Halle los momentos y el CM de la lámina de densidad uniforme ρ que ocupa la región por debajo de la gráf ca de $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

Solución En primer lugar, calcule M_y utilizando la ec. (1):

$$M_y = \rho \int_0^2 x f(x)\, dx = \rho \int_0^2 x(x^2)\, dx = \rho \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = 4\rho$$

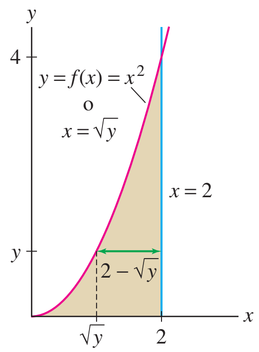


FIGURA 9 Lámina que ocupa la región por debajo de la gráf ca de $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$.

Después, calcule M_x utilizando la ec. (2), describiendo la lámina como la región entre $x = \sqrt{y}$ e $x = 2$ en el intervalo $[0, 4]$ a lo largo del eje y (f gura 9). Según la ec. (2):

$$M_x = \rho \int_0^4 y(g_1(y) - g_2(y))\, dy = \rho \int_0^4 y(2 - \sqrt{y})\, dy =$$
$$= \rho \left(y^2 - \frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Bigg|_0^4 = \rho \left(16 - \frac{2}{5} \cdot 32 \right) = \frac{16}{5}\rho$$

El área de la plancha es $A = \int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$, y la masa total es $M = \frac{8}{3}\rho$. Por tanto:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_y}{M} = \frac{4\rho}{\frac{8}{3}\rho} = \frac{3}{2} \qquad y_{\text{CM}} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{16}{5}\rho}{\frac{8}{3}\rho} = \frac{6}{5}$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL El CM de una lámina de densidad de masa constante ρ se denomina también **centroide**. El centroide depende de la forma de la lámina, pero no de la densidad de masa porque el factor ρ se cancela en los cocientes M_x/M y M_y/M. En particular, *al calcular el centroide, se puede considerar* $\rho = 1$. Cuando la densidad de masa no es constante, el CM depende tanto de la forma como de la densidad de masa. En este caso, el CM se calcula mediante integración múltiple (sección 16.5).

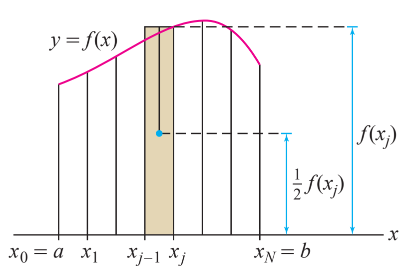


FIGURA 10 Como la tira sombreada es prácticamente rectangular, la altura de su CM es aproximadamente $\frac{1}{2}f(x_j)$.

Uno de los inconvenientes de la ec. (2) para M_x es que necesita integración respecto al eje y. Afortunadamente, existe una segunda fórmula para M_x como una integral respecto al eje x. Como antes, divida la región en N f nas bandas verticales de amplitud Δx (vea la f gura 10). Sea $M_{x,j}$ el momento x de la tira j-ésima y sea m_j su masa. Se puede utilizar el siguiente truco para aproximar $M_{x,j}$. La tira es prácticamente rectangular, de altura $f(x_j)$ y amplitud Δx, por lo que $m_j \approx \rho f(x_j) \Delta x$. Además, $M_{x,j} = y_j m_j$, donde y_j es la coordenada y del CM de la tira. Sin embargo, $y_j \approx \frac{1}{2} f(x_j)$ porque el CM de un rectángulo se encuentra en su centro. Así:

$$M_{x,j} = m_j y_j \approx \rho f(x_j)\Delta x \cdot \frac{1}{2} f(x_j) = \frac{1}{2}\rho f(x_j)^2 \Delta x$$

$$M_x = \sum_{j=1}^{N} M_{x,j} \approx \frac{1}{2}\rho \sum_{j=1}^{N} f(x_j)^2 \Delta x$$

Se trata de una suma de Riemann que tiende a $\frac{1}{2}\rho \int_a^b f(x)^2\, dx$ cuando $N \to +\infty$. La situación de una región *entre* las gráf cas de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ donde $f_1(x) \geq f_2(x) \geq$ ≥ 0 se resuelve de manera análoga, obteniéndose las siguientes fórmulas alternativas:

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b f(x)^2\, dx \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}\rho \int_a^b \left(f_1(x)^2 - f_2(x)^2\right) dx} \qquad \boxed{3}$$

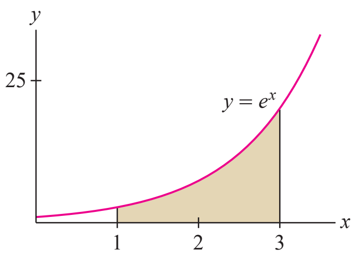


FIGURA 11 Región por debajo de la curva $y = e^x$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

■ **EJEMPLO 3** Halle el centroide de la región sombreada en la f gura 11.

Solución El centroide no depende de ρ, por lo que se puede considerar $\rho = 1$ y aplicar las ecuaciones (1) y (3) con $f(x) = e^x$:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)^2\, dx = \frac{1}{2}\int_1^3 e^{2x}\, dx = \frac{1}{4} e^{2x}\Big|_1^3 = \frac{e^6 - e^2}{4}$$

Utilizando integración por partes, se tiene:

$$M_y = \int_1^3 x f(x)\, dx = \int_1^3 x e^x\, dx = (x-1)e^x\Big|_1^3 = 2e^3$$

La masa total es $M = \displaystyle\int_1^3 e^x\, dx = (e^3 - e)$. Luego las coordenadas del centroide son:

$$x_{CM} = \frac{M_y}{M} = \frac{2e^3}{e^3 - e} \approx 2{,}313 \qquad y_{CM} = \frac{M_x}{M} = \frac{e^6 - e^2}{4(e^3 - e)} \approx 5{,}701$$ ■

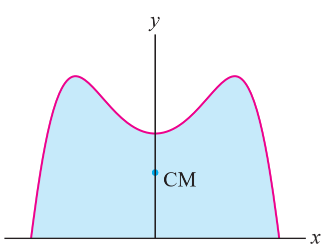


FIGURA 12 El CM de una plancha simétrica se encuentra en su eje de simetría.

Las propiedades de simetría de un objeto facilitan información sobre su centroide (f gura 12). Por ejemplo, el centroide de un cuadrado o de una placa circular se encuentra en su centro. He aquí una formulación precisa (vea el problema 43):

> **TEOREMA 1 Principio de simetría** Si una lámina es simétrica respecto a una recta, entonces su centroide se encuentra en esta recta.

■ **EJEMPLO 4 Utilizando la simetría** Halle el centroide de un semicírculo de radio 3.

Solución La simetría reduce el trabajo a la mitad. El semicírculo es simétrico respecto al eje y, por lo que el centroide se encuentra en el eje y y, en consecuencia, $x_{CM} = 0$. Queda por calcular M_x e y_{CM}. La semicircunferencia es la gráf ca de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (f gura 13). Según la ec. (3) con $\rho = 1$:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} f(x)^2\, dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3} = 9 - (-9) = 18$$

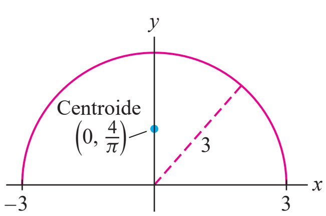


FIGURA 13 La semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$.

El semicírculo tiene área (y masa) igual a $A = \frac{1}{2}\pi(3^2) = 9\pi/2$, por lo que:

$$y_{CM} = \frac{M_x}{M} = \frac{18}{9\pi/2} = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$$ ■

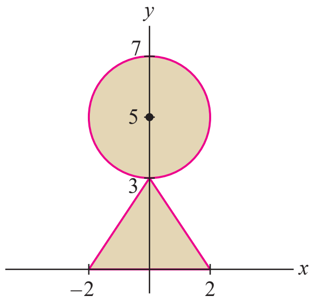


FIGURA 14 El momento de la región R es la suma de los momentos del triángulo y del círculo.

■ **EJEMPLO 5 Utilizando la aditividad y la simetría** Halle el centroide de la región R de la f gura 14.

Solución Se considerará $\rho = 1$ pues el objetivo es calcular un centroide. La región R es simétrica respecto al eje y, por lo que sabemos de antemano que $x_{CM} = 0$. Para determinar y_{CM}, se debe calcular el momento M_x.

Etapa 1. **Utilice la aditividad de los momentos**

Sean $M_x^{\text{triángulo}}$ y $M_x^{\text{círculo}}$ los momentos x del triángulo y del círculo. Entonces:

$$M_x = M_x^{\text{triángulo}} + M_x^{\text{círculo}}$$

Etapa 2. **Momento de la circunferencia**

Para ahorrar trabajo, utilizaremos el hecho de que, por simetría, el centroide del círculo debe estar situado en su centro $(0, 5)$. Así, $y_{CM}^{\text{círculo}} = 5$ y se puede obtener el momento:

$$y_{CM}^{\text{círculo}} = \frac{M_x^{\text{círculo}}}{M^{\text{círculo}}} = \frac{M_x^{\text{círculo}}}{4\pi} = 5 \quad \Rightarrow \quad M_x^{\text{círculo}} = 20\pi$$

Aquí, la masa del círculo es su área $M^{\text{círculo}} = \pi(2^2) = 4\pi$ (pues $\rho = 1$).

Etapa 3. **Momento del triángulo**

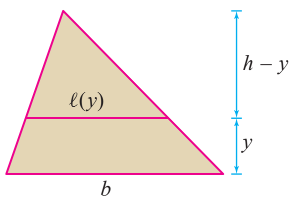


FIGURA 15 Por semejanza de triángulos, $\dfrac{\ell(y)}{h-y} = \dfrac{b}{h}$.

A continuación, se va a obtener $M_x^{\text{triángulo}}$ para un triángulo cualquiera de altura h y base b (f gura 15). Sea $\ell(y)$ la amplitud del triángulo a la altura y. Por semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{\ell(y)}{h-y} = \frac{b}{h} \quad \Rightarrow \quad \ell(y) = b - \frac{b}{h}y$$

Según la ec. (2):

$$M_x^{\text{triángulo}} = \int_0^h y\ell(y)\,dy = \int_0^h y\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy = \left(\frac{by^2}{2} - \frac{by^3}{3h}\right)\bigg|_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

En nuestra situación, $b = 4$, $h = 3$ y $M_x^{\text{triángulo}} = \dfrac{4 \cdot 3^2}{6} = 6$.

Etapa 4. **Cálculo de y_{CM}**

$$M_x = M_x^{\text{triángulo}} + M_x^{\text{círculo}} = 6 + 20\pi$$

La masa del triángulo es $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ y la del círculo es 4π, por lo que la masa de R es $M = 6 + 4\pi$ y:

$$y_{CM} = \frac{M_x}{M} = \frac{6 + 20\pi}{6 + 4\pi} \approx 3{,}71$$ ■

9.3 RESUMEN

- Los *momentos* de un sistema de partículas de masas m_j situadas en (x_j, y_j) son:

$$M_x = m_1y_1 + \cdots + m_ny_n, \qquad M_y = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n$$

El *centro de masas* (CM) tiene coordenadas:

$$x_{CM} = \frac{M_y}{M} \qquad \text{e} \qquad y_{CM} = \frac{M_x}{M}$$

donde $M = m_1 + \cdots + m_n$.

- Lámina (placa fina) con densidad de masa constante ρ (región por debajo de la gráfica de $f(x)$ donde $f(x) \geq 0$ o bien *entre* las gráficas de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ donde $f_1(x) \geq f_2(x)$):

$$M_y = \rho \int_a^b x f(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad \rho \int_a^b x(f_1(x) - f_2(x))\, dx$$

- Hay dos maneras de calcular el x-momento, M_x. Si la lámina ocupa la región entre la gráfica de $x = g(y)$ y el eje y, donde $g(y) \geq 0$, o bien *entre* las gráficas de $g_1(y)$ y $g_2(y)$, donde $g_1(y) \geq g_2(y)$, entonces:

$$M_x = \rho \int_c^d y g(y)\, dy \qquad \text{o} \qquad \rho \int_c^d y(g_1(y) - g_2(y))\, dy$$

- Una fórmula alternativa (a menudo más cómoda) para M_x:

$$M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b f(x)^2\, dx \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}\rho \int_a^b (f_1(x)^2 - f_2(x)^2)\, dx$$

- La masa total de la lámina es $M = \rho \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx$. Las coordenadas del centro de masas (también denominado *centroide*) son:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_y}{M} \qquad y_{\text{CM}} = \frac{M_x}{M}$$

- Aditividad: Si se descompone una región en regiones más pequeñas que no se superponen, entonces el momento de la región es igual a la suma de los momentos de cada una de las regiones más pequeñas.
- Principio de simetría: Si una lámina de densidad de masa constante es simétrica respecto a una recta concreta, entonces el centro de masas (centroide) se encuentra en esa recta.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Se da por sentado que las leyes físicas se expresan mejor como relaciones matemáticas. Piense en $F = ma$ o en la ley de la gravitación universal. Sin embargo, la idea fundamental de que las matemáticas pueden utilizarse para formular las leyes de la naturaleza (y no sólo para contar o medir) se ha ido desarrollando de manera paulatina, a partir de los filósofos de la antigua Grecia y culminando unos 2000 años más tarde con los descubrimientos de Galileo y Newton. Arquímedes (287-212 A.C.) fue uno de los primeros científicos (quizás *el* primero) en formular una ley física concreta. Respecto al principio de la palanca, Arquímedes escribió: " magnitudes conmensurables se equilibran a distancias inversamente proporcionales a su peso". En otras palabras, si se colocan dos cuerpos de masas m_1 y m_2 en una balanza (ingrávida) a distancias L_1 y L_2 del punto de apoyo P (figura 16), entonces la palanca se equilibrará si $m_1/m_2 = L_2/L_1$ o:

$$\boxed{m_1 L_1 = m_2 L_2}$$

En la terminología que se acaba de introducir en el texto, lo que Arquímedes descubrió fue el centro de masas P del sistema de pesos (vea los problemas 41 y 42).

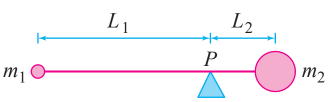


FIGURA 16 Ley de Arquímedes de la palanca:

$$m_1 L_1 = m_2 L_2$$

9.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuáles son los momentos M_x y M_y de una lámina cuyo centro de masas se encuentra en el origen?

2. La masa de una fina placa es 3. ¿Cuál es el momento M_x de la placa si las coordenadas de su centro de masas son $(2, 7)$?

3. El centro de masas de una lámina de masa total 5 tiene coordenadas $(2, 1)$. ¿Cuáles son los momentos M_x y M_y de la lámina?

4. Explique cómo el principio de simetría se utiliza para concluir que el centroide de un rectángulo es el centro del rectángulo.

Problemas

1. Cuatro partículas se encuentran en los puntos $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 0)$, $(3, 1)$.

(a) Halle los momentos M_x y M_y y el centro de masas del sistema, suponiendo que la masa de todas las partículas es igual a m.

(b) Halle el centro de masas del sistema, suponiendo que las masas de las partículas son 3, 2, 5 y 7, respectivamente.

2. Halle el centro de masas de un sistema formado por partículas de masas 4, 2, 5 y 1 situadas en $(1, 2)$, $(-3, 2)$, $(2, -1)$ y $(4, 0)$ respectivamente.

3. Se colocan masas puntuales de igual tamaño en los vértices de un triángulo de coordenadas $(a, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, c)$ respectivamente. Pruebe que las coordenadas del centro de masas del sistema son $\left(\frac{1}{3}(a + b), \frac{1}{3}c\right)$.

4. Se colocan masas puntuales, de masas m_1, m_2 y m_3, en los puntos $(-1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 4)$.

(a) Suponga que $m_1 = 6$. Halle m_2 de manera que el centro de masas se encuentre sobre el eje y.

(b) Suponga que $m_1 = 6$ y $m_2 = 4$. Halle el valor de m_3 de manera que $y_{CM} = 2$.

5. Dibuje la lámina S de densidad constante $\rho = 3$ g/cm^2 ocupando la región por debajo de la gráf ca de $y = x^2$ para $0 \le x \le 3$.

(a) Aplique las ecs. (1) y (2) para calcular M_x y M_y.

(b) Halle el área y el centro de masas de S.

6. Aplique las ecs. (1) y (3) para hallar los momentos y el centro de masas de la lámina S de densidad constante $\rho = 2$ g/cm^2 que ocupa la región entre $y = x^2$ y $y = 9x$ en $[0, 3]$. Dibuje S, indicando la situación del centro de masas.

7. Halle los momentos y el centro de masas de la lámina de densidad uniforme ρ que ocupa la región por debajo de $y = x^3$ para $0 \le x \le 2$.

8. Calcule M_x (suponiendo $\rho = 1$) para la región por debajo de la gráf ca de $y = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 1$ de dos maneras, en primer lugar, utilizando la ec. (2) y después utilizando la ec. (3).

9. Sea T la lámina triangular de la f gura 17.

(a) Pruebe que la longitud de la sección horizontal a la altura y es $4 - \frac{2}{3}y$, y aplique la ec. (2) para calcular M_x (con $\rho = 1$).

(b) Aplique el principio de simetría para probar que $M_y = 0$ y halle el centro de masas.

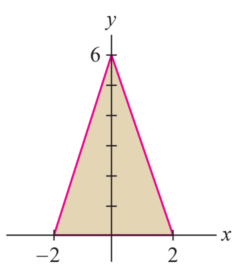


FIGURA 17 Triángulo isósceles.

En los problemas 10-17, halle el centroide de la región que se encuentra por debajo de la gráf ca de la función en el intervalo facilitado.

10. $f(x) = 6 - 2x$, $[0, 3]$

11. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, 4]$

12. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$

13. $f(x) = 9 - x^2$, $[0, 3]$

14. $f(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$, $[0, 3]$

15. $f(x) = e^{-x}$, $[0, 4]$

16. $f(x) = \ln x$, $[1, 2]$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$

18. Calcule los momentos y el centro de masas de la lámina que ocupa la región entre las curvas $y = x$ e $y = x^2$ para $0 \le x \le 1$.

19. Dibuje la región entre $y = x+4$ e $y = 2-x$ para $0 \le x \le 2$. Aplicando simetría, razone por qué el centroide de la región se encuentra sobre la recta $y = 3$. Compruebe esta af rmación calculando los momentos y el centroide.

En los problemas 20-25, halle el centroide de la región comprendida entre las gráf cas de las funciones en el intervalo dado.

20. $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

21. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

22. $y = x^{-1}$, $y = 2 - x$, $[1, 2]$

23. $y = e^x$, $y = 1$, $[0, 1]$

24. $y = \ln x$, $y = x - 1$, $[1, 3]$

25. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $[0, \pi/4]$

26. Dibuje la región limitada por $y = x + 1$ e $y = (x - 1)^2$ y halle su centroide.

27. Dibuje la región limitada por $y = 0$, $y = (x + 1)^3$ e $y = (1 - x)^3$ y halle su centroide.

En los problemas 28-32, halle el centroide de la región.

28. Mitad superior de la elipse $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1$

29. Mitad superior de la elipse $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ para $a, b > 0$ arbitrarios.

30. Semicírculo de radio r y centro en el origen de coordenadas.

31. Porción de círculo unitario que se encuentra en el primer cuadrante.

32. Placa triangular de vértices $(-c, 0)$, $(0, c)$, (a, b), donde $a, b, c > 0$ y $b < c$.

33. Halle el centroide para la región sombreada del semicírculo de radio r de la f gura 18. ¿Cuál es el centroide cuando $r = 1$ y $h = \frac{1}{2}$? *Indicación:* aplique geometría plana, más que integración, para probar que el *área* de la región es $r^2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1 - h^2/r^2}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}$.

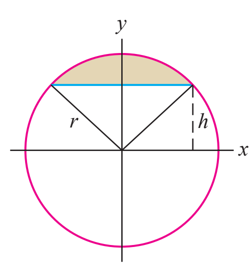


FIGURA 18

34. Dibuje la región comprendida entre $y = x^n$ e $y = x^m$ para $0 \le x \le 1$, donde $m > n \ge 0$ y halle el CM de la región. Determine un par (n, m) tal que el CM se encuentre fuera de la región.

En los problemas 35-37, utilice la aditividad de los momentos para hallar el CM de la región.

35. Triángulo isósceles de altura 2 sobre un rectángulo de base 4 y altura 3 (f gura 19).

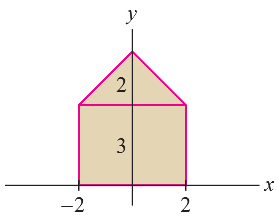


FIGURA 19

36. Un cono de helado formado por un semicírculo sobre un triángulo equilátero de lado 6 (f gura 20).

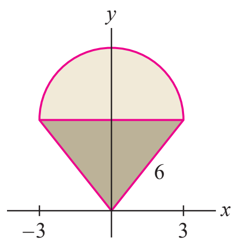


FIGURA 20

37. Tres cuartas partes del círculo unitario (elimine la parte en cuarto cuadrante).

38. Sea S la lámina de densidad de masa $\rho = 1$ que se obtiene quitando un círculo de radio r de un círculo de radio $2r$, tal y como se muestra en la f gura 21. Denote como M_x^S y M_y^S los momentos de S. De manera análoga, sean M_y^{mayor} y M_y^{menor} los momentos y de los círculos mayor y menor.

(a) Aplique el principio de simetría para probar que $M_x^S = 0$.

(b) Pruebe que $M_y^S = M_y^{\text{mayor}} - M_y^{\text{menor}}$ por la aditividad de los momentos.

(c) Halle M_y^{mayor} y M_y^{menor} utilizando que el centro de masas CM de un círculo es su centro. A continuación, calcule M_y^S aplicando (b).

(d) Determine el CM de S.

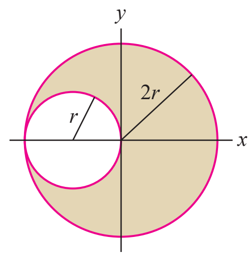


FIGURA 21

39. Halle el CM de las láminas de la f gura 22 obtenidas quitando cuadrados de lado 2 de un cuadrado de lado 8.

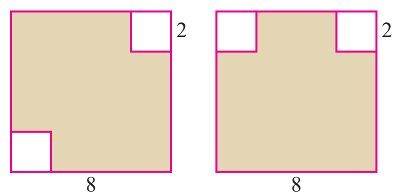


FIGURA 22

Problemas avanzados

40. La **mediana** de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio de la cara opuesta. Muestre que el centroide de un triángulo se encuentra en cada una de sus medianas, a una distancia de dos tercios del vértice. A continuación, utilice este hecho para demostrar que las tres medianas se cortan en un solo punto. *Indicación:* Simplif que el cálculo, suponiendo que un vértice se encuentra en el origen y el otro en el eje x.

41. Sea P el CM de un sistema con dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia d. Demuestre el principio de Arquímedes de la palanca (ingrávida): P es el punto sobre una segmento que une los dos cuerpos, para el que $m_1 L_1 = m_2 L_2$, donde L_j es la distancia de cada masa j a P.

42. Halle el CM de un sistema de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 conectados por una palanca d cuya densidad de masa ρ es uniforme. *Indicación:* el momento del sistema es la suma de los momentos de los cuerpos y de la palanca.

43. **Principio de simetría** Sea $\mathcal{R}$ la región por debajo de la gráf ca de $f(x)$ en el intervalo $[-a, a]$, donde $f(x) \ge 0$. Suponga que $\mathcal{R}$ es simétrica respecto al eje y.

(a) Explique por qué $f(x)$ es par, es decir, por qué $f(x) = f(-x)$.

(b) Pruebe que $xf(x)$ es una función *impar*.

(c) Aplique (b) para demostrar que $M_y = 0$.

(d) Demuestre que el CM de $\mathcal{R}$ se encuentra sobre el eje y (un argumento similar se aplica a la simetría respecto al eje x).

44. Demuestre directamente que las ecs. (2) y (3) son equivalentes en la siguiente situación. Sea $f(x)$ una función positiva estrictamente decreciente en $[0, b]$ tal que $f(b) = 0$. Sean $d = f(0)$ y $g(y) = f^{-1}(y)$. Pruebe que:

$$\frac{1}{2}\int_0^b f(x)^2\,dx = \int_0^d y g(y)\,dy$$

Indicación: Aplique en primer lugar la sustitución $y = f(x)$ a la integral de la izquierda y observe que $dx = g'(y)\,dy$. Después, aplique integración por partes.

45. Sea R una lámina d densidad uniforme que se sumerge en un f uido de densidad w (f gura 23). Demuestre el siguiente principio: la fuerza del f uido en un lado de R es igual al área de R por la presión del f uido sobre el centroide. *Indicación:* sea $g(y)$ la amplitud horizontal de R a la profundidad y. Exprese tanto la presión del f uido [ec. (2) en la sección 9.2] como la coordenada y del centroide en términos de $g(y)$.

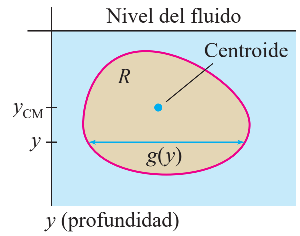


FIGURA 23

El matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) realizó importantes contribuciones al cálculo diferencial y a la física, además de a la teoría de la perspectiva lineal utilizada en dibujo.

9.4 Polinomios de Taylor

En la sección 4.1, se consideró la linealización $L(x)$ para aproximar una función $f(x)$ alrededor de un punto $x = a$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Se dice que $L(x)$ es la aproximación de "primer orden" de $f(x)$ en $x = a$, porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen el mismo valor y la misma derivada primera en $x = a$ (f gura 1):

$$L(a) = f(a) \qquad L'(a) = f'(a)$$

Una aproximación de primer orden es útil únicamente en un pequeño intervalo alrededor de $x = a$. En esta sección se considerará el problema de cómo conseguir mayor precisión sobre intervalos más grandes utilizando aproximaciones de orden superior (f gura 2).

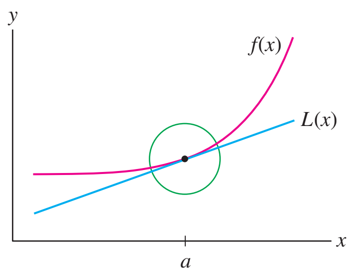


FIGURA 1 La aproximación lineal $L(x)$ es una aproximación de primer orden de $f(x)$.

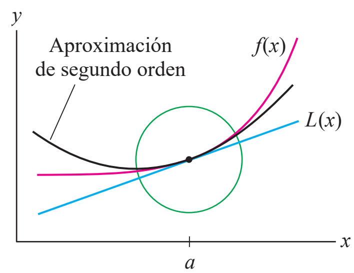


FIGURA 2 Una aproximación de segundo orden es más precisa sobre un intervalo mayor.

Para el resto de la sección, suponga que $f(x)$ está def nida en un intervalo abierto I y que todas las derivadas $f^{(k)}(x)$ existen en I. Sea $a \in I$. Se dice que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ **coinciden hasta orden *n*** en $x = a$, si sus derivadas hasta orden n en $x = a$ son todas iguales:

$$f(a) = g(a) \quad f'(a) = g'(a) \quad f''(a) = g''(a) \quad \ldots \quad f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$$

También se dice que $g(x)$ "aproxima a $f(x)$ hasta orden n" en $x = a$.

Se def ne el **polinomio de Taylor** de orden n, **centrado en** $x = a$ como:

$$\boxed{T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n}$$

Los primeros polinomios de Taylor son:

$$T_0(x) = f(a)$$
$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

$$T_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

Observe que $T_1(x)$ es la linealización de $f(x)$ en a. Observe también que $T_n(x)$ se obtiene a partir de $T_{n-1}(x)$ añadiendo un término de grado n:

$$\boxed{T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

RECORDATORIO k-factorial *es el número* $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1$. *De esta manera,*

$$1! = 1, \quad 2! = 2\cdot 1 = 2$$
$$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

Por convenio, se define $0! = 1$.

El siguiente teorema justif ca esta def nición de $T_n(x)$.

TEOREMA 1 El polinomio $T_n(x)$ centrado en a coincide con $f(x)$ hasta orden n en $x = a$. Es el único polinomio de grado, a lo sumo n con esta propiedad.

La comprobación del teorema 1 se deja como problema (Problemas 70-71), pero se ilustra la idea comprobando que $T_2(x)$ coincide con $f(x)$ hasta orden $n = 2$.

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2, & T_2(a) &= f(a) \\ T_2'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a), & T_2'(a) &= f'(a) \\ T_2''(x) &= f''(a), & T_2''(a) &= f''(a) \end{aligned}$$

Esto prueba que el valor y las derivadas hasta orden $n = 2$ en $x = a$ son iguales.

Antes de considerar los ejemplos, he aquí $T_n(x)$ expresado en notación sumatoria:

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}$$

Por convenio, se considera que $f(x)$ es la derivada de orden *cero* y, por tanto, que $f^{(0)}(x)$ es de hecho $f(x)$. Cuando $a = 0$, $T_n(x)$ se denomina también **polinomio de Maclaurin** de orden n.

EJEMPLO 1 Polinomios de Maclaurin para e^x Represente gráf camente los polinomios de Maclaurin de tercer y cuarto orden para $f(x) = e^x$. Compárelos con la aproximación lineal.

Solución Todas las derivadas coinciden con $f(x)$: $f^{(k)}(x) = e^x$. Así:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

El polinomio de Maclaurin de tercer orden (el caso $a = 0$) es:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Se obtiene $T_4(x)$ añadiendo el término de orden 4 a $T_3(x)$:

$$T_4(x) = T_3(x) + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

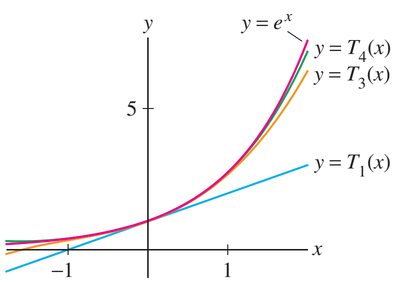


FIGURA 3 Polinomios de Maclaurin para $f(x) = e^x$.

La f gura 3 muestra que T_3 y T_4 aproximan a $f(x) = e^x$ de forma mucho más cercana que la aproximación lineal $T_1(x)$ sobre un intervalo alrededor de $a = 0$. Los polinomios de Taylor de orden superior proporcionarían mejores aproximaciones aún, y en intervalos más grandes. ■

■ **EJEMPLO 2 Cálculo de los polinomios de Taylor** Calcule el polinomio de Taylor $T_4(x)$ centrado en $a = 3$ para $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Solución En primer lugar, evalúe las derivadas, hasta la de grado 4, en $a = 3$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{1/2}, & f(3) &= 2\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}, & f'(3) &= \frac{1}{4}\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}, & f''(3) &= -\frac{1}{32}\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}, & f'''(3) &= \frac{3}{256}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}, & f^{(4)}(3) &= -\frac{15}{2048}
\end{aligned}$$

El primer término $f(a)$ en el polinomio de Taylor $T_n(x)$ se denomina el término constante.

Después calcule los coef cientes $\dfrac{f^{(j)}(3)}{j!}$:

$$\begin{aligned}
&\text{Término constante} && = f(3) = 2\\
&\text{Coef ciente de } (x-3) && = f'(3) = \frac{1}{4}\\
&\text{Coef ciente de } (x-3)^2 && = \frac{f''(3)}{2!} = -\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2!} = -\frac{1}{64}\\
&\text{Coef ciente de } (x-3)^3 && = \frac{f'''(3)}{3!} = \frac{3}{256}\cdot\frac{1}{3!} = \frac{1}{512}\\
&\text{Coef ciente de } (x-3)^4 && = \frac{f^{(4)}(3)}{4!} = -\frac{15}{2048}\cdot\frac{1}{4!} = -\frac{5}{16\ 384}
\end{aligned}$$

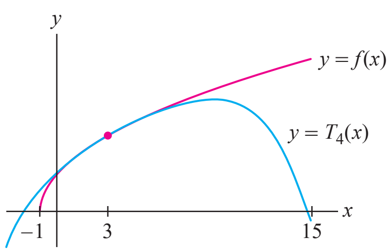


FIGURA 4 Gráf ca de $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $T_4(x)$ centrado en $x = 3$.

El polinomio de Taylor $T_4(x)$ centrado en $a = 3$ es (vea la f gura 4):

$$T_4(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^2 + \frac{1}{512}(x-3)^3 - \frac{5}{16\ 384}(x-3)^4$$ ■

■ **EJEMPLO 3 Una fórmula general para T_n** Halle el polinomio de Taylor $T_n(x)$ de $f(x) = \ln x$ centrado en $a = 1$.

Antes de calcular varias derivadas de $f(x) = \ln x$, se intenta discernir el patrón. Sin embargo, para muchas funciones de interés, las derivadas no siguen un patrón sencillo y no existe una fórmula para el polinomio de Taylor genérico.

Solución Para $f(x) = \ln x$, el término constante de $T_n(x)$ en $a = 1$ es cero, pues $f(1) = \ln 1 = 0$. A continuación, se calculan las derivadas:

$$f'(x) = x^{-1} \qquad f''(x) = -x^{-2} \qquad f'''(x) = 2x^{-3} \qquad f^{(4)}(x) = -3\cdot 2x^{-4}$$

De igual manera, $f^{(5)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2x^{-5}$. El patrón general es que $f^{(k)}(x)$ es un múltiplo de x^{-k}, con un coef ciente $\pm(k-1)!$ que alterna su signo:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k} \qquad \boxed{1}$$

El coef ciente de $(x-1)^k$ en $T_n(x)$ es:

$$\frac{f^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad (\text{para } k \geq 1)$$

Polinomios de Taylor para $\ln x$ *en* $a = 1$:

$$T_1(x) = (x - 1)$$

$$T_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

$$T_3(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

Así, los coef cientes para $k \geq 1$ forman una secuencia $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$, y:

$$T_n(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x - 1)^n$$ ■

■ **EJEMPLO 4 Coseno** Halle los polinomios de Maclaurin de $f(x) = \cos x$.

Solución Las derivadas siguen un patrón repetitivo de periodo 4:

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cdots$$

En general, $f^{(j+4)}(x) = f^{(j)}(x)$. Las derivadas en $x = 0$ también siguen un patrón:

$f(0)$	$f'(0)$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f^{(4)}(0)$	$f^{(5)}(0)$	$f^{(6)}(0)$	$f^{(7)}(0)$	$\cdots$
1	0	-1	0	1	0	-1	0	$\cdots$

El matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) fue profesor en Edimburgo. Newton estaba tan impresionado por su trabajo que una vez se ofreció a pagar parte del sueldo de Maclaurin.

Así, los coef cientes de las potencias impares x^{2k+1} son cero y los coef cientes de las potencias pares x^{2k} alternan su signo y son iguales a $(-1)^k/(2k)!$:

$$T_0(x) = T_1(x) = 1 \qquad T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

$$T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

La f gura 5 muestra que cuando n aumenta, $T_n(x)$ aproxima a $f(x) = \cos x$ mejor y sobre intervalos cada vez más grandes, pero fuera de este intervalo la aproximación falla. ■

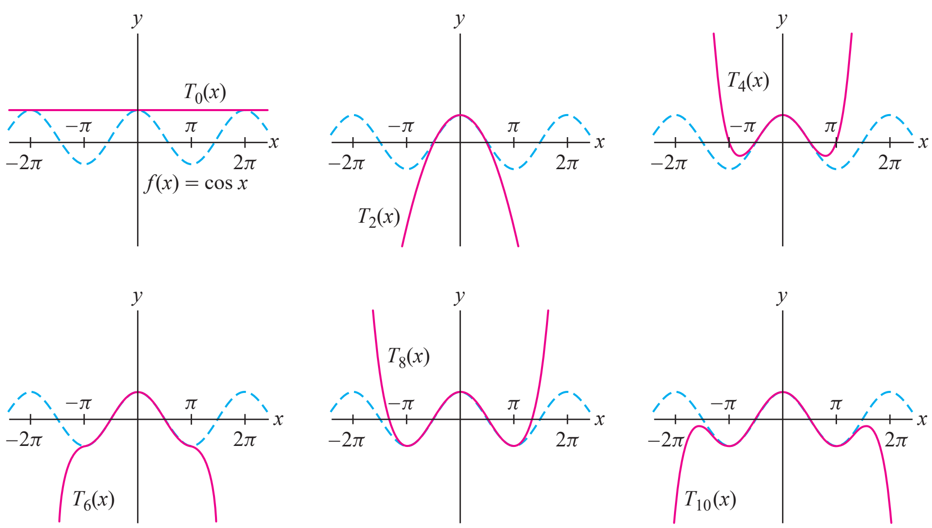


FIGURA 5 Polinomios de Maclaurin para $f(x) = \cos x$. La gráf ca de $f(x)$ se muestra como una curva a trazos.

■ **EJEMPLO 5 ¿A qué distancia está el horizonte?** Valerie está en la playa, mirando hacia el océano (f gura 6). ¿Hasta dónde puede ver? Utilice los polinomios de Maclaurin para estimar la distancia d, suponiendo que los ojos de Valerie se encuentran a una altura de $h = 1{,}7$ m por encima del suelo. ¿Y si mira desde una ventana para la que sus ojos quedan a una altura de 20 m?

FIGURA 6 Vista desde la playa.

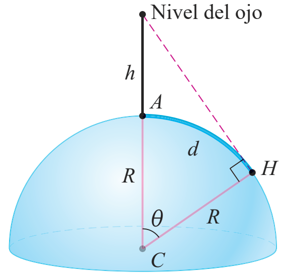


FIGURA 7 Valerie puede ver hasta una distancia $d = R\theta$, la longitud de arco AH.

Solución Sea R el radio de la Tierra. En la f gura 7 se muestra que Valerie puede ver hasta una distancia $d = R\theta$, la longitud del arco circular AH de la f gura 7. Se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{R}{R+h}$$

En este cálculo se ignora la desviación de la luz (llamada refracción) cuando atraviesa la atmósfera. La refracción suele aumentar d en un 10 %, aunque el efecto real es complejo y varía con la temperatura de la atmósfera.

El punto clave es que θ es próximo a cero (tanto θ como h son mucho menores que los mostrados en la f gura), por lo que se pierde muy poca precisión si se reemplaza $\cos\theta$ por el polinomio de Maclaurin de segundo orden, $T_2(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, que se calculó en el ejemplo 4:

$$1 - \frac{1}{2}\theta^2 \approx \frac{R}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \theta^2 \approx 2 - \frac{2R}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R+h}}$$

Además, h es muy pequeño comparado con R, por lo que se puede reemplazar $R + h$ por R y obtener:

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2Rh}$$

El radio de la Tierra es aproximadamente $R \approx 6{,}37 \times 10^6$ m, por lo que:

$$d = \sqrt{2Rh} \approx \sqrt{2(6{,}37 \times 10^6)h} \approx 3569\sqrt{h}\ \text{m}$$

En particular, se observa que d es proporcional a $\sqrt{h}$.

Si los ojos de Valerie se encuentran a una altura de $h = 1{,}7$ m, entonces $d \approx 3569\sqrt{1{,}7} \approx 4653$ m, practicamente 4,7 km. Si $h = 20$ m, entonces $d \approx 3569\sqrt{20} \approx 15{,}96$ m, casi 16 km. ■

La cota del error

Para utilizar los polinomios de Taylor con ef cacia, se necesita poder estimar la magnitud del error. Esta cuestión se resuelve en el siguiente teorema, en el que se muestra que la magnitud de este error depende de la magnitud de la derivada $(n + 1)$ de la función.

Se proporciona una demostración del teorema 2 al final de esta sección.

TEOREMA 2 Cota de error Suponga que $f^{(n+1)}(x)$ existe y que es continua. Sea K un número tal que $|f^{(n+1)}(u)| \leq K$ para todo u entre a y x. Entonces

$$\boxed{|f(x) - T_n(x)| \leq K\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n centrado en $x = a$.

EJEMPLO 6 Utilizando la cota del error Aplique la cota del error a

$$|\ln 1{,}2 - T_3(1{,}2)|$$

donde $T_3(x)$ es el polinomio de Taylor de tercer orden para $f(x) = \ln x$ en $a = 1$. Compruebe su resultado con una calculadora.

Solución

Etapa 1.* Halle un valor de *K

Para utilizar la cota del error con $n = 3$, se debe determinar un valor de K tal que $|f^{(4)}(u)| \le K$ para todo u entre $a = 1$ y $x = 1{,}2$. Tal y como se obtuvo en el ejemplo 3, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$. El valor absoluto $|f^{(4)}(x)|$ es estrictamente decreciente para $x > 0$, por lo que el valor máximo en $[1,\ 1{,}2]$ es $|f^{(4)}(1)| = 6$. Así, se puede considerar $K = 6$.

***Etapa 2.* Aplique la cota del error**

$$|\ln 1{,}2 - T_3(1{,}2)| \le K\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 6\frac{|1{,}2-1|^4}{4!} \approx 0{,}0004$$

***Etapa 3.* Compruebe el resultado**

Recuerde, del ejemplo 3, que:

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

Los siguientes valores, que se han obtenido mediante una calculadora, conf rman que el error es, a lo sumo, de 0,0004:

$$|\ln 1{,}2 - T_3(1{,}2)| \approx |0{,}182667 - 0{,}182322| \approx 0{,}00035 < 0{,}0004$$

Observe en la f gura 8 que $\ln x$ y $T_3(x)$ son indistinguibles alrededor de $x = 1{,}2$.

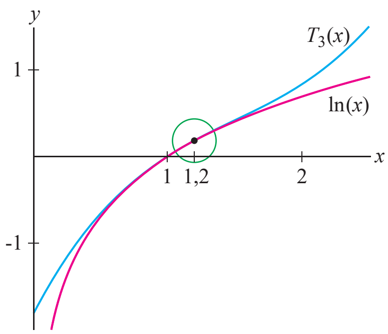


FIGURA 8 $\ln x$ y $T_3(x)$ son indistinguibles alrededor de $x = 1{,}2$.

EJEMPLO 7 Aproximando, con una precisión establecida Sea $T_n(x)$ el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x) = \cos x$. Determine un valor de n tal que:

$$|\cos 0{,}2 - T_n(0{,}2)| < 10^{-5}$$

Solución

Etapa 1.* Halle un valor de *K

Como $|f^{(n)}(x)|$ es $|\cos x|$ o $|\operatorname{sen} x|$, según si n es par o impar, se puede af rmar que $|f^{(n)}(u)| \le 1$ para todo u. Así, se puede aplicar la cota del error con $K = 1$.

Para utilizar la cota del error, no es necesario hallar el menor valor posible de K. En este ejemplo, se considera $K = 1$. Este valor funciona para todo n, pero para n impar se podría haber utilizado el menor valor de K dado por $K = \operatorname{sen} 0{,}2 \approx 0{,}2$.

Etapa 2.* Determine un valor de *n

Según la cota para el error:

$$|\cos 0{,}2 - T_n(0{,}2)| \le K\frac{|0{,}2-0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|0{,}2|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para que el error sea menor que 10^{-5}, se debe seleccionar n de manera que:

$$\frac{|0{,}2|^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

No es posible resolver esta desigualdad en n, pero se puede determinar un valor apropiado de n probando con diferentes valores:

n	2	3	4
$\frac{\|0{,}2\|^{n+1}}{(n+1)!}$	$\frac{0{,}2^3}{3!} \approx 0{,}0013$	$\frac{0{,}2^4}{4!} \approx 6{,}67 \times 10^{-5}$	$\frac{0{,}2^5}{5!} \approx 2{,}67 \times 10^{-6} < 10^{-5}$

Se observa que el error es menor que 10^{-5} para $n = 4$.

El resto de esta sección está dedicada a una demostración de la cota del error (teorema 2). Se define el **resto de orden *n*** como:

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$$

El error en $T_n(x)$ es igual al valor absoluto $|R_n(x)|$. Como primera etapa en la demostración de la cota del error, se probará que $R_n(x)$ se puede expresar mediante una integral.

Teorema de Taylor Suponga que $f^{(n+1)}(x)$ existe y es continua. Entonces:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du} \tag{2}$$

Demostración Sea:

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du$$

En el problema 64 se considera esta demostración para el caso especial $n = 2$.

El objetivo es probar que $R_n(x) = I_n(x)$. Si $n = 0$, $R_0(x) = f(x) - f(a)$ y el resultado en cuestión es simplemente una reformulación del teorema fundamental del cálculo:

$$I_0(x) = \int_a^x f'(u)\,du = f(x) - f(a) = R_0(x)$$

Para demostrar la fórmula para $n > 0$, se aplica integración por partes a $I_n(x)$ con:

$$h(u) = \frac{1}{n!}(x-u)^n \qquad g(u) = f^{(n)}(u)$$

Entonces $g'(u) = f^{(n+1)}(u)$ y

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_a^x h(u)\,g'(u)\,du = h(u)g(u)\Big|_a^x - \int_a^x h'(u)g(u)\,du = \\ &= \frac{1}{n!}(x-u)^n f^{(n)}(u)\Big|_a^x - \frac{1}{n!}\int_a^x (-n)(x-u)^{n-1} f^{(n)}(u)\,du = \\ &= -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + I_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Esto se puede reescribir como:

$$I_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + I_n(x)$$

Ahora aplique esta relación n veces, observando que $I_0(x) = f(x) - f(a)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + I_0(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + I_1(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + I_2(x) = \\ &\vdots \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + I_n(x) \end{aligned}$$

Así se ha demostrado que $f(x) = T_n(x) + I_n(x)$ y, por consiguiente, $I_n(x) = R_n(x)$, tal y como se pretendía probar. ■

En la ec. (3), se utiliza la desigualdad

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

que es cierta para cualquier función integrable.

Ahora se puede demostrar el teorema 2. Suponga, en primer lugar, que $x \ge a$. Entonces:

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_a^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n!}\int_a^x \left|(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\right|\,du \le \qquad \boxed{3}$$

$$\le \frac{K}{n!}\int_a^x |x-u|^n\,du = \qquad \boxed{4}$$

$$= \frac{K}{n!}\left.\frac{-(x-u)^{n+1}}{n+1}\right|_{u=a}^{x} = K\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Observe que el valor absoluto no es necesario en la ec. (4) pues $x - u \ge 0$ para $a \le u \le x$. Si $x \le a$, se deben intercambiar los límites inferior y superior de la integral en la ec. (3) y en la ec. (4). ■

9.4 RESUMEN

- El *polinomio de Taylor* de orden n centrado en $x = a$ para la función $f(x)$ es:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Cuando $a = 0$, $T_n(x)$ también se denomina el *polinomio de Maclaurin* de orden n.

- Si $f^{(n+1)}(x)$ existe y es continua, entonces la *cota del error* es:

$$|T_n(x) - f(x)| \le K\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde K es un número tal que $|f^{(n+1)}(u)| \le K$ para todo u entre a y x.

- Como referencia, se incluye una tabla de polinomios de Maclaurin y de Taylor, estándar:

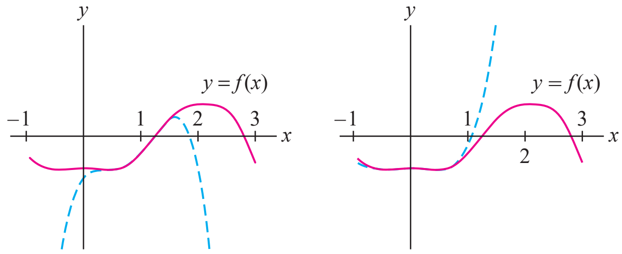
$f(x)$	a	Polinomio de Maclaurin o de Taylor
e^x	0	$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
$\operatorname{sen} x$	0	$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	0	$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\ln x$	1	$T_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$
$\frac{1}{1-x}$	0	$T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

9.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sea $f(x)$ una función tal que $f(3) = 9$, $f'(3) = 8$, $f''(3) = 4$ y $f'''(3) = 12$. Calcule $T_3(x)$ centrado en $a = 3$.

2. Los gráf cos de trazos en la f gura 9 son los polinomios de Taylor de una cierta función $f(x)$. ¿Cuál de los dos es un polinomio de Maclaurin?



(A) (B)

FIGURA 9

3. ¿Para qué valor de x el polinomio de Maclaurin $T_n(x)$ verif ca que $T_n(x) = f(x)$, independientemente de la función $f(x)$?

4. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Maclaurin de una función $f(x)$ tal que $|f^{(4)}(x)| \leq 1$ para todo x. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones se obtiene al considerar la correspondiente cota del error?

(a) $|T_4(2) - f(2)| \leq \frac{2}{3}$

(b) $|T_3(2) - f(2)| \leq \frac{2}{3}$

(c) $|T_3(2) - f(2)| \leq \frac{1}{3}$

Problemas

En los problemas 1-14, calcule los polinomios de Taylor $T_2(x)$ y $T_3(x)$ centrados en $x = a$, para la función y valor de a indicados.

1. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \dfrac{\pi}{2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 2$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad a = -1$

5. $f(x) = x^4 - 2x, \quad a = 3$

6. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}, \quad a = -2$

7. $f(x) = \tan x, \quad a = 0$

8. $f(x) = \tan x, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

9. $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}, \quad a = 0$

10. $f(x) = e^{2x}, \quad a = \ln 2$

11. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad a = 1$

12. $f(x) = \cosh 2x, \quad a = 0$

13. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad a = 1$

14. $f(x) = \ln(x+1), \quad a = 0$

15. Pruebe que el polinomio de Maclaurin de orden n para e^x es:

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

16. Pruebe que el polinomio de Taylor de orden n para $\dfrac{1}{x+1}$ en $a = 1$ es:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{4} + \frac{(x-1)^2}{8} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$$

17. Pruebe que los polinomios de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ son:

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

18. Pruebe que los polinomios de Maclaurin para $\ln(1+x)$ son:

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

En los problemas 19-24, determine $T_n(x)$ en $x = a$ para todo n.

19. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 0$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad a = 4$

21. $f(x) = e^x, \quad a = 1$

22. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 2$

23. $f(x) = \cos x, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

24. $f(\theta) = \operatorname{sen} 3\theta, \quad a = 0$

En los problemas 25-28, determine $T_2(x)$ y utilice una calculadora para evaluar el error $|f(x) - T_2(x)|$, con los valores de a y x facilitados.

25. $y = e^x, \quad a = 0, \quad x = -0{,}5$

26. $y = \cos x, \quad a = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{12}$

27. $y = x^{-2/3}, \quad a = 1, \quad x = 1{,}2$

28. $y = e^{\operatorname{sen} x}, \quad a = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = 1{,}5$

29. GU Determine $T_3(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$ centrado en $a = 1$. A continuación, utilice una representación gráf ca del error $|f(x) - T_3(x)|$ para determinar un valor $c > 1$ tal que el error en el intervalo $[1, c]$ sea, a lo sumo, 0,25.

30. SAC Represente gráf camente $f(x) = 1/(1+x)$ junto con los polinomios de Taylor $T_n(x)$ en $a = 1$ para $1 \leq n \leq 4$ en el intervalo $[-2, 8]$ (asegúrese de limitar superiormente el rango).

(a) ¿Sobre qué intervalo parece que $T_4(x)$ aproxima mejor a $f(x)$?

(b) ¿Qué observa si $x < -1$?

(c) Utilice su programa informático de cálculo simbólico para obtener y representar gráf camente T_{30} junto con $f(x)$ en $[-2, 8]$. ¿Sobre qué intervalo parece que T_{30} proporciona una mejor aproximación?

31. Sea $T_3(x)$ el polinomio de Maclaurin de $f(x) = e^x$. Utilice la cota del error para hallar el valor máximo posible para $|f(1{,}1) - T_3(1{,}1)|$. Pruebe que se puede considerar $K = e^{1,1}$.

32. Sea $T_2(x)$ el polinomio de Taylor de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$. Utilice la cota del error para hallar el valor máximo posible para el error $|f(3{,}9) - T_2(3{,}9)|$.

En los problemas 33-36, calcule el polinomio de Taylor indicado y utilice la cota del error para hallar el valor máximo posible para el error. Compruebe su resultado con una calculadora.

33. $f(x) = \cos x, \quad a = 0; \quad |\cos 0{,}25 - T_5(0{,}25)|$

34. $f(x) = x^{11/2}, \quad a = 1; \quad |f(1{,}2) - T_4(1{,}2)|$

35. $f(x) = x^{-1/2}, \quad a = 4; \quad |f(4{,}3) - T_3(4{,}3)|$

36. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad a = 8; \quad |\sqrt{9{,}02} - T_3(8{,}02)|$

37. Calcule el polinomio de Maclaurin $T_3(x)$ para $f(x) = \tan^{-1} x$. Calcule $T_3(\frac{1}{2})$ y use la cota del error para hallar una cota del error $\left|\tan^{-1}\frac{1}{2} - T_3(\frac{1}{2})\right|$. Haga referencia a la gráfca de la fgura 10 para determinar un valor adecuado de K. Compruebe su resultado evaluando $\left|\tan^{-1}\frac{1}{2} - T_3(\frac{1}{2})\right|$ con una calculadora.

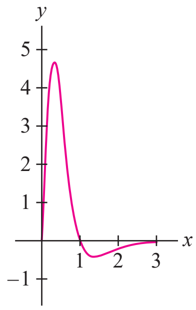


FIGURA 10 Gráfca de $f^{(4)}(x) = \dfrac{-24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$, para $f(x) = \tan^{-1} x$.

38. Sea $f(x) = \ln(x^3 - x + 1)$. El polinomio de Taylor de tercer orden en $a = 1$ es:

$$T_3(x) = 2(x-1) + (x-1)^2 - \frac{7}{3}(x-1)^3$$

Halle el valor máximo posible de $|f(1{,}1) - T_3(1{,}1)|$, utilizando la gráfca de la fgura 11 para determinar un valor adecuado de K. Compruebe su resultado evaluando $|f(1{,}1) - T_3(1{,}1)|$ con una calculadora.

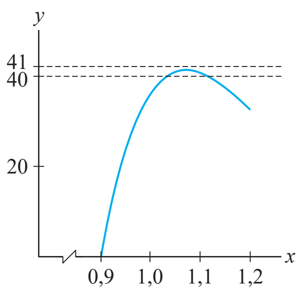


FIGURA 11 Gráfca $f^{(4)}(x)$, para $f(x) = \ln(x^3 - x + 1)$.

39. GU Calcule $T_3(x)$ en $a = 0{,}5$ para $f(x) = \cos(x^2)$ y use la cota del error para hallar el valor máximo posible de $|f(0{,}6) - T_2(0{,}6)|$. Represente gráfcamente $f^{(4)}(x)$ para determinar un valor adecuado de K.

40. GU Calcule el polinomio de Maclaurin $T_2(x)$ para $f(x) = \operatorname{sech} x$ y use la cota del error para hallar el valor máximo posible de $\left|f(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2})\right|$. Represente gráfcamente $f'''(x)$ para determinar un valor adecuado de K.

En los problemas 41-44, utilice la cota del error para determinar un valor de n para el que la desigualdad del enunciado se cumpla. Después compruebe su resultado utilizando una calculadora.

41. $|\cos 0{,}1 - T_n(0{,}1)| \le 10^{-7}, \quad a = 0$

42. $|\ln 1{,}3 - T_n(1{,}3)| \le 10^{-4}, \quad a = 1$

43. $|\sqrt{1{,}3} - T_n(1{,}3)| \le 10^{-6}, \quad a = 1$

44. $|e^{-0{,}1} - T_n(-0{,}1)| \le 10^{-6}, \quad a = 0$

45. Sea $f(x) = e^{-x}$ y $T_3(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$. Use la cota del error para probar que para todo $x \ge 0$:

$$|f(x) - T_3(x)| \le \frac{x^4}{24}$$

Si dispone de un programa de representación gráfca, ilustre esta desigualdad representando conjuntamente $f(x) - T_3(x)$ y $x^4/24$ en $[0, 1]$.

46. Use la cota del error con $n = 4$ para probar que:

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \le \frac{|x|^5}{120} \quad \text{(para todo } x\text{)}$$

47. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Taylor para $f(x) = \ln x$ en $a = 1$ y sea $c > 1$. Pruebe que:

$$|\ln c - T_n(c)| \le \frac{|c-1|^{n+1}}{n+1}$$

A continuación, halle un valor de n tal que $|\ln 1{,}5 - T_n(1{,}5)| \le 10^{-2}$.

48. Sea $n \ge 1$. Pruebe que si $|x|$ es pequeño, entonces:

$$(x+1)^{1/n} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2}x^2$$

Utilice esta aproximación con $n = 6$ para estimar $1{,}5^{1/6}$.

49. Compruebe que el polinomio de Maclaurin de tercer orden para $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ es igual al producto de los polinomios de Maclaurin de tercer orden de e^x y $\operatorname{sen} x$ (descarte los términos de grado superior a 3 en el producto).

50. Halle el polinomio de Maclaurin de cuarto orden para $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ multiplicando los polinomios de cuarto orden para $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$.

51. Halle los polinomios de Maclaurin $T_n(x)$ para $f(x) = \cos(x^2)$. Puede utilizar el hecho de que $T_n(x)$ es igual a la suma de los términos de grado menor o igual que n, que se obtienen sustituyendo x^2 por x en el polinomio de Maclaurin de orden n para $\cos x$.

52. Halle los polinomios de Maclaurin $1/(1 + x^2)$ sustituyendo $-x^2$ por x en los polinomios de Maclaurin de $1/(1 - x)$.

53. Sea $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 4$. Determine $T_j(x)$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ tanto en $a = 0$ como en $a = 1$. Pruebe que, en ambos casos, $T_3(x) = f(x)$.

54. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Taylor de orden n en $x = a$ para un polinomio $f(x)$ de grado n. En base al resultado del problema 53, conjeture el valor de $|f(x) - T_n(x)|$. Pruebe que su conjetura es correcta, utilizando la cota del error.

55. Sea $s(t)$ la distancia de un camión a un cruce. En el instante $t = 0$, el camión que se encuentra a 60 metros del cruce se desplaza a una velocidad de 24 m/s, y empieza a frenar con una aceleración de $a = -3$ m/s^2. Determine el polinomio de Maclaurin de segundo orden de $s(t)$ y use su resultado para estimar la distancia del camión al cruce pasados 4 s.

56. Un banco tiene una cartera de bonos cuyo valor $P(r)$ depende de la tasa de interés r (medida en porcentaje; por ejemplo, $r = 5$ quiere decir un 5 % de tasa de interés). El analista cuantitativo del banco establece que:

$$P(5) = 100\ 000 \qquad \left.\frac{dP}{dr}\right|_{r=5} = -40\ 000 \qquad \left.\frac{d^2P}{dr^2}\right|_{r=5} = 50\ 000$$

En finanzas cuantitativas, esta segunda derivada se llama **convexidad de un bono**. Determine el polinomio de Taylor de segundo orden de $P(r)$ centrado en $r = 5$, y utilice su resultado para estimar el valor de la cartera si la tasa de interés pasa a ser del $r = 5{,}5\,\%$.

57. Un anillo estrecho, con carga negativa y de radio R, ejerce una fuerza sobre una partícula P, de carga positiva y situada a una distancia x por encima del centro del anillo, de magnitud

$$F(x) = -\frac{kx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

donde $k > 0$ es una constante (figura 12).

(a) Obtenga el polinomio de Maclaurin de tercer orden para $F(x)$.

(b) Pruebe que $F \approx -(k/R^3)x$ hasta el segundo orden. Esto prueba que cuando x es pequeño, $F(x)$ se comporta como una fuerza de recuperación similar a la fuerza ejercida por un muelle.

(c) Pruebe que $F(x) \approx -k/x^2$, para valores elevados de x, mostrando que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{-k/x^2} = 1$$

Así, $F(x)$ se comporta como una ley cuadrática inversa y, desde lejos, el anillo cargado parece una carga puntual.

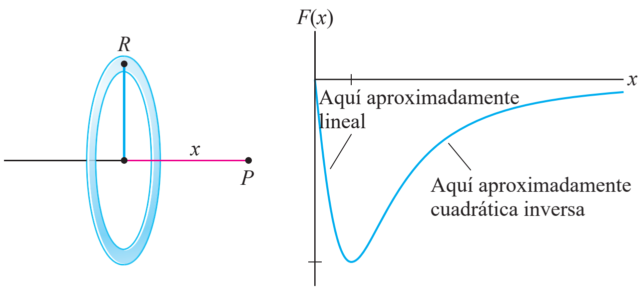


FIGURA 12

58. Una onda de luz de longitud de onda λ se desplaza desde A a B pasando a través un orificio (región circular) situada en un plano que es perpendicular a $\overline{AB}$ (vea la figura 13 para la notación). Sea $f(r) = d' + h'$; es decir, $f(r)$ es la distancia $AC + CB$ como función de r.

(a) Pruebe que $f(r) = \sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{h^2 + r^2}$, y use el polinomio de Maclaurin de orden 2 para probar que:

$$f(r) \approx d + h + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{h}\right)r^2$$

(b) Las **zonas de Fresnel**, utilizadas para determinar las distorsiones ópticas en B, son bandas concéntricas limitadas por circunferencias de radios R_n tales que $f(R_n) = d + h + n\lambda/2$. Pruebe que $R_n \approx \sqrt{n\lambda L}$, donde $L = (d^{-1} + h^{-1})^{-1}$.

(c) Estime los radios R_1 y R_{100} para la luz azul ($\lambda = 475 \times 10^{-7}$ cm) si $d = h = 100$ cm.

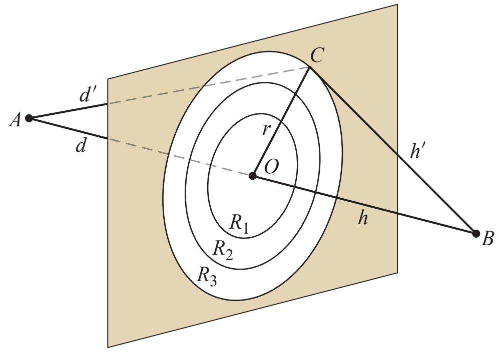


FIGURA 13 Las zonas de Fresnel son las regiones limitadas por las circunferencias de radios R_n.

59. Considere la figura 14 y sea a la longitud de la cuerda $\overline{AC}$, de ángulo θ, en la circunferencia unitaria. Deduzca la siguiente aproximación, por exceso, del arco sobre la cuerda:

$$\theta - a \approx \frac{\theta^3}{24}$$

Indicación: pruebe que $\theta - a = \theta - 2\,\text{sen}(\theta/2)$ y use el polinomio de Maclaurin de tercer orden como una aproximación.

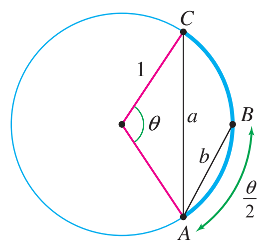


FIGURA 14 Circunferencia unitaria.

60. Para estimar la longitud θ de un arco circular en la circunferencia unitaria, el científico danés del siglo XVII Christian Huygens utilizó la aproximación $\theta \approx (8b - a)/3$, donde a la longitud de la cuerda $\overline{AC}$ de ángulo θ y b es la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ de ángulo $\theta/2$ (figura 14).

(a) Demuestre que $a = 2\,\text{sen}(\theta/2)$ y $b = 2\,\text{sen}(\theta/4)$, y pruebe que la aproximación de Huygens equivale a la aproximación:

$$\theta \approx \frac{16}{3}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{4} - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

(b) Obtenga el polinomio de Maclaurin de quinto orden de la función de la derecha.

(c) Utilice la cota del error para probar que el error en la aproximación de Huygens es menor que $0{,}00022|\theta|^5$.

Problemas avanzados

61. Pruebe que el polinomio de Maclaurin de orden n de $f(x) = \arcsen x$ para n impar es:

$$T_n(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}\frac{x^n}{n}$$

62. Sea $x \geq 0$ y suponga que $f^{(n+1)}(t) \geq 0$ para $0 \leq t \leq x$. Utilice el teorema de Taylor para probar que el polinomio de Maclaurin de orden n, $T_n(x)$, cumple:

$$T_n(x) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

63. Aplique el problema 62 para probar que para $x \geq 0$ y n cualquiera:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Dibuje las gráf cas de e^x, $T_1(x)$ y $T_2(x)$ en el mismo sistema de ejes. ¿Continúa siendo cierta esta desigualdad para $x < 0$?

64. Este ejercicio tiene como objetivo revisar la demostración del teorema de Taylor.

(a) Pruebe que $f(x) = T_0(x) + \displaystyle\int_a^x f'(u)\,du$.

(b) Utilice integración por partes para demostrar la fórmula:

$$\int_a^x (x-u)f^{(2)}(u)\,du = -f'(a)(x-a) + \int_a^x f'(u)\,du$$

(c) Demuestre el caso $n = 2$ del teorema de Taylor:

$$f(x) = T_1(x) + \int_a^x (x-u)f^{(2)}(u)\,du.$$

En los problemas 65-69, se estiman las integrales utilizando los polinomios de Taylor. El problema 66 sirve para estimar el error.

65. Halle el cuarto polinomio de Maclaurin $T_4(x)$ para $f(x) = e^{-x^2}$ y calcule $I = \int_0^{1/2} T_4(x)\,dx$ como una estimación de $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$. Mediante un programa informático de cálculo simbólico, se obtiene que $I \approx 0{,}4794255$. ¿Cuál es el error en su aproximación? *Indicación:* $T_4(x)$ se obtiene sustituyendo $-x^2$ en el polinomio de Maclaurin de segundo orden para e^x.

66. Aproximación de integrales Sea $L > 0$. Pruebe que si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen $|f(x) - g(x)| < L$ para todo $x \in [a, b]$, entonces:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| dx < L(b-a)$$

67. Sea $T_4(x)$ el polinomio de Maclaurin de cuarto orden para $\cos x$.

(a) Pruebe que $|\cos x - T_4(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6/6!$ para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$. *Indicación:* $T_4(x) = T_5(x)$.

(b) Evalúe $\int_0^{1/2} T_4(x)\,dx$ como una aproximación de $\int_0^{1/2} \cos x\,dx$. Aplique el problema 66 para determinar una cota de la magnitud del error cometido en la aproximación.

68. Sea $Q(x) = 1 - x^2/6$. Utilice la cota de error para $\operatorname{sen} x$ con el f n de probar que:

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - Q(x) \right| \leq \frac{|x|^4}{5!}$$

A continuación, calcule $\int_0^1 Q(x)\,dx$ como una aproximación de $\int_0^1 (\operatorname{sen} x/x)\,dx$ y determine una cota para el error.

69. (a) Calcule el polinomio de Maclaurin de orden 6, $T_6(x)$, para $\operatorname{sen}(x^2)$ sustituyendo x^2 en $P(x) = x - x^3/6$, el polinomio de Maclaurin de orden 3 para $\operatorname{sen} x$.

(b) Pruebe que $|\operatorname{sen}(x^2) - T_6(x)| \leq \dfrac{|x|^{10}}{5!}$.

Indicación: sustituya x^2 por x en la cota de error de $|\operatorname{sen} x - P(x)|$, observando que $P(x)$ es también el polinomio de Maclaurin de cuarto orden para $\operatorname{sen} x$.

(c) Use $T_6(x)$ para aproximar $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ y halle una cota para el error cometido en la aproximación.

70. Demuestre por inducción que, para todo k, se tiene:

$$\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{(x-a)^k}{k!}\right) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)(x-a)^{k-j}}{k!}$$

$$\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{(x-a)^k}{k!}\right)\Bigg|_{x=a} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Utilice estos resultados para demostrar que $T_n(x)$ coincide con $f(x)$ en $x = a$ hasta orden n.

71. Sea a un número cualquiera y

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

un polinomio de grado menor o igual que n.

(a) Pruebe que si $P^{(j)}(a) = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n$, entonces $P(x) = 0$, es decir, $a_j = 0$ para todo j. *Indicación:* aplique inducción, observando que si el enunciado es válido hasta grado $n-1$, entonces $P'(x) = 0$.

(b) Demuestre que $T_n(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que coincide con $f(x)$ en $x = a$ hasta orden n. *Indicación:* si $Q(x)$ es otro polinomio de las mismas características, aplique (a) a $P(x) = T_n(x) - Q(x)$.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

En los problemas 1-4, calcule la longitud de arco en el intervalo indicado.

1. $y = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{x^{-3}}{6}$, $[1, 2]$

2. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$, $[0, 2]$

3. $y = 4x - 2$, $[-2, 2]$

4. $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$

5. Pruebe que la longitud de arco de $y = 2\sqrt{x}$ en $[0, a]$ es igual a $\sqrt{a(a+1)} + \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a+1})$. *Indicación:* considere la sustitución $x = \tan^2\theta$ en la integral de la longitud de arco.

6. SAC Calcule la aproximación trapezoidal T_5 para la longitud de arco s de $y = \tan x$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$.

En los problemas 7-10, calcule el área del sólido que se obtiene rotando la curva en el intervalo indicado y respecto al eje x.

7. $y = x + 1$, $[0, 4]$

8. $y = \dfrac{2}{3}x^{3/4} - \dfrac{2}{5}x^{5/4}$, $[0, 1]$

9. $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2} - \dfrac{1}{2}x^{1/2}$, $[1, 2]$

10. $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $[0, 2]$

11. Calcule el área total de la moneda que se obtiene por rotación de la región de la f gura 1 respecto al eje x. Las partes superior e inferior de la región son semicírculos de radio 1 mm.

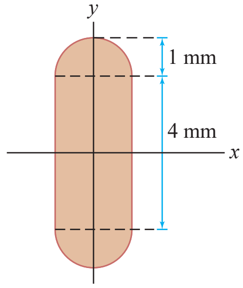


FIGURA 1

12. Calcule la fuerza del f uido sobre el lado de un triángulo rectángulo de altura 3 m y base 2 m que se sumerge verticalmente en agua, de manera que su vértice superior quede en la superf cie del agua.

13. Calcule la fuerza del f uido sobre el lado de un triángulo rectángulo de altura 3 m y base 2 m que se sumerge verticalmente en agua, de manera que su vértice se sitúe a una profundidad de 4 m.

14. Una placa con la forma de la región sombreada de la f gura 2 se sumerge en agua. Calcule la fuerza del f uido sobre el lado de la placa, si la superf cie del agua es $y = 1$.

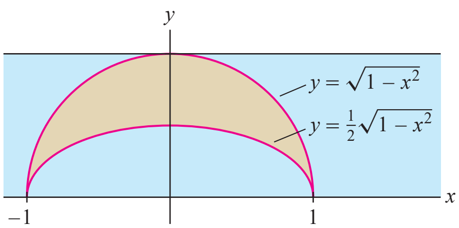


FIGURA 2

15. La f gura 3 muestra un cuerpo cuya cara es un triángulo equilátero de lado 5 metros. El objeto tiene 2 m de espesor y se sumerge en agua quedando su vértice 3 m por debajo de la superf cie del agua. Calcule la fuerza del f uido sobre una cara triangular y sobre uno de los bordes rectangulares inclinados del objeto.

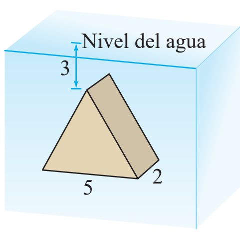


FIGURA 3

16. El f nal de un el depósito de aceite horizontal es una elipse (f gura 4) de ecuación $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$ (la longitud se expresa en metros). Suponga que el depósito se llena con un aceite de densidad 900 kg/m^3.

(a) Calcule la fuerza total F sobre la parte inferior del depósito cuando éste está lleno.

(b) ¿Qué espera, que la fuerza total sobre la mitad inferior del depósito sea menor, mayor o igual que $\frac{1}{2}F$? Justif que su respuesta. A continuación, calcule el valor exacto de la fuerza sobre la mitad inferior y conf rme (o rechace) su expectativa.

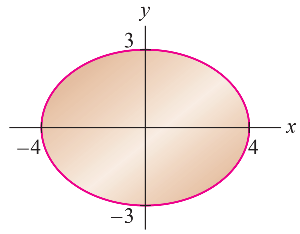


FIGURA 4

17. Calcule los momentos y el CM de la lámina que ocupa la región por debajo de $y = x(4 - x)$ para $0 \le x \le 4$, suponiendo una densidad de $\rho = 1200$ kg/m^3.

18. Dibuje la región entre $y = 4(x+1)^{-1}$ e $y = 1$ para $0 \le x \le 3$, y halle su centroide.

19. Halle el centroide de la región comprendida entre $y = \sqrt{1 - x^2}$ y la mitad superior de la elipse $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$ (f gura 2).

20. Halle el centroide de la región sombreada de la f gura 5 limitada a la izquierda por $x = 2y^2 - 2$ y a la derecha por una semicircunferencia de radio 1. *Indicación:* aplique simetría y la aditividad de los momentos.

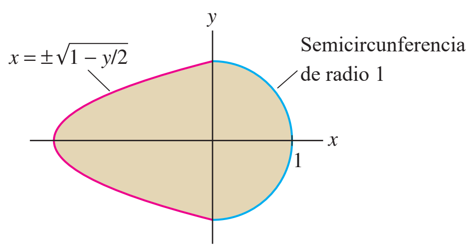


FIGURA 5

En los problemas 21-26, halle el polinomio de Taylor en $x = a$ para la función indicada.

21. $f(x) = x^3$, $T_3(x)$, $a = 1$

22. $f(x) = 3(x+2)^3 - 5(x+2)$, $T_3(x)$, $a = -2$

23. $f(x) = x\ln(x)$, $T_4(x)$, $a = 1$

24. $f(x) = (3x+2)^{1/3}$, $T_3(x)$, $a = 2$

25. $f(x) = xe^{-x^2}$, $T_4(x)$, $a = 0$

26. $f(x) = \ln(\cos x)$, $T_3(x)$, $a = 0$

27. Halle el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x) = e^{3x}$.

28. Halle el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = e^x$ para aproximar $\sqrt{e}$. Utilice una calculadora para evaluar el error.

29. Utilice el polinomio de Taylor de tercer orden de $f(x) = \tan^{-1} x$ en $a = 1$ para aproximar $f(1{,}1)$. Utilice una calculadora para evaluar el error.

30. Sea $T_4(x)$ el polinomio de Taylor para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$. Utilice la cota de error para hallar el valor máximo posible de $|f(17) - T_4(17)|$.

31. Halle n tal que $|e - T_n(1)| < 10^{-8}$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x) = e^x$.

32. Sea $T_4(x)$ el polinomio de Taylor para $f(x) = x \ln x$ en $a = 1$, calculado en el problema 23. Utilice la cota de error para hallar una cota de $|f(1{,}2) - T_4(1{,}2)|$.

33. Compruebe que $T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ es el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x) = 1/(1 - x)$. Pruebe, mediante sustitución, que el polinomio de Maclaurin de orden n para $f(x) = 1/(1 - x/4)$ es:

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4^2}x^2 + \cdots + \frac{1}{4^n}x^n$$

¿Cuál es el polinomio de Maclaurin de orden n para $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$?

34. Sean $f(x) = \dfrac{5}{4 + 3x - x^2}$ y a_k el coef ciente de x^k en el polinomio de Maclaurin $T_n(x)$ de $f(x)$, para $k \le n$.

(a) Pruebe que $f(x) = \dfrac{1/4}{1 - x/4} + \dfrac{1}{1 + x}$.

(b) Utilice el problema 33 para probar que $a_k = \dfrac{1}{4^{k+1}} + (-1)^k$.

(c) Calcule $T_3(x)$.

35. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Maclaurin de orden n para la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x$.

(a) Pruebe que $T_5(x) = T_6(x) = T_7(x) = T_8(x)$.

(b) Pruebe que $|f^n(x)| \le 1 + \cosh x$ para todo n. *Indicación:* observe que $|\operatorname{senh} x| \le |\cosh x|$ para todo x.

(c) Pruebe que $|T_8(x) - f(x)| \le \dfrac{2{,}6}{9!}|x|^9$ para $-1 \le x \le 1$.

El campeón del Tour de France, Lance Armstrong, prueba una bicicleta en túnel de viento de baja velocidad del San Diego Air & Space Technology en noviembre de 2008. Las prendas de vestir, posición del casco y postura de las manos de Armstrong son aerodinámicamente óptimas.

10 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

¿Volará este avión?... ¿Cómo se puede crear una imagen del interior del cuerpo humano utilizando los, tan débiles, rayos X?... ¿Qué es un diseño de un cuadro de una bicicleta que combina bajo peso con rigidez?... ¿En cuánto aumentará la temperatura de la Tierra si el dióxido de carbono en la atmósfera aumenta en un 20 por ciento?

An overview of applications of differential equations in *Computational Differential Equations*, K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson, Cambridge University Press, New York, 1996

Las ecuaciones diferenciales son una de las herramientas más potentes de las que se dispone para analizar el mundo matemáticamente. Se utilizan para formular las leyes fundamentales de la naturaleza (desde las leyes de Newton a las ecuaciones de Maxwell y las leyes de la mecánica cuántica) y para modelar los más variados fenómenos físicos. La cita anterior menciona sólo algunas de las innumerables aplicaciones. En este capítulo se ofrece una introducción a algunas técnicas elementales y las aplicaciones de este importante tema.

10.1 Resolución de ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función desconocida $y = y(x)$ y sus derivadas, primera o de orden superior. Una **solución** es una función $y = f(x)$ que cumple esa ecuación. Tal y como se ha visto en los capítulos previos, las soluciones suelen depender de una o más constantes arbitrarias (denotadas como A, B y C en los siguientes ejemplos):

Ecuación diferencial	Solución general
$y' = -2y$	$y = Ce^{-2x}$
$\dfrac{dy}{dt} = t$	$y = \dfrac{1}{2}t^2 + C$
$y'' + y = 0$	$y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

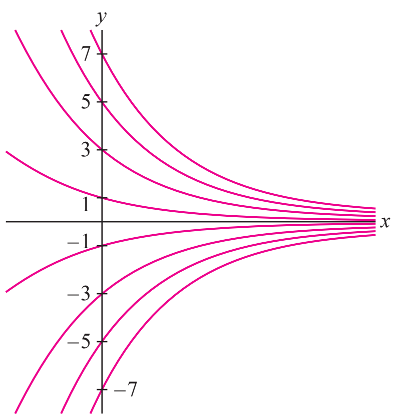


FIGURA 1 Familia de soluciones de $y' = -2y$.

Una expresión como $y = Ce^{-2x}$ se denomina una **solución general**. Para cada valor de C, se obtiene una **solución particular**. Las gráf cas de las soluciones al variar C dan lugar a una familia de curvas en el plano xy (f gura 1).

El primer paso en el estudio de las ecuaciones diferenciales es clasif car las ecuaciones respecto a diferentes propiedades. El atributo más importante de una ecuación diferencial es su orden y si es, o no, lineal.

El **orden** de una ecuación diferencial es el mayor orden de las derivadas que aparecen en la ecuación. La solución general de una ecuación de orden n suele involucrar n constantes arbitrarias. Por ejemplo:

$$y'' + y = 0$$

es de orden 2 y su solución general tiene dos constantes arbitrarias A y B, tal y como se puede consultar en la tabla anterior.

Una ecuación diferencial se denomina **lineal** si se puede expresar de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Los coef cientes $a_j(x)$ y $b(x)$ pueden ser funciones arbitrarias de x, pero una ecuación diferencial no puede contener términos como y^3, yy' o $\operatorname{sen} y$.

Ecuación diferencial	Orden	Lineal o no lineal
$x^2y' + e^xy = 4$	Primer orden	Lineal
$x(y')^2 = y + x$	Primer orden	No lineal (pues aparece $(y')^2$)
$y'' = (\operatorname{sen} x)y'$	Segundo orden	Lineal
$y''' = x(\operatorname{sen} y)$	Tercer orden	No lineal (pues aparece $\operatorname{sen} y$)

En este capítulo se considerarán únicamente ecuaciones diferenciales de primer orden.

Separación de variables

Estamos familiarizados con el tipo de ecuación diferencial más sencilla, que es $y' = f(x)$. Una solución de ésta es, simplemente, una primitiva de $f(x)$; así, se puede escribir la solución general como:

$$y = \int f(x)\,dx$$

Una clase más general de ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden ser resueltas directamente por integración son las **ecuaciones de variables separables**, que tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad \boxed{1}$$

Por ejemplo:

- $\dfrac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} x)y$ es separable.
- $\dfrac{dy}{dx} = x + y$ no es separable porque $x + y$ no es un *producto* $f(x)g(y)$.

En la separación de variables, se manipulan dx y dy simbólicamente, como en la regla de sustitución.

Las ecuaciones de variables separables se resuelven por el método de la **separación de variables**: Pase los términos en y y dy a la izquierda, y los términos en x y dx a la derecha. Después, integre a lado y lado de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad \text{(ecuación separable)}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \qquad \text{(separe las variables)}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \qquad \text{(integre)}$$

Si estas integrales se pueden resolver, entonces se puede obtener y como una función de x.

■ **EJEMPLO 1** Pruebe que $y\dfrac{dy}{dx} - x = 0$ es de variables separables pero no lineal. A continuación, halle la solución general y represente gráf camente la familia de soluciones.

Solución Esta ecuación diferencial no es lineal porque contiene el término yy'. Para probar que es de variables separables, reescriba la ecuación como:

$$y\frac{dy}{dx} - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = xy^{-1} \quad \text{(ecuación separable)}$$

Ahora, aplique la separación de variables:

Observe que es suficiente una constante de integración en la ec. (2). No se necesita una constante adicional para la integral de la izquierda.

$$y\,dy = x\,dx \qquad \text{(separe las variables)}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{(integre)}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad \boxed{2}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2C} \qquad \text{(resuelva } y\text{)}$$

Como C es arbitraria, se puede reemplazar $2C$ por C con el resultado (f gura 2):

$$y = \pm\sqrt{x^2 + C}$$

Cada elección del signo, da lugar a una solución.

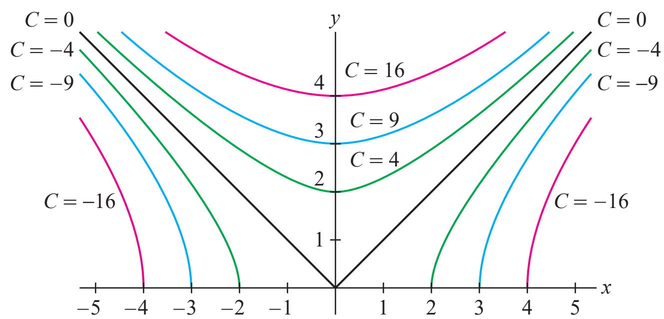


FIGURA 2 Soluciones de $y = \sqrt{x^2 + C}$ para $y\dfrac{dy}{dx} - x = 0$.

Es aconsejable comprobar que las soluciones que se han obtenido cumplen la ecuación diferencial. En nuestro caso, para la determinación positiva de la raíz (la determinación negativa es similar), se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + C} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + C}}$$

$$y\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + C}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + C}}\right) = x \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} - x = 0$$

De esta manera, se ha comprobado que $y = \sqrt{x^2 + C}$ es una solución. ■

La mayor parte de las ecuaciones diferenciales que aparecen en las aplicaciones prácticas cumplen una propiedad de existencia y unicidad*: existe una y sólo una solución cumpliendo una condición inicial. En los textos sobre ecuaciones diferenciales, se tratan teoremas generales de existencia y unicidad.*

Aunque es útil determinar soluciones generales, en las aplicaciones prácticas se suele estar interesado en la solución que describa una situación física concreta. La solución general de una ecuación de primer orden generalmente depende de una constante arbitraria, por lo que se puede escoger una solución particular $y(x)$ especif cando su valor $y(x_0)$ para un cierto x_0 concreto (f gura 3). Esta especif cación se denomina una **condición inicial.** Una ecuación diferencial junto con una condición inicial se denomina un **problema de valores iniciales.**

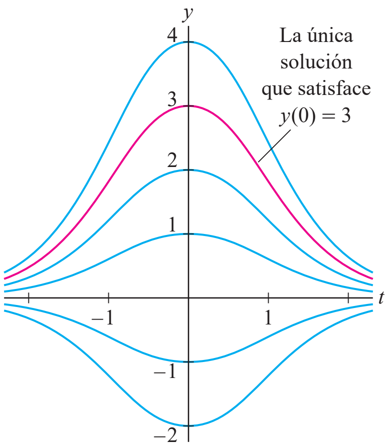


FIGURA 3 La condición inicial $y(0) = 3$ determina una curva de la familia de soluciones de $y' = -ty$.

Si se considera $C = 0$ en la ec. (3), se obtiene la solución $y = 0$. El procedimiento de separación de variables no proporciona directamente esta solución porque se ha dividido por y (en consecuencia, se ha asumido implícitamente que $y \neq 0$).

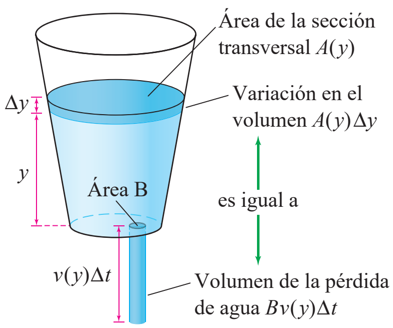


FIGURA 4 Fuga de agua en un depósito a través de un orificio de área B en el fondo.

■ **EJEMPLO 2 Problema de valores iniciales** Resuelva el problema de valores iniciales

$$y' = -ty \qquad y(0) = 3$$

Solución Aplique la separación de variables para hallar la solución general:

$$\frac{dy}{dt} = -ty \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -t\,dt \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int t\,dt \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}t^2 + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |y| = e^{-t^2/2+C} = e^C\, e^{-t^2/2}$$

Así, $y = \pm e^C\, e^{-t^2/2}$. Como C es arbitraria, e^C representa un *número positivo* arbitrario y $\pm e^C$ es un número arbitrario diferente de cero. Reemplace $\pm e^C$ por C y exprese la solución general como:

$$y = Ce^{-t^2/2} \tag{3}$$

Ahora, utilice la condición inicial $y(0) = Ce^{-0^2/2} = 3$. Así, $C = 3$ e $y = 3e^{-t^2/2}$ es la solución al problema de valores iniciales (figura 3). ■

En el contexto de las ecuaciones diferenciales, el término “modelar” significa hallar una ecuación diferencial que describa una situación física dada. Como ejemplo, considere la fuga de agua por un orificio del fondo de un depósito (figura 4). El problema es hallar el nivel de agua $y(t)$ en el instante t. Se resolverá probando que $y(t)$ cumple una ecuación diferencial.

El punto clave es que la pérdida de agua, en el intervalo que va desde t hasta $t + \Delta t$, se puede calcular de dos maneras. Sea:

$v(y)$ = velocidad del agua que circula a través del orificio cuando el depósito está lleno hasta la altura y

B = área del orificio

$A(y)$ = área de la sección horizontal transversal del tanque a la altura y

En primer lugar, observe que el agua que pasa a través del orificio durante el intervalo de tiempo Δt forma un cilindro de base B y altura $v(y)\Delta t$ (ya que el agua se desplaza una distancia $v(y)\Delta t$, tal y como se ilustra en la figura 4). El volumen de este cilindro es, aproximadamente, $Bv(y)\Delta t$ [aproximadamente pero no de forma exacta, pues $v(y)$ puede no ser constante]. Así:

$$\text{Pérdida de agua entre } t \text{ y } t + \Delta t \approx Bv(y)\Delta t$$

Por otra parte, se observa que si el nivel del agua disminuye en una cantidad Δy durante el intervalo Δt, entonces el volumen de la pérdida de agua es aproximadamente $A(y)\Delta y$ (figura 4). Por tanto:

$$\text{Pérdida de agua entre } t \text{ y } t + \Delta t \approx A(y)\,\Delta y$$

También se trata de una aproximación, porque el área de la sección transversal puede no ser constante. Comparando ambos resultados, se obtiene $A(y)\Delta y \approx Bv(y)\Delta t$, o bien:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{Bv(y)}{A(y)}$$

Al igual que la mayoría, los modelos matemáticos, si no todos, el modelo de drenaje de agua de un tanque es, en el mejor de los casos, una aproximación. La ecuación diferencial (4) no tiene en cuenta la viscosidad (la resistencia de un fluido al circular). Se puede solucionar, utilizando la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{Bv(y)}{A(y)}$$

donde $k < 1$ es la constante de viscosidad. Además, la ley de Torricelli es cierta únicamente cuando el tamaño del orificio B es pequeño en relación a las áreas de las secciones transversales $A(y)$.

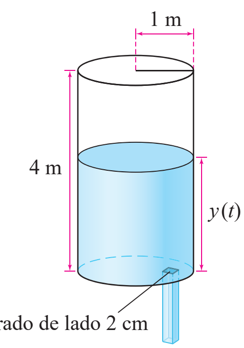


FIGURA 5

Considerando el límite cuando $\Delta t \to 0$ se obtiene la ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{Bv(y)}{A(y)}} \qquad \text{4}$$

Para aplicar la ec. (4), se necesita conocer la velocidad a la que el agua pasa por el orif cio. Esta cantidad la proporciona la **ley de Torricelli** ($g = 9{,}8$ m/s^2):

$$\boxed{v(y) = -\sqrt{2gy} = -\sqrt{2 \cdot 9{,}8y} \approx -4{,}43\sqrt{y} \text{ m/s}} \qquad \text{5}$$

■ **EJEMPLO 3 Aplicación de la ley de Torricelli** Un depósito cilíndrico de altura 4 m y radio 1 m se llena de agua. Se drena agua a través de un orif cio cuadrado en el fondo, de lado 2 cm. Determine el nivel del agua $y(t)$ en el instante t (segundos). ¿Cuánto tarda el tanque, una vez que está completamente lleno, en vaciarse del todo?

Solución Se utilizarán unidades de centímetros.

***Etapa 1.* Escriba y resuelva la ecuación diferencial**

La sección horizontal transversal del cilindro es una circunferencia de radio $r = 100$ cm y área $A(y) = \pi r^2 = 10\ 000\pi$ cm^2 (f gura 5). El orif cio es un cuadrado de lado 2 cm y área $B = 4$ cm^2. Según la ley de Torricelli [ec. (5)], $v(y) = -44{,}3\sqrt{y}$ cm/s, y la ec. (4) resulta:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Bv(y)}{A(y)} = -\frac{4(44{,}3\sqrt{y})}{10\ 000\pi} \approx -0{,}0056\sqrt{y} \qquad \text{6}$$

Resuelva mediante separación de variables:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -0{,}0056 \int dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2y^{1/2} = -0{,}0056t + C \quad \Rightarrow \qquad \text{7}$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(-0{,}0028t + \frac{1}{2}C\right)^2$$

Como C es arbitraria, se puede reemplazar $\frac{1}{2}C$ por C y escribir:

$$y = (C - 0{,}0028t)^2$$

***Etapa 2.* Utilice la condición inicial**

El depósito está lleno en $t = 0$, por lo que la condición inicial es $y(0) = 400$ cm. De esta manera:

$$y(0) = C^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad C = \pm 20$$

¿Qué signo se debe escoger? Puede pensar que ambas elecciones de signo son correctas, pero observe que el nivel de agua y es una función decreciente de t, y que la función $y = (C - 0{,}0028t)^2$ decrece hasta 0 únicamente si C es positiva. De manera alternativa, se puede ver directamente, por la ec. (7), que $C > 0$, pues $2y^{1/2}$ es *no negativo*. Así:

$$y(t) = (20 - 0{,}0028t)^2$$

Para determinar el tiempo t_e necesario para que el depósito se vacíe, se resuelve:

$$y(t_e) = (20 - 0{,}0028t_e)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_e \approx 7142 \text{ s}$$

Por tanto, el depósito se queda vacío pasados 7142 s, prácticamente dos horas (f gura 6). ■

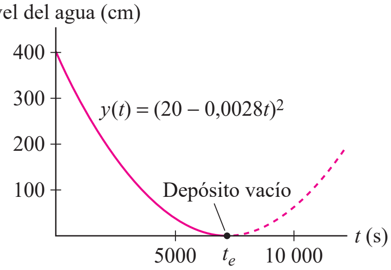


FIGURA 6

UN APUNTE CONCEPTUAL El ejemplo previo enfatiza la necesidad de analizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales en lugar de conf ar únicamente en el álgebra. La solución algebraica indica que $C = \pm 20$; un análisis posterior establece que $C = -20$ no proporciona una solución para $t \geq 0$. Observe también que la función

$$y(t) = (20 - 0{,}0028t)^2$$

es una solución únicamente para $t \leq t_e$, es decir, hasta que el depósito está vacío. Esta función no cumple la ec. (6) para $t > t_e$ porque su derivada es positiva si $t > t_e$ (f gura 6), pero las derivadas de las soluciones de la ec. (6) deben ser no positivas.

10.1 RESUMEN

- Una ecuación diferencial es de orden n si $y^{(n)}$ es el mayor de los órdenes de las derivadas que aparecen en la ecuación.
- Una ecuación diferencial es *lineal* si se puede escribir como:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

- *Ecuaciones diferenciales de primer orden en variables separables* $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
- *Separación de variables* (para una ecuación en variables separables): pase todos los términos en y a la izquierda y todos los términos en x a la derecha e integre:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

- Ecuación diferencial para modelar el agua que se escapa a través de un orif cio de área B en un depósito de áreas seccionales transversales $A(y)$:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{Bv(y)}{A(y)}}$$

Ley de Torricelli: $v(y) = -\sqrt{2gy}$, donde $g = 9{,}8$ m/s^2.

10.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Determine el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x^5y' = 1$ **(b)** $(y')^3 + x = 1$

(c) $y''' + x^4y' = 2$ **(d)** $\operatorname{sen}(y'') + x = y$

2. ¿Es $y'' = \operatorname{sen} x$ una ecuación diferencial lineal?

3. Proporcione un ejemplo de una ecuación diferencial no lineal de la forma $y' = f(y)$.

4. ¿Puede ser una ecuación diferencial no lineal, de variables separables? En caso af rmativo, facilite un ejemplo.

5. Proporcione un ejemplo de una ecuación diferencial lineal, que no sea de variables separables.

Problemas

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son de primer orden?

(a) $y' = x^2$ **(b)** $y'' = y^2$

(c) $(y')^3 + yy' = \operatorname{sen} x$ **(d)** $x^2y' - e^xy = \operatorname{sen} y$

(e) $y'' + 3y' = \dfrac{y}{x}$ **(f)** $yy' + x + y = 0$

2. ¿Cuáles de las ecuaciones del problema 1 son lineales?

En los problemas 3-8, compruebe que la función es una solución de la correspondiente ecuación diferencial.

3. $y' - 8x = 0, \quad y = 4x^2$

4. $yy' + 4x = 0, \quad y = \sqrt{12 - 4x^2}$

5. $y' + 4xy = 0, \quad y = 25e^{-2x^2}$

6. $(x^2 - 1)y' + xy = 0, \quad y = 4(x^2 - 1)^{-1/2}$

7. $y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y = 4x^4 - 12x^2 + 3$

8. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y = e^x \operatorname{sen} 2x$

9. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es de variables separables? Escriba aquellas que son de variables separables de la forma $y' = f(x)g(y)$ (pero no las resuelva).

(a) $xy' - 9y^2 = 0$

(b) $\sqrt{4 - x^2}\,y' = e^{3y} \operatorname{sen} x$

(c) $y' = x^2 + y^2$

(d) $y' = 9 - y^2$

10. Las siguientes ecuaciones diferenciales parece que sean la misma, pero tienen unas soluciones muy diferentes:

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad \frac{dy}{dx} = y$$

Resuelva ambas ecuaciones, con la condición $y(1) = 2$.

11. Considere la ecuación diferencial $y^3 y' - 9x^2 = 0$.

(a) Exprese la ecuación como $y^3\,dy = 9x^2\,dx$.

(b) Integre en ambos lados de la igualdad y obtenga $\frac{1}{4}y^4 = 3x^3 + C$.

(c) Compruebe que $y = (12x^3 + C)^{1/4}$ es la solución general.

(d) Halle la solución particular que cumple $y(1) = 2$.

12. Compruebe que $x^2 y' + e^{-y} = 0$ es de variables separables.

(a) Exprese la ecuación como $e^y\,dy = -x^{-2}\,dx$.

(b) Integre en ambos lados de la igualdad y obtenga $e^y = x^{-1} + C$.

(c) Compruebe que $y = \ln(x^{-1} + C)$ es la solución general.

(d) Halle la solución particular que cumpla $y(2) = 4$.

En los problemas 13-28, aplique separación de variables para hallar la solución general.

13. $y' + 4xy^2 = 0$

14. $y' + x^2 y = 0$

15. $\dfrac{dy}{dt} - 20t^4 e^{-y} = 0$

16. $t^3 y' + 4y^2 = 0$

17. $2y' + 5y = 4$

18. $\dfrac{dy}{dt} = 8\sqrt{y}$

19. $\sqrt{1 - x^2}\,y' = xy$

20. $y' = y^2(1 - x^2)$

21. $yy' = x$

22. $(\ln y)y' - ty = 0$

23. $\dfrac{dx}{dt} = (t + 1)(x^2 + 1)$

24. $(1 + x^2)y' = x^3 y$

25. $y' = x \sec y$

26. $\dfrac{dy}{d\theta} = \tan y$

27. $\dfrac{dy}{dt} = y \tan t$

28. $\dfrac{dx}{dt} = t \tan x$

En los problemas 29-42, resuelva el problema de valores iniciales.

29. $y' + 2y = 0, \quad y(\ln 5) = 3$

30. $y' - 3y + 12 = 0, \quad y(2) = 1$

31. $yy' = xe^{-y^2}, \quad y(0) = -2$

32. $y^2 \dfrac{dy}{dx} = x^{-3}, \quad y(1) = 0$

33. $y' = (x - 1)(y - 2), \quad y(2) = 4$

34. $y' = (x - 1)(y - 2), \quad y(2) = 2$

35. $y' = x(y^2 + 1), \quad y(0) = 0$

36. $(1 - t)\dfrac{dy}{dt} - y = 0, \quad y(2) = -4$

37. $\dfrac{dy}{dt} = ye^{-t}, \quad y(0) = 1$

38. $\dfrac{dy}{dt} = te^{-y}, \quad y(1) = 0$

39. $t^2 \dfrac{dy}{dt} - t = 1 + y + ty, \quad y(1) = 0$

40. $\sqrt{1 - x^2}\,y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 0$

41. $y' = \tan y, \quad y(\ln 2) = \dfrac{\pi}{2}$

42. $y' = y^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 2$

43. Determine todos los valores de a para los que $y = x^a$ sea una solución de:

$$y'' - 12x^{-2}y = 0$$

44. Determine todos los valores de a para los que $y = e^{ax}$ sea una solución de:

$$y'' + 4y' - 12y = 0$$

En los problemas 45 y 46, sea $y(t)$ una solución de $(\cos y + 1)\dfrac{dy}{dt} = 2t$ tal que $y(2) = 0$.

45. Pruebe que $\operatorname{sen} y + y = t^2 + C$. No se puede determinar y como función de t pero, suponiendo que $y(2) = 0$, halle los valores de t en los que $y(t) = \pi$.

46. Suponiendo que $y(6) = \pi/3$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráf ca de $y(t)$ en $(6, \pi/3)$.

En los problemas 47-52, aplique la ec. (4) y la ley de Torricelli [ec. (5)].

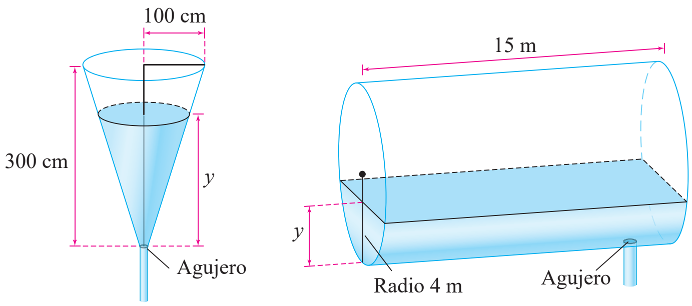
47. Un depósito cilíndrico que está lleno de agua tiene una altura de 3 m y una base de área 10 m^2. Por un orif cio de área 0,002 m^2 en el fondo del depósito se f ltra agua. ¿Cuánto se tarda en: (a) que se f ltre la mitad del agua del depósito y (b) que el depósito se quede vacío?

48. En $t = 0$, un depósito cónico de altura 300 cm y radio superior 100 cm [f gura 7(A)] se llena con agua. Se pierde agua por un orif cio en el fondo de área 3 cm^2. Sea $y(t)$ el nivel de agua en el instante t.

(a) Pruebe que el área transversal horizontal del depósito a la altura y es $A(y) = \frac{\pi}{9}y^2$.

(b) Halle y resuelva la ecuación diferencial que cumple $y(t)$.

(c) ¿Cuánto tarda el tanque en vaciarse?



(A) Depósito cónico (B) Depósito horizontal

FIGURA 7

49. El depósito de la figura 7(B) es un cilindro de radio 4 m y altura 15 m. Suponga que el depósito se llena hasta la mitad de agua y que ésta va saliendo por un orificio al final del depósito de área $B = 0{,}001$ m^2. Determine el nivel de agua $y(t)$ y el momento t_e en que el depósito queda vacío.

50. Un depósito tiene la forma de la parábola $y = x^2$, rotada respecto al eje y. Se pierde agua por un orificio de área $B = 0{,}0005$ m^2 en el fondo del depósito. Sea $y(t)$ el nivel de agua en el instante t. ¿Cuánto tarda el depósito en vaciarse si inicialmente se ha llenado hasta la altura $y_0 = 1$ m?

51. Un depósito tiene la forma de la parábola $y = ax^2$ (donde a es una constante), rotada respecto al eje y. Se drena agua por un orificio de área B m^2 en el fondo del depósito.

(a) Pruebe que el nivel de agua en el instante t es:

$$y(t) = \left(y_0^{3/2} - \frac{3aB\sqrt{2g}}{2\pi}t\right)^{2/3}$$

donde y_0 es el nivel de agua en el instante $t = 0$.

(b) Pruebe que si el volumen total de agua en el depósito en el instante $t = 0$ es V, entonces $y_0 = \sqrt{2aV/\pi}$. *Indicación:* Calcule el volumen del depósito como un volumen de rotación.

(c) Pruebe que el depósito se queda vacío en el instante:

$$t_e = \left(\frac{2}{3B\sqrt{g}}\right)\left(\frac{2\pi V^3}{a}\right)^{1/4}$$

Se observa que para un volumen fijo V, el momento t_e es proporcional a $a^{-1/4}$. Un valor grande de a corresponde a un depósito alto y delgado. Un depósito de estas características drena más rápido que un depósito bajo y ancho con el mismo volumen inicial.

52. Un depósito cilíndrico de altura h y base de área A se llena con agua. Se pierde agua por un orificio, en el fondo del depósito, de área B.

(a) Pruebe que el tiempo necesario para que el depósito se vacíe es proporcional a $A\sqrt{h}/B$.

(b) Muestre que el tiempo de vaciado es proporcional a $Vh^{-1/2}$, donde V es el volumen del depósito.

(c) Dos depósitos tienen el mismo volumen y un orificio del mismo tamaño pero tienen diferentes alturas y bases. ¿Qué depósito se vacía primero, el más alto, o el más bajo?

53. La figura 8 muestra un circuito que consiste en una resistencia de R ohmios, un condensador de C faradios y una batería de voltaje V. Cuando el circuito se cierra, la cantidad de carga $q(t)$ (en culombios) de las placas del condensador varía según (t en segundos):

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V$$

donde R, C y V son constantes.

(a) Determine $q(t)$, suponiendo que $q(0) = 0$.

(b) Pruebe que $\lim_{t\to\infty} q(t) = CV$.

(c) Pruebe que el condensador se carga hasta aproximadamente el 63 % de su valor final CV pasado un periodo de tiempo de longitud $\tau = RC$ (τ se denomina la constante del condensador).

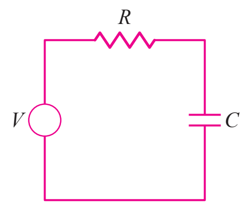


FIGURA 8 Un circuito RC.

54. Suponga que en el circuito de la figura 8 se tiene que $R = 200\ \Omega$, $C = 0{,}02$ F y $V = 12$ V. ¿Cuántos segundos se tarda en que las placas del condensador se carguen hasta la mitad de su valor límite?

55. Según una de las hipótesis de la tasa de crecimiento, dV/dt, del volumen de una célula V, ésta es proporcional a su área superficial A. Como las unidades de V son cúbicas, tales como cm^3, y las de A son unidades cuadráticas, como cm^2, se puede suponer que aproximadamente $A \propto V^{2/3}$, y por tanto, que $dV/dt = kV^{2/3}$ para alguna constante k. Si esta hipótesis es cierta, ¿qué dependencia del volumen respecto al tiempo espera observar (de nuevo, aproximadamente) en el laboratorio?

(a) Lineal **(b)** Cuadrática **(c)** Cúbica

56. Se podría suponer también que el volumen V de una bola de nieve que se está derritiendo disminuye a una tasa proporcional a su superficie. Razone como en el ejercicio 55, para encontrar una ecuación diferencial satisfecha por V. Suponga que la bola de nieve tiene un volumen de 1000 cm^3 y que pierde la mitad de su volumen después de 5 min. Según este modelo, ¿cuándo va a desaparecer la bola de nieve?

57. En general, $(fg)'$ no es igual a $f'g'$, pero sea $f(x) = e^{3x}$ y halle una función $g(x)$ tal que $(fg)' = f'g'$. Repita el ejercicio para $f(x) = x$.

58. Un niño que está de pie en el punto B de un muelle, tiene una cuerda de longitud ℓ unida a un barco situado en el punto A [figura 9(A)]. A medida que el niño camina por el muelle, manteniendo la cuerda tensa, el barco se mueve generando una curva llamada **tractrix** (del latín *tractus*, que significa " tirar"). El segmento desde un punto P de la curva al eje x sobre la recta tangente tiene una longitud constante e igual a ℓ. Sea $y = f(x)$ la ecuación de la tractriz.

(a) Pruebe que $y^2 + (y/y')^2 = \ell^2$, y concluya que $y' = -\dfrac{y}{\sqrt{\ell^2 - y^2}}$. ¿Por qué se debe escoger la determinación negativa de la raíz?

(b) Demuestre que la tractriz es la gráfica de:

$$x = \ell \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{\ell^2 - y^2}$$

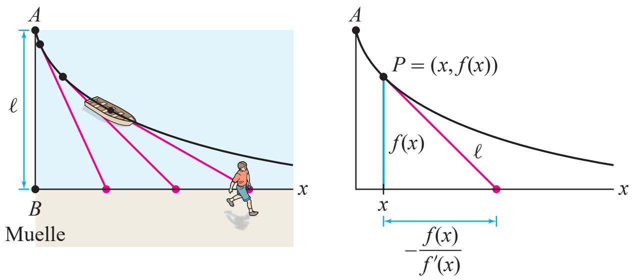


FIGURA 9

59. Pruebe que las ecuaciones diferenciales ordinarias $y' = 3y/x$ e $y' = -x/3y$ def nen **familias ortogonales** de curvas; es decir, las gráf cas de las soluciones a la primera ecuación intersecan con las gráf cas de las soluciones de la segunda ecuación en ángulos rectos (f gura 10). Halle estas curvas explícitamente.

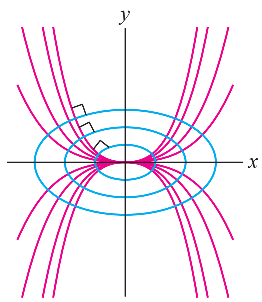


FIGURA 10 Dos familias ortogonales de curvas.

60. Halle la familia de curvas que cumpla $y' = x/y$, y dibuje algunos miembros de la familia. A continuación, halle la ecuación diferencial para la familia ortogonal (vea el problema 59), encuentre su solución general y añada a su representación gráf ca algunos miembros de esta familia ortogonal.

61. Un modelo de cohete de 50 kg despega expulsando combustible a razón de $k = 4{,}75$ kg/s durante 10 s. El combustible se expulsa del cohete con una velocidad de escape de $b = 100$ m/s. Sea $m(t)$ la masa del cohete en el instante t. Según la ley de conservación de los momentos, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ del cohete (en metros por segundo):

$$m(t)v'(t) = -9{,}8m(t) + b\frac{dm}{dt}$$

(a) Pruebe que $m(t) = 50 - 4{,}75t$ kg.

(b) Resuelva $v(t)$ y calcule la velocidad del cohete en el momento de desgaste de éste (pasados 10 s).

62. Sea $v(t)$ la velocidad de un cuerpo de masa m en caída libre, cerca de la superf cie de la Tierra. Si se supone que la resistencia del aire es proporcional a v^2, entonces v cumple la ecuación diferencial $m\frac{dv}{dt} = -g + kv^2$ para alguna constante $k > 0$.

(a) Introduzca $\alpha = (g/k)^{1/2}$ y reescriba la ecuación diferencial como:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(\alpha^2 - v^2)$$

A continuación, resuelva utilizando separación de variables y la condición inicial $v(0) = 0$.

(b) Pruebe que la velocidad terminal $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ es igual a $-\alpha$.

63. Si se hace girar un cubo de agua sobre un eje vertical a velocidad angular constante ω, (en radianes por segundo), el agua se sale por los lados del cubo hasta alcanzar una posición de equilibrio (f gura 11). Sobre una partícula situada a una distancia x del eje vertical actúan dos fuerzas: la fuerza gravitacional $-mg$ que actúa hacia abajo y la fuerza del cubo sobre la partícula (de transmisión indirecta a través del líquido) en la dirección perpendicular a la superf cie del agua. Estas dos fuerzas se combinan para proporcionar una fuerza centrípeta $m\omega^2 x$; esto ocurre si la diagonal del rectángulo en la f gura 11 es perpendicular a la superf cie del agua (es decir, perpendicular a la recta tangente). Demuestre que si $y = f(x)$ es la ecuación de la curva que se obtiene al considerar una sección vertical a través del eje, entonces $-1/y' = -g/(\omega^2 x)$. Pruebe que $y = f(x)$ es una parábola.

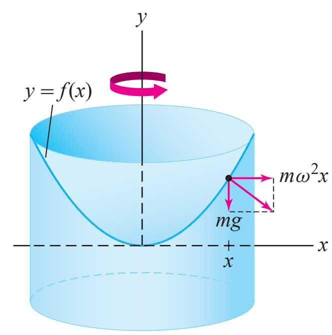


FIGURA 11

Problemas avanzados

64. En la sección 6.2, se calculó el volumen V de un sólido como la integral del área de las secciones transversales. Explique esta fórmula en términos de ecuaciones diferenciales. Sea $V(y)$ el volumen del sólido hasta la altura y, y sea $A(y)$ el área de la sección transversal a la altura y, tal y como se muestra en la f gura 12.

(a) Explique la siguiente aproximación para Δy pequeños:

$$V(y + \Delta y) - V(y) \approx A(y)\,\Delta y \qquad \boxed{8}$$

(b) Utilice la ec. (8) para justif car la ecuación diferencial $dV/dy = A(y)$. A continuación, deduzca la fórmula:

$$V = \int_a^b A(y)\,dy$$

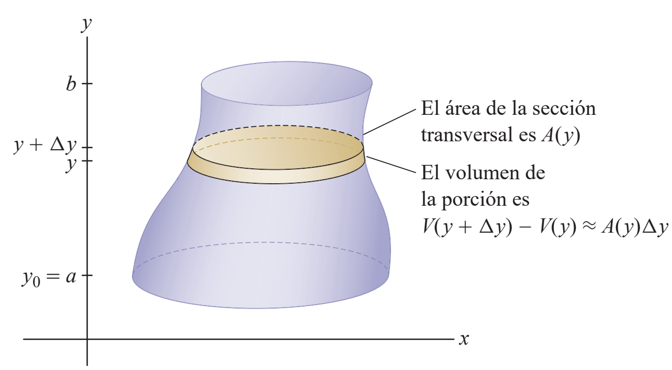


FIGURA 12

65. Un teorema básico establece que una ecuación diferencial *lineal* de orden n tiene una solución general que depende de n constantes arbitrarias. Sin embargo, existen excepciones no lineales.

(a) Pruebe que $(y')^2 + y^2 = 0$ es una ecuación diferencial de primer orden con una sola solución igual a $y = 0$.

(b) Pruebe que $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$ es una ecuación diferencial de primer orden que no tiene solución.

66. Pruebe que $y = Ce^{rx}$ es una solución de $y'' + ay' + by = 0$ si y sólo si r es una raíz de $P(r) = r^2 + ar + b$. A continuación, compruebe que $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ es una solución de $y'' - 2y' - 3y = 0$ para cualesquiera constantes C_1, C_2.

67. Un depósito esférico de radio R está medio lleno de agua. Suponga que pierde agua a través de un orif cio en la parte inferior de área B. Sea $y(t)$ el nivel de agua en el instante t (segundos).

(a) Pruebe que $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-8B\sqrt{y}}{\pi(2Ry - y^2)}$.

(b) Pruebe que para alguna constante C,

$$\frac{\pi}{60B}\left(10Ry^{3/2} - 3y^{5/2}\right) = C - t$$

(c) Utilice la condición inicial $y(0) = R$ para calcular C y pruebe que $C = t_e$, en el instante en que el tanque queda vacío.

(d) Pruebe que t_e es proporcional a $R^{5/2}$e inversamente proporcional a B.

10.2 Métodos gráficos y numéricos

"Para imaginarte a tí mismo sujeto a una ecuación diferencial, empieza en cualquier sitio. Allí estás, forzado hacia una dirección... Al moverte, las fuerzas que te tiran de ti cambian, empujándote hacia una nueva dirección; para que tu movimiento resuelva la ecuación diferencial, debes mantener el desplazamiento, respondiendo además a las fuerzas del ambiente."

—De la introducción a *Differential Equations*, J. H. Hubbard y Beverly West, Springer-Verlag, New York, 1991

En la sección previa, nos hemos centrado en encontrar soluciones de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver de forma explícita. Afortunadamente, hay técnicas para analizar soluciones que no dependen de las fórmulas explícitas. En esta sección, se considera el método de los campos de pendientes (o diagrama de direcciones), que nos proporciona una buena comprensión visual de las ecuaciones de primer orden. También se analiza el método de Euler para encontrar aproximaciones numéricas a las soluciones.

Se utilizará t como la variable independiente y se escribirá $\dot{y}$ en lugar de dy/dt. La notación $\dot{y}$, que se suele utilizar en física y en ingeniería, fue introducida por Isaac Newton. Una ecuación diferencial de primer orden, se puede escribir como:

$$\boxed{\dot{y} = F(t, y)} \tag{1}$$

donde $F(t, y)$ es una función de t y de y. Por ejemplo, $dy/dt = ty$ resulta $\dot{y} = ty$.

Es útil pensar en la ec. (1) como un conjunto de instrucciones que "proporciona una solución" sobre qué dirección tomar. Así, una solución que pase por un punto (t, y) se "instruye" para continuar en la dirección de la pendiente $F(t, y)$. Para visualizar este conjunto de instrucciones, se dibuja un **campo de pendientes**, que es una colección de pequeños segmentos de la pendiente $F(t, y)$ en los puntos (t, y) dentro de una cuadrícula rectangular en el plano.

Para ilustrarlo, considere de nuevo la ecuación:

$$\dot{y} = -ty$$

Es este caso, $F(t, y) = -ty$. Según el ejemplo 2 de la sección 10.1, la solución general es $y = Ce^{-t^2/2}$. La f gura 1(A) muestra segmentos de pendiente $-ty$ en los puntos (t, y) a lo largo de la gráf ca de una solución particular $y(t)$. Esta solución particular pasa por el punto $(-1, 3)$ y, según la ecuación diferencial, $\dot{y}(-1) = -ty = -(-1)3 = 3$. Así, el segmento que se encuentra en $(-1, 3)$ tiene pendiente 3. La gráf ca de la solución es tangente a cada segmento [f gura 1(B)].

Para dibujar el campo de pendientes de $\dot{y} = -ty$, se trazan pequeños segmentos de pendiente $-ty$ en una colección ordenada de puntos (t, y) en el plano, como en la f gura 2(A). *El campo de pendientes permite visualizar todas las soluciones de un vistazo*. Empezando en cualquier punto, se puede dibujar una solución trazando una curva que sea tangente a los segmentos de pendiente en cada punto [f gura 2(B)]. La gráf ca de una solución se denomina también una **curva integral**.

FIGURA 1 La solución de $\dot{y} = -ty$ cumpliendo $y(-1) = 3$.

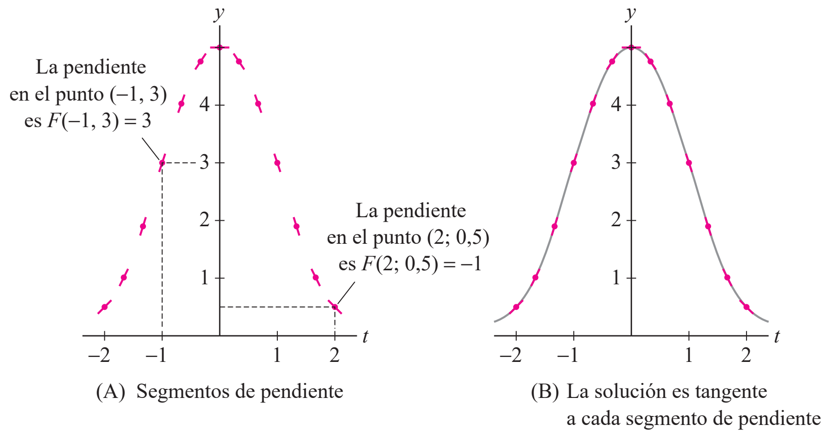
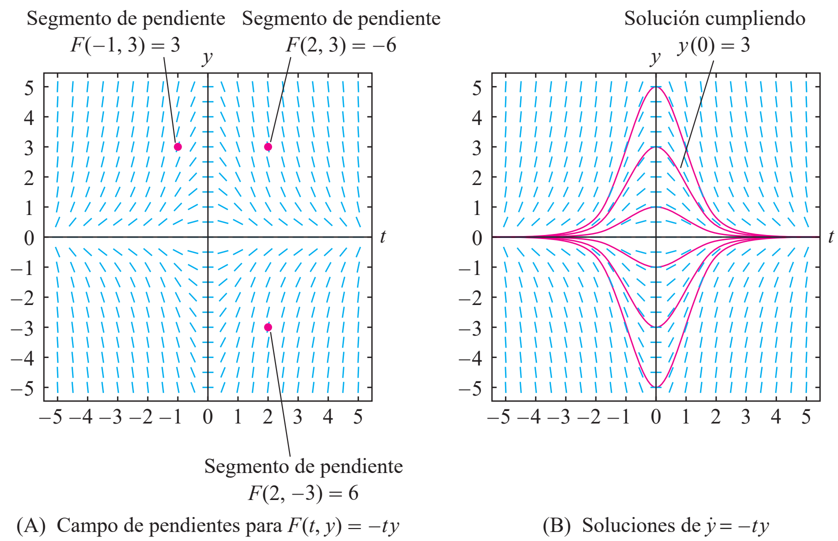


FIGURA 2 Campo de pendientes para $F(t, y) = -ty$.



■ **EJEMPLO 1 Utilizando las isoclinas** Dibuje el campo de pendiente para

$$\dot{y} = y - t$$

y las curvas integrales que cumplen las siguientes condiciones iniciales:

(a) $y(0) = 1$ y **(b)** $y(1) = -2$.

Solución Una buena manera de dibujar el campo de pendientes de $\dot{y} = F(t, y)$ es seleccionar diferentes valores de c e identif car la curva $F(t, y) = c$, denominada la **isoclina** de pendiente c. La isoclina es la curva formada por todos los puntos en los que el campo de pendientes tiene pendiente igual a c.

En nuestro caso, $F(t, y) = y - t$, por lo que la isoclina de pendiente c tiene ecuación $y - t = c$, o $y = t + c$, que es una recta. Considere los siguientes valores:

- $c = 0$: Esta isoclina es $y - t = 0$, o $y = t$. Se representan segmentos de pendiente $c = 0$ en puntos sobre la recta $y = t$, como en la f gura 3(A).
- $c = 1$: Esta isoclina es $y - t = 1$, o $y = t + 1$. Se representan segmentos de pendiente 1 en puntos sobre $y = t + 1$, como en la f gura 3(B).
- $c = 2$: Esta isoclina es $y - t = 2$, o $y = t + 2$. Se representan segmentos de pendiente 2 en puntos sobre $y = t + 2$, como en la f gura 3(C).
- $c = -1$: Esta isoclina es $y - t = -1$, o $y = t - 1$ [f gura 3(C)].

Un campo de pendientes más detallado se presenta en la f gura 3(D). Para representar la solución cumpliendo $y(0) = 1$, empiece en el punto $(t_0, y_0) = (0, 1)$ y dibuje la curva integral que sigue las direcciones marcadas por el campo de pendientes. De manera análoga, la gráfica de la solución que cumple $y(1) = -2$ es la curva integral que empieza en $(t_0, y_0) = (1, -2)$ y que se desplaza siguiendo el campo de pendientes. La figura 3(E) muestra algunas soluciones más (curvas integrales). ■

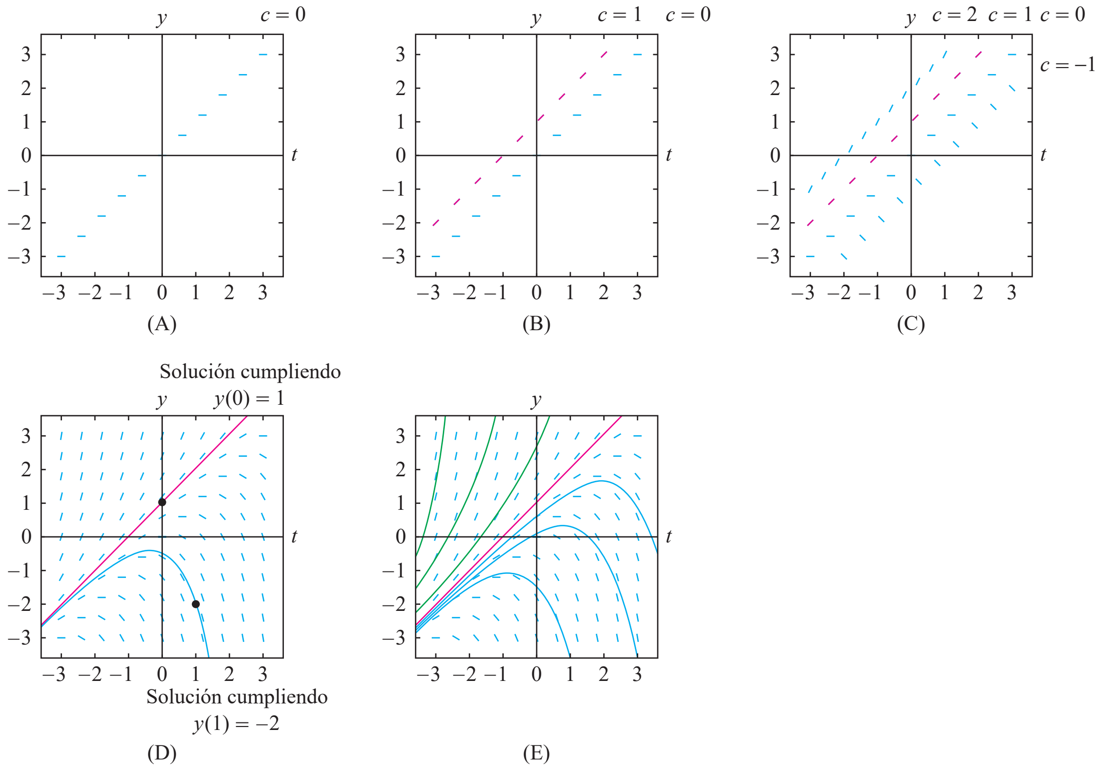


FIGURA 3 Obtención del campo de pendientes $\dot{y} = y - t$ utilizando isoclinas.

> **UN APUNTE GRÁFICO** Los campos de pendientes permiten, a menudo, visualizar el comportamiento *asintótico* de las soluciones (cuando $t \to +\infty$) de un vistazo. La figura 3(E) sugiere que el comportamiento asintótico depende del valor inicial (de la ordenada en el origen): Si $y(0) > 1$, entonces $y(t)$ tiende a $+\infty$, y si $y(0) < 1$, entonces $y(t)$ tiende a $-\infty$. Se puede realizar la comprobación por medio de la solución general $y(t) = 1 + t + Ce^t$, donde $y(0) = 1 + C$. Si $y(0) > 1$, entonces $C > 0$ e $y(t)$ tiende a $+\infty$, pero si $y(0) < 1$, entonces $C < 0$ e $y(t)$ tiende a $-\infty$. La solución $y = 1 + t$ con la condición inicial $y(0) = 1$ es la recta que se muestra en la figura 3(D).

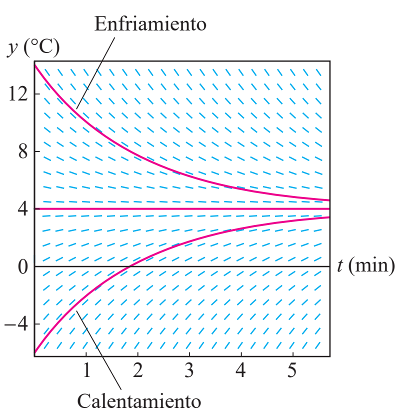


FIGURA 4 Campo de pendientes para $\dot{y} = -0{,}5(y - 4)$.

■ **EJEMPLO 2 Revisión de la ley del enfriamiento de Newton** La temperatura $y(t)$ (°C) de un cuerpo que se encuentra en una nevera cumple $\dot{y} = -0{,}5(y - 4)$ (t en minutos). Dibuje el campo de pendientes y describa el comportamiento de las soluciones.

Solución La función $F(t, y) = -0{,}5(y - 4)$ depende únicamente de y, por lo que las pendientes de los segmentos en el campo de pendientes no varían en la dirección t. La pendiente $F(t, y)$ es positiva para $y < 4$ y negativa para $y > 4$. De forma más concreta, la pendiente a altura y es $-0{,}5(y - 4) = -0{,}5y + 2$, por lo que los segmentos son más inclinados, con pendiente positiva, cuando $y \to -\infty$, y son más inclinados, con pendiente negativa, cuando $y \to +\infty$ (figura 4).

El campo de pendientes muestra que si la temperatura inicial cumple $y_0 > 4$, entonces $y(t)$ decrece hasta $y = 4$ cuando $t \to +\infty$. En otras palabras, el cuerpo se enfría hasta 4 °C cuando se pone en la nevera. Si $y_0 < 4$, entonces $y(t)$ aumenta hasta $y = 4$ cuando $t \to -\infty$, es decir el cuerpo se calienta cuando se pone en la nevera. Si $y_0 = 4$, entonces y se mantiene igual a 4 °C para todo t. ■

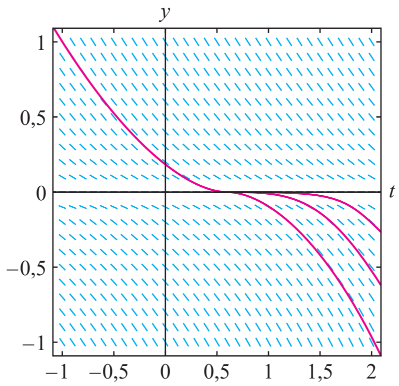


FIGURA 5 Superposición de curvas integrales de $\dot{y} = -\sqrt{|y|}$ (la unicidad falla para esta ecuación diferencial).

El método de Euler es el método más sencillo para resolver un problema de valores iniciales numéricamente, pero no es muy eficiente. Los sistemas informáticos utilizan esquemas más sofisticados, haciendo posible representar y analizar las soluciones de sistemas complejos de ecuaciones diferenciales que aparecen en áreas como la predicción meteorológica, los modelos en aerodinámica y las previsiones económicas.

UN APUNTE CONCEPTUAL Muchas ecuaciones de primer orden que aparecen en las aplicaciones prácticas tienen la siguiente propiedad de unicidad: existe únicamente una solución $y(t)$ cumpliendo la condición inicial $y(t_0) = y_0$. Gráficamente, esto significa que justamente una sola curva integral (solución) pasa por el punto (t_0, y_0). De esta manera, cuando la unicidad se cumple, curvas integrales distintas nunca se intersecan o se superponen. La figura 5 muestra el campo de pendientes de $\dot{y} = -\sqrt{|y|}$, donde la unicidad no se cumple. Se puede demostrar que una vez que una curva integral toca el eje t, o bien permanece en eje t o continúa a lo largo del eje t durante un período de tiempo, antes de pasar debajo del eje t. Por tanto, un número infinito de curvas integrales pasan por cada punto del eje t. Sin embargo, el campo de pendientes no muestra este hecho de manera clara. Esto pone de relieve, una vez más, la necesidad de analizar las soluciones en lugar de basarse en la impresión visual solamente.

Método de Euler

El método de Euler proporciona aproximaciones numéricas a la solución de un problema de valores iniciales de primer orden:

$$\dot{y} = F(t, y) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

Empiece seleccionando un número pequeño h, denominado el **paso de tiempo** y considere la secuencia de tiempos espaciados a intervalos de tamaño h:

$$t_0 \qquad t_1 = t_0 + h \qquad t_2 = t_0 + 2h \qquad t_3 = t_0 + 3h \qquad \ldots$$

En general, $t_k = t_0 + kh$. El método de Euler consiste en calcular una sucesión de valores $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ de manera recurrente por medio de la fórmula:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + hF(t_{k-1}, y_{k-1})} \tag{3}$$

A partir del valor inicial $y_0 = y(t_0)$, se calcula $y_1 = y_0 + hF(t_0, y_0)$, etc. El valor y_k es la aproximación de Euler de $y(t_k)$. Se unen los puntos $P_k = (t_k, y_k)$ mediante segmentos para obtener una aproximación de la gráfica de $y(t)$ (figura 6).

UN APUNTE GRÁFICO Los valores y_k están definidos de manera que el segmento que une P_{k-1} y P_k tiene una pendiente igual a:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = \frac{(y_{k-1} + hF(t_{k-1}, y_{k-1})) - y_{k-1}}{h} = F(t_{k-1}, y_{k-1})$$

De esta manera, en el método de Euler el desplazamiento de P_{k-1} a P_k se realiza en la dirección especificada por el campo de pendientes en P_{k-1} y durante un intervalo de tiempo de longitud h (figura 6).

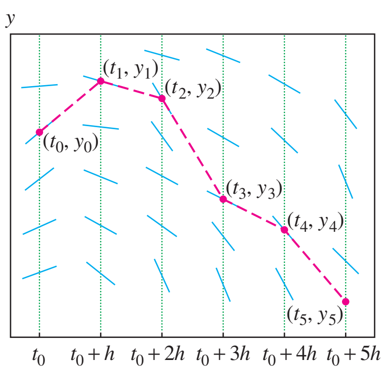


FIGURA 6 En el método de Euler, el desplazamiento de un punto al siguiente se realiza a través de la recta indicada por el campo de pendientes.

■ **EJEMPLO 3** Utilice el método de Euler con paso de tiempo $h = 0{,}2$ y $n = 4$ pasos para aproximar la solución de $\dot{y} = y - t^2$, $y(0) = 3$.

Solución El valor inicial en $t_0 = 0$ es $y_0 = 3$. Como $h = 0{,}2$, los valores temporales son $t_1 = 0{,}2$, $t_2 = 0{,}4$, $t_3 = 0{,}6$ y $t_4 = 0{,}8$. Se utiliza la ec. (3) con $F(t, y) = y - t^2$ para calcular:

$$y_1 = y_0 + hF(t_0, y_0) = 3 + 0{,}2(3 - (0)^2) = 3{,}6$$
$$y_2 = y_1 + hF(t_1, y_1) = 3{,}6 + 0{,}2(3{,}6 - (0{,}2)^2) \approx 4{,}3$$
$$y_3 = y_2 + hF(t_2, y_2) = 4{,}3 + 0{,}2(4{,}3 - (0{,}4)^2) \approx 5{,}14$$
$$y_4 = y_3 + hF(t_3, y_3) = 5{,}14 + 0{,}2(5{,}14 - (0{,}6)^2) \approx 6{,}1$$

La figura 7(A) muestra la solución exacta de $y(t) = 2 + 2t + t^2 + e^t$ junto con una representación de los puntos (t_k, y_k) para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ unidos por segmentos rectilíneos. ■

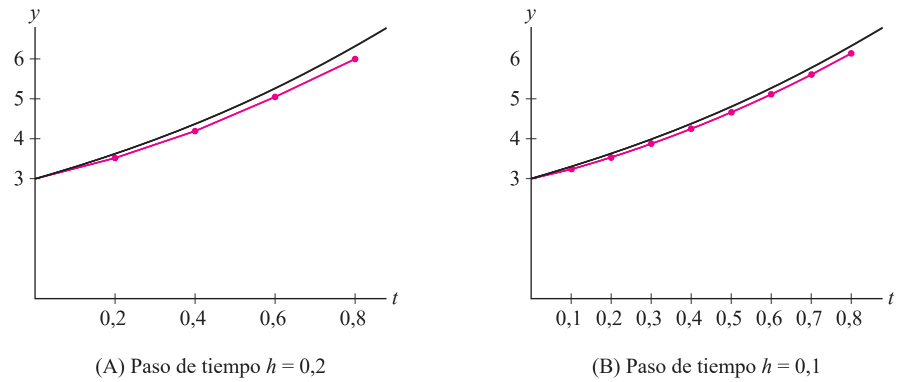


FIGURA 7 Método de Euler aplicado a $\dot{y} = y - t^2$, $y(0) = 3$.

UN APUNTE CONCEPTUAL La f gura 7(B) muestra que el paso de tiempo $h = 0{,}1$ da como resultado una mejor aproximación que la que se obtiene con $h = 0{,}2$. En general, cuanto menor sea el intervalo de tiempo, mejor será la aproximación. De hecho, si se empieza en un punto $(a, y(a))$ y se utiliza el método de Euler para aproximar $(b, y(b))$ utilizando N pasos con $h = (b - a)/N$, entonces el error es aproximadamente proporcional a $1/N$ (siempre que $F(t, y)$ sea una función de buen comportamiento). Esto es similar al tamaño del error en las aproximaciones de orden N, basadas en los extremos inferior y superior, de una integral. Lo que esto signif ca, sin embargo, es que el método de Euler es bastante inef ciente; para reducir el error a la mitad, es necesario duplicar el número de pasos y para conseguir n dígitos de precisión se requiere alrededor de 10^n pasos. Afortunadamente, existen varios métodos que mejoran el método de Euler en la misma forma en que la regla del punto medio y la regla de Simpson mejoran las aproximaciones basadas en los extremos (vea los problemas 22-27).

■ **EJEMPLO 4** SAC Sea $y(t)$ la solución de $\dot{y} = \operatorname{sen} t \cos y$, $y(0) = 0$.

(a) Utilice el método de Euler con paso de tiempo $h = 0{,}1$ para aproximar $y(0{,}5)$.

(b) Utilice un programa informático de cálculo simbólico para implementar el método de Euler con pasos de tiempo $h = 0{,}01$, $0{,}001$ y $0{,}0001$ para aproximar $y(0{,}5)$.

Método de Euler:

$$y_k = y_{k-1} + hF(t_{k-1}, y_{k-1})$$

Solución

(a) Cuando $h = 0{,}1$, y_k es una aproximación de $y(0 + k(0{,}1)) = y(0{,}1k)$, por lo que y_5 es una aproximación de $y(0{,}5)$. Resulta conveniente organizar los cálculos en la siguiente tabla. Observe que el valor y_{k+1} calculado en la última columna de cada línea, se utiliza en la siguiente para continuar el proceso.

t_k	y_k	$F(t_k, y_k) = \operatorname{sen} t_k \cos y_k$	$y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k)$
$t_0 = 0$	$y_0 = 0$	$(\operatorname{sen} 0)\cos 0 = 0$	$y_1 = 0 + 0{,}1(0) = 0$
$t_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0$	$(\operatorname{sen} 0{,}1)\cos 0 \approx 0{,}1$	$y_2 \approx 0 + 0{,}1(0{,}1) = 0{,}01$
$t_2 = 0{,}2$	$y_2 \approx 0{,}01$	$(\operatorname{sen} 0{,}2)\cos(0{,}01) \approx 0{,}2$	$y_3 \approx 0{,}01 + 0{,}1(0{,}2) = 0{,}03$
$t_3 = 0{,}3$	$y_3 \approx 0{,}03$	$(\operatorname{sen} 0{,}3)\cos(0{,}03) \approx 0{,}3$	$y_4 \approx 0{,}03 + 0{,}1(0{,}3) = 0{,}06$
$t_4 = 0{,}4$	$y_4 \approx 0{,}06$	$(\operatorname{sen} 0{,}4)\cos(0{,}06) \approx 0{,}4$	$y_5 \approx 0{,}06 + 0{,}1(0{,}4) = 0{,}10$

Una instrucción típica en un programa informático para implementar el método de Euler con paso de tiempo $h = 0{,}01$ sería la siguiente:

```
>> For[n = 0; y = 0, n < 50, n++,
>> y = y + (.01) * (Sin[.01 * n] * Cos[y])]
>> y
>> 0.119746
```

La instrucción `For[...]` *actualiza la variable y sucesivamente con los valores $y_1, y_2, \ldots, y_{50}$ según el método de Euler.*

De esta manera, el método de Euler proporciona la aproximación $y(0{,}5) \approx y_5 \approx 0{,}1$.

(b) Cuando el número de pasos es elevado, los cálculos son demasiado largos para realizarlos a mano, pero son fáciles de llevar a cabo utilizando un programa informático de cálculo simbólico. Observe que para $h = 0{,}01$, el k-ésimo valor y_k es una aproximación de $y(0 + k(0{,}01)) = y(0{,}01k)$, y que y_{50} proporciona una aproximación de $y(0{,}5)$. De manera similar, cuando $h = 0{,}001$, y_{500} es una aproximación de $y(0{,}5)$, y para $h = 0{,}0001$, $y_{5\,000}$ es una aproximación de $y(0{,}5)$. He aquí los resultados obtenidos utilizando un programa informático de cálculo simbólico:

Paso de tiempo $h = 0{,}01$	$y_{50} \approx 0{,}1197$
Paso de tiempo $h = 0{,}001$	$y_{500} \approx 0{,}1219$
Paso de tiempo $h = 0{,}0001$	$y_{5000} \approx 0{,}1221$

Parece que estos valores convergen y se puede suponer que $y(0{,}5) \approx 0{,}12$. Sin embargo, aquí se puede observar que el método de Euler converge bastante despacio. ■

10.2 RESUMEN

- El *campo de pendientes* para una ecuación diferencial de primer orden $\dot{y} = F(t, y)$ se obtiene dibujando pequeños segmentos de pendiente $F(t, y)$ en los puntos (t, y) que se encuentran en una cuadrícula rectangular del plano.
- La gráf ca de una solución (también llamada una *curva integral*) cumpliendo $y(t_0) = y_0$ es una curva que pasa por (t_0, y_0) y que es tangente a los segmentos del campo de pendientes en cada punto.
- *Método de Euler*: para aproximar una solución de $\dot{y} = F(t, y)$ con la condición inicial $y(t_0) = y_0$, f je un paso de tiempo h y sea $t_k = t_0 + kh$. Def na $y_1, y_2, \ldots$ sucesivamente mediante la fórmula:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + hF(t_{k-1}, y_{k-1})} \qquad \boxed{4}$$

Los valores $y_0, y_1, y_2, \ldots$ son aproximaciones de los valores $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \ldots$.

10.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la pendiente del segmento en el campo de pendientes de $\dot{y} = ty + 1$ en el punto $(2, 3)$?

2. ¿Cuál es la ecuación de la isoclina de pendiente $c = 1$ para $\dot{y} = y^2 - t$?

3. ¿Para cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son las pendientes en los puntos sobre una recta vertical $t = C$ todas iguales?

(a) $\dot{y} = \ln y$ **(b)** $\dot{y} = \ln t$

4. Sea $y(t)$ la solución de $\dot{y} = F(t, y)$ con $y(1) = 3$. ¿Cuántas iteraciones del método de Euler se necesitan para aproximar $y(3)$ si el paso de tiempo es $h = 0{,}1$?

Problemas

1. La f gura 8 muestra el campo de pendientes para $\dot{y} = \operatorname{sen} y \operatorname{sen} t$. Dibuje las gráf cas de las soluciones con condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y(0) = -1$. Pruebe que $y(t) = 0$ es una solución y añada su gráf ca a la representación.

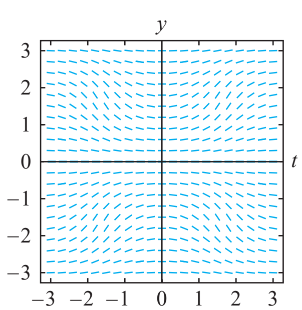


FIGURA 8 Campo de pendientes para $\dot{y} = \operatorname{sen} y \operatorname{sen} t$.

2. La f gura 9 muestra el campo de pendientes para $\dot{y} = y^2 - t^2$. Dibuje la curva integral que pasa por $(0, -1)$, la curva que pasa por $(0, 0)$ y la curva que pasa por $(0, 2)$. ¿Es $y(t) = 0$ una solución?

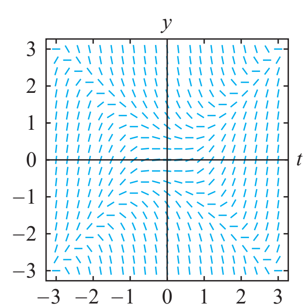


FIGURA 9 Campo de pendientes para $\dot{y} = y^2 - t^2$.

3. Pruebe que $f(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})$ es una solución de $\dot{y} = t - 2y$. Dibuje las cuatro soluciones a las que da lugar $y(0) = \pm 0{,}5, \pm 1$ sobre el campo de pendientes de la figura 10. El campo de pendientes sugiere que cada solución aproxima a $f(t)$ cuando $t \to +\infty$. Confirme esta afirmación probando que $y = f(t) + Ce^{-2t}$ es la solución general.

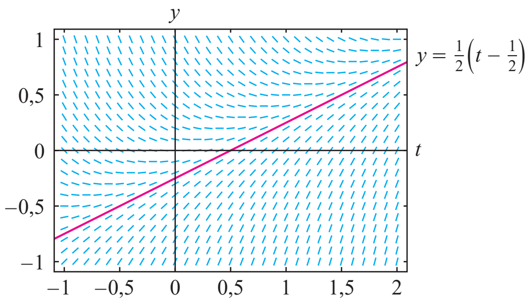


FIGURA 10 Campo de pendientes para $\dot{y} = t - 2y$.

4. Uno de los campos de pendientes de las figuras 11(A) y (B) es el campo de pendientes de $\dot{y} = t^2$. El otro es el de $\dot{y} = y^2$. Identifique cuál es cuál. En cada caso, dibuje las soluciones con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $y(0) = -1$.

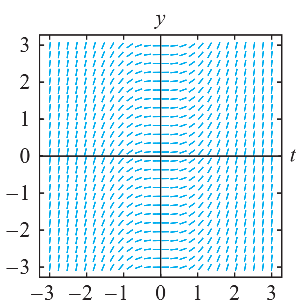


FIGURA 11(A)

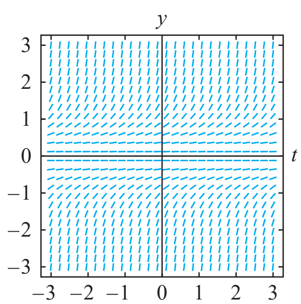


FIGURA 11(B)

5. Considere la ecuación diferencial $\dot{y} = t - y$.

(a) Dibuje el campo de pendientes de la ecuación diferencial $\dot{y} = t - y$ en el rango $-1 \le t \le 3$, $-1 \le y \le 3$. Como ayuda, observe que la isoclina de pendiente c es la recta $t - y = c$, de tal manera que los segmentos tienen pendiente c en los puntos de la recta $y = t - c$.

(b) Pruebe que $y = t - 1 + Ce^{-t}$ es una solución para todo C. Como $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, estas soluciones se aproximan a la solución particular $y = t - 1$ cuando $t \to +\infty$. Explique cómo se ve reflejado este comportamiento en su campo de pendientes.

6. Pruebe que las isoclinas de $\dot{y} = 1/y$ son rectas horizontales. Dibuje el campo de pendientes para $-2 \le t \le 2$, $-2 \le y \le 2$, y represente las soluciones con condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

7. Pruebe que las isoclinas de $\dot{y} = t$ son rectas verticales. Dibuje el campo de pendientes para $-2 \le t \le 2$, $-2 \le y \le 2$, y represente las curvas integrales que pasan por $(0, -1)$ y por $(0, 1)$.

8. Dibuje el campo de pendientes de $\dot{y} = ty$ para $-2 \le t \le 2$, $-2 \le y \le 2$. En base a su gráfico, determine $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, donde $y(t)$ es una solución para la que $y(0) > 0$. ¿Cuál es $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ si $y(0) < 0$?

9. Relacione cada ecuación diferencial con su campo de pendientes en las figuras 12(A)-(F).

(i) $\dot{y} = -1$ **(ii)** $\dot{y} = \dfrac{y}{t}$ **(iii)** $\dot{y} = t^2 y$

(iv) $\dot{y} = ty^2$ **(v)** $\dot{y} = t^2 + y^2$ **(vi)** $\dot{y} = t$

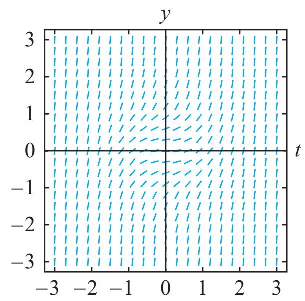


FIGURA 12(A)

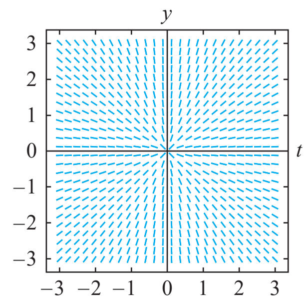


FIGURA 12(B)

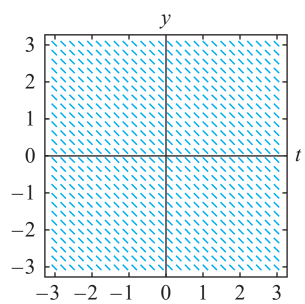


FIGURA 12(C)

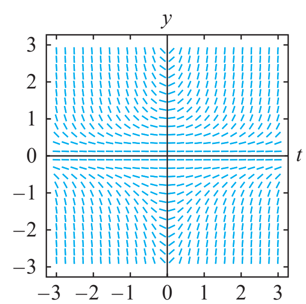


FIGURA 12(D)

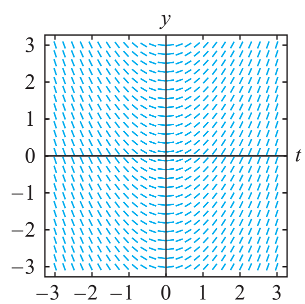


FIGURA 12(E)

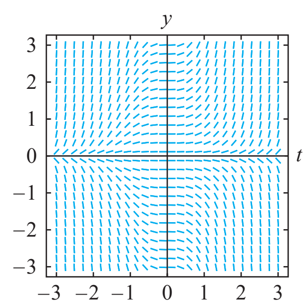


FIGURA 12(F)

10. Dibuje la solución de $\dot{y} = ty^2$ que cumple $y(0) = 1$ en el campo de pendientes correspondiente de la figura 12(A)-(F). A continuación pruebe, utilizando separación de variables, que si $y(t)$ es una solución tal que $y(0) > 0$, entonces $y(t)$ tiende a infinito cuando $t \to \sqrt{2/y(0)}$.

11. (a) Dibuje el campo de pendientes de $\dot{y} = t/y$ en la región $-2 \le t \le 2$, $-2 \le y \le 2$.

(b) Compruebe que $y = \pm\sqrt{t^2 + C}$ es la solución general.

(c) Dibuje las soluciones, con condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y(0) = -1$, sobre el campo de pendientes.

12. Dibuje el campo de pendientes de $\dot{y} = t^2 - y$ en la región $-3 \leq t \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$ y dibuje las soluciones que satisfacen $y(1) = 0$, $y(1) = 1$ e $y(1) = -1$.

13. Sean $F(t, y) = t^2 - y$ e $y(t)$ la solución de $\dot{y} = F(t, y)$ que cumple $y(2) = 3$. Sea $h = 0{,}1$ el paso de tiempo en el método de Euler y suponga que $y_0 = y(2) = 3$.

(a) Calcule $y_1 = y_0 + hF(2, 3)$.

(b) Calcule $y_2 = y_1 + hF(2{,}1, y_1)$.

(c) Calcule $y_3 = y_2 + hF(2{,}2, y_2)$ y continúe calculando hasta obtener y_4, y_5 e y_6.

(d) Halle aproximaciones a $y(2{,}2)$ y a $y(2{,}5)$.

14. Sea $y(t)$ la solución de $\dot{y} = te^{-y}$ que cumple $y(0) = 0$.

(a) Use el método de Euler con paso de tiempo $h = 0{,}1$ para aproximar $y(0{,}1), y(0{,}2), \ldots, y(0{,}5)$.

(b) Use separación de variables para hallar $y(t)$ de forma exacta.

(c) Calcule los errores en las aproximaciones de $y(0{,}1)$ y de $y(0{,}5)$.

En los problemas 15-20, utilice el método de Euler para aproximar el valor de $y(t)$ del enunciado con el paso de tiempo h indicado.

15. $y(0{,}5)$; $\dot{y} = y + t$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$

16. $y(0{,}7)$; $\dot{y} = 2y$, $y(0) = 3$, $h = 0{,}1$

17. $y(3{,}3)$; $\dot{y} = t^2 - y$, $y(3) = 1$, $h = 0{,}05$

18. $y(3)$; $\dot{y} = \sqrt{t + y}$, $y(2{,}7) = 5$, $h = 0{,}05$

19. $y(2)$; $\dot{y} = t \operatorname{sen} y$, $y(1) = 2$, $h = 0{,}2$

20. $y(5{,}2)$; $\dot{y} = t - \sec y$, $y(4) = -2$, $h = 0{,}2$

Problemas avanzados

21. Si $f(t)$ es continua en $[a, b]$, entonces la solución de $\dot{y} = f(t)$ con la condición inicial $y(a) = 0$ es $y(t) = \int_a^t f(u)\, du$. Pruebe que el método de Euler con paso de tiempo $h = (b - a)/N$ para N pasos, da lugar a la aproximación de orden N, en base al extremo inferior, de $y(b) = \int_a^b f(u)\, du$.

*Problemas 22-27: el **método del punto medio de Euler** es una variación del método de Euler que resulta, en general, signif cativamente más preciso. Para un paso de tiempo h y un valor inicial $y_0 = y(t_0)$, los valores y_k se def nen de forma recurrente mediante:*

$$y_k = y_{k-1} + hm_{k-1}$$

donde $m_{k-1} = F\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{h}{2}F(t_{k-1}, y_{k-1})\right)$.

22. Aplique tanto el método de Euler como el método del punto medio de Euler con $h = 0{,}1$ para estimar $y(1{,}5)$, donde $y(t)$ cumple $\dot{y} = y$ con $y(0) = 1$. Halle $y(t)$ de forma exacta y calcule los errores cometidos en ambas aproximaciones.

En los problemas 23-26, use el método del punto medio de Euler con el paso de tiempo indicado para aproximar el valor de $y(t)$ del enunciado.

23. $y(0{,}5)$; $\dot{y} = y + t$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$

24. $y(2)$; $\dot{y} = t^2 - y$, $y(1) = 3$, $h = 0{,}2$

25. $y(0{,}25)$; $\dot{y} = \cos(y + t)$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}05$

26. $y(2{,}3)$; $\dot{y} = y + t^2$, $y(2) = 1$, $h = 0{,}05$

27. Suponga que $f(t)$ es continua en $[a, b]$. Pruebe que el método del punto medio de Euler aplicado a $\dot{y} = f(t)$ con la condición inicial $y(a) = 0$ y paso de tiempo $h = (b - a)/N$ con N pasos, da lugar a la aproximación de orden N, en base al punto medio, de:

$$y(b) = \int_a^b f(u)\, du$$

10.3 La ecuación logística

La ecuación logística fue introducida en 1838 por el matemático belga Pierre-François Verhulst (1804-1849). Basada en la población de Bélgica para tres años (1815, 1830 y 1845), que se encontraba entre 4 y 4,5 millones de personas, Verhulst predijo que la población nunca sobrepasaría los 9,4 millones. Esta predicción se ha mantenido razonablemente cierta. La población actual de Bélgica se encuentra alrededor de 10,4 millones de personas.

El modelo más simple de crecimiento de poblaciones es $dy/dt = ky$, según el cual las poblaciones crecen exponencialmente. Esto puede ser cierto durante cortos periodos de tiempo, pero no queda claro que la población aumente sin límite. Por tanto, los biólogos de poblaciones utilizan unas ecuaciones diferenciales diferentes que tienen en cuenta las limitaciones ambientales para el crecimiento, como la escasez de alimentos y la competencia entre las especies. Uno de los modelos más utilizados está basado en la **ecuación diferencial logística**:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{A}\right)} \qquad \boxed{1}$$

Aquí $k > 0$ es la constante de crecimiento y $A > 0$ es una constante llamada **capacidad de carga**. La f gura 1 muestra una típica solución en forma de S de la ec. (1). Como en la sección previa, se denotará dy/dt como $\dot{y}$.

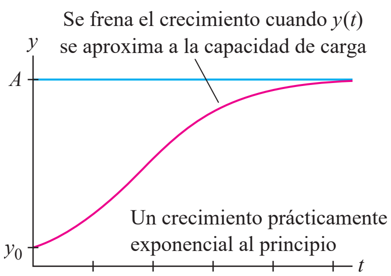


FIGURA 1 Solución de la ecuación logística.

Las soluciones de la ecuación logística con $y_0 < 0$ no son relevantes para un estudio de poblaciones porque las poblaciones no pueden ser negativas (vea el problema 18).

UN APUNTE CONCEPTUAL La ecuación logística $\dot{y} = ky(1 - y/A)$ dif ere de la ecuación diferencial exponencial $\dot{y} = ky$ únicamente en el factor adicional $(1 - y/A)$. Siempre que y sea pequeño en relación con A, este factor es próximo a 1 y se puede ignorar, dando lugar a $\dot{y} \approx ky$. Así, $y(t)$ crece prácticamente de forma exponencial cuando la población es pequeña (f gura 1). Cuando $y(t)$ tiende a A, el factor $(1 - y/A)$ tiende a cero. Esto provoca que $\dot{y}$ disminuya y evita que $y(t)$ sobrepase la capacidad de carga A.

El campo de pendientes de la f gura 2 muestra claramente que hay tres familias de soluciones, en función del valor inicial $y_0 = y(0)$.

- Si $y_0 > A$, entonces $y(t)$ es estrictamente decreciente y tiende a A cuando $t \to +\infty$.
- Si $0 < y_0 < A$, entonces $y(t)$ es estrictamente creciente y tiende a A cuando $t \to +\infty$.
- Si $y_0 < 0$, entonces $y(t)$ es estrictamente decreciente y $\lim_{t \to t_b-} y(t) = -\infty$ para algún instante t_b.

La ecuación (1) tiene también dos soluciones constantes: $y = 0$ e $y = A$. Éstas corresponden a las raíces de $ky(1 - y/A) = 0$ y cumplen la ec. (1) porque $\dot{y} = 0$ cuando y es una constante. Las soluciones constantes se denominan soluciones de **equilibrio** o soluciones de **estados estacionarios**. Una solución de equilibrio $y = A$ es un **equilibrio estable** porque cualquier solución con valor y_0 cercano a A tiende a la solución de equilibrio $y = A$ cuando $t \to +\infty$. Por el contrario, $y = 0$ es un **equilibrio inestable** porque cualquier solución que no sea de equilibrio con valor inicial y_0 cercano a $y = 0$, o bien aumenta hacia A, o bien decrece hasta $-\infty$.

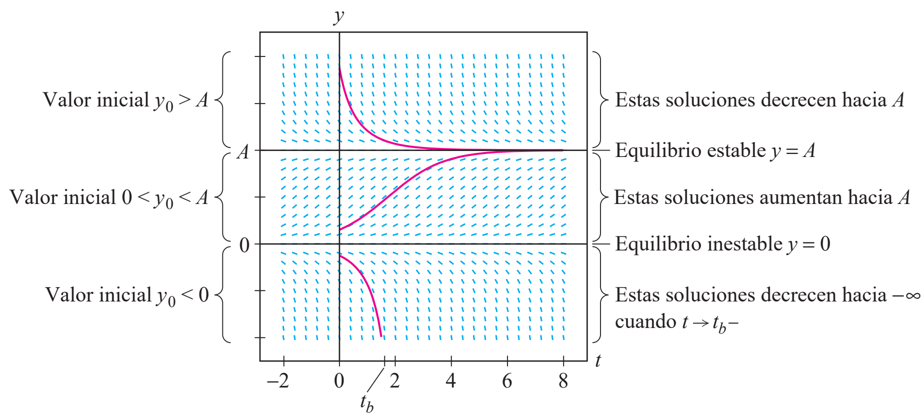


FIGURA 2 Campo de pendientes para $\dfrac{dy}{dt} = ky\left(1 - \dfrac{y}{A}\right)$.

Habiendo descrito las soluciones cualitativamente, se determinará a continuación las soluciones generales (de no equilibrio) explícitamente mediante separación de variables. Suponiendo que $y \neq 0$ e $y \neq A$, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{A}\right)$$

$$\frac{dy}{y(1 - y/A)} = k\,dt$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - A}\right) dy = \int k\,dt \qquad \boxed{2}$$

$$\ln|y| - \ln|y - A| = kt + C$$

$$\left|\frac{y}{y - A}\right| = e^{kt+C} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{y - A} = \pm e^C e^{kt}$$

En la ec. (2), se ha utilizado la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{1}{y(1 - y/A)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y - A}$$

Como $\pm e^C$ puede ser cualquier valor diferente de cero, se puede reemplazar $\pm e^C$ por C (diferente de cero):

$$\frac{y}{y - A} = Ce^{kt} \qquad \boxed{3}$$

Para $t = 0$, se obtiene la siguiente, y útil, relación entre C y el valor inicial $y_0 = y(0)$:

$$\frac{y_0}{y_0 - A} = C \tag{4}$$

Para resolver en y, multiplique ambos lados de la ec. (3) por $(y - A)$:

$$y = (y - A)Ce^{kt}$$

$$y(1 - Ce^{kt}) = -ACe^{kt}$$

$$y = \frac{ACe^{kt}}{Ce^{kt} - 1}$$

Cuando $C \neq 0$, se puede dividir por Ce^{kt} para obtener la solución general (no equilibrio):

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{A}\right) \qquad y = \frac{A}{1 - e^{-kt}/C}} \tag{5}$$

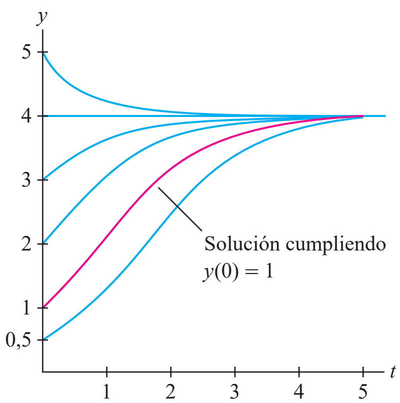


FIGURA 3 Diferentes soluciones de $\dot{y} = 0{,}3y(4 - y)$.

■ **EJEMPLO 1** Resuelva $\dot{y} = 0{,}3y(4 - y)$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

Solución Recuerde que $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Para aplicar la ec. (5), se debe reescribir la ecuación de la forma:

$$\dot{y} = 1{,}2y\left(1 - \frac{y}{4}\right)$$

Así, $k = 1{,}2$ y $A = 4$, y la solución general es:

$$y = \frac{4}{1 - e^{-1{,}2t}/C}$$

Hay dos maneras de determinar C. Una es resolver $y(0) = 1$ en C directamente. Una segunda manera, más fácil, es aplicar la ec. (4):

$$C = \frac{y_0}{y_0 - A} = \frac{1}{1 - 4} = -\frac{1}{3}$$

Se obtiene que la solución particular es $y = \dfrac{4}{1 + 3e^{-1{,}2t}}$ (f gura 3). ■

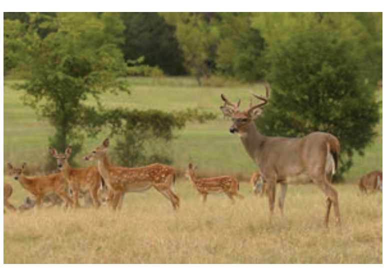


FIGURA 4

■ **EJEMPLO 2 Población de ciervos** Una población de ciervos presenta un crecimiento logístico con constante de crecimiento $k = 0{,}4$ año^{-1} en un bosque con capacidad de carga de 1000 ciervos.

(a) Halle la población de ciervos $P(t)$ si la población inicial es $P_0 = 100$.

(b) ¿Cuánto tarda la población en estar formada por 500 ciervos?

Solución La unidad de tiempo es el año porque la unidad de k es año^{-1}.

(a) Como $k = 0{,}4$ y $A = 1000$, $P(t)$ cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

La ecuación logística puede ser demasiado simple para describir una población real de ciervos de manera precisa, pero se utiliza como punto de inicio para modelos más sofisticados que son utilizados en ecología, biología de poblaciones y en ciencias forestales.

La ec. (5) proporciona la solución general:

$$P(t) = \frac{1000}{1 - e^{-0{,}4t}/C} \tag{6}$$

Utilizando la ec. (4) para calcular C, se obtiene (f gura 5):

$$C = \frac{P_0}{P_0 - A} = \frac{100}{100 - 1000} = -\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0{,}4t}}$$

(b) Para hallar el instante t en que $P(t) = 500$, se puede resolver la ecuación:

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0{,}4t}} = 500$$

Pero es más fácil utilizar la ec. (3):

$$\frac{P}{P - A} = Ce^{kt}$$

$$\frac{P}{P - 1000} = -\frac{1}{9}e^{0{,}4t}$$

Con $P = 500$ y resolviendo en t:

$$-\frac{1}{9}e^{0{,}4t} = \frac{500}{500 - 1000} = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{0{,}4t} = 9 \quad \Rightarrow \quad 0{,}4t = \ln 9$$

Así, se obtiene $t = (\ln 9)/0{,}4 \approx 5{,}5$ años. ■

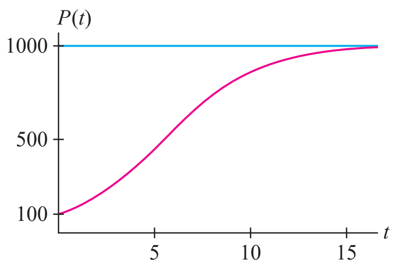


FIGURA 5 Población de ciervos como función de t (en años).

10.3 RESUMEN

- La *ecuación logística* y su solución general (de no equilibrio) ($k > 0$ y $A > 0$):

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{A}\right) \qquad y = \frac{A}{1 - e^{-kt}/C} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \frac{y}{y - A} = Ce^{kt}$$

- Dos soluciones (constantes) de equilibrio:
  - $y = 0$ es una solución de equilibrio inestable.
  - $y = A$ es una solución de equilibrio estable.
- Si el valor inicial $y_0 = y(0)$ cumple $y_0 > 0$, entonces $y(t)$ tiende a la solución de equilibrio estable $y = A$; es decir, $\lim_{t \to +\infty} y(t) = A$.

10.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes escuaciones es una ecuación diferencial logística?

(a) $\dot{y} = 2y(1 - y^2)$

(b) $\dot{y} = 2y\left(1 - \frac{y}{3}\right)$

(c) $\dot{y} = 2y\left(1 - \frac{t}{4}\right)$

(d) $\dot{y} = 2y(1 - 3y)$

2. La ecuación logística, ¿es una ecuación diferencial?

3. La ecuación logística, ¿es separable?

Problemas

1. Halle la solución general de la ecuación logística:

$$\dot{y} = 3y\left(1 - \frac{y}{5}\right)$$

A continuación, halle la solución particular que cumple $y(0) = 2$.

2. Halle la solución de $\dot{y} = 2y(3 - y)$, $y(0) = 10$.

3. Sea $y(t)$ una solución de $\dot{y} = 0{,}5y(1 - 0{,}5y)$ tal que $y(0) = 4$. Determine $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ sin hallar $y(t)$ explícitamente.

4. Sea $y(t)$ una solución de $\dot{y} = 5y(1 - y/5)$. Establezca si $y(t)$ es estrictamente creciente, es estrictamente decreciente o constante en los siguientes casos:

(a) $y(0) = 2$ **(b)** $y(0) = 5$ **(c)** $y(0) = 8$

5. Una población de ardillas vive en un bosque con capacidad de carga de 2000. Suponga un crecimiento logístico con constante de crecimiento $k = 0{,}6$ año^{-1}.

(a) Halle una fórmula para la población de ardillas $P(t)$, suponiendo una población inicial de 500 ardillas.

(b) ¿Cuánto tarda la población de ardillas en duplicarse?

6. La población $P(t)$ de larvas de mosquito que crece en un orif cio de un árbol aumenta según la ecuación logística con constante de crecimiento $k = 0{,}3$ día^{-1} y capacidad de carga $A = 500$.

(a) Halle una fórmula para la población de larvas de mosquito $P(t)$, suponiendo una población inicial de $P_0 = 50$ larvas.

(b) ¿Cuánto tarda la población de larvas en llegar a ser de 200?

7. En el lago Sunset había 2000 truchas arcoíris y pasado 1 año la población ha crecido hasta 4500. Suponiendo crecimiento logístico con una capacidad de carga de 20 000, halle la constante de crecimiento k (especif que las unidades) y determine cuándo la población llegará a ser de 10 000.

8. Propagación de un rumor Un rumor se propaga a través de una pequeña ciudad. Sea $y(t)$ la fracción de la población que ha escuchado el rumor en el tiempo t y suponga que la tasa a la cual se extiende el rumor es proporcional al producto de la fracción y de la población que ha escuchado el rumor por la fracción $1 - y$ que todavía no lo ha escuchado.

(a) Determine la ecuación diferencial que cumple y en términos de un factor de proporcionalidad k.

(b) Halle k (en unidades de día^{-1}), suponiendo que el 10 % de la población sabe el rumor en $t = 0$ y el 40 % lo sabe pasados $t = 2$ días.

(c) Utilizando las hipótesis del apartado (b), determine cuándo el 75 % de la población conocerá el rumor.

9. Se propaga un rumor en una escuela con 1000 estudiantes. A las 8 AM, 80 estudiantes han oído el rumor y al mediodía la mitad de la escuela ya lo sabe. Utilizando el modelo logístico del problema 8, determine cuándo el 90 % de los estudiantes ya conocerá el rumor.

10. GU Un modelo más simple para la propagación de un rumor, supone que la tasa a la que un rumor se propaga es proporcional (con factor k) a la fracción de la población que todavía no conoce el rumor.

(a) Calcule las soluciones a este modelo y al modelo del problema 8 con los valores $k = 0{,}9$ e $y_0 = 0{,}1$.

(b) Represente gráf camente ambas soluciones en el mismo eje.

(c) ¿Qué modelo le parece más realista? ¿Por qué?

11. Considere $k = 1$ y $A = 1$ en la ecuación logística.

(a) Halle las soluciones que cumplen $y_1(0) = 10$ e $y_2(0) = -1$.

(b) Halle el instante t para el que $y_1(t) = 5$.

(c) ¿Cuándo $y_2(t)$ resulta inf nita?

12. Un cultivo de tejido crece hasta que alcanza un área máxima de M cm^2. El área $A(t)$ del cultivo en el instante t se puede modelar por la ecuación diferencial:

$$\dot{A} = k\sqrt{A}\left(1 - \frac{A}{M}\right) \qquad \boxed{7}$$

donde k es la constante de crecimiento.

(a) Pruebe que si se considera $A = u^2$, entonces:

$$\dot{u} = \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{u^2}{M}\right)$$

A continuación, halle la solución general utilizando separación de variables.

(b) Pruebe que la solución general de la ec. (7) es:

$$A(t) = M\left(\frac{Ce^{(k/\sqrt{M})t} - 1}{Ce^{(k/\sqrt{M})t} + 1}\right)^2$$

13. GU En el modelo del problema 12, sea $A(t)$ el área en el instante t (horas) de un cultivo de tejido en crecimiento de tamaño inicial $A(0) = 1$ cm^2, suponiendo que el área máxima es $M = 16$ cm^2 y que la constante de crecimiento es $k = 0{,}1$.

(a) Halle una fórmula para $A(t)$. *Nota:* la condición inicial se cumple para dos valores de la constante C. Considere el valor de C para el que $A(t)$ es estrictamente creciente.

(b) Determine el área del cultivo en el instante $t = 10$ horas.

(c) GU Represente la solución con un programa de representación gráf ca.

14. Pruebe que si un cultivo de tejido crece según la ec. (7), entonces la tasa de crecimiento alcanza un máximo en $A = M/3$.

15. En 1751, Benjamin Franklin predijo que la población de los EE.UU. $P(t)$ aumentaría con constante de crecimiento $k = 0{,}028$ año^{-1}. Según el censo, la población de EE.UU. fue de 5 millones en 1800 y de 76 millones en 1900. Suponiendo un crecimiento logístico con $k = 0{,}028$, halle la capacidad de carga estimada para la población de EE.UU. *Indicación:* aplique las ecs. (3) y (4) para probar que:

$$\frac{P(t)}{P(t) - A} = \frac{P_0}{P_0 - A}e^{kt}$$

16. Ecuación logística inversa Considere la siguiente ecuación logística (con $k, B > 0$):

$$\frac{dP}{dt} = -kP\left(1 - \frac{P}{B}\right) \qquad \boxed{8}$$

(a) Dibuje el campo de pendientes de esta ecuación.

(b) La solución general es $P(t) = B/(1 - e^{kt}/C)$, donde C es una constante diferente de cero. Pruebe que $P(0) > B$ si $C > 1$ y $0 < P(0) < B$ si $C < 0$.

(c) Pruebe que la ec. (8) modela una población en "extinción-explosión". Esto quiere decir que, $P(t)$ tiende a cero si la población inicial cumple $0 < P(0) < B$, y tiende a $+\infty$ pasado un periodo f nito de tiempo si $P(0) > B$.

(d) Pruebe que $P = 0$ es una solución de equilibrio estable y que $P = B$ es una solución de equilibrio inestable.

Problemas avanzados

En los problemas 17 y 18, sea $y(t)$una solución de la ecuación logística

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{A}\right) \qquad \boxed{9}$$

donde $A > 0$ y $k > 0$.

17. (a) Derive la ec. (9) respecto a t y utilice la regla de la cadena para probar que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2y\left(1 - \frac{y}{A}\right)\left(1 - \frac{2y}{A}\right)$$

(b) Pruebe que $y(t)$ es convexa si $0 < y < A/2$ y es cóncava si $A/2 < y < A$.

(c) Pruebe que si $0 < y(0) < A/2$, entonces $y(t)$ presenta un punto de inf exión en $y = A/2$ (f gura 6).

(d) Suponga que $0 < y(0) < A/2$. Halle el instante t en que $y(t)$ alcanza el punto de inf exión.

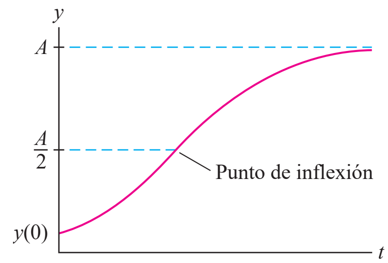


FIGURA 6 La curva logística tiene un punto de inf exión en $y = A/2$.

18. Sea $y = \dfrac{A}{1 - e^{-kt}/C}$ la solución general de la ec. (9). Si $y(t)$ tiene una asíntota vertical en $t = t_b$, es decir, si $\lim\limits_{t \to t_b-} y(t) = \pm\infty$, se dice que la solución "explota" en $t = t_b$.

(a) Pruebe que si $0 < y(0) < A$, entonces y no explota en ningún instante t_b.

(b) Pruebe que si $y(0) > A$, entonces y explota en un instante t_b, que es negativo (y que por tanto no se corresponde con ningún tiempo real).

(c) Pruebe que y explota en un instante positivo t_b si y sólo si $y(0) < 0$ (y que por tanto no se corresponde con ninguna población real).

10.4 Ecuaciones lineales de primer orden

En esta sección se introduce el método de los "factores de integración" para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Aunque ya se dispone de un método (el de separación de variables) para resolver ecuaciones separables, este nuevo método se puede aplicar a cualquier ecuación lineal, sea o no separable (f gura 1).

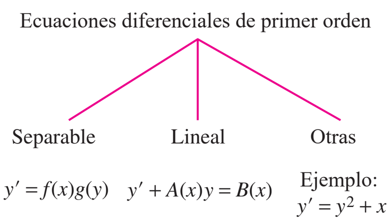


FIGURA 1

Una ecuación diferencial de primer orden es de la forma $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, donde $a(x)$ es una función diferente de la función cero. Se divide por $a(x)$ para expresar la ecuación de la manera estándar:

$$\boxed{y' + A(x)y = B(x)} \qquad \boxed{1}$$

Observe que en esta sección, x se considera como la variable independiente (aunque se utilizará t en el ejemplo 3). Para resolver la ec. (1), se multiplicará por una función $\alpha(x)$, denominada **factor de integración**, de manera que la parte izquierda de la igualdad sea la derivada de $\alpha(x)y$:

$$\alpha(x)(y' + A(x)y) = (\alpha(x)y)' \qquad \boxed{2}$$

Suponga que se puede encontrar una función $\alpha(x)$ que cumpla la ec. (2). Entonces, la ec. (1) resulta:

$$\alpha(x)(y' + A(x)y) = \alpha(x)B(x)$$
$$(\alpha(x)y)' = \alpha(x)B(x)$$

Se puede resolver esta ecuación integrando:

$$\alpha(x)y = \int \alpha(x)B(x)\,dx + C \qquad \text{o} \qquad y = \frac{1}{\alpha(x)}\left(\int \alpha(x)B(x)\,dx + C\right)$$

Para hallar $\alpha(x)$, expanda la ec. (2), mediante la regla del producto, a la derecha de la igualdad:

$$\alpha(x)y' + \alpha(x)A(x)y = \alpha(x)y' + \alpha'(x)y \quad \Rightarrow \quad \alpha(x)A(x)y = \alpha'(x)y$$

Dividiendo por y, se obtiene:

$$\boxed{\frac{d\alpha}{dx} = \alpha(x)A(x)} \qquad \text{3}$$

Se puede resolver esta ecuación por separación de variables:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = A(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\alpha}{\alpha} = \int A(x)\,dx$$

De esta manera, $\ln|\alpha(x)| = \int A(x)\,dx$ y, por exponenciación, $\alpha(x) = \pm e^{\int A(x)\,dx}$. Como sólo se necesita una solución de la ec. (3), se escoge la solución positiva.

En la fórmula para el factor de integración $\alpha(x)$, la integral $\int A(x)\,dx$ denota cualquier primitiva de $A(x)$.

TEOREMA 1 La solución general de $y' + A(x)y = B(x)$ es:

$$\boxed{y = \frac{1}{\alpha(x)}\left(\int \alpha(x)B(x)\,dx + C\right)} \qquad \text{4}$$

donde $\alpha(x)$ es un factor de integración:

$$\boxed{\alpha(x) = e^{\int A(x)\,dx}} \qquad \text{5}$$

EJEMPLO 1 Resuelva $xy' - 3y = x^2$, $y(1) = 2$.

Solución En primer lugar, divida por x para expresar la ecuación en la forma $y' + A(x)y = B(x)$:

$$y' - \frac{3}{x}y = x$$

De esta manera, $A(x) = -3x^{-1}$ y $B(x) = x$.

***Etapa 1.* Halle un factor de integración**

En este ejemplo, $A(x) = -3x^{-1}$ y por la ec. (5),

$$\alpha(x) = e^{\int A(x)\,dx} = e^{\int (-3/x)\,dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3}$$

***Etapa 2.* Halle la solución general**

Ya se ha determinado $\alpha(x)$, por lo que se puede utilizar la ec. (4) para escribir la solución general:

$$y = \alpha(x)^{-1}\int \alpha(x)B(x)\,dx = x^3\left(\int x^{-3}\cdot x\,dx\right)$$

$$= x^3\left(\int x^{-2}\,dx\right) = x^3\left(-x^{-1} + C\right) \qquad \text{6}$$

$$\boxed{y = -x^2 + Cx^3}$$

ATENCIÓN Se debe incluir la constante de integración C en la ec. (6), pero observe que, en la solución general, C no aparece como una constante aditiva. La solución general es $y = -x^2 + Cx^3$. No es correcto escribir $-x^2 + C$.

***Etapa 3.* Resuelva el problema de valores iniciales**

Ahora se resuelve C utilizando la condición inicial $y(1) = 2$:

$$y(1) = -1^2 + C\cdot 1^3 = 2 \qquad \text{o} \qquad C = 3$$

De esta manera, la solución del problema de valores iniciales es $y = -x^2 + 3x^3$.

Finalmente, se comprueba que $y = -x^2+3x^3$ cumple la ecuación de origen $xy' - 3y = x^2$:

$$xy' - 3y = x(-2x + 9x^2) - 3(-x^2 + 3x^3)$$
$$= (-2x^2 + 9x^3) + (3x^2 - 9x^3) = x^2$$

■ **EJEMPLO 2** Resuelva el problema de valores iniciales: $y' + (1 - x^{-1})y = x^2$, $y(1) = 2$.

Solución Esta ecuación es de la forma $y' + A(x)y = B(x)$ con $A(x) = (1 - x^{-1})$. Según la ec. (5), un factor de integración es:

$$\alpha(x) = e^{\int (1-x^{-1})\,dx} = e^{x-\ln x} = e^x e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}e^x$$

Aplicando la ec. (4) con $B(x) = x^2$, se obtiene la solución general:

Resumen: la solución general de $y' + A(x)y = B(x)$ es:

$$y = \alpha(x)^{-1}\left(\int \alpha(x)B(x) + C\right)$$

donde:

$$\alpha(x) = e^{\int A(x)\,dx}$$

$$y = \alpha(x)^{-1}\left(\int \alpha(x)B(x)\,dx + C\right) = xe^{-x}\left(\int (x^{-1}e^x)x^2\,dx + C\right) =$$
$$= xe^{-x}\left(\int xe^x\,dx + C\right)$$

Integrando por partes, $\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C$, por lo que f nalmente:

$$y = xe^{-x}((x-1)e^x + C) = x(x-1) + Cxe^{-x}$$

Utilizando la condición inicial $y(1) = 2$:

$$y(1) = 1(1-1) + Ce^{-1} = Ce^{-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2e$$

La solución particular de interés es:

$$y = x(x-1) + (2e)xe^{-x} = x(x-1) + 2xe^{1-x}$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL Se ha expresado la solución general de una ecuación diferencial de primer orden en términos de las integrales de las ecs. (4) y (5). Sin embargo, recuerde que no siempre es posible evaluar estas integrales de forma explícita. Por ejemplo, la solución general de $y' + xy = 1$ es:

$$y = e^{-x^2/2}\left(\int e^{x^2/2}\,dx + C\right)$$

La integral $\int e^{x^2/2}\,dx$ no se puede evaluar en términos elementales. Sin embargo, se puede aproximar numéricamente la integral y representar sus soluciones por ordenador (f gura 2).

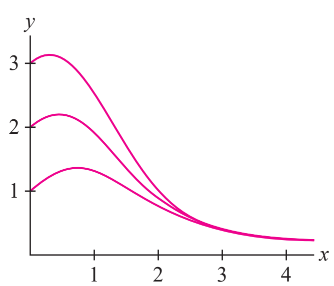


FIGURA 2 Soluciones de $y' + xy = 1$ obtenidas numéricamente y representadas gráf camente por ordenador.

En el siguiente ejemplo, se utiliza una ecuación diferencial para modelar "problemas de mezclas", con aplicaciones en biología, química y medicina.

■ **EJEMPLO 3 Un problema de mezclas** Un depósito contiene 600 litros de agua con una concentración de sacarosa de 0,2 kg/L. Se empieza a añadir agua con una concentra-

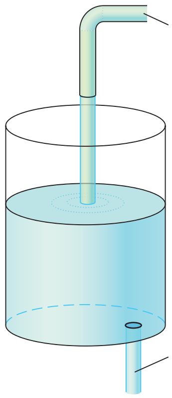


FIGURA 3

ción de sacarosa de 0,1 kg/L a razón de $R_e = 40$ L/min (f gura 3). El agua se mezcla instantáneamente y sale por el fondo del tanque a razón de $R_s = 20$ L/min. Sea $y(t)$ la cantidad de sacarosa en el depósito en el instante t (en minutos). Halle la ecuación diferencial que cumple $y(t)$ y resuelva $y(t)$.

Solución

***Etapa 1.* Determine la ecuación diferencial**

La derivada dy/dt es la diferencia de dos tasas de cambio: la tasa a la que la sacarosa entra en el depósito y la tasa a la que lo deja:

$$\frac{dy}{dt} = \text{sacarosa entrada} - \text{sacarosa salida} \qquad \boxed{7}$$

La tasa de entrada de sacarosa en el depósito es:

$$\text{Sacarosa entrada} = \underbrace{(0{,}1\ \text{kg/L})(40\ \text{L/min})}_{\substack{\text{Concentración multiplicada por}\\ \text{la tasa de entrada de agua}}} = 4\ \text{kg/min}$$

Ahora, se puede calcular la concentración de sacarosa en el tanque en el instante t. El agua entra en el tanque a razón de 40 L/min y sale a razón de 20 L/min, así que hay un f ujo neto de 20 L/min. El depósito tiene 600 L en el instante $t = 0$, por lo que en el instante t tiene $600 + 20t$ litros y por tanto:

$$\begin{matrix}\text{Concentración en}\\ \text{el instante } t\end{matrix} = \frac{\text{kilogramos de sacarosa en el depósito}}{\text{litros de agua en el depósito}} = \frac{y(t)}{600 + 20t}\ \text{kg/L}$$

La tasa a la que la sacarosa deja el depósito es el producto de la concentración por la tasa a la que el agua sale hacia afuera:

$$\begin{matrix}\text{Tasa de salida}\\ \text{de la sacarosa}\end{matrix} = \underbrace{\left(\frac{y}{600 + 20t}\ \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(20\ \frac{\text{L}}{\text{min}}\right)}_{\substack{\text{Concentración multiplicada por}\\ \text{la tasa de salida del agua}}} = \frac{20y}{600 + 20t} = \frac{y}{t + 30}\ \text{kg/min}$$

Ahora, la ec. (7) proporciona la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 4 - \frac{y}{t + 30} \qquad \boxed{8}$$

***Etapa 2.* Halle la solución general**

Se puede expresar la ec. (8) de la forma estándar:

$$\frac{dy}{dt} + \underbrace{\frac{1}{t + 30}}_{A(t)}\, y = \underbrace{4}_{B(t)} \qquad \boxed{9}$$

Un factor de integración es:

$$\alpha(t) = e^{\int A(t)\,dt} = e^{\int dt/(t+30)} = e^{\ln(t+30)} = t + 30$$

La solución general es:

$$y(t) = \alpha(t)^{-1}\left(\int \alpha(t)B(t)\,dt + C\right) =$$

$$= \frac{1}{t + 30}\left(\int (t + 30)(4)\,dt + C\right) =$$

$$= \frac{1}{t + 30}\left(2(t + 30)^2 + C\right) = 2t + 60 + \frac{C}{t + 30}$$

Resumen:

$$\begin{aligned} \text{tasa entrada sacarosa} &= 4\ \text{kg/min}\\ \text{tasa salida sacarosa} &= \frac{y}{t + 30}\ \text{kg/min}\\ \frac{dy}{dt} &= 4 - \frac{y}{t + 30}\\ \alpha(t) &= t + 30\\ y(t) &= 2t + 60 + \frac{C}{t + 30} \end{aligned}$$

Etapa 3. **Resuelva el problema de valores iniciales**

En $t = 0$, el depósito contiene 600 L de agua con una concentración de sacarosa de 0,2 kg/L. De esta manera, el total de sacarosa en $t = 0$ es $y(0) = 600 \cdot 0{,}2 = 120$ kg y se tiene:

$$y(0) = 2(0) + 60 + \frac{C}{0+30} = 60 + \frac{C}{30} = 120 \quad \Rightarrow \quad C = 1800$$

Se obtiene la siguiente fórmula (t en minutos), que es válida hasta que el tanque se desborda de agua:

$$y(t) = 2t + 60 + \frac{1800}{t+30} \text{ kg sacarosa}$$

■

10.4 RESUMEN

- Una *ecuación diferencial de primer orden* siempre se puede escribir de la forma:

$$y' + A(x)y = B(x)$$

- La solución general es:

$$y = \alpha(x)^{-1}\left(\int \alpha(x)B(x)\,dx + C\right)$$

donde $\alpha(x)$ es un *factor de integración*: $\alpha(x) = e^{\int A(x)\,dx}$.

10.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales de primer orden?

(a) $y' + x^2y = 1$ **(b)** $y' + xy^2 = 1$

(c) $x^5y' + y = e^x$ **(d)** $x^5y' + y = e^y$

2. Si $\alpha(x)$ es un factor de integración para $y' + A(x)y = B(x)$, entonces $\alpha'(x)$ es igual a (elija la respuesta correcta):

(a) $B(x)$ **(b)** $\alpha(x)A(x)$

(c) $\alpha(x)A'(x)$ **(d)** $\alpha(x)B(x)$

Problemas

1. Considere la ecuación diferencial $y' + x^{-1}y = x^3$.

(a) Compruebe que $\alpha(x) = x$ es un factor de integración.

(b) Pruebe que si se multiplica por $\alpha(x)$, la ecuación diferencial se puede expresar como $(xy)' = x^4$.

(c) Concluya que xy es una primitiva de x^4 y utilice esta información para hallar la solución general.

(d) Halle la solución particular que cumple $y(1) = 0$.

2. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-3t}$.

(a) Compruebe que $\alpha(t) = e^{2t}$ es un factor de integración.

(b) Aplique la ec. (4) para hallar la solución general.

(c) Halle la solución particular con condición inicial $y(0) = 1$.

3. Sea $\alpha(x) = e^{x^2}$. Compruebe la identidad:

$$(\alpha(x)y)' = \alpha(x)(y' + 2xy)$$

y explique de qué manera se puede utilizar para hallar la solución general de:

$$y' + 2xy = x$$

4. Halle la solución de $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 1$.

En los problemas 5-18, halle la solución general de la ecuación lineal de primer orden.

5. $xy' + y = x$

6. $xy' - y = x^2 - x$

7. $3xy' - y = x^{-1}$

8. $y' + xy = x$

9. $y' + 3x^{-1}y = x + x^{-1}$

10. $y' + x^{-1}y = \cos(x^2)$

11. $xy' = y - x$

12. $xy' = x^{-2} - \frac{3y}{x}$

13. $y' + y = e^x$

14. $y' + (\sec x)y = \cos x$

15. $y' + (\tan x)y = \cos x$

16. $e^{2x}y' = 1 - e^xy$

17. $y' - (\ln x)y = x^x$

18. $y' + y = \cos x$

En los problemas 19-26, resuelva el problema de valores iniciales.

19. $y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = -1$

20. $xy' + y = e^x$, $y(1) = 3$

21. $y' + \dfrac{1}{x+1}y = x^{-2}, \quad y(1) = 2$

22. $y' + y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1$

23. $(\operatorname{sen} x)y' = (\cos x)y + 1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

24. $y' + (\sec t)y = \sec t, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

25. $y' + (\tanh x)y = 1, \quad y(0) = 3$

26. $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad y(1) = 0$

27. Halle la solución general de $y' + ny = e^{mx}$ para todo m, n. *Nota:* el caso $m = -n$ se debe considerar aparte.

28. Halle la solución general de $y' + ny = \cos x$ para todo n.

En los problemas 29-32, un depósito de 1000 L *de capacidad contiene* 500 L *de agua con una concentración de sal de* 10 g/L. *Se añade agua, con una concentración de* 50 g/L, *a razón de* 80 L/min. *El f uido se mezcla instantáneamente y se bombea según una tasa concreta R_s. Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el instante t.*

29. Suponga que $R_s = 40$ L/min.

(a) Determine y resuelva la ecuación diferencial para $y(t)$.

(b) ¿Cuál es la concentración de sal cuando el agua se desborda?

30. Halle la concentración de sal cuando el tanque se desborde, suponiendo que $R_s = 60$ L/min.

31. Halle la concentración límite de sal cuando $t \to +\infty$ suponiendo que $R_s = 80$ L/min.

32. Suponga que $R_s = 120$ L/min. Halle $y(t)$. Después calcule el volumen del depósito y la concentración de sal pasados $t = 10$ minutos.

33. En un depósito entra agua a razón de $R_e = 20/(1+t)$ gal/min y sale a razón constante de $R_s = 5$ gal/min. Sea $V(t)$ el volumen de agua en el depósito en el instante t.

(a) Determine una ecuación diferencial para $V(t)$ y obtenga la solución para la condición inicial $V(0) = 100$.

(b) Halle el valor máximo de V.

(c) SAC Represente gráf camente $V(t)$ y estime el tiempo t en que el tanque queda vacío.

34. Un arroyo desemboca en un lago a razón de 1000 m^3/día. El arroyo queda contaminado por un producto tóxico cuya concentración es de 5 g/m^3. Suponga que el volumen del lago es 10^6 m^3 y que el agua f uye fuera del lago a un ritmo constante de 1000 m^3/día.

(a) Determine una ecuación diferencial para la concentración $c(t)$ de producto tóxico en el lago y resuelva $c(t)$, suponiendo que $c(0) = 0$. *Indicación:* halle una ecuación diferencial pata la cantidad de producto tóxico $y(t)$ y observe que $c(t) = y(t)/10^6$.

(b) ¿Cuál es la concentración límite para valores elevados de t?

En los problemas 35-38, considere un circuito en serie (f gura 4) consistente en una resistencia de R ohmios, un inductor de L henrios y una fuente variable de voltaje de V(t) voltios (tiempo t en segundos). La corriente a través del circuito I(t) (en amperios) cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}V(t) \qquad \boxed{10}$$

35. Halle la solución a la ec. (10) con la condición inicial $I(0) = 0$, suponiendo que $R = 100\ \Omega$, $L = 5$ H y $V(t)$ es constante e igual a $V(t) = 10$ V.

36. Suponga que $R = 110\ \Omega$, $L = 10$ H y $V(t) = e^{-t}$.

(a) Resuelva la ec. (10) con la condición inicial $I(0) = 0$.

(b) Calcule t_m e $I(t_m)$, donde t_m es el instante en que $I(t)$ alcanza su valor máximo.

(c) GU Utilice un programa informático de cálculo simbólico para obtener una gráf ca de la solución para $0 \le t \le 3$.

37. Suponga que $V(t) = V$ es constante y que $I(0) = 0$.

(a) Halle $I(t)$.

(b) Pruebe que $\lim_{t\to+\infty} I(t) = V/R$ y que $I(t)$ alcanza aproximadamente el 63 % de su valor límite pasados L/R segundos.

(c) ¿Cuánto tarda $I(t)$ en alcanzar el 90 % de su valor límite si $R = 500\ \Omega$, $L = 4$ H y $V = 20$ V?

38. Halle $I(t)$, suponiendo que $R = 500\ \Omega$, $L = 4$ H y $V = 20\cos(80)$ V?

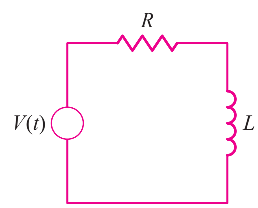


FIGURA 4 Circuito RL.

39. El depósito 1 en la f gura 5 se llena con V_1 litros de agua que contienen un tinte azul con una concentración inicial de c_0 g/L. Por otra parte, en el depósito entra agua a razón de R L/min, se mezcla instantáneamente con la solución tintada, y sale por el fondo del depósito a ritmo constante R. Sea $c_1(t)$ la concentración de tinte en el depósito en el instante t.

(a) Explique por qué c_1 cumple la ecuación diferencial $\dfrac{dc_1}{dt} = -\dfrac{R}{V_1}c_1$.

(b) Halle $c_1(t)$ si $V_1 = 300$ L, $R = 50$ y $c_0 = 10$ g/L.

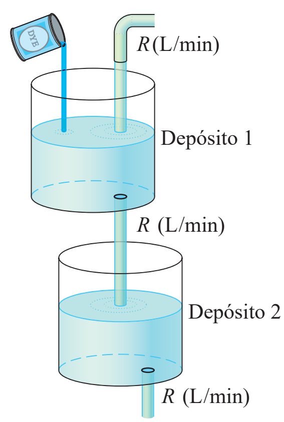


FIGURA 5

40. Continuando con el problema anterior, sea el depósito 2 otro depósito lleno con V_2 galones de agua. Suponga que la solución tintada del depósito 1 va a parar al depósito 2, tal y como se ilustra en la figura 5, se mezcla instantáneamente, y deja el depósito 2 a razón de R L/min también. Sea $c_2(t)$ la concentración de tinte en el depósito 2 en el instante t.

(a) Explique por qué c_2 cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{R}{V_2}(c_1 - c_2)$$

(b) Utilice la solución del problema 39 para hallar $c_2(t)$ si $V_1 = 300$, $V_2 = 200$, $R = 50$ y $c_0 = 10$.

(c) Halle la máxima concentración en el depósito 2.

(d) GU Represente gráficamente la solución.

41. Sean a, b, r constantes. Pruebe que:

$$y = Ce^{-kt} + a + bk\left(\frac{k \operatorname{sen} rt - r\cos rt}{k^2 + r^2}\right)$$

es una solución general de:

$$\frac{dy}{dt} = -k\big(y - a - b \operatorname{sen} rt\big)$$

42. Suponga que la temperatura exterior varía según:

$$T(t) = 15 + 5 \operatorname{sen}(\pi t/12)$$

donde $t = 0$ son las 12 del mediodía. Una casa se calienta hasta 25 °C en $t = 0$ y después su temperatura $y(t)$ varía según la ley de enfriamiento de Newton (figura 6):

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}1\big(y(t) - T(t)\big)$$

Aplique el problema 41 para resolver $y(t)$.

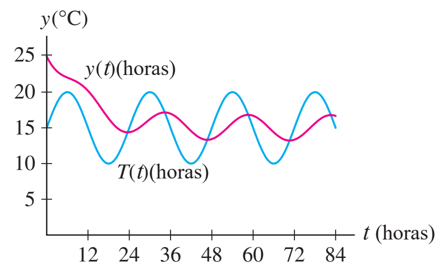


FIGURA 6 Temperatura de la casa $y(t)$.

Problemas avanzados

43. Sea $\alpha(x)$ un factor de integración para $y' + A(x)y = B(x)$. La ecuación diferencial $y' + A(x)y = 0$ se denomina **ecuación homogénea** asociada.

(a) Pruebe que $1/\alpha(x)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

(b) Pruebe que si $y = f(x)$ es una solución particular de $y' + A(x)y = B(x)$, entonces $f(x) + C/\alpha(x)$ es también una solución para cualquier constante C.

44. Utilice el teorema fundamental del cálculo y la regla del producto para comprobar directamente que para todo x_0, la función:

$$f(x) = \alpha(x)^{-1}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)B(t)\,dt$$

es una solución del problema de valores iniciales:

$$y' + A(x)y = B(x) \qquad y(x_0) = 0$$

donde $\alpha(x)$ es un factor de integración [una solución de la ec. (3)].

45. Corrientes transitorias Suponga que el circuito descrito por la ec. (10) es impulsado por una fuente de voltaje sinusoidal $V(t) = V \operatorname{sen} \omega t$ (donde V y ω son constantes).

(a) Pruebe que:

$$I(t) = \frac{V}{R^2 + L^2\omega^2}(R \operatorname{sen} \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ce^{-(R/L)t}$$

(b) Sea $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$. Determine θ tal que $Z\cos\theta = R$ y $Z \operatorname{sen}\theta = L\omega$. Use la fórmula de adición para la función seno, para demostrar que:

$$I(t) = \frac{V}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \theta) + Ce^{-(R/L)t}$$

De esta manera, se ha probado que la corriente en el circuito cambia de manera sinusoidal salvo por un término, denominado en electrónica la **corriente de transición**, que decrece exponencialmente.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales? Determine el orden de cada ecuación.

(a) $y' = y^5 - 3x^4y$ **(b)** $y' = x^5 - 3x^4y$

(c) $y = y''' - 3x\sqrt{y}$ **(d)** $\operatorname{sen} x \cdot y'' = y - 1$

2. Halle un valor de c tal que $y = x - 2 + e^{cx}$ sea una solución de $2y' + y = x$.

En los problemas 3-6, resuelva mediante separación de variables.

3. $\dfrac{dy}{dt} = t^2y^{-3}$ **4.** $xyy' = 1 - x^2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 1$ **6.** $y' = \dfrac{xy^2}{x^2 + 1}$

En los problemas 7-10, resuelva el problema de valores iniciales utilizando separación de variables.

7. $y' = \cos^2 x, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$ **8.** $y' = \cos^2 y, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

9. $y' = xy^2, \quad y(1) = 2$ **10.** $xyy' = 1, \quad y(3) = 2$

11. La figura 1 muestra el campo de pendientes para $\dot{y} = \operatorname{sen} y + ty$. Dibuje las gráficas de las soluciones con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $y(0) = -1$.

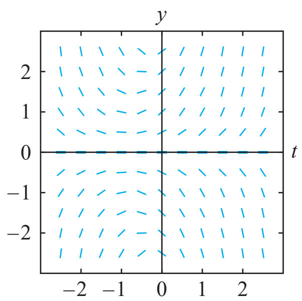


FIGURA 1

12. ¿Cuál de las ecuaciones (i)-(iii) corresponde al campo de pendientes de la f gura 2?

(i) $\dot{y} = 1 - y^2$ **(ii)** $\dot{y} = 1 + y^2$ **(iii)** $\dot{y} = y^2$

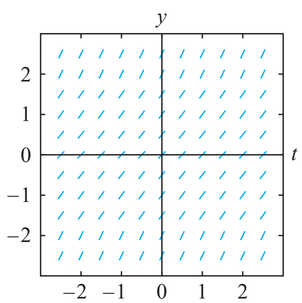


FIGURA 2

13. Sea $y(t)$ la solución de la ecuación diferencial cuyo campo de pendientes se muestra en la f gura 2, que cumple $y(0) = 0$. Dibuje la gráf ca de $y(t)$. A continuación, utilice su respuesta al problema 12 para resolver $y(t)$.

14. Sea $y(t)$ la solución de $4\dot{y} = y^2 + t$ que cumple $y(2) = 1$. Aplique el método de Euler con paso de tiempo $h = 0{,}05$ para $n = 6$ pasos.

15. Sea $y(t)$ la solución de $(x^3 + 1)\dot{y} = y$ que cumple $y(0) = 1$. Calcule aproximaciones de $y(0{,}1)$, $y(0{,}2)$ e $y(0{,}3)$ mediante el método de Euler con paso de tiempo $h = 0{,}1$.

En los problemas 16-19, resuelva utilizando el método de factores de integración.

16. $\dfrac{dy}{dt} = y + t^2, \quad y(0) = 4$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + x, \quad y(1) = 3$

18. $\dfrac{dy}{dt} = y - 3t, \quad y(-1) = 2$

19. $y' + 2y = 1 + e^{-x}, \quad y(0) = -4$

En los problemas 20-27, resuelva utilizando el método apropiado.

20. $x^2 y' = x^2 + 1, \quad y(1) = 10$

21. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(\pi) = 2$

22. $xy' = 2y + x - 1, \quad y(\frac{3}{2}) = 9$

23. $(y - 1)y' = t, \quad y(1) = -3$

24. $(\sqrt{y} + 1)y' = yte^{t^2}, \quad y(0) = 1$

25. $\dfrac{dw}{dx} = k\dfrac{1 + w^2}{x}, \quad w(1) = 1$

26. $y' + \dfrac{3y - 1}{t} = t + 2$

27. $y' + \dfrac{y}{x} = \operatorname{sen} x$

28. Halle las soluciones de $y' = 4(y - 12)$ que cumplen $y(0) = 20$ e $y(0) = 0$ y dibuje sus gráf cas.

29. Halle las soluciones de $y' = -2y + 8$ que cumplen $y(0) = 3$ e $y(0) = 4$ y dibuje sus gráf cas.

30. Pruebe que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ cumple la ecuación diferencial $y' = \sec y$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

31. Halle la solución $y = f(x)$ de $y' = \sqrt{y^2 - 1}$ que cumple la solución inicial $y(0) = 1$.

32. Determine si la ecuación diferencial se puede resolver utilizando separación de variables, el método de factores de integración, o ambos, o ninguno de ellos.

(a) $y' = y + x^2$ **(b)** $xy' = y + 1$

(c) $y' = y^2 + x^2$ **(d)** $xy' = y^2$

33. Sean A y B constantes. Demuestre que si $A > 0$, entonces todas las soluciones de $\frac{dy}{dt} + Ay = B$ tienden al mismo límite cuando $t \to +\infty$.

34. En el instante $t = 0$, un depósito de 5 m de altura con la forma de una pirámide invertida, cuya sección transversal en la parte superior es un cuadrado de lado 2 m se llena con agua. El agua se sale por un orif cio en el fondo de área 0,002 m^2. Aplique la ley de Torricelli para determinar el tiempo necesario para que el depósito se vacíe.

35. Se llena la artesa de la f gura 3 (las dimensiones están en centímetros) con agua. En el instante $t = 0$ (en segundos), el agua se empieza a escapar por un orif cio en la parte inferior de área 4 cm^2. Sea $y(t)$ la altura del agua en el instante t. Halle una ecuación diferencial para $y(t)$. Resuelva la ecuación y determine en qué momento el nivel de agua ha disminuido hasta 60 cm.

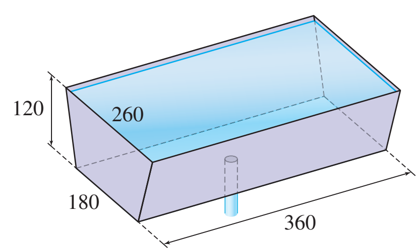


FIGURA 3

36. Halle la solución de la ecuación logística $\dot{y} = 0{,}4y(4 - y)$ que satisface $y(0) = 8$.

37. Sea $y(t)$ la solución de $\dot{y} = 0{,}3y(2 - y)$ con $y(0) = 1$. Determine $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ sin resolver y explícitamente.

38. Suponga que $y' = ky(1 - y/8)$ tiene una solución que cumple $y(0) = 12$ e $y(10) = 24$. Halle k.

39. La capacidad de carga de un lago es de 1000 peces. Suponga que una población de peces tiene un crecimiento logístico con constante de crecimiento $k = 0{,}2$ día^{-1}. ¿Cuántos días tardará la población en llegar a ser de 900 peces, si la población inicial es de 20 peces?

40. Una población de conejos en una isla tiene un crecimiento exponencial con tasa de crecimiento $k = 0{,}12$ meses^{-1}. Cuando la población alcanza los 300 conejos (digamos que es en $t = 0$), los lobos empiezan a comerse a los conejos a razón de r conejos por mes.

(a) Halle una ecuación diferencial para la población de conejos $P(t)$.

(b) ¿Cuál puede ser el valor máximo de r que permita que la población de conejos no se extinga?

41. Pruebe que $y = \operatorname{sen}(\tan^{-1} x + C)$ es la solución general de $y' = \sqrt{1 - y^2}/(1 + x^2)$. A continuación, utilice la fórmula de adición para la función seno para probar que la solución general se puede expresar como:

$$y = \frac{(\cos C)x + \operatorname{sen} C}{\sqrt{1 + x^2}}$$

42. Un depósito se llena con 300 litros de agua contaminada que contienen 3 kg de producto tóxico. El agua pura entra en el depósito a razón de 40 L/min, se mezcla de forma instantánea y luego sale fuera del depósito a un ritmo constante de 40 L/min. Sea $y(t)$ la cantidad de producto tóxico presente en el depósito en el instante t.

(a) Halle la ecuación diferencial que cumple $y(t)$.

(b) Resuelva $y(t)$.

(c) Determine el instante en que hay 0,01 kg de producto tóxico en el depósito.

43. En $t = 0$, un depósito de volumen 300 L se llena con 100 L de agua salada a una concentración de sal de 8 g/L. Entra agua limpia en el tanque a razón de 40 L/min, se mezcla de forma instantánea y sale a un ritmo constante de 40 L/min. Sea $c_1(t)$ la concentración de sal en el instante t.

(a) Halle la ecuación diferencial que cumple $c_1(t)$ *Indicación:* halle la ecuación diferencial para la cantidad de sal $y(t)$ y observe que $c_1(t) = y(t)/100$.

(b) Halle la concentración de sal $c_1(t)$ en el depósito como función del tiempo.

44. El f ujo de salida del depósito en el problema 43 se dirige a un segundo depósito que contiene V litros de agua limpia, se mezcla de forma instantánea y sale a un ritmo constante de 40 L/min. Determine la concentración de sal $c_2(t)$ en el segundo depósito como función del tiempo en los dos casos siguientes:

(a) $V = 200$ **(b)** $V = 300$

En cada caso, determine la concentración máxima.

Nuestro conocimiento de lo que están hechas las estrellas se basa en el estudio de la absorción de espectros, las sucesiones de longitudes de onda absorbidas por los gases en la atmósfera de la estrella.

11 SERIES INFINITAS

La teoría de las series inf nitas es una tercera rama del cálculo inf nitesimal, junto con el cálculo diferencial e integral. Las series inf nitas proporcionan una nueva perspectiva sobre las funciones y sobre muchos números interesantes. Dos ejemplos son la series inf nita para la función exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

y la serie de Gregory-Leibniz (vea el problema 53 en la sección 2)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

La primera muestra que e^x se puede expresar como un “polinomio inf nito” y la segunda revela que π está relacionado con los recíprocos de los enteros impares de una manera inesperada. Para que las series inf nitas tengan sentido, se necesita def nir con precisión lo que signif ca sumar inf nitos términos. Los límites desempeñan un papel fundamental aquí, de igual manera a cómo lo han hecho en el cálculo diferencial e integral.

11.1 Sucesiones

Las sucesiones de números aparecen en situaciones diversas. Si se parte un pastel por la mitad y a continuación se divide la parte restante por la mitad y se continúa dividiendo en mitades inf nitamente (f gura 1), entonces la fracción de pastel que queda en cada paso forma la sucesión:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \ldots$$

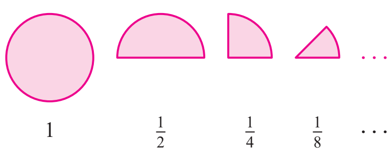


FIGURA 1

Se trata de la sucesión de valores para la función $f(n) = \dfrac{1}{2^n}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Formalmente, una **sucesión** es una colección ordenada de números def nidos por una función $f(n)$ sobre el conjunto de los enteros. Los valores $a_n = f(n)$ son los **términos** de la sucesión y n se denomina el **índice**. A nivel informal, se piensa en una sucesión $\{a_n\}$ como en una lista de términos:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots$$

La sucesión no tiene porqué empezar en $n = 1$: puede hacerlo en $n = 0$, $n = 2$ o cualquier otro entero positivo. Cuando a_n viene dado por una fórmula, se dice que a_n es el **término general**.

La sucesión b_n es la serie de Balmer de longitudes de onda de absorción para el átomo de hidrógeno en nanómetros. Desempeña un papel clave en la espectroscopía.

Término general	Dominio	Sucesión
$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$	$n \geq 1$	$0, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ \ldots$
$a_n = (-1)^n n$	$n \geq 0$	$0, \ -1, \ 2, \ -3, \ 4, \ \ldots$
$b_n = \dfrac{364{,}5\, n^2}{n^2 - 4}$	$n \geq 3$	656,1, 486, 433,9, 410,1, 396,9, . . .

La sucesión del siguiente ejemplo se def ne de forma *recurrente*. Se proporciona el primer término y el término n-ésimo, a_n, se calcula en términos del precedente, a_{n-1}.

■ **EJEMPLO 1 Sucesión recurrente** Calcule a_2, a_3, a_4 para la sucesión def nida de forma recurrente por:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$$

La sucesión del ejemplo 1 puede resultarle conocida: se trata de la sucesión de aproximaciones a $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$ que se obtuvo por el método de Newton, con valor inicial $a_1 = 1$. Cuando n tiende a infinito, a_n se aproxima a $\sqrt{2}$.

Solución

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{17}{12} \approx 1{,}4167$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{2}{a_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right) = \frac{577}{408} \approx 1{,}414216$$ ■

El objetivo principal es estudiar la convergencia de sucesiones. Una sucesión $\{a_n\}$ converge a un límite L, si $|a_n - L|$ es arbitrariamente pequeño cuando n es suf cientemente grande. He aquí una def nición formal.

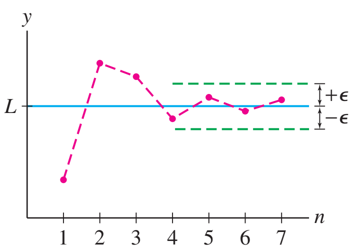


FIGURA 2 Representación de una sucesión con límite L. Para cualquier ϵ los puntos permanecen dentro de una banda de radio ϵ alrededor de L.

DEFINICIÓN Límite de una sucesión Se dice que $\{a_n\}$ **converge** a un límite L y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L$$

si, para todo $\epsilon > 0$, existe un número M tal que $|a_n - L| < \epsilon$, para todo $n > M$.

- Si no existe límite, se dice que $\{a_n\}$ diverge.
- Si los términos crecen sin cota, se dice que $\{a_n\}$ diverge a inf nito.

Si $\{a_n\}$ converge, entonces su límite L es único. Una buena manera de visualizar el límite es representar los puntos $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots$, como en la f gura 2. La sucesión converge a L si, para todo ϵ y a partir de un valor n, los puntos permanecen dentro de una banda de radio ϵ alrededor de la recta horizontal $y = L$. La f gura 3 muestra la representación de una sucesión que converge a $L = 1$. Por otra parte, se puede probar que la sucesión $a_n = \cos n$ representada en la f gura 4 no tiene límite.

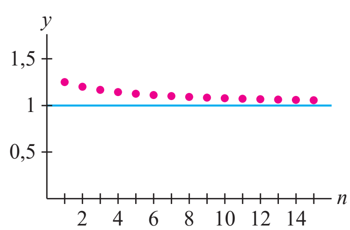


FIGURA 3 La sucesión $a_n = \dfrac{n+4}{n+1}$.

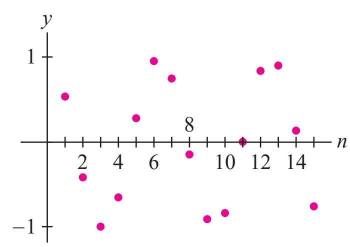


FIGURA 4 La sucesión $a_n = \cos n$ no tiene límite.

■ **EJEMPLO 2 Demostración de la convergencia** Sea $a_n = \dfrac{n+4}{n+1}$. Demuestre formalmente que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Solución Según la def nición, para todo $\epsilon > 0$, se debe encontrar un número M tal que:

$$|a_n - 1| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > M \qquad \boxed{1}$$

Se tiene:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+4}{n+1} - 1\right| = \frac{3}{n+1}$$

Por tanto, $|a_n - 1| < \epsilon$ si:

$$\frac{3}{n+1} < \epsilon \qquad \text{o} \qquad n > \frac{3}{\epsilon} - 1$$

Dicho de otro modo, la ec. (1) se cumple si $M = \frac{3}{\epsilon} - 1$. Así se ha demostrado que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. ■

Tenga presentes los siguientes dos puntos sobre sucesiones:

- El límite no cambia si se varían o se eliminan un número f nito de términos de la sucesión.
- Si C es una constante y $a_n = C$ para todo n suf cientemente grande, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = C$.

Muchas de las sucesiones que se consideran están def nidas por funciones; es decir, $a_n = f(n)$ para alguna función $f(x)$. Por ejemplo:

$$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad \text{está def nida por} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x}$$

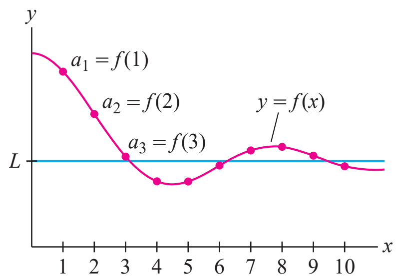


FIGURA 5 Si $f(x)$ converge a L, entonces la sucesión $a_n = f(n)$ también converge a L.

A menudo se suele utilizar que si $f(x)$ tiende a un límite L cuando $x \to \infty$, entonces la sucesión $a_n = f(n)$ tiende al mismo límite L (f gura 5). En realidad, para todo $\epsilon > 0$, se puede hallar M tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x > M$. Así, automáticamente, se tiene que $|f(n) - L| < \epsilon$ para cualquier entero $n > M$.

TEOREMA 1 Sucesión definida por una función Si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, entonces la sucesión $a_n = f(n)$ converge al mismo límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

■ **EJEMPLO 3** Halle el límite de la sucesión:

$$\frac{2^2-2}{2^2}, \quad \frac{3^2-2}{3^2}, \quad \frac{4^2-2}{4^2}, \quad \frac{5^2-2}{5^2}, \quad \dots$$

Solución Se trata de una sucesión con término general:

$$a_n = \frac{n^2-2}{n^2} = 1 - \frac{2}{n}$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema 1 con $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 - 0 = 1 \qquad ■$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n + \ln n}{n^2}$.

Solución Aplique el teorema 1, usando la regla de L'Hôpital en el segundo paso:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\ln n}{n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+(1/x)}{2x} = 0 \qquad ■$$

TABLA 1
Longitudes de onda de Balmer

n	b_n
3	656,1
4	486
5	433,9
6	410,1
7	396,9
10	379,7
20	368,2
40	365,4
60	364,9
80	364,7
100	364,6

El límite de las longitudes de onda de Balmer b_n del siguiente ejemplo desempeña un papel en física y química pues determina la energía de ionización del átomo de hidrógeno. La tabla 1 sugiere que b_n tiende a 364,5. La f gura 6 muestra la gráf ca y en la f gura 7, se muestran las longitudes de onda "agrupándose" hacia su valor límite.

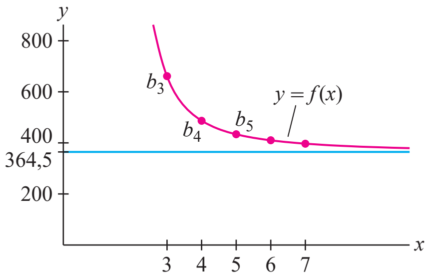


FIGURA 6 La sucesión y la función tienden al mismo límite.

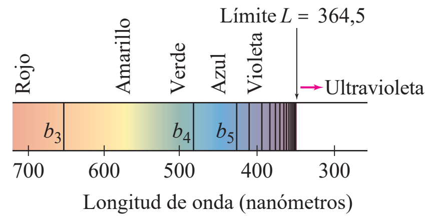


FIGURA 7

■ **EJEMPLO 5 Longitudes de onda de Balmer** Calcule el límite de las longitudes de onda de Balmer $b_n = \dfrac{364{,}5n^2}{n^2 - 4}$, donde $n \geq 3$.

Solución Aplique el teorema 1 con $f(x) = \dfrac{364{,}5x^2}{x^2 - 4}$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to\infty} \frac{364{,}5x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{364{,}5}{1 - 4/x^2} = \frac{364{,}5}{\lim\limits_{x\to\infty}(1 - 4/x^2)} = 364{,}5$$ ■

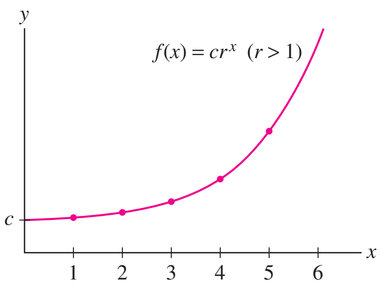


FIGURA 8 Si $r > 1$, la progresión geométrica $a_n = r^n$ diverge a ∞.

Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión $a_n = cr^n$, donde c y r son constantes no nulas. Cada término es r veces el término anterior; es decir, $a_n/a_{n-1} = r$. El número r se denomina **razón**. Por ejemplo, si $r = 3$ y $c = 2$, se obtiene la sucesión (que empieza en $n = 0$):

$$2, \quad 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 3^2, \quad 2 \cdot 3^3, \quad 2 \cdot 3^4, \quad 2 \cdot 3^5, \quad \ldots$$

En el siguiente ejemplo, se determina cuándo una progresión geométrica converge. Recuerde que $\{a_n\}$ **diverge a** ∞ si los términos a_n crecen por encima de cualquier cota (f gura 8); es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{si, para cualquier número } N,\ a_n > N \text{ para } n \text{ suf cientemente grande}$$

Se def ne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ análogamente.

■ **EJEMPLO 6 Progresiones geométricas con $r \geq 0$** Demuestre que para $r \geq 0$ y $c > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} cr^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq r < 1 \\ c & \text{si} \quad r = 1 \\ \infty & \text{si} \quad r > 1 \end{cases}$$

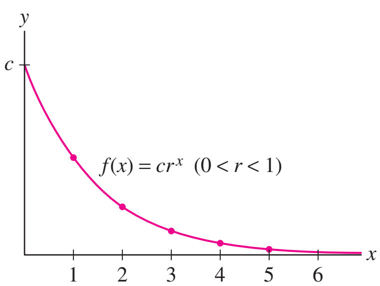


FIGURA 9 Si $0 < r < 1$, la progresión geométrica $a_n = r^n$ converge a 0.

Solución Sea $f(r) = cr^x$. Si $0 \leq r < 1$, entonces (f gura 9):

$$\lim_{n\to\infty} cr^n = \lim_{x\to\infty} f(x) = c \lim_{x\to\infty} r^x = 0$$

Si $r > 1$, entonces tanto $f(x)$ como la sucesión $\{cr^n\}$ divergen a ∞ (pues $c > 0$) (f gura 8). Si $r = 1$, entonces $cr^n = c$ para todo n y el límite es c. ■

Las propiedades de los límites que se han utilizado para funciones también son ciertas para sucesiones y se demuestran de forma similar.

TEOREMA 2 Propiedades de los límites de sucesiones Suponga que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes con:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = M$$

entonces:

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L \pm M$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = LM$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$ si $M \neq 0$

(iv) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = cL$ para cualquier constante c

RECORDATORIO $n!$ (n factorial) es el número:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

Por ejemplo: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

TEOREMA 3 Teorema de compresión para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sucesiones tales que, para algún número M, se verif ca:

$$b_n \leq a_n \leq c_n \quad \text{si } n > M \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

EJEMPLO 7 Pruebe que si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución Se tiene:

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ y, así, también es $\lim_{n\to\infty} -|a_n| = -\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Por tanto, se puede aplicar el teorema de compresión y deducir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

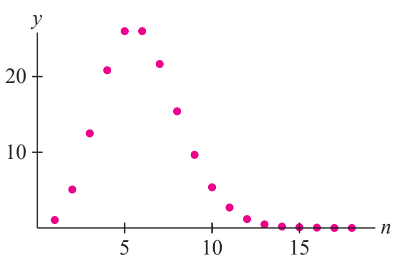


FIGURA 10 Gráf ca de $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

EJEMPLO 8 Progresiones geométricas con $r < 0$ Demuestre que, para $c \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} cr^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 < r < 0 \\ \text{diverge} & \text{si} \quad r \leq -1 \end{cases}$$

Solución Si $-1 < r < 0$, entonces $0 < |r| < 1$ y $\lim_{n\to\infty} |cr^n| = 0$ según el ejemplo 6. Por tanto $\lim_{n\to\infty} cr^n = 0$ por el ejemplo 6. Si $r = -1$, entonces la sucesión $cr^n = (-1)^n c$ es alternante en signo y no tiene límite. La sucesión también diverge si $r < -1$ ya que cr^n también es alternante en signo y $|cr^n|$ aumenta arbitrariamente. ■

TABLA 2

n	$a_n = \dfrac{5^n}{n!}$
1	5
2	12,5
3	20,83
4	26,04
10	2,69
15	0,023
20	0,000039
50	$2{,}92 \times 10^{-30}$

Como otra aplicación del teorema de compresión, considere la sucesión:

$$a_n = \frac{5^n}{n!}$$

Tanto el numerador como el denominador crecen por encima de cualquier cota, por lo que no queda claro si $\{a_n\}$ converge. La f gura 10 y la tabla 2 sugieren que a_n crece inicialmente y que luego tiende a cero. En el siguiente ejemplo, se comprueba que $a_n = R^n/n!$ converge a cero para todo R. Este resultado se usa en el tratamiento de las series de Taylor, en la sección 11.7.

EJEMPLO 9 Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R^n}{n!} = 0$ para todo R.

Solución Suponga, en primer lugar que $R > 0$ y sea M el entero positivo tal que:

$$M \leq R < M + 1$$

Si $n > M$, exprese $R^n/n!$ como un producto de n factores:

$$\frac{R^n}{n!} = \underbrace{\left(\frac{R}{1}\frac{R}{2}\cdots\frac{R}{M}\right)}_{\text{Llame a este término constante } C} \underbrace{\left(\frac{R}{M+1}\right)\left(\frac{R}{M+2}\right)\cdots\left(\frac{R}{n}\right)}_{\text{Cada factor es menor que 1}} \leq C\left(\frac{R}{n}\right) \qquad \boxed{1}$$

Los primeros M factores son ≥ 1 y los últimos $n - M$ factores son < 1. Si se agrupan los primeros M factores y se denota este producto como C y se obvian todos los factores restantes excepto el último, R/n, se tiene que:

$$0 \leq \frac{R^n}{n!} \leq \frac{CR}{n}$$

Como $CR/n \to 0$, según el teorema de compresión $\lim\limits_{n\to\infty} R^n/n! = 0$ tal y como se quería probar. Si $R < 0$, el límite también es cero, según el ejemplo 7, pues $|R^n/n!|$ tiende a cero. ■

Dada una sucesión $\{a_n\}$ y una función $f(x)$, se puede obtener una nueva sucesión $f(a_n)$. Es útil saber que, si $f(x)$ es continua y $a_n \to L$, entonces $f(a_n) \to f(L)$. Se proporciona una demostración en el apéndice D.

TEOREMA 4 Si $f(x)$ es continua y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = f(L)$$

Dicho de otro modo, se puede "pasar al límite dentro de una función continua."

EJEMPLO 10 Aplique el teorema 4 a la sucesión $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$ y a las funciones:

(a) $f(x) = e^x$ y **(b)** $g(x) = x^2$.

Solución En primer lugar, observe que:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+n^{-1}} = 3$$

(a) Con $f(x) = e^x$ se tiene que $f(a_n) = e^{a_n} = e^{\frac{3n}{n+1}}$. Según el teorema 4:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{3n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1}} = e^3$$

(b) Con $g(x) = x^2$ se tiene que $g(a_n) = a_n^2$ y, según el teorema 4:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1}\right)^2 = 3^2 = 9$$ ■

Los conceptos de sucesión acotada y de sucesión monótona son importantes para entender la idea de convergencia.

DEFINICIÓN Sucesiones acotadas Una sucesión $\{a_n\}$ está:

- **acotada superiormente** si existe un número M tal que $a_n \le M$ para todo n. El número M se denomina una *cota superior*.
- **acotada inferiormente** si existe un número m tal que $a_n \ge m$ para todo n. El número m se denomina una *cota inferior*.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina **acotada** si está acotada superior e inferiormente. En caso contrario, se trata de una **sucesión no acotada**.

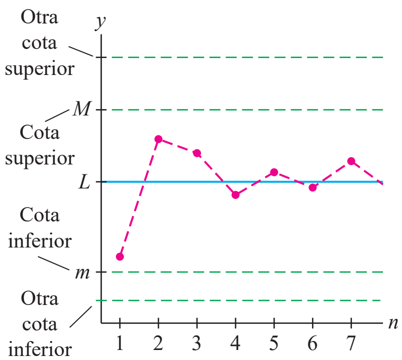


FIGURA 11 Una sucesión convergente está acotada.

Las cotas superior e inferior no son únicas. Si M es una cota superior, entonces cualquier otro número mayor también es una cota superior y si m es una cota inferior, cualquier otro número menor es también una cota inferior (f gura 11).

Como cabe esperar, una sucesión convergente $\{a_n\}$ es necesariamente acotada pues los términos a_n están cada vez más y más cerca del límite. Esta idea se recoge en el siguiente teorema.

TEOREMA 5 Las sucesiones convergentes están acotadas Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n\}$ está acotada.

Demostración Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces, existe $N > 0$ tal que $|a_n - L| < 1$ si $n > N$. Dicho de otro modo,

$$L - 1 < a_n < L + 1 \qquad \text{si } n > N$$

Si M es cualquier número mayor que $L + 1$ y también mayor que los números $a_1, a_2, \dots, a_N$, entonces $a_n < M$ para todo n. Por tanto, M es una cota superior. Análogamente, cualquier número m menor que $L - 1$, y también menor que $a_1, a_2, \dots, a_N$ es una cota inferior. ■

Hay dos maneras en las que una sucesión $\{a_n\}$ puede divergir. Una posibilidad es que sea no acotada. Por ejemplo, la sucesión no acotada $a_n = n$ diverge:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad \dots$$

Sin embargo, una sucesión puede divergir incluso siendo acotada. Es el caso de $a_n = (-1)^{n+1}$, cuyos términos a_n van y vuelven pero nunca se normalizan para tender a un límite:

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \dots$$

No existe un método infalible para determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge, a menos que la sucesión sea acotada y **monótona**. Por def nición, $\{a_n\}$ es monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente:

- $\{a_n\}$ es *estrictamente creciente* si $a_n < a_{n+1}$ para todo n.
- $\{a_n\}$ es *estrictamente decreciente* si $a_n > a_{n+1}$ para todo n.

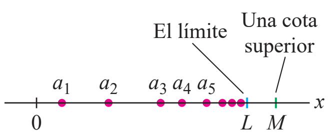


FIGURA 12 Una sucesión estrictamente creciente con cota superior M tiende a un límite L.

Intuitivamente, si $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y acotada superiormente por M, entonces los términos deben de amontonarse cerca de algún valor límite L que no es mayor que M (f gura 12). En el apéndice B puede consultar una demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 6 Una sucesión monótona y acotada es convergente

- Si $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y $a_n \leq M$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n \leq M$.
- Si $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente y $a_n \geq m$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n \geq m$.

EJEMPLO 11 Compruebe que $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ es estrictamente decreciente y acotada inferiormente. ¿Existe $\lim_{n\to\infty} a_n$?

TABLA 3

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$a_1 \approx 0{,}4142$
$a_2 \approx 0{,}3178$
$a_3 \approx 0{,}2679$
$a_4 \approx 0{,}2361$
$a_5 \approx 0{,}2134$
$a_6 \approx 0{,}1963$
$a_7 \approx 0{,}1827$
$a_8 \approx 0{,}1716$

Solución La función $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ es estrictamente decreciente porque su derivada es negativa:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0 \qquad \text{si } x > 0$$

Así $a_n = f(n)$ es estrictamente decreciente (vea la tabla 3). Además, $a_n > 0$ para todo n, por lo que la sucesión tiene cota inferior $m = 0$. El teorema 6 garantiza que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe y $L \geq 0$. En realidad, se puede probar que $L = 0$ observando que $f(x) = 1/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ y por tanto $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. ■

EJEMPLO 12 Pruebe que la siguiente sucesión es acotada y estrictamente creciente:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

A continuación, demuestre que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe y calcule su valor.

Solución Si se supiera, previamente, que el límite L existe, se podría hallar su valor de la siguiente manera. La idea es que L "contiene una copia" de él mismo, bajo el signo de la raíz:

$$L = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}} = \sqrt{2\left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}\right)} = \sqrt{2L}$$

Por tanto $L^2 = 2L$, lo que implica que $L = 2$ o $L = 0$. Se excluye $L = 0$ porque los términos a_n son positivos y estrictamente crecientes (tal y como se muestra más abajo), por lo que debe ser $L = 2$ (vea la tabla 4).

Este razonamiento se enuncia de manera formal, observando que la sucesión se define de forma recurrente por:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

TABLA 4 Sucesión recurrente $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

a_1	1,4142
a_2	1,6818
a_3	1,8340
a_4	1,9152
a_5	1,9571
a_6	1,9785
a_7	1,9892
a_8	1,9946

Si a_n converge a L, entonces la sucesión $b_n = a_{n+1}$ también converge a L (porque es la misma sucesión, con los términos desplazados en uno a la izquierda). Entonces, según el teorema 4, se tendría:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2L}$$

Sin embargo, nada de esto es válido a menos que se pueda asegurar que el límite L existe. Según el teorema 6, es suficiente probar que $\{a_n\}$ es acotada superiormente y estrictamente creciente.

***Etapa 1.* Pruebe que $\{a_n\}$ es acotada superiormente**

$M = 2$ es una cota superior. Se cumple que $a_1 < 2$ pues $a_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. Por otra parte:

$$\text{si} \quad a_n < 2 \qquad \text{entonces} \quad a_{n+1} < 2 \qquad \boxed{3}$$

Esto es cierto porque $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Ahora, como $a_1 < 2$, se puede aplicar (3) y deducir que $a_2 < 2$. Análogamente, $a_2 < 2$ implica que $a_3 < 2$ y así sucesivamente, para todo n. A nivel formal, se ha realizado una demostración por inducción.

Etapa 2. **Pruebe que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente**

Como a_n es positiva y $a_n < 2$, se tiene:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n \cdot a_n} = a_n$$

Así se ha demostrado que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. ■

La conclusión es que el límite L existe y, por tanto, $L = 2$.

11.1 RESUMEN

- La sucesión $\{a_n\}$ *converge* a un límite L si, para todo $\epsilon > 0$, existe un número M tal que:

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > M$$

Se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ o $a_n \to L$.

- Si no existe límite, se dice que $\{a_n\}$ *diverge*.
- En particular, si los términos aumentan por encima de cualquier cota, se dice que $\{a_n\}$ diverge a inf nito.
- Si $a_n = f(n)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
- Una *progresión geométrica* es una sucesión $a_n = cr^n$, donde c y r son no nulas.
- Las propiedades básicas de límites y el teorema de compresión se pueden aplicar a las sucesiones.
- Si $f(x)$ es continua y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$.
- Una sucesión $\{a_n\}$ está:
  - *acotada superiormente* por M si $a_n \le M$ para todo n.
  - *acotada inferiormente* por m si $a_n \ge m$ para todo n.

Si $\{a_n\}$ está acotada inferior y superiormente, se dice que $\{a_n\}$ está *acotada*.

- Una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona* si es estrictamente creciente ($a_n < a_{n+1}$) o estrictamente decreciente ($a_n > a_{n+1}$).
- Las sucesiones monótonas y acotadas convergen (teorema 6).

11.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿A qué es igual a_4 para la sucesión de término general $a_n = n^2 - n$?

2. ¿Cuál de las siguientes sucesiones converge a cero?

(a) $\dfrac{n^2}{n^2+1}$ **(b)** 2^n **(c)** $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

3. Sea a_n la n-ésima aproximación decimal a $\sqrt{2}$. Es decir, $a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}4$, $a_3 = 1{,}41$, etc. ¿Cuál es $\lim_{n\to\infty} a_n$?

4. ¿Cuál de la siguientes sucesiones está def nida de forma recurrente?

(a) $a_n = \sqrt{4+n}$ **(b)** $b_n = \sqrt{4+b_{n-1}}$

5. Según el teorema 5, cualquier sucesión convergente está acotada. Determine si las siguientes af rmaciones son verdaderas o falsas. Si fuesen falsas, proporcione un contraejemplo.

(a) Si $\{a_n\}$ está acotada, entonces converge.

(b) Si $\{a_n\}$ no está acotada, entonces diverge.

(c) Si $\{a_n\}$ diverge, entonces no está acotada.

Problemas

1. Relacione cada sucesión con su término general:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$	Término general
(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	(i) $\cos \pi n$
(b) $-1, 1, -1, 1, \ldots$	(ii) $\frac{n!}{2^n}$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$	(iii) $(-1)^{n+1}$
(d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{6}{8}, \frac{24}{16} \ldots$	(iv) $\frac{n}{n+1}$

2. Sea $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Escriba los primeros tres términos de las siguientes sucesiones.

(a) $b_n = a_{n+1}$ **(b)** $c_n = a_{n+3}$

(c) $d_n = a_n^2$ **(d)** $e_n = 2a_n - a_{n+1}$

En los problemas 3-12, calcule los primeros cuatro términos de la sucesión, que empieza con $n = 1$.

3. $c_n = \dfrac{3^n}{n!}$ **4.** $b_n = \dfrac{(2n-1)!}{n!}$

5. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n^2 - 3$

6. $b_1 = 1, \quad b_n = b_{n-1} + \dfrac{1}{b_{n-1}}$

7. $b_n = 5 + \cos \pi n$ **8.** $c_n = (-1)^{2n+1}$

9. $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

10. $a_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n)$

11. $b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$

12. $c_n = n$-ésima aproximación decimal a e

13. Halle una fórmula para el término n-ésimo de cada sucesión:

(a) $\dfrac{1}{1}, \dfrac{-1}{8}, \dfrac{1}{27}, \ldots$ **(b)** $\dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{8}, \ldots$

14. Suponga que $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ y que $\lim_{n\to\infty} b_n = 7$. Determine:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} a_n^3$

(c) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi b_n)$ **(d)** $\lim_{n\to\infty} (a_n^2 - 2a_n b_n)$

En los problemas 15-26, use el teorema 1 para calcular el límite de la sucesión o establezca que ésta diverge.

15. $a_n = 12$ **16.** $a_n = 20 - \dfrac{4}{n^2}$

17. $b_n = \dfrac{5n-1}{12n+9}$ **18.** $a_n = \dfrac{4+n-3n^2}{4n^2+1}$

19. $c_n = -2^{-n}$ **20.** $z_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

21. $c_n = 9^n$ **22.** $z_n = 10^{-1/n}$

23. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ **24.** $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

25. $a_n = \ln\left(\dfrac{12n+2}{-9+4n}\right)$ **26.** $r_n = \ln n - \ln(n^2+1)$

En los problemas 27-30, use el teorema 4 para determinar el límite de la sucesión.

27. $a_n = \sqrt{4 + \dfrac{1}{n}}$ **28.** $a_n = e^{4n/(3n+9)}$

29. $a_n = \cos^{-1}\left(\dfrac{n^3}{2n^3+1}\right)$ **30.** $a_n = \tan^{-1}(e^{-n})$

31. Sea $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Halle un número M tal que:

(a) $|a_n - 1| \le 0{,}001$ si $n \ge M$.

(b) $|a_n - 1| \le 0{,}00001$ si $n \ge M$.

A continuación, use la definición de límite para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

32. Sea $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(a) Halle un valor de M tal que $|b_n| \le 10^{-5}$ para $n \ge M$.

(b) Use la definición de límite para demostrar que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

33. Use la definición de límite para demostrar que $\lim_{n\to\infty} n^{-2} = 0$.

34. Use la definición de límite para demostrar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+n^{-1}} = 1$.

En los problemas 35-62, use las propiedades de los límites y los teoremas apropiados para determinar el límite de la sucesión o para demostrar que ésta diverge.

35. $a_n = 10 + \left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$ **36.** $d_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$

37. $c_n = 1{,}01^n$ **38.** $b_n = e^{1-n^2}$

39. $a_n = 2^{1/n}$ **40.** $b_n = n^{1/n}$

41. $c_n = \dfrac{9^n}{n!}$ **42.** $a_n = \dfrac{8^{2n}}{n!}$

43. $a_n = \dfrac{3n^2+n+2}{2n^2-3}$ **44.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4}$

45. $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ **46.** $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

47. $d_n = \ln 5^n - \ln n!$

48. $d_n = \ln(n^2+4) - \ln(n^2-1)$

49. $a_n = \left(2 + \dfrac{4}{n^2}\right)^{1/3}$ **50.** $b_n = \tan^{-1}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$

51. $c_n = \ln\left(\dfrac{2n+1}{3n+4}\right)$ **52.** $c_n = \dfrac{n}{n+n^{1/n}}$

53. $y_n = \dfrac{e^n}{2^n}$ **54.** $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

55. $y_n = \dfrac{e^n + (-3)^n}{5^n}$

56. $b_n = \dfrac{(-1)^n n^3 + 2^{-n}}{3n^3 + 4^{-n}}$

57. $a_n = n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$

58. $b_n = \dfrac{n!}{\pi^n}$

59. $b_n = \dfrac{3 - 4^n}{2 + 7 \cdot 4^n}$

60. $a_n = \dfrac{3 - 4^n}{2 + 7 \cdot 3^n}$

61. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

62. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

En los problemas 63-66, halle el límite de la sucesión utilizando la regla de L'Hôpital.

63. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

64. $b_n = \sqrt{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

65. $c_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

66. $d_n = n^2(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n)$

En los problemas 67-70, use el teorema de compresión para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*, comprobando la desigualdad dada.*

67. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^4 + n^8}}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}n^4} \le a_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2}n^2}$

68. $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}},$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \le c_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

69. $a_n = (2^n + 3^n)^{1/n}, \quad 3 \le a_n \le (2 \cdot 3^n)^{1/n} = 2^{1/n} \cdot 3$

70. $a_n = (n + 10^n)^{1/n}, \quad 10 \le a_n \le (2 \cdot 10^n)^{1/n}$

71. ¿Cuál de los siguientes enunciados es equivalente a la af rmación $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$? Justif que su respuesta.

(a) Para todo $\epsilon > 0$, el intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ contiene, como mucho, un elemento de la sucesión $\{a_n\}$.

(b) Para todo $\epsilon > 0$, el intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ contiene a todos los elementos de la sucesión $\{a_n\}$, salvo a un número f nito de ellos.

72. Pruebe que $a_n = \dfrac{1}{2n + 1}$ es estrictamente decreciente.

73. Pruebe que $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2 + 2}$ es estrictamente creciente. Halle una cota superior.

74. Pruebe que $a_n = \sqrt[3]{n + 1} - n$ es estrictamente decreciente.

75. Proporcione un ejemplo de una sucesión divergente $\{a_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ converja.

76. Proporcione un ejemplo de dos sucesiones *divergentes* $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $\{a_n + b_n\}$ converja.

77. Use la def nición de límite para demostrar que si $\{a_n\}$ converge y $\{b_n\}$ diverge, entonces $\{a_n + b_n\}$ diverge.

78. Use la def nición de límite para demostrar que si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente de enteros con límite L, entonces existe un número M tal que $a_n = L$ para todo $n \ge M$.

79. Según el teorema 1, si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces la sucesión $a_n = f(n)$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Pruebe que el *recíproco* es falso. Dicho de otro modo, halle una función $f(x)$ tal que $a_n = f(n)$ converja pero $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ no exista.

80. Use la def nición de límites para demostrar que el límite no varía si se añaden o se quitan un número f nito de términos de una sucesión convergente.

81. Sea $b_n = a_{n+1}$. Use la def nición de límite para demostrar que si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{b_n\}$ también converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

82. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ existe y es diferente de cero. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe si y sólo si existe un entero M tal que el signo de a_n no cambia si $n > M$.

83. Proceda como en el ejemplo 12, y demuestre que la sucesión $\sqrt{3}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}$, $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$ es estrictamente creciente y acotada superiormente por $M = 3$. A continuación, demuestre que el límite existe y halle su valor.

84. Sea $\{a_n\}$ la sucesión def nida de modo recurrente como:

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Así, $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \ldots.$

(a) Pruebe que, si $a_n < 2$, entonces $a_{n+1} < 2$. Deduzca, por inducción, que $a_n < 2$ para todo n.

(b) Pruebe que, si $a_n < 2$, entonces $a_n \le a_{n+1}$. Deduzca, por inducción, que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.

(c) Use (a) y (b) para deducir que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. A continuación calcule L probando que $L = \sqrt{2 + L}$.

Problemas avanzados

85. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Indicación: compruebe que $n! \ge (n/2)^{n/2}$ observando que la mitad de los factores de $n!$ son mayores o iguales que $n/2$.

86. Sea $b_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

(a) Pruebe que $\ln b_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}$.

(b) Pruebe que $\ln b_n$ converge a $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ y deduzca que $b_n \to e^{-1}$.

87. Dados dos números positivos $a_1 < b_1$, def na dos sucesiones de forma recurrente según:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

(a) Pruebe que $a_n \le b_n$ para todo n (f gura 13).

(b) Pruebe que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y que $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente.

(c) Pruebe que $b_{n+1} - a_{n+1} \le \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

(d) Demuestre que, tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ convergen y tienen el mismo límite. Este límite, que se denota $\mathrm{MAG}(a_1, b_1)$, se denomina la **media aritmético-geométrica** de a_1 y b_1.

(e) Estime $\mathrm{MAG}(1, \sqrt{2})$ con tres decimales correctos.

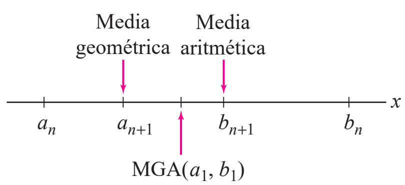


FIGURA 13

88. Sea $c_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

(a) Calcule c_1, c_2, c_3, c_4.

(b) Use una comparación de rectángulos con el área por debajo de $y = x^{-1}$ en el intervalo $[n, 2n]$ para demostrar que:

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2n} \le c_n \le \int_n^{2n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{n}$$

(c) Use el teorema de compresión para determinar $\lim_{n\to\infty} c_n$.

89. Sea $a_n = H_n - \ln n$, donde H_n es el n-ésimo número armónico:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(a) Pruebe que $a_n \ge 0$ si $n \ge 1$. *Indicación:* pruebe que $H_n \ge \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$.

(b) Pruebe que $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente interpretando $a_n - a_{n+1}$ como un área.

(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Este límite, que se denota como γ, es conocido como la *constante de Euler*. Aparece en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo el análisis matemático y la teoría de números y se ha podido calcular con 100 millones de decimales de precisión pero todavía no se sabe si γ es un número irracional. Los primeros 10 dígitos son $\gamma \approx 0{,}5772156649$.

11.2 Suma de una serie infinita

Muchas cantidades de las que aparecen en las aplicaciones prácticas no se pueden calcular de forma exacta. No se puede escribir un desarrollo decimal exacto para el número π o para valores de la función seno tales como sen 1. Sin embargo, en ocasiones estas cantidades se pueden representar como sumas inf nitas. Por ejemplo, utilizando series de Taylor (sección 11.7), se puede probar que:

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \cdots \qquad \boxed{1}$$

Las sumas inf nitas de este tipo se denominan **series inf nitas**.

¿Qué quiere decir exactamente la ec. (1)? Es imposible sumar inf nitos números, pero lo que si se puede hacer es calcular las **sumas parciales** S_N, def nidas como las sumas f nitas de todos los términos hasta el N-ésimo, e incluyendo a este último. He aquí las cinco primeras sumas parciales de la serie inf nita para sen 1:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} && \approx 0{,}833 \\
S_3 &= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} && \approx 0{,}841667 \\
S_4 &= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} && \approx 0{,}841468 \\
S_5 &= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{362{,}880} && \approx \mathbf{0{,}84147098}46
\end{aligned}$$

Compare estos valores con el que se obtiene mediante una calculadora:

$$\text{sen } 1 \approx \mathbf{0{,}8414709848}079 \qquad \text{(valor de la calculadora)}$$

Se observa que S_5 dif ere de sen 1 en menos que 10^{-9}. Esto sugiere que las sumas parciales convergen a sen 1 y, en realidad, se demostrará que:

$$\text{sen } 1 = \lim_{N\to\infty} S_N$$

(Ejemplo 2 de la sección 11.7). Así, aunque no se pueden sumar inf nitos números, tiene sentido *def nir* la suma de una serie inf nita como el límite de las sumas parciales.

En general, una serie inf nita es una expresión de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

donde $\{a_n\}$ es cualquier sucesión. Por ejemplo:

Sucesión	Término general	Serie inf nita
$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$
$\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

La N-ésima suma parcial, S_N, es la suma f nita de los términos hasta e incluyendo a a_N:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

Si la serie empieza en k, entonces $S_N = \sum_{n=k}^{N} a_n$.

- *Las series infinitas pueden empezar en cualquier índice. Por ejemplo,*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Cuando no es necesario especificar el punto de inicio, simplemente se escribe $\sum a_n$.
- *Se puede utilizar cualquier letra para el índice. Por tanto, se puede escribir* a_m, a_k, a_i, *etc.*

DEFINICIÓN Convergencia de una serie infinita Una serie inf nita $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *converge* a la suma S si la sucesión de sus sumas parciales converge a S:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

En tal caso, se escribe $S = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

- Si el límite no existe, se dice que la serie inf nita diverge.
- Si el límite es inf nito, se dice que la serie inf nita diverge a inf nito.

Se pueden examinar las series numéricamente calculando diferentes sumas parciales S_N. Si las sumas parciales muestran cierta tendencia hacia un número S, entonces se dispone de evidencia (pero no se ha demostrado) que la serie converge a S. El siguiente ejemplo trata sobre una **serie telescópica**, donde las sumas parciales son especialmente fáciles de evaluar.

EJEMPLO 1 Serie telescópica Examine numéricamente:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{4(5)} + \cdots$$

A continuación, calcule la suma S aplicando la identidad:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

TABLA 1 **Sumas parciales** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

N	S_N
10	0,90909
50	0,98039
100	0,990099
200	0,995025
300	0,996678

Solución Los valores de las sumas parciales que se encuentran en la tabla 1 indican convergencia hacia $S = 1$. Para demostrar esta afırmación y debido a la identidad del enunciado, observe que cada suma parcial es igual a dos términos únicamente:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

En muchos casos (exceptuando las series telescópicas y las series geométricas, que se introducen más adelante) no existe una fórmula simple como la ec. (2) para la suma parcial S_N. Por tanto, se van a desarrollar técnicas que no necesiten fórmulas para S_N.

En general:

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \qquad \boxed{2}$$

La suma S es el límite de las sumas parciales:

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Es importante tener presente la diferencia entre una sucesión $\{a_n\}$ y una serie inf nita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

EJEMPLO 2 Sucesiones y series Analice la diferencia entre $\{a_n\}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución La sucesión es la colección de números $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots$. Esta sucesión converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

La serie inf nita es la *suma* de los números a_n y se def ne formalmente como el límite de las sumas parciales. Esta suma es diferente de cero. En realidad, la suma es igual a 1, según el ejemplo 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1$$

Asegúrese de entender la diferencia entre las sucesiones y las series:

- *En una sucesión, se considera el límite de los términos individuales a_n.*
- *En una serie, el interés radica en la suma de los términos*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

que se define como el límite de las sumas parciales.

El siguiente teorema muestra que las series inf nitas se puede sumar o restar como las sumas comunes, *siempre que las series converjan*.

TEOREMA 1 Linealidad de las series infinitas Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces $\sum(a_n \pm b_n)$ y $\sum c a_n$ también convergen (c cualquier constante) y se verif ca:

$$\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$$
$$\sum a_n - \sum b_n = \sum (a_n - b_n)$$
$$\sum c a_n = c \sum a_n \qquad (c \text{ cualquier constante})$$

Demostración Estas propiedades se deducen directamente de las correspondientes para límites. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$ ■

El principal objetivo de este capítulo es desarrollar técnicas que permitan determinar si una serie converge o diverge. Es fácil proporcionar ejemplos de series que divergen:

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverge a inf nito (las sumas parciales aumentan sin limitación):

  $$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + 1 = 2, \quad S_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \quad S_4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad \ldots$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ diverge (las sumas parciales son o bien 1 o bien 0):

  $$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 1 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \quad \ldots$$

A continuación, se tratan las series geométricas que convergen o divergen dependiendo de la razón r.

Una **serie geométrica** de razón $r \neq 0$ es una serie def nida por una progresión geométrica cr^n, donde $c \neq 0$. Si la serie empieza en $n = 0$, entonces:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} cr^n = c + cr + cr^2 + cr^3 + cr^4 + cr^5 + \cdots$$

Para $r = \frac{1}{2}$ y $c = 1$, se puede visualizar la serie geométrica que empieza en $n = 1$ (f gura 1):

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

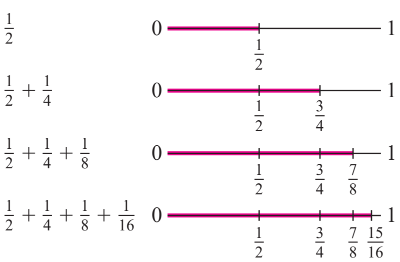


FIGURA 1 Sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Sumar términos se traduce en moverse paso a paso de 0 a 1, donde cada paso corresponde a un desplazamiento, a la derecha, de la mitad de la distancia restante. En consecuencia, $S = 1$.

Se pueden calcular las sumas parciales de una serie geométrica en base al siguiente argumento:

$$\begin{aligned} S_N &= c + cr + cr^2 + cr^3 + \cdots + cr^N \\ rS_N &= \phantom{c + {}} cr + cr^2 + cr^3 + \cdots + cr^N + cr^{N+1} \\ S_N - rS_N &= c - cr^{N+1} \\ S_N(1 - r) &= c(1 - r^{N+1}) \end{aligned}$$

Si $r \neq 1$, se puede dividir por $(1 - r)$ obteniendo:

$$\boxed{S_N = c + cr + cr^2 + cr^3 + \cdots + cr^N = \frac{c(1 - r^{N+1})}{1 - r}} \qquad \boxed{3}$$

Las series geométricas son importantes porque

- *surgen a menudo en aplicaciones prácticas.*
- *se pueden evaluar de forma explícita.*
- *se utilizan pa estudiar otras series no geométricas (por comparación).*

Esta fórmula permite sumar la serie geométrica.

TEOREMA 2 Suma de una serie geométrica Sea $c \neq 0$. Si $|r| < 1$, entonces:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = c + cr + cr^2 + cr^3 + \cdots = \frac{c}{1 - r}} \qquad \boxed{4}$$

$$\boxed{\sum_{n=M}^{\infty} cr^n = cr^M + cr^{M+1} + cr^{M+2} + cr^{M+3} + \cdots = \frac{cr^M}{1 - r}} \qquad \boxed{5}$$

Si $|r| \geq 1$, entonces la serie geométrica diverge.

Demostración Si $r = 1$, entonces la serie diverge porque las sumas parciales $S_N = Nc$ son arbitrariamente grandes. Si $r \neq 1$, entonces según la ec. (3):

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{c(1 - r^{N+1})}{1 - r} = \frac{c}{1 - r} - \frac{c}{1 - r} \lim_{N\to\infty} r^{N+1}$$

Si $|r| < 1$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} r^{N+1} = 0$ y se obtiene la ec. (4). Si $|r| \geq 1$ y $r \neq 1$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} r^{N+1}$ no existe y la serie geométrica diverge. Finalmente, si la serie empieza en cr^M en lugar de en cr^0, entonces:

$$S = cr^M + cr^{M+1} + cr^{M+2} + cr^{M+3} + \cdots = r^M \sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \frac{cr^M}{1 - r} \qquad \blacksquare$$

■ **EJEMPLO 3** Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$.

Solución Se trata de una serie geométrica en que $r = 5^{-1}$. Según la ec. (4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots = \frac{1}{1 - 5^{-1}} = \frac{5}{4} \qquad \blacksquare$$

■ **EJEMPLO 4** Calcule $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 7\left(-\frac{3}{4}\right)^n = 7\left(-\frac{3}{4}\right)^3 + 7\left(-\frac{3}{4}\right)^4 + 7\left(-\frac{3}{4}\right)^5 + \cdots$.

Solución Se trata de una serie geométrica en que $r = -\frac{3}{4}$ y $c = 7$, que empieza en $n = 3$. Según la ec. (5):

$$\sum_{n=3}^{\infty} 7\left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{7(-\frac{3}{4})^3}{1 - (-\frac{3}{4})} = -\frac{27}{16} \qquad \blacksquare$$

■ **EJEMPLO 5** Calcule $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + 3^n}{5^n}$.

Solución Exprese S como la suma de dos series geométricas. Esto es factible por el teorema 1 pues ambas series geométricas convergen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \overbrace{2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n}^{\text{Ambas series geométricas convergen}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = 5$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL En algunas ocasiones, se utiliza el siguiente *razonamiento incorrecto* para sumar una serie geométrica:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$
$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + S$$

En consecuencia, $2S = 1 + S$ o $S = 1$. La respuesta es ciertamente correcta pero ¿por qué es incorrecto el razonamiento? No es correcto porque no se sabe a priori si la serie converge o no. Observe qué ocurre cuando se aplica el mismo razonamiento a la serie divergente:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$
$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1$$

Se obtendría $2S = S - 1$ o $S = -1$, lo que es absurdo porque S diverge. Estas conclusiones incorrectas se evitan con la definición de la suma de una serie infinita como el límite de las sumas parciales.

La serie infinita $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverge porque la N-ésima suma parcial $S_N = N$ diverge a infinito. No está tan claro si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \cdots$$

A continuación se introduce un criterio útil, que permite decidir si una serie diverge.

TEOREMA 3 Criterio de divergencia Si el término n-ésimo a_n no converge a cero, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

El criterio de divergencia (también llamado ***criterio del término n-ésimo****) se suele enunciar de la siguiente manera:*

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

En la práctica, se utiliza para demostrar que una serie diverge.

Demostración En primer lugar, observe que $a_n = S_n - S_{n-1}$ pues:

$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma es S entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Por tanto, si a_n no converge a cero, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no puede converger. ■

■ **EJEMPLO 6** Demuestre que $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+1}$ es divergente.

Solución Se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 + 1/n} = \frac{1}{4}$$

El término n-ésimo a_n no converge a cero por lo que, según el teorema 3, la serie diverge. ■

■ **EJEMPLO 7** Determine si

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots$$

es convergente o divergente.

Solución El término general $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$ no tiene límite. De hecho, $\frac{n}{n+1}$ tiende a 1, por lo que los términos impares a_{2n+1} tienden a 1 y los pares a_{2n} tienden a -1. Como $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, según el teorema 3, la serie S diverge. ■

El criterio de la divergencia explica sólo una parte de la situación. Si a_n no tiende a cero, entonces $\sum a_n$ diverge. Pero ¿qué pasa si a_n tiende a cero? En tal caso, la serie puede converger o divergir. Dicho de otro modo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición *necesaria* de convergencia pero *no es suf ciente*. Tal y como se ilustra en el siguiente ejemplo, una serie puede ser divergente aunque sus términos tiendan a cero.

■ **EJEMPLO 8** **La serie diverge aunque la sucesión tiende a cero** Demuestre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

es divergente.

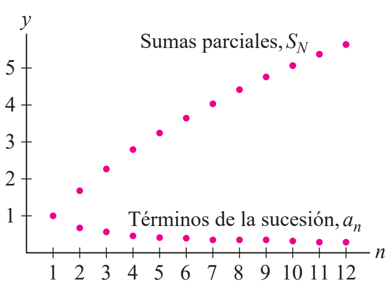


FIGURA 2 Las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergen aunque los términos $a_n = 1/\sqrt{n}$ tienden a cero.

Solución El término general $1/\sqrt{N}$ tiende a cero. Sin embargo, como cada término de la suma S_N es mayor o igual que $1/\sqrt{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} S_N &= \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}}}^{N \text{ términos}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}} \\ &= N\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \sqrt{N} \end{aligned}$$

Así se ha demostrado que $S_N \geq \sqrt{N}$. Pero $\sqrt{N}$ aumenta sin limitación (f gura 2). En consecuencia S_N también aumenta sin limitación. Esto demuestra que la serie diverge. ■

Archimedes (287 AC-212 AC), que descubrió el principio de la palanca, dijo "Denme un punto de apoyo y moveré el mundo" (según cita Pappus de Alexandria hacia el año 340).

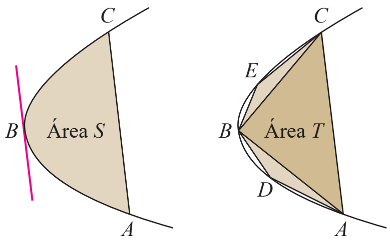


FIGURA 3 Arquímedes demostró que el área S del segmento parabólico es $\frac{4}{3}T$, donde T es el área de $\triangle ABC$.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Las series geométricas se utilizaron ya en el siglo III A.C. por Arquímedes en un razonamiento brillante para determinar el área S de un "segmento parabólico" (región sombreada de la f gura 3). Dados dos puntos A y C sobre la parábola, existe un punto B, entre A y C, en que la recta tangente es paralela a $\overline{AC}$ (aparentemente, Arquímedes ya conocía el teorema del valor medio, más de 2000 años antes de la invención del cálculo inf nitesimal). Sea T el área del triángulo $\triangle ABC$. Arquímedes demostró que si se elige D, de manera similar y respecto a $\overline{AB}$ y E respecto a $\overline{BC}$, entonces:

$$\frac{1}{4}T = \text{Área}(\triangle ADB) + \text{Área}(\triangle BEC) \qquad \boxed{6}$$

Esta construcción de triángulos se puede continuar. El siguiente paso sería obtener los cuatro triángulos sobre los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BE}$, $\overline{EC}$ de área total $\left(\frac{1}{4}\right)^2 T$. A continuación, construir ocho triángulos de área total $\left(\frac{1}{4}\right)^3 T$, etc. De esta manera, se obtienen inf nitos triángulos que que llenan completamente el segmento parabólico. Por la fórmula de la suma de una serie geométrica:

$$S = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \cdots = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}T$$

Por éste y muchos otros descubrimientos, se considera a Arquímedes, junto con Newton y Gauss, como uno de los más grandes científ cos de todos los tiempos.

El estudio moderno de las series inf nitas se inició en el siglo XVII con Newton, Leibniz y sus contemporáneos. La divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ (llamada la **serie armónica**) era conocida por el erudito medieval Nicole d'Oresme (1323-1382), pero su demostración se perdió durante siglos y el resultado fue redescubierto en más de una ocasión. También era conocido que la suma de los cuadrados recíprocos $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge y en la década del 1640, el italiano Pietro Mengoli planteó el reto de encontrar su suma. A pesar de los esfuerzos de los mejores matemáticos de la época, incluyendo a Leibniz y a los hermanos Jakob y Johann Bernoulli, el problema estuvo sin solución cerca de un siglo. En 1735, el gran Leonhard Euler (a la edad de 28) asombró a sus contemporáneos, demostrando que:

$$\boxed{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}}$$

Esta fórmula, sorprendente en sí misma, tiene importancia para diferentes áreas de las matemáticas. En un teorema de teoría de números se af rma que dos números naturales, escogidos al azar, no tienen factores comunes con probabilidad $6/\pi^2 \approx 0{,}6$ (el recíproco del resultado de Euler). Por otra parte, el resultado de Euler y sus generalizaciones aparecen en el campo de la mecánica estadística.

11.2 RESUMEN

- Una *serie inf nita* es una expresión de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Se dice que a_n es el *término general* de la serie. Una serie inf nita puede empezar en $n = k$ para cualquier entero k.

- La *suma parcial* N-ésima es la suma f nita de los términos hasta e incluyendo el término N-ésimo:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

- Por def nición, la suma de una serie inf nita es el límite $S = \lim_{N\to\infty} S_N$. Si el límite existe, se dice que la serie inf nita es *convergente* o que *converge* a la suma S. Si el límite no existe, se dice que la serie inf nita *diverge*.

- Si las sumas parciales S_N aumentan sin limitación, se dice que S diverge a infinito.
- *Criterio de divergencia:* Si $\{a_n\}$ no tiende a cero, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Sin embargo, una serie puede divergir incluso si su término general $\{a_n\}$ tiende a cero.
- Suma parcial de una serie geométrica:

$$c + cr + cr^2 + cr^3 + \cdots + cr^N = \frac{c(1 - r^{N+1})}{1 - r}$$

- *Series geométricas*: Si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1 - r}$$

$$\sum_{n=M}^{\infty} cr^n = cr^M + cr^{M+1} + cr^{M+2} + \cdots = \frac{cr^M}{1 - r}$$

La serie geométrica diverge si $|r| \geq 1$.

11.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué papel desempeñan las sumas parciales en la definición de la suma de una serie infinita?

2. ¿A qué es igual la suma de la siguiente serie infinita?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

3. ¿Qué ocurre si aplica la fórmula para la suma de una serie geométrica a la siguiente serie? ¿Es válida la fórmula?

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots$$

4. Arvind afirma que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ porque $\frac{1}{n^2}$ tiende a cero. ¿Es válido este razonamiento?

5. Colleen dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge porque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ¿Es válido este razonamiento?

6. Halle N tal que $S_N > 25$ para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2$.

7. ¿Existe N tal que $S_N > 25$ para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$? Justifique su respuesta.

8. Dé un ejemplo de una serie divergente a infinito cuyo término general tienda a cero.

Problemas

1. Halle una fórmula para el término general a_n (no para la suma parcial) de las series infinitas.

(a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ **(b)** $\frac{1}{1} + \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{125}{8} + \cdots$

(c) $\frac{1}{1} - \frac{2^2}{2 \cdot 1} + \frac{3^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{4^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots$

(d) $\frac{2}{1^2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \frac{2}{3^2 + 1} + \frac{1}{4^2 + 1} + \cdots$

2. Exprese en notación sumatoria:

(a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ **(b)** $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$

(c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

(d) $\frac{125}{9} + \frac{625}{16} + \frac{3125}{25} + \frac{15\,625}{36} + \cdots$

En los problemas 3-6, calcule las sumas parciales S_2, S_4 y S_6.

3. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1}$

5. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$ **6.** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}$

7. La serie $S = 1 + (\frac{1}{5}) + (\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5})^3 + \cdots$ converge a $\frac{5}{4}$. Calcule S_N para $N = 1, 2, \ldots$ hasta que encuentre una S_N que aproxime a $\frac{5}{4}$ con un error menor que 0,0001.

8. Se sabe que la serie $S = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$ converge a e^{-1} (recuerde que $0! = 1$). Calcule S_N para $N = 1, 2, \ldots$ hasta que encuentre un S_N que aproxime a e^{-1} con un error menor que 0,001.

En los problemas 9 y 10, use un programa informático de cálculo simbólico para calcular S_{10}, S_{100}, S_{500} y S_{1000} para cada una de las series. ¿Sugieren esos valores convergencia al valor del enunciado?

9. SAC

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots$$

10. SAC

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

11. Calcule S_3, S_4 y S_5 y, a continuación, halle la suma de la serie telescópica:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

12. Exprese $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ como una serie telescópica y halle su suma.

13. Calcule S_3, S_4 y S_5 y, a continuación, halle la suma:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

utilizando la identidad:

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

14. Use fracciones parciales para reescribir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ como una serie telescópica y halle su suma.

15. Halle la suma de $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots$.

16. Halle una fórmula para la suma parcial S_N de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ y pruebe que la serie diverge.

En los problemas 17-22, aplique el teorema 3 para demostrar que las siguientes series divergen.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n + 12}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

19. $\frac{0}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \cdots$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$

21. $\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{3} + \cos\frac{1}{4} + \cdots$

22. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{4n^2 + 1} - n \right)$

En los problemas 23-36, use la fórmula de la suma de una serie geométrica para hallar la suma o determine que la serie diverge.

23. $\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots$

24. $\frac{4^3}{5^3} + \frac{4^4}{5^4} + \frac{4^5}{5^5} + \cdots$

25. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{11} \right)^{-n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7 \cdot (-3)^n}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=-4}^{\infty} \left(-\frac{4}{9} \right)^n$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{e} \right)^n$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} e^{3-2n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 + 2^n}{5^n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-2)^n - 5^n}{8^n}$

33. $5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} - \frac{5}{4^3} + \cdots$

34. $\frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{7^2} + \frac{2^5}{7^3} + \frac{2^6}{7^4} + \cdots$

35. $\frac{7}{8} - \frac{49}{64} + \frac{343}{512} - \frac{2401}{4096} + \cdots$

36. $\frac{25}{9} + \frac{5}{3} + 1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \frac{27}{125} + \cdots$

37. ¿Cuáles de las siguientes series *no* son geométricas?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{29^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \pi^{-n}$

38. Use el método del ejemplo 8 para probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/3}}$ diverge.

39. Demuestre que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge. *Indicación:* Si no divergiera, llegue a una contradicción expresando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

40. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n + 2^n}{5^n}$ diverge.

41. Proporcione un contraejemplo para probar que cada uno de los siguientes enunciados es falso.

(a) Si el término general a_n tiende a cero, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

(b) La suma parcial N-ésima de la serie infinita definida por $\{a_n\}$ es a_N.

(c) Si a_n tiende a cero, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(d) Si a_n tiende a L, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

42. Suponga que $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie infinita de sumas parciales $S_N = 5 - \frac{2}{N^2}$.

(a) ¿A qué es igual $\sum_{n=1}^{10} a_n$ y $\sum_{n=5}^{16} a_n$?

(b) ¿Cuál es el valor de a_3?

(c) Halle una fórmula general para a_n.

(d) Halle la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

43. Calcule el área total de los (infinitos) triángulos de la figura 4.

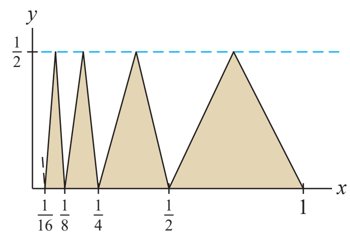


FIGURA 4

44. El ganador de una lotería recibe un premio de m dólares al final de cada año, durante N años. El valor actual (VA) de su premio en dólares de hoy en día es VA $= \sum_{i=1}^{N} m(1+r)^{-i}$, donde r es la tasa de interés. Calcule el VA si $m = 50\ 000$ \$, $r = 0{,}06$ y $N = 20$. ¿A qué es igual el VA, si $N = \infty$?

45. Halle la longitud total de la trayectoria en zigzag de la figura 5 (observe los cambios de ángulo $\frac{\pi}{4}$).

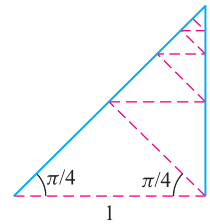


FIGURA 5

46. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Indicación:* halle constantes A, B y C tales que:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

47. Pruebe que si a es un entero positivo, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{a}\right)$$

48. Una bola que cae desde una altura de 10 pies empieza a rebotar. Cada vez que toca el suelo, vuelve hasta los dos tercios de su altura anterior. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la bola si rebota infinitamente?

49. Sea $\{b_n\}$ una sucesión y $a_n = b_n - b_{n-1}$. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe.

50. Las hipótesis son importantes Pruebe, proporcionando contraejemplos adecuados, que las conclusiones del teorema 1 no son ciertas si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ no son convergentes.

Problemas avanzados

Para los problemas 51-53 use la fórmula:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r} \qquad \boxed{7}$$

51. El Profesor George Andrews de la Pennsylvania State University señaló que se puede aplicar la ec. (7) para calcular la derivada de $f(x) = x^N$ (para $N \geq 0$). Suponga que $a \neq 0$ y sea $x = ra$. Pruebe que:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^N - a^N}{x - a} = a^{N-1} \lim_{r\to 1} \frac{r^N - 1}{r - 1}$$

y evalúe el límite.

52. Pierre de Fermat utilizó series geométricas para calcular el área por debajo de la gráfica de $f(x) = x^N$ en $[0, A]$. Para $0 < r < 1$, sea $F(r)$ la suma de las áreas de los infinitos rectángulos basados en el extremo superior de extremos Ar^n, tal y como se ilustra en la figura 6. Cuando r tiende a 1, los rectángulos son cada vez más estrechos y $F(r)$ tiende al área por debajo de la gráfica.

(a) Pruebe que $F(r) = A^{N+1} \frac{1 - r}{1 - r^{N+1}}$.

(b) Use la ec. (7) para calcular $\int_0^A x^N\, dx = \lim_{r\to 1} F(r)$.

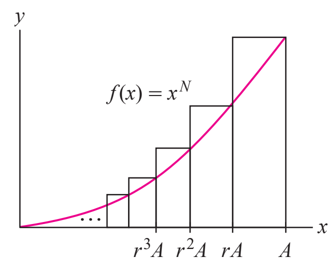


FIGURA 6

53. Compruebe la fórmula de Gregory-Leibniz siguiendo los pasos que se indican a continuación.

(a) Considere $r = -x^2$ en la ec. (7) y agrupe términos, de manera conveniente, para probar que:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1} x^{2N-2} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}$$

(b) Pruebe, integrando en $[0, 1]$, que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{N-1}}{2N-1} + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2N}\, dx}{1+x^2}$$

(c) Aplique el teorema de comparación de integrales para demostrar que:

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2N}\,dx}{1+x^2} \le \frac{1}{2N+1}$$

Indicación: observe que el integrando es $\le x^{2N}$.

(d) Demuestre que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Indicación: Use (b) y (c) para probar que las sumas parciales S_N cumplen $\left|S_N - \frac{\pi}{4}\right| \le \frac{1}{2N+1}$ y deduzca, en consecuencia, que $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \frac{\pi}{4}$.

54. La mesa que desaparece, de Cantor (de Larry Knop, Hamilton College) Considere una mesa de longitud L (figura 7). En la etapa 1, quite una parte de longitud $L/4$ y centrada en el punto medio. Quedan dos partes, cada una de ellas de longitud menor que $L/2$. En la etapa 2, quite una parte de longitud $L/4^2$ a cada una de las partes restantes en la etapa anterior (en esta etapa se quitan $L/8$ de la mesa), en total quite dos secciones de longitud $L/4^2$. Ahora quedan cuatro partes, cada una de ellas de longitud menor que $L/4$. En la etapa 3, quite cuatro secciones centrales de longitud $L/4^3$, etc.

(a) Pruebe que en la etapa N-ésima, la longitud de cada parte restante es menor que $L/2^N$ y que la cantidad total de la mesa que se ha quitado es:

$$L\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{N+1}}\right)$$

(b) Pruebe que, en el límite, cuando $N \to \infty$ queda exactamente la mitad de la mesa.

Este resultado es curioso porque no quedan tramos de la mesa que sean diferentes de cero (en cada etapa, los tramos que restan tienen una longitud menor que $L/2^N$). Así, la mesa ha "desaparecido." Sin embargo, se puede colocar cualquier objeto de longitud superior a $L/4$ sobre la mesa. No caerá porque no cabe por ninguna de las secciones eliminadas.

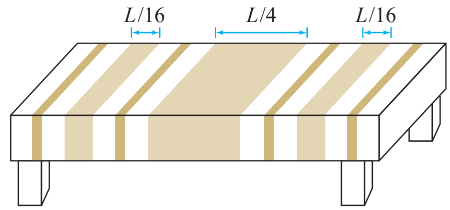


FIGURA 7

55. El copo de nieve de Koch (descrito en 1904 por el matemático sueco Helge von Koch) es una curva "fractal" infinitamente dentada que se obtiene como límite de curvas poligonales (es continua pero no tiene recta tangente en ningún punto). Empiece considerando un triángulo equilátero (etapa 0) y pase a la etapa 1 sustituyendo cada lado por cuatro lados de un tercio de la longitud, tal y como se muestra en la figura 8. Continúe el proceso: en la etapa n-ésima, sustituya cada lado por cuatro lados de un tercio de la longitud.

(a) Muestre que el perímetro P_n del polígono en la etapa n-ésima cumple $P_n = \frac{4}{3}P_{n-1}$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \infty$. Así, la longitud del copo de nieve es infinita.

(b) Sea A_0 el área del triángulo equilátero original. Pruebe que, en la etapa n-ésima se añaden $3 \cdot 4^{n-1}$ nuevos triángulos, cada uno de ellos de área $A_0/9^n$ (para $n \ge 1$). Pruebe que el área total del copo de nieve de Koch es $\frac{8}{5}A_0$.

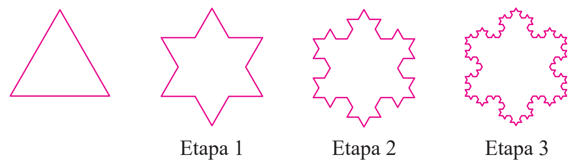


FIGURA 8

11.3 Convergencia de series de términos positivos

En las tres secciones siguientes se desarrollan técnicas para determinar si una serie infinita converge o diverge. Esto es más fácil que hallar la suma de una serie infinita, que sólo es posible en algunos casos particulares.

En esta sección, se considerarán **series de términos positivos** $\sum a_n$, donde $a_n > 0$ para todo n. Se pueden entender los términos de una serie de este tipo como rectángulos de amplitud 1 y altura a_n (figura 1). La suma parcial:

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

es igual al área de los primeros N rectángulos.

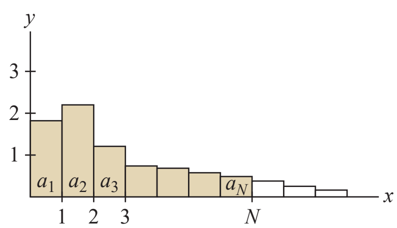


FIGURA 1 La suma parcial S_N es la suma de las áreas de los N rectángulos sombreados.

El punto clave en el estudio de las series de términos positivos es que sus sumas parciales forman una sucesión estrictamente creciente:

$$S_N < S_{N+1}$$

para todo N. Esto es cierto porque S_{N+1} se obtiene a partir de S_N, añadiendo un número positivo:

$$S_{N+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_N) + a_{N+1} = S_N + \underbrace{a_{N+1}}_{\text{Positivo}}$$

Recuerde que una sucesión estrictamente creciente es convergente si está acotada superiormente. En caso contrario, diverge (teorema 6, sección 11.1). Así, una serie de términos positivos se puede comportar únicamente de dos maneras (ésta es la dicotomía a la que se ref ere el siguiente teorema).

- *El teorema 1 continua siendo cierto si $a_n \geq 0$. No es necesario suponer que $a_n > 0$.*
- *También continúa siendo cierto si $a_n > 0$ para todo $n \geq M$ para algún M, porque la convergencia de una serie no queda afectada por los primeros M términos.*

TEOREMA 1 Dicotomía de las series de términos positivos Si $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos, entonces se cumple una y sólo una de las dos posibilidades siguientes:

(i) Las sumas parciales S_N están acotadas superiormente. En tal caso, S converge.

(ii) Las sumas parciales S_N no están acotadas superiormente. En tal caso, S diverge.

Las hipótesis son importantes Esta dicotomía no se cumple para series de términos no positivos. Considere:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Las sumas parciales está acotadas (pues $S_N = 1$ o 0) pero S diverge.

La primera aplicación del teorema 1 que se va a considerar es el siguiente criterio Integral. Es extremadamente útil porque las integrales son más fáciles de evaluar que las series, en la mayoría de los casos.

El criterio integral es cierto para cualquier serie $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$, siempre que, para algún $M > 0$, $f(x)$ sea positiva, estrictamente decreciente y continua para $x \geq M$. La convergencia de la serie queda determinada por la convergencia de:

$$\int_M^{\infty} f(x)\,dx$$

TEOREMA 2 Criterio Integral Sea $a_n = f(n)$, donde $f(x)$ es positiva, decreciente y continua, para $x \geq 1$.

(i) Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

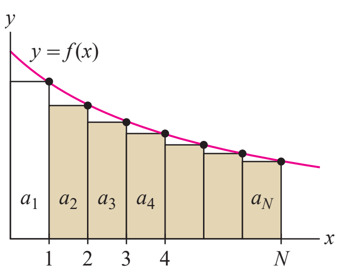


FIGURA 2

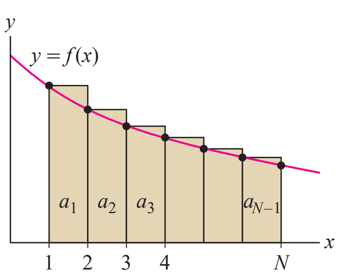


FIGURA 3

Demostración Como $f(x)$ es estrictamente decreciente, los rectángulos sombreados de la f gura 2 quedan por debajo de la gráf ca de $f(x)$ y, por tanto, para todo N:

$$\underbrace{a_2 + \cdots + a_N}_{\text{Área de los rectángulos sombreados de la f gura 2}} \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Si la integral impropia de la derecha converge, entonces las sumas $a_2 + \cdots + a_N$ están acotadas. En tal caso, S_N también está acotada y la serie inf nita converge por el teorema de dicotomía (teorema 1). De esta manera, queda demostrado (i).

Por otra parte, los rectángulos de la f gura 3 se encuentran por encima de la gráf ca de $f(x)$ y, por tanto:

$$\int_1^N f(x)\,dx \leq \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}}_{\text{Área de los rectángulos sombreados de la f gura 3}} \qquad \boxed{1}$$

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_1^N f(x)\,dx$ tiende a ∞ y, por la ec. (1), S_N también tiende a ∞. Así, queda demostrado (ii). ■

La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se denomina "serie armónica".

■ **EJEMPLO 1** **La serie armónica es divergente** Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Solución Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $f(n) = \frac{1}{n}$ y se puede aplicar el criterio integral porque f es positiva, estrictamente decreciente y continua, si $x \geq 1$. La integral es divergente:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty$$

En consecuencia, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. ■

■ **EJEMPLO 2** ¿Es convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{10^2} + \cdots$?

Solución La función $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ es positiva y continua, si $x \geq 1$. Es estrictamente decreciente porque $f'(x)$ es negativa:

$$f'(x) = \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} < 0 \qquad \text{si } x \geq 1$$

Por tanto, se puede aplicar el criterio integral. Considerando la sustitución $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$, se tiene:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_2^R \frac{du}{u^2}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left.\frac{-1}{2u}\right|_2^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{1}{4}$$

La integral es convergente. Por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$ también es convergente. ■

La suma de las potencias recíprocas n^{-p} se denomina una ***p*-serie**.

> **TEOREMA 3** **Convergencia de *p*-series** La serie inf nita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge en cualquier otro caso.

Demostración Si $p \leq 0$, entonces el término general n^{-p} no tiende a cero por lo que la serie diverge. Si $p > 0$, entonces $f(x) = x^{-p}$ es positiva y decreciente y se puede aplicar el criterio integral. Según el teorema 1 de la sección 7.6:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y es divergente si $p \leq 1$. ■

He aquí dos ejemplos de p-series:

$$p = \frac{1}{3}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots = \infty \qquad \text{divergente}$$

$$p = 2: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad \text{convergente}$$

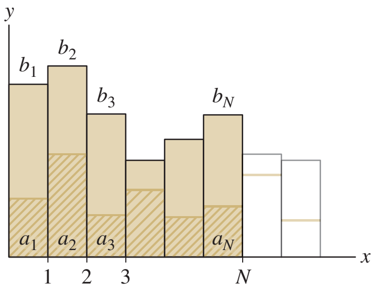


FIGURA 4 La serie $\sum a_n$ está dominada por la serie $\sum b_n$.

Otro método potente para determinar la convergencia de series de términos positivos es la comparación. Suponga que $0 \leq a_n \leq b_n$. La f gura 4 indica que si la suma más grande $\sum b_n$ es *convergente*, entonces la suma menor $\sum a_n$ también será convergente. De manera análoga, si la suma menor es *divergente*, entonces la suma mayor también será divergente.

TEOREMA 4 Criterio de comparación
Suponga que existe $M > 0$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq M$.

(i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es divergente.

Demostración Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $M = 1$. Si $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces la sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ están acotadas superiormente por S pues:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_N \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S \tag{2}$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, por el teorema de dicotomía (teorema 1). Así se demuestra (i). Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también debe ser divergente. En caso contrario, se llegaría a contradicción con (i). ■

Dicho en palabras, el criterio de comparación afirma que, para series de términos positivos:

- *la convergencia de la serie mayor, comporta la convergencia de la serie menor.*
- *la divergencia de la serie menor, comporta la divergencia de la serie mayor.*

■ **EJEMPLO 3** ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,3^n}$?

Solución Si $n \geq 1$, se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

La serie mayor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge porque se trata de una serie geométrica con $r = \frac{1}{3} < 1$. Por el criterio de comparación, la serie menor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,3^n}$ también es convergente. ■

■ **EJEMPLO 4** ¿Es convergente $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+3)^{1/3}}$?

Solución En primer lugar, se va a probar que:

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{(n^2+3)^{1/3}} \qquad \text{si } n \ge 2$$

Esta desigualdad es equivalente a $(n^2 + 3) \le n^3$, por lo que se debe probar que:

$$f(x) = x^3 - (x^2+3) \ge 0 \qquad \text{si } x \ge 2$$

La función $f(x)$ es estrictamente creciente porque su derivada $f'(x) = 3x(x-\frac{2}{3})$ es positiva si $x \ge 2$. Como $f(2) = 1$, se tiene que $f(x) \ge 1$ para $x \ge 2$, de dónde se deduce la desigualdad inicial planteada. Se sabe que la serie armónica menor $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Por tanto, la serie mayor, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{1/3}}$, también es divergente. ■

■ **EJEMPLO 5** **Aplicando la comparación correcta** Analice la convergencia de:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Solución Se puede intentar comparar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ con la serie armónica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ usando la desigualdad (cierta para $n \ge 3$):

$$\frac{1}{n(\ln n)^2} \le \frac{1}{n}$$

Sin embargo, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, lo que no aporta ninguna información sobre la serie *menor* $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Afortunadamente, se puede usar el criterio integral. La sustitución $u = \ln x$ conduce a:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

Según el criterio integral, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ es convergente. ■

Suponga que se quisiera estudiar la convergencia de:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 - n - 1}$$

Para n suf cientemente grande, el término general está muy cerca de $1/n^2$:

$$\frac{n^2}{n^4 - n - 1} = \frac{1}{n^2 - n^{-1} - n^{-2}} \approx \frac{1}{n^2}$$

Por tanto, se puede intentar comparar S con $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Sin embargo, la desigualdad va en la dirección equivocada:

$$\frac{n^2}{n^4 - n - 1} > \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

Aunque la serie menor $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, no se puede usar el criterio de comparación para poder establecer el carácter de la serie mayor. En esta situación, se puede utilizar la siguiente variación del criterio de comparación.

TEOREMA 5 Criterio de comparación (por paso al límite del cociente) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de términos *positivos*. Suponga que el siguiente límite existe:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- Si $L > 0$, entonces $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge.
- Si $L = \infty$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge.
- Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

ATENCIÓN *El criterio de comparación (por paso al límite del cociente) no es cierto si las series no son de términos positivos. Vea el problema 44 de la sección 11.4.*

Demostración Suponga, en primer lugar, que L es f nito (posiblemente cero) y que $\sum b_n$ converge. Considere un número positivo $R > L$. Entonces $0 \le a_n/b_n \le R$ para todo n suf cientemente grande pues a_n/b_n tiende a L. Por tanto $a_n \le Rb_n$. La serie $\sum Rb_n$ es convergente porque es un múltiplo de una serie convergente $\sum b_n$. Así $\sum a_n$ converge, según el criterio de comparación.

Ahora, suponga que L es diferente de cero (positivo o inf nito) y que $\sum a_n$ converge. Sea $L^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_n/a_n$. Entonces L^{-1} es f nito y se puede aplicar el resultado del párrafo previo con los papeles de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ intercambiados y deducir que $\sum b_n$ converge. ■

UN APUNTE CONCEPTUAL Para recordar los diferentes casos del criterio de comparación (por paso al límite del cociente), se puede proceder de esta forma. Si $L > 0$, entonces $a_n \approx Lb_n$ para n suf cientemente grande. Dicho de otro modo, las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son *prácticamente* múltiplos una de la otra, por lo que una converge si la otra lo hace. Si $L = \infty$, entonces a_n es mucho mayor que b_n (para n grandes) por lo que, si $\sum a_n$ converge, $\sum b_n$ también converge. Finalmente, si $L = 0$, entonces b_n es mucho mayor que a_n y la convergencia de $\sum b_n$ conduce a la convergencia de $\sum a_n$.

■ **EJEMPLO 6** Pruebe que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 - n - 1}$ es convergente.

Solución Sea:

$$a_n = \frac{n^2}{n^4 - n - 1} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

Tal y como se ha mencionado anteriormente, $a_n \approx b_n$ para n suf cientemente grande. Para aplicar el teorema de comparación por paso al límite, observe que el límite L existe y que $L > 0$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4 - n - 1} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - n^{-3} - n^{-4}} = 1$$

Como $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 - n - 1}$ también converge, según el teorema 5. ■

■ **EJEMPLO 7** Determine si $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ converge.

Solución Aplique el teorema de comparación por paso al límite con $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 4/n^2}} = 1$$

Como $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge y $L > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ también diverge. ■

11.3 RESUMEN

- Las sumas parciales S_N de una serie positiva $S = \sum a_n$ forman una sucesión creciente.
- *Teorema de dicotomía:* una serie positiva S converge si sus sumas parciales S_N están acotadas. En caso contrario, diverge.
- *Criterio integral:* Suponga que f es positiva, estrictamente decreciente y continua, para $x > M$. Sea $a_n = f(n)$. Si $\int_M^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces $S = \sum a_n$ converge y si $\int_M^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $S = \sum a_n$ diverge.
- *p-series:* La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \le 1$.
- *Criterio de comparación:* Suponga que existe $M > 0$ tal que $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \ge M$. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge y si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.
- *Criterio de comparación por paso al límite del cociente:* Suponga que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son positivas y que el siguiente límite existe:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

  – Si $L > 0$, entonces $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge.

  – Si $L = \infty$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge.

  – Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

11.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si las sumas parciales S_N son estrictamente crecientes, entonces (elija la conclusión correcta):

(a) $\{a_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente.

(b) $\{a_n\}$ es una sucesión positiva.

2. ¿Cuáles son las hipótesis del criterio integral?

3. ¿Qué criterio utilizaría para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3,2}$ converge?

4. ¿Qué criterio utilizaría para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$ converge?

5. Ralph quisiera examinar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ comparándola con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ¿Se trata de una buena estrategia?

Problemas

En los problemas 1-14, use el criterio integral para determinar si la serie infinita es convergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/3}$

4. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-4}}$

5. $\sum_{n=25}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+9)^{5/2}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^{3/5}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

8. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

15. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+8n}$ converge aplicando el criterio de comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$.

16. Pruebe que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$ diverge comparándola con $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}$.

17. Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Compruebe que, si $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

¿Se puede utilizar alguna de las desigualdades anteriores para demostrar que S diverge? Pruebe que $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$ y deduzca que S diverge.

18. ¿Cuál de las siguientes desigualdades se puede utilizar para estudiar la convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$? Justifique su respuesta.

$$\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

En los problemas 19-30, use el criterio de comparación para determinar si la serie infinita es convergente.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+4n+1}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}+2^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$

23. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m!+4^m}$

24. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-3}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 k}{k^2}$

26. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{1/3}}{k^{5/4}-k}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n+3^{-n}}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3}$

Problemas 31-36: para todo $a > 0$ y $b > 1$, las desigualdades:

$$\ln n \leq n^a \qquad n^a < b^n$$

son ciertas, para n suficientemente grande (se puede demostrar utilizando la regla de L'Hopital). Utilice estas desigualdades, junto con el criterio de comparación, para determinar si la serie converge o diverge.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

32. $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\ln m}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n^{1,1}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{10}}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$

37. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$ converge. *Indicación:* Use la desigualdad $\operatorname{sen} x \le x$ para $x \ge 0$.

38. ¿Es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\ln n}$ convergente? *Indicación:* Por el teorema 1 de la sección 2.6, $\operatorname{sen}(1/n) > (\cos(1/n))/n$. Así $\operatorname{sen}(1/n) > 1/(2n)$ para $n > 2$ (ya que $\cos(1/n) > \frac{1}{2}$).

En los problemas 39-48, use el criterio de comparación (por paso al límite del cociente), para demostrar la convergencia o divergencia de la serie infinita.

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 - 1}$

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$

41. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3 + 1}}$

42. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^7 + 2n^2 + 1}}$

43. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n + 5}{n(n-1)(n-2)}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n}{e^{2n} - n^2}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \ln n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+4)}{n^{5/2}}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ *Indicación:* compare con $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2^{-1/n})$ *Indicación:* compare con la serie armónica.

En los problemas 49-78, determine la convergencia o divergencia utilizando cualquiera de los métodos que se han tratado hasta el momento.

49. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 9}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n + 9}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \cos n}{n^3}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{n^5 + n}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \operatorname{sen} n}$

55. $\sum_{n=5}^{\infty} (4/5)^{-n}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n^2}}$

57. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} \ln n}$

58. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{12}}{n^{9/8}}$

59. $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{1/k}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n - 2n}$

61. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n - n}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2 - n}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n^{3/2}}{n^3}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^{3/2}}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{4^n}$

72. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$

73. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 - 3n}$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

75. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} \ln n}$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} - \ln^4 n}$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 15n}{3n^4 - 5n^2 - 17}$

78. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{-n} + 5^{-n}}$

79. ¿Para qué valores de a es convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a}$?

80. ¿Para qué valores de a es convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln n}$?

Aproximación de sumas infinitas *En los problemas 81-83, sea $a_n = f(n)$, donde $f(x)$ es una función continua y decreciente tal que $f(x) \ge 0$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.*

81. Pruebe que:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx \qquad \boxed{3}$$

82. SAC Usando la ec. (3), pruebe que:

$$5 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}} \le 6$$

Esta serie converge despacio. Use un programa informático de cálculo simbólico para comprobar que $S_N < 5$ para $N \le 43\ 128$ y $S_{43\ 129} \approx$ $\approx 5{,}00000021$.

83. Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Razonando como en el problema 81, pruebe que:

$$\sum_{n=1}^{M} a_n + \int_{M+1}^{\infty} f(x)\,dx \le S \le \sum_{n=1}^{M+1} a_n + \int_{M+1}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \boxed{4}$$

Deduzca que:

$$0 \le S - \left(\sum_{n=1}^{M} a_n + \int_{M+1}^{\infty} f(x)\,dx \right) \le a_{M+1} \qquad \boxed{5}$$

Este problema proporciona un método para aproximar S con un error de, a lo sumo, a_{M+1}.

84. SAC Use la ec. (4) con $M = 43\ 129$ para demostrar que:

$$5{,}5915810 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}} \le 5{,}5915839$$

85. SAC Aplique la ec. (4) con $M = 40\ 000$ para demostrar que:

$$1{,}644934066 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 1{,}644934068$$

¿Es consistente este resultado con el resultado de Euler, según el cual la suma de esta serie es $\pi^2/6$?

86. SAC Usando un programa informático de cálculo simbólico y la ec. (5), determine el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6}$ con un error menor que 10^{-4}. Compruebe que su resultado es consistente con el de Euler, que demostró que esta suma es igual a $\pi^6/945$.

87. SAC Usando un programa informático de cálculo simbólico y la ec. (5), determine el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5}$ con un error menor que 10^{-4}.

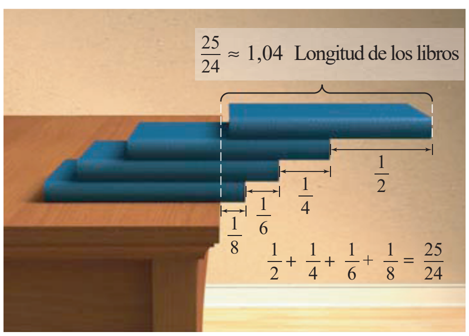


FIGURA 5

88. ¿Hasta dónde puede una pila de libros idénticos (de masa m y longitud 1) extenderse sin volcar? La pila no volcará si el libro $(n+1)$ se coloca al f nal de la pila con su borde derecho situado en el centro de masa de los primeros n libros (f gura 5). Sea c_n el centro de masas de los n primeros libros, medido a lo largo del eje x, donde se puede considerar el eje x a la izquierda del origen, como en la f gura 6. Recuerde que si un objeto de masa m_1 tiene su centro de masas en x_1 y un segundo objeto de masa m_2 tiene centro de masa x_2, entonces, el centro de masa del sistema tiene coordenada x igual a:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

(a) Pruebe que si el libro $(n+1)$ se coloca con su borde derecho en c_n, entonces su centro de masas está en $c_n + \frac{1}{2}$.

(b) Considere los primeros n libros como un único objeto de masa nm con centro de masas en c_n y el libro $(n+1)$ como un segundo objeto de masa m. Pruebe que si el libro $(n+1)$ se coloca con su borde derecho en c_n, entonces $c_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{2(n+1)}$.

(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. Por tanto, considerando suf cientes libros, la pila se puede extender tanto como se quiera sin que vuelque.

89. El siguiente razonamiento demuestra la divergencia de la serie armónica $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ sin utilizar el criterio integral. Sea:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots, \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$

Pruebe que si S converge, entonces:

(a) S_1 y S_2 también converge y $S = S_1 + S_2$.

(b) $S_1 > S_2$ y $S_2 = \frac{1}{2}S$.

Observe que (b) contradice a (a) y deduzca que S diverge.

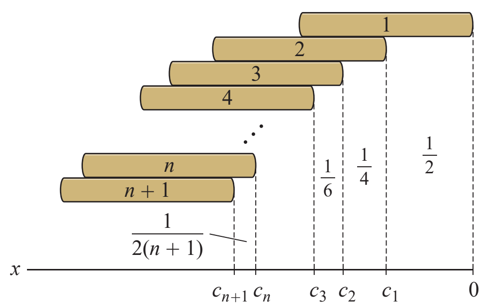


FIGURA 6

Problemas avanzados

90. Sea $S = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$, donde $a_n = (\ln(\ln n))^{-\ln n}$.

(a) Pruebe, considerando logaritmos, que $a_n = n^{-\ln(\ln(\ln n))}$.

(b) Pruebe que $\ln(\ln(\ln n)) \ge 2$ si $n > C$, donde $C = e^{e^{e^2}}$.

(c) Pruebe que S converge.

91. Método de aceleración de Kummer Suponga que se quiere aproximar $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Existe una serie similar telescópica cuyo valor se puede calcular exactamente (ejemplo 1 de la sección 11.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(a) Compruebe que $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$

Por tanto, para valores grandes de M:

$$S \approx 1 + \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2(n+1)} \qquad \boxed{6}$$

(b) Explique qué se ha ganado. ¿Por qué la ec. (6) es una mejor aproximación a S de lo que lo es $\sum_{n=1}^{M} 1/n^2$?

(c) SAC Calcule $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$ y $1 + \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

¿Cuál de las sumas anteriores proporciona una mejor aproximación a S, cuyo valor exacto es $\pi^2/6$?

92. SAC Se ha calculado la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ con más de 100 millones de dígitos. Los primeros 30 dígitos son:

$$S = 1{,}202056903159594285399738161511$$

Aproxime S usando el método de aceleración del problema 91 con $M = 100$ y la serie auxiliar $R = \sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1)(n+2))^{-1}$. Según el problema 46 de la sección 11.2, R es una serie telescópica de suma $R = \frac{1}{4}$.

11.4 Convergencia absoluta y convergencia condicional

En la sección anterior se han tratado las series de términos positivos, pero todavía se necesitan herramientas para analizar las series con términos tanto positivos como negativos. Una de las claves para entender estas series es el concepto de convergencia absoluta.

DEFINICIÓN Convergencia absoluta La serie $\sum a_n$ **es absolutamente convergente** si $\sum |a_n|$ es convergente.

■ **EJEMPLO 1** Compruebe que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente.

Solución Esta serie es absolutamente convergente porque la serie de términos positivos (al considerar el valor absoluto de cada término) es una p-serie con $p = 2 > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad (p\text{-serie convergente})$$ ■

Es siguiente teorema establece que si la serie de los valores absolutos es convergente, entonces la serie original también es convergente.

TEOREMA 1 Convergencia absoluta implica convergencia Si $\sum |a_n|$ es convergente, entonces $\sum a_n$ también es convergente.

Demostración Se tiene que $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$. Sumando $|a_n|$ en todos los términos de la desigualdad, $0 \le |a_n| + a_n \le 2|a_n|$. Si $\sum |a_n|$ es convergente, entonces $\sum 2|a_n|$ también es convergente y, por tanto, $\sum (a_n + |a_n|)$ es convergente por el criterio de comparación. La serie original es convergente porque se trata de la diferencia de dos series convergentes:

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$ ■

■ **EJEMPLO 2** Compruebe que $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ es convergente.

Solución En el ejemplo 1 se demostró que S es absolutamente convergente. Según el teorema 1, S convergente también. ■

■ **EJEMPLO 3** ¿Es absolutamente convergente la serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots ?$$

Solución La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es una p-serie con $p = \frac{1}{2}$. Es divergente porque $p < 1$. Por tanto, S no es absolutamente convergente. ■

La serie del ejemplo previo no es *absolutamente* convergente pero todavía no se ha determinado si la serie, propiamente dicha, es convergente. Una serie $\sum a_n$ puede ser convergente sin que sea absolutamente convergente. En tal caso, se dice que $\sum a_n$ es condicionalmente convergente.

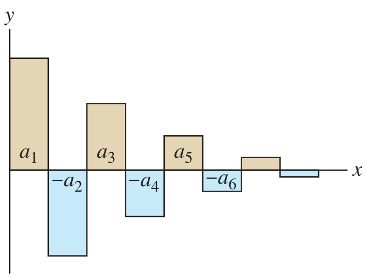


FIGURA 1 Una serie alternada con términos decrecientes. La suma es el área con signo que, como mucho, es igual a a_1.

DEFINICIÓN Convergencia condicional Una serie inf nita $\sum a_n$ **es condicionalmente convergente** si $\sum a_n$ es convergente pero $\sum |a_n|$ es divergente.

Si una serie no es absolutamente convergente, ¿cómo se puede determinar si es condicionalmente convergente? Se suele tratar de una pregunta compleja porque no se puede aplicar el criterio integral o el criterio de comparación (se aplican a series de términos positivos). Sin embargo, la convergencia queda garantizada en el caso de particular de una **serie alternada**:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

donde los términos a_n son positivos y decrecen a cero (f gura 1).

TEOREMA 2 Criterio de Leibniz para series alternadas Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos que es estrictamente decreciente y que converge a 0:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Entonces, la siguiente serie alternada es convergente:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Además:

$$0 < S < a_1 \quad \text{y} \quad S_{2N} < S < S_{2N+1} \qquad N \geq 1$$

Las hipótesis son importantes *El criterio de Leibniz no es cierto si se elimina la hipótesis de que a_n es estrictamente decreciente (vea el problema 35).*

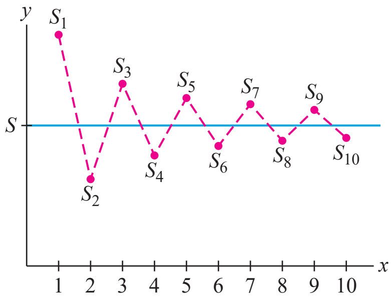


FIGURA 2 Las sumas parciales de una serie alternada describen un zigzag por encima y por debajo del límite. Las sumas parciales de índice impar decrecen y las de índice par crecen.

Demostración Se va a demostrar que las sumas parciales describen un zigzag por encima y por debajo de la suma S, como se ilustra en la f gura 2. Observe en primer lugar que las sumas de índice par son estrictamente crecientes. De hecho, los términos impares aparecen con un signo más y, así, por ejemplo:

$$S_4 + a_5 - a_6 = S_6$$

Pero $a_5 - a_6 > 0$ porque a_n es estrictamente decreciente y, por tanto, $S_4 < S_6$. En general:

$$S_{2N} + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) = S_{2N+2}$$

donde $a_{2n+1} - a_{2N+2} > 0$. Así $S_{2N} < S_{2N+2}$ y

$$0 < S_2 < S_4 < S_6 < \cdots$$

Análogamente:

$$S_{2N-1} - (a_{2N} - a_{2N+1}) = S_{2N+1}$$

Por tanto, $S_{2N+1} < S_{2N-1}$ y la sucesión de sumas parciales de índice impar es estrictamente decreciente:

$$\cdots < S_7 < S_5 < S_3 < S_1$$

Finalmente, $S_{2N} < S_{2N} + a_{2N+1} = S_{2N+1}$. La situación es la siguiente:

$$0 < S_2 < S_4 < S_6 < \quad \cdots \quad < S_7 < S_5 < S_3 < S_1$$

Ahora, como las sucesiones monótonas y acotadas son convergentes (teorema 6 de la sección 11.1), las sumas parciales pares e impares convergen a límites:

$$0 < S_2 < S_4 < \cdots < \lim_{N\to\infty} S_{2N} \le \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} < \cdots < S_5 < S_3 < S_1 \qquad \boxed{1}$$

Estos dos límites deben ser el mismo valor L pues:

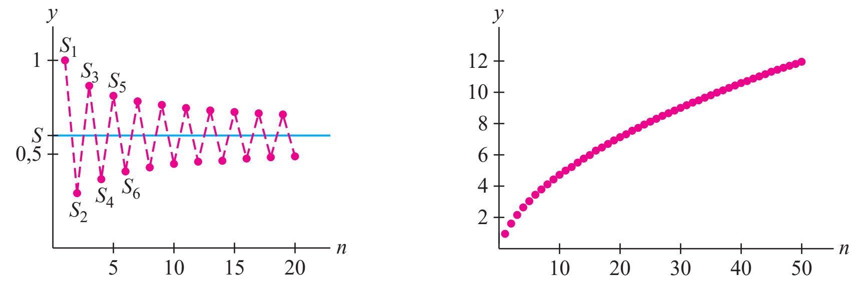
$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} - \lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} (S_{2N+1} - S_{2N}) = \lim_{N\to\infty} a_{2N+1} = 0$$

Por tanto, $\lim_{N\to\infty} S_N = L$ y la serie inf nita es convergente a $S = L$. Según la ec. (1) se tiene que $0 < S < S_1 = a_1$ y que $S_{2N} < S < S_{2N+1}$ para todo N, tal y como se quería demostrar. ■

El criterio de Leibniz es el único criterio para convergencia condicional que se va a tratar en este libro. Otros criterios, como el de Abel y el de Dirichlet, se pueden consultar en libros de texto de análisis matemático.

■ **EJEMPLO 4** Pruebe que $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots$ es condicionalmente convergente y que $0 \le S \le 1$.

Solución Los términos $a_n = 1/\sqrt{n}$ son positivos y estrictamente decrecientes y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, según el criterio de Leibniz, S es convergente. Además, $0 \le S \le 1$ porque $a_1 = 1$. Sin embargo, la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ es divergente porque es una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1$. Por tanto, S es condicionalmente convergente pero no es absolutamente convergente (f gura 3). ■



(A) Sumas parciales de $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (B) Sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

FIGURA 3

La desigualdad $S_{2N} < S < S_{2N+1}$ en el teorema 2 proporciona una información importante sobre el error: establece que $|S_N - S|$ es menor que $|S_N - S_{N+1}| = a_{N+1}$ para todo N.

> **TEOREMA 3** Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos, estrictamente decreciente que converge a 0. Entonces:
>
> $$\boxed{\left|S - S_N\right| < a_{N+1}} \qquad (2)$$
>
> Dicho de otro modo, *el error que se comete cuando se aproxima S por S_N es menor que la magnitud del primer término omitido, a_{N+1}.*

■ **EJEMPLO 5 Serie armónica alternada** Pruebe que $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es condicionalmente convergente. A continuación:

(a) Pruebe que $|S - S_6| < \frac{1}{7}$.

(b) Halle N tal que S_N aproxime a S con un error menor que 10^{-3}.

Solución Los términos $a_n = 1/n$ son positivos y estrictamente decrecientes y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, según el criterio de Leibniz, S es convergente. La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, por lo que S es condicionalmente convergente pero no es absolutamente convergente. Ahora, si se aplica la ec. (2), se tiene:

$$|S - S_N| < a_{N+1} = \frac{1}{N+1}$$

Para $N = 6$, se obtiene $|S - S_6| < a_7 = \frac{1}{7}$. Se puede conseguir que el error sea menor que 10^{-3} eligiendo N tal que:

$$\frac{1}{N+1} \le 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad N + 1 \ge 10^3 \quad \Rightarrow \quad N \ge 999$$

Usando un programa informático de cálculo simbólico, se obtiene que $S_{999} \approx 0{,}69365$. En el problema 84 de la sección 11.7, se demostrará que $S = \ln 2 \approx 0{,}69314$ y, así, se puede verif car que:

$$|S - S_{999}| \approx |\ln 2 - 0{,}69365| \approx 0{,}0005 < 10^{-3}$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL La convergencia de una serie inf nita $\sum a_n$ depende de dos factores: (1) de lo rápido que a_n tiende a cero y, (2) de cuántas cancelaciones entre los términos se producen. Considere:

Serie armónica (es divergente):	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$
p-serie con $p = 2$ (es convergente):	$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$
Serie armónica alternada (es convergente):	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$

La serie armónica es divergente porque los recíprocos $1/n$ no tienden a cero suf cientemente rápido. Por el contrario, los cuadrados recíprocos $1/n^2$ tienden a cero suf cientemente rápido, en el caso de la p-serie con $p = 2$, para conseguir la convergencia. La serie armónica alternada es convergente pero únicamente gracias a la cancelación entre los términos.

11.4 RESUMEN

- $\sum a_n$ *es absolutamente convergente* si la serie de términos positivos $\sum |a_n|$ es convergente.
- Convergencia absoluta implica convergencia: si $\sum |a_n|$ es convergente, entonces $\sum a_n$ también es convergente.
- $\sum a_n$ *es condicionalmente convergente* si $\sum a_n$ es convergente pero $\sum |a_n|$ es divergente.
- *Criterio de Leibniz:* si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos, estrictamente decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternada:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

es convergente. Además, $|S - S_N| < a_{N+1}$.
- Se han considerado dos maneras para analizar las series de términos no positivos: intente probar la convergencia absoluta, si es posible, o bien use el criterio de Leibniz, si éste es aplicable.

11.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dé un ejemplo de una serie tal que $\sum a_n$ sea convergente pero $\sum |a_n|$ sea divergente.

2. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es equivalente al teorema 1?

(a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es divergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también es divergente.

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ también es divergente.

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ también es convergente.

3. Lathika af rma que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ es una serie alternada y que, por tanto, es convergente. ¿Tiene razón?

4. Suponga que a_n es positivo, estrictamente decreciente y que tiende a 0 y sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. ¿Qué se puede af rmar sobre $|S - S_{100}|$ si $a_{101} = 10^{-3}$? ¿Es S mayor o menor que S_{100}?

Problemas

1. Pruebe que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

es absolutamente convergente.

2. Pruebe que la siguiente serie es condicionalmente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2/3}} = \frac{1}{1^{2/3}} - \frac{1}{2^{2/3}} + \frac{1}{3^{2/3}} - \frac{1}{4^{2/3}} + \cdots$$

En los problemas 3-10, determine si la serie es convergente absoluta o condicionalmente o ninguna de las dos cosas.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{n^3+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(1{,}1)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi n}{4})}{n^2}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(\ln n)^2}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$

11. Sea $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$.

(a) Calcule S_n para $1 \le n \le 10$.

(b) Use la ec. (2) para probar que $0{,}9 \le S \le 0{,}902$.

12. Use la ec. (2) para aproximar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

con cuatro cifras decimales de precisión.

13. Aproxime $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ con tres cifras decimales de precisión.

14. SAC Sea:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$$

Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular y representar gráf camente las sumas parciales S_n para $1 \le n \le 100$. Observe que las sumas parciales describen un zigzag por encima y por debajo del límite.

En los problemas 15-16, halle un valor de N tal que S_N aproxime a la serie con un error de, a lo sumo, 10^{-5}. Si dispone de un programa informático de cálculo simbólico, calcule ese valor de S_N.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)(n+3)}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n!}$

En los problemas 17-32, determine si existe convergencia o divergencia por el método que considere apropiado.

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 7^{-n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7{,}5}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n - 3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^4 + 12n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{5^n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 e^{-n^3/3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^3/3}$

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}(\ln n)^2}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1/4}}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1{,}05}}$

32. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

33. Pruebe que:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente calculando sus sumas parciales. ¿Converge absolutamente?

34. El criterio de Leibniz no se puede aplicar a:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \cdots$$

¿Por qué? Pruebe que la serie es convergente por cualquier otro método.

35. **Las hipótesis son importantes** Pruebe, con un contraejemplo, que el criterio de Leibniz no es cierto si la sucesión a_n tiende a cero pero no se supone decreciente. *Indicación:* Considere

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) + \cdots$$

36. Determine si la siguiente serie es condicionalmente convergente:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \cdots$$

37. Demuestre que si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente. A continuación, de un ejemplo en que $\sum a_n$ es únicamente condicionalmente convergente y $\sum a_n^2$ es divergente.

Problemas avanzados

38. Demuestre la siguiente versión del criterio de Leibniz: si $\{a_n\}$ es una sucesión positiva y estrictamente decreciente, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie:

$$a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4 + a_5 - 2a_6 + \cdots$$

es convergente. *Indicación:* pruebe que S_{3N} es creciente y acotada por $a_1 + a_2$ y continúe como en la demostración del criterio de Leibniz.

39. Aplique el problema 38 para probar que la siguiente serie es convergente:

$$S = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} - \frac{2}{\ln 7} + \cdots$$

40. Demuestre la convergencia condicional de:

$$R = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \cdots$$

41. Pruebe que la siguiente serie es divergente:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \cdots$$

Indicación: aplique el resultado del problema 40 para expresar S como la suma de una serie convergente y de una divergente.

42. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\ln n)^a}{n}$ es convergente para cualquier exponente a. *Indicación:* pruebe que $f(x) = (\ln x)^a/x$ es estrictamente decreciente si x es suficientemente grande.

43. Se dice que $\{b_n\}$ es una reordenación de $\{a_n\}$ si $\{b_n\}$ tiene los mismos términos que $\{a_n\}$ pero éstos aparecen en un orden diferente. Pruebe que si $\{b_n\}$ es una reordenación de $\{a_n\}$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es absolutamente convergente. (Este resultado no es cierto si S es solamente condicionalmente convergente.) *Indicación:* demuestre que las sumas parciales $\sum_{n=1}^{N} |b_n|$ están acotadas. Se puede probar después que $S = T$.

44. Las hipótesis son importantes En 1829, Lejeune Dirichlet puso de manifiesto que el gran matemático francés Augustin Louis Cauchy cometió un error en un artículo que había publicado, al suponer, de forma incorrecta, que el criterio de comparación por el paso al límite era válido para series no positivas. He aquí las dos series de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Explique por qué estas dos series proporcionan un contraejemplo al criterio de comparación por paso al límite.

11.5 El criterio de la razón y el de la raíz

Series como la siguiente:

$$S = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \cdots$$

aparecen en diferentes aplicaciones prácticas, pero los criterios de convergencia que se han tratado hasta el momento no se pueden aplicar en este caso de manera fácil. Afortunadamente, el criterio del cociente sí que se puede aplicar para determinar la convergencia de ésta y de muchas otras series.

El símbolo ρ es la letra minúscula "rho," la decimoséptima letra del alfabeto griego.

TEOREMA 1 Criterio del cociente Suponga que el siguiente límite existe:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

(i) Si $\rho < 1$, entonces $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $\rho > 1$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

(iii) Si $\rho = 1$, entonces el criterio no decide (la serie puede ser convergente o divergente).

Demostración La idea es comparar con una serie geométrica. Si $\rho < 1$, se puede escoger un número r tal que $\rho < r < 1$. Como $|a_{n+1}/a_n|$ converge a ρ, existe un número M tal que $|a_{n+1}/a_n| < r$ para todo $n \ge M$. Por tanto:

$$|a_{M+1}| < r|a_M|$$

$$|a_{M+2}| < r|a_{M+1}| < r(r|a_M|) = r^2|a_M|$$

$$|a_{M+3}| < r|a_{M+2}| < r^3|a_M|$$

En general, $|a_{M+n}| < r^n|a_M|$ y, por tanto:

$$\sum_{n=M}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{M+n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_M|\, r^n = |a_M| \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

La serie geométrica de la derecha converge porque $0 < r < 1$ con lo que $\sum_{n=M}^{\infty} |a_n|$ converge por el criterio de comparación y, en consecuencia, $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Si $\rho > 1$, considere r tal que $1 < r < \rho$. Entonces, existe un número M tal que $|a_{n+1}/a_n| > r$ para todo $n \geq M$. Razonando de manera similar al caso anterior, pero con las desigualdades en sentido contrario, se tiene que $|a_{M+n}| \geq r^n|a_M|$. Como r^n tiende a ∞, los términos a_{M+n} no tienden a cero y, en consecuencia, $\sum a_n$ es divergente. Por último, el ejemplo 4, que se encuentra a continuación, ilustra que tanto la convergencia como la divergencia se pueden dar cuando $\rho = 1$, por lo que el criterio no decide en este caso. ■

■ **EJEMPLO 1** Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ es convergente.

Solución Calcule el cociente y su límite cuando $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Observe que $(n+1)! = (n+1)n!$ y, por tanto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

Como $\rho < 1$, según el criterio del cociente, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ es convergente. ■

■ **EJEMPLO 2** ¿Es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?

Solución Aplique el criterio del cociente con $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Como $\rho < 1$, según el criterio del cociente, la serie es convergente. ■

■ **EJEMPLO 3** ¿Es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{1000^n}$?

Solución Según el criterio del cociente, esta serie es divergente, pues $\rho > 1$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{1000^{n+1}}\,\frac{1000^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1000} = \infty$$

■ **EJEMPLO 4** **El criterio del cociente no decide** Pruebe que, si $\rho = 1$, es posible que la serie en cuestión sea convergente o que sea divergente. Considere $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

Solución Para $a_n = n^2$, se tiene:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$$

Por otra parte, para $b_n = n^{-2}$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = 1$$

Por tanto, $\rho = 1$ en los dos casos pero $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ es divergente y $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ es convergente. Así se ha ilustrado que, si $\rho = 1$, la serie en cuestión puede que sea convergente o que sea divergente.

El siguiente criterio está basado en el límite de las raíces n–ésimas $\sqrt[n]{a_n}$ y no en el de los cocientes a_{n+1}/a_n. Su demostración, como la del criterio del cociente, se basa en la comparación con una serie geométrica (vea el problema 57).

TEOREMA 2 **Criterio de la raíz** Suponga que el siguiente límite existe:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

(i) Si $L < 1$, entonces $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $L > 1$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

(iii) Si $L = 1$, el criterio no decide (la serie puede ser convergente o divergente).

■ **EJEMPLO 5** ¿Es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+3}\right)^n$?

Solución Se tiene que $L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2}$. Como $L < 1$, según el criterio de la raíz, la serie es convergente.

11.5 RESUMEN

- *Criterio del cociente:* Suponga que $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe. Entonces $\sum a_n$
  - es absolutamente convergente si $\rho < 1$.

– es divergente si $\rho > 1$.
– el criterio no decide si $\rho = 1$.

- *Criterio de la raíz:* Suponga que $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe. Entonces $\sum a_n$

– es absolutamente convergente si $L < 1$.
– es divergente si $L > 1$.
– el criterio no decide si $L = 1$.

11.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. A qué es igual ρ en el criterio del cociente: ¿ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ o $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$?

2. ¿Se puede determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ en base al criterio del cociente? ¿Y para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

3. ¿Se puede utilizar el criterio del cociente para establecer la convergencia, si la serie en cuestión es sólo condicionalmente convergente?

Problemas

En los problemas 1-20, aplique el criterio del cociente para establecer la convergencia o divergencia de la serie o bien justifque que este criterio no decide.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5n^3+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{100}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{n^2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2^{n^2}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{40}}{n!}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{6^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^9}$

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

21. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} n^k 3^{-n}$ es convergente para todo exponente k.

22. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ es convergente, si $|x| < 1$.

23. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ es convergente, si $|x| < \frac{1}{2}$.

24. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ es convergente, para todo r.

25. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}$ es convergente, si $|r| < 1$.

26. ¿Existe algún valor de k para el que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^k}$ sea convergente?

27. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ es convergente. *Indicación:* use que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

En los problemas 28-33, suponga que $|a_{n+1}/a_n|$ es convergente a $\rho = \frac{1}{3}$. ¿Qué se puede af rmar sobre la convergencia de las siguientes series?

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ **29.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_n$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n a_n$ **33.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

34. Suponga que $|a_{n+1}/a_n|$ es convergente a $\rho = 4$. ¿Es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$? (Suponga que $a_n \neq 0$, para todo n.)

35. ¿Se puede establecer la convergencia o divergencia de la p-serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, en base al criterio del cociente?

En los problemas 36-41, aplique el criterio de la raíz para establecer la convergencia o divergencia de la serie dada (o bien justif que que este criterio no decide).

36. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ **37.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

38. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+10}\right)^k$ **39.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+1}\right)^k$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ **41.** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

42. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$ es divergente. *Indicación:* use que $2^{n^2} = (2^n)^n$ y que $n! \leq n^n$.

En los problemas 43-56, determine la convergencia o divergencia de cada una de las series, por alguno de los métodos que se han considerado en este libro hasta el momento.

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{7^n}$ **44.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$ **46.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

47. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n^2}}$ **48.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n}{3n^4 + 9}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0,8}$ **50.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0,8)^{-n} n^{-0,8}$

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-2n+1}$ **52.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$ **54.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}$ **56.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+12}\right)^n$

Problemas avanzados

57. **Demostración del criterio de la raíz** Sea $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y suponga que $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe.

(a) Pruebe que S es convergente, si $L < 1$. *Indicación:* considere R tal que $L < R < 1$ y pruebe que $a_n \leq R^n$ para n suf cientemente grande. A continuación, compare con la serie geométrica $\sum R^n$.

(b) Pruebe que S diverge, si $L > 1$.

58. Considere la serie $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$

Pruebe que no se puede aplicar el criterio del cociente, pero compruebe que la serie es convergente aplicando el criterio de comparación.

59. Sea $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$, donde c es una constante.

(a) Demuestre que S es absolutamente convergente, si $|c| < e$ y que es divergente si $|c| > e$.

(b) Se sabe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}$. Compruebe esta igualdad numéricamente.

(c) Use el criterio de comparación por paso al límite para demostrar que S es divergente para $c = e$.

11.6 Series de potencias

Una **serie de potencias** de centro c es una serie inf nita:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

en que x es una variable. Por ejemplo:

$$F(x) = 1 + (x-2) + 2(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + \cdots \tag{1}$$

es una serie de potencias de centro $c = 2$.

Muchas funciones de las que aparecen en las aplicaciones prácticas se pueden representar mediante series de potencias. Esto incluye tanto a las, ya conocidas, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y raíces, como a "funciones especiales" del ámbito de la física como las funciones de Bessel y las funciones elípticas.

Una serie de potencias $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ puede converger para algunos valores de x y divergir para otros. Por ejemplo, si se considera $x = \frac{9}{4}$ en la serie de potencias de la ec. (1), se obtiene una serie infinita que es convergente, según el criterio del cociente:

$$F\left(\frac{9}{4}\right) = 1 + \left(\frac{9}{4}-2\right) + 2\left(\frac{9}{4}-2\right)^2 + 3\left(\frac{9}{4}-2\right)^3 + \cdots$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$$

Por otra parte, la serie de potencias de la ec. (1) es divergente para $x = 3$:

$$F(3) = 1 + (3-2) + 2(3-2)^2 + 3(3-2)^3 + \cdots$$
$$= 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots$$

Hay una manera sencilla de describir el conjunto de valores x para los que una serie de potencias $F(x)$ es convergente. Según el siguiente teorema, o bien $F(x)$ es absolutamente convergente para todos los valores de x, o bien existe un radio de convergencia R tal que:

$F(x)$ es absolutamente convergente si $|x-c| < R$ y es divergente cuando $|x-c| > R$.

Esto significa que $F(x)$ es convergente para los x que se encuentren en un **intervalo de convergencia** y que consiste en un intervalo abierto $(c-R, c+R)$ y quizás uno o ambos extremos $c-R$ y $c+R$ (vea la figura 1). Observe que $F(x)$ automáticamente converge en $x = c$ pues:

$$F(c) = a_0 + a_1(c-c) + a_2(c-c)^2 + a_3(c-c)^3 + \cdots = a_0$$

Se considera $R = 0$ si $F(x)$ sólo converge en $x = c$ y $R = \infty$ si $F(x)$ converge para cualquier valor de x.

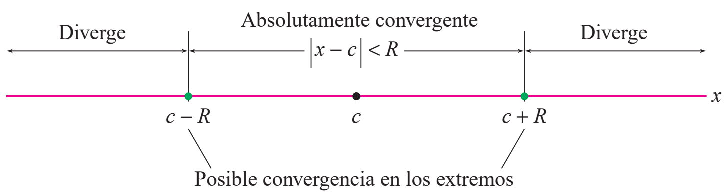


FIGURA 1 Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

TEOREMA 1 Radio de convergencia Toda serie de potencias:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

tiene un radio de convergencia R, que es o bien un número no negativo ($R \geq 0$), o bien infinito ($R = \infty$). Si R es finito, $F(x)$ es absolutamente convergente si $|x-c| < R$ y divergente si $|x-c| > R$. Si $R = \infty$, entonces $F(x)$ es absolutamente convergente para todo x.

Demostración Para simplificar la notación, suponga que $c = 0$. Si $F(x)$ sólo converge en $x = 0$, entonces $R = 0$. En caso contrario, $F(x)$ es convergente para algún valor diferente de cero $x = B$. Entonces, $F(x)$ debe ser, asimismo, absolutamente convergente para todo $|x| < |B|$. Para demostrar esta afirmación, observe que, como $F(B) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B^n$ es convergente, el término general $a_n B^n$ tiende a cero. En particular, existe $M > 0$ tal que $|a_n B^n| < M$ para todo n. Por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n B^n| \left|\frac{x}{B}\right|^n < M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{B}\right|^n$$

Si $|x| < |B|$, entonces $|x/B| < 1$ y la serie de la derecha es una serie geométrica convergente. Según el criterio de comparación, la serie de la izquierda también converge. Así queda demostrado que $F(x)$ es absolutamente convergente si $|x| < |B|$.

Propiedad de la menor cota superior: Si S es un conjunto de números reales con una cota superior M (es decir, $x \leq M$ para todo $x \in S$), entonces S admite una cota superior mínima L. Vea el apéndice B.

Sea ahora S el conjunto de números x para los que $F(x)$ es convergente. Entonces 0 pertenece a S y además se ha demostrado que, si S contiene a un número $B \neq 0$, entonces el intervalo $(-|B|, |B|)$ está contenido en S. Si S está acotado, entonces la menor de las cotas superiores de S, que se denotará L, existe (vea la nota al margen) y es mayor que cero. En tal caso, existen números $B \in S$ más pequeños, aunque arbitrariamente cercanos, que L y, por tanto, S contienen al intervalo $(-B, B)$ para todo $0 < B < L$. En consecuencia, S contiene al intervalo abierto $(-L, L)$. El conjunto S no puede contener ningún número x tal que $|x| > L$ pero S puede contener a uno o a ambos extremos $x = \pm L$. Así, en este caso, el radio de convergencia de $F(x)$ es $R = L$. Si S no está acotado, entonces S contiene intervalos de la forma $(-B, B)$ para B arbitrariamente grande. En tal caso, S es la recta real $\mathbb{R}$ y el radio de convergencia es $R = \infty$. ■

Según el teorema 1, se puede af rmar que existen dos etapas en la determinación del intervalo de convergencia de $F(x)$:

Etapa 1. Halle el radio de convergencia R (en muchos casos, usando el criterio del cociente).

Etapa 2. Compruebe la convergencia en los extremos (si $R \neq 0$ no ∞).

■ **EJEMPLO 1** **Aplicando el criterio del cociente** ¿Dónde es convergente la serie $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$?

Solución

Etapa 1. **Halle el radio de convergencia**

Sea $a_n = \frac{x^n}{2^n}$; calcule, según el criterio del cociente, ρ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\right| \cdot \left|\frac{2^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|$$

Se tiene que:

$$\rho < 1 \qquad \text{si} \quad \frac{1}{2}|x| < 1, \quad \text{es decir, si} \quad |x| < 2$$

Así, $F(x)$ converge si $|x| < 2$. De manera análoga $\rho > 1$ si $\frac{1}{2}|x| > 1$, o $|x| > 2$. Por tanto, $F(x)$ diverge si $|x| > 2$. Así, el radio de convergencia es $R = 2$.

Etapa 2. **Compruebe los extremos**

El criterio del cociente no decide si $x = \pm 2$, por lo que se debe comprobar estos casos directamente:

$$F(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \cdots$$

$$F(-2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$$

Ambas series son divergentes. Así, $F(x)$ es convergente únicamente si $|x| < 2$ (f gura 2). ■

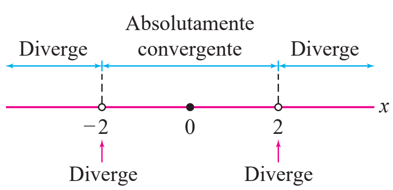


FIGURA 2 El intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

es $(-2, 2)$.

■ **EJEMPLO 2** ¿Dónde es convergente la serie $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n\, n}(x-5)^n$?

Solución Calcule ρ con $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4^n\, n}(x-5)^n$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-5)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}\,\frac{4^n n}{(x-5)^n}\right| =$$

$$= |x-5| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{4(n+1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}|x-5|$$

Se obtiene que:

$$\rho < 1 \qquad \text{si} \quad \frac{1}{4}|x-5| < 1, \quad \text{es decir, si} \quad |x-5| < 4$$

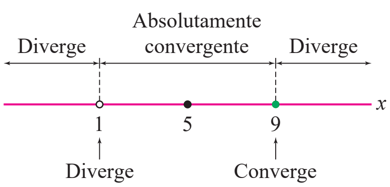


FIGURA 3 El intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n}(x-5)^n$$

es $(1, 9]$.

Por tanto $F(x)$ es absolutamente convergente en el intervalo abierto $(1, 9)$ de radio 4 y centro $c = 5$. Dicho de otro modo, el radio de convergencia es $R = 4$. A continuación, analice el comportamiento en los extremos:

$$x = 9: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n}(9-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{convergente (Criterio de Leibniz)}$$

$$x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{divergente (serie armónica)}$$

Así, $F(x)$ es convergente para x en el intervalo semiabierto $(1, 9]$, que se muestra en la f gura 3. ■

Algunas serie de potencias están formadas únicamente por potencias pares o por potencias impares de x. Se puede continuar utilizando el criterio del cociente para hallar el radio de convergencia.

■ **EJEMPLO 3 Una serie de potencias par** ¿Dónde es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$?

Solución Aunque esta serie de potencias sólo está formada por potencias pares de x, se puede continuar aplicando el criterio del cociente $a_n = x^{2n}/(2n)!$. Se tiene:

$$a_{n+1} = \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Además, $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$, con lo que:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{x^{2n}} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

Por tanto, $\rho = 0$ para todo x y $F(x)$ es convergente para todo x. El radio de convergencia es $R = \infty$. ■

Cuando una función $f(x)$ se representa mediante una serie de potencias en un intervalo I, se trata del desarrollo en serie de potencias *de $f(x)$ en I.*

Las series geométricas son un ejemplo importante de serie de potencias. Recuerde que la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$, es válida para $|r| < 1$. Escribiendo x en lugar de r, se obtiene un desarrollo en serie de potencias con radio de convergencia $R = 1$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{para } |x| < 1} \tag{2}$$

Los dos ejemplos siguientes muestran que se puede modif car esta fórmula para hallar el desarrollo en serie de potencias de otras funciones.

■ **EJEMPLO 4** **Series geométricas** Demuestre que:

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \qquad \text{para } |x| < \frac{1}{2}$$

Solución Sustituya $2x$ por x en la ec. (2):

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \tag{3}$$

El desarrollo de (2) es válido para $|x| < 1$, por lo que la ec. (3) es válida si $|2x| < 1$, o $|x| < \frac{1}{2}$. ■

■ **EJEMPLO 5** Halle un desarrollo en serie de potencias de centro $c = 0$ para

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2}$$

y halle el intervalo de convergencia.

Solución Es necesario reescribir $f(x)$ de tal manera que se pueda utilizar la ec. (2). Se tiene:

$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{2}x^2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

donde $u = -\frac{1}{2}x^2$. Ahora, sustituya $u = -\frac{1}{2}x^2$ por x en la ec. (2):

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}}$$

Este desarrollo es válido si $|-x^2/2| < 1$, o $|x| < \sqrt{2}$. El intervalo de convergencia es $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. ■

El siguiente teorema establece que, dentro del intervalo de convergencia, se puede tratar una serie de potencias como si fuera un polinomio; es decir, se puede derivar e integrar término a término.

TEOREMA 2 Derivación e integración término a término Suponga que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

tiene radio de convergencia $R > 0$. Entonces $F(x)$ es derivable en $(c - R, c + R)$ [o para todo x si $R = \infty$]. Además, se puede integrar y derivar término a término. Si $x \in (c - R, c + R)$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

$$\int F(x)\,dx = A + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \qquad (A \text{ constante})$$

Estas series tienen el mismo radio de convergencia R.

La demostración del teorema 2 es un tanto técnica y se omite. En el problema 66 se demuestra que $F(x)$ es continua.

■ **EJEMPLO 6 Derivación de una serie de potencias** Demuestre que, si $-1 < x < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$$

Solución El radio de convergencia de la serie geométrica es $R = 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Según el teorema 2, se puede derivar término a término si $|x| < 1$, con el resultado:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$$ ■

El teorema 2 es una potente herramienta en el estudio de las series de potencias.

■ **EJEMPLO 7 Serie de potencias para el arcotangente** Demuestre que, si $-1 < x < 1$:

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (1)$$

Solución Recuerde que $\tan^{-1} x$ es una primitiva de $(1 + x^2)^{-1}$. Si se sustituye $-x^2$ por x en la serie geométrica de la ec. (2), se obtiene el desarrollo en serie de potencias de:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Este desarrollo es válido para $|x^2| < 1$, es decir si $|x| < 1$. Según el teorema 2, se puede integrar la serie término a término. El desarrollo resultante continúa siendo válido para $|x| < 1$:

$$\tan^{-1} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx =$$

$$= A + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Considerando $x = 0$, se obtiene $A = \tan^{-1} 0 = 0$. Por tanto, la ec. (4) es válida para $-1 < x < 1$. ■

UN APUNTE GRÁFICO A continuación, se va a examinar el desarrollo del ejemplo previo en términos geométricos. Las sumas parciales de la serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1} x$ son:

$$S_N(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{2N+1}$$

Si N es suf cientemente grande, cabe esperar que $S_N(x)$ proporcione una buena aproximación de $f(x) = \tan^{-1} x$ sobre el intervalo $(-1, 1)$, en que el desarrollo en serie de potencias es válido. La f gura 4 conf rma esta idea: las gráf cas de $S_{50}(x)$ y de $S_{51}(x)$ son prácticamente indistinguibles de la de $\tan^{-1} x$ en el intervalo $(-1, 1)$. Por tanto, se pueden usar las sumas parciales para aproximar el arcotangente. Por ejemplo, $\tan^{-1}(0{,}3)$ se puede aproximar por:

$$S_4(0{,}3) = 0{,}3 - \frac{(0{,}3)^3}{3} + \frac{(0{,}3)^5}{5} - \frac{(0{,}3)^7}{7} + \frac{(0{,}3)^9}{9} \approx 0{,}2914569$$

Como la serie de potencias es una serie alternada, el error es menor que el primer término que se omite:

$$|\tan^{-1}(0{,}3) - S_4(0{,}3)| < \frac{(0{,}3)^{11}}{11} \approx 1{,}61 \times 10^{-7}$$

La situación cambia de forma drástica en la región $|x| > 1$, donde la serie de potencias diverge y las sumas parciales $S_N(x)$ se desvían considerablemente de $\tan^{-1} x$.

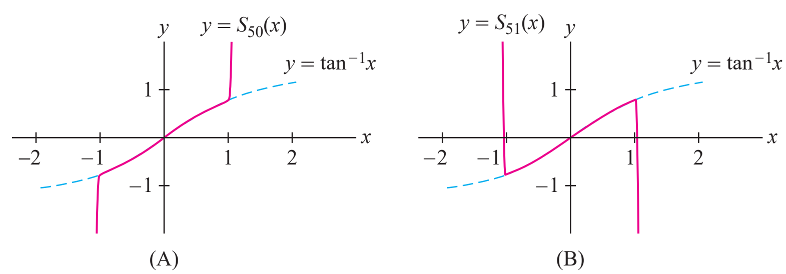


FIGURA 4 $S_{50}(x)$ y $S_{51}(x)$ son prácticamente indistinguibles de $\tan^{-1} x$ en $(-1, 1)$.

Series de potencias solución de ecuaciones diferenciales

Las series de potencias son una herramienta básica en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Para ilustrar esta af rmación, considere la ecuación diferencial de solución:

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

Como ya se ha visto, $f(x) = e^x$ es la única solución pero vamos a intentar encontrar una serie de potencias que verif que este problema de valores iniciales. Considere:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

Por tanto, $F'(x) = F(x)$ si:

$$a_0 = a_1, \quad a_1 = 2a_2, \quad a_2 = 3a_3, \quad a_3 = 4a_4, \quad \ldots$$

Dicho de otro modo, $F'(x) = F(x)$ si $a_{n-1} = na_n$, o

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1}}{n}}$$

Una ecuación de este tipo se denomina una *relación recurrente*. Permite determinar los coef cientes a_n sucesivamente, a partir del primero de ellos a_0, que puede ser elegido arbitrariamente. Por ejemplo:

$$n = 1: \qquad a_1 = \frac{a_0}{1}$$

$$n = 2: \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2 \cdot 1} = \frac{a_0}{2!}$$

$$n = 3: \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_0}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_0}{3!}$$

Para obtener una fórmula general para a_n, aplique la ecuación recurrente n veces:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)(n-2)} = \cdots = \frac{a_0}{n!}$$

La conclusión es que:

$$F(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En el ejemplo 3, se probó que el radio de convergencia de esta serie de potencias es $R = \infty$, por lo que $y = F(x)$ cumple $y' = y$ para todo x. Como $F(0) = a_0$, la condición inicial $y(0) = 1$ se verif ca si $a_0 = 1$.

Lo que se acaba de ilustrar es que tanto $f(x) = e^x$ como $F(x)$ como $a_0 = 1$ son soluciones del problema de valores iniciales. Deben ser iguales porque la solución es única. Esto demuestra que, para todo x,

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

En este ejemplo se sabía de antemano que $y = e^x$ era solución de $y' = y$, pero suponga que se dispone de una ecuación diferencial cuya solución es desconocida. Se puede intentar hallar una solución en forma de serie de potencias $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. En situaciones favorables, la ecuación diferencial conlleva una relación recurrente que permite determinar los coef cientes a_n.

■ **EJEMPLO 8** Halle una serie de potencias que sea solución del problema de valores iniciales:

La solución del ejemplo 8 se denomina la "función de Bessel de orden 1." La función de Bessel de orden n es una solución de:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Estas funciones tienen aplicaciones en muchas áreas de la física y de la ingeniería.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0, \qquad y'(0) = 1 \tag{5}$$

Solución Suponga que la ec. (5) admite una solución en forma de serie de potencias $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Entonces:

$$y' = F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$$

$$y'' = F''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots$$

En la ec. (6), se combinan las tres series en una, utilizando que:

$$n(n-1)+n-1=n^2-1$$

y empezando la cuarta serie en $n = 2$ en lugar de en $n = 0$.

Sustituya ahora las series para y, y' e y'' en la ecuación diferencial (5) para determinar la ecuación recurrente satisfecha por los coef cientes a_n:

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + (x^2-1)y &= \\ &= x^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} + (x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)a_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Se cumple la ecuación diferencial si:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)a_nx^n = -\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

Los primeros términos de cada lado de esta ecuación son:

$$-a_0 + 0\cdot x + 3a_2x^2 + 8a_3x^3 + 15a_4x^4 + \cdots = 0 + 0\cdot x - a_0x^2 - a_1x^3 - a_2x^4 - \cdots$$

Agrupando los coef cientes de x^n, se obtiene:

$$-a_0 = 0 \qquad 3a_2 = -a_0 \qquad 8a_3 = -a_1 \qquad 15a_4 = -a_2 \tag{7}$$

En general, $(n^2-1)a_n = -a_{n-2}$, lo que da lugar a la siguiente ecuación recurrente:

$$\boxed{a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2-1} \qquad \text{para } n \geq 2} \tag{8}$$

Observe que, según la ec. (7), $a_0 = 0$. La relación recurrente establece que, en realidad, todos los coef cientes pares $a_2, a_4, a_6, \ldots$ son cero:

$$a_2 = \frac{a_0}{2^2-1} \text{ por tanto } a_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_4 = \frac{a_2}{4^2-1} = 0 \text{ por tanto } a_4 = 0, \qquad \text{etc.}$$

Respecto a los coef cientes impares, a_1 se puede escoger arbitrariamente. Como $F'(0) =$ $= a_1$, considere $a_1 = 1$ para obtener una solución de $y = F(x)$ que cumpla $F'(0) = 1$. Ahora, aplique la ec. (8):

$$\begin{aligned} n = 3: &\qquad a_3 = -\frac{a_1}{3^2-1} = -\frac{1}{3^2-1} \\ n = 5: &\qquad a_5 = -\frac{a_3}{5^2-1} = \frac{1}{(5^2-1)(3^2-1)} \\ n = 7: &\qquad a_7 = -\frac{a_5}{7^2-1} = -\frac{1}{(7^2-1)(3^2-1)(5^2-1)} \end{aligned}$$

Se muestra aquí el patrón general de los coef cientes. Para expresar los coef cientes de una forma compacta, sea $n = 2k+1$. Entonces, el denominador de la relación recurrente (8) se puede escribir como:

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$$

y

$$a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{4k(k+1)}$$

Aplicando esta relación recurrente k veces, se obtiene la fórmula:

$$a_{2k+1} = (-1)^k \left(\frac{1}{4k(k+1)}\right)\left(\frac{1}{4(k-1)k}\right)\cdots\left(\frac{1}{4(1)(2)}\right) = \frac{(-1)^k}{4^k\, k!\,(k+1)!}$$

De esta manera, se obtiene una serie de potencias representación de la solución:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(k+1)!} x^{2k+1}$$

Una aplicación directa del criterio del cociente prueba que el radio de convergencia de $F(x)$ es inf nito. Así, $F(x)$ es una solución del problema de valores iniciales para todo x. ■

11.6 RESUMEN

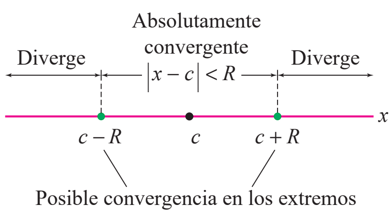


FIGURA 5 Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

- Una *serie de potencias* es una serie inf nita de la forma:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

La constante c se denomina el *centro* de $F(x)$.

- Toda serie de potencias $F(x)$ tiene un *radio de convergencia* R (f gura 5) tal que:

– $F(x)$ es absolutamente convergente si $|x-c| < R$ y divergente si $|x-c| > R$.

– $F(x)$ puede ser convergente o divergente en los extremos $c-R$ y $c+R$.

El radio de convergencia es igual a cero, $R = 0$, si $F(x)$ converge únicamente en $x = c$ y $R = \infty$ si $F(x)$ es convergente para todo x.

- El *intervalo de convergencia* de $F(x)$ está formado por el intervalo abierto $(c-R, c+R)$ y, posiblemente, uno o ambos extremos $c-R$ y $c+R$.
- En muchas situaciones, se puede utilizar el criterio del cociente para hallar el radio de convergencia R. Es necesario comprobar la convergencia en los extremos por separado.
- Si $R > 0$, entonces $F(x)$ es derivable en $(c-R, c+R)$ y

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \qquad \int F(x)\,dx = A + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

(A constante). Estas dos series de potencias tienen el mismo radio de convergencia R.

- El desarrollo $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es válido para $|x| < 1$. Se puede utilizar para obtener desarrollos de otras funciones relacionadas con ésta mediante sustitución, integración o derivación.

11.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Suponga que $\sum a_n x^n$ es convergente para $x = 5$. ¿Es convergente también para $x = 4$? ¿Y para $x = -3$?

2. Suponga que $\sum a_n(x-6)^n$ es convergente para $x = 10$. ¿En cuáles de los siguientes puntos (a)-(d) debe ser convergente también?

(a) $x = 8$ **(b)** $x = 11$ **(c)** $x = 3$ **(d)** $x = 0$

3. ¿Cuál es el radio de convergencia de $F(3x)$, si $F(x)$ es una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R = 12$?

4. El radio de convergencia de la serie de potencias $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ es $R = 1$. ¿Cuál es el desarrollo en serie de potencias de $F'(x)$ y cuál es su radio de convergencia?

Problemas

1. Aplique el criterio del cociente para determinar el radio de convergencia R de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$. ¿Converge en los extremos $x = \pm R$?

2. Aplique el criterio del cociente para probar que el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}2^n}$ es $R = 2$. A continuación, determine si converge en los extremos $R = \pm 2$.

3. Pruebe que el radio de convergencia de las series de potencias (a)-(c) es el mismo. A continuación, muestre que (a) es divergente en los dos extremos, que (b) es convergente en un extremo pero divergente en el otro y que (c) es convergente en ambos extremos.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$

4. Repita el problema 3 para las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{9^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n9^n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2 9^n}$

5. Pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ es divergente, para todo $x \neq 0$.

6. ¿Para qué valores de x es convergente $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$?

7. Aplique el criterio del cociente para probar que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ es $R = \sqrt{3}$.

8. Pruebe que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{64^n}$ es $R = 4$.

En los problemas 9-34, halle el intervalo de convergencia.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n n}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n} x^{2n}$

13. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n^5}$

14. $\sum_{n=8}^{\infty} n^7 x^n$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} x^n$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!} x^{2n-1}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+1}}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^4+2}$

21. $\sum_{n=15}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n - 4\ln n}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{\ln n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-3)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n (x-3)^n}{n^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^5 (x-7)^n$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} 27^n (x-1)^{3n+2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n} (x+3)^n$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n!} (x+10)^n$

32. $\sum_{n=10}^{\infty} n!\,(x+5)^n$

33. $\sum_{n=12}^{\infty} e^n (x-2)^n$

34. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n \ln n)^2}$

En los problemas 35-40, use la ec. (2) para desarrollar la función en serie de potencias de centro $c = 0$ y determine el intervalo de convergencia.

35. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$

36. $f(x) = \frac{1}{1+3x}$

37. $f(x) = \frac{1}{3-x}$

38. $f(x) = \frac{1}{4+3x}$

39. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

40. $f(x) = \frac{1}{16+2x^3}$

41. Aplique las igualdades:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{-3-(x-4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x-4}{3}\right)}$$

para probar que si $|x-4| < 3$, entonces:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-4)^n}{3^{n+1}}$$

42. Aplique el método del problema 41 para desarrollar $1/(1-x)$ en series de potencias de centros $c = 2$ y $c = -2$. Determine el intervalo de convergencia.

43. Aplique el método del problema 41 para desarrollar $1/(4-x)$ en una serie de potencias de centro $c = 5$. Determine el intervalo de convergencia.

44. Halle una serie de potencias que sea convergente únicamente para x que pertenezcan a $[2, 6)$.

45. Aplique integración al desarrollo:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

para demostrar que si $-1 < x < 1$, se verif ca:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

46. Aplique el resultado del problema 45 para demostrar que:

$$\ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$$

Use sus conocimientos de series alternadas para hallar N tal que la suma parcial S_N aproxime a $\ln\frac{3}{2}$ con un error inferior a 10^{-3}. Confirme su resultado calculando tanto S_N como $\ln\frac{3}{2}$, con una calculadora.

47. Sea $F(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$.

(a) Aplique integración al resultado del problema 45 para demostrar que si $-1 < x < 1$, se cumple:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

(b) Evalúe en $x = \frac{1}{2}$ para demostrar que:

$$\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 2^4} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots$$

(c) Use una calculadora para comprobar que la suma parcial S_4 aproxima a la expresión a la izquierda de la igualdad, con un error inferior al término a_5 de la serie.

48. Demuestre que si $|x| < 1$, se cumple:

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Use los dos primeros términos para aproximar $\int_0^{1/2} dx/(x^4+1)$ numéricamente. Utilice que dispone de una serie alternada, para probar que el error en esta aproximación es, como mucho, 0,00022.

49. Aplique el resultado del ejemplo 7 para probar que:

$$F(x) = \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \frac{x^8}{7\cdot 8} + \cdots$$

es una primitiva de $f(x) = \tan^{-1} x$ que cumple $F(0) = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie de potencias?

50. Compruebe que la función $F(x) = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ es una primitiva de $f(x) = \tan^{-1}x$ cumpliendo que $F(0) = 0$. A continuación, aplique el resultado del problema 49 con $x = \frac{\pi}{6}$ para probar que:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} = \frac{1}{1\cdot 2(3)} - \frac{1}{3\cdot 4(3^2)} + \frac{1}{5\cdot 6(3^3)} - \frac{1}{7\cdot 8(3^4)} + \cdots$$

Use una calculadora para comparar el valor de la expresión a la izquierda de la igualdad con la suma parcial S_4 de la serie a la derecha.

51. Evalúe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. *Indicación:* use derivación para mostrar que:

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (\text{para } |x| < 1)$$

52. Utilice el desarrollo en serie de potencias de $(1+x^2)^{-1}$ y derivación para demostrar que, si $|x| < 1$:

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n)x^{2n-1}$$

53. Pruebe que la siguiente serie es absolutamente convergente si $|x| < 1$ y calcule su suma:

$$F(x) = 1 - x - x^2 + x^3 - x^4 - x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + \cdots$$

Indicación: exprese $F(x)$ como una suma de tres series geométricas de razón x^3.

54. Pruebe que, si $|x| < 1$:

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2} = 1 + x - 2x^2 + x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6 + x^7 - 2x^8 + \cdots$$

Indicación: aplique la indicación del problema 53.

55. Halle todos los valores de x para los que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n!}$ es convergente.

56. Halle todos los valores de x para los que la siguiente serie es convergente:

$$F(x) = 1 + 3x + x^2 + 27x^3 + x^4 + 243x^5 + \cdots$$

57. Halle una serie de potencias $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que cumpla la ecuación diferencial $y' = -y$ con condición inicial $y(0) = 1$. A continuación, aplique el teorema 1 de la sección 5.8 para deducir que $P(x) = e^{-x}$.

58. Sea $C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

(a) Pruebe que el radio de convergencia de $C(x)$ es infinito.

(b) Demuestre que tanto $C(x)$ como $f(x) = \cos x$ son soluciones de $y'' = -y$ con la condición inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Este problema de valores iniciales tiene una solución única y, en consecuencia, $C(x) = \cos x$ para todo x.

59. Utilice la serie de potencias de $y = e^x$ para probar que:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$$

Use sus conocimientos de series alternadas para hallar N tal que la suma parcial S_N aproxime a e^{-1} con un error inferior a 10^{-3}. Confirme su resultado calculando tanto S_N como S_N y e^{-1}, con una calculadora.

60. Sea $P(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$ una serie de potencias, solución de $y' = 2xy$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

(a) Pruebe que los coeficientes impares a_{2k+1} son todos iguales a cero.

(b) Demuestre que $a_{2k} = a_{2k-2}/k$ y use este resultado para determinar los coeficientes a_{2k}.

61. Halle una serie de potencias $P(x)$ que verifique la ecuación diferencial:

$$y'' - xy' + y = 0 \qquad \boxed{9}$$

con la condición inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias?

62. Halle una serie de potencias que verifique la ec. (9) con la condición inicial $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

63. Demuestre que:

$$J_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+2}\, k!\,(k+3)!} x^{2k+2}$$

es una solución de la ecuación diferencial de Bessel de orden 2:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$$

64. ¿Por qué es imposible desarrollar $f(x) = |x|$ como una serie de potencias que sea convergente en un intervalo alrededor de $x = 0$? Justif que su respuesta en base al teorema 2.

Problemas avanzados

65. Suponga que los coef cientes de $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ son *periódicos*; es decir, para algún número natural $M > 0$, se tiene que $a_{M+n} = a_n$. Demuestre que $F(x)$ es absolutamente convergente para $|x| < 1$ y que

$$F(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{M-1}x^{M-1}}{1 - x^M}$$

Indicación: aplique la indicación del problema 53.

66. Continuidad de una serie de potencias Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$.

(a) Demuestre la desigualdad

$$|x^n - y^n| \le n|x - y|(|x|^{n-1} + |y|^{n-1}) \qquad \boxed{10}$$

Indicación: $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$.

(b) Considere R_1 tal que $0 < R_1 < R$. Pruebe que la serie inf nita $M = \sum_{n=0}^{\infty} 2n|a_n|R_1^n$ es convergente. *Indicación:* Pruebe que $n|a_n|R_1^n < |a_n|x^n$ para todo n suf cientemente grande, siempre que $R_1 < x < R$.

(c) Use la ec. (10) para probar que si $|x| < R_1$ y $|y| < R_1$, entonces $|F(x) - F(y)| \le M|x - y|$.

(d) Demuestre que si $|x| < R$, entonces $F(x)$ es continua en x. *Indicación:* considere R_1 tal que $|x| < R_1 < R$. Pruebe que, dado $\epsilon > 0$, entonces $|F(x) - F(y)| \le \epsilon$ para todo y tal que $|x - y| < \delta$, donde δ es cualquier número positivo menor que ϵ/M y que $R_1 - |x|$ (vea la f gura 6).

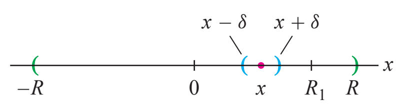


FIGURA 6 Si $x > 0$, considere $\delta > 0$ menor que ϵ/M y que $R_1 - x$.

11.7 Series de Taylor

En esta sección se van a desarrollar métodos generales para hallar representaciones en series de potencias. Suponga que $f(x)$ se representa mediante una serie de potencias centrada en $x = c$ sobre un intervalo $(c - R, c + R)$ con $R > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

Según el teorema 2 de la sección 11.6, se pueden obtener las derivadas de $f(x)$ derivando el desarrollo en serie de potencias término a término:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots \\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-c) + 3\cdot 4a_4(x-c)^2 + 4\cdot 5a_5(x-c)^3 + \cdots \\
f'''(x) &= 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-2) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-2)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

En general,

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + \big(2\cdot 3\cdots(k+1)\big)a_{k+1}(x-c) + \cdots$$

Considerando $x = c$, en cada una de estas series, se obtiene que

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad f''(c) = 2a_2, \quad f'''(c) = 2\cdot 3a_2, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(c) = k!a_k, \quad \ldots$$

Observe que a_k es el coef ciente de orden k del polinomio de Taylor que se estudió en la sección 8.4:

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}} \qquad \boxed{1}$$

Por tanto $f(x) = T(x)$, donde $T(x)$ es la **serie de Taylor** de $f(x)$ centrada en $x = c$:

$$T(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

Así se ha demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1 Desarrollo en serie de Taylor Si $f(x)$ se representa mediante una serie de potencias centrada en c, sobre un intervalo $|x-c| < R$ con $R > 0$, entonces esa serie de potencias es la serie de Taylor:

$$\boxed{T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

En el caso especial en que $c = 0$, $T(x)$ se denomina también la **serie de Maclaurin**:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots}$$

■ **EJEMPLO 1** Halle la serie de Taylor para $f(x) = x^{-3}$ centrada en $c = 1$.

Solución Las derivadas de $f(x)$ son $f'(x) = -3x^{-4}$, $f''(x) = (-3)(-4)x^{-5}$ y, en general,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(3)(4)\cdots(n+2)x^{-3-n}$$

Observe que $(3)(4)\cdots(n+2) = \frac{1}{2}(n+2)!$. Por tanto:

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n\frac{1}{2}(n+2)!$$

Como $(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$, se pueden expresar los coef cientes de la serie de Taylor como:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^n\frac{1}{2}(n+2)!}{n!} = (-1)^n\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

La serie de Taylor para $f(x) = x^{-3}$ centrada en $c = 1$ es:

$$T(x) = 1 - 3(x-1) + 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3 + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{(n+2)(n+1)}{2}(x-1)^n \qquad ■$$

Según el teorema 1, si se pretende representar una función $f(x)$ mediante una serie de potencias centrada en c, el único candidato es la serie de Taylor:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Vea el problema 92 para un ejemplo en que la serie de Taylor $T(x)$ es convergente, pero no converge a $f(x)$.

Sin embargo, *no hay ninguna garantía de que $T(x)$ converja a $f(x)$*, incluso aunque $T(x)$ converja. Para estudiar la convergencia, considere la suma parcial de orden k, que es el polinomio de Taylor de grado k:

$$T_k(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

En la sección 9.4, se definió el resto como:

$$R_k(x) = f(x) - T_k(x)$$

Como $T(x)$ es el límite de las sumas parciales $T_k(x)$, se tiene que:

La serie de Taylor converge a $f(x)$ si y sólo si $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$.

No existe ningún método general para determinar si $R_k(x)$ tiende a cero, pero el siguiente teorema se puede aplicar en algunos casos importantes.

RECORDATORIO $f(x)$ se denomina "infinitamente diferenciable" si $f^{(n)}(x)$ existe para todo n.

TEOREMA 2 Sea $I = (c-R, c+R)$, donde $R > 0$. Suponga que existe $K > 0$ tal que todas las derivadas de f están acotadas por K en I:

$$|f^{(k)}(x)| \le K \qquad \text{para todo} \quad k \ge 0 \quad \text{y} \quad x \in I$$

Entonces $f(x)$ se puede representar mediante su serie de Taylor en I:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad \text{para todo} \quad x \in I$$

Demostración Según la cota para el error de los polinomios de Taylor (teorema 2 de la sección 9.4):

$$|R_k(x)| = |f(x) - T_k(x)| \le K\frac{|x-c|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Si $x \in I$, entonces $|x-c| < R$ y se tiene:

$$|R_k(x)| \le K\frac{R^{k+1}}{(k+1)!}$$

En el ejemplo 9 de la sección 11.1 se ha demostrado que $R^k/k!$ tiende a cero cuando $k \to \infty$. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$ para todo $x \in (c-R, c+R)$, tal y como se quería demostrar. ■

Los desarrollos en serie de Taylor fueron estudiados a lo largo de los siglos diecisiete y dieciocho por Gregory, Leibniz, Newton, Maclaurin, Taylor y Euler, entre otros. Estos avances fueron anticipados por el gran matemático hindú Madhava (c. 1340-1425), quien descubrió los desarrollos del seno y del coseno, y muchos otros resultados, dos siglos antes.

■ **EJEMPLO 2 Desarrollos del seno y del coseno** Pruebe que los siguientes desarrollos de Maclaurin son válidos para todo x.

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$

Solución Recuerde que las derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sus valores en $x = 0$ presentan un patrón repetitivo de periodo 4:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$\cdots$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\cdots$
0	1	0	-1	0	$\cdots$

Dicho de otro modo, las derivadas de orden par son cero y las derivadas de orden impar alternan en signo: $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Por tanto, los coeficientes de Taylor no nulos para $\operatorname{sen} x$ son:

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Para $f(x) = \cos x$, la situación se invierte. Las derivadas de orden impar son cero y las de orden par alternan en signo: $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$. Así, los coeficientes de Taylor no nulos para $\cos x$ son $a_{2n} = (-1)^n/(2n)!$.

Se puede aplicar el teorema 2 con $K = 1$ y cualquier valor de R, porque tanto el seno como el coseno cumplen que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ para todo x y n. La conclusión es que la serie de Taylor es convergente a $f(x)$ para $|x| < R$. Como R es arbitrario, los desarrollos de Taylor son válidos para todo x. ■

■ **EJEMPLO 3** **Desarrollo de Taylor para $f(x) = e^x$ en $x = c$** Halle la serie de Taylor $T(x)$ de $f(x) = e^x$ en $x = c$.

Solución Se tiene que $f^{(n)}(c) = e^c$ para todo x y, por tanto:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$

Como e^x es estrictamente creciente, para todo $R > 0$ se cumple que $|f^{(k)}(x)| \leq e^{c+R}$ si $x \in (c-R, c+R)$. Aplicando el teorema 2 con $K = e^{c+R}$, se deduce que $T(x)$ converge a $f(x)$ para todo $x \in (c-R, c+R)$. Como R es arbitrario, el desarrollo de Taylor es válido para todo x. Si $c = 0$, se obtiene la serie de Maclaurin:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$ ■

Métodos directos para hallar series de Taylor

Hay diferentes métodos para obtener series de Taylor a partir de otras ya conocidas. En primer lugar, según el teorema 2 de la sección 11.6, se puede derivar e integrar las series de Taylor término a término, dentro de su intervalo de convergencia. También se pueden multiplicar dos series de Taylor o sustituir una serie de Taylor en otra (la demostración de estos hechos se omite del texto).

■ **EJEMPLO 4** Halle la serie de Maclaurin de $f(x) = x^2 e^x$.

Solución Multiplique la serie de Maclaurin de e^x, que ya conoce, por x^2.

En el ejemplo 4, también se puede expresar la serie de Maclaurin como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

$$\begin{aligned} x^2 e^x &= x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \\ &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \frac{x^7}{5!} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} \end{aligned}$$ ■

■ **EJEMPLO 5** **Sustitución** Halle la serie de Maclaurin de e^{-x^2}.

Solución Sustituya $-x^2$ en la serie de Maclaurin de e^x.

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots \qquad \boxed{2}$$

El desarrollo de Taylor de e^x es válido para todo x, por lo que este desarrollo es también válido para todo x. ■

■ **EJEMPLO 6** **Integración** Halle la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln(1 + x)$.

Solución Integre la serie geométrica de razón $-x$ (válida para $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

La constante de integración a la derecha es cero, porque $\ln(1 + x) = 0$ para $x = 0$. Este desarrollo es válido para $|x| < 1$. También es cierto para $x = 1$ (vea el problema 84). ■

En muchas situaciones, no hay una fórmula general para los coef cientes de Taylor pero aún así se pueden calcular tantos coef cientes como se requiera.

■ **EJEMPLO 7** **Multiplicación de series de Taylor** Escriba los términos, hasta grado cinco, de la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x \cos x$.

Solución Se multiplicará el polinomio de Taylor de grado cinco de e^x por el de $\cos x$, dejando de lado, en el resultado, los términos de grado mayor que cinco:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva (e ignorando los términos de grado mayor que cinco 5), se obtiene:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) + (1 + x)\left(\frac{x^4}{24}\right) =$$

$$= \underbrace{1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30}}_{\text{Retenga los términos de grado } \leq 5}$$

Se obtiene que el quinto polinomio de Maclaurin para $f(x) = e^x \cos x$ es:

$$T_5(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30}$$ ■

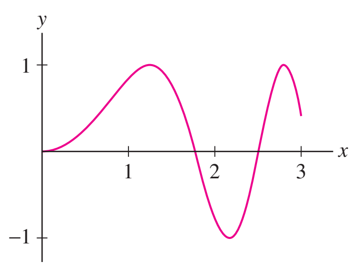


FIGURA 1 Gráf ca de $T_{12}(x)$ para el desarrollo en serie de potencias de la primitiva de:

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$$

En el siguiente ejemplo, se expresa la integral def nida de $\operatorname{sen}(x^2)$ como una serie inf nita. Se trata de un resultado útil porque esta integral no se puede evaluar de forma explícita. La f gura 1 muestra la gráf ca del polinomio de Taylor $T_{12}(x)$ del desarrollo en serie de Taylor de la primitiva.

■ **EJEMPLO 8** Sea $J = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx$.

(a) Exprese J como una serie inf nita.

(b) Determine J con un error menor que 10^{-4}.

Solución

(a) El desarrollo de Maclaurin de sen x es válido para todo x, por lo que:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

Integrando, se obtiene una serie infnita para J:

$$J = \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{4n+2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{4n+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75\ 600} + \cdots \tag{2}$$

(b) La serie infnita para J es una serie alternada con términos decrecientes, por lo que el error cometido en la aproximación, mediante la suma de los N primeros términos, es menor que el valor absoluto del término $(N + 1)$. El valor absoluto del cuarto término es $1/75\ 600$, menor que 10^{-4}, por lo que se obtiene la precisión requerida usando los primeros tres términos de la serie para J:

$$J \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0{,}31028$$

El error cumple:

$$\left| J - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \right) \right| < \frac{1}{75\ 600} \approx 1{,}3 \times 10^{-5}$$

El porcentaje de error es del 0,005 % únicamente con tres términos. ■

Serie Binomial

Isaac Newton descubrió una importante generalización del teorema Binomial sobre el 1665. Para cualquier número a (entero o no) y un entero $n \geq 0$, se defne el **coefciente binomial**:

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} \qquad \binom{a}{0} = 1$$

Por ejemplo:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \qquad \binom{\frac{4}{3}}{3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{4}{81}$$

Sea:

$$f(x) = (1 + x)^a$$

El **teorema Binomial** del álgebra (vea el apéndice C) establece que para cualquier número natural a, se verifca:

$$(r+s)^a = r^a + \binom{a}{1} r^{a-1} s + \binom{a}{2} r^{a-2} s^2 + \cdots + \binom{a}{a-1} r s^{a-1} + s^a$$

Considerando $r = 1$ y $s = x$, se obtiene el desarrollo de $f(x)$:

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \cdots + \binom{a}{a-1} x^{a-1} + x^a$$

La generalización de Newton se deduce calculando la serie de Maclaurin de $f(x)$ sin suponer que a es un número natural. Observe que las derivadas siguen un patrón:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^a & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= a(1+x)^{a-1} & f'(0) &= a \\ f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2} & f''(0) &= a(a-1) \\ f'''(x) &= a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} & f'''(0) &= a(a-1)(a-2) \end{aligned}$$

En general, $f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$ y se tiene:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}$$

Así, la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^a$ es la serie binomial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots$$

Si a es un número natural, $\binom{a}{n}$ es cero para $n > a$ y, en tal caso, la serie termina en grado n. La serie binomial es una serie infinita cuando a no es un número natural.

Según el criterio del cociente, el radio de convergencia de esta serie es $R = 1$ (problema 86); un razonamiento adicional (que se desarrolla en el problema 87) muestra que converge a $(1+x)^a$ si $|x| < 1$.

TEOREMA 3 La serie Binomial Para cualquier exponente a y para $|x| < 1$:

$$\boxed{(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots}$$

■ **EJEMPLO 9** Halle los términos de grado menor o igual que cuatro en el desarrollo de Maclaurin de:

$$f(x) = (1+x)^{4/3}$$

Solución Los coef cientes binomiales $\binom{a}{n}$ para $a = \frac{4}{3}$ si $0 \le n \le 4$ son:

$$1, \qquad \frac{\frac{4}{3}}{1!} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{\frac{4}{3}(\frac{1}{3})}{2!} = \frac{2}{9}, \qquad \frac{\frac{4}{3}(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{3!} = -\frac{4}{81}, \qquad \frac{\frac{4}{3}(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{4!} = \frac{5}{243}$$

Por tanto, $(1+x)^{4/3} \approx 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{81}x^3 + \frac{5}{243}x^4 + \cdots$. ■

■ **EJEMPLO 10** Halle la serie de Maclaurin de:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solución En primer lugar, se van a hallar los coef cientes en la serie binomial de $(1+x)^{-1/2}$:

$$1, \qquad \frac{-\frac{1}{2}}{1!} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \qquad \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$$

El patrón general es:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}$$

Por tanto, el siguiente desarrollo binomial es válido si $|x| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \cdots$$

Si $|x| < 1$, entonces $|x|^2 < 1$ y se puede sustituir $-x^2$ por x y obtener:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \cdots \qquad \boxed{4}$$

■

Las series de Taylor son particularmente útiles para estudiar las denominadas *funciones especiales* (como las funciones de Bessel y las funciones hipergeométricas) que aparecen en un amplio abanico de aplicaciones de la física y de la ingeniería. Uno de estos ejemplos es la siguiente **función elíptica de primera especie**, def nida para $|k| < 1$:

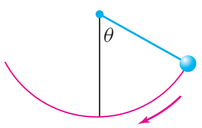


FIGURA 2 Péndulo que se suelta con un ángulo θ.

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

Esta función se utiliza en física para calcular el periodo T de un péndulo de longitud L soltado con un ángulo θ (f gura 2). Se puede utilizar la "aproximación para ángulos pequeños" $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$ donde θ es pequeño, pero esta aproximación deja de funcionar para ángulos grandes (f gura 3). El valor exacto del periodo es $T = 4\sqrt{L/g}E(k)$, donde $k = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$.

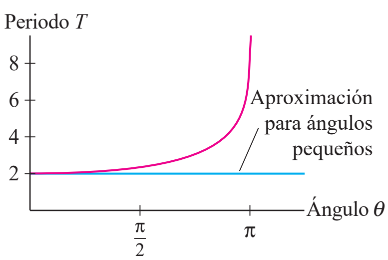


FIGURA 3 El periodo T de un péndulo de 1 metro de longitud como función del ángulo θ al que se suelta.

■ **EJEMPLO 11 Función elíptica** Halle la serie de Maclaurin de $E(k)$ y estime $E(k)$ para $k = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$.

Solución Sustituya $x = k \operatorname{sen} t$ en el desarrollo de Taylor (4):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2 t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \operatorname{sen}^4 t + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 \operatorname{sen}^6 t + \cdots$$

Este desarrollo es válido porque $|k| < 1$ y, por tanto, $|x| = |k \operatorname{sen} t| < 1$. Así, $E(k)$ es igual a:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \int_0^{\pi/2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot (2n)} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} t \, dt \right) k^{2n}$$

Según el problema 78 de la sección 8.2:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} t \, dt = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot (2n)} \right) \frac{\pi}{2}$$

De esta manera, se obtiene:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right)^2 k^{2n}$$

Se puede aproximar $E(k)$ para $k = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ mediante los primeros cinco términos:

$$E\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8\right) \approx$$

$$\approx 1{,}68517$$

El valor, hasta siete decimales, que proporciona un programa informático de cálculo simbólico es $E\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}6856325$. ■

TABLA 1

Función $f(x)$	**Desarrollo de Maclaurin**	**Converge a $f(x)$ para**
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	Todo x
$\operatorname{sen} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	Todo x
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	Todo x
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$\|x\| < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$	$\|x\| < 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$\|x\| < 1$ y $x = 1$
$\tan^{-1} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$	$\|x\| < 1$ y $x = 1$
$(1+x)^a$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$\|x\| < 1$

11.7 RESUMEN

- La *serie de Taylor* de $f(x)$ centrada en $x = c$ es:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

La suma parcial $T_k(x)$ es el polinomio de Taylor de grado k.

- *Serie de Maclaurin* ($c = 0$):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- Si $f(x)$ se representa mediante una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ para $|x-c| < R$, con $R > 0$, entonces esta serie de potencias es, necesariamente, la serie de Taylor centrada en $x = c$.
- Una función $f(x)$ se representa mediante su serie de Taylor $T(x)$ si y sólo si el resto $R_k(x) = f(x) - T_k(x)$ tiende a cero cuando $k \to \infty$.
- Sea $I = (c-R, c+R)$ con $R > 0$. Suponga que existe $K > 0$ tal que $|f^{(k)}(x)| < K$ para todo $x \in I$ y todo k. Entonces $f(x)$ se representa mediante su serie de Taylor en I; es decir, $f(x) = T(x)$ para $x \in I$.
- Una buena manera de hallar la serie de Taylor de una función es empezar con una serie de Taylor conocida y aplicar una de las operaciones de: derivación, integración, multiplicación o sustitución.
- Para cualquier exponente a, el desarrollo binomial es válido si $|x| < 1$:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots$$

11.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Determine $f(0)$ y $f'''(0)$ para una función $f(x)$ cuya serie de Maclaurin es:

$$T(x) = 3 + 2x + 12x^2 + 5x^3 + \cdots$$

2. Determine $f(-2)$ y $f^{(4)}(-2)$ para una función cuya serie de Taylor es:

$$T(x) = 3(x+2) + (x+2)^2 - 4(x+2)^3 + 2(x+2)^4 + \cdots$$

3. ¿Cuál es la manera más sencilla de hallar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \text{sen}(x^2)$?

4. Halle la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en $c = 3$, si $f(3) = 4$ y el desarrollo de Taylor de $f'(x)$ viene dado por:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

5. Sea $T(x)$ la serie de Maclaurin de $f(x)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones garantiza que $f(2) = T(2)$?

(a) $T(x)$ converge para $x = 2$.

(b) El resto $R_k(2)$ tiene límite cuando $k \to \infty$.

(c) El resto $R_k(2)$ tiende a cero cuando $k \to \infty$.

Problemas

1. Escriba los primeros cuatro términos de la serie de Maclaurin de $f(x)$ si:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = 3, \quad f''(0) = 4, \quad f'''(0) = 12$$

2. Escriba los primeros cuatro términos de la serie de Taylor de $f(x)$ centrada en $c = 3$ si:

$$f(3) = 1, \quad f'(3) = 2, \quad f''(3) = 12, \quad f'''(3) = 3$$

En los problemas 3-18, halle la serie de Maclaurin y el intervalo en que el desarrollo es válido.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^4}$

5. $f(x) = \cos 3x$

6. $f(x) = \text{sen}(2x)$

7. $f(x) = \text{sen}(x^2)$

8. $f(x) = e^{4x}$

9. $f(x) = \ln(1-x^2)$

10. $f(x) = (1-x)^{-1/2}$

11. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

12. $f(x) = x^2 e^{x^2}$

13. $f(x) = e^{x-2}$

14. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$

15. $f(x) = \ln(1-5x)$

16. $f(x) = (x^2+2x)e^x$

17. $f(x) = \text{senh}\, x$

18. $f(x) = \cosh x$

En los problemas 19-28, halle los términos hasta grado cuatro de la serie de Maclaurin de $f(x)$. Use multiplicación y substitución, cuando sea necesario.

19. $f(x) = e^x \,\text{sen}\, x$

20. $f(x) = e^x \ln(1-x)$

21. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{1-x}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{1+\text{sen}\, x}$

23. $f(x) = (1+x)^{1/4}$

24. $f(x) = (1+x)^{-3/2}$

25. $f(x) = e^x \tan^{-1} x$

26. $f(x) = \text{sen}\,(x^3 - x)$

27. $f(x) = e^{\text{sen}\, x}$

28. $f(x) = e^{(e^x)}$

En los problemas 29-38, halle la serie de Taylor centrada en c y el intervalo en que el desarrollo es válido.

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad c = 1$

30. $f(x) = e^{3x}, \quad c = -1$

31. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad c = 5$

32. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad c = \dfrac{\pi}{2}$

33. $f(x) = x^4 + 3x - 1, \quad c = 2$

34. $f(x) = x^4 + 3x - 1, \quad c = 0$

35. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad c = 4$

36. $f(x) = \sqrt{x}, \quad c = 4$

37. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad c = 3$

38. $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}, \quad c = -1$

39. Use la identidad $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ para hallar la serie de Maclaurin para $\cos^2 x$.

40. Pruebe que, si $|x| < 1$:

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Indicación: recuerde que $\dfrac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$.

41. Use las series de Maclaurin de $\ln(1+x)$ y $\ln(1-x)$ para probar que:

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

para $|x| < 1$. ¿Qué puede deducir al comparar este resultado con el del problema 40?

42. Derive dos veces la serie de Maclaurin para $\dfrac{1}{1-x}$ para hallar la serie de Maclaurin de $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

43. Pruebe, integrando la serie de Maclaurin de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, que si $|x| < 1$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

44. Use los primeros cinco términos de la serie de Maclaurin en el problema 43, para aproximar $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$. Compare el resultado con el valor obtenido con una calculadora.

45. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln(1+x)$ son necesarios para calcular ln 1,2 con un error menor o igual que 0,0001? Realice los cálculos y compare el resultado con el valor obtenido mediante una calculadora.

46. Pruebe que:

$$\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots$$

converge a cero. ¿Cuántos términos se deben calcular para que el error sea menor que 0,01?

47. Use el desarrollo de Maclaurin de e^{-t^2} para expresar la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ como una serie de potencias alternada en x (f gura 4).

(a) ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin son necesarios para aproximar la integral para $x = 1$ con un error de, a lo sumo, 0,001?

(b) SAC Realice los cálculos y compruebe su respuesta mediante un programa informático de cálculo simbólico.

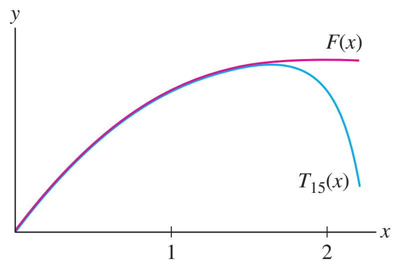


FIGURA 4 El polinomio de Maclaurin $T_{15}(x)$ para $F(t) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

48. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{t}$. Pruebe que:

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

Evalúe $F(1)$ con tres decimales de precisión.

En los problemas 49-52, exprese la integral def nida como una serie inf nita y halle su valor con un error de, a lo sumo, 10^{-4}.

49. $\displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)\, dx$

50. $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}(x^2)\, dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^3}\, dx$

52. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

En los problemas 53-56, exprese la integral como una serie inf nita.

53. $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\, dt, \quad$ para todo x

54. $\displaystyle\int_0^x \frac{t - \operatorname{sen} t}{t}\, dt, \quad$ para todo x

55. $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt, \quad$ para $|x| < 1$

56. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad$ para $|x| < 1$

57. ¿Qué función tiene como serie de Maclaurin $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$?

58. ¿Qué función tiene como serie de Maclaurin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-3)^k?$$

¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

En los problemas 59-62, use el teorema 2 para demostrar que $f(x)$ se representa mediante su serie de Maclaurin en el intervalo I.

59. $f(x) = \ln(1+x), \quad I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

60. $f(x) = e^{-x}, \quad I = (-c, c)$ para todo $c > 0$

61. $f(x) = \operatorname{senh} x, \quad I = \mathbb{R}$ (vea el problema 17)

62. $f(x) = (1+x)^{100}, \quad I = \mathbb{R}$

En los problemas 63-66, halle las funciones con las siguientes series de Maclaurin (haga referencia a la tabla 1 de la página 605).

63. $1 + x^3 + \dfrac{x^6}{2!} + \dfrac{x^9}{3!} + \dfrac{x^{12}}{4!} + \cdots$

64. $1 - 4x + 4^2x^2 - 4^3x^3 + 4^4x^4 - 4^5x^5 + \cdots$

65. $1 - \dfrac{5^3x^3}{3!} + \dfrac{5^5x^5}{5!} - \dfrac{5^7x^7}{7!} + \cdots$

66. $x^4 - \dfrac{x^{12}}{3} + \dfrac{x^{20}}{5} - \dfrac{x^{28}}{7} + \cdots$

En los problemas 67 y 68, sea $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

67. Halle la serie de Maclaurin de $f(x)$ usando la identidad:

$$f(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

68. Halle la serie de Taylor para $f(x)$ en $c = 2$. *Indicación:* reescriba la identidad del ejercicio 67 como:

$$f(x) = \frac{2}{-3-2(x-2)} - \frac{1}{-1-(x-2)}$$

69. Cuando se aplica un voltaje V a un circuito en serie que consiste en una resistencia R y un inductor L, la corriente en el instante t es:

$$I(t) = \left(\frac{V}{R}\right)(1 - e^{-Rt/L})$$

Desarrolle $I(t)$ en una serie de Maclaurin. Pruebe que $I(t) \approx \dfrac{Vt}{L}$ para valores pequeños de t.

70. Use el resultado del problema 69 y sus conocimientos sobre series alternadas para probar que:

$$\frac{Vt}{L}\left(1 - \frac{R}{2L}t\right) \le I(t) \le \frac{Vt}{L} \qquad \text{(para todo } t\text{)}$$

71. Halle la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos(x^3)$ y use su resultado para determinar $f^{(6)}(0)$.

72. Halle $f^{(7)}(0)$ y $f^{(8)}(0)$ para $f(x) = \tan^{-1} x$ usando la serie de Maclaurin.

73. Use sustitución para hallar los primeros tres términos de la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{x^{20}}$. ¿Cómo muestra este resultado que $f^{(k)}(0) = 0$ para $1 \le k \le 19$?

74. Use la serie binomial para hallar $f^{(8)}(0)$ para $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

75. Considere la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^{3/4}$. ¿Converge a $f(x)$ en $x = 2$? Proporcione evidencias numéricas que avalen su respuesta.

76. Explique las etapas necesarias para comprobar que la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$ converge a $f(x)$ para todo x.

77. GU Sea $f(x) = \sqrt{1+x}$.

(a) Use una calculadora gráf ca para comparar la gráf ca de f con las gráf cas de los primeros cinco polinomios de Taylor de f. ¿Qué sugieren éstos sobre el intervalo de convergencia de la serie de Taylor?

(b) Analice numéricamente si el desarrollo en serie de Taylor de f es, o no, válido para $x = 1$ y para $x = -1$.

78. Use los primeros cinco términos del desarrollo en serie de Maclaurin para la función elíptica $E(k)$, a f n de estimar el periodo T de un péndulo de longitud 1 metro que se suelta desde un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ (vea el ejemplo 11).

79. Use el ejemplo 11 y la aproximación de $\operatorname{sen} x \approx x$ para probar que el periodo T de un péndulo, que se suelta desde un ángulo θ, admite la siguiente aproximación de segundo orden:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)$$

En los problemas 80-83, halle la serie de Maclaurin de la función, y use su resultado para calcular el límite.

80. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

81. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$

82. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - x\cos x - \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

83. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^4} - \frac{\cos x}{x^2}\right)$

Problemas avanzados

84. En este problema, se prueba que el desarrollo en serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(1+x)$ es válido para $x = 1$.

(a) Pruebe que para todo $x \ne -1$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n + \frac{(-1)^{N+1}x^{N+1}}{1+x}$$

(b) Integre, de 0 a 1, para obtener:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{N+1}\,dx}{1+x}$$

(c) Compruebe que la integral a la derecha de la igualdad tiende a cero cuando $N \to \infty$, mostrando que es menor que $\int_0^1 x^{N+1}\,dx$.

(d) Demuestre la fórmula:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

85. Sea $g(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{t}{1+t^2}$.

(a) Pruebe que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

(b) Pruebe que $g(t) = 1 - t - t^2 + t^3 - t^4 - t^5 + \cdots$.

(c) Evalúe $S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$.

En los problemas 86 y 87, examine la convergencia de la serie binomial

$$T_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

86. Demuestre que, si a no es un número natural, el radio de convergencia de $T_a(x)$ es $R = 1$. ¿Cuál es el radio de convergencia si a es un número natural?

87. Según el problema 86, $T_a(x)$ es convergente para $|x| < 1$ pero todavía no se sabe si $T_a(x) = (1 + x)^a$.

(a) Compruebe la identidad:

$$a\binom{a}{n} = n\binom{a}{n} + (n+1)\binom{a}{n+1}$$

(b) Use (a) para probar que $y = T_a(x)$ cumple la ecuación diferencial $(1 + x)y' = ay$ con la condición inicial $y(0) = 1$.

(c) Demuestre que $T_a(x) = (1 + x)^a$ para $|x| < 1$ mostrando que la derivada del cociente $\dfrac{T_a(x)}{(1+x)^a}$ es cero.

88. La función $G(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$ es una **función elíptica de segunda especie**. Demuestre que si $|k| < 1$,

$$G(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdots 4 \cdot (2n)} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}$$

89. Suponga que $a < b$ y sea L la longitud de arco (perímetro) de la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ que se muestra en la f gura 5. No existe ninguna fórmula explícita para L, pero se sabe que $L = 4bG(k)$, siendo $G(k)$ la función que se ha introducido en el problema 88 y $k = \sqrt{1 - a^2/b^2}$. Use los primeros tres términos del desarrollo del problema 88 para estimar L cuando $a = 4$ y $b = 5$.

90. Use el problema 88 para demostrar que si $a < b$ y a/b está cerca de 1 (una elipse prácticamente circular), entonces:

$$L \approx \frac{\pi}{2}\left(3b + \frac{a^2}{b}\right)$$

Indicación: utilice los primeros dos términos de la serie para $G(k)$.

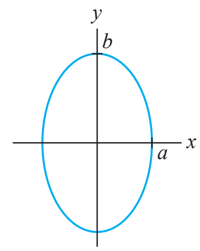


FIGURA 5 La elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

91. Irracionalidad de *e* Pruebe que e es un número irracional mediante la siguiente demostración por contradicción. Suponga que $e = M/N$, donde M, N son enteros no nulos.

(a) Pruebe que $M!\, e^{-1}$ es un número natural.

(b) Use la serie de potencias para e^x en $x = -1$ para mostrar que existe un entero B tal que $M!\, e^{-1}$ es igual a:

$$B + (-1)^{M+1}\left(\frac{1}{M+1} - \frac{1}{(M+1)(M+2)} + \cdots \right)$$

(c) Use sus conocimientos sobre series alternadas con términos decrecientes para deducir que $0 < |M!\, e^{-1} - B| < 1$ y observe que esto contradice el apartado (a). Así, e no puede ser igual a M/N.

92. Use el resultado del problema 69 de la sección 7.7 para probar que la serie de Maclaurin de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es $T(x) = 0$. Esta situación constituye un ejemplo de una función $f(x)$ cuya serie de Maclaurin es convergente pero no lo hace a $f(x)$ (excepto en $x = 0$).

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Sea $a_n = \dfrac{n-3}{n!}$ y $b_n = a_{n+3}$. Calcule los primeros tres términos de cada sucesión:

(a) a_n^2

(b) b_n

(c) $a_n b_n$

(d) $2a_{n+1} - 3a_n$

2. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$ usando la def nición de límite.

En los problemas 3-8, calcule el límite (o bien establezca que éste no existe) suponiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

3. $\lim_{n\to\infty} (5a_n - 2a_n^2)$

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$

5. $\lim_{n\to\infty} e^{a_n}$

6. $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi a_n)$

7. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n$

8. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n + n}{a_n + n^2}$

En los problemas 9-22, determine el límite de la sucesión o muestre que la sucesión es divergente.

9. $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+2}$

10. $a_n = \dfrac{3n^3 - n}{1 - 2n^3}$

11. $a_n = 2^{1/n^2}$

12. $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$

13. $b_m = 1 + (-1)^m$

14. $b_m = \dfrac{1 + (-1)^m}{m}$

15. $b_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{n+2}{n+5}\right)$

16. $a_n = \dfrac{100^n}{n!} - \dfrac{3+\pi^n}{5^n}$

17. $b_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$

18. $c_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

19. $b_m = \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^{3m}$

20. $c_n = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n}$

21. $b_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$

22. $c_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+1)}$

23. Use el teorema de compresión para probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n^2)}{\sqrt{n}} = 0$$

24. Proporcione un ejemplo de una sucesión divergente $\{a_n\}$ tal que $\{\operatorname{sen} a_n\}$ sea convergente.

25. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, donde $a_n = \dfrac{1}{2}3^n - \dfrac{1}{3}2^n$.

26. Sea $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ con $a_1 = 2$.

(a) Calcule a_n para $n = 2, 3, 4, 5$.

(b) Pruebe que $\{a_n\}$ es creciente y que está acotada por 3.

(c) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y halle su valor.

27. Calcule las sumas parciales S_4 y S_7 se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^2+2n}$.

28. Halle la suma $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} - \dfrac{1}{4^3} + \cdots$.

29. Halle la suma $\dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} + \dfrac{16}{81} + \dfrac{32}{243} + \cdots$.

30. Halle la suma $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

31. Halle la suma $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$.

32. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (b - \tan^{-1} n^2)$ es divergente si $b \neq \dfrac{\pi}{2}$.

33. Dé un ejemplo de dos series divergentes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tales que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 1$.

34. Sea $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Calcule S_N para $N = 1, 2, 3, 4$. Halle S probando que:

$$S_N = \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

35. Evalúe $S = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

36. Halle el área total de los inf nitos círculos sobre el intervalo $[0, 1]$ de la f gura 1.

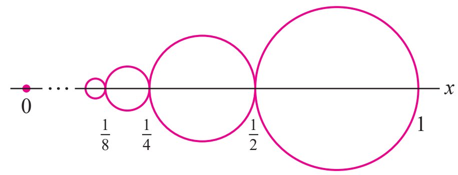


FIGURA 1

En los problemas 37-40, utilice el criterio integral para determinar si la serie es convergente.

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)^{1,01}}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(\ln(n+2))^3}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^4}}$

En los problemas 41-48, use el criterio de comparación por paso al límite para determinar si la serie es convergente.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^{3,5}-2}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+5}}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-2^n}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+10^n}{n^{11}+11^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{20}+21^n}{n^{21}+20^n}$

49. Determine la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n-2}$ usando el criterio de comparación por paso al límite con $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

50. Determine la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{1{,}5^n}$ usando el criterio de comparación por paso al límite con $b_n = \dfrac{1}{1{,}4^n}$.

51. Sea $a_n = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. *Indicación:* pruebe que $a_n \geq \frac{1}{2n}$.

52. Determine si $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$ converge.

53. Sea $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$.

(a) Pruebe que S es convergente.

(b) SAC Use la ec. (4) en el problema 83 de la sección 11.3 con $M = 99$ para aproximar S. ¿Cuál es el mayor error posible?

En los problemas 54-57, determine si la serie es absolutamente convergente. Si no lo es, determine si es condicionalmente convergente.

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+2n}$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1,1}\ln(n+1)}$

56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)}{\sqrt{n}}$

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)}{\sqrt{n}}$

58. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para aproximar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+\sqrt{n}}$ con un error de, a lo sumo, 10^{-5}.

59. La constante de Catalan se define mediante $K=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

(a) ¿Cuántos términos de la serie son necesarios para calcular K con un error menor que 10^{-6}?

(b) SAC Realice los cálculos.

60. Proporcione un ejemplo de series condicionalmente convergentes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ tales que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ sea absolutamente convergente.

61. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ una serie absolutamente convergente. Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n^2}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$

62. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$. Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n a_n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$

En los problemas 63-70, aplique el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de la serie, o bien establezca que el criterio del cociente no decide.

63. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$

64. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^8}$

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n+n^3}$

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$

67. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$

68. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$

69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$

70. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4}\right)^n\frac{1}{n!}$

En los problemas 71-74, aplique el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie, o bien establezca que el criterio de la raíz no decide.

71. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

72. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n$

73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4n}\right)^n$

74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

En los problemas 75-92, determine la convergencia o divergencia de la serie por cualquiera de los métodos que se han tratado en este libro.

75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{7n}}{e^{8n}}$

77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-0,02n}$

78. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-0,02n}$

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

80. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$

81. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

82. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$

83. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+\ln n}}$

84. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}(1+\sqrt{n})}$

85. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

86. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n-\ln(n+1))$

87. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

88. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n^{2/3}}$

89. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$

90. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^3 n}$

91. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}$

92. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{n!}$

En los problemas 93-98, halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

93. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$

94. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

95. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^6}{n^8+1}(x-3)^n$

96. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$

97. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(nx)^n$

98. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{n\ln n}$

99. Desarrolle $f(x)=\dfrac{2}{4-3x}$ como una serie de potencias centrada en $c=0$. Determine los valores de x para los que la serie sea convergente.

100. Demuestre que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

Indicación: exprese el lado izquierdo de la igualdad como la derivada de una serie geométrica.

101. Sea $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k \cdot k!}$.

(a) Pruebe que el radio de convergencia de $F(x)$ es infinito.

(b) Pruebe que $y = F(x)$ es una solución de:

$$y'' = xy' + y, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(c) SAC Represente gráficamente las sumas parciales S_N para $N = 1, 3, 5, 7$ en el mismo sistema de ejes.

102. Halle una serie de potencias $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que cumpla la ecuación diferencial de Laguerre:

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0$$

con la condición inicial $P(0) = 1$.

En los problemas 103-112, halle la serie de Taylor centrada en c.

103. $f(x) = e^{4x}, \quad c = 0$

104. $f(x) = e^{2x}, \quad c = -1$

105. $f(x) = x^4, \quad c = 2$

106. $f(x) = x^3 - x, \quad c = -2$

107. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad c = \pi$

108. $f(x) = e^{x-1}, \quad c = -1$

109. $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}, \quad c = -2$

110. $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^2}, \quad c = -2$

111. $f(x) = \ln \dfrac{x}{2}, \quad c = 2$

112. $f(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right), \quad c = 0$

En los problemas 113-116, halle los primeros tres términos de la serie de Maclaurin de $f(x)$ y úselos para calcular $f^{(3)}(0)$.

113. $f(x) = (x^2 - x)e^{x^2}$

114. $f(x) = \tan^{-1}(x^2 - x)$

115. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \tan x}$

116. $f(x) = (\operatorname{sen} x)\sqrt{1+x}$

117. Calcule $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^3}{2^3 3!} + \dfrac{\pi^5}{2^5 5!} - \dfrac{\pi^7}{2^7 7!} + \cdots$.

118. Halle la serie de Maclaurin de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$.

La hermosa concha del nautilus pompilius crece con la forma de una espiral equiangular, una curva descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = e^{a\theta}$.

12 ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS

En este capítulo se introducen dos nuevas herramientas importantes. En primer lugar, se consideran las ecuaciones paramétricas, que describen las curvas de una manera especialmente útil para analizar el movimiento y que resultan imprescindibles en áreas como los gráficos por ordenador y el diseño asistido por ordenador. A continuación se estudian las coordenadas polares, una alternativa a las coordenadas rectangulares que simplifica los cálculos en muchas aplicaciones. Este capítulo finaliza con un estudio de las secciones cónicas (elipses, hipérbolas y parábolas).

12.1 Ecuaciones paramétricas

Considere una partícula que se desplaza describiendo una curva $\mathcal{C}$ en el plano, tal y como se ilustra en la figura 1. Se puede describir el movimiento de la partícula especificando las coordenadas como función del tiempo t:

Se utilizará el término "partícula" para referirse a un objeto en movimiento, sin tener en cuenta su estructura interna.

$$\boxed{x = f(t) \qquad y = g(t)} \tag{1}$$

Dicho de otro modo, en el instante t, la partícula se encuentra en el punto:

$$\boxed{c(t) = (f(t), g(t))}$$

Las ecuaciones (1) se denominan **ecuaciones paramétricas** y se dice que $\mathcal{C}$ es una **curva paramétrica**. Se dice que $c(t)$ es una **parametrización** de **parámetro** t.

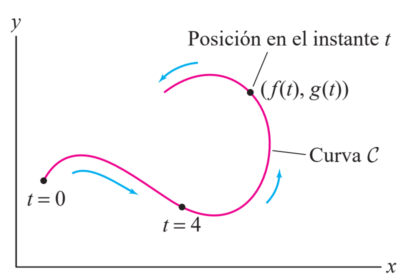


FIGURA 1 Partícula que se desplaza a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ en el plano.

Como x e y son funciones de t, a menudo se escribe $c(t) = (x(t), y(t))$ en lugar de $(f(t), g(t))$. Por supuesto, se puede utilizar cualquier otra variable para el parámetro (como s o θ). En las representaciones gráficas de curvas paramétricas, se suele indicar la dirección del movimiento mediante una flecha, como en la figura 1.

EJEMPLO 1 Dibuje la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = 2t - 4 \qquad y = 3 + t^2 \tag{2}$$

Solución En primer lugar, calcule las coordenadas x e y para diferentes valores de t, como se muestra en la tabla 1 y represente los correspondientes puntos (x, y), como en la f gura 2. Después, una los puntos por medio de una curva suave, indicando la dirección del movimiento con una f echa. ■

TABLA 1

t	$x = 2t - 4$	$y = 3 + t^2$
−2	−8	7
0	−4	3
2	0	7
4	4	19

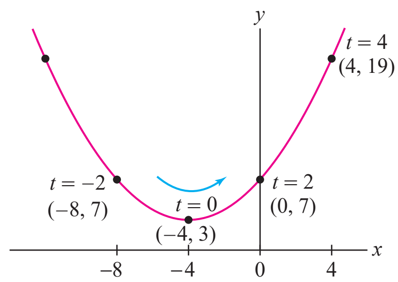


FIGURA 2 La curva paramétrica $x = 2t - 4$, $y = 3 + t^2$.

UN APUNTE CONCEPTUAL La gráf ca de una función $y = f(x)$ siempre se puede parametrizar, de manera sencilla, como:

$$c(t) = (t, f(t))$$

Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ se parametriza como $c(t) = (t, t^2)$ y la curva $y = e^t$ como $c(t) = (t, e^t)$. Una ventaja de las ecuaciones paramétricas es que permiten describir curvas que no son gráf cas de funciones. Por ejemplo, la curva de la f gura 3 no es de la forma $y = f(x)$ pero se puede expresar de forma paramétrica.

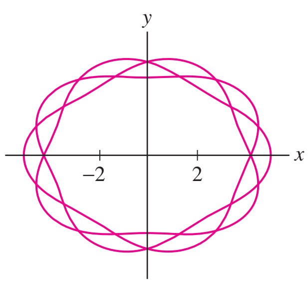


FIGURA 3 La curva paramétrica $x = 5\cos(3t)\cos\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}(5t)\right)$, $y = 4\operatorname{sen}(3t)\cos\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}(5t)\right)$.

Tal y como se acaba de mencionar, una curva paramétrica $c(t)$ no tiene por qué ser la gráf ca de una función. Sin embargo, si lo fuera, es posible hallar la función $f(x)$ "eliminando el parámetro" como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Eliminando el parámetro Describa la curva paramétrica

$$c(t) = (2t - 4, 3 + t^2)$$

del ejemplo previo, en la forma $y = f(x)$.

Solución Se "elimina el parámetro" aislando y como función de x. En primer lugar, exprese t el términos de x: como $x = 2t - 4$, se obtiene que $t = \frac{1}{2}x + 2$. Ahora, sustituya en y:

$$y = 3 + t^2 = 3 + \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 = 7 + 2x + \frac{1}{4}x^2$$

Por tanto, $c(t)$ describe la gráf ca de $f(x) = 7 + 2x + \frac{1}{4}x^2$ que se muestra en la f gura 2. ■

EJEMPLO 3 La trayectoria de una bala, hasta el instante en el que toca el suelo, es:

$$c(t) = (80t, 200t - 4{,}9t^2)$$

con t expresado en segundos y la distancia en metros (f gura 4). Halle:

(a) La altura de la bala en el instante $t = 5$ s. **(b)** Su altura máxima.

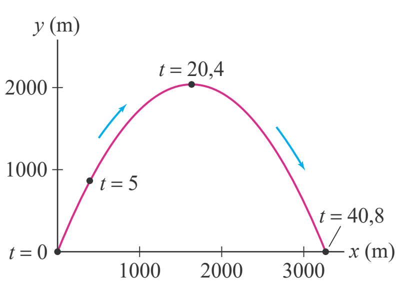


FIGURA 4 Trayectoria de una bala.

ATENCIÓN *La gráfica de la altura respecto al tiempo de un objeto que se lanza al aire es una parábola (según la fórmula de Galileo). Pero recuerde que la figura 4* ***no*** *es una gráfica de la altura respecto al tiempo. Muestra la trayectoria real de la bala (que presenta un desplazamiento vertical y uno horizontal).*

Solución La altura de la bala en el instante t es $y(t) = 200t - 4{,}9t^2$.

(a) La altura en $t = 5$ s es:

$$y(5) = 200(5) - 4{,}9(5^2) = 877{,}5 \text{ m}$$

(b) La altura máxima tiene lugar en el punto crítico de $y(t)$:

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(200t - 4{,}9t^2) = 200 - 9{,}8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{200}{9{,}8} \approx 20{,}4 \text{ s}$$

La altura máxima de la bala es $y(20{,}4) = 200(20{,}4) - 4{,}9(20{,}4)^2 \approx 2041$ m. ■

A continuación se consideran la parametrización de rectas y de circunferencias. En los últimos capítulos, ambas aparecerán con frecuencia.

TEOREMA 1 Parametrización de una recta

(a) La recta que pasa por $P = (a, b)$ y tiene pendiente m se parametriza mediante:

$$x = a + rt \qquad y = b + st \qquad -\infty < t < +\infty \tag{3}$$

para cualquier r y s (con $r \neq 0$) tales que $m = s/r$.

(b) La parametrización de la recta que pasa por $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$ es:

$$x = a + t(c - a) \qquad y = b + t(d - b) \qquad -\infty < t < +\infty \tag{4}$$

El segmento que va de P a Q corresponde a $0 \leq t \leq 1$.

Solución (a) Aísle t como función de x en $x = a + rt$: se obtiene $t = (x - a)/r$. Entonces:

$$y = b + st = b + s\left(\frac{x - a}{r}\right) = b + m(x - a) \qquad \text{o} \qquad y - b = m(x - a)$$

Se trata de la ecuación de la recta que pasa por $P = (a, b)$ y tiene pendiente m. Para $r = 1$ y $s = m$ se obtiene la parametrización de la f gura 5.

La parametrización de (b) def ne una recta que verif ca $(x(0), y(0)) = (a, b)$ y $(x(1), y(1)) = (c, d)$. Por tanto, parametriza la recta que pasa por P y por Q y describe el segmento que va de P a Q cuando t varía de 0 a 1. ■

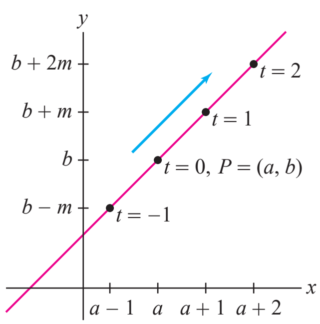


FIGURA 5 La parametrización de la recta $y - a = m(x - b)$ es: $c(t) = (a + t, b + mt)$. Corresponde a $r = 1$, $s = m$ en la ec. 3.

■ **EJEMPLO 4 Parametrización de una recta** Parametrice la recta que pasa por $P = (3, -1)$ y tiene pendiente $m = 4$.

Solución Se puede parametrizar esta recta considerando $r = 1$ y $s = 4$ en la ec. (3):

$$x = 3 + t, \qquad y = -1 + 4t$$

que se puede expresar como $c(t) = (3 + t, -1 + 4t)$. Otra parametrización de esta recta es $c(t) = (3 + 5t, -1 + 20t)$, correspondiente a $r = 5$ y $s = 20$ en la ec. (3). ■

La parametrización de la circunferencia centrada en el origen y de radio R es:

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\,\text{sen}\,\theta$$

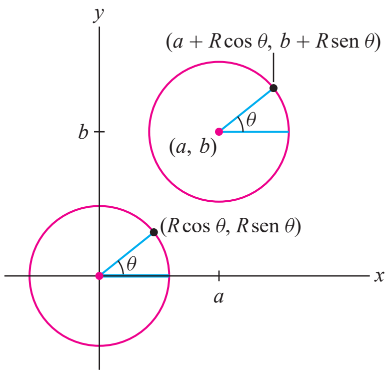


FIGURA 6 Parametrización de una circunferencia de radio R y centro (a, b).

El parámetro θ representa el ángulo correspondiente al punto (x, y) de la circunferencia (f gura 6). Cuando θ varía sobre un intervalo de longitud 2π, como $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, \pi)$, el círculo se recorre una vez en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

De manera más general, la parametrización de la circunferencia de centro (a, b) y radio R es (f gura 6):

$$\boxed{x = a + R\cos\theta, \qquad y = b + R\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{5}$$

Como comprobación, se va a verif car que un punto (x, y) dado por la ec. (5) cumple la ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (a + R\cos\theta - a)^2 + (b + R\,\mathrm{sen}\,\theta - b)^2 =$$
$$= R^2\cos^2\theta + R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = R^2$$

En general, para realizar una **traslación** (es decir "desplazar") una curva paramétrica a unidades horizontalmente y b unidades verticalmente, reemplace $c(t) = (x(t), y(t))$ por $c(t) = (a + x(t), b + y(t))$.

Suponga que se dispone de una parametrización $c(t) = (x(t), y(t))$ donde $x(t)$ es una función par e $y(t)$es una función impar, es decir, $x(-t) = x(t)$ e $y(-t) = -y(t)$. En tal caso, $c(-t)$ es la *ref exión* de $c(t)$ respecto al eje x:

$$c(-t) = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$$

Por tanto, la curva es *simétrica* respecto al eje x. Se utilizará esta observación en el siguiente ejemplo y en el ejemplo 7.

■ **EJEMPLO 5 Parametrización de una elipse** Compruebe que una elipse de ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ se parametriza mediante:

$$\boxed{c(t) = (a\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\,t) \qquad (\text{para } -\pi \le t < \pi)}$$

Represente gráf camente el caso $a = 4$, $b = 2$.

Solución Para comprobar que $c(t)$ es una parametrización de la elipse, se muestra que los puntos $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$ cumplen la ecuación de la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos t}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\,\mathrm{sen}\,t}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t = 1$$

Para representar el caso $a = 4$, $b = 2$, se unen los puntos correspondientes a los valores de t de la tabla 2 (vea la f gura 7). De esta manera se obtiene la mitad superior de la elipse, correspondiente a $0 \le t \le \pi$. Ahora observe que $x(t) = 4\cos t$ es par y que $y(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t$ es impar. Tal y como se ha mencionado anteriormente, esto implica que la mitad inferior de la elipse se obtiene por simetría respecto al eje x. ■

TABLA 2

t	$x(t) = 4\cos t$	$y(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t$
0	4	0
$\frac{\pi}{6}$	$2\sqrt{3}$	1
$\frac{\pi}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	2
$\frac{2\pi}{3}$	-2	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-2\sqrt{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	-4	0

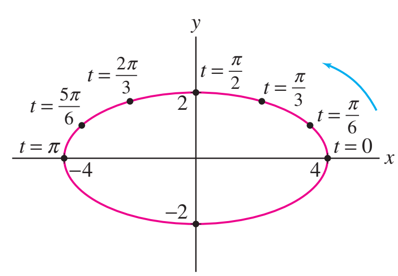


FIGURA 7 Elipse de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,t$.

Una curva paramétrica $c(t)$ también se denomina un **camino** o trayectoria. Este término enfatiza el hecho que $c(t)$ no sólo describe $\mathcal{C}$ sino que se ref ere a una manera particular de desplazarse a lo largo de una curva.

UN APUNTE CONCEPTUAL Las ecuaciones paramétricas para la elipse del ejemplo 5 ilustran un punto clave de la diferencia entre el camino $c(t)$ y su curva subyacente $\mathcal{C}$. La curva subyacente $\mathcal{C}$ es una elipse en el plano, mientras que $c(t)$ describe un movimiento particular, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, a lo largo de la elipse. Si se permite que t varíe de 0 a 4π, entonces la partícula recorre la elipse dos veces.

Un punto clave en las parametrizaciones es que éstas no son únicas. De hecho, cada curva se puede parametrizar de inf nitas formas. Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ no se parametriza solamente por (t, t^2) sino que (t^3, t^6) o (t^5, t^{10}), entre otras, también serían parametrizaciones válidas.

■ **EJEMPLO 6 Diferentes parametrizaciones de la misma curva** Describa el movimiento de una partícula que se desplaza sobre cada una de los siguientes caminos.

(a) $c_1(t) = (t^3, t^6)$ **(b)** $c_2(t) = (t^2, t^4)$ **(c)** $c_3(t) = (\cos t, \cos^2 t)$

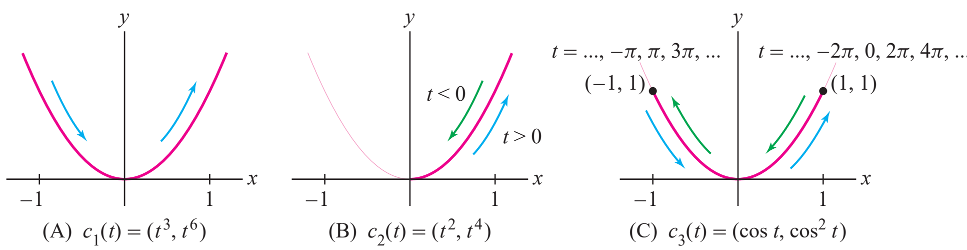


FIGURA 8 Tres parametrizaciones de partes de la parábola.

Solución Cada una de estas parametrizaciones cumple que $y = x^2$ por lo que las tres parametrizan partes de la parábola $y = x^2$.

(a) Cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$, la función t^3 varía de $-\infty$ a $+\infty$. Por tanto, $c_1(t) = (t^3, t^6)$ describe la parábola completa $y = x^2$, desde la izquierda hasta la derecha y pasando por cada punto una sola vez. [f gura 8(A)].

(b) Como $x = t^2 \geq 0$, la curva $c_2(t) = (t^2, t^4)$ describe solamente la mitad derecha de la parábola. La partícula se aproxima al origen de la parábola cuando t varía de $-\infty$ a 0 y vuelve de nuevo hacia la derecha cuando t varía de 0 a $+\infty$ [f gura 8(B)].

(c) Cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$, $\cos t$ oscila entre 1 y -1. Por tanto, una partícula que describe el camino $c_3(t) = (\cos t, \cos^2 t)$ oscila adelante y atrás entre los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ sobre la parábola. [f gura 8(C)]. ■

■ **EJEMPLO 7 Utilizando la simetría para dibujar un bucle** Dibuje la curva:

$$c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$$

Marque los puntos correspondientes a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 2{,}5$.

Solución

Etapa 1. **Use simetría**

Observe que $x(t) = t^2 + 1$ es una función par y que $y(t) = t^3 - 4t$ es una función impar. Tal y como se apuntó antes del ejemplo 5, esto implica que la curva $c(t)$ es simétrica respecto al eje x. Por tanto, se representará la curva para $t \geq 0$ y se realizará una ref exión respecto al eje x para obtener la parte correspondiente a $t \leq 0$.

Etapa 2. **Estudie $x(t)$, $y(t)$ como funciones de t**

Se tiene que $x(t) = t^2 + 1$ y que $y(t) = t^3 - 4t$. La coordenada x, $x(t) = t^2 + 1$, tiende a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$. Para examinar la coordenada y, se representa $y(t) = t^3 - 4t = t(t-2)(t+2)$ como función de t (*no* como función de x). Como $y(t)$ es la altura por encima del eje x, la f gura 9(A) muestra que:

$$\begin{array}{llll} y(t) < 0 & \text{para} \quad 0 < t < 2 & \Rightarrow & \text{curva por debajo del eje } x \\ y(t) > 0 & \text{para} \quad t > 2 & \Rightarrow & \text{curva por encima del eje } x \end{array}$$

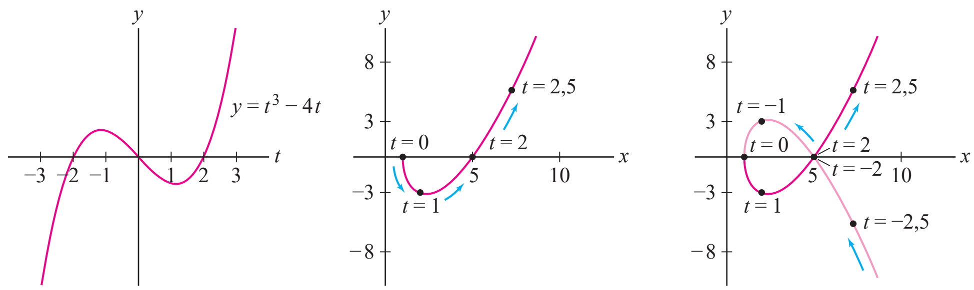
Así, la curva empieza en $c(0) = (1, 0)$, cae por debajo del eje x y vuelve al eje x en $t = 2$. Tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$. La curva es convexa porque $y(t)$ aumenta más rápidamente que $x(t)$.

Etapa 3. **Represente los puntos y únalos con un arco**

Se han representados los puntos $c(0)$, $c(1)$, $c(2)$, $c(2{,}5)$, vea la tabla 3, y unido mediante un arco para obtener la representación para $t \geq 0$ de la f gura 9(B). La representación gráf ca se complementa realizando una ref exión respecto al eje x, tal y como se ilustra en la f gura 9(C). ■

TABLA 3

t	$x = t^2 + 1$	$y = t^3 - 4t$
0	1	0
1	2	−3
2	5	0
2.5	7,25	5,625



(A) Gráfica de la coordenada $y(t) = t^3 - 4t$ (B) Gráfica para $t \geq 0$ (C) Complete la representación gráfica usando la propiedad de simetría.

FIGURA 9 La curva $c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$.

Una **cicloide** es una curva descrita por un punto sobre una circunferencia en una rueda en movimiento, tal y como se muestra en la f gura 10. Las cicloides son famosas por su "propiedad braquistócrona" (vea la nota la margen, más abajo).

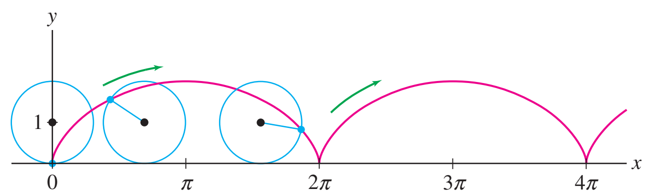


FIGURA 10 Una cicloide.

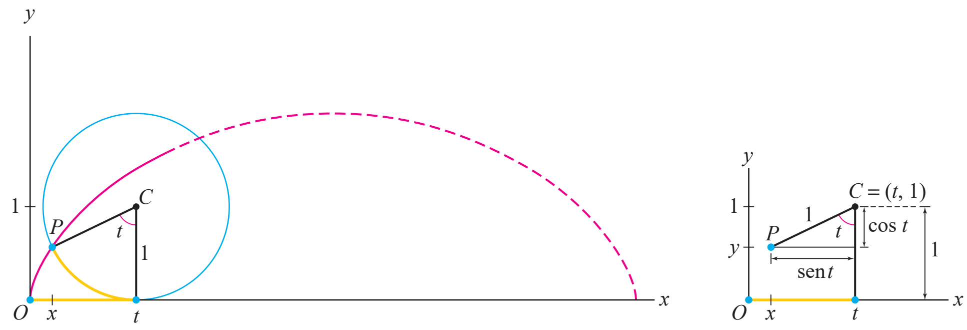
■ **EJEMPLO 8 Parametrización de una cicloide** Halle ecuaciones paramétricas para una cicloide generado por un punto P sobre la circunferencia unitaria.

Solución El punto P se encuentra en el origen en $t = 0$. En el instante t, la circunferencia se ha desplazado t radianes sobre el eje x con lo que el centro C de la circunferencia tendrá coordenadas $(t, 1)$, como se puede observar en la f gura 11(A). La f gura 11(B) muestra que para pasar de C a P hay que desplazarse $\cos t$ unidades hacia abajo y $\operatorname{sen} t$ a la izquierda, dando lugar a las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x(t) = t - \operatorname{sen} t, \qquad y(t) = 1 - \cos t} \qquad \boxed{5}$$

■

Destacados matemáticos (incluyendo a Galileo, Pascal, Newton, Leibniz, Huygens y Bernoulli) estudiaron la cicloide y descubrieron muchas de sus importantes propiedades. La curva que describe la caída de un cuerpo que debe llegar al punto inferior en el menor tiempo posible (suponiendo que no existe fricción) debe tener la forma de una cicloide invertida. Ésta es la propiedad braquistócrona, un término que deriva del griego brachistos, *"más corto," y* chronos, *"tiempo."*



(A) Posición de P en el instante t

(B) P tiene las coordenadas $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$

FIGURA 11

De manera similar a como se ha procedido en el ejemplo 8, es posible demostrar que la cicloide generada por una circunferencia de radio R, tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = Rt - R \operatorname{sen} t, \qquad y = R - R \cos t} \qquad \boxed{6}$$

A continuación, se considera el problema de hallar las rectas tangentes a curvas paramétricas. La pendiente de la recta tangente es la derivada dy/dx, pero se debe utilizar la regla de la cadena para determinarla, porque y no se encuentra def nida explícitamente como función de x. Exprese $x = f(t)$, $y = g(t)$. Entonces, según la regla de la cadena en la notación de Leibniz:

$$g'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} f'(t)$$

NOTACIÓN *En esta sección, se denota $f'(t), x'(t), y'(t)$, y así sucesivamente, como la derivada respecto a t.*

Si $f'(t) \neq 0$, se puede dividir por $f'(t)$ con el resultado

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Esta operación es factible si $f(t)$ y $g(t)$ son derivables, $f'(t)$ es continua y $f'(t) \neq 0$. En tal caso, la inversa $t = f^{-1}(x)$ existe y la función compuesta $y = g(f^{-1}(x))$ es una función derivable de x.

ATENCIÓN *No debe confundir dy/dx con las derivadas dx/dt y dy/dt, que son las derivadas respecto al parámetro t. Únicamente dy/dx es la pendiente de la recta tangente.*

TEOREMA 2 Pendiente de la recta tangente Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son derivables. Suponga que $x'(t)$ es continua y que $x'(t) \neq 0$. Entonces:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}} \qquad \boxed{7}$$

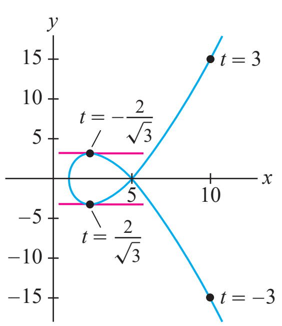


FIGURA 12 Rectas tangentes horizontales para $c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$.

■ **EJEMPLO 9** Sea $c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$. Determine:

(a) Una ecuación de la recta tangente en $t = 3$.

(b) Los puntos en que la recta tangente sea horizontal (f gura 12).

Solución Se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(t^3 - 4t)'}{(t^2 + 1)'} = \frac{3t^2 - 4}{2t}$$

(a) La pendiente en $t = 3$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{3t^2 - 4}{2t}\right|_{t=3} = \frac{3(3)^2 - 4}{2(3)} = \frac{23}{6}$$

Como $c(3) = (10, 15)$, la ecuación de la recta tangente en la forma punto-pendiente es:

$$y - 15 = \frac{23}{6}(x - 10)$$

(b) La pendiente dy/dx es cero si $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$. Se tiene que $y'(t) = 3t^2 - 4 = 0$ si $t = \pm 2/\sqrt{3}$ (y $x'(t) = 2t \neq 0$ para estos valores de t). Por tanto, la recta tangente es horizontal en los puntos:

$$c\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right), \qquad c\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$$ ■

Las curvas de Bézier se introdujeron en la década de 1960 por el ingeniero francés Pierre Bézier (1910-1999), que trabajó para la compañía de automóviles Renault. Se basan en las propiedades de los polinomios de Bernstein, introducidos 50 años antes por el matemático ruso Sergei Bernstein, para estudiar la aproximación de funciones continuas por polinomios. Hoy en día, las curvas de Bézier se utilizan en programas de gráficos estándar, Adobe Illustrator™ y Corel Draw™ y en la construcción y el almacenamiento de fuentes de escritura para un ordenador, como las fuentes TrueType™ y PostScript™.

Las curvas paramétricas se utilizan ampliamente en el campo de computación gráfica. Una clase de curvas especialmente importante es la de las **curvas de Bézier**, que se tratan brevemente a continuación para el caso cúbico. Dados cuatro "puntos de control" (figura 13):

$$P_0 = (a_0, b_0) \qquad P_1 = (a_1, b_1) \qquad P_2 = (a_2, b_2) \qquad P_3 = (a_3, b_3)$$

se define la curva de Bézier $c(t) = (x(t), y(t))$, para $0 \leq t \leq 1$, mediante:

$$x(t) = a_0(1-t)^3 + 3a_1t(1-t)^2 + 3a_2t^2(1-t) + a_3t^3 \qquad \boxed{8}$$

$$y(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1t(1-t)^2 + 3b_2t^2(1-t) + b_3t^3 \qquad \boxed{9}$$

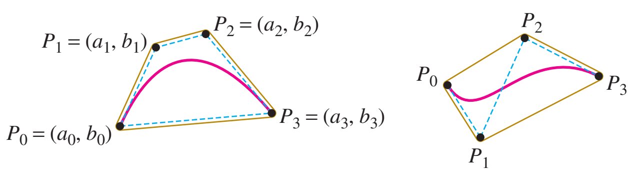
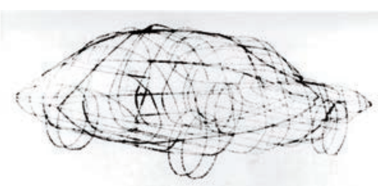


FIGURA 13 Curvas cúbicas de Bézier determinadas por cuatro puntos de control.

Observe que $c(0) = (a_0, b_0)$ y $c(1) = (a_3, b_3)$, por lo que la curva de Bézier empieza en P_0 y finaliza en P_3 (figura 13). Se puede probar también que la curva de Bézier se encuentra dentro del cuadrilátero (en azul) de vértices P_0, P_1, P_2, P_3. Sin embargo, $c(t)$ no pasa por P_1 ni por P_2. Por el contrario, estos puntos intermedios de control determinan las pendientes de las rectas tangentes en P_0 y P_3, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo (vea también los problemas 65-68).



Dibujo realizado a mano en 1964 por Pierre Bézier, para la compañía francesa de automóviles Renault.

■ **EJEMPLO 10** Pruebe que la curva de Bézier es tangente al segmento $\overline{P_0P_1}$ en P_0.

Solución La curva de Bézier pasa por P_0 en $t = 0$, por lo que se debe probar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0$ es igual a la pendiente de $\overline{P_0P_1}$. Para hallar la pendiente, se calculan las derivadas:

$$x'(t) = -3a_0(1-t)^2 + 3a_1(1 - 4t + 3t^2) + a_2(2t - 3t^2) + 3a_3t^2$$
$$y'(t) = -3b_0(1-t)^2 + 3b_1(1 - 4t + 3t^2) + b_2(2t - 3t^2) + 3b_3t^2$$

Evaluando en $t = 0$, se obtiene $x'(0) = 3(a_1 - a_0)$, $y'(0) = 3(b_1 - b_0)$, y

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{3(b_1 - b_0)}{3(a_1 - a_0)} = \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0}$$

Este valor es justamente la pendiente de la recta que pasa por $P_0 = (a_0, b_0)$ y por $P_1 = (a_1, b_1)$, tal y como se quería probar (siempre que $a_1 \neq a_0$). ■

12.1 RESUMEN

- Una *curva paramétrica* $c(t) = (f(t), g(t))$ describe el camino de una partícula que se desplaza sobre una curva, como función del parámetro t.
- Las parametrizaciones no son únicas: cada curva $\mathcal{C}$ se puede parametrizar de infinitas maneras. Además, el camino $c(t)$ puede recorrer toda o parte de $\mathcal{C}$ más de una vez.
- Pendiente de la recta tangente en $c(t)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad \text{(válida si } x'(t) \neq 0\text{)}$$

- No confunda la pendiente de la recta tangente dy/dx con las derivadas dy/dt y dx/dt, respecto a t.
- Parametrizaciones estándar:
  - Recta de pendiente $m = s/r$ que pasa por $P = (a, b)$: $c(t) = (a + rt, b + st)$.
  - Circunferencia de radio R centrada en $P = (a, b)$: $c(t) = (a + R\cos t, b + R\operatorname{sen} t)$.
  - Cicloide generada por una circunferencia de radio R: $c(t) = (R(t - \operatorname{sen} t), R(1 - \cos t))$.

12.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Describa la forma de la curva $x = 3\cos t, y = 3\operatorname{sen} t$.

2. ¿Cuál es la diferencia entre la curva $x = 4 + 3\cos t, y = 5 + 3\operatorname{sen} t$ y la del problema anterior?

3. ¿Cuál es la altura máxima de una partícula cuya trayectoria queda descrita por las ecuaciones paramétricas $x = t^9, y = 4 - t^2$?

4. ¿Se puede representar la curva paramétrica $(t, \operatorname{sen} t)$ como una gráfica $y = f(x)$? ¿Y la curva $(\operatorname{sen} t, t)$?

5. Relacione las derivadas con la descripción verbal:

(a) $\dfrac{dx}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dy}{dt}$ **(c)** $\dfrac{dy}{dx}$

(i) Pendiente de la recta tangente a la curva.

(ii) Tasa de cambio vertical respecto al tiempo.

(iii) Tasa de cambio horizontal respecto al tiempo.

Problemas

1. Halle las coordenadas en los instantes $t = 0, 2, 4$ de una partícula cuya trayectoria es $x = 1 + t^3, y = 9 - 3t^2$.

2. Halle las coordenadas en $t = 0, \frac{\pi}{4}, \pi$ de una partícula que se mueve describiendo la trayectoria $c(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen}^2 t)$.

3. Pruebe, eliminando el parámetro, que la trayectoria descrita por la bala del ejemplo 3 es una parábola.

4. Use la tabla de valores para dibujar la curva paramétrica $(x(t), y(t))$, indicando la dirección del movimiento.

t	−3	−2	−1	0	1	2	3
x	−15	0	3	0	−3	0	15
y	5	0	−3	−4	−3	0	5

5. Represente las siguientes curvas paramétricas. Incluya flechas que indiquen la dirección del movimiento.

(a) $(t, t), \quad -\infty < t < +\infty$

(b) $(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

(c) $(e^t, e^t), \quad -\infty < t < +\infty$

(d) $(t^3, t^3), \quad -1 \le t \le 1$

6. Proporcione dos parametrizaciones diferentes de la recta que pasa por $(4, 1)$ y tiene pendiente 2.

En los problemas 7-14, elimine el parámetro para conseguir expresar $y = f(x)$.

7. $x = t + 3, \quad y = 4t$

8. $x = t^{-1}, \quad y = t^{-2}$

9. $x = t, \quad y = \tan^{-1}(t^3 + e^t)$

10. $x = t^2, \quad y = t^3 + 1$

11. $x = e^{-2t}, \quad y = 6e^{4t}$

12. $x = 1 + t^{-1}, \quad y = t^2$

13. $x = \ln t, \quad y = 2 - t$

14. $x = \cos t, \quad y = \tan t$

En los problemas 15-18, represente la curva y dibuje una flecha que indique la dirección del movimiento.

15. $x = \frac{1}{2}t, \quad y = 2t^2$

16. $x = 2 + 4t, \quad y = 3 + 2t$

17. $x = \pi t, \quad y = \operatorname{sen} t$

18. $x = t^2, \quad y = t^3$

19. Relacione las parametrizaciones (a)-(d) que se encuentran a continuación con sus gráficas de la figura 14 y dibuje una flecha que indique la dirección del movimiento.

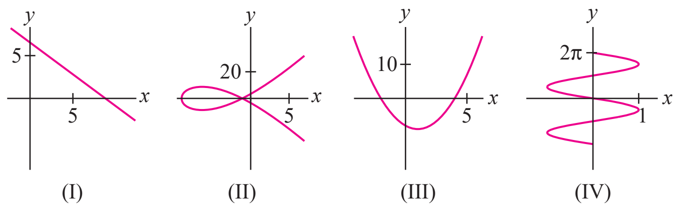


FIGURA 14

(a) $c(t) = (\operatorname{sen} t, -t)$ **(b)** $c(t) = (t^2 - 9, 8t - t^3)$

(c) $c(t) = (1 - t, t^2 - 9)$ **(d)** $c(t) = (4t + 2, 5 - 3t)$

20. Una partícula describe la trayectoria:

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 + 2t, \qquad y(t) = 20t - t^2$$

donde t se expresa en segundos y la distancia se expresa en centímetros.

(a) ¿Cuál es la altura máxima de la partícula?

(b) ¿En qué momento y a qué distancia del origen llega la partícula al suelo?

21. Halle un intervalo de valores de t para el que $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ describa la parte inferior de la circunferencia unidad.

22. Halle un intervalo de valores de t para el que $c(t) = (2t + 1, 4t - 5)$ parametrice el segmento que va de $(0, -7)$ a $(7, 7)$.

En los problemas 23-38, halle ecuaciones paramétricas para la curva dada.

23. $y = 9 - 4x$ **24.** $y = 8x^2 - 3x$

25. $4x - y^2 = 5$ **26.** $x^2 + y^2 = 49$

27. $(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 49$ **28.** $\left(\frac{y}{12}\right)^2 = 1$

29. Recta de pendiente 8 que pasa por $(-4, 9)$.

30. Recta que pasa por $(2, 5)$ y es perpendicular a $y = 3x$.

31. Recta que pasa por $(3, 1)$ y por $(-5, 4)$.

32. Recta que pasa por $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ y por $(-\frac{7}{6}, \frac{5}{3})$.

33. Segmento que une $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

34. Segmento que une $(-3, 0)$ y $(0, 4)$.

35. Circunferencia de centro $(3, 9)$ y radio 4.

36. Elipse del problema 28, con su centro trasladado a $(7, 4)$.

37. $y = x^2$, a la que se ha aplicado una traslación de manera que el mínimo se dé en $(-4, -8)$.

38. $y = \cos x$, a la que se ha aplicado una traslación de manera que el máximo se dé en $(3, 5)$.

En los problemas 39-42, halle una parametrización $c(t)$ de la curva, que cumpla la condición indicada.

39. $y = 3x - 4, \quad c(0) = (2, 2)$

40. $y = 3x - 4, \quad c(3) = (2, 2)$

41. $y = x^2, \quad c(0) = (3, 9)$

42. $x^2 + y^2 = 4, \quad c(0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

43. Describa $c(t) = (\sec t, \tan t)$ para $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ de la forma $y = f(x)$. Especif que el dominio de x.

44. Halle una parametrización de la rama derecha ($x > 0$) de la hipérbola:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

usando las funciones $\cosh t$ y $\operatorname{senh} t$. ¿Cómo puede parametrizar la rama $x < 0$?

45. En la f gura 15(A) se muestran las gráf cas de $x(t)$ y de $y(t)$ como funciones de t. ¿Cuál de las representaciones gráf cas (I)-(III) corresponde a la gráf ca de $c(t) = (x(t), y(t))$? Justif que su respuesta.

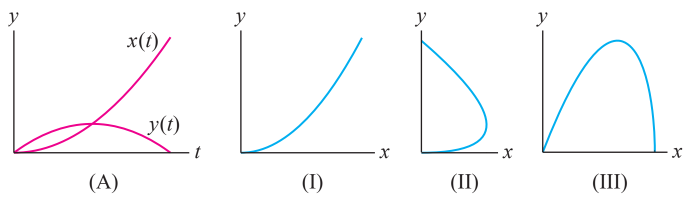


FIGURA 15

46. ¿Cuál de las representaciones gráf cas (I) o (II), corresponde a la gráf ca de $x(t)$ y cuál es la gráf ca de $y(t)$ para la curva paramétrica de la f gura 16(A)?

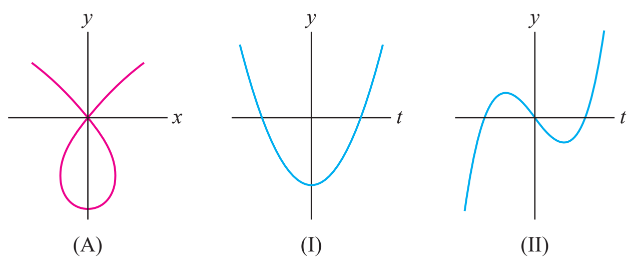


FIGURA 16

47. Dibuje $c(t) = (t^3 - 4t, t^2)$ siguiendo los pasos del ejemplo 7.

48. Dibuje $c(t) = (t^2 - 4t, 9 - t^2)$ para $-4 \le t \le 10$.

En los problemas 49-52, use la ec. (7) para hallar dy/dx en el punto que se indica.

49. $(t^3, t^2 - 1), \quad t = -4$ **50.** $(2t + 9, 7t - 9), \quad t = 1$

51. $(s^{-1} - 3s, s^3), \quad s = -1$ **52.** $(\operatorname{sen} 2\theta, \cos 3\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

En los problemas 53-56, halle una ecuación $y = f(x)$ para la curva paramétrica y calcule dy/dx de dos maneras: usando la ec. (7) y derivando $f(x)$.

53. $c(t) = (2t + 1, 1 - 9t)$

54. $c(t) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2 - t)$

55. $x = s^3, \quad y = s^6 + s^{-3}$

56. $x = \cos\theta, \quad y = \cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

57. Halle los puntos de la curva $c(t) = (3t^2 - 2t, t^3 - 6t)$ en los que la recta tangente tiene pendiente igual a 3.

58. Halle la ecuación de la recta tangente a la cicloide generada por una circunferencia de radio 4, en $t = \frac{\pi}{2}$.

En los problemas 59-62, sea $c(t) = (t^2 - 9, t^2 - 8t)$ (vea la f gura 17).

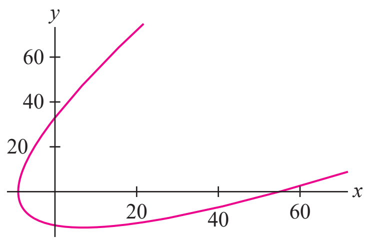


FIGURA 17 Representación gráf ca de $c(t) = (t^2 - 9, t^2 - 8t)$.

59. Dibuje una f echa que indique la dirección del movimiento y determine el intervalo de valores de t que corresponden a la porción de la curva que se encuentra en cada uno de los cuatro cuadrantes.

60. Halle la ecuación de la recta tangente en $t = 4$.

61. Halle los puntos en que la pendiente de la recta tangente sea igual a $\frac{1}{2}$.

62. Halle los puntos en que la recta tangente es horizontal y aquellos en que la recta tangente es vertical.

63. Sean A y B los puntos en los que la semirrecta de ángulo θ corta las dos circunferencias concéntricas de radios $r < R$ y centradas en el origen (f gura 18). Sea P el punto de la intersección entre la recta horizontal que pasa por A y la recta vertical que pasa por B. Exprese las coordenadas de P como función de θ y describa la curva trazada por P para $0 \le \theta \le 2\pi$.

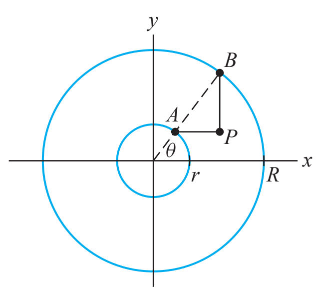


FIGURA 18

64. Una escalera de 10 pies se desliza por una pared cuando se desplaza su extremo inferior B, alejándolo de la pared (f gura 19). Usando el ángulo θ como parámetro, encuentre las ecuaciones paramétricas del camino seguida por (a) la parte superior de la escalera de A, (b) la parte inferior de la escalera de B y (c) el punto P que se encuentra a 4 pies de la parte superior de la escalera. Pruebe que P describe una elipse.

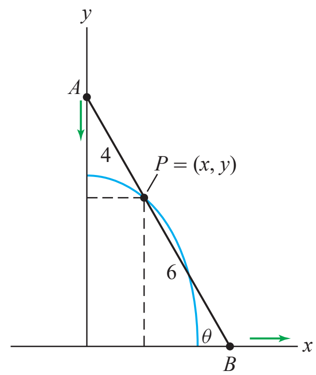


FIGURA 19

En los problemas 65-68, se hace referencia a la curva de Bézier def nida por las ecs. (8) y (9).

65. Pruebe que la curva de Bézier de puntos de control:

$$P_0 = (1, 4), \quad P_1 = (3, 12), \quad P_2 = (6, 15), \quad P_3 = (7, 4)$$

tiene parametrización

$$c(t) = (1 + 6t + 3t^2 - 3t^3, 4 + 24t - 15t^2 - 9t^3)$$

Compruebe que la pendiente en $t = 0$ es igual a la pendiente del segmento $\overline{P_0P_1}$.

66. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva de Bézier del problema 65 en $t = \frac{1}{3}$.

67. Encuentre y represente la curva de Bézier $c(t)$ que pasa por los puntos de control:

$$P_0 = (3, 2) \quad P_1 = (0, 2) \quad P_2 = (5, 4) \quad P_3 = (2, 4)$$

68. Pruebe que una curva cúbica de Bézier es tangente al segmento $\overline{P_2P_3}$ en P_3.

69. Una bala disparada desde una pistola sigue la trayectoria:

$$x = at, \qquad y = bt - 16t^2 \quad (a, b > 0)$$

Pruebe que la bala sale del arma con un ángulo $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ y que llega al suelo a una distancia $ab/16$ del origen.

70. SAC Represente gráf camente $c(t) = (t^3 - 4t, t^4 - 12t^2 + 48)$ para $-3 \le t \le 3$. Halle los puntos en que la recta tangente es horizontal o vertical.

71. SAC Represente gráf camente el astroide $x = \cos^3\theta, y = \operatorname{sen}^3\theta$ y halle la ecuación de la recta tangente en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

72. Halle la ecuación de la recta tangente en $t = \frac{\pi}{4}$ a la cicloide generada por la circunferencia unidad con ecuación paramétrica (5).

73. Halle los puntos sobre la cicloide de ecuación paramétrica (5) en que la recta tangente sea horizontal.

74. Propiedad de la cicloide Demuestre que la recta tangente en un punto P de la cicloide siempre pasa por el punto superior de una circunferencia rodante, tal y como se muestra en la f gura 20. Suponga que el radio de la circunferencia generadora de la cicloide es 1.

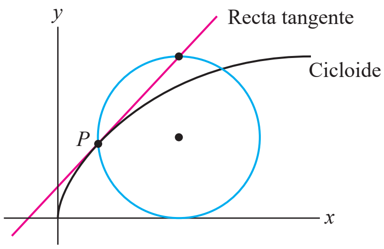


FIGURA 20

75. Una *cicloide acortada* (f gura 21) es la curva que se genera por un punto a distancia h del centro de una circunferencia de radio R que rueda a lo largo del eje x, siendo $h < R$. Pruebe que esta curva admite la parametrización $x = Rt - h\,\mathrm{sen}\,t$, $y = R - h\cos t$.

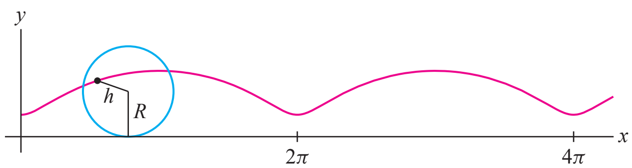


FIGURA 21 Cicloide acortada.

76. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para examinar qué pasa si $h > R$ en las ecuaciones paramétricas del problema 75. Describa el resultado obtenido.

77. Pruebe que la recta de pendiente t que pasa por $(-1, 0)$ corta la circunferencia unidad en el punto de coordenadas:

$$x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{2t}{t^2 + 1} \qquad \boxed{10}$$

Deduzca que estas ecuaciones son una parametrización de la circunferencia unidad, excluyendo el punto $(-1, 0)$ (f gura 22). Demuestre además que $t = y/(x + 1)$.

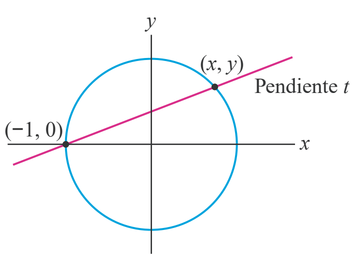


FIGURA 22 Circunferencia unidad.

78. El **folium de Descartes** es la curva de ecuación:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

donde $a \neq 0$ es una constante (f gura 23).

(a) Pruebe que la recta $y = tx$ corta el folium en el origen y en otro punto P, para todo $t \neq -1, 0$. Exprese las coordenadas de P en términos de t para obtener una parametrización del folium. Indique la dirección de la parametrización en la gráf ca.

(b) Describa el intervalo de valores de t mediante los que se parametriza las partes de la curva que se encuentran en los cuadrantes I, II y IV. Observe que $t = -1$ es un punto de discontinuidad de la parametrización.

(c) Calcule dy/dx como función de t y encuentre los puntos en que la recta tangente es horizontal y los puntos en que es vertical.

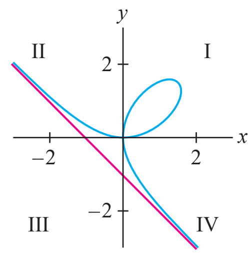


FIGURA 23 Folium $x^3 + y^3 = 3axy$.

79. Use los resultados del problema 78 para probar que la asíntota del folium es la recta $x + y = -a$. *Indicación:* pruebe que $\lim_{t \to -1} (x + y) = -a$.

80. Halle una parametrización de $x^{2n+1} + y^{2n+1} = ax^n y^n$, donde a y n son constantes.

81. Derivada segunda para una curva parametrizada Dada una curva parametrizada $c(t) = (x(t), y(t))$, pruebe que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}$$

Use este resultado para demostrar la fórmula:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}} \qquad \boxed{11}$$

82. La derivada segunda de $y = x^2$ es $dy^2/d^2x = 2$. Compruebe que la ec. (11) aplicada a $c(t) = (t, t^2)$ da como resultado $dy^2/d^2x = 2$. De hecho, se puede utilizar cualquier parametrización. Compruebe que $c(t) = (t^3, t^6)$ y $c(t) = (\tan t, \tan^2 t)$ también dan como resultado $dy^2/d^2x = 2$.

En los problemas 83-86, use la ec. (11) para hallar d^2y/dx^2.

83. $x = t^3 + t^2, \quad y = 7t^2 - 4, \quad t = 2$

84. $x = s^{-1} + s, \quad y = 4 - s^{-2}, \quad s = 1$

85. $x = 8t + 9, \quad y = 1 - 4t, \quad t = -3$

86. $x = \cos\theta, \quad y = \mathrm{sen}\,\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

87. Use la ec. (11) para hallar los intervalos de t en que $c(t) = (t^2, t^3 - 4t)$ es convexa.

88. Use la ec. (11)para hallar los intervalos de t en que $c(t) = (t^2, t^4 - 4t)$ es convexa.

89. Área por debajo de una curva parametrizada Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $y(t) > 0$ y $x'(t) > 0$ (f gura 24). Pruebe que el área A por debajo de $c(t)$ para $t_0 \le t \le t_1$ es:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt \qquad \boxed{12}$$

Indicación: como es estrictamente creciente, la función $x(t)$ admite inversa $t = g(x)$ y $c(t)$ es la gráf ca de $y = y(g(x))$. Aplique la fórmula del cambio de variable a $A = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} y(g(x))\,dx$.

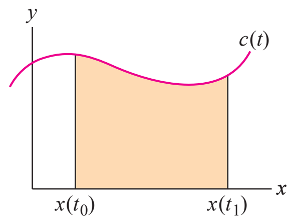


FIGURA 24

90. Calcule el área por debajo de $y = x^2$ en $[0, 1]$ utilizando la ec. (12) y con las parametrizaciones (t^3, t^6) y (t^2, t^4).

91. ¿Qué dice la ec. (12) para $c(t) = (t, f(t))$?

92. Dibuje la gráf ca de $c(t) = (\ln t, 2 - t)$ para $1 \le t \le 2$ y calcule el área por debajo de la gráf ca aplicando la ec. (12).

93. Galileo intentó, sin éxito, hallar el área por debajo de una cicloide. Sobre el 1630, Gilles de Roberval demostró que el área por debajo de un arco de la cicloide $c(t) = (Rt - R\,\text{sen}\,t, R - R\cos t)$ generado por una circunferencia de radio R es igual al triple del área del círculo (f gura 25). Compruebe el resultado de Roberval usando la ec. (12).

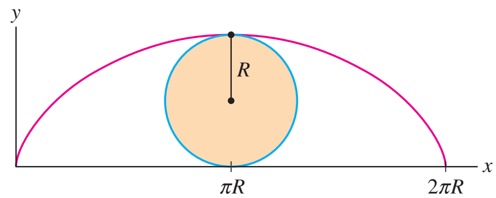
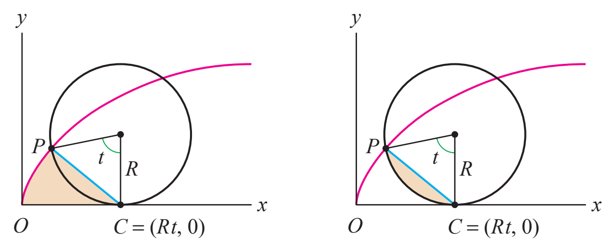


FIGURA 25 El área de un arco de la cicloide es igual al triple del área del círculo correspondiente a la circunferencia que lo genera.

Problemas avanzados

94. Demuestre la siguiente generalización del problema 93: para todo $t > 0$, el área del sector de la cicloide OPC es igual al triple del área del segmento circular limitado por la cuerda PC de la f gura 26.



(A) Sector de la cicloide OPC

(B) Segmento circular limitado por la cuerda PC

FIGURA 26

95. Obtenga la fórmula para la pendiente de la recta tangente a una curva paramétrica $c(t) = (x(t), y(t))$ mediante un método diferente al que se ha considerado en este libro. Suponga que $x'(t_0)$ e $y'(t_0)$ existen y que $x'(t_0) \neq 0$. Pruebe que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

A continuación, explique por qué este límite es igual a la pendiente dy/dx. Dibuje una f gura que muestre que la razón en el límite es la pendiente de una recta secante.

96. Compruebe que la curva **tractriz** ($\ell > 0$):

$$c(t) = \left(t - \ell \tanh\frac{t}{\ell}, \ell\,\text{sech}\,\frac{t}{\ell}\right)$$

tiene la siguiente propiedad: para todo t, el segmento que va de $c(t)$ a $(t, 0)$ es tangente a la curva y su longitud es ℓ (f gura 27).

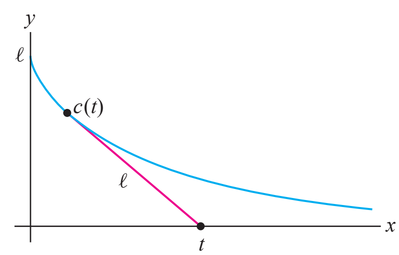


FIGURA 27 Tractriz $c(t) = \left(t - \ell \tanh\dfrac{t}{\ell}, \ell\,\text{sech}\,\dfrac{t}{\ell}\right)$.

97. En el problema 54 de la sección 9.1, se describió la tractriz mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{\ell^2 - y^2}}$$

Pruebe que la curva $c(t)$ identif cada como la tractriz en el problema 96 cumple esta ecuación diferencial. Observe que la derivada a la izquierda se considera respecto a x, no respecto a t.

En los problemas 98 y 99, se hace referencia a la f gura 28.

98. En la parametrización $c(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$ de una elipse, t *no* es un parámetro angular salvo si $a = b$ (es decir, cuando la elipse es una circunferencia). Sin embargo, se puede interpretar t en términos de un área: pruebe que si $c(t) = (x, y)$, entonces $t = (2/ab)A$, donde A es el área de la región sombreada de la f gura 28. *Indicación:* Use ec. (12).

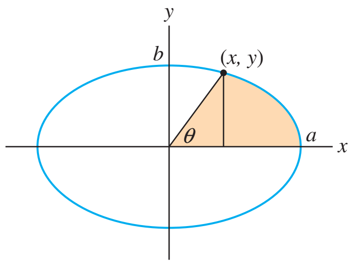


FIGURA 28 El parámetro θ para la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

99. Pruebe que la parametrización de la elipse por el ángulo θ es:

$$x = \frac{ab\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

$$y = \frac{ab\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

12.2 La longitud de arco y la velocidad

A continuación, se va a obtener una fórmula para la longitud de arco de una curva que se encuentre expresada en forma paramétrica. Recuerde que en la sección 9.1, se definió la longitud de arco como el límite de las longitudes de las aproximaciones poligonales (figura 1).

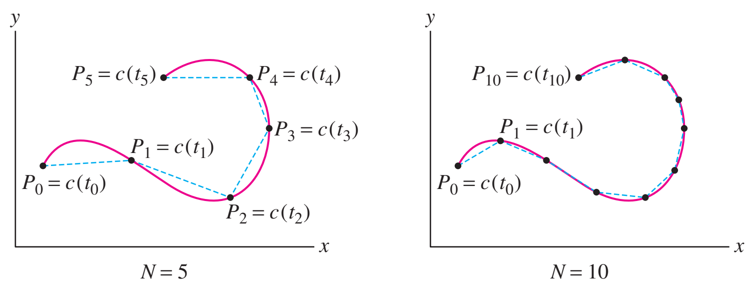


FIGURA 1 Aproximaciones poligonales para $N = 5$ y $N = 10$.

Dada una parametrización $c(t) = (x(t), y(t))$ para $a \le t \le b$, se construye una aproximación poligonal L formada por N segmentos uniendo los puntos:

$$P_0 = c(t_0), \quad P_1 = c(t_1), \quad \ldots, \quad P_N = c(t_N)$$

correspondientes a la elección de valores $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$. Según la fórmula de la distancia:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2} \qquad \boxed{1}$$

Suponga ahora que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son derivables. Según el teorema del valor medio de Lagrange, existen t_i^* y t_i^{**} en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ tales que:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_i^*)\Delta t_i, \qquad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(t_i^{**})\Delta t_i$$

donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por tanto:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{x'(t_i^*)^2\Delta t_i^2 + y'(t_i^{**})^2\Delta t_i^2} = \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\,\Delta t_i$$

La longitud de la aproximación poligonal L es igual a la suma:

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\,\Delta t_i \qquad \boxed{2}$$

Se trata *prácticamente* de una suma de Riemann para la función $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Sería una suma de Riemann real, si los valores intermedios t_i^* y t_i^{**} fuesen iguales. Aunque no son necesariamente el mismo, se puede probar (se va a considerar como cierto) que si $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas, entonces la suma de la ec. (2) continúa siendo una aproximación de la integral cuando las amplitudes Δt_i tienden a 0. Por tanto:

$$s = \lim \sum_{i=1}^{N} P_{i-1}P_i = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Debido a la raíz cuadrada, la integral de la longitud de arco no se puede evaluar explícitamente, excepto en casos especiales, pero sí que se puede aproximar numéricamente.

TEOREMA 1 Longitud de arco Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $x'(t)$ e $y'(t)$ existen y son continuas. Entonces, la longitud de arco s de $c(t)$ para $a \le t \le b$ es igual a:

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \qquad \boxed{3}$$

La parametrización de la gráf ca de una función $y = f(x)$ es $c(t) = (t, f(t))$. En este caso:

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

y la ec. (3) se reduce a la fórmula de la longitud de arco que se obtuvo en la sección 9.1.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la integral de la longitud de arco se puede evaluar de forma explícita únicamente en casos especiales. La circunferencia y la cicloide son dos de estos casos.

EJEMPLO 1 Use la ec. 3 para calcular la longitud de arco de una circunferencia de radio R.

Solución Si se considera la parametrización $x = R\cos\theta$, $y = R\,\mathrm{sen}\,\theta$, se tiene:

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = (-R\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 = R^2(\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta) = R^2$$

Se obtiene el resultado esperado:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} R\, d\theta = 2\pi R$$

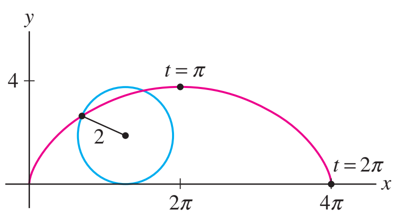


FIGURA 2 Un arco de la cicloide generada por una circunferencia de radio 2.

EJEMPLO 2 Longitud de la cicloide Calcule la longitud s de un arco de la cicloide generada por una circunferencia de radio $R = 2$ (f gura 2).

Solución Considere la parametrización de la cicloide dada por la ec. (6) de la sección 1:

$$x(t) = 2(t - \mathrm{sen}\,t), \qquad y(t) = 2(1 - \cos t)$$
$$x'(t) = 2(1 - \cos t), \qquad y'(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 2^2(1 - \cos t)^2 + 2^2\,\mathrm{sen}^2\,t \\ &= 4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\,t \\ &= 8 - 8\cos t \\ &= 16\,\mathrm{sen}^2\,\frac{t}{2} \qquad \text{(Use la identidad que se recuerda al margen.)} \end{aligned}$$

RECORDATORIO

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \mathrm{sen}^2\,\frac{t}{2}$$

Cuando t varía de 0 a 2π, se genera un arco de la cicloide y, por tanto:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\, dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8(-1) + 8 = 16$$

Observe que no es necesario el valor absoluto cuando se considera la raíz cuadrada de $16\,\mathrm{sen}^2\,\frac{t}{2}$, pues $\mathrm{sen}\,\frac{t}{2} \ge 0$ para $0 \le t \le 2\pi$.

En el capítulo 13, se tratará no sólo la celeridad sino la velocidad *de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva. La velocidad es la "celeridad junto con la dirección" y se representa mediante un vector.*

Considere ahora una partícula que se mueve a lo largo de $c(t)$. La distancia recorrida por la partícula a lo largo del intervalo $[t_0, t]$ viene dada por la integral de la longitud de arco:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$$

Por otra parte, la celeridad se define como la tasa de cambio de la distancia recorrida respecto al tiempo; así, por el teorema fundamental del cálculo:

$$\text{Celeridad} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

TEOREMA 2 Celeridad a lo largo de una curva parametrizada La celeridad de $c(t) = (x(t), y(t))$ es:

$$\boxed{\text{Celeridad} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

El siguiente ejemplo ilustra la diferencia entre distancia recorrida a lo largo de una curva y **desplazamiento** (también denominado variación neta de la posición). El desplazamiento a lo largo de una curva es la distancia entre el punto inicial $c(t_0)$ y el final $c(t_1)$. La distancia recorrida es mayor, salvo si la partícula se desplaza en linea recta (figura 3).

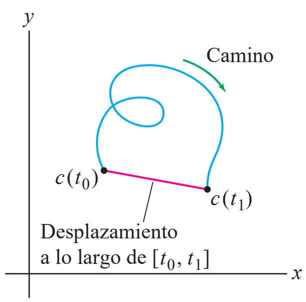


FIGURA 3 La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria es mayor o igual que el desplazamiento.

EJEMPLO 3 Una partícula se desplaza a lo largo de $c(t) = (2t, 1 + t^{3/2})$. Halle:

(a) La celeridad de la partícula en $t = 1$ (suponga unidades de metros y de minutos).

(b) La distancia recorrida s y el desplazamiento d en el intervalo $0 \le t \le 4$.

Solución Se tiene que:

$$x'(t) = 2 \qquad y'(t) = \frac{3}{2}t^{1/2}$$

La celeridad en el instante t es:

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}t} \quad \text{m/min}$$

(a) La celeridad de la partícula en $t = 1$ es $s'(1) = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2{,}5$ m/min.

(b) La distancia recorrida en los primeros 4 minutos es:

$$s = \int_0^4 \sqrt{4 + \frac{9}{4}t}\, dt = \frac{8}{27}\left(4 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(13^{3/2} - 8) \approx 11{,}52 \text{ m}$$

El desplazamiento d es la distancia desde el punto inicial $c(0) = (0, 1)$ al final $c(4) = (8, 1 + 4^{3/2}) = (8, 9)$ (vea la figura 4):

$$d = \sqrt{(8-0)^2 + (9-1)^2} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31 \text{ m}$$ ■

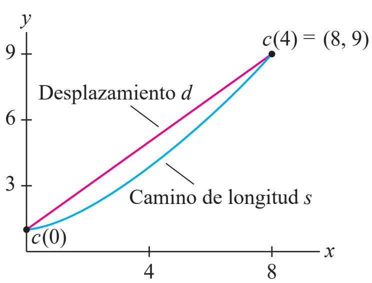


FIGURA 4 El camino $c(t) = (2t, 1 + t^{3/2})$.

En física, se suele describir el camino de una partícula que se mueve a celeridad constante sobre una circunferencia de radio R en términos de una constante ω (letra griega omega minúscula) de la siguiente manera:

$$c(t) = (R\cos\omega t, R\,\text{sen}\,\omega t)$$

La constante ω, denominada *velocidad angular*, es la tasa de cambio respecto al tiempo del ángulo θ de la partícula (figura 5).

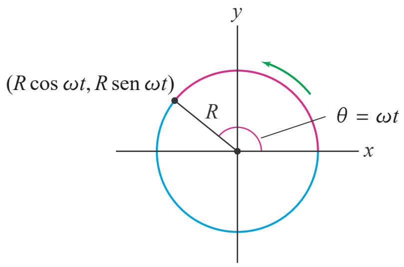


FIGURA 5 Una partícula que se mueve sobre una circunferencia de radio R con velocidad angular ω tiene celeridad $|\omega R|$.

■ **EJEMPLO 4 Velocidad angular** Calcule la velocidad de la trayectoria circular de radio R y velocidad angular ω. ¿Cuál es la celeridad si $R = 3$ m y $\omega = 4$ rad/s?

Solución Se tiene que $x = R\cos\omega t$ e $y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$, y además:

$$x'(t) = -\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad y'(t) = \omega R\cos\omega t$$

La celeridad de la partícula es:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2 + (\omega R\cos\omega t)^2} =$$
$$= \sqrt{\omega^2 R^2(\mathrm{sen}^2\,\omega t + \cos^2\omega t)} = |\omega|R$$

Por tanto, la celeridad es constante y de valor $|\omega|R$. Si $R = 3$ m y $\omega = 4$ rad/s, entonces la celeridad es $|\omega|R = 3(4) = 12$ m/s. ■

Considere la superf cie obtenida por rotación de una curva paramétrica $c(t) = (x(t), y(t))$ respecto al eje x. El área de la superf cie viene dada por la ec. (4) del siguiente teorema. Se puede obtener prácticamente de la misma manera en que se obtuvo la fórmula para la superf cie de revolución de una gráf ca $y = f(x)$ en la sección 9.1. En este teorema, se supone que $y(t) \geq 0$ por lo que la curva $c(t)$ se encuentra por encima del eje x y $x(t)$ es estrictamente creciente.

TEOREMA 3 Área de una superficie Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $y(t) \geq 0$, $x(t)$ es estrictamente creciente y tanto $x'(t)$ como $y'(t)$ son continuas. Entonces, el área de la superf cie que se obtiene por rotación de $c(t)$ respecto al eje x para $a \leq t \leq b$ es:

$$S = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \qquad \boxed{4}$$

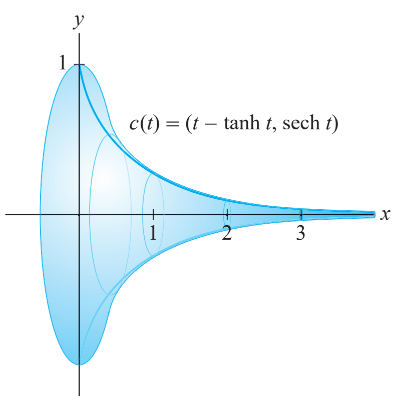


FIGURA 6 Superf cie generada por revolución de la tractriz respecto al eje x.

■ **EJEMPLO 5** Calcule el área de la superf cie obtenida por rotación de la *tractriz* $c(t) = (t - \tanh t, \mathrm{sech}\, t)$ respecto al eje x para $0 \leq t < +\infty$.

Solución Observe que la superf cie se extiende hacia la derecha de forma inf nita (f gura 6). Se tiene que:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(t - \tanh t) = 1 - \mathrm{sech}^2\, t \qquad y'(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{sech}\, t = -\mathrm{sech}\, t\tanh t$$

Aplicando las identidades $1 - \mathrm{sech}^2\, t = \tanh^2 t$ y $\mathrm{sech}^2\, t = 1 - \tanh^2 t$, se obtiene que:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (1 - \mathrm{sech}^2\, t)^2 + (-\mathrm{sech}\, t\tanh t)^2 =$$
$$= (\tanh^2 t)^2 + (1 - \tanh^2 t)\tanh^2 t = \tanh^2 t$$

El área de la superf cie viene dada por una integral impropia, que se evalúa usando la fórmula de integrales que se menciona al margen:

$$S = 2\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{sech}\, t\sqrt{\tanh^2 t}\,dt = 2\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{sech}\, t\tanh t\,dt = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \mathrm{sech}\, t\tanh t\,dt$$
$$= 2\pi\lim_{R\to+\infty}(-\mathrm{sech}\, t)\Big|_0^R = 2\pi\lim_{R\to+\infty}(\mathrm{sech}\, 0 - \mathrm{sech}\, R) = 2\pi\,\mathrm{sech}\, 0 = 2\pi$$

Aquí se utiliza que $\mathrm{sech}\, R = \dfrac{1}{e^R + e^{-R}}$ tiende a cero (pues $e^R \to +\infty$ mientras que $e^{-R} \to 0$). ■

RECORDATORIO

$$\mathrm{sech}\, t = \frac{1}{\cosh t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$
$$1 - \mathrm{sech}^2\, t = \tanh^2 t$$
$$\frac{d}{dt}\tanh t = \mathrm{sech}^2\, t$$
$$\frac{d}{dt}\mathrm{sech}\, t = -\mathrm{sech}\, t\tanh t$$
$$\int \mathrm{sech}\, t\tanh t\,dt = -\mathrm{sech}\, t + C$$

12.2 RESUMEN

- *Longitud de arco* de $c(t) = (x(t), y(t))$ para $a \le t \le b$:

$$s = \text{longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

- La longitud de arco es la distancia a lo largo del camino $c(t)$. El *desplazamiento* es la distancia del punto inicial $c(a)$ al punto f nal $c(b)$.
- *Integral de la longitud de arco:*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$$

- Celeridad en el instante t:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

- Área de la superf cie obtenida por rotación de $c(t) = (x(t), y(t))$ respecto al eje x para $a \le t \le b$:

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

12.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la def nición de longitud de arco?

2. ¿Cuál es la interpretación de $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ para una partícula de trayectoria $(x(t), y(t))$?

3. Una partícula recorre un camino de $(0, 0)$ a $(3, 4)$. ¿A qué es igual el desplazamiento? ¿Se puede determinar la distancia recorrida en base a la información proporcionada?

4. Una partícula recorre la parábola $y = x^2$ a velocidad constante de 3 cm/s. ¿Cuál es la distancia recorrida durante el primer minuto? *Indicación:* no es necesario realizar ningún cálculo.

Problemas

En los problemas 1-10, use la ec. (3) para hallar la longitud del camino en el intervalo dado.

1. $(3t + 1, 9 - 4t), \quad 0 \le t \le 2$

2. $(1 + 2t, 2 + 4t), \quad 1 \le t \le 4$

3. $(2t^2, 3t^2 - 1), \quad 0 \le t \le 4$

4. $(3t, 4t^{3/2}), \quad 0 \le t \le 1$

5. $(3t^2, 4t^3), \quad 1 \le t \le 4$

6. $(t^3 + 1, t^2 - 3), \quad 0 \le t \le 1$

7. $(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t), \quad 0 \le t \le \pi$

8. $(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta, \cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta), \quad 0 \le \theta \le 2$

En los problemas 9 y 10, use, además, la identidad:

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$$

9. $(2\cos t - \cos 2t, 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

10. $(5(\theta - \operatorname{sen}\theta), 5(1 - \cos\theta)), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

11. Pruebe que la longitud de un arco de una cicloide generada por una circunferencia de radio R es igual a $8R$.

12. Halle la longitud de la espiral $c(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ con tres decimales de precisión (f gura 7). *Indicación:* use la fórmula:

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$$

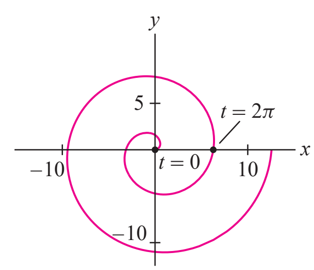


FIGURA 7 La espiral $c(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t)$.

13. Halle la longitud de la tractriz (vea la f gura 6):

$$c(t) = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t)), \qquad 0 \le t \le A$$

14. SAC Halle una aproximación numérica de la longitud de arco de $c(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} 3t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ (f gura 8).

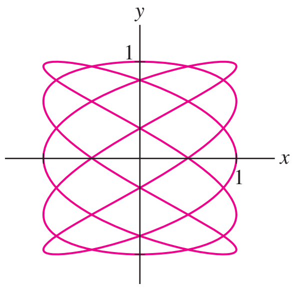


FIGURA 8

En los problemas 15-18, determine la celeridad s en el instante t (suponga unidades de metros y de segundos).

15. $(t^3, t^2), \quad t = 2$

16. $(3 \operatorname{sen} 5t, 8 \cos 5t), \quad t = \frac{\pi}{4}$

17. $(5t + 1, 4t - 3), \quad t = 9$

18. $(\ln(t^2 + 1), t^3), \quad t = 1$

19. Halle la celeridad mínima de una partícula cuya trayectoria viene dada por $c(t) = (t^3 - 4t, t^2 + 1)$ para $t \ge 0$. *Indicación:* es más fácil hallar el mínimo del cuadrado de la celeridad.

20. Halle la celeridad mínima de una partícula cuya trayectoria viene dada por $c(t) = (t^3, t^{-2})$ para $t \ge 0{,}5$.

21. Halle la celeridad de la cicloide $c(t) = (4t - 4 \operatorname{sen} t, 4 - 4 \cos t)$ en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.

22. Calcule la integral de la longitud de arco $s(t)$ para la *espiral logarítmica* $c(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$.

SAC *En los problemas 23-26, represente la curva y utilice la regla basada en el punto medio, con N = 10, 20, 30 y 50, para aproximar su longitud.*

23. $c(t) = (\cos t, e^{\operatorname{sen} t}) \quad$ para $0 \le t \le 2\pi$

24. $c(t) = (t - \operatorname{sen} 2t, 1 - \cos 2t) \quad$ para $0 \le t \le 2\pi$

25. La elipse $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

26. $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen} 3t \quad$ para $0 \le t \le 2\pi$

27. Si desenrolla un hilo de una bobina circular estacionaria, manteniendo el hilo tirante en todo momento, entonces el extremo describe una curva $\mathcal{C}$ denominada **involuta** de la circunferencia (f gura 9). Observe que la longitud de $\overline{PQ}$ es $R\theta$. Muestre que la curva $\mathcal{C}$ se puede parametrizar por:

$$c(\theta) = (R(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta), R(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta))$$

A continuación, halle la longitud de la involuta para $0 \le \theta \le 2\pi$.

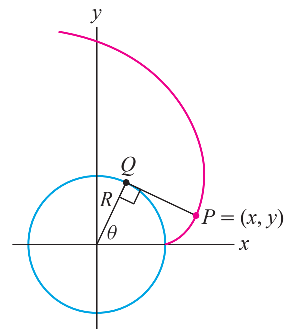


FIGURA 9 Involuta de una circunferencia.

28. Sea $a > b$ y considere:

$$k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Use una representación paramétrica para probar que la longitud de la elipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ es $L = 4aG(\frac{\pi}{2}, k)$, donde:

$$G(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

es la *integral elíptica de segunda especie*.

En los problemas 29-32, use la ec. (4) para calcular el área de la superf cie dada.

29. El cono generado por revolución de $c(t) = (t, mt)$ respecto al eje x para $0 \le t \le A$.

30. Una esfera de radio R.

31. La superf cie generada por revolución de un arco de la cicloide $c(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ respecto al eje x.

32. La superf cie generada por revolución del astroide

$c(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ respecto al eje x para $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Problemas avanzados

33. SAC Sea $b(t)$ la "curva mariposa":

$$x(t) = \operatorname{sen} t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{12}\right)^5\right)$$

$$y(t) = \cos t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{12}\right)^5\right)$$

(a) Use un programa informático de cálculo simbólico para representar gráf camente $b(t)$ y la celeridad $s'(t)$ para $0 \le t \le 12\pi$.

(b) Aproxime la longitud de $b(t)$ para $0 \le t \le 10\pi$.

34. SAC Sea $a \ge b > 0$ y sea $k = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a - b}$. Pruebe que la **trocoide**

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \qquad y = a - b\cos t, \qquad 0 \le t \le T$$

tiene una longitud de $2(a - b)G(\frac{T}{2}, k)$ con $G(\theta, k)$ como en el problema 28.

35. Un satélite que está en órbita a distancia R del centro de la Tierra describe una trayectoria circular dada por $x = R\cos\omega t$, $y = R \operatorname{sen}\omega t$.

(a) Pruebe que el periodo T (el tiempo necesario para una revolución) es $T = 2\pi/\omega$.

(b) Según las leyes del movimiento y de la gravedad de Newton:

$$x''(t) = -Gm_T \frac{x}{R^3} \qquad y''(t) = -Gm_T \frac{y}{R^3}$$

donde G es la constante de gravitación universal y m_e es la masa de la Tierra. Demuestre que $R^3/T^2 = Gm_T/4\pi^2$. Por tanto, R^3/T^2 es igual para todas las órbitas (un caso particular de la tercera ley de Kepler).

36. La aceleración debida a la gravedad sobre la superf cie de la Tierra es:

$$g = \frac{Gm_T}{R_T^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2, \quad \text{donde } R_T = 6378\ \text{km}$$

Use el problema 35(b) para probar que un satélite en órbita sobre la superf cie de la Tierra tendría periodo igual a $T_T = 2\pi\sqrt{R_T/g} \approx 84{,}5$ min. A continuación, estime la distancia R_m desde la Luna al centro de la Tierra. Suponga que el periodo de la Luna (mes sideral) es $T_L \approx 27{,}43$ días.

12.3 Coordenadas polares

En coordenadas polares, se etiqueta un punto P mediante las coordenadas (r, θ), donde r es la distancia al origen O y θ es el ángulo entre $\overline{OP}$ y el eje de las x positivas (f gura 1). Por convenio, un ángulo es positivo si la correspondiente rotación es en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Se dice que r es la **coordenada radial** y que θ es la **coordenada angular**.

Las coordenadas polares son adecuadas cuando la distancia al origen o un ángulo desempeña un papel destacado. Por ejemplo, la fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre un planeta depende únicamente de la distancia r al Sol y se describe de manera apropiada mediante coordenadas polares.

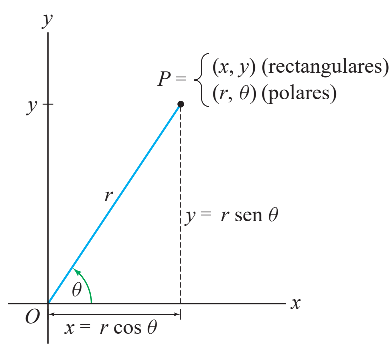


FIGURA 1

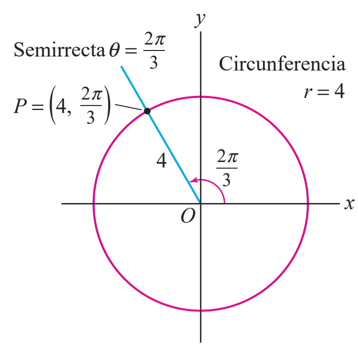


FIGURA 2

El punto P de la f gura 2 tiene coordenadas polares $(r, \theta) = (4, \frac{2\pi}{3})$. Está a distancia $r = 4$ del origen (por lo que se encuentra en la circunferencia de radio 4) y en la semirrecta de ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

La f gura 3 muestra las dos familias de **líneas de cuadrícula** en coordenadas polares:

$$\text{Circunferencia centrada en } O \quad \longleftrightarrow \quad r = \text{constante}$$
$$\text{Semirrecta de origen } O \quad \longleftrightarrow \quad \theta = \text{constante}$$

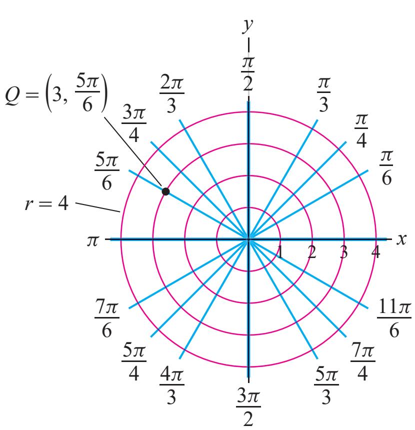


FIGURA 3 Las líneas de cuadrícula en coordenadas polares.

Todo punto del plano, excepto el origen, se encuentra en la intersección de dos líneas de cuadrícula y estas dos líneas determinan sus coordenadas polares. Por ejemplo, el punto Q de la f gura 3 se encuentra sobre la circunferencia $r = 3$ y la semirrecta $\theta = \frac{5\pi}{6}$, por lo que $Q = (3, \frac{5\pi}{6})$ en coordenadas polares.

La f gura 1 muestra que las coordenadas polares y rectangulares están relacionadas por medio de las ecuaciones $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Por otra parte, $r^2 = x^2 + y^2$, por la fórmula de la distancia, y $\tan\theta = y/x$ si $x \neq 0$. De esta manera se obtienen las fórmulas de conversión:

Polares a rectangulares	Rectangulares a polares
$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \operatorname{sen}\theta$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

EJEMPLO 1 De coordenadas polares a rectangulares Halle las coordenadas rectangulares del punto Q de la f gura 3.

Solución Las coordenadas rectangulares del punto $Q = (r, \theta) = (3, \frac{5\pi}{6})$ son:

$$x = r\cos\theta = 3\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$ ■

EJEMPLO 2 De coordenadas rectangulares a polares Halle las coordenadas polares del punto P de la f gura 4.

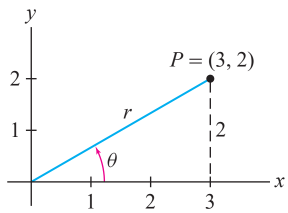


FIGURA 4 Las coordenadas polares de P cumplen $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ y $\tan\theta = \frac{2}{3}$.

Como $P = (x, y) = (3, 2)$, tendremos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

y, ya que P se encuentra en el primer cuadrante:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 0{,}588$$

las coordenadas polares de P son $(r, \theta) \approx (3{,}6, 0{,}588)$. ■

Por definición,

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

Si $r > 0$, una coordenada θ de $P = (x, y)$ es

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Antes de continuar, se deben realizar algunas observaciones:

- La coordenada angular no es única pues (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi n)$ *etiquetan al mismo punto* para cualquier entero n. Por ejemplo, la coordenada radial del punto P en la f gura 5 es $r = 2$, pero su coordenada angular podría ser cualquiera de los ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ o bien $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$.
- El origen O no tiene una coordenada angular bien def nida, por lo que se asigna al origen O las coordenadas polares $(0, \theta)$ para cualquier ángulo θ.
- Por convenio, se permiten coordenadas radiales *negativas*. Por def nición, $(-r, \theta)$ es la ref exión de (r, θ) respecto al origen (f gura 6). Con este convenio, $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto.
- Se pueden especif car coordenadas polares únicas para todo punto diferente del origen, imponiendo restricciones sobre r y sobre θ. Habitualmente se suele exigir que $r > 0$ y que $0 \le \theta < 2\pi$.

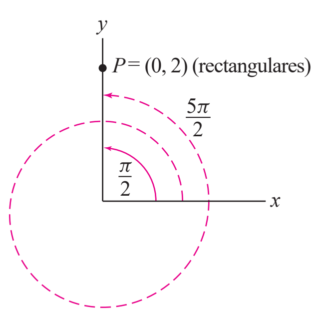


FIGURA 5 La coordenada angular de $P = (0, 2)$ es $\frac{\pi}{2}$ o cualquier ángulo $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, para n entero.

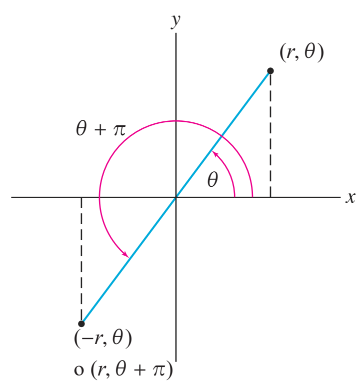


FIGURA 6 Relación entre (r, θ) y $(-r, \theta)$.

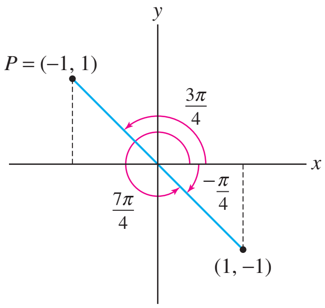


FIGURA 7

Para determinar la coordenada angular de un punto $P = (x, y)$, recuerde que hay dos ángulos entre 0 y 2π que cumplen $\tan\theta = y/x$. Debe elegir θ de manera que (r, θ) se encuentre en el cuadrante al que pertenece P y en el cuadrante opuesto (f gura 7).

■ **EJEMPLO 3 Elección correcta de θ** Halle dos representaciones polares de $P = (-1, 1)$, una con $r > 0$ y una con $r < 0$.

Solución El punto $P = (x, y) = (-1, 1)$ tiene coordenadas polares (r, θ), donde:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \tan\theta = \tan\frac{y}{x} = -1$$

Sin embargo, θ no viene dado por:

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

porque $\theta = -\frac{\pi}{4}$ y esta elección situaría a P en el cuarto cuadrante (f gura 7). Como P está en el segundo cuadrante, el ángulo correcto es:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

Si se quisiera utilizar la coordenada radial negativa $r = -\sqrt{2}$, entonces el ángulo sería $\theta = -\frac{\pi}{4}$ or $\frac{7\pi}{4}$. Por tanto:

$$P = \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{o} \qquad \left(-\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$$ ■

Una curva queda descrita en coordenadas polares mediante una ecuación que involucra r y θ, denominada **ecuación polar**. Por convenio, se permiten soluciones con $r < 0$.

Una recta que pasa por el origen O tiene como ecuación $\theta = \theta_0$, donde θ_0 es el ángulo entre la recta y el eje x (f gura 8). De hecho, los puntos en que $\theta = \theta_0$ son (r, θ_0), donde r es arbitrario (positivo, negativo o cero).

■ **EJEMPLO 4 Recta que pasa por el origen** Halle la ecuación polar de la recta que pasa por el origen y que tiene pendiente $\frac{3}{2}$ (f gura 9).

Solución Una recta de pendiente m tiene un ángulo θ_0 con el eje x, donde $m = \tan\theta_0$. En nuestra situación, $\theta_0 = \tan^{-1}\frac{3}{2} \approx 0{,}98$. La ecuación de la recta es $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ o $\theta \approx 0{,}98$. ■

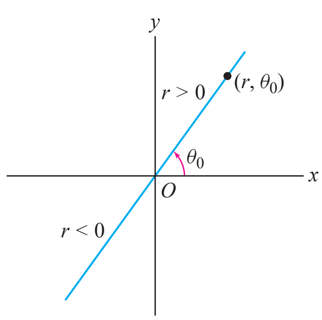


FIGURA 8 Rectas por O de ecuación polar $\theta = \theta_0$.

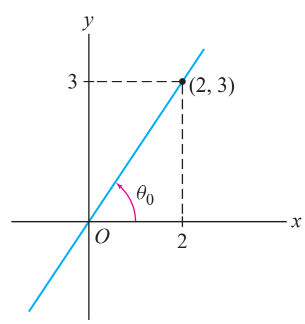


FIGURA 9 Recta de pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el origen.

Para describir rectas que no pasan por el origen, cabe observar que cualquiera de estas rectas tiene un punto P_0 que es el *más cercano* al origen. El siguiente ejemplo ilustra cómo expresar la ecuación polar de la recta en términos de P_0 (f gura 10).

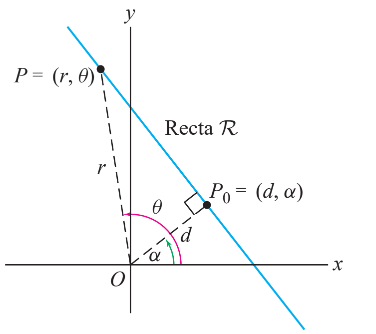


FIGURA 10 P_0 es el punto de $\mathcal{R}$ más cercano al origen.

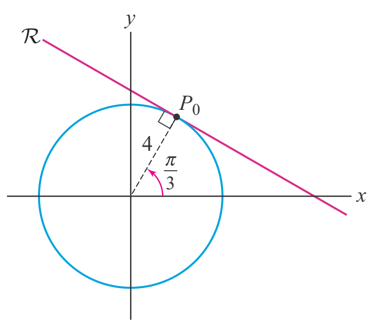


FIGURA 11 La ecuación de la recta tangente es $r = 4\sec\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$.

■ **EJEMPLO 5 Recta que no pasa por *O*** Pruebe que:

$$\boxed{r = d\sec(\theta - \alpha)} \qquad \boxed{1}$$

es la ecuación polar de la recta $\mathcal{R}$ cuyo punto más cercano al origen es $P_0 = (d, \alpha)$.

Solución El punto P_0 de obtiene trazando una recta perpendicular a $\mathcal{R}$ que pase por el origen (f gura 10) y, si $P = (r, \theta)$ es un punto cualquiera de $\mathcal{R}$ diferente de P_0, entonces $\triangle OPP_0$ es un triángulo rectángulo. Por tanto, $d/r = \cos(\theta - \alpha)$ o $r = d\sec(\theta - \alpha)$, tal y como se quería demostrar. ■

■ **EJEMPLO 6** Halle la ecuación polar de la recta $\mathcal{R}$ tangente a la circunferencia $r = 4$ en el punto de coordenadas polares $P_0 = (4, \frac{\pi}{3})$.

Solución El punto de $\mathcal{R}$ más cercano al origen es el propio P_0 (f gura 11). Por tanto, considere $(d, \alpha) = (4, \frac{\pi}{3})$ en la ec. (1) para obtener la ecuación $r = 4\sec\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$. ■

A menudo, resulta complicado imaginar la forma de la gráf ca de una ecuación polar. En algunos casos ayuda reescribir la ecuación en coordenadas rectangulares.

■ **EJEMPLO 7 Convirtiendo a coordenadas rectangulares** Identif que la curva de ecuación polar $r = 2a\cos\theta$ (a es constante).

Solución Multiplique la ecuación por r, con el resultado $r^2 = 2ar\cos\theta$. Como $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r\cos\theta$, esta ecuación resulta:

$$x^2 + y^2 = 2ax \qquad \text{o} \qquad x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

Ahora complete el cuadrado para obtener $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Se trata de la ecuación de una circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a (f gura 12). ■

Un cálculo análogo muestra que la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ de centro $(0, a)$ y radio a tiene como ecuación polar $r = 2a\,\text{sen}\,\theta$. En el siguiente ejemplo, se aplicarán argumentos involucrando simetrías. Observe que los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos respecto al eje x (f gura 13).

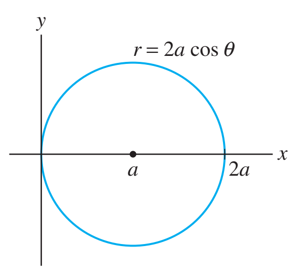


FIGURA 12

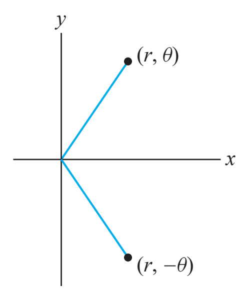


FIGURA 13 Los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos respecto al eje x .

■ **EJEMPLO 8 Simetría respecto al eje x** Dibuje el *caracol de Pascal*, curva dada por $r = 2\cos\theta - 1$.

Solución Como $\cos\theta$ es periódico, basta representar puntos para $-\pi \le \theta \le \pi$.

Etapa 1. **Represente puntos**

Para empezar, represente los puntos *A*-*G* en una cuadrícula y únalos mediante una curva suave (f gura 14).

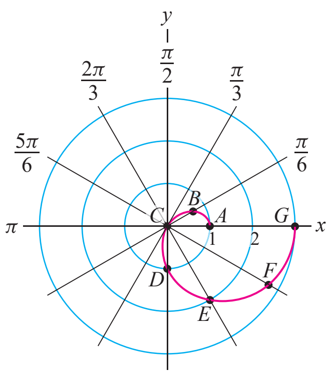


FIGURA 14 Representación de $r = 2\cos\theta - 1$ usando una cuadrícula.

	A	B	C	D	E	F	G
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = 2\cos\theta - 1$	1	0,73	0	-1	-2	$-2{,}73$	-3

***Etapa 2.* Analice r como una función de θ**

Para entender mejor el problema, suele ayudar representar r como función de θ en coordenadas rectangulares. La f gura 15(A) muestra que:

Cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{3}$, $\quad r$ varía de 1 a 0.

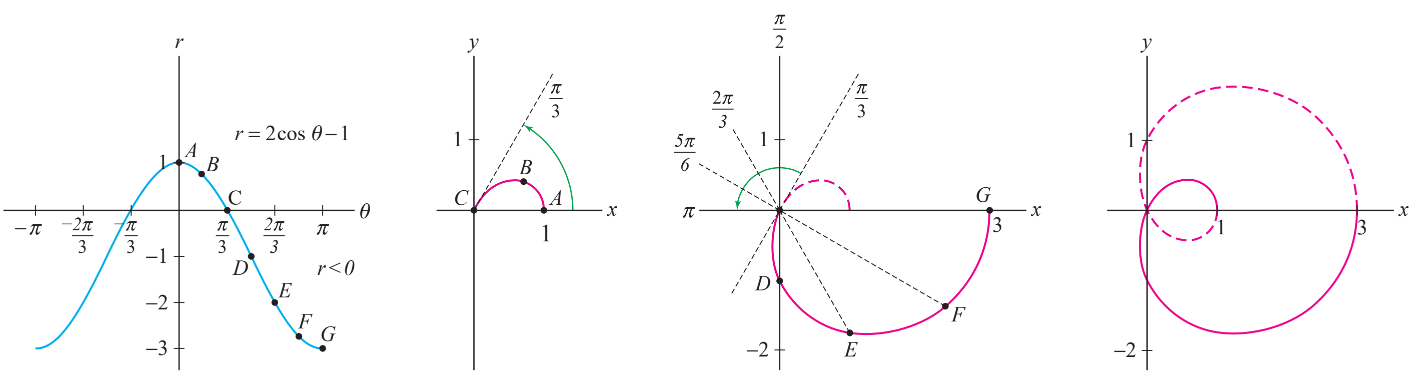
Cuando θ varía de $\frac{\pi}{3}$ a π, $\quad r$ es *negativo* y varía de 0 a -3.

En consecuencia:

- La gráf ca empieza en el punto A en la f gura 15(B) y se mueve hacia en origen cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{3}$.
- Como r es negativo para $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \pi$, la curva continúa en el tercer y cuarto cuadrantes (en lugar de en el primero y segundo), yendo hacia el punto $G = (-3, \pi)$ de la f gura 15(C).

***Etapa 3.* Use simetría**

Como $r(\theta) = r(-\theta)$, la curva es simétrica respecto al eje x. Por tanto, la parte de la curva correspondiente a $-\pi \le \theta \le 0$ se obtiene por ref exión respecto al eje x, como se muestra en la f gura 15(D). ■



(A) Variación de r como función de θ

(B) θ varía de 0 a $\pi/3$, r varía de 1 a 0.

(C) θ varía de $\pi/3$ a π pero r es negativa y varia de 0 -3.

(D) El caracol de Pascal completo

FIGURA 15 La curva $r = 2\cos\theta - 1$ fue descrita por primera vez en 1525 por el artista alemán Albrecht Dürer.

12.3 RESUMEN

- Las coordenadas polares de un punto $P = (x, y)$ son (r, θ), donde r es la distancia al origen y θ es el ángulo entre el eje de las x positivas y el segmento $\overline{OP}$, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

- La coordenada angular θ debe ser seleccionada de manera que (r, θ) se encuentre en el cuadrante apropiado. Si $r > 0$, entonces:

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- No unicidad: (r, θ) y $(r, \theta + 2n\pi)$ representan el mismo punto, para cualquier entero n. Las coordenadas polares del origen O son $(0, \theta)$, para cualquier θ.
- Coordenadas radiales negativas: $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto.
- Ecuaciones polares:

Curva	Ecuación polar
Circunferencia de centro el origen y radio R	$r = R$
Recta por el origen de pendiente $m = \tan\theta_0$	$\theta = \theta_0$
Recta en que $P_0 = (d, \alpha)$ es el punto más cercano al origen	$r = d\sec(\theta - \alpha)$
Circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$	$r = 2a\cos\theta$
Circunferencia de centro $(0, a)$ y radio a, $x^2 + (y-a)^2 = a^2$	$r = 2a\,\text{sen}\,\theta$

12.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dos puntos P y Q que tengan la misma coordenada radial (elija la respuesta correcta):

(a) se encuentran en la misma circunferencia centrada en el origen.

(b) se encuentran en la misma semirrecta de extremo el origen.

2. Proporcione dos representaciones polares del punto $(x, y) = (0, 1)$, una en la que r sea negativa y otra en la que r sea positiva.

3. Describa cada una de las siguientes curvas:

(a) $r = 2$ **(b)** $r^2 = 2$ **(c)** $r\cos\theta = 2$

4. Si $f(-\theta) = f(\theta)$, entonces la curva $r = f(\theta)$ es simétrica respecto a (elija la respuesta correcta):

(a) eje x **(b)** eje y **(c)** origen

Problemas

1. Halle coordenadas polares para cada uno de los siete puntos que se han representado en la f gura 16.

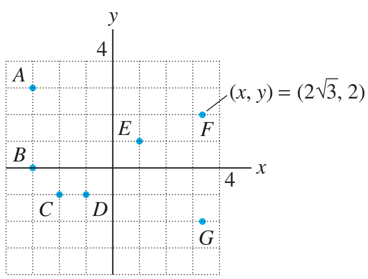


FIGURA 16

2. Represente los puntos de coordenadas polares:

(a) $(2, \frac{\pi}{6})$ **(b)** $(4, \frac{3\pi}{4})$ **(c)** $(3, -\frac{\pi}{2})$ **(d)** $(0, \frac{\pi}{6})$

3. Convierta de coordenadas rectangulares a polares.

(a) $(1, 0)$ **(b)** $(3, \sqrt{3})$ **(c)** $(-2, 2)$ **(d)** $(-1, \sqrt{3})$

4. Convierta de coordenadas rectangulares a polares utilizando una calculadora (asegúrese de que su elección de θ da lugar al cuadrante correcto).

(a) $(2, 3)$ **(b)** $(4, -7)$ **(c)** $(-3, -8)$ **(d)** $(-5, 2)$

5. Convierta de coordenadas polares a rectangulares:

(a) $(3, \frac{\pi}{6})$ **(b)** $(6, \frac{3\pi}{4})$ **(c)** $(0, \frac{\pi}{5})$ **(d)** $(5, -\frac{\pi}{2})$

6. ¿Cuál de las siguientes son unas posibles coordenadas polares para el punto P, cuyas coordenadas rectangulares son $(0, -2)$?

(a) $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\left(2, \frac{7\pi}{2}\right)$

(c) $\left(-2, -\frac{3\pi}{2}\right)$ **(d)** $\left(-2, \frac{7\pi}{2}\right)$

(e) $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ **(f)** $\left(2, -\frac{7\pi}{2}\right)$

7. Describa cada sector sombreado de la figura 17 mediante desigualdades en r y θ.

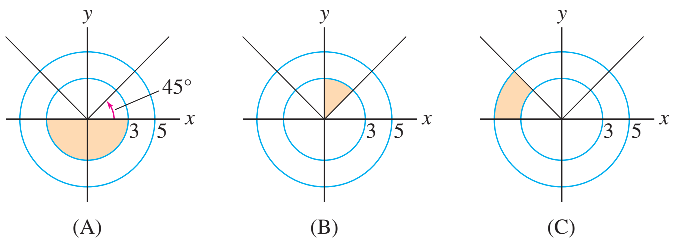


FIGURA 17

8. Halle la ecuación en coordenadas polares de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

9. ¿Cuál es la pendiente de la recta $\theta = \frac{3\pi}{5}$?

10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones $r = 2\sec\theta$ y $r = 2\csc\theta$ define una recta horizontal?

En los problemas 11-16, convierta a una ecuación en coordenadas rectangulares.

11. $r = 7$ **12.** $r = \operatorname{sen}\theta$

13. $r = 2\operatorname{sen}\theta$ **14.** $r = 2\csc\theta$

15. $r = \dfrac{1}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$ **16.** $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$

En los problemas 17-20, convierta a una ecuación en coordenadas rectangulares.

17. $x^2 + y^2 = 5$ **18.** $x = 5$

19. $y = x^2$ **20.** $xy = 1$

21. Relacione cada ecuación con su descripción.

(a) $r = 2$ **(i)** Línea vertical

(b) $\theta = 2$ **(ii)** Línea horizontal

(c) $r = 2\sec\theta$ **(iii)** Circunferencia

(d) $r = 2\csc\theta$ **(iv)** Recta que pasa por origen

22. Halle los valores de θ en la gráfica de $r = 4\cos\theta$ correspondientes a los puntos A, B, C, D de la figura 18. A continuación, indique la porción de la gráfica descrita cuando θ varía en los siguientes intervalos:

(a) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ **(b)** $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ **(c)** $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

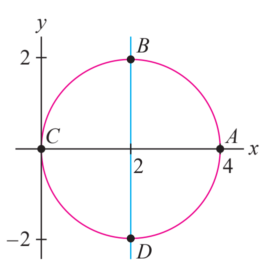


FIGURA 18 Representación gráfica de $r = 4\cos\theta$.

23. Suponga que las coordenadas polares de $P = (x, y)$ son (r, θ). Halle las coordenadas polares para los puntos:

(a) $(x, -y)$ **(b)** $(-x, -y)$ **(c)** $(-x, y)$ **(d)** (y, x)

24. Relacione cada ecuación en coordenadas rectangulares con su ecuación en coordenadas polares.

(a) $x^2 + y^2 = 4$ **(i)** $r^2(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 4$

(b) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ **(ii)** $r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) = 4$

(c) $x^2 - y^2 = 4$ **(iii)** $r = 2\operatorname{sen}\theta$

(d) $x + y = 4$ **(iv)** $r = 2$

25. ¿Cuáles son las ecuaciones polares de las rectas paralelas a la recta $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$?

26. Pruebe que la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de la figura 19 tiene ecuación polar $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ y halle los valores de θ entre 0 y π correspondientes a los puntos A, B, C, y D.

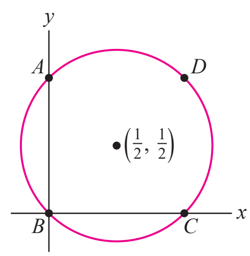


FIGURA 19 Representación gráfica de $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

27. Dibuje la curva $r = \frac{1}{2}\theta$ (la espiral de Arquímedes) para θ entre 0 y 2π representando los puntos correspondientes a $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$.

28. Dibuje la curva $r = 3\cos\theta - 1$ (vea el ejemplo 8).

29. Dibuje la curva cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

30. Muestre que la cardioide del problema 29 tiene ecuación:

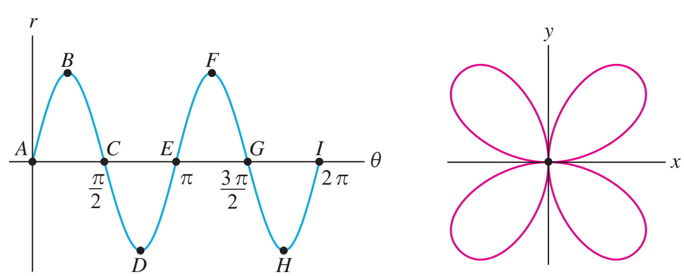
$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

en coordenadas rectangulares.

31. La figura 20 muestra las gráficas de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en coordenadas rectangulares y en polares, donde se trata de una "rosa con cuatro pétalos." Identifique:

(a) Los puntos en (B) que corresponden a los puntos A-I en (A).

(b) Las partes de la curva en (B) que corresponden a los ángulos en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.



(A) Gráfica de r como una función de θ, donde $r = \operatorname{sen} 2\theta$

(B) Gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en coordenas polares.

FIGURA 20

32. Dibuje la curva $r = \operatorname{sen} 3\theta$. En primer lugar, obtenga los valores de r para la tabla que se encuentra a continuación y represente los correspondientes puntos de la curva. Observe que los tres pétalos de la curva corresponden a los ángulos en los intervalos $[0, \frac{\pi}{3}]$, $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ y $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Después represente $r = \operatorname{sen} 3\theta$ en coordenadas rectangulares y etiquete los puntos en esta gráf ca correspondientes a los (r, θ) de la tabla.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{12}$	π
r									

33. SAC Represente gráf camente la **cisoide** $r = 2 \operatorname{sen}\theta \tan\theta$ y pruebe que su ecuación en coordenadas rectangulares es

$$y^2 = \frac{x^3}{2 - x}$$

34. Demuestre que $r = 2a\cos\theta$ es la ecuación de la circunferencia de la f gura 21 usando únicamente el hecho que un triángulo inscrito en una circunferencia, de manera que un lado de éste sea igual al diámetro de la circunferencia, es un triángulo rectángulo.

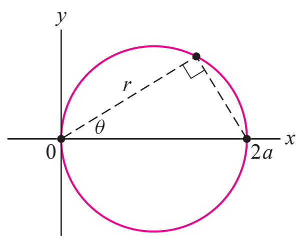


FIGURA 21

35. Pruebe que:

$$r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$$

es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen. Exprese el radio y el centro (en coordenadas rectangulares) en términos de a y de b.

36. Use el problema previo para expresar la ecuación de una circunferencia de centro $(3, 4)$ y radio 5 de la forma $r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$.

37. Use la identidad $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ para hallar una ecuación polar de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

38. Halle una ecuación en coordenadas polares para la curva $r^2 = \cos 2\theta$.

39. Pruebe que $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$ y use esta identidad para hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la curva $r = \cos 3\theta$.

40. Use la fórmula de adición para el coseno para probar que la recta $\mathcal{R}$ de ecuación polar $r\cos(\theta - \alpha) = d$ tiene ecuación en coordenadas rectangulares $(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)y = d$. Pruebe que la pendiente de $\mathcal{R}$ es $m = -\cot\alpha$ y la ordenada en el origen es $d/\operatorname{sen}\alpha$.

En los problemas 41-44, halle una ecuación en coordenadas polares de la recta $\mathcal{R}$ a la que se hace referencia.

41. El punto de $\mathcal{R}$ que se encuentra más cercano al origen tiene coordenadas polares $(2, \frac{\pi}{9})$.

42. El punto de $\mathcal{R}$ que se encuentra más cercano al origen, tiene coordenadas rectangulares $(-2, 2)$.

43. $\mathcal{R}$ es tangente a la circunferencia $r = 2\sqrt{10}$ en el punto de coordenadas rectangulares $(-2, -6)$.

44. La pendiente de $\mathcal{R}$ es 3 y es tangente a la circunferencia unidad en el cuarto cuadrante.

45. Pruebe que cualquier recta que no pase por el origen tiene ecuación polar de la forma:

$$r = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta - a\cos\theta}$$

donde $b \neq 0$.

46. Según el teorema del coseno, la distancia d entre dos puntos (f gura 22) de coordenadas polares (r, θ) y (r_0, θ_0) es:

$$d^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)$$

Use esta fórmula de la distancia para probar que:

$$r^2 - 10r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 56$$

es la ecuación de la circunferencia de radio 9 y centro (en coordenadas polares) $(5, \frac{\pi}{4})$.

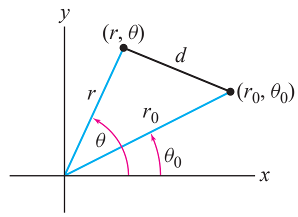


FIGURA 22

47. Para $a > 0$, una **curva lemniscata** es el conjunto de puntos P tales que el producto de las distancias de P a $(a, 0)$ y a $(-a, 0)$ es a^2. Pruebe que la ecuación de la lemniscata es:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

A continuación, halle la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares. Para obtener la ecuación en su forma más simple, use la identidad $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$. Represente la lemniscata para $a = 2$, si dispone de un programa informático de cálculo simbólico.

48. Sea c una constante f jada. Explique la relación entre las gráf cas de:

(a) $y = f(x + c)$ e $y = f(x)$ (rectangulares)

(b) $r = f(\theta + c)$ y $r = f(\theta)$ (polares)

(c) $y = f(x) + c$ e $y = f(x)$ (rectangulares)

(d) $r = f(\theta) + c$ y $r = f(\theta)$ (polares)

49. La derivada en coordenadas polares Muestre que una curva polar $r = f(\theta)$, tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

A continuación, aplique el teorema 2 de la sección 12.1 para demostrar que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta} \qquad \boxed{2}$$

donde $f'(\theta) = df/d\theta$.

50. Use la ec. (2) para hallar la pendiente de la recta tangente a $r = \operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

51. Use la ec. (2) para hallar la pendiente de la recta tangente a $r = \theta$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y en $\theta = \pi$.

52. Halle la ecuación en coordenadas rectangulares de la recta tangente a $r = 4\cos 3\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

53. Halle las coordenadas polares de los puntos de la lemniscata $r^2 = \cos 2t$ de la f gura 23 en los que la recta tangente sea horizontal.

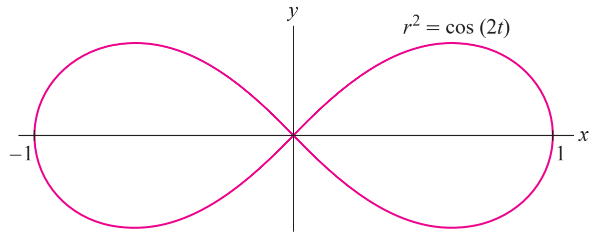


FIGURA 23

54. Halle las coordenadas polares de los puntos de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ en que la recta tangente sea horizontal (vea la f gura 24).

55. Use la ec. (2) para probar que para $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, se verif ca:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta}$$

A continuación, calcule las pendientes de las rectas tangentes a los puntos A, B, C de la f gura 19.

Problemas avanzados

56. Sea $f(x)$ una función periódica de periodo 2π, es decir $f(x) = f(x + 2\pi)$. Explique de qué manera se ref eja esta periodicidad en la gráf ca de:

(a) $y = f(x)$ en coordenadas rectangulares

(b) $r = f(\theta)$ en coordenadas polares

57. GU Utilice un programa informático de representación gráf ca para convencerse de que las ecuaciones polares $r = f_1(\theta) = 2\cos\theta - 1$ y $r = f_2(\theta) = 2\cos\theta + 1$ tienen la misma gráf ca. A continuación explique la razón. *Indicación:* muestre que los puntos $(f_1(\theta + \pi), \theta + \pi)$ y $(f_2(\theta), \theta)$ coinciden.

58. SAC En este problema se va a analizar cómo la forma del caracol de Pascal $r = b + \cos\theta$ depende de la constante b (vea la f gura 24).

(a) Siga los pasos del problema 57 para mostrar que las constantes b y $-b$ dan lugar a la misma curva.

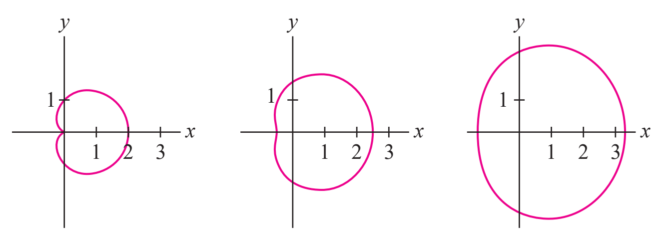
(b) Represente el caracol de Pascal para $b = 0, 0{,}2, 0{,}5, 0{,}8, 1$ y describa el cambio que observa en la forma de las curvas.

(c) Represente el caracol de Pascal para $1{,}2, 1{,}5, 1{,}8, 2, 2{,}4$ y describa el cambio que observa en la forma de las curvas.

(d) Use la ec. (2) para demostrar que:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{b\cos\theta + \cos 2\theta}{b + 2\cos\theta}\right)\csc\theta$$

(d) Halle los puntos en los que la recta tangente sea vertical. Observe que hay tres casos: $0 \le b < 2$, $b = 1$ y $b > 2$. ¿Ref ejan estos resultados los gráf cos que ha obtenido en (b) y (c)?



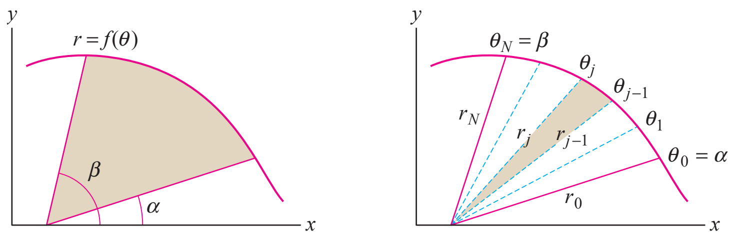
$r = 1 + \cos\theta$ $\qquad r = 1{,}5 + \cos\theta$ $\qquad r = 2{,}3 + \cos\theta$

FIGURA 24

12.4 El área y la longitud de arco en coordenadas polares

La integración en coordenadas polares no tiene como objetivo hallar el área *por debajo* de una curva sino el área de un sector limitado por una curva, tal y como se muestra en la f gura 1(A). Considere la región limitada por la curva $r = f(\theta)$ y las dos semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ con $\alpha < \beta$. Para deducir una fórmula para el área, divida la región en N sectores estrechos de ángulo $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/N$ correspondientes a una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$:

$$\theta_0 = \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_N = \beta$$



(A) Región $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (B) Región dividida en estrechos sectores

FIGURA 1 Área limitada por la curva $r = f(\theta)$ y las dos semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.

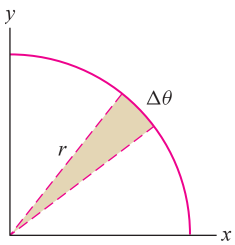


FIGURA 2 El área de un sector circular es *exactamente* $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$.

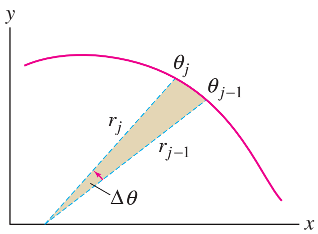


FIGURA 3 El área del sector j-ésimo es *aproximadamente* $\frac{1}{2}r_j^2\Delta\theta$.

Recuerde que el área de un sector circular de ángulo $\Delta\theta$ y radio r es $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ (figura 2). Si $\Delta\theta$ es pequeño, el sector j-ésimo (figura 3) es prácticamente un sector circular de radio $r_j = f(\theta_j)$, por lo que su área es *aproximadamente* $\frac{1}{2}r_j^2\Delta\theta$. El área total se puede aproximar por la suma:

$$\text{Área de la región} \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}r_j^2\Delta\theta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} f(\theta_j)^2\Delta\theta \qquad \boxed{1}$$

Se trata de una suma de Riemann para la integral $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$. Si $f(\theta)$ es continua, entonces la suma tiende a la integral cuando $N \to +\infty$ y se obtiene la siguiente fórmula.

TEOREMA 1 Área en coordenadas polares Si $f(\theta)$ es una función continua, entonces el área limitada por una curva en forma polar $r = f(\theta)$ y las semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (con $\alpha < \beta$) es igual a:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta} \qquad \boxed{2}$$

Tal y como se ha visto, $r = R$ define una circunferencia de radio R. Según la ec. (2), el área del círculo que delimita es igual a $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} R^2\,d\theta = \frac{1}{2}R^2(2\pi) = \pi R^2$, como cabía esperar.

EJEMPLO 1 Aplique el teorema 1 para calcular el área limitada por la semicircunferencia derecha de ecuación $r = 4\,\text{sen}\,\theta$.

Solución La ecuación $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ define una semicircunferencia de radio 2 tangente al eje x en el origen. La región limitada por la semicircunferencia derecha queda "barrida" cuando θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$, como en la figura 4(A). Según la ec. (2), el área de esta región es:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(4\,\text{sen}\,\theta)^2\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\,\theta\,d\theta = \qquad \boxed{4}$$

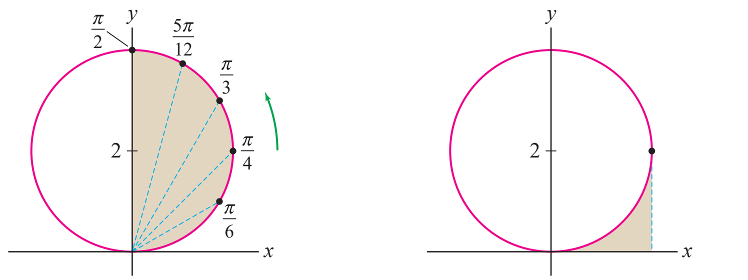
$$= 8\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta =$$

$$= (4\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 2\pi \qquad ■$$

RECORDATORIO *En la ec. (4), se utiliza la identidad:*

$$\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad \boxed{3}$$

ATENCIÓN *Recuerde que con la integral* $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ ***no*** *se calcula* ***por debajo*** *de una curva, como en la figura 4(B), sino que se calcula el área "barrida" por un segmento radial cuando* θ *va de* α *a* β*, como en la figura 4(A).*



(A) La integral polar calcula el área barrida por un segmento radial.

(B) La integral ordinaria en coordenadas rectangulares calcula el área por debajo de una curva.

FIGURA 4

■ **EJEMPLO 2** Dibuje $r = \operatorname{sen} 3\theta$ y calcule el área de un "pétalo."

Solución Para dibujar la curva, represente en primer lugar $r = \operatorname{sen} 3\theta$ en coordenadas rectangulares. En la f gura 5 se muestra que el radio r va de 0 a 1 y que vuelve hacia 0 cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{3}$. Así se obtiene el pétalo A de la f gura 6. El pétalo B se describe cuando θ va de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{2\pi}{3}$ (con $r \le 0$) y el pétalo C se dibuja para $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$. Se obtiene que el área del pétalo A (usando la ec. (3) que se encuentra en el margen de la página previa para evaluar la integral) es igual a:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (\operatorname{sen} 3\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(\frac{1-\cos 6\theta}{2}\right)d\theta = \left(\frac{1}{4}\theta - \frac{1}{24}\operatorname{sen} 6\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{12} \quad ■$$

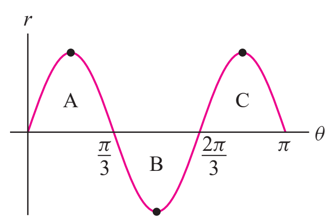


FIGURA 5 Gráf ca de $r = \operatorname{sen} 3\theta$ como función de θ.

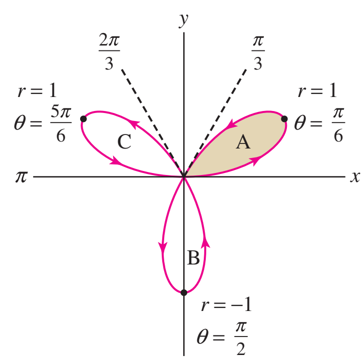


FIGURA 6 Gráf ca de la curva polar $r = \operatorname{sen} 3\theta$, una "rosa con tres pétalos".

El área entre dos curvas polares $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ con $f_2(\theta) \ge f_1(\theta)$, para $\alpha \le \theta \le \beta$, es igual a (f gura 7):

$$\boxed{\text{Área entre dos curvas} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(f_2(\theta)^2 - f_1(\theta)^2\right)d\theta} \qquad \boxed{5}$$

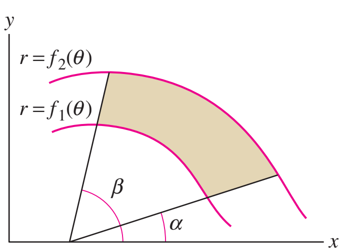


FIGURA 7 Área entre dos curvas polares en un sector.

■ **EJEMPLO 3 Área entre dos curvas** Halle el área de la región dentro de la circunferencia $r = 2\cos\theta$ pero fuera de la circunferencia $r = 1$ [f gura 8(A)].

Solución Las dos circunferencias se cortan en los puntos $(r, 2\cos\theta) = (r, 1)$ o, dicho de otro modo , cuando $2\cos\theta = 1$. Así $\cos\theta = \frac{1}{2}$, que tiene como solución $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

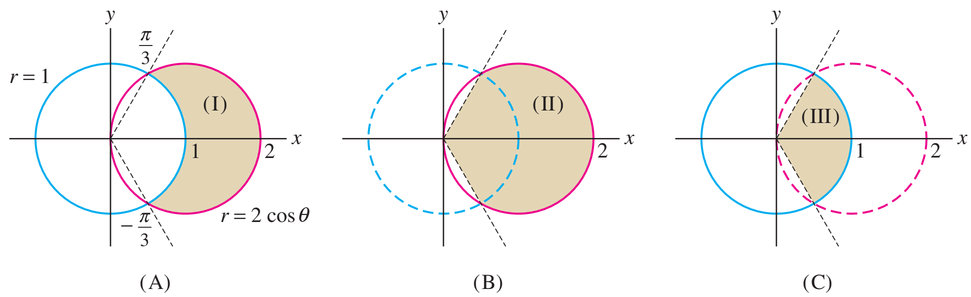


FIGURA 8 La región (I) es la diferencia entre las regiones (II) y (III).

En la f gura 8 se observa que la región (I) es la diferencia entre las regiones (II) y (III) de las f guras 8(B) y (C). Por tanto:

$$\text{Área de (I)} = \text{área de (II)} - \text{área de (III)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1)^2\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4\cos^2\theta - 1)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos 2\theta + 1)\, d\theta = \qquad \boxed{6}$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\theta + \theta)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \approx 1{,}91$$

■

RECORDATORIO En la ec. (6), se utiliza la identidad:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

Se f naliza esta sección deduciendo una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares. Observe que una curva polar $r = f(\theta)$ admite una parametrización con θ como parámetro dada por:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Utilizando la prima para denotar la derivación respecto a θ, se obtiene:

$$x'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta$$

$$y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Recuerde, de la sección 12.2, que la longitud de arco se obtiene integrando $\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}$. Mediante manipulaciones algebraicas elementales resulta que $x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2$ y, por tanto:

$$\boxed{\text{Longitud de arco } s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta} \qquad \boxed{7}$$

■ **EJEMPLO 4** Halle la longitud total de la circunferencia $r = 2a\cos\theta$ para $a > 0$.

Solución En esta situación, $f(\theta) = 2a\cos\theta$ y se tiene:

$$f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 = 4a^2\cos^2\theta + 4a^2\operatorname{sen}^2\theta = 4a^2$$

La longitud total de esta circunferencia de radio a es el valor que cabía esperar:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} (2a)\, d\theta = 2\pi a$$

Observe que el límite superior de integración es π y no 2π, porque la circunferencia completa se genera cuando θ va de 0 a π (vea la f gura 9). ■

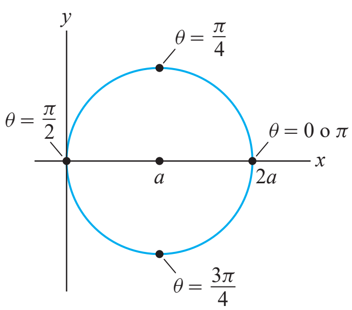


FIGURA 9 Gráf ca de $r = 2a\cos\theta$.

12.4 RESUMEN

- Área del sector limitado por una curva polar $r = f(\theta)$ y dos semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (f gura 10):

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta$$

- Área entre $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, donde $f_2(\theta) \geq f_1(\theta)$ (f gura 11):

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(f_2(\theta)^2 - f_1(\theta)^2\right) d\theta$$

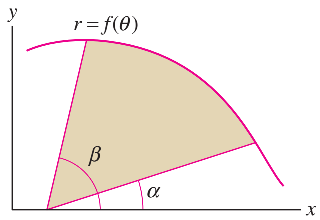


FIGURA 10 Región limitada por la curva polar $r = f(\theta)$ y las semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$.

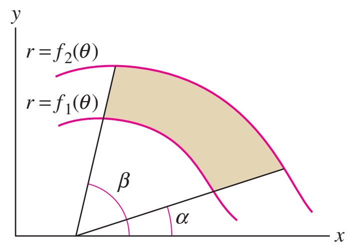


FIGURA 11 Región comprendida entre dos curvas polares.

- Longitud de arco de una curva polar $r = f(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$:

$$\text{Longitud de arco} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$$

12.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Las coordenadas polares son adecuadas para hallar el área (seleccione una):

(a) por debajo de una curva, entre $x = a$ y $x = b$.

(b) limitada por una curva y dos semirrectas por el origen.

2. Si $f(\theta)$ es negativa, ¿es válida la fórmula para el área en coordenadas polares?

3. La ecuación polar de la recta horizontal $y = 1$ es $r = \csc\theta$. ¿Qué área representa la integral $\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc^2\theta\, d\theta$ (f gura 12)?

(a) $\square ABCD$ **(b)** $\triangle ABC$ **(c)** $\triangle ACD$

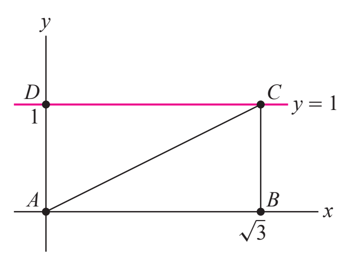


FIGURA 12

Problemas

1. Dibuje la región limitada por la circunferencia $r = 5$ y las semirrectas $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \pi$ y calcule su área como una integral en coordenadas polares.

2. Dibuje la región limitada por la recta $r = \sec\theta$ y las semirrectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$. Calcule su área de dos maneras: como una integral y aplicando geometría plana.

3. Calcule el área encerrada por la circunferencia $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ como una integral en coordenadas polares (vea la f gura 4). Tenga presente el seleccionar correctamente los límites de integración.

4. Halle el área del triángulo sombreado de la f gura 13 como una integral en coordenadas polares. A continuación, halle las coordenadas rectangulares de P y de Q y calcule el área aplicando geometría plana.

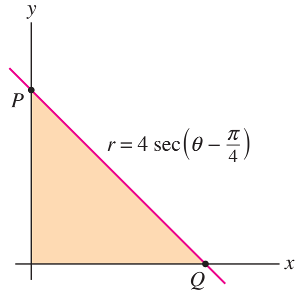


FIGURA 13

5. Halle el área de la región sombreada de la f gura 14. Observe que θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

6. ¿Qué intervalo de valores de θ corresponde a la región sombreada de la f gura 15? Halle el área de la región.

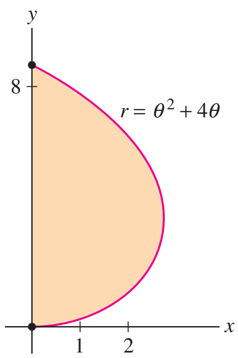


FIGURA 14

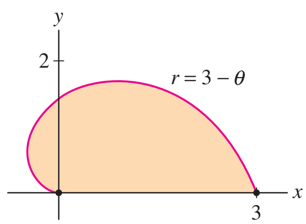


FIGURA 15

7. Halle el área total limitada por la cardioide de la f gura 16.

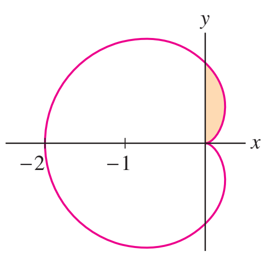


FIGURA 16 La cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

8. Halle el área de la región sombreada de la f gura 16.

9. Halle el área de una hoja de la "rosa de cuatro pétalos" $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (f gura 17). A continuación demuestre que el área total de la rosa es igual a la mitad del área del círculo limitado de la circunferencia circunscrita.

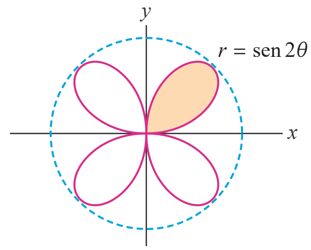


FIGURA 17 Rosa de cuatro pétalos $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

10. Halle el área limitada por un bucle de la lemniscata de ecuación $r^2 = \cos 2\theta$ (f gura 18). Seleccione sus límites de integración con cuidado.

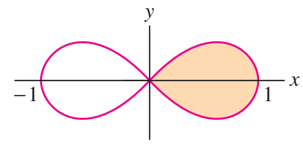


FIGURA 18 La lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.

11. Dibuje la espiral $r = \theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ y halle el área limitada por la curva y el primer cuadrante.

12. Halle el área comprendida entre las circunferencias $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = \cos\theta$.

13. Halle el área de la región A de la f gura 19.

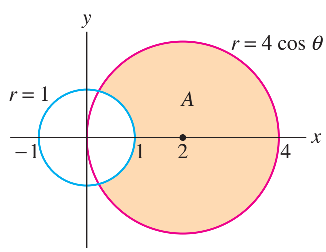


FIGURA 19

14. Halle el área de la región sombreada de la f gura 20, limitada por la circunferencia $r = \frac{1}{2}$ y un pétalo de la curva $r = \cos 3\theta$. *Indicación:* Calcule tanto el área del pétalo como la de la región dentro del pétalo y por fuera de la circunferencia.

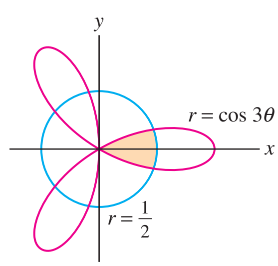


FIGURA 20

15. Halle el área del bucle interior del caracol de Pascal con ecuación polar $r = 2\cos\theta - 1$ (f gura 21).

16. Halle el área de la región sombreada de la f gura 21 entre los bucles interior y exterior del caracol de Pascal $r = 2\cos\theta - 1$.

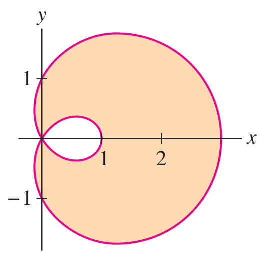


FIGURA 21 El caracol de Pascal dado por $r = 2\cos\theta - 1$.

17. Halle el área de la porción del círculo de circunferencia $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, que se encuentra en el cuarto cuadrante (vea el problema 26 de la sección 12.3).

18. Halle el área de la región que se encuentra en el interior de la circunferencia $r = 2\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{4})$ y por encima de la recta $r = \sec(\theta - \frac{\pi}{4})$.

19. Halle el área comprendida entre las dos curvas de la f gura 22(A).

20. Halle el área comprendida entre las dos curvas de la f gura 22(B).

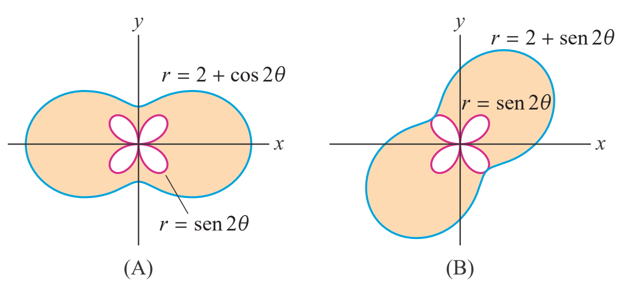


FIGURA 22

21. Halle el área entre las dos curvas de la f gura 23.

22. Halle el área de la región que se encuentra dentro de una pero no de las dos curvas de la f gura 23.

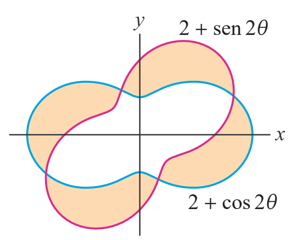


FIGURA 23

23. Calcule la longitud total de la circunferencia $r = 4\operatorname{sen}\theta$ como una integral en coordenadas polares.

24. Dibuje el segmento $r = \sec\theta$ para $0 \le \theta \le A$. A continuación, calcule su longitud de dos maneras: como una integral en coordenadas polares y aplicando trigonometría.

En los problemas 25-30, calcule la longitud de la curva polar.

25. La longitud de $r = \theta^2$ para $0 \le \theta \le \pi$.

26. La espiral $r = \theta$ para $0 \le \theta \le A$.

27. La espiral equiangular $r = e^{\theta}$ para $0 \le \theta \le 2\pi$.

28. El bucle interior de $r = 2\cos\theta - 1$ de la f gura 21.

29. La cardioide $r = 1 - \cos\theta$ de la f gura 16.

30. $r = \cos^2\theta$

En los problemas 31 y 32, exprese la longitud de la curva como una integral, pero no la evalúe.

31. $r = (2 - \cos\theta)^{-1}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

32. $r = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

En los problemas 33-36, use un programa informático de cálculo simbólico para calcular la longitud total con dos decimales de precisión.

33. SAC La rosa de tres pétalos $r = \cos 3\theta$ de la f gura 20.

34. SAC La curva $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$ de la f gura 23.

35. SAC La curva $r = \theta\operatorname{sen}\theta$ de la f gura 24 para $0 \le \theta \le 4\pi$.

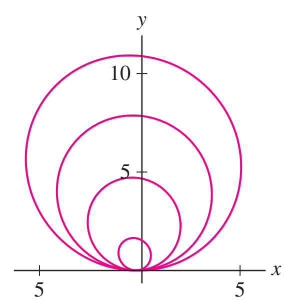


FIGURA 24 $r = \theta\operatorname{sen}\theta$ para $0 \le \theta \le 4\pi$.

36. $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$.

Problemas avanzados

37. Suponga que las coordenadas en el instante t de una partícula en movimiento son $(r(t), \theta(t))$. Demuestre que la celeridad de la partícula es igual a:

$$\sqrt{(dr/dt)^2 + r^2(d\theta/dt)^2}.$$

38. Calcule la celeridad en el instante $t = 1$ de una partícula en movimiento cuyas coordenadas polares en el instante t son $r = t$, $\theta = t$ (aplique el problema 37). ¿A qué sería igual la celeridad si las coordenadas rectangulares de la partícula fueran $x = t$, $y = t$? ¿Por qué la celeridad aumenta en un caso y es constante en el otro?

12.5 Secciones cónicas

Las cónicas fueron estudiadas por primera vez por los matemáticos de la Antigua Grecia, empezando probablemente con Menecmo (380-320 AC) e incluyendo a Arquímedes (287-212 AC) y Apolonio (262-190 AC).

Hay tres conocidas familias de curvas (elipses, hipérbolas y parábolas) de relevancia en las matemáticas y en diferentes aplicaciones. Son las **secciones cónicas**: se llaman así porque se obtienen por la intersección de un cono con un plano apropiado (f gura 1). El objetivo de esta sección es deducir ecuaciones para las secciones cónicas a partir de sus def niciones geométricas en el plano.

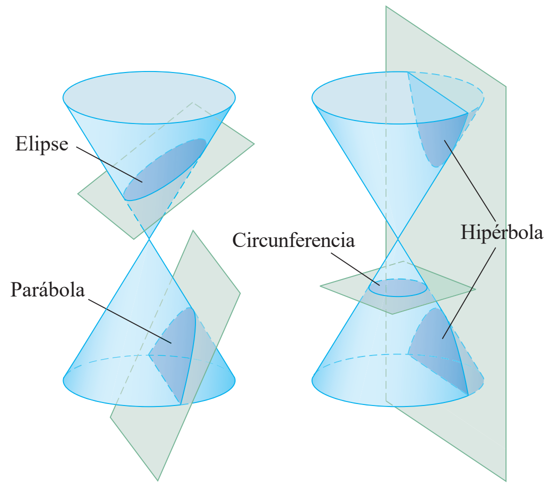


FIGURA 1 Las secciones cónicas se obtienen por la intersección de un plano y un cono.

Una **elipse** es una curva con forma ovalada [f gura 2(A)] formada por todos los puntos P tales que la suma de las distancias a dos puntos f jos F_1 y F_2 es una constante $K > 0$:

$$PF_1 + PF_2 = K \qquad \boxed{1}$$

Los puntos F_1 y F_2 son los **focos** de la elipse. Observe que si los focos coinciden, entonces la ec. (1) se reduce a $2PF_1 = K$ y se obtiene una circunferencia de centro F_1 y radio $\frac{1}{2}K$.

Se usará la siguiente terminología:

Se supone siempre que K es mayor que la distancia F_1F_2 entre los focos, porque la elipse consiste en el segmento rectilíneo $\overline{F_1F_2}$ si $K = F_1F_2$ y no contiene ningún punto cuando $K < F_1F_2$.

- el punto medio de $\overline{F_1F_2}$ es el **centro** de la elipse
- la recta que pasa por los focos es el **eje focal**
- la recta que pasa por el centro y que es perpendicular al eje focal es el **eje conjugado**

Se dice que una elipse está en **posición estándar** si el eje focal y el conjugado son el eje x y el y, tal y como se muestra en la f gura 2(B). En tal caso, las coordenadas de los focos son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ para algún $c > 0$. A continuación se va a demostrar que la ecuación de esta elipse es especialmente simple e igual a

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \boxed{2}$$

donde $a = K/2$ y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

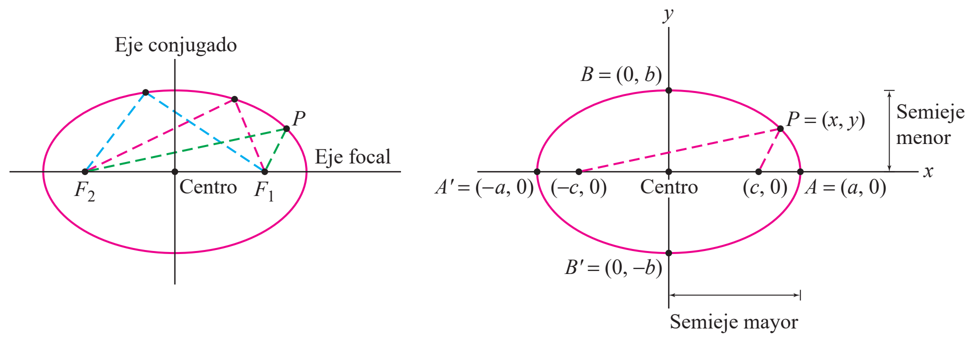
Según la fórmula de la distancia, $P = (x, y)$ se encuentra sobre la elipse de la f gura 2(B) siempre que:

$$PF_1 + PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad \boxed{3}$$

Pase el segundo término de la izquierda a la derecha, y eleve al cuadrado a ambos lados de la igualdad:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2 = 4a^2 - 4cx$$



(A) La elipse está formada por todos los puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = K$.

(B) Elipse en posición estándar: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

FIGURA 2

Estrictamente hablando, es necesario probar que si $P = (x, y)$ cumple la ec. (4), entonces también cumple la ec. (3). Si empieza a trabajar con la ec. (4) e invierte los pasos algebraicos realizados, el proceso de considerar la raíz cuadrada da lugar a la relación:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Sin embargo, esta ecuación no tiene sentido, salvo que ambos signos sean positivos, pues $a > c$.

Ahora, divida por 4, eleve al cuadrado y simplif que:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad \boxed{4}$$

Se trata de la ec. (2) con $b^2 = a^2 - c^2$, tal y como se quería demostrar.

La elipse corta los ejes en cuatro puntos A, A', B y B', llamados **vértices**. Los vértices A y A', que se encuentran sobre el eje focal, son los **vértices focales**. Los números a y b son conocidos como el **semieje mayor** y el **semieje menor** (aunque en realidad son números y no ejes).

TEOREMA 1 Elipse en posición estándar Sean $a > b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La ecuación de la elipse $PF_1 + PF_2 = 2a$ de focos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ es:

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1} \qquad \boxed{5}$$

Además, la elipse tiene

- semieje mayor a, semieje menor b.
- vértices focales $(\pm a, 0)$, vértices menores $(0, \pm b)$.

Si $b > a > 0$, entonces ec. (5) def ne una elipse de focos $(0, \pm c)$, donde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

■ **EJEMPLO 1** Halle la ecuación de la elipse de focos $(\pm\sqrt{11}, 0)$ y semieje mayor $a = 6$. A continuación, halle el semieje menor y dibuje su gráf ca.

Solución Los focos son $(\pm c, 0)$, siendo $c = \sqrt{11}$, y el semieje mayor es $a = 6$, por lo que se puede utilizar la relación $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ para hallar b:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - (\sqrt{11})^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

Así, el semieje menor es $b = 5$ y la ecuación de la elipse es $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$. Para dibujar la elipse, represente los vértices $(\pm 6, 0)$ y $(0, \pm 5)$ y únalos, como en la f gura 3. ■

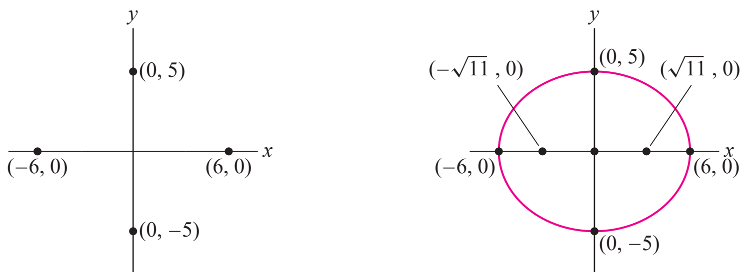


FIGURA 3

Para obtener la ecuación de una elipse cuyos ejes sean paralelos al eje x y al eje y y su centro se encuentre en el punto $C = (h, k)$, sustituya x por $x - h$ e y por $y - k$ en la ecuación (f gura 4):

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

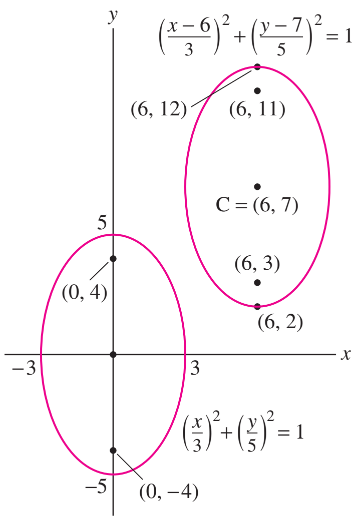


FIGURA 4 Una elipse con eje mayor vertical, y su traslación de centro $C = (6, 7)$.

■ **EJEMPLO 2 Traslación de una elipse** Halle una ecuación de la elipse de centro $C = (6, 7)$, eje focal vertical, semieje mayor 5 y semieje menor 3. ¿Dónde se encuentran los focos?

Como el eje focal es vertical, se tiene que $a = 3$ y $b = 5$ y $a < b$ (f gura 4). La ecuación de la elipse centrada en el origen hubiera sido $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$. Cuando se traslada el centro a $(h, k) = (6, 7)$, la ecuación resulta:

$$\left(\frac{x-6}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-7}{5}\right)^2 = 1$$

Además, $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, por lo que los focos se encuentran a ± 4 unidades verticales del centro, es decir $F_1 = (6, 11)$ y $F_2 = (6, 3)$. ■

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P tales que la diferencia de las distancias de P a dos focos F_1 y F_2 es $\pm K$:

$$PF_1 - PF_2 = \pm K \qquad \boxed{6}$$

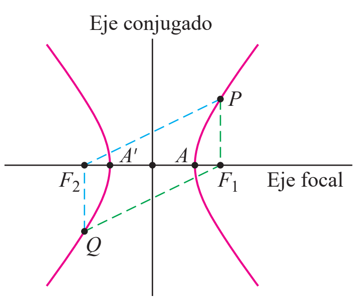


FIGURA 5 Una hipérbola de centro $(0, 0)$.

Se supondrá que K es menor que la distancia F_1F_2 entre los focos (la hipérbola no tiene puntos si $K > F_1F_2$). Observe que la hipérbola consiste en dos ramas correspondientes a las elecciones de signo $\pm$ (f gura 5).

Como en el caso de la elipse, el punto medio de $\overline{F_1F_2}$ es el **centro** de la hipérbola, la recta que pasa por F_1 y F_2 se denomina el **eje focal** y la recta que pasa por el centro y que es perpendicular al eje focal se denomina el **eje conjugado**. Los **vértices** son los puntos en que el eje focal corta la hipérbola; se han etiquetado como A y A' en la f gura 5. Se dice que la hipérbola está en la posición estándar cuando el eje focal y el conjugado son el eje x y el y, como en la f gura 6. El siguiente teorema se puede demostrar, más o menos, de la misma manera en la que se procedió en el teorema 1.

TEOREMA 2 Hipérbola en posición estándar Sean $a > 0$, $b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. La ecuación de la hipérbola $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$ de focos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ es:

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1} \qquad \boxed{7}$$

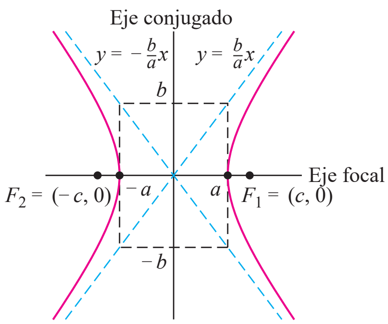


FIGURA 6 Hipérbola en posición estándar.

Una hipérbola tiene dos **asíntotas** $y = \pm\frac{b}{a}x$ que son las diagonales del rectángulo cuyos lados pasan por $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$, como en la f gura 6. Para demostrar esta af rmación, considere un punto (x, y) sobre la hipérbola en el primer cuadrante. Según la ec. (7),

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

El siguiente límite pone de manif esto que un punto (x, y) sobre la hipérbola tiende a la recta $y = \frac{b}{a}x$ cuando $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(y - \frac{b}{a}x\right) &= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \\
&= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right) = \\
&= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right) = 0
\end{aligned}$$

El comportamiento asintótico en el resto de los cuadrantes es similar.

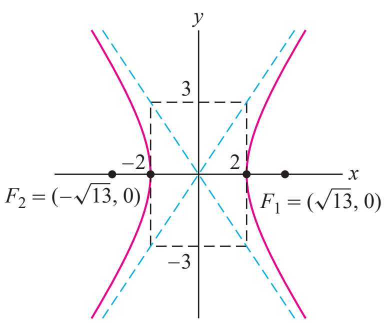


FIGURA 7 La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$.

■ **EJEMPLO 3** Halle los focos de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$. Dibuje su gráf ca y sus asíntotas.

Solución En primer lugar, divida por 36 para obtener la ecuación en forma estándar:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{o} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Por tanto $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. Los focos son:

$$F_1 = (\sqrt{13}, 0) \qquad F_2 = (-\sqrt{13}, 0)$$

Para dibujar la gráf ca, represente el rectángulo por los puntos $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 3)$, como en la f gura 7. Las diagonales del rectángulo son las asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$. La hipérbola pasa por los vértices $(\pm 2, 0)$ y tiende a las asíntotas. ■

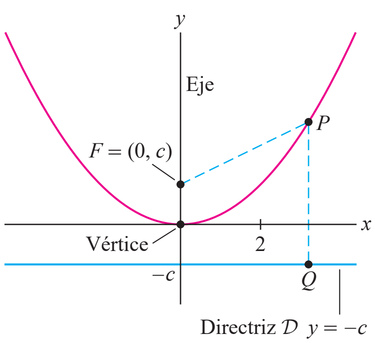


FIGURA 8 Parábola con foco $(0, c)$ y directriz $y = -c$.

La elipse y la hipérbola están def nidas en base a dos focos; sin embargo, la **parábola** es el conjunto de todos los puntos P equidistantes a un foco F y a una recta $\mathcal{D}$ llamada **directriz**:

$$PF = P\mathcal{D} \tag{8}$$

Aquí, al referirnos a la *distancia* de un punto P a una recta $\mathcal{D}$, se trata de la distancia de P al punto Q sobre $\mathcal{D}$ que esté más cercano a P y que se obtiene trazando la perpendicular a $\mathcal{D}$ desde P (f gura 8). Esta distancia se denota como $P\mathcal{D}$.

La recta que pasa por el foco F y que es perpendicular a $\mathcal{D}$ es el **eje** de la parábola. El **vértice** es el punto en el que la parábola corta su eje. Se dice que la parábola está en posición estándar si, para algún c, el foco es $F = (0, c)$ y la directriz es $y = -c$, tal y como se muestra en la f gura 8. En el problema 73 se comprueba que, entonces, el vértice está en el origen y que la ecuación de la parábola es $y = x^2/4c$. Si $c < 0$, las ramas de la parábola van hacia abajo.

TEOREMA 3 Parábola en posición estándar Sea $c \neq 0$. La ecuación de la parábola de foco $F = (0, c)$ y directriz $y = -c$ es:

$$y = \frac{1}{4c}x^2 \qquad \boxed{9}$$

El vértice se encuentra en el origen. Las ramas de la parábola van hacia arriba, si $c > 0$, y hacia abajo, si $c < 0$.

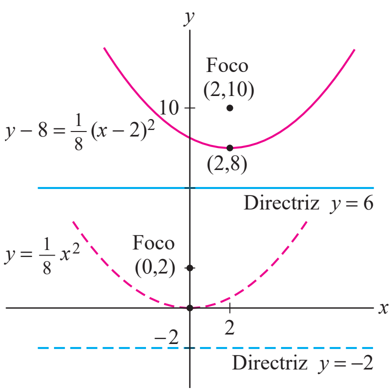


FIGURA 9 Una parábola y su traslación.

■ **EJEMPLO 4** Se aplica una traslación a la parábola estándar de directriz $y = -2$, de tal manera que ahora el vértice está situado en $(2, 8)$. Halle su ecuación, directriz y foco.

Solución Según la ec. (9) con $c = 2$, la ecuación de la parábola estándar de directriz $y = -2$ es $y = \frac{1}{8}x^2$ (f gura 9). El foco de esta parábola estándar es $(0, c) = (0, 2)$, que se encuentra dos unidades por encima de $(0, 0)$.

Para obtener la ecuación cuando la parábola se traslada y su vértice pasa a ser $(2, 8)$, sustituya x por $x - 2$, e y por $y - 8$:

$$y - 8 = \frac{1}{8}(x-2)^2 \qquad \text{o} \qquad y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

El vértice se ha desplazado hacia arriba en 8 unidades, por lo que la directriz también se desplaza hacia arriba en 8 unidades, pasando a ser ahora $y = 6$. El nuevo foco está dos unidades por encima del nuevo vértice $(2, 8)$: el nuevo foco es $(2, 10)$. ■

Excentricidad

Algunas elipses son más planas que otras, de igual manera que algunas hipérbolas tienen más inclinación que otras. La “forma” de una sección cónica la mide un parámetro e denominado **excentricidad**. Para una elipse o una hipérbola:

$$e = \frac{\text{distancia entre focos}}{\text{distancia entre vértices sobre el eje focal}}$$

Se def ne la excentricidad de la parábola como $e = 1$.

TEOREMA 4 Para elipses e hipérbolas en posición estándar:

$$e = \frac{c}{a}$$

1. La excentricidad de una elipse cumple $0 \leq e < 1$.
2. La excentricidad de una hipérbola cumple $e > 1$.

← RECORDATORIO

Elipse estándar:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Hipérbola estándar:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Demostración Los focos se encuentran en $(\pm c, 0)$ y los vértices se encuentran en el eje focal en $(\pm a, 0)$. Por tanto:

$$e = \frac{\text{distancia entre focos}}{\text{distancia entre vértices sobre el eje focal}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

En el caso de una elipse, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y, por tanto, $e = c/a < 1$. Para una hipérbola, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ con lo que $e = c/a > 1$. ■

¿De qué manera determina la excentricidad la forma de una cónica [figura 10(A)]? Considere el cociente b/a entre los semiejes menor y mayor de una elipse. La elipse es prácticamente circular si b/a está cercano a 1, mientras que es alargada y plana si b/a es pequeño. Pero:

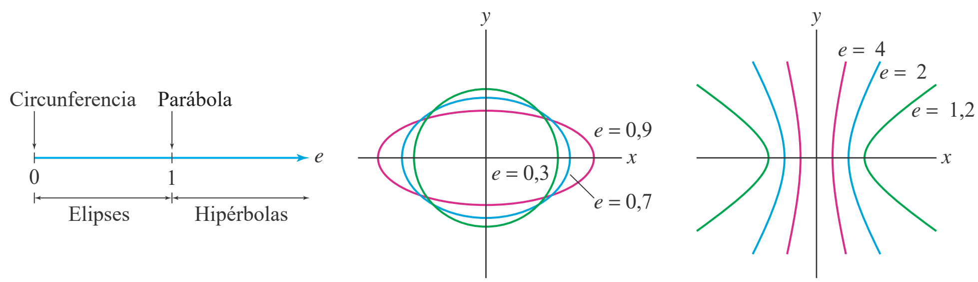
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - e^2}$$

Así, b/a es menor (y la elipse es más plana) cuando $e \to 1$ [figura 10(B)]. La elipse más "redonda" posible es la circunferencia, para la que $e = 0$.

De manera análoga, para una hipérbola:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 + e^2}$$

Los cocientes $\pm b/a$ son las pendientes de las asíntotas, por lo que las asíntotas tienen cada vez mayor inclinación cuando $e \to +\infty$ [figura 10(C)].



(A) Excentricidad e

(B) La elipse es cada vez más plana, cuando $e \to 1$.

(C) Las asíntotas de la hipérbola tienen cada vez mayor inclinación, cuando $e \to +\infty$

FIGURA 10

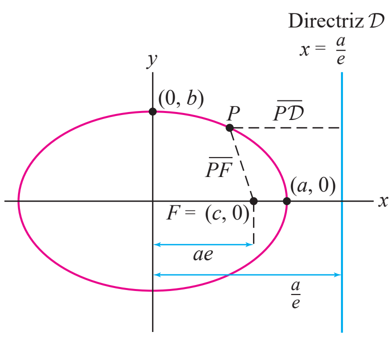


FIGURA 11 La elipse está formada por todos los puntos P tales que $PF = eP\mathcal{D}$.

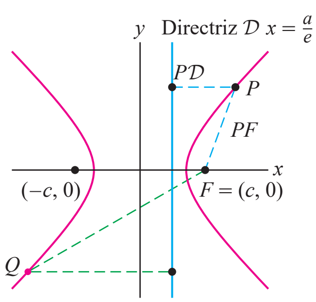


FIGURA 12 La hipérbola está formada por todos los puntos P tales que $PF = eP\mathcal{D}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Hay una manera más precisa de explicar cómo el valor de la excentricidad determina la forma de una cónica. Se puede demostrar que si dos cónicas, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, tienen la misma excentricidad e, entonces existe un cambio de escala para el que $\mathcal{C}_1$ es *congruente* con $\mathcal{C}_2$. Un cambio de escala significa cambiar las unidades en el eje x e y en un factor positivo común.Una curva escalada en un factor de 10 tiene la misma forma pero es diez veces mayor. Esto se corresponde con, por ejemplo, un cambio de unidades de centímetros a milímetros (unidades menores dan lugar a una figura mayor). Con el término "congruente" se indica que después del escalado, es posible transformar la curva $\mathcal{C}_1$ por un movimiento rígido (que involucre rotación y traslación pero no alargar o encoger la curva) de tal manera que quede justo encima de $\mathcal{C}_2$.

Todas las circunferencias ($e = 0$) tienen la misma forma porque escalar por un factor $r > 0$ transforma una circunferencia de radio R en una circunferencia de radio rR. De manera similar, dos parábolas cualesquiera ($e = 1$) resultan congruentes tras un escalado apropiado. Sin embargo, una elipse de excentricidad $e = 0{,}5$ no se puede conseguir que sea congruente a una elipse de excentricidad $e = 0{,}8$ por escalado (vea el problema 74).

La excentricidad se puede utilizar para proporcionar una definición unificada foco-directriz para las secciones cónicas. Dado un punto F (el foco), una recta $\mathcal{D}$ (la directriz) y un número $e > 0$, considere el conjunto de todos los puntos P tales que:

$$\boxed{PF = eP\mathcal{D}} \qquad \textbf{10}$$

Si $e = 1$, se trata de nuestra definición de la parábola. Según el siguiente teorema, la ec. (10) define una sección cónica de excentricidad e para todo $e > 0$ (figuras 11 y 12). Sin embargo, observe que no hay una definición foco-directriz para circunferencias ($e = 0$).

TEOREMA 5 Definición foco-directriz Para todo $e > 0$, el conjunto de puntos que cumplen la ec. (10) es una sección cónica de excentricidad e. Además:

- **Elipse:** sean $a > b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La elipse
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
cumple la ec. (10) con $F = (c, 0)$, $e = \dfrac{c}{a}$ y directriz vertical $x = \dfrac{a}{e}$.

- **Hipérbola:** sean $a, b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. La hipérbola
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
cumple la ec. (10) con $F = (c, 0)$, $e = \dfrac{c}{a}$ y directriz vertical $x = \dfrac{a}{e}$.

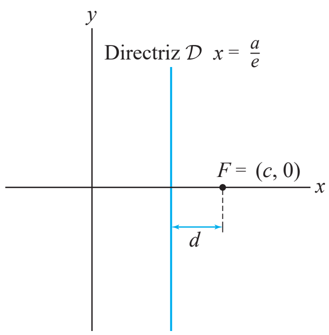


FIGURA 13

Demostración Suponga que $e > 1$ (el caso $e < 1$ es similar, vea el problema 66). Se puede escoger un sistema de ejes de manera que el foco F se encuentre sobre el eje x y la directriz sea vertical, quedando a la izquierda de F, como en la f gura 13. Anticipándonos al resultado f nal, sea d la distancia desde el foco F a la directriz $\mathcal{D}$ y sea:

$$c = \frac{d}{1 - e^{-2}} \qquad a = \frac{c}{e} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Puesto que se tiene la libertad de desplazar el eje y a conveniencia, elija un eje y tal que las coordenadas del foco sean $F = (c, 0)$. Entonces la directriz es la recta:

$$x = c - d = c - c(1 - e^{-2}) =$$
$$= c\,e^{-2} = \frac{a}{e}$$

Ahora, se puede escribir la ecuación $PF = eP\mathcal{D}$ para un punto $P = (x, y)$ como:

$$\underbrace{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}_{PF} = e\underbrace{\sqrt{(x - (a/e))^2}}_{P\mathcal{D}}$$

Por manipulación algebraica se llega a:

$$\begin{aligned}
(x-c)^2 + y^2 &= e^2(x - (a/e))^2 && \text{(eleve al cuadrado)}\\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2aex + a^2 &&\\
x^2 - \cancel{2aex} + a^2e^2 + y^2 &= e^2x^2 - \cancel{2aex} + a^2 && \text{(use que } c = ae\text{)}\\
(e^2 - 1)x^2 - y^2 &= a^2(e^2 - 1) && \text{(agrupe)}\\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} &= 1 && \text{(divida)}
\end{aligned}$$

Se trata de la ecuación del enunciado, pues $a^2(e^2 - 1) = c^2 - a^2 = b^2$. ■

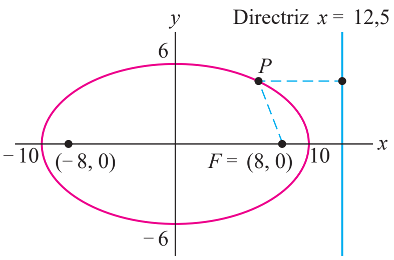


FIGURA 14 Elipse de excentricidad $e = 0{,}8$ y foco en $(8, 0)$.

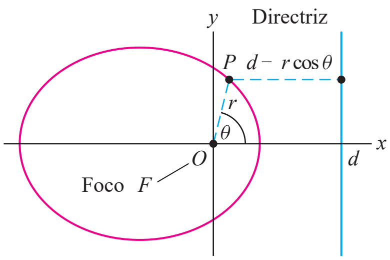


FIGURA 15 Def nición foco-directriz de la elipse en coordenadas polares.

■ **EJEMPLO 5** Halle la ecuación, focos y directriz de la elipse estándar de excentricidad $e = 0{,}8$ y vértices focales $(\pm 10, 0)$.

Solución Los vértices son $(\pm a, 0)$ con $a = 10$ (f gura 14). Según el teorema 5:

$$c = ae = 10 \cdot 0{,}8 = 8 \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

Por tanto, la ecuación de la elipse del enunciado es:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

Los focos son $(\pm c, 0) = (\pm 8, 0)$ y la directriz es $x = \frac{a}{e} = \frac{10}{0{,}8} = 12{,}5$. ■

En la sección 14.6, se examinó la famosa ley de Johannes Kepler que establece que la órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse con un foco en el sol. Ahora, tendremos que escribir la ecuación de una elipse en coordenadas polares. Para obtener las ecuaciones polares de las secciones cónicas, es conveniente utilizar la def nición foco-directriz con foco F en el origen O y recta vertical $x = d$ como directriz $\mathcal{D}$ (f gura 15). De la f gura, observe que si $P = (r, \theta)$, entonces:

$$PF = r \qquad P\mathcal{D} = d - r\cos\theta$$

Por tanto, la def nición foco-directriz de la elipse $PF = eP\mathcal{D}$ resulta ser $r = e(d - r\cos\theta)$, o $r(1 + e\cos\theta) = ed$. Se ha demostrado así el siguiente resultado, que también es cierto para la hipérbola y la parábola (vea el problema 67).

TEOREMA 6 Ecuación polar de una sección cónica La ecuación polar de la sección cónica de excentricidad $e > 0$, con foco en el origen y directriz $x = d$ es:

$$\boxed{r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}} \qquad (11)$$

■ **EJEMPLO 6** Halle la excentricidad, directriz y foco de la sección cónica:

$$r = \frac{24}{4 + 3\cos\theta}$$

Solución En primer lugar, escriba la ecuación en la forma estándar:

$$r = \frac{24}{4 + 3\cos\theta} = \frac{6}{1 + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

Comparando con la ec. (11), se tiene que $e = \frac{3}{4}$ y $ed = 6$. Así, $d = 8$. Como $e < 1$, la cónica es una elipse. Según el teorema 6, la directriz es la recta $x = 8$ y el foco es el origen. ■

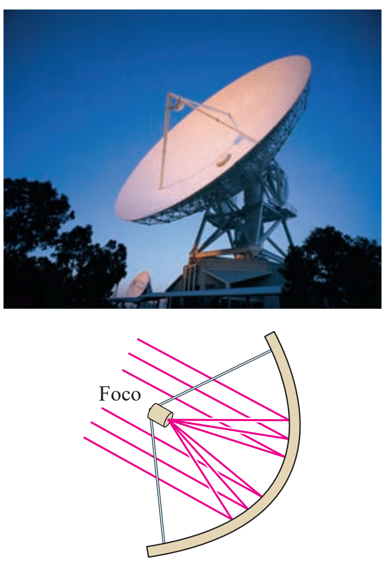


FIGURA 16 La forma parabólica de este radio-telescopio dirige la señal entrante al foco.

Propiedades de reflexión de las secciones cónicas

Las secciones cónicas cumplen numerosas propiedades geométricas. Son especialmente importantes las *propiedades ref exivas*, que se utilizan en óptica y en las comunicaciones (por ejemplo, en el diseño de antenas y de telescopios; f gura 16). A continuación se describen estas propiedades de forma breve y sin demostración (pero puede consultar demostraciones para las propiedades de ref exión de las elipses en los problemas 68-70 y el problema 71).

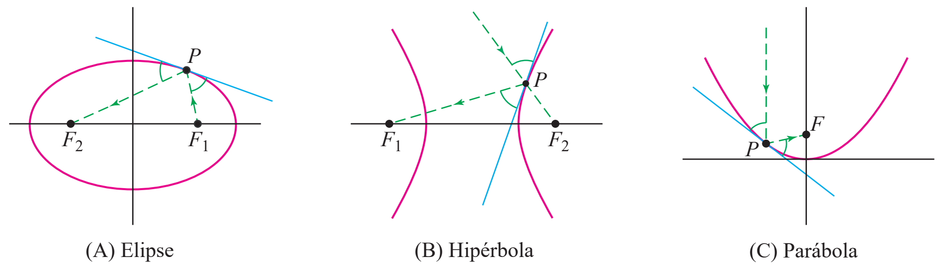


FIGURA 17

FIGURA 18 La cúpula elipsoidal de la Sala de las Estatuas en el edif cio del Capitolio de Washington crea una “cámara de susurro.” La leyenda dice que John Quincy Adams se situaba en un foco para poder escuchar las conversaciones que tenían lugar en el otro foco.

- **Elipse:** Los segmentos F_1P y F_2P forman ángulos iguales con la recta tangente a un punto P cualquiera sobre la elipse. Por tanto, un rayo de luz que se origine en un foco F_1 se ref eja en la elipse hacia el segundo foco F_2 [f gura 17(A)]. Vea también la f gura 18.
- **Hipérbola:** La recta tangente en un punto P cualquiera de la hipérbola parte el ángulo formado por los segmentos F_1P y F_2P en dos ángulos iguales. Por tanto, un rayo de luz que se dirija a F_2 se ref eja en la hipérbola hacia el segundo foco F_1 [f gura 17(B)].
- **Parábola:** El segmento FP y la recta que pasa por P paralela al eje forman el mismo ángulo con la recta tangente a un punto P cualquiera de la parábola [f gura 17(C)]. Por tanto, un rayo de luz que se dirija a P desde arriba en la dirección axial se ref eja en la parábola hacia la dirección del foco F.

Ecuaciones generales de grado 2

Las ecuaciones de las secciones cónicas estándar son casos particulares de la ecuación general de grado 2 en x e y:

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0} \qquad \boxed{12}$$

Aquí a, b, e, d, e, f son constantes tales que a, b, c no son simultáneamente cero. De esta manera, se observa que esta ecuación general de grado 2 no da lugar a nuevos tipos de curvas. Aparte de ciertos “casos degenerados,” la ec. (12) def ne una sección cónica que no necesariamente se encuentra en una posición estándar: no tiene por qué estar centrada en el origen y sus ejes focal y conjugado pueden haber sido rotados respecto a los ejes de coordenadas. Por ejemplo, la ecuación:

$$6x^2 - 8xy + 8y^2 - 12x - 24y + 38 = 0$$

def ne una elipse de centro $(3, 3)$ cuyos ejes están rotados (f gura 19).

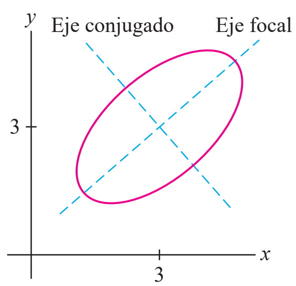


FIGURA 19 La elipse de ecuación $6x^2 - 8xy + 8y^2 - 12x - 24y + 38 = 0$.

Se dice que la ec. (12) es **degenerada** si el conjunto de soluciones es un par de rectas que se cortan, un par de rectas paralelas, una única recta, un punto o el conjunto vacío. Por ejemplo:

- $x^2 - y^2 = 0$ def ne un par de rectas que se cruzan, $y = x$ e $y = -x$.
- $x^2 - x = 0$ def ne un par de rectas paralelas, $x = 0$ y $x = 1$.
- $x^2 = 0$ def ne una única recta(el eje y).
- $x^2 + y^2 = 0$ tiene sólo una solución $(0, 0)$.
- $x^2 + y^2 = -1$ no tiene soluciones.

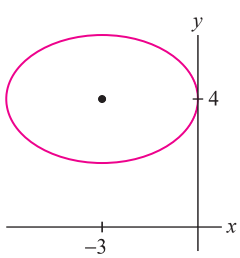


FIGURA 20 La elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 = 0$.

Suponga ahora que la ec. (12) es no degenerada. El término bxy se denomina *término cruzado*. Cuando el término cruzado es cero (es decir, cuando $b = 0$), se pueden “completar cuadrados” para probar que la ec. (12) def ne una traslación de la cónica en posición estándar. Dicho de otro modo, los ejes de la cónica son paralelos a los ejes de coordenadas. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

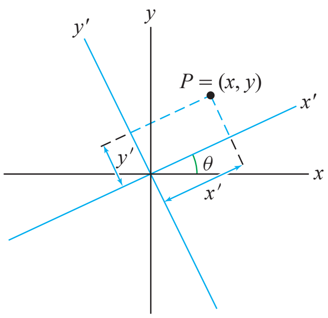


FIGURA 21

■ **EJEMPLO 7 Completando cuadrados** Pruebe que:

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 = 0$$

define una traslación de una sección cónica en posición estándar (figura 20).

Solución Como no hay término cruzado, se pueden completar los cuadrados de los términos que involucran a x y a y separadamente:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 &= 0 \\ 4(x^2 + 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 8y + 16 - 16) + 144 &= 0 \\ 4(x+3)^2 - 4(9) + 9(y-4)^2 - 9(16) + 144 &= 0 \\ 4(x+3)^2 + 9(y-4)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Por tanto, esta ecuación cuadrática se puede reescribir como:

$$\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 = 1$$ ■

Cuando el término cruzado bxy es diferente de cero, la ec. (12) define una cónica cuyos ejes son una rotación de los ejes coordenados. La nota al margen explica cómo se puede verificar esta afirmación en general. Se ilustra en base al siguiente ejemplo.

Si (x', y') son las coordenadas respecto a los ejes rotados en un ángulo θ, como en la figura 21, entonces:

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \qquad \boxed{13}$$

$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \qquad \boxed{14}$$

Vea el problema 75. En el problema 76, se prueba que el término cruzado desaparece cuando la ec. (12) se reescribe en términos de x' e y' para el ángulo:

$$\theta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{a-c}{b} \qquad \boxed{15}$$

■ **EJEMPLO 8** Pruebe que $2xy = 1$ define una sección cónica cuyos ejes focal y conjugado son una rotación de los ejes coordenados.

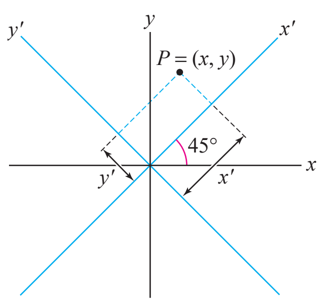
Solución La figura 22(A) muestra unos ejes etiquetados como x' e y' que son una rotación de 45° de los ejes coordenados. Un punto P de coordenadas (x, y) se puede describir también mediante coordenadas (x', y') respecto a estos ejes rotados. Aplicando las ecs. (13) y (14) con $\theta = \frac{\pi}{4}$, se obtiene que (x, y) y (x', y') se encuentran relacionadas mediante las fórmulas:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

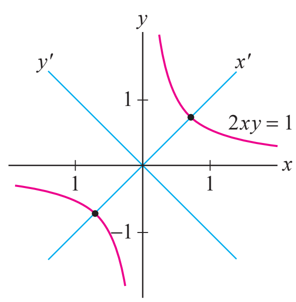
Por tanto, si $P = (x, y)$ se encuentra en la hipérbola, es decir si $2xy = 1$, entonces:

$$2xy = 2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) = x'^2 - y'^2 = 1$$

Así, las coordenadas (x', y') cumplen la ecuación de la hipérbola estándar $x'^2 - y'^2 = 1$ cuyos ejes focal y conjugado son los ejes x' e y' respectivamente. ■



(A) El punto $P=(x,y)$ puede también ser descrito por medio de las coordenadas (x', y') respecto a los ejes rotados.



(B) La forma de la hipérbola $2xy = 1$ respecto a los ejes x' e y' es $x^2 - y^2 = 1$.

FIGURA 22 Los ejes x' e y' son una rotación de 45° de los ejes x e y.

Este estudio de las cónicas finaliza enunciando el criterio del discriminante. Suponga que la ecuación:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

es no degenerada y que, por tanto, define una sección cónica. Según el criterio del discriminante, el tipo de cónica queda determinado por el **discriminante** D:

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

Se tienen los siguientes casos:

- $D < 0$: Elipse o circunferencia
- $D > 0$: Hipérbola
- $D = 0$: Parábola

Por ejemplo, el discriminante de la ecuación $2xy = 1$ es:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 0 = 4 > 0$$

Según el criterio del discriminante, $2xy = 1$ define una hipérbola. Esta afirmación está en consonancia con la conclusión en el ejemplo 8.

12.5 RESUMEN

- Una *elipse* de focos F_1 y F_2 es el conjunto de puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = K$, donde K es una constante tal que $K > F_1F_2$. La ecuación en posición estándar es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Los vértices de la elipse son $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$.

	Ejes focales	Focos	Vértices focales
$a > b$	eje x	$(\pm c, 0)$ siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$(\pm a, 0)$
$a < b$	eje y	$(0, \pm c)$ siendo $c = \sqrt{b^2 - a^2}$	$(0, \pm b)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(0 \le e < 1)$. Directriz: $x = \frac{a}{e}$ (si $a > b$).

- Una *hipérbola* de focos F_1 y F_2 es el conjunto de puntos P tales que:

$$PF_1 - PF_2 = \pm K$$

donde K es una constante tal que $0 < K < F_1F_2$. La ecuación en posición estándar es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Ejes focales	Focos	Vértices focales	Asíntotas
eje x	$(\pm c, 0)$ siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$(\pm a, 0)$	$y = \pm \dfrac{b}{a}x$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$. Directriz: $x = \frac{a}{e}$.

- Una *parábola* de foco F y directriz $\mathcal{D}$ es el conjunto de puntos P tales que $PF = P\mathcal{D}$. La ecuación en posición estándar es:

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

Foco $F = (0, c)$, directriz $y = -c$, y vértice en el origen $(0, 0)$.

- *Definición foco-directriz* de una cónica de foco F y directriz $\mathcal{D}$: $PF = eP\mathcal{D}$.
- Para trasladar una sección cónica h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, sustituya x por $x - h$ e y por $y - k$ en la ecuación.
- Ecuación polar de una cónica de excentricidad $e > 0$, foco en el origen, directriz $x = d$:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

12.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones define una elipse? ¿Cuál de ellas no define una sección cónica?

(a) $4x^2 - 9y^2 = 12$ **(b)** $-4x + 9y^2 = 0$

(c) $4y^2 + 9x^2 = 12$ **(d)** $4x^3 + 9y^3 = 12$

2. ¿Para qué secciones cónicas los vértices se encuentran entre los focos?

3. ¿Cuáles son los focos de

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{si } a < b?$$

4. ¿Cuál es la interpretación geométrica de b/a en la ecuación de la hipérbola en posición estándar?

Problemas

En los problemas 1-6, halle los vértices y focos de la sección cónica.

1. $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ **2.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$ **4.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 36$

5. $\left(\frac{x-3}{7}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{4}\right)^2 = 1$

6. $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{7}\right)^2 = 1$

En los problemas 7-10, halle la ecuación de la elipse obtenida por la traslación indicada de la elipse

$$\left(\frac{x-8}{6}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{3}\right)^2 = 1.$$

7. Trasladada con centro en el origen.

8. Trasladada con centro en $(-2, -12)$.

9. Trasladada a la derecha en seis unidades.

10. Trasladada hacia abajo en cuatro unidades.

En los problemas 11-14, halle la ecuación de la elipse.

11. Vértices $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 7)$.

12. Focos $(\pm 6, 0)$ y vértices focales $(\pm 10, 0)$.

13. Focos $(0, \pm 10)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$.

14. Vértices $(4, 0)$, $(28, 0)$ y excentricidad $e = \frac{2}{3}$.

En los problemas 15-20, halle la ecuación de la hipérbola.

15. Vértices $(\pm 3, 0)$ y focos $(\pm 5, 0)$.

16. Vértices $(\pm 3, 0)$ y asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$.

17. Focos $(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = 2$.

18. Vértices $(0, \pm 6)$ y excentricidad $e = 3$.

19. Vértices $(-3, 0)$, $(7, 0)$ y excentricidad $e = 3$.

20. Vértices $(0, -6)$, $(0, 4)$ y focos $(0, -9)$, $(0, 7)$.

En los problemas 21-28, halle la ecuación de la parábola con las propiedades que se indican.

21. Vértice $(0, 0)$, foco $(\frac{1}{12}, 0)$.

22. Vértice $(0, 0)$, foco $(0, 2)$.

23. Vértice $(0, 0)$, directriz $y = -5$.

24. Vértice $(3, 4)$, directriz $y = -2$.

25. Foco $(0, 4)$, directriz $y = -4$.

26. Foco $(0, -4)$, directriz $y = 4$.

27. Foco $(2, 0)$, directriz $x = -2$.

28. Foco $(-2, 0)$, vértice $(2, 0)$.

En los problemas 29-38, halle los vértices, focos, centro (si se tratara de una elipse o una hipérbola) y las asíntotas (en el caso de la hipérbola).

29. $x^2 + 4y^2 = 16$ **30.** $4x^2 + y^2 = 16$

31. $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{y+5}{7}\right)^2 = 1$ **32.** $3x^2 - 27y^2 = 12$

33. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 30y = 215$

34. $y = 4x^2$ **35.** $y = 4(x-4)^2$

36. $8y^2 + 6x^2 - 36x - 64y + 134 = 0$

37. $4x^2 + 25y^2 - 8x - 10y = 20$

38. $16x^2 + 25y^2 - 64x - 200y + 64 = 0$

En los problemas 39-42, use el criterio del discriminante para determinar el tipo de sección cónica (en cada caso, la ecuación es no degenerada). Represente gráf camente la curva, si dispone de un programa informático de cálculo simbólico.

39. $4x^2 + 5xy + 7y^2 = 24$

40. $x^2 - 2xy + y^2 + 24x - 8 = 0$

41. $2x^2 - 8xy + 3y^2 - 4 = 0$

42. $2x^2 - 3xy + 5y^2 - 4 = 0$

43. Pruebe que la "cónica" $x^2 + 3y^2 - 6x + 12 + 23 = 0$ no tiene ningún punto.

44. ¿Para qué valores de a tiene la cónica $3x^2 + 2y^2 - 16y + 12x = a$ al menos un punto?

45. Pruebe que $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ para una elipse estándar de excentricidad e.

46. Pruebe que la excentricidad de una hipérbola en posición estándar es $e = \sqrt{1 + m^2}$, donde $\pm m$ son las pendientes de las asíntotas.

47. Explique por qué los puntos de la f gura 23 se encuentran en una parábola. ¿Dónde se encuentran el foco y la directriz?

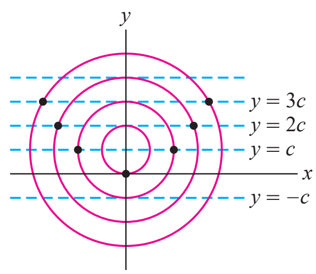


FIGURA 23

48. Halle la ecuación de la elipse formada por los puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = 12$, donde $F_1 = (4, 0)$ y $F_2 = (-2, 0)$.

49. Un **latus rectum** de una sección cónica es una cuerda por el foco paralela a la directriz. Halle el área limitada por la parábola $y = x^2/(4c)$ y su latus rectum (haga referencia a la f gura 8).

50. Pruebe que la recta tangente a un punto $P = (x_0, y_0)$ sobre la hipérbola $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ tiene ecuación:

$$Ax - By = 1$$

donde $A = \dfrac{x_0}{a^2}$ y $B = \dfrac{y_0}{b^2}$.

En los problemas 51-54, halle la ecuación polar de la cónica con la excentricidad y directriz dadas y foco en el origen.

51. $e = \frac{1}{2}, \quad x = 3$

52. $e = \frac{1}{2}, \quad x = -3$

53. $e = 1, \quad x = 4$

54. $e = \frac{3}{2}, \quad x = -4$

En los problemas 55-58, identif que el tipo de cónica, la excentricidad y la ecuación de la directriz.

55. $r = \dfrac{8}{1 + 4\cos\theta}$

56. $r = \dfrac{8}{4 + \cos\theta}$

57. $r = \dfrac{8}{4 + 3\cos\theta}$

58. $r = \dfrac{12}{4 + 3\cos\theta}$

59. Halle una ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, directriz $x = -2$ y excentricidad $e = 1{,}2$.

60. Sea $\mathcal{C}$ la elipse $r = de/(1 + e\cos\theta)$, siendo $e < 1$. Pruebe que las coordenadas x de los puntos de la f gura 24 son las siguientes:

Punto	A	C	F_2	A'
coordenada x	$\dfrac{de}{e+1}$	$-\dfrac{de^2}{1-e^2}$	$-\dfrac{2de^2}{1-e^2}$	$-\dfrac{de}{1-e}$

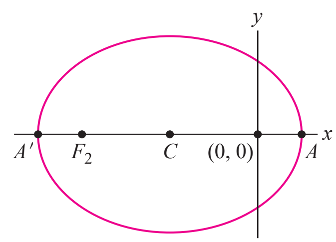


FIGURA 24

61. Halle una ecuación en coordenadas rectangulares de la cónica:

$$r = \frac{16}{5 + 3\cos\theta}$$

Indicación: Use los resultados del problema 60.

62. Sea $e > 1$. Pruebe que las coordenadas x de los vértices de la hipérbola $r = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta}$ son $\dfrac{ed}{e+1}$ y $\dfrac{ed}{e-1}$.

63. La primera ley de Kepler af rma que las órbitas de los planetas son elipses para las que el Sol está en uno de los focos. La excentricidad de la órbita de Plutón es $e \approx 0{,}25$. Su **perihelio** (la menor distancia al Sol) es, aproximadamente, 2.7 billones de millas. Halle el **afelio** (la mayor distancia al Sol).

64. La tercera ley de Kepler af rma que el cociente $T/a^{3/2}$ es igual a una constante C para todas las órbitas planetarias alrededor del Sol, donde T es el periodo (tiempo necesario para completar una órbita) y a es el semieje mayor.

(a) Calcule C en unidades de días y de kilómetros, sabiendo que la órbita de la Tierra es de 150×10^6 km.

(b) Calcule el periodo de la órbita de Saturno, sabiendo que su semieje mayor es, aproximadamente, $1{,}43 \times 10^9$ km.

(c) La excentricidad de la órbita de Saturno es $e = 0{,}056$. Halle el perihelio y el afelio de Saturno (vea el problema 63).

Problemas avanzados

65. Compruebe el teorema 2.

66. Compruebe el teorema 5 en el caso $0 < e < 1$. *Indicación:* repita la demostración del teorema 5, pero considere $c = d/(e^{-2} - 1)$.

67. Compruebe que si $e > 1$, entonces la ec. (11) def ne una hipérbola de excentricidad e, con foco en el origen y directriz en $x = d$.

Propiedad ref exiva de la elipse *En los problemas 68-70, se demuestra que los radios focales en un punto cualquiera de una elipse forman ángulos iguales con la recta tangente $\mathcal{R}$ a la elipse en ese punto. Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto sobre la elipse de la f gura 25, de focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ y excentricidad $e = c/a$.*

68. Pruebe que la ecuación de la recta tangente en P es $Ax + By = 1$, donde $A = \dfrac{x_0}{a^2}$ y $B = \dfrac{y_0}{b^2}$.

69. Los puntos R_1 y R_2 de la f gura 25 están def nidos de manera que $\overline{F_1R_1}$ y $\overline{F_2R_2}$ son perpendiculares a la recta tangente.

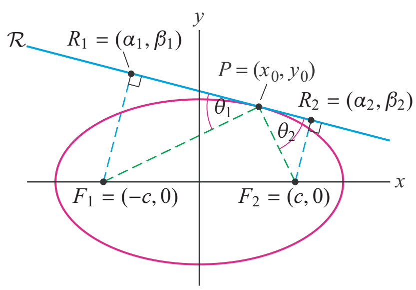


FIGURA 25 La elipse $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$.

(a) Pruebe que, si A y B son los valores dados por el problema 68, entonces:

$$\frac{\alpha_1 + c}{\beta_1} = \frac{\alpha_2 - c}{\beta_2} = \frac{A}{B}$$

(b) Use (a) y la fórmula de la distancia para demostrar que:

$$\frac{F_1R_1}{F_2R_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

(c) Use (a) y la ecuación de la recta tangente del ejercicio 68 para probar que:

$$\beta_1 = \frac{B(1 + Ac)}{A^2 + B^2} \qquad \beta_2 = \frac{B(1 - Ac)}{A^2 + B^2}$$

70. (a) Demuestre que $PF_1 = a + x_0e$ y $PF_2 = a - x_0e$. *Indicación:* Pruebe que $PF_1{}^2 - PF_2{}^2 = 4x_0c$. A continuación, utilice la propiedad def nitoria $PF_1 + PF_2 = 2a$ y la relación $e = c/a$.

(b) Compruebe que $\dfrac{F_1R_1}{PF_1} = \dfrac{F_2R_2}{PF_2}$.

(c) Pruebe que $\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2$. Concluya que $\theta_1 = \theta_2$.

71. He aquí otra demostración de la propiedad de ref exión.

(a) La f gura 25 muestra que $\mathcal{R}$ es la única recta que corta la elipse en un solo punto P. Suponiendo este enunciado cierto, demuestre que $QF_1 + QF_2 > PF_1 + PF_2$ para todos los puntos Q sobre la recta tangente que no sean el propio punto P.

(b) Use el principio de mínima distancia (ejemplo 6 de la sección 4.6) para demostrar que $\theta_1 = \theta_2$.

72. Pruebe que la longitud de QR en la f gura 26 es independiente del punto P.

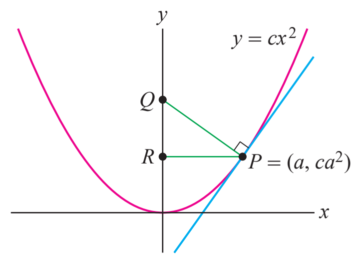


FIGURA 26

73. Pruebe que $y = x^2/4c$ es la ecuación de una parábola de directriz $y = -c$, foco $(0, c)$ y vértice en el origen, tal y como se enunció en el teorema 3.

74. Considere dos elipses en posición estándar:

$$E_1: \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1$$

$$E_2: \quad \left(\frac{x}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_2}\right)^2 = 1$$

Se dice que E_1 es similar a E_2 por cambio de escala si existe $r > 0$ tal que, para todo (x, y) en E_1, el punto (rx, ry) se encuentra en E_2. Pruebe que E_1 y E_2 son similares por cambio de escala si y sólo si tienen la misma excentricidad. Pruebe que dos circunferencias cualesquiera son similares por cambio de escala.

75. Deduzca las ecuaciones (13) y (14) del capítulo tal y como se explica a continuación. Escriba las coordenadas de P respecto a los ejes rotados de la f gura 21 en la forma polar $x' = r\cos\alpha$, $y' = r\operatorname{sen}\alpha$. Explique por qué las coordenadas polares de P respecto a los ejes x e y estándar son $(r, \alpha + \theta)$ y deduzca (13) y (14) utilizando las fórmulas de la adición para el coseno y el seno.

76. Si se reescribe la ecuación de grado 2 (ec. 12) en términos de las variables x' e y' que se encuentran relacionadas con x e y mediante las ecs. (13) y (14), se obtiene una nueva ecuación de grado 2 en x' e y' con la misma forma pero con coef cientes diferentes:

$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$$

(a) Pruebe que $b' = b\cos 2\theta + (c - a)\operatorname{sen} 2\theta$.

(b) Pruebe que si $b \neq 0$, entonces $b' = 0$ para:

$$\theta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{a - c}{b}$$

De esta manera se demuestra que siempre es posible eliminar el término cruzado bxy por rotación, para un ángulo adecuado, de los ejes.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. ¿Cuál de las siguientes curvas pasa por el punto $(1, 4)$?

(a) $c(t) = (t^2, t + 3)$ **(b)** $c(t) = (t^2, t - 3)$

(c) $c(t) = (t^2, 3 - t)$ **(d)** $c(t) = (t - 3, t^2)$

2. Halle ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $P = (2, 5)$ y que es perpendicular a la recta $y = 4x - 3$.

3. Halle ecuaciones paramétricas para la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 2. Use las ecuaciones para hallar los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes x e y.

4. Halle una parametrización $c(t)$ de la recta $y = 5 - 2x$ tal que $c(0) = (2, 1)$.

5. Halle una parametrización $c(\theta)$ de la circunferencia unitaria tal que $c(0) = (-1, 0)$.

6. Halle un camino $c(t)$ que describa el arco parabólico $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$ para $0 \le t \le 1$.

7. Halle un camino $c(t)$ que describa la recta $y = 2x + 1$ desde $(1, 3)$ a $(3, 7)$ para $0 \le t \le 1$.

8. Dibuje la gráf ca de $c(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} 2t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ incluyendo f echas para indicar la dirección del movimiento.

En los problemas 9-12, exprese la curva paramétrica de la forma $y = f(x)$.

9. $c(t) = (4t - 3, 10 - t)$ **10.** $c(t) = (t^3 + 1, t^2 - 4)$

11. $c(t) = \left(3 - \dfrac{2}{t}, t^3 + \dfrac{1}{t}\right)$ **12.** $x = \tan t, \quad y = \sec t$

En los problemas 13-16, calcule dy/dx en el punto que se indica.

13. $c(t) = (t^3 + t, t^2 - 1), \quad t = 3$

14. $c(\theta) = (\tan^2 \theta, \cos \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

15. $c(t) = (e^t - 1, \operatorname{sen} t), \quad t = 20$

16. $c(t) = (\ln t, 3t^2 - t), \quad P = (0, 2)$

17. SAC Halle el punto de la cicloide $c(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ en que la pendiente de la recta tangente es igual a $\frac{1}{2}$.

18. Halle los puntos de $(t + \operatorname{sen} t, t - 2 \operatorname{sen} t)$ en que la recta tangente es vertical u horizontal.

19. Halle la ecuación de la curva de Bézier de puntos de control:

$$P_0 = (-1, -1) \quad P_1 = (-1, 1) \quad P_2 = (1, 1) \quad P_3(1, -1)$$

20. Halle la celeridad en $t = \frac{\pi}{4}$ de una partícula cuya posición en t segundos es $c(t) = (\operatorname{sen} 4t, \cos 3t)$.

21. Halle la celeridad (como una función de t) de una partícula cuya posición en t segundos es $c(t) = (\operatorname{sen} t + t, \cos t + t)$. ¿Cuál es la celeridad máxima de la partícula?

22. Halle la longitud de $(3e^t - 3, 4e^t + 7)$ para $0 \le t \le 1$.

En los problemas 23 y 24, sea $c(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$.

23. Pruebe que $c(t)$ para $0 \le t < +\infty$, tiene longitud f nita y calcule su valor.

24. Halle el primer valor positivo t_0 tal que la recta tangente a $c(t_0)$ sea vertical y calcule la celeridad en $t = t_0$.

25. SAC Represente gráf camente $c(t) = (\operatorname{sen} 2t, 2 \cos t)$ para $0 \le t \le \pi$. Exprese la longitud de la curva como una integral def nida y aproxime su valor utilizando un programa informático de cálculo simbólico.

26. Convierta los puntos $(x, y) = (1, -3), (3, -1)$ de coordenadas rectangulares a polares.

27. Convierta los puntos $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{6}), (3, \frac{5\pi}{4})$ de coordenadas polares a rectangulares.

28. Exprese $(x + y)^2 = xy + 6$ como una ecuación en coordenadas polares.

29. Exprese $r = \dfrac{2 \cos \theta}{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}$ como una ecuación en coordenadas rectangulares.

30. Pruebe que $r = \dfrac{4}{7 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}$ es la ecuación polar de una recta.

31. GU Convierta la ecuación:

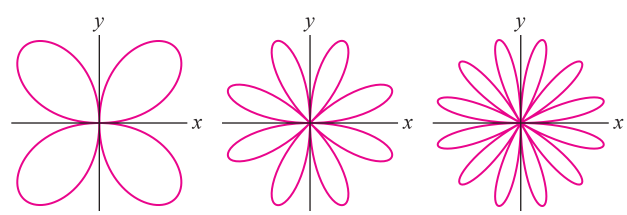
$$9(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2y)^2$$

a coordenadas polares y represéntela con un programa informático adecuado.

32. Calcule el área limitada por la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y las semirrectas $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

33. Calcule el área de un pétalo de $r = \operatorname{sen} 4\theta$ (vea la f gura 1).

34. La ecuación $r = \operatorname{sen}(n\theta)$, donde $n \ge 2$ es par, es una "rosa" de $2n$ pétalos (f gura 1). Calcule el área total de la f or y muestre que no depende de n.



$n = 2$ (4 pétalos) $n = 4$ (8 pétalos) $n = 6$ (12 pétalos)

FIGURA 1 Representación gráf ca de $r = \operatorname{sen}(n\theta)$.

35. Calcule el área total limitada por la curva $r^2 = \cos \theta \, e^{\operatorname{sen} \theta}$ (f gura 2).

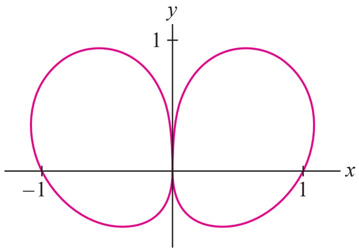


FIGURA 2 Gráf ca de $r^2 = \cos\theta\, e^{\operatorname{sen}\theta}$.

36. Halle el área sombreada de la f gura 3.

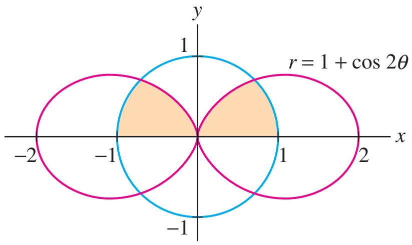


FIGURA 3

37. Halle el área limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, siendo $a > 0$.

38. Calcule la longitud de la curva de ecuación polar $r = \theta$ de la f gura 4.

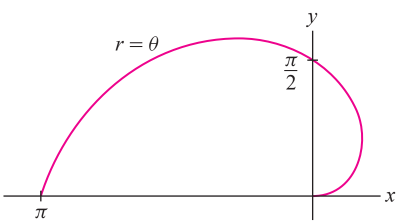


FIGURA 4

39. SAC La f gura 5 muestra la gráf ca de $r = e^{0,5\theta}\operatorname{sen}\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$. Use un programa informático de cálculo simbólico para aproximar la diferencia entre las longitudes de los bucles externo e interno.

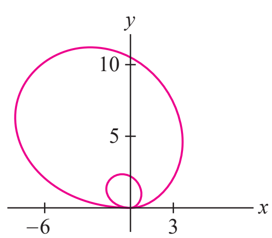


FIGURA 5

40. Pruebe que $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ def nen las mismas curvas en coordenadas polares si $f_1(\theta) = -f_2(\theta + \pi)$. Use este resultado para probar que las siguientes ecuaciones def nen la misma sección cónica:

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta} \qquad r = \frac{-de}{1 + e\cos\theta}$$

En los problemas 41-44, identif que la sección cónica. Halle los vértices y los focos.

41. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

42. $x^2 - 2y^2 = 4$

43. $(2x + \frac{1}{2}y)^2 = 4 - (x - y)^2$

44. $(y - 3)^2 = 2x^2 - 1$

En los problemas 45-50, halle la ecuación de la sección cónica que se indica.

45. Elipse de vértices $(\pm 8, 0)$ y focos $(\pm\sqrt{3}, 0)$.

46. Elipse de focos $(\pm 8, 0)$, excentricidad $\frac{1}{8}$.

47. Hipérbola de vértices $(\pm 8, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.

48. Hipérbola de focos $(2, 0)$ y $(10, 0)$, excentricidad $e = 4$.

49. Parábola de foco $(8, 0)$, directriz $x = -8$.

50. Parábola de vértice $(4, -1)$, directriz $x = 15$.

51. Halle las asíntotas de la hipérbola $3x^2 + 6x - y^2 - 10y = 1$.

52. Pruebe que la "sección cónica" de ecuación $x^2 - 4x + y^2 + 5 = 0$ no tiene ningún punto.

53. Pruebe que la relación $\frac{dy}{dx} = (e^2 - 1)\frac{x}{y}$ def ne una elipse o una hipérbola estándar de excentricidad e.

54. La órbita de Júpiter es una elipse con el Sol en un foco. Halle la excentricidad de esta órbita si el perihelio (la menor distancia al Sol) es igual a 740×10^6 km y el afelio (la mayor distancia al Sol) es igual a 816×10^6 km.

55. Este problema hace referencia a la f gura 25 de la sección 12.5. Demuestre que el producto de las distancias perpendiculares F_1R_1 y F_2R_2 desde los focos a la recta tangente de una elipse es igual al cuadrado b^2 del semieje menor.

A EL LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Uno de los retos en aprendizaje del cálculo inf nitesimal es acostumbrarse cada vez más a su lenguaje preciso y a su terminología, especialmente a los enunciados de los teoremas. En esta sección se analizan algunos detalles de la lógica que son útiles, y en realidad necesarios, para entender y aplicar los teoremas correctamente.

Muchos teoremas en matemáticas hacen uso de **implicaciones**. Si A y B son enunciados, entonces la implicación $A \Longrightarrow B$ es la af rmación que A implica B:

$$A \Longrightarrow B : \qquad \textit{Si } A \textit{ es verdadero, entonces } B \textit{ es verdadero.}$$

El enunciado A se denomina la **hipótesis** (o premisa) y el enunciado B es la **conclusión** de la implicación. He aquí un ejemplo: *Si m y n son enteros pares, entonces $m + n$ es un entero par*. Este enunciado se puede dividir en una hipótesis y una conclusión:

$$\underbrace{m \text{ y } n \text{ son enteros pares}}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{m + n \text{ es un entero par}}_{B}$$

En el lenguaje coloquial, las implicaciones se suelen utilizar de forma menos precisa. Un ejemplo es: *Si trabajas duro, entonces tendrás éxito*. Además, algunos enunciados que no son inicialmente de la forma $A \Longrightarrow B$ se pueden reformular como implicaciones. Por ejemplo, el enunciado “Los gatos son mamíferos” se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\text{Sea } X \text{ un animal.} \quad \underbrace{X \text{ es un gato}}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{X \text{ es un mamífero}}_{B}$$

Cuando se dice que una implicación $A \Longrightarrow B$ es verdadera, no se está af rmando que A o B sean necesariamente ciertas. De hecho, se está realizando la af rmación condicional de que *si* A fuera cierta, *entonces* B también sería cierta. En el ejemplo anterior, si X no fuera un gato, entonces la implicación no proporciona ninguna información.

La **negación** de un enunciado A es la af rmación de que A es falso y se denota $\neg A$.

Enunciado A	Negación $\neg A$
X vive en California.	X no vive en California.
$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.	$\triangle ABC$ no es un triángulo rectángulo.

La negación de la negación es el enunciado original: $\neg(\neg A) = A$. Decir que X *no no vive en California* es lo mismo que decir que X *vive en California*.

■ **EJEMPLO 1** Formule la negación de cada enunciado.

(a) La puerta está abierta y el perro está ladrando.

(b) La puerta está abierta o el perro está ladrando (o ambos).

Solución

(a) El primer enunciado es verdadero si las dos condiciones se cumplen (puerta abierta y perro ladrando), y es falsa si al menos una de estas dos condiciones no se cumple. Por tanto, la negación es:

O la puerta no está abierta *O* el perro no está ladrando *(o ambas)*.

(b) El segundo enunciado es verdadero si, al menos, una de las dos condiciones (puerta abierta o perro ladrando) se cumple, y es falso si ninguna de las dos condiciones se cumple. Por tanto, la negación es:

La puerta no está abierta *Y* el perro no está ladrando. ■

Contraposición y recíproco

Dos operaciones importantes son la formación de la contraposición y la formación del recíproco de un enunciado. La **contraposición** de $A \Longrightarrow B$ es el enunciado "Si B es falso, entonces A es falso":

Recuerde que cuando se forma la contraposición, se invierte el orden de A y B. La contraposición de $A \Longrightarrow B$ NO es $\neg A \Longrightarrow \neg B$.

La contraposición de $A \Longrightarrow B$ es $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

He aquí algunos ejemplos:

Enunciado	Contraposición
Si X es un gato, entonces X es un mamífero.	Si X no es un mamífero, entonces X no es un gato.
Si trabajas duro, entonces tendrás éxito.	Si no tienes éxito, entonces no trabajaste duro.
Si m y n son ambos pares, entonces $m + n$ es par.	Si $m + n$ no es par, entonces m y n no son ambos pares.

Una observación clave es la siguiente:

La contraposición y la implicación original son equivalentes.

El hecho que $A \Longrightarrow B$ es equivalente a su contraposición $\neg B \Longrightarrow \neg A$ es una regla general de la lógica que no depende de lo que A y B signifiquen. Este regla pertenece a la disciplina denominada "lógica formal," que trata sobre las relaciones lógicas entre enunciados, sin tener en cuenta el contenido real de estos.

Dicho de otro modo, si una implicación es verdadera, entonces su contraposición es automáticamente verdadera, y viceversa. En esencia, una implicación y su contraposición son dos maneras de decir la misma cosa. Por ejemplo, la contraposición "Si X no es un mamífero, entonces X no es un gato" es una manera indirecta de decir que los gatos son mamíferos.

El **recíproco** de $A \Longrightarrow B$ es la implicación *inversa* $B \Longrightarrow A$:

Implicación: $A \Longrightarrow B$	Recíproco $B \Longrightarrow A$
Si A es verdadero, entonces B es verdadero.	Si B es verdadero, entonces A es verdadero.

El recíproco desempeña un papel diferente al de la contraposición, porque *el recíproco NO es equivalente a la implicación original*. El recíproco puede ser verdadero o falso, incluso si la implicación original es verdadera. He aquí algunos ejemplos:

Enunciado Verdadero	Recíproco	¿Recíproco Verdadero o Falso?
Si X es un gato, entonces X es un mamífero.	Si X es un mamífero, entonces X es un gato.	Falso
Si m es par, entonces m^2 es par.	Si m^2 es par, entonces m es par.	Verdadero

■ **EJEMPLO 2 Un ejemplo en que el recíproco es falso** Pruebe que el recíproco de “Si m y n son pares, entonces $m + n$ es par” es falso.

Solución El recíproco es “Si $m + n$ es par, entonces m y n son pares”. Para probar que el recíproco es falso, se proporciona un contraejemplo. Considere $m = 1$ y $n = 3$ (o cualquier otra pareja de números impares). La suma es par (pues $1 + 3 = 4$), pero ninguno de los dos, ni 1 ni 3, es par. Por tanto, el recíproco es falso. ■

Un contraejemplo es un ejemplo que cumple la hipótesis pero no la conclusión del enunciado. Si existe un solo contraejemplo, entonces el enunciado es falso. Sin embargo, no se puede demostrar que un enunciado sea cierto proporcionando simplemente un ejemplo.

■ **EJEMPLO 3 Un ejemplo en el que el recíproco es verdadero** Enuncie la contraposición y recíproco del teorema de Pitágoras. ¿Alguno de ellos es verdadero?

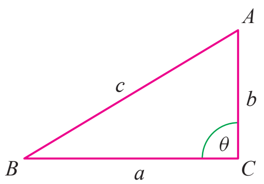


FIGURA 1

Solución Considere un triángulo de lados a, b y c, y sea θ el ángulo opuesto al lado de longitud c como en la f gura 1. El teorema de Pitágoras af rma que si $\theta = 90°$, entonces $a^2 + b^2 = c^2$. He aquí la contraposición y el recíproco de este enunciado:

Teorema de Pitágoras	$\theta = 90° \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$	Verdadero
Contraposición	$a^2 + b^2 \neq c^2 \Longrightarrow \theta \neq 90°$	Automáticamente verdadero
Recíproco	$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow \theta = 90°$	Verdadero (pero no automático)

La contraposición es automáticamente cierta porque solamente es otra manera de expresar el teorema original. El recíproco no es automáticamente cierto porque posiblemente podría existir un triángulo no rectángulo que cumpliera $a^2 + b^2 = c^2$. Sin embargo, el recíproco del teorema de Pitágoras es en realidad cierto. Se demuestra a partir del teorema del coseno (vea el problema 38). ■

Cuando tanto un enunciado $A \Longrightarrow B$ como su recíproco $B \Longrightarrow A$ son verdaderos, se expresa como $A \Longleftrightarrow B$. En tal caso se dice que A y B son **equivalentes**. Se suele describir esta situación con la frase:

$A \Longleftrightarrow B$ $\qquad$ A es verdadero *si y sólo si* B es verdadero.

Por ejemplo:

$a^2 + b^2 = c^2$	si y sólo si	$\theta = 90°$
Está amaneciendo	si y sólo si	el sol está saliendo.

A continuación se mencionan algunas variaciones de la terminología que involucran implicaciones con las que usted puede encontrarse:

Enunciado	**Es otra manera de decir**
A es verdadero si B es verdadero.	$B \Longrightarrow A$
A es verdadero sólo si B es verdadero.	$A \Longrightarrow B$ (A no puede ser verdadero salvo si B es también verdadero.)
Para que A sea verdadero, es necesario que B sea verdadero.	$A \Longrightarrow B$ (A no puede ser verdadero salvo si B es también verdadero.)
Para que A sea verdadero, es suf ciente que B sea verdadero.	$B \Longrightarrow A$
Para que A sea verdadero, es necesario y suf ciente que B sea verdadero.	$B \Longleftrightarrow A$

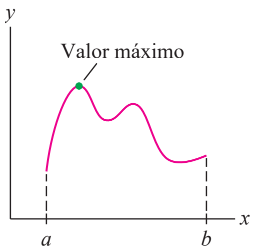


FIGURA 2 Una función continua en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ tiene un valor máximo.

Analizando un teorema

Para ver cómo estas reglas de la lógica aparecen en el cálculo infinitesimal, considere el siguiente resultado de la sección 4.2:

> **TEOREMA 1 Existencia de un máximo en un intervalo cerrado** Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado (acotado) $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza un valor máximo en I (figura 2).

Para analizar este teorema, vamos a escribir las hipótesis y la conclusión por separado:

Hipótesis A: $f(x)$ es continua e I es cerrado.

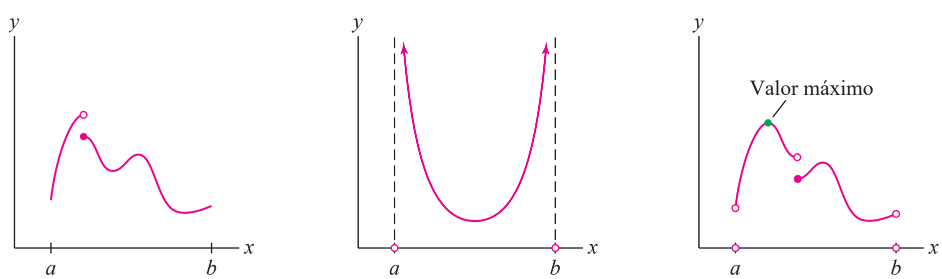
Conclusión B: $f(x)$ alcanza un valor máximo en I.

Una primera cuestión a plantearse es: "¿Son necesarias las hipótesis?" ¿Continúa siendo verdadera la conclusión si se omite uno o ambos supuestos? Para demostrar que ambas hipótesis son necesarias, considere los siguientes contraejemplos:

- **La continuidad de $f(x)$ es una hipótesis necesaria.** La figura 3(A) muestra la gráfica de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$ que no es continua. Esta función no presenta un valor máximo en $[a, b]$, lo que muestra que la conclusión puede fallar si la hipótesis de continuidad no se cumple.
- **La hipótesis de que I es cerrado es necesaria.** La figura 3(B) muestra la gráfica de una función continua sobre un *intervalo abierto* (a, b). Esta función no presenta un valor máximo, lo que muestra que la conclusión puede fallar si el intervalo no es cerrado.

Así, ambas hipótesis en el teorema 1 son necesarias. Al realizar esta afirmación no se está diciendo que la conclusión *siempre* falle cuando una o ambas hipótesis no se cumplan. Únicamente se afirma que la conclusión *puede* fallar cuando alguna de las hipótesis no se cumplan. A continuación se van a analizar la contraposición y el recíproco:

- **Contraposición $\neg B \implies \neg A$ (automáticamente verdadero):** Si $f(x)$ no tiene un valor máximo en I, entonces o bien $f(x)$ no es continua o I no es cerrado (o ambas).
- **Recíproco $B \implies A$ (en este caso, falso):** Si $f(x)$ tiene un valor máximo en I, entonces $f(x)$ es continua e I es cerrado. Se demuestra que este enunciado es falso proporcionando un contraejemplo [figura 3(C)].



(A) El intervalo es cerrado pero la función no es continua. La función no tiene un valor máximo.

(B) La función es continua pero el intervalo es abierto. La función no tiene un valor máximo.

(C) Esta función no es continua y el intervalo no es cerrado, pero la función tiene un valor máximo.

FIGURA 3

La técnica de la demostración por contradicción *es también se conoce por su nombre en latín* reductio ad absurdum *o "reducción al absurdo". Los matemáticos de la Grecia Antigua utilizaron la demostración por contradicción ya en el siglo V* AC *y Euclides (325-265* AC*) la empleó en su tratado clásico de geometría titulado* Los Elementos*. Un ejemplo famoso es la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional, en el ejemplo 4. EL filósofo Platón (427-347* AC*) escribió: "Es indigno del nombre del hombre quien ignora el hecho de que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado".*

Como sabe, la contraposición es simplemente una manera de reescribir el teorema, por lo que es automáticamente verdadera. El recíproco no es de forma automática verdadero y, de hecho, en este caso es falso. la función en la f gura 3(C) proporciona un contraejemplo al recíproco: $f(x)$ tiene un valor máximo en $I = (a, b)$, pero $f(x)$ no es continua e I no es cerrado.

Los matemáticos han ideado varios métodos y estrategias generales para demostrar teoremas. El método de la prueba por inducción se trata en el apéndice C. Otro método importante es la **demostración por contradicción**, también denominada **demostración indirecta**. Suponga que su objetivo es demostrar un enunciado A. En una demostración por contradicción, se empieza asumiendo que A es falso y, entonces, se muestra que esto lleva a una contradicción. Por lo tanto, A debe ser verdadero (para evitar la contradicción).

■ **EJEMPLO 4 Demostración por contradicción** El número $\sqrt{2}$ es irracional (f gura 4).

Solución Suponga que el teorema es falso, es decir que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números naturales. Se puede suponer que p/q es una fracción irreducible y que, por tanto, a lo sumo uno de los dos, o p, o q, es par. Observe que si el cuadrado m^2 de un número entero es par, entonces el propio número m debe ser par.

La relación $\sqrt{2} = p/q$ implica que $2 = p^2/q^2$ o $p^2 = 2q^2$. Esto prueba que p debe ser par. Pero si p es par, entonces $p = 2m$ para algún otro número entero m y $p^2 = 4m^2$. Como $p^2 = 2q^2$, se obtiene que $4m^2 = 2q^2$ o $q^2 = 2m^2$. Esto prueba que q también es par. Pero se han elegido p y q de tal manera que, a lo sumo, uno de ellos sea par. Esto demuestra que el supuesto original, $\sqrt{2} = p/q$, debe ser falso. Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional. ■

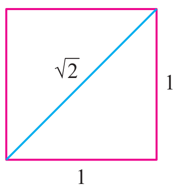


FIGURA 4 La diagonal del cuadrado unitario tiene longitud $\sqrt{2}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL El sello distintivo de las matemáticas es el rigor y la precisión. Un teorema se establece no a través de la observación o la experimentación, sino mediante una demostración que consiste en una cadena de razonamientos sin lagunas.

Este enfoque de las matemáticas procede de los antiguos matemáticos griegos, especialmente Euclides, y sigue siendo el estándar en la investigación contemporánea. En las últimas décadas, el ordenador se ha convertido en una poderosa herramienta para la experimentación y el análisis de datos. Los investigadores pueden utilizar datos experimentales para descubrir posibles resultados matemáticos nuevos, pero el título de "teorema" no se otorga hasta que alguien proporciona una demostración.

Esta insistencia en los teoremas y demostraciones distingue a las matemáticas de las otras ciencias. En las ciencias naturales, los hechos son establecidos a través de la experimentación, y están sujetos a cambios o modif caciones a medida que se adquiere más conocimiento. En matemáticas, las teorías también son desarrolladas y ampliadas, pero los resultados anteriores no quedan invalidados. El teorema de Pitágoras fue descubierto en la antigüedad y es una piedra angular de la geometría plana. En el siglo XIX, los matemáticos comenzaron a estudiar tipos más generales de geometrías (que, en parte, llevó a Einstein a la geometría del espacio-tiempo de cuatro dimensiones en la Teoría de la Relatividad). El teorema de Pitágoras no se cumple en estas geometrías más generales, pero su estatus en la geometría plana queda inalterado.

Uno de los problemas más famosos de las matemáticas es el "Teorema de Fermat." Afirma que la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones enteras si $n \geq 3$. En una nota marginal escrita alrededor del 1630, Fermat afirmó que había encontrado una demostración y, durante siglos, se comprobó esta afirmación para diferentes valores del exponente n. Sin embargo, fue en 1994 cuando el matemático Andrew Wiles, de la Universidad Princeton, obtuvo una demostración completa para este resultado.

A RESUMEN

- La implicación $A \implies B$ es la af rmación "Si A es verdadero, entonces B es verdadero."
- La *contraposición* de $A \implies B$ es la implicación $\neg B \implies \neg A$, que dice "Si B es falso, entonces A es falso." Una implicación y su contraposición son equivalentes (una es verdadera si y sólo si la otra es verdadera).
- El *recíproco* de $A \implies B$ es $B \implies A$. Una implicación y su recíproco no son necesariamente equivalentes. Una puede ser verdadera y la otra falsa.

- A y B son *equivalentes* si $A \Longrightarrow B$ y $B \Longrightarrow A$ son ambas verdaderas.
- En una demostración por contradicción (en la que el objetivo es demostrar un enunciado A), se empieza suponiendo que A es falso y se demuestra que este supuesto conlleva una contradicción.

A PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la contraposición de $A \Longrightarrow B$?

(a) $B \Longrightarrow A$ **(b)** $\neg B \Longrightarrow A$

(c) $\neg B \Longrightarrow \neg A$ **(d)** $\neg A \Longrightarrow \neg B$

2. ¿Cuál de las posibilidades del ejercicio 1 es el recíproco de $A \Longrightarrow B$?

3. Suponga que $A \Longrightarrow B$ es verdadero. ¿Qué resulta automáticamente verdadero, el recíproco o la contraposición?

4. Reformule como una implicación: “Un triángulo es un polígono.”

Problemas

1. ¿Cuál es la negación del enunciado “Tanto el coche como la camiseta son azules”?

(a) Ni el coche ni la camiseta son azules.

(b) El coche no es azul y/o la camiseta no es azul.

2. ¿Cuál es la contraposición de la implicación “Si el coche tuviera gasolina, entonces funcionaría”?

(a) Si el coche no tiene gasolina, entonces no funciona.

(b) Si el coche no funciona, entonces no tiene gasolina.

En los problemas 3-8, formule the negación.

3. Son las 4 en punto de la tarde.

4. $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

5. m y n son enteros impares.

6. O bien m es impar o bien n es impar.

7. x es un número real e y es un entero.

8. $f(x)$ es una función lineal.

En los problemas 9-14, formule la contraposición y el recíproco.

9. Si m y n son enteros impares, entonces mn es impar.

10. Si hoy es martes, entonces estamos en Bélgica.

11. Si hoy es martes, entonces no estamos en Bélgica.

12. Si $x > 4$, entonces $x^2 > 16$.

13. Si m^2 es divisible por 3, entonces m es divisible por 3.

14. Si $x^2 = 2$, entonces x es irracional.

En los problemas 15-18, proporcione un contraejemplo que muestre que el recíproco del enunciado es falso.

15. Si m es impar, entonces $2m + 1$ es también impar.

16. Si $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero, entonces es un triángulo isósceles.

17. Si m es divisible por 9 y 4, entonces m es divisible por 12.

18. Si m es impar, entonces $m^3 - m$ es divisible por 3.

En los problemas 19-22, determine si el recíproco del enunciado es falso.

19. Si $x > 4$ e $y > 4$, entonces $x + y > 8$.

20. Si $x > 4$, entonces $x^2 > 16$.

21. Si $|x| > 4$, entonces $x^2 > 16$.

22. Si m y n son pares, entonces mn es par.

En los problemas 23 y 24, formule la contraposición y el recíproco (no es necesario saber lo que signif can estos enunciados).

23. Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces $f(x)g(x)$ es derivable.

24. Si el campo de fuerza es radial y decrece con el cuadrado del inverso de la distancia, entonces todas las órbitas cerradas son elipses.

*En los problemas 25-28, el **inverso** de $A \Longrightarrow B$ es la implicación $\neg A \Longrightarrow \neg B$.*

25. ¿Cuál de las siguientes es el inverso de la implicación “Si ella se tiró al lago, entonces ella acabó mojada”?

(a) Si ella no acabó mojada, entonces ella no se tiró al lago.

(b) Si ella no se tiró al lago, entonces ella no acabó mojada. ¿Es verdadero el inverso?

26. Formule los inversos de las siguientes implicaciones:

(a) Si X es un ratón, entonces X es un roedor.

(b) Si te quedas durmiendo hasta tarde, perderás la clase.

(c) Si una estrella gira alrededor del Sol, entonces es un planeta.

27. Explique por qué el inverso es equivalente al recíproco.

28. Formule el inverso del teorema de Pitágoras. ¿Es verdadero?

29. El teorema 1 de la sección 2.4 dice lo siguiente: “Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas, entonces $f(x) + g(x)$ es continua”. Siguiendo las leyes de la lógica ¿se puede deducir que si $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas, entonces $f(x) + g(x)$ no es continua?

30. Escriba una demostración por contradicción para este hecho: no existe un número racional positivo que sea el más pequeño de todos. Base su demostración en el hecho que si $r > 0$, entonces $0 < r/2 < r$.

31. Demuestre por contradicción que si $x+y > 2$, entonces o bien $x > 1$ o bien $y > 1$ (o ambos).

En los problemas 32-35, demuestre por contradicción que el número es irracional.

32. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ **33.** $\sqrt{3}$ **34.** $\sqrt[3]{2}$ **35.** $\sqrt[4]{11}$

36. Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales. El siguiente teorema es cierto: si $\triangle$ es un triángulo con dos lados iguales, entonces $\triangle$ es un triángulo isósceles.

(a) ¿Cuál es la hipótesis?

(b) Demuestre, proporcionando un contraejemplo, que la hipótesis es necesaria.

(c) ¿Cuál es la contraposición?

(d) ¿Cuál es el recíproco? ¿Es verdadero?

37. Considere el siguiente teorema: sea $f(x)$ un polinomio cuadrático cuyo término de mayor grado sea positivo. Entonces $f(x)$ tiene un valor mínimo.

(a) ¿Cuáles son las hipótesis?

(b) ¿Cuál es la contraposición?

(c) ¿Cuál es el recíproco? ¿Es verdadero?

Problemas avanzados

38. Sean a, b y c los lados de un triángulo y sea θ el ángulo opuesto al lado c. Use el teorema del coseno (teorema 1 de la sección 1.4) para demostrar el recíproco del teorema de Pitágoras.

39. Lleve a cabo los detalles de la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional (esta demostración es de R. Palais). Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces $n\sqrt{2}$ es un número natural para algún n. Sea n el menor de tales números enteros y sea $m = n\sqrt{2} - n$.

(a) Demuestre que $m < n$.

(b) Demuestre que $m\sqrt{2}$ es un número natural.

Explique por qué (a) y (b) implican que $\sqrt{2}$ es irracional.

40. Generalice el razonamiento del problema 39 para demostrar que $\sqrt{A}$ es irracional si A es un número natural que no es un cuadrado perfecto. *Indicación:* considere n como antes y sea $m = n\sqrt{A} - n[\sqrt{A}]$, donde $[x]$ es el la función parte entera.

41. Generalice aún más y demuestre que para todo número natural r, la raíz r-ésima $\sqrt[r]{A}$ es un número irracional salvo si A es una potencia r-ésima exacta. *Indicación:* sea $x = \sqrt[r]{A}$. Demuestre que si x es racional, entonces se puede considerar un número natural n lo más pequeño posible de manera que nx^j sea un número natural para $j = 1, \ldots, r-1$. A continuación, considere $m = nx - n[x]$ como antes.

42. Dada una lista f nita de números primos $p_1, \ldots, p_N$, sea $M = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1$. Pruebe que M no es divisible por ninguno de los números primos $p_1, \ldots, p_N$. Use este resultado y el hecho que cualquier número admite una descomposición en factores primos, para demostrar que hay inf nitos números primos. Este razonamiento fue utilizado por Euclides en *Los Elementos*.

B PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

"El ingenioso método de expresar cada número posible utilizando un conjunto de diez símbolos (cada símbolo tiene un valor posicional y un valor absoluto) surgió en la India. La idea parece tan simple hoy en día que su significado y profunda importancia no es apreciada. Su sencillez reside en la forma en que facilita el cálculo y colocó a la aritmética entre los inventos útiles más importantes. La importancia de esta invención es más fácil de apreciar si se considera que fue más allá de los dos hombres más grandes de la antigüedad, Arquímedes y Apolonio."

—Pierre-Simon Laplace, uno de los grandes matemáticos franceses del siglo XVIII.

En este apéndice se tratan las propiedades básicas de los números reales. En primer lugar, recuerde que un número real es un número que puede ser representado por un decimal f -nito o inf nito (también llamado un desarrollo decimal). El conjunto de todos los números reales se denota por $\mathbb{R}$ y se suele visualizar como la "recta numérica"(f gura 1).

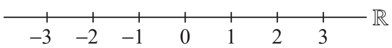


FIGURA 1 La recta real.

Por tanto, un número real a se representa como:

$$a = \pm n{,}a_1a_2a_3a_4\ldots,$$

donde n es cualquier número natural y cada dígito a_j es un número natural entre 0 y 9. Por ejemplo, $10\pi = 31{,}41592\ldots$. Recuerde que a es racional si su desarrollo es f nito o periódico e irracional si su desarrollo es no periódico. Además, el desarrollo decimal es único salvo por la siguiente excepción: todo desarrollo f nito es igual a un desarrollo en el que el dígito 9 es periódico. Por ejemplo, $0{,}5 = 0{,}4999\cdots = 0{,}4\overset{\frown}{9}$.

Se va a dar por sentado que las operaciones de suma y multiplicación están def nidas en $\mathbb{R}$, es decir en el conjunto de todos los decimales. En términos generales, la suma y la multiplicación de decimales inf nitos se def nen en términos de decimales f nitos. Para $d \geq 1$, def na el truncamiento de orden d de $a = n{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ como el decimal f nito $a(d) = a{,}a_1a_2\ldots a_d$ obtenido truncando en la d-ésima posición. Para obtener la suma $a + b$, suponga que tanto a como b son inf nitos (posiblemente terminando con nueves repetidos). Esto elimina cualquier posible ambigüedad en el desarrollo. Entonces, el dígito n-ésimo de $a + b$ es igual al dígito n-ésimo de $a(d) + b(d)$ para d suf cientemente grande (a partir de un cierto punto y en adelante, el dígito n-ésimo de $a(d) + b(d)$ no cambia y es el valor del dígito n-ésimo de $a + b$). La multiplicación se def ne de manera similar. Además, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva se cumplen (tabla 1).

TABLA 1 **Propiedades algebraicas**

Propiedad conmutativa:	$a + b = b + a, \quad ab = ba$
Propiedad asociativa:	$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$
Propiedad distributiva:	$a(b + c) = ab + ac$

Todo número real x admite un opuesto respecto a la suma, $-x$, tal que $x + (-x) = 0$, y todo número real diferente de cero x admite un inverso respecto a la multiplicación, x^{-1}, tal que $x(x^{-1}) = 1$. No se consideran la resta y la división como operaciones algebraicas por separado, ya que se def nen en términos de inversos. Por def nición, la diferencia $x - y$ es igual a $x + (-y)$, y el cociente x/y es igual a $x(y^{-1})$ para $y \neq 0$.

Además de las operaciones algebraicas, existe una **relación de orden** en $\mathbb{R}$: dados dos números reales cualesquiera a y b, exactamente una de las siguientes af rmaciones es cierta:

$$a = b \quad \text{o} \quad a < b \quad \text{o} \quad a > b$$

Para distinguir entre las condiciones $a \leq b$ o $a < b$, nos solemos referir a $a < b$ como a una **desigualdad estricta**. Un convenio similar se aplica a $>$ y $\geq$. Las reglas de la tabla 2 permiten manipular desigualdades. La última propiedad del orden dice que una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplica por un número negativo c. Por ejemplo:

$$-2 < 5 \quad \text{pero} \quad (-3)(-2) > (-3)5$$

TABLA 2 **Propiedades del orden**

Si $a < b$ y $b < c$,	entonces $a < c$.
Si $a < b$ y $c < d$,	entonces $a + c < b + d$.
Si $a < b$ y $c > 0$,	entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y $c < 0$,	entonces $ac > bc$.

Las propiedades algebraicas y del orden de los números reales son sin duda familiares. Ahora se va a analizar la no tan conocida **propiedad del supremo (sup)** de los números reales. Esta propiedad es una forma de expresar la llamada **completitud** de los números reales. Hay otras maneras de formular la completitud (como la propiedad de los intervalos llamados anidados, que se trata en cualquier libro de análisis) que son equivalentes a la propiedad del sup y tienen el mismo propósito. La completitud se utiliza en cálculo para la construcción de demostraciones rigurosas de teoremas básicos sobre funciones continuas, tales como el teorema del valor intermedio (TVI), o la existencia de valores extremos en un intervalo cerrado. La idea subyacente es que la recta real "no tiene agujeros". Más adelante se tratará esta idea con más detalle. Antes, se introducen las def niciones necesarias.

Suponga que S es un conjunto no vacío de números reales. Se dice que un número M es una **cota superior** para S si:

$$x \leq M \qquad \text{para todo } x \in S$$

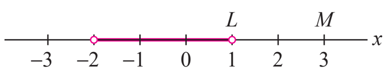


FIGURA 2 $M = 3$ es una cota superior para el conjunto $S = (-2, 1)$. El sup es $L = 1$.

Si S tiene una cota superior, se dice que S está **acotado superiormente**. El **supremo** L es una cota superior para S tal que cualquier otra cota superior M cumple $M \geq L$. Por ejemplo (f gura 2):

- $M = 3$ es una cota superior para el intervalo abierto $S = (-2, 1)$.
- $L = 1$ es el sup de $S = (-2, 1)$.

A continuación se enuncia la propiedad del sup en los números reales.

TEOREMA 1 Existencia del supremo Sea S un conjunto no vacío de números reales que esté acotado superiomente. Entonces S tiene supremo.

De manera similar, se dice que un número B es una **cota inferior** de S si $x \geq B$ para todo $x \in S$. Se dice que S está **acotado inferiormente** si S tiene una cota inferior. El **ínf mo** (inf) es una cota inferior M tal que cualquier otra cota inferior B cumple que $B \leq M$. El conjunto de los números reales también tiene la propiedad del inf: si S es un conjunto no vacío de números reales que está acotado inferiormente, entonces S tiene inf. Esto se puede deducir de forma inmediata del teorema 1. Dado un conjunto no vacío de números reales S, sea $-S$ el conjunto de los números de la forma $-x$ para $x \in S$. Entonces $-S$ tiene cota superior si S tiene cota inferior. En consecuencia, $-S$ tiene por sup L, teorema 1, y $-L$ es el inf de S.

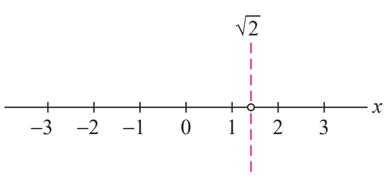


FIGURA 3 Los números racionales presentan un "agujero" en la posición $\sqrt{2}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL El teorema 1 puede parecer razonable pero quizás no queda claro por qué es útil. Se ha mencionado anteriormente que la propiedad sup expresa la idea de que $\mathbb{R}$ es "completo", o que "no tiene agujeros". Para ilustrar esta idea compare $\mathbb{R}$ con el conjunto de los números racionales, que se denota por $\mathbb{Q}$. A nivel intuitivo, $\mathbb{Q}$ no es completo pues no se encuentran los números irracionales. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ presenta un "agujero" en la posición en que el número irracional $\sqrt{2}$ debería estar situado (f gura 3). Este agujero divide a $\mathbb{Q}$ en dos mitades que no están conectadas una a la otra (la mitad a la izquierda y a la derecha de $\sqrt{2}$). Además, la mitad a la izquierda está acotada superiormente, pero no existe ningún número racional que sea sup y la mitad a la derecha está acotada inferiormente, pero no hay ningún número racional que sea inf. El sup y el inf son ambos iguales al número irracional $\sqrt{2}$, que existe únicamente en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$. Así, contrariamente a lo que ocurre en $\mathbb{R}$, los números racionales $\mathbb{Q}$ no tienen la propiedad de sup.

■ **EJEMPLO 1** Pruebe que 2 no tiene raíz cuadrada aplicando la propiedad del sup al conjunto:

$$S = \{x : x^2 < 2\}$$

Solución En primer lugar, observe que S está acotado por la cota superior $M = 2$. De hecho, si $x > 2$, entonces x cumple $x^2 > 4$ y por tanto x no pertenecería a S. Por la propiedad del sup, S tiene menor cota superior. Sea esta cota L. Se va a demostrar que $L = \sqrt{2}$ o, equivalentemente, que $L^2 = 2$. Se demostrará probando que $L^2 \geq 2$ y que $L^2 \leq 2$.

Si $L^2 < 2$, sea $b = L + h$, donde $h > 0$. Entonces:

$$b^2 = L^2 + 2Lh + h^2 = L^2 + h(2L + h) \qquad \boxed{1}$$

Se puede hacer que la cantidad $h(2L + h)$ sea tan pequeña como se desee escogiendo $h > 0$ suficientemente pequeño. En particular, se puede escoger h positivo tal que $h(2L + h) < 2 - L^2$. Con esta elección, $b^2 < L^2 + (2 - L^2) = 2$ por la ec. (1). Así, $b \in S$. Pero $b > L$ pues $h > 0$ y por tanto L no es una cota superior de S, lo que entra en contradicción con la hipótesis sobre L. De aquí se deduce que $L^2 \geq 2$.

Si $L^2 > 2$, sea $b = L - h$, para $h > 0$. Entonces:

$$b^2 = L^2 - 2Lh + h^2 = L^2 - h(2L - h)$$

Ahora escoja h positivo pero suficientemente pequeño para que $0 < h(2L - h) < L^2 - 2$. Entonces $b^2 > L^2 - (L^2 - 2) = 2$. Pero $b < L$, por lo que b es una menor cota inferior para S. De hecho, si $x \geq b$, entonces $x^2 \geq b^2 > 2$ y x no pertenecería a S. Esto contradice la hipótesis que L es el sup. Se deduce que $L^2 \leq 2$ y como ya se ha probado que $L^2 \geq 2$, se tiene que $L^2 = 2$ como se quería demostrar. ■

A continuación se demuestran tres teoremas importantes, el tercero de los cuales se utilizará en la demostración de la propiedad del sup.

TEOREMA 2 Teorema de Bolzano-Weierstrass Sea S un conjunto acotado e infinito de números reales. Entonces, existe una sucesión formada por elementos distintos $\{a_n\}$ en S tales que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Demostración Por simplicidad de la notación, suponga que S está contenido en el intervalo unitario $[0, 1]$ (una demostración similar funciona en el caso general). Si $k_1, k_2, \dots, k_n$ es una sucesión de n dígitos (es decir, cada k_j es un número entero y $0 \leq k_j \leq 9$), sea:

$$S(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

el conjunto de $x \in S$ cuyo desarrollo decimal empieza como $0{,}k_1k_2 \dots k_n$. El conjunto S es la unión de los subconjuntos $S(0), S(1), \dots, S(9)$ y como S es infinito, al menos uno de estos conjuntos debe ser infinito. Por tanto, se puede escoger k_1 tal que $S(k_1)$ sea infinito. De manera similar, como mínimo uno de los conjuntos $S(k_1, 0), S(k_2, 1), \dots, S(k_1, 9)$ debe ser infinito, por lo que se puede escoger k_2 tal que $S(k_1, k_2)$ sea infinito. Continuando este proceso, se obtiene una sucesión infinita $\{k_n\}$ tal que $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sea infinito para todo n. Se puede elegir una sucesión de elementos $a_n \in S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ con la propiedad de que a_n difiera de $a_1, \dots, a_{n-1}$ para todo n. Sea L el decimal infinito $0{,}k_1k_2k_3 \dots$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ pues $|L - a_n| < 10^{-n}$ para todo n. ■

El teorema de Bolzano-Weierstrass se utiliza para demostrar dos resultados importantes sobre sucesiones $\{a_n\}$. Recuerde que una cota superior para $\{a_n\}$ es un número M tal que $a_j \leq M$ para todo j. Si existe una cota superior, se dice que $\{a_n\}$ está acotada superiormente. Las cotas inferiores se definen de forma análoga y se dice que $\{a_n\}$ está acotado inferiormente si existe una cota inferior. Una sucesión está acotada si lo está superior e inferiormente. Una **subsucesión** de $\{a_n\}$ es una sucesión de elementos $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots,$ donde $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Sección 11.1

Considere ahora una sucesión acotada $\{a_n\}$. Si inf nitos a_n son distintos, según el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ existe. En caso contrario, inf nitos a_n deben coincidir y estos términos forman una subsucesión convergente. Esto demuestra el siguiente resultado.

TEOREMA 3 Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

TEOREMA 4 Una sucesión monótona y acotada es convergente

- Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leq M$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n \leq M$.
- Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n \geq M$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n \geq M$.

Demostración Suponga que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por M. Entonces $\{a_n\}$ está automáticamente acotada inferiormente por $m = a_1$ pues $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots$. Por tanto, $\{a_n\}$ está acotada y, por el teorema 3, se puede considerar una subsucesión convergente $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$. Sea:

$$L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

Observe que $a_n \leq L$ para todo n. Si no fuera así, entonces $a_n > L$ para algún n y entonces $a_{n_k} \geq a_n > L$ para todo k tal que $n_k \geq n$. Pero esto entra en contradicción con que $a_{n_k} \to L$. Ahora, por def nición, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon > 0$ tal que:

$$|a_{n_k} - L| < \epsilon \qquad \text{si } n_k > N_\epsilon$$

Considere m tal que $n_m > N_\epsilon$. Si $n \geq n_m$, entonces $a_{n_m} \leq a_n \leq L$ y, por tanto:

$$|a_n - L| \leq |a_{n_m} - L| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq n_m$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Queda por demostrar que $L \leq M$. Si $L > M$, sea $\epsilon = (L - M)/2$ y considere N tal que:

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \text{si } k > N$$

Entonces $a_n > L - \epsilon = M + \epsilon$. Esto contradice el supuesto que M es una cota superior para $\{a_n\}$. Por tanto, $L \leq M$ como se quería demostrar. ■

Demostración del teorema 1 A continuación se usará el teorema 4 para demostrar la propiedad del sup (teorema 1). Nuevamente, si x es un número real, sea $x(d)$ el truncamiento de x de longitud d. Por ejemplo:

$$\text{Si } x = 1{,}41569, \text{ entonces } x(3) = 1{,}415$$

Se dice que x es un *decimal de longitud* d si $x = x(d)$. Dos decimales distintos de longitud d dif eren a lo sumo en 10^{-d}. Así, dados dos números reales $A < B$, a lo sumo hay un número f nito de decimales de longitud d entre A y B.

Ahora, sea S un conjunto no vacío de números reales con cota superior M. Se va a demostrar que S tiene supremo. Sea $S(d)$ en conjunto de los truncamientos de longitud d:

$$S(d) = \{x(d) : x \in S\}$$

Af rmamos que $S(d)$ tiene un elemento máximo. Para comprobarlo, considere cualquier $a \in S$. Si $x \in S$ y $x(d) > a(d)$, entonces:

$$a(d) \leq x(d) \leq M$$

Así, y según la observación realizada en el párrafo previo, hay a lo sumo un número finito de valores $x(d)$ en $S(d)$ mayores que $a(d)$. El mayor de éstos es el elemento máximo en $S(d)$.

Para $d = 1, 2, \ldots$, considere un elemento x_d tal que $x_d(d)$ sea el elemento máximo en $S(d)$. Por construcción, $\{x_d(d)\}$ es una sucesión creciente (pues el mayor truncamiento de orden d no puede hacerse más pequeño cuando d aumenta). Además, $x_d(d) \le M$ para todo d. Ahora, aplique el teorema 4 para deducir que $\{x_d(d)\}$ converge a un límite L. Afirmamos que L es el sup de S. Observe primero que L es una cota superior para S. En realidad, si $x \in S$, entonces $x(d) \le L$ para todo d y, por tanto, $x \le L$. Para probar que L es el sup, suponga que M es una cota cota superior tal que $M < L$. Entonces $x_d \le M$ para todo d y, por tanto, $x_d(d) \le M$ para todo d. Pero entonces:

$$L = \lim_{d\to\infty} x_d(d) \le M$$

Esto es una contradicción pues $M < L$. En consecuencia, L es el sup de S. ■

Como se mencionó anteriormente, la propiedad del sup se utiliza en cálculo para demostrar ciertos teoremas básicos sobre funciones continuas. Como ejemplo, se va a demostrar el TVI. Otro ejemplo es el teorema de existencia de extremos en un intervalo cerrado (vea el apéndice D).

TEOREMA 5 Teorema del Valor Intermedio Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \ne f(b)$, entonces para cualquier valor M comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Demostración Suponga, en primer lugar que $M = 0$. Sustituyendo $f(x)$ por $-f(x)$ si fuera necesario, se puede asumir que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Ahora sea:

$$S = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

Entonces $a \in S$ pues $f(a) < 0$ y, por tanto, S es no vacío. Claramente, b es una cota superior para S. Así, por la propiedad del sup, S tiene un sup L. Afirmamos que $f(L) = 0$. En caso contrario, sea $r = f(L)$. Suponga, en primer lugar que $r > 0$.

Como $f(x)$ es continua, existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(L)| = |f(x) - r| < \frac{1}{2}r \qquad \text{si} \qquad |x - L| < \delta$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{2}r < f(x) < \frac{3}{2}r \qquad \text{si} \qquad |x - L| < \delta$$

El número $\frac{1}{2}r$ es positivo, por lo que se puede deducir que:

$$f(x) > 0 \qquad \text{si} \qquad L - \delta < x < L + \delta$$

Por definición de L, $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$ tal que $x > L$ y, por tanto, $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$ tal que $x > L - \delta$. Así, $L - \delta$ es una cota superior para S. Esto es una contradicción pues L es el sup de S y, por tanto, $r = f(L)$ no puede cumplir que $r > 0$. Análogamente, r no puede verificar que $r < 0$. La conclusión es que $f(L) = 0$ como se había anunciado.

Ahora, si M no es cero, sea $g(x) = f(x) - M$. Entonces 0 se encuentra entre $g(a)$ y $g(b)$ y, según se acaba de demostrar, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$. Pero entonces $f(c) = g(c) + M = M$, como se quería demostrar. ■

C INDUCCIÓN Y EL TEOREMA DEL BINOMIO

El Principio de Inducción es un método de demostración ampliamente utilizado para probar que un enunciado $P(n)$ es válido para todos los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$. He aquí dos enunciados de este tipo:

- $P(n)$: la suma de los n primeros números impares es igual a n^2.
- $P(n)$: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

En el primer enunciado se af rma que para todo número natural n, se verif ca:

$$\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}_{\text{Suma de los primeros } n \text{ números impares}} = n^2 \qquad \boxed{1}$$

Se puede comprobar directamente que $P(n)$ es verdadero para los primeros valores de n:

$P(1)$ es la igualdad:	$1 = 1^2$	(verdadera)
$P(2)$ es la igualdad:	$1 + 3 = 2^2$	(verdadera)
$P(3)$ es la igualdad:	$1 + 3 + 5 = 3^2$	(verdadera)

El principio de inducción se puede utilizar para establecer que $P(n)$ es válido para todo n.

El Principio de Inducción se aplica si $P(n)$ es un enunciado definido para $n \geq n_0$, donde n_0 es un entero fijado. Suponga que:

*(i) **Etapa inicial:** $P(n_0)$ es verdadero.*
*(ii) **Etapa inductiva:** si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$.*

Entonces $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq n_0$.

TEOREMA 1 Principio de Inducción Sea $P(n)$ un enunciado que depende de un número natural n. Suponga que:

(i) Etapa inicial: $P(1)$ es verdadero.
(ii) Etapa inductiva: si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$.

Entonces $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$.

EJEMPLO 1 Demuestre que $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para todo número natural n.

Solución Denote por $P(n)$ la igualdad:

$$P(n): \qquad 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Etapa 1. **Etapa inicial: pruebe que $P(1)$ es verdadero**

Se ha comprobado anteriormente. $P(1)$ es la igualdad $1 = 1^2$.

Etapa 2. **Etapa inductiva: pruebe que si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$**

Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces:

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Sume $2k + 1$ a ambos lados:

$$[1 + 3 + \cdots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$
$$1 + 3 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Esto es precisamente el enunciado $P(k + 1)$. Por tanto, $P(k + 1)$ es verdadero siempre que $P(k)$ sea verdadero. Por el principio de inducción, $P(k)$ es verdadero para todo k. ■

La intuición subyacente al principio de inducción es la siguiente. Si $P(n)$ no fuera cierto para todo n, entonces se podría considerar el menor natural k para el que $P(k)$ fuera falso. Además, $k > 1$ porque $P(1)$ es verdadero. Entonces $P(k - 1)$ es verdadero [en caso contrario, $P(k)$ no sería el menor "contraejemplo"]. Por otra parte, si $P(k-1)$ es verdadero, entonces $P(k)$ también lo es por la etapa inductiva. Esto es una contradicción. Por tanto, $P(k)$ debe ser verdadero para todo k.

■ **EJEMPLO 2** Use el principio de inducción y la regla del producto para demostrar que para todo natural n, se verif ca:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Solución Sea $P(n)$ la fórmula $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

***Etapa 1.* Etapa inicial: pruebe que $P(1)$ es verdadero**

Utilice la def nición con límites para comprobar $P(1)$:

$$\frac{d}{dx}x = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

***Etapa 2.* Etapa inductiva: pruebe que si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$**

Para llevar a cabo la etapa inductiva, suponga que $\dfrac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$, donde $k \geq 1$. Entonces, por la regla del producto, se tiene:

$$\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^k) = x\frac{d}{dx}x^k + x^k\frac{d}{dx}x = x(kx^{k-1}) + x^k =$$

$$= kx^k + x^k = (k+1)x^k$$

Esto demuestra que $P(k + 1)$ es verdadero.

Por el principio de inducción, $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq 1$. ■

En el Triángulo de Pascal, *la fila n-ésima muestra los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$:*

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
n & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10 \quad 5} & & & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1
\end{array}$$

El triángulo se construye de la siguiente manera: cada entrada es la suma de las dos entradas por encima de ella en la línea precedente. Por ejemplo, la entrada 15 en la línea $n = 6$ es la suma $10 + 5$ de las entradas por encima de ella en la línea $n = 5$. La relación de recurrencia garantiza que las entradas en el triángulo son los coeficientes binomiales.

Como otra aplicación de la inducción, se demuestra a continuación el teorema del binomio, que describe el desarrollo del binomio $(a + b)^n$. Los primeros desarrollos son conocidos:

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En general, se tiene el desarrollo:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \tag{2}$$

donde el coef ciente de $a^{n-k}b^k$, que se denota $\binom{n}{k}$, se denomina el **coef ciente binomial**. Observe que el primer término en la ec. (2) corresponde a $k = 0$ y que el último corresponde a $k = n$; por tanto, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. En notación sumatoria:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

El Triángulo de Pascal (que se describe en la nota al margen de la página A14) se puede utilizar para calcular los coeficientes binomiales si n y k no son demasiado grandes. El Teorema del Binomio proporciona la siguiente fórmula general:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}} \qquad \boxed{3}$$

Antes de demostrar esta fórmula, se va a demostrar una relación de recurrencia para los coeficientes binomiales. Sin embargo, observe que la ec. (3) es cierta para $k = 0$ y para $k = n$ (recuerde que, por convenio, $0! = 1$):

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

TEOREMA 2 Relación de recurrencia para los coeficientes binomiales

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{para } 1 \le k \le n-1}$$

Demostración Exprese $(a+b)^n$ como $(a+b)(a+b)^{n-1}$ y desarróllelo en términos de los coeficientes binomiales:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-(k+1)} b^{k+1}$$

Sustituyendo k por $k-1$ en la segunda suma, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k$$

A la derecha de la igualdad, el primer término de la primera suma es a^n y el último término es b^n. Por tanto, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) a^{n-k} b^k \right) + b^n$$

De aquí se deduce la relación de recurrencia, dado que los coeficientes de $a^{n-k}b^k$, en ambos lados de la ecuación, deben ser iguales. ■

Ahora utilice inducción para demostrar la ec. (3). Sea $P(n)$ el enunciado siguiente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{para } 0 \le k \le n$$

Se tiene que $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ pues $(a+b)^1 = a+b$, por lo que $P(1)$ es verdadero. Además, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ tal y como se mencionó anteriormente, pues a^n y b^n tienen por coef ciente 1 en el desarrollo de $(a+b)^n$. Para el paso inductivo, suponga que $P(n)$ es verdadero. Según la relación de recurrencia, para $1 \le k \le n$, se tiene:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} =$$

$$= n!\left(\frac{n+1-k}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{k}{k!\,(n+1-k)!}\right) = n!\left(\frac{n+1}{k!\,(n+1-k)!}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Así, $P(n+1)$ también es verdadero y el teorema del binomio queda demostrado por inducción.

■ **EJEMPLO 3** Use el teorema del binomio para desarrollar $(x+y)^5$ y $(x+2)^3$.

Solución Según la quinta f la en el triángulo de Pascal, se tiene:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Consultando la tercera f la en el triángulo de Pascal, se obtiene:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$ ■

C PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

En los problemas 1-4, use el principio de inducción para demostrar la fórmula para todos los números naturales n.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

4. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ para $x \ne 1$

5. Sea $P(n)$ el siguiente enunciado: $2^n > n$

(a) Pruebe que $P(1)$ es verdadero.

(b) Observe que si $2^n > n$, entonces $2^n + 2^n > 2n$. Use esto para demostrar que si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ es verdadero para $n = k+1$. Concluya que $P(n)$ es verdadero para todo n.

6. Use inducción para demostrar que $n! > 2^n$ para $n \ge 4$.

Sea $\{F_n\}$ la sucesión de Fibonacci, def nida por la fórmula de recurrencia:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_1 = F_2 = 1$$

Los primeros términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... *En los problemas 7-10, use inducción para probar las identidades.*

7. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

8. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_{n+1}F_n$

9. $F_n = \dfrac{R_+^n - R_-^n}{\sqrt{5}}$, donde $R_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

10. $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$. *Indicación:* para la etapa inductiva, pruebe que:

$$F_{n+2}F_n = F_{n+1}F_n + F_n^2$$
$$F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1}$$

11. Use inducción para demostrar que $f(n) = 8^n - 1$ es divisible por 7 para todo número natural n. *Indicación:* para la etapa inductiva, pruebe que:

$$8^{k+1} - 1 = 7 \cdot 8^k + (8^k - 1)$$

12. Use inducción para demostrar que $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo número natural n.

13. Use inducción para demostrar que $5^{2n} - 4^n$ es divisible por 7 para todo número natural n.

14. Use el Triángulo de Pascal para obtener los desarrollos de $(a + b)^6$ y de $(a - b)^4$.

15. Desarrolle $(x + x^{-1})^4$.

16. ¿Cuál es el coef ciente de x^9 en $(x^3 + x)^5$?

17. Sea $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(a) Use el Triángulo de Pascal para calcular $S(n)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Demuestre que $S(n) = 2^n$ para todo $n \geq 1$. *Indicación:* desarrolle $(a + b)^n$ y evalúe en $a = b = 1$.

18. Sea $T(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

(a) Use el Triángulo de Pascal para calcular $T(n)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Demuestre que $T(n) = 0$ para todo $n \geq 1$. *Indicación:* desarrolle $(a + b)^n$ y evalúe en $a = 1$, $b = -1$.

D DEMOSTRACIONES ADICIONALES

En este apéndice, se proporcionan demostraciones de diversos teoremas que se han enunciado o utilizado en el texto.

Sección 2.3

TEOREMA 1 Leyes básicas de los límites Suponga que $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen. Entonces:

(i) $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

(ii) Para cualquier número k, $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$.

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$

(iv) Si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Demostración Sea $L = \lim_{x\to c} f(x)$ y $M = \lim_{x\to c} g(x)$. La ley de la suma (i) se demostró en la sección 2.9. Observe que (ii) es un caso especial de (iii), en el que $g(x) = k$ es una función constante. Por tanto, basta con demostrar la ley del producto (iii). Exprese:

$$f(x)g(x) - LM = f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)$$

y aplique la desigualdad triangular para obtener:

$$|f(x)g(x) - LM| \le |f(x)(g(x) - M)| + |M(f(x) - L)| \tag{1}$$

Por la definición de límite, se puede escoger $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < 1 \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta$$

De aquí se tiene que $|f(x)| < |L| + 1$ para $0 < |x - c| < \delta$. Ahora considere cualquier número $\epsilon > 0$. Aplicando de nuevo la definición de límite, se tiene que escogiendo un δ menor si fuera necesario, también se puede asegurar que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - L| \le \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} \quad \text{y} \quad |g(x) - M| \le \frac{\epsilon}{2(|L| + 1)}$$

Por la (1), se tiene que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &\le |f(x)|\,|g(x) - M| + |M|\,|f(x) - L| \le \\ &\le (|L| + 1)\frac{\epsilon}{2(|L| + 1)} + |M|\frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} \le \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, esto demuestra que $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = LM$. Para demostrar la ley del cociente (iv), es suf ciente comprobar que si $M \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M} \tag{2}$$

Pues si la (2) se cumpliera, entonces se puede aplicar la ley del producto a $f(x)$ y $g(x)^{-1}$ para obtener la ley del cociente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to c} f(x) \frac{1}{g(x)} = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right) \left(\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} \right) = \\ &= L \left(\frac{1}{M} \right) = \frac{L}{M} \end{aligned}$$

A continuación, se va a comprobar la (2). Como $g(x)$ tiende a M y $M \neq 0$, se puede considerar $\delta > 0$ tal que $|g(x)| \geq |M|/2$ si $0 < |x - c| < \delta$. Ahora, considere $\epsilon > 0$ cualquiera. Escogiendo un δ menor si fuera necesario, también se puede asegurar que:

$$|M - g(x)| < \epsilon |M| \left(\frac{|M|}{2} \right) \qquad \text{para } 0 < |x - c| < \delta$$

Entonces:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{Mg(x)} \right| \leq \left| \frac{M - g(x)}{M(M/2)} \right| \leq \frac{\epsilon |M|(|M|/2)}{|M|(|M|/2)} = \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, el límite (2) queda demostrado. ■

El siguiente resultado se utilizó en el texto.

TEOREMA 2 Los límites preservan las desigualdades Sea (a, b) un intervalo abierto y sea $c \in (a, b)$. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ estén def nidas en (a, b), excepto quizás en c. Suponga que:

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{para } x \in (a, b), \quad x \neq c$$

y que los límites $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$ existen. Entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

Demostración Sean $L = \lim_{x \to c} f(x)$ y $M = \lim_{x \to c} g(x)$. Para probar que $L \leq M$, se realizará una demostración por contradicción. Si $L > M$, sea $\epsilon = \frac{1}{2}(L - M)$. Por la def nición formal de límite, se puede considerar $\delta > 0$ de tal manera que se verif quen las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} |M - g(x)| < \epsilon \qquad & \text{si } |x - c| < \delta \\ |L - f(x)| < \epsilon \qquad & \text{si } |x - c| < \delta \end{aligned}$$

Pero entonces:

$$f(x) > L - \epsilon = M + \epsilon > g(x)$$

Esto es una contradicción pues $f(x) \leq g(x)$. Por tanto, se deduce que $L \leq M$. ■

TEOREMA 3 Límite de una función compuesta Suponga que los siguientes límites existen:

$$L = \lim_{x\to c} g(x) \qquad \text{y} \qquad M = \lim_{x\to L} f(x)$$

Entonces $\lim_{x\to c} f(g(x)) = M$.

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Por la definición de límite, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|f(x) - M| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - L| < \delta_1 \tag{3}$$

Análogamente, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|g(x) - L| < \delta_1 \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta \tag{4}$$

Sustituya x por $g(x)$ en la (3) y aplique la (4) para obtener:

$$|f(g(x)) - M| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta$$

Como ϵ es arbitrario, queda demostrado que $\lim_{x\to c} f(g(x)) = M$. ■

Sección 2.4

TEOREMA 4 Continuidad de funciones compuestas Sea $F(x) = f(g(x))$ una función compuesta. Si g es continua en $x = c$ y f es continua en $x = g(c)$, entonces $F(x)$ es continua en $x = c$.

Demostración Por la definición de continuidad, se tiene que:

$$\lim_{x\to c} g(x) = g(c) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to g(c)} f(x) = f(g(c))$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema 3 para obtener:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

Esto demuestra que $f(g(x))$ es continua en $x = c$. ■

Sección 2.9

TEOREMA 5 Teorema de compresión Suponga que para $x \neq c$ (en algún intervalo abierto que contenga a c), se verifica lo siguiente:

$$l(x) \le f(x) \le u(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} l(x) = \lim_{x\to c} u(x) = L$$

Entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Se puede escoger $\delta > 0$ tal que:

$$|l(x) - L| < \epsilon \quad \text{y} \quad |u(x) - L| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta$$

En principio puede ser necesario una δ diferente para obtener las dos desigualdades, la de $l(x)$ y la de $u(x)$, pero se puede considerar la menor de las dos deltas. Por tanto, si $0 < |x - c| < \delta$, se tiene:

$$L - \epsilon < l(x) < L + \epsilon$$

y también:

$$L - \epsilon < u(x) < L + \epsilon$$

Como $f(x)$ se encuentra entre $l(x)$ y $u(x)$, se tiene que:

$$L - \epsilon < l(x) \le f(x) \le u(x) < L + \epsilon$$

y, por tanto, $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x - c| < \delta$. Como ϵ es arbitrario, queda demostrado que $\lim_{x \to c} u(x) = L$. ■

Sección 7.2

TEOREMA 6 Derivada de la inversa Suponga que $f(x)$ es derivable e inyectiva en un intervalo abierto (r, s), inversa $g(x)$. Si b pertenece al dominio de $g(x)$ y $f'(g(b)) \neq 0$, entonces $g'(b)$ existe y se verif ca:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Demostración La función $f(x)$ es inyectiva y continua (pues es derivable). Por tanto, $f(x)$ es monótona creciente o decreciente en (r, s). Si no lo fuera, $f(x)$ tendría un máximo o un mínimo local en algún punto $x = x_0$. Pero entonces $f(x)$ no sería inyectiva en un pequeño intervalo alrededor de x_0, por el TVI.

Suponga que $f(x)$ sea creciente (el caso decreciente es similar). Se va a demostrar que $g(x)$ es continua en $x = b$. Sea $a = g(b)$, tal que $f(a) = b$. Considere un pequeño número $\epsilon > 0$. Como $f(x)$ es una función creciente, aplica el intervalo abierto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ en el intervalo abierto $(f(a - \epsilon), f(a + \epsilon))$ que contiene $f(a) = b$. Se puede escoger un número $\delta > 0$ tal que $(b - \delta, b + \delta)$ esté contenido en $(f(a - \epsilon), f(a + \epsilon))$. Entonces $g(x)$ aplica de vuelta $(b - \delta, b + \delta)$ en $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. De aquí se deduce que:

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |y - b| < \delta$$

Esto demuestra que g es continua en $x = b$.

Para completar la demostración, se debe demostrar que el siguiente límite existe y es igual a $1/f'(g(b))$:

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$$

Por la relación inversa, si $y = f(x)$, entonces $g(y) = x$, y como $g(y)$ es continua, x tiende a a cuando y tiende a b. Por tanto, como $f(x)$ es derivable y $f'(a) \neq 0$, se tiene:

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$ ■

Sección 4.2

TEOREMA 7 Existencia de extremos en un intervalo cerrado Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado (acotado) $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza su valor máximo y mínimo en I.

Demostración Se va a demostrar que $f(x)$ alcanza su valor máximo en dos etapas (el caso del mínimo es similar).

***Etapa 1.* Demuestre que $f(x)$ está acotada superiormente**

Se realizará una demostración por contradicción. Si $f(x)$ no estuviera acotada superiormente, entonces existirían puntos $a_n \in [a, b]$ tales que $f(a_n) \geq n$ para $n = 1, 2, \ldots$. Según el teorema 3 en el apéndice B, se puede considerar una subsucesión de elementos $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ que converja a un límite en $[a, b]$; digamos, $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$. Como $f(x)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(L)| < 1 \qquad \text{si} \quad x \in [a, b] \quad \text{y} \quad |x - L| < \delta$$

Por tanto:

$$f(x) < f(L) + 1 \qquad \text{si} \quad x \in [a, b] \quad \text{y} \quad x \in (L - \delta, L + \delta) \tag{5}$$

Para k suf cientemente grande, a_{n_k} se encuentra en $(L - \delta, L + \delta)$ pues $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$. Según la ec. (5), $f(a_{n_k})$ está acotada por $f(L) + 1$. Sin embargo, $f(a_{n_k}) = n_k$ tiende a inf nito cuando $k \to \infty$. Esto es una contradicción. Por tanto, el supuesto de que $f(x)$ no está acotada superiomente es falso.

***Etapa 2.* Demuestre que $f(x)$ alcanza un valor máximo**

El rango de $f(x)$ sobre $I = [a, b]$ es el conjunto:

$$S = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Según la etapa anterior, S está acotado superiormente y, por tanto, existe su menor cota superior M por la propiedad del supremo. Así, $f(x) \le M$ para todo $x \in [a, b]$. Para f nalizar la demostración, se debe probar que $f(c) = M$ para algún $c \in [a, b]$. Esto probará que $f(x)$ alcanza el valor máximo M en $[a, b]$.

Por def nición, $M - 1/n$ no es una cota superior para $n \ge 1$ y, en consecuencia, se puede escoger un punto b_n en $[a, b]$ tal que:

$$M - \frac{1}{n} \le f(b_n) \le M$$

Nuevamente, por el teorema 3 en el apéndice B, existe una subsucesión de elementos $\{b_{n_1}, b_{n_2}, \dots\}$ en $\{b_1, b_2, \dots\}$ que tiene límite; sea entonces:

$$\lim_{k \to \infty} b_{n_k} = c$$

Considere $\epsilon > 0$. Como $f(x)$ es continua, se puede escoger k suf cientemente grande de manera que las dos condiciones siguientes se cumplan: $|f(c) - f(b_{n_k})| < \epsilon/2$ y $n_k > 2/\epsilon$. Entonces:

$$|f(c) - M| \le |f(c) - f(b_{n_k})| + |f(b_{n_k}) - M| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n_k} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por tanto, $|f(c) - M|$ es menor que ϵ para cualquier ϵ positivo. Pero esto no es posible salvo si $|f(c) - M| = 0$. En consecuencia $f(c) = M$ como se quería probar. ■

Sección 5.2

TEOREMA 8 Las funciones continuas son integrables Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración Se va a suponer que $f(x)$ es derivable y que su derivada $f'(x)$ es acotada. Dicho de otro modo, se supone que $|f'(x)| \le K$ para alguna constante K. Esta hipótesis de simplif cación sobre $f(x)$ se utiliza para mostrar que la función no puede variar demasiado en un intervalo pequeño. De forma más precisa, se va a demostrar que si $[a_0, b_0]$ es cualquier intervalo cerrado contenido en $[a, b]$ y si m y M son los valores mínimo y máximo de $f(x)$ en $[a_0, b_0]$, entonces:

$$|M - m| \le K|b_0 - a_0| \tag{6}$$

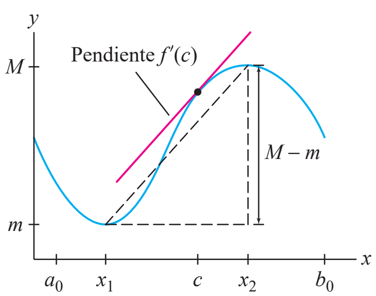


FIGURA 1 Como $M - m = f'(c)(x_2 - x_1)$, se deduce que $M - m \le K(b_0 - a_0)$.

La f gura 1 ilustra la idea subyacente a esta desigualdad. Suponga que $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$, donde x_1 y x_2 se encuentran en $[a_0, b_0]$. Si $x_1 \ne x_2$, entonces por el teorema del valor medio (TVM), existe un punto c comprendido entre x_1 y x_2 tal que:

$$\frac{M - m}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Como x_1, x_2 se encuentran en $[a_0, b_0]$, se tiene que $|x_2 - x_1| \le |b_0 - a_0|$ y, por tanto:

$$|M - m| = |f'(c)|\,|x_2 - x_1| \le K|b_0 - a_0|$$

Esto demuestra la ec. (6).

El resto de la demostración se va a dividir en dos etapas. Considere una partición P:

$$P: \; x_0 = a < x_1 < \quad \cdots \quad < x_{N-1} < x_N = b$$

Sea m_i el valor mínimo de $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ y M_i el valor máximo en $[x_{i-1}, x_i]$. Se def nen las sumas de Riemann *inferior* y *superior* como:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i, \qquad U(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$$

Se trata de sumas de Riemann particulares en las que el punto intermedio en $[x_{i-1}, x_i]$ es el punto en el que $f(x)$ alcanza su mínimo o máximo sobre $[x_{i-1}, x_i]$. La f gura 2 ilustra el caso $N = 4$.

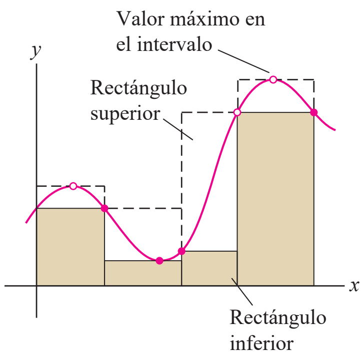


FIGURA 2 Rectángulos inferior y superior para una partición de longitud $N = 4$.

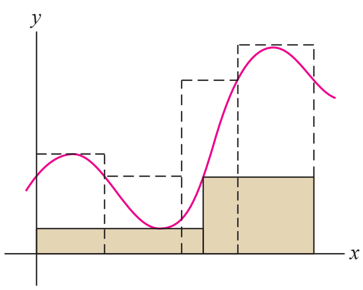


FIGURA 3 Los rectángulos inferiores siempre se encuentran por debajo de los rectángulos superiores, incluso cuando las particiones son diferentes.

***Etapa 1.* Demuestre que las sumas inferior y superior tienen límite**

Se tiene que:

$$L(f, P_1) \le U(f, P_2) \quad \text{para cualesquiera particiones } P_1 \text{ y } P_2 \qquad \boxed{7}$$

Si un subintervalo I_1 de P_1 se superpone a un intervalo I_2 de P_2, entonces el mínimo de f sobre I_1 es menor o igual que el máximo de f sobre I_2 (f gura 3). En particular, las sumas inferiores se encuentran acotadas superiormente por $U(f, P)$ para cualquier partición P que se quiera considerar. Sea L la menor cota superior para las sumas inferiores. Entonces, para toda partición P, se tiene:

$$L(f, P) \le L \le U(f, P) \qquad \boxed{8}$$

Según la ec. (6), $|M_i - m_i| \le K\Delta x_i$ para todo i. Como $\|P\|$ es la mayor de las amplitudes Δx_i, se tiene que $|M_i - m_i| \le K\|P\|$ y, por consiguiente:

$$|U(f, P) - L(f, P)| \le \sum_{i=1}^{N} |M_i - m_i|\,\Delta x_i \le$$

$$\le K\|P\| \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = K\|P\|\,|b - a| \qquad \boxed{9}$$

Sea $c = K\,|b - a|$. Aplicando la ec. (8) y la ec. (9), se obtiene:

$$|L - U(f, P)| \le |U(f, P) - L(f, P)| \le c\|P\|$$

Se deduce de aquí que $\lim\limits_{\|P\|\to 0} |L - U(f, P)| = 0$. Análogamente:

$$|L - L(f, P)| \le c\|P\|$$

y, por tanto:

$$\lim_{\|P\|\to 0} |L - L(f, P)| = 0$$

Así pues, se tiene:

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f, P) = L$$

***Etapa 2.* Demuestre que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y que su valor es L**

Recuerde que para cualquier elección C de puntos intermedios $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se define la suma de Riemann del modo siguiente:

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

Se tiene, entonces:

$$L(f, P) \le R(f, P, C) \le U(f, P)$$

Así, como $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se tiene que $m_i \le f(c_i) \le M_i$ para todo i y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} M_i\,\Delta x_i$$

De aquí se deduce que:

$$|L - R(f, P, C)| \le |U(f, P) - L(f, P)| \le c\|P\|$$

Esto prueba que $R(f, P, C)$ converge a L cuando $\|P\| \to 0$. ■

Sección 11.1

TEOREMA 9 Si $f(x)$ es continua y $\{a_n\}$ es una sucesión tal que el límite $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existe, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Como $f(x)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(L)| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - L| < \delta$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, existe $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \delta$ para $n > N$. Por tanto:

$$|f(a_n) - f(L)| < \epsilon \qquad \text{para } n > N$$

De aquí se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$. ■

Sección 15.3

TEOREMA 10 Teorema de Clairaut Si f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en un disco D, entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ para todo $(a, b) \in D$.

Demostración Se va a demostrar que tanto $f_{xy}(a, b)$ como $f_{yx}(a, b)$ son iguales al límite:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b)}{h^2}$$

Sea $F(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$. El numerador en el límite es igual a:

$$F(a+h) - F(a)$$

y $F'(x) = f_x(x, b+h) - f_x(x, b)$. Por el TVM, existe a_1 entre a y $a+h$ tal que:

$$F(a+h) - F(a) = hF'(a_1) = h(f_x(a_1, b+h) - f_x(a_1, b))$$

Por el TVM aplicado a f_x, existe b_1 entre b y $b+h$ tal que:

$$f_x(a_1, b+h) - f_x(a_1, b) = hf_{xy}(a_1, b_1)$$

Por tanto, se tiene:

$$F(a+h) - F(a) = h^2 f_{xy}(a_1, b_1)$$

y, también:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 f_{xy}(a_1, b_1)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{xy}(a_1, b_1) = f_{xy}(a, b)$$

La última igualdad es cierta por la continuidad de f_{xy} pues (a_1, b_1) tiende a (a, b) cuando $h \to 0$. Para demostrar que $L = f_{yx}(a, b)$, repita el proceso pero usando la función $F(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ con los papeles de x y de y intercambiados. ■

Sección 15.4

TEOREMA 11 Criterio para diferenciabilidad Si $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ existen y son continuas en un disco abierto D, entonces $f(x, y)$ es diferenciable en D.

Demostración Sea $(a, b) \in D$ e introduzca:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$$

Es conveniente cambiar a las variables h y k, siendo $x = a+h$ e $y = b+k$. Sea:

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

Entonces:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

y se puede def nir la función:

$$e(h, k) = f(x, y) - L(x, y) = \Delta f - (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)$$

Para demostrar que $f(x, y)$ es diferenciable, se debe probar que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Con este objetivo, exprese Δf como una suma de dos términos:

$$\Delta f = (f(a+h, b+k) - f(a, b+k)) + (f(a, b+k) - f(a, b))$$

y aplique el TVM a cada término por separado. Se obtiene así que existe a_1, entre a y $a+h$, y b_1, entre b y $b+k$, tales que:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = hf_x(a_1, b+k)$$

$$f(a, b+k) - f(a, b) = kf_y(a, b_1)$$

Por tanto:

$$e(h,k) = h(f_x(a_1, b+k) - f_x(a,b)) + k(f_y(a,b_1) - f_y(a,b))$$

y para $(h,k) \neq (0,0)$, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &= \left|\frac{h(f_x(a_1,b+k)-f_x(a,b)) + k(f_y(a,b_1)-f_y(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{h(f_x(a_1,b+k)-f_x(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| + \left|\frac{k(f_y(a,b_1)-f_y(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \\
&= |f_x(a_1,b+k)-f_x(a,b)| + |f_y(a,b_1)-f_y(a,b)|
\end{aligned}$$

En la segunda línea se ha utilizado la desigualdad triangular (vea la ec. (1) en la sección 1.1) y se puede pasar a la tercera línea porque tanto $\left|h/\sqrt{h^2+k^2}\right|$ como $\left|k/\sqrt{h^2+k^2}\right|$ son ambos menores que 1. Los dos términos de la última línea tienden a cero cuando $(h,k) \to (0,0)$ porque f_x y f_y son funciones continuas, por hipótesis. Esto finaliza la demostración de que $f(x,y)$ es diferenciable. ■

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES

Capítulo 1

Sección 1.1 Ejercicios preliminares

1. $a = -3$ y $b = 1$

2. Los números $a \geq 0$ cumplen $|a| = a$ y $|-a| = a$. Los números $a \leq 0$ cumplen $|a| = -a$.

3. $a = -3$ y $b = 1$ **4.** $(9, -4)$

5. (a) Primer cuadrante. **(b)** Segundo cuadrante.
(c) Cuarto cuadrante. **(d)** Tercer cuadrante.

6. 3 **(b)** Simetría respecto al origen

Sección 1.1 Problemas

1. $r = \frac{12337}{1250}$ **3.** $|x| \leq 2$ **5.** $|x-2| < 2$ **7.** $|x-3| \leq 2$

9. $-8 < x < 8$ **11.** $-3 < x < 2$ **13.** $(-4, 4)$ **15.** $(2, 6)$

17. $[-\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]$ **19.** $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

21. $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

23. (a) (i) **(b)** (iii) **(c)** (v) **(d)** (vi) **(e)** (ii) **(f)** (iv)

25. $-3 < x < 1$

29. $|a+b-13| = |(a-5)+(b-8)| \leq |a-5| + |b-8| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

31. (a) 11 **(b)** 1

33. $r_1 = \frac{3}{11}$ y $r_2 = \frac{4}{15}$

35. Sea $a = 1$ y $b = 0,\overset{\frown}{9}$ (vea la discusión antes del ejemplo 1). Los desarrollos decimales de a y b no coinciden, pero $|1 - 0,\overset{\frown}{9}| < 10^{-k}$ para todo k.

37. (a) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$
(b) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 26$

39. $D = \{r, s, t, u\}$; $R = \{A, B, E\}$

41. D : todos los reales; R : todos los reales

43. D : todos los reales; R : todos los reales

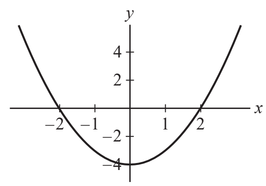
45. D : todos los reales; $R : \{y : y \geq 0\}$

47. $D : \{x : x \neq 0\}$; $R : \{y : y > 0\}$

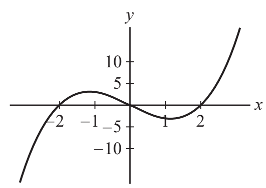
49. Sobre el intervalo $(-1, +\infty)$

51. Sobre el intervalo $(0, +\infty)$

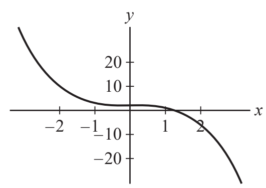
53. Ceros: ± 2; Creciente: $x > 0$; Decreciente: $x < 0$;
Simetría: $f(-x) = f(x)$, es decir simetría respecto al eje y.



55. Ceros: $0, \pm 2$; Simetría: $f(-x) = -f(x)$, es decir simetría respecto al origen.



57. Se trata de una ref exión respecto al eje x de x^3 trasladada hacia arriba en 2 unidades. Hay un cero en $x = \sqrt[3]{2}$.



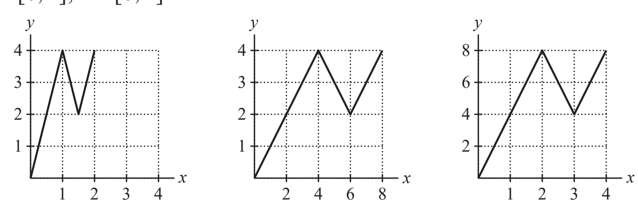
59. (B)

61. (a) Impar **(b)** Impar **(c)** Ni par ni impar **(d)** Par

63. Es decreciente allí donde está def nida, es decir, para $x \neq 4$.

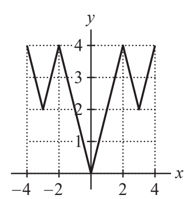
65. $D : [0, 4]$; $R : [0, 4]$

67.



$f(2x)$ $f(x/2)$ $2f(x)$

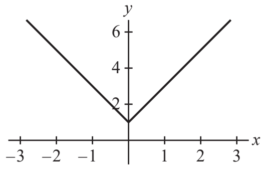
69.



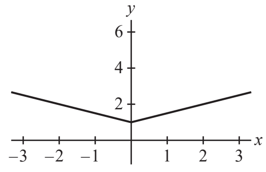
71. **(a)** $D : [4, 8], R : [5, 9]$. **(b)** $D : [1, 5], R : [2, 6]$.
(c) $D : [\frac{4}{3}, \frac{8}{3}], R : [2, 6]$. **(d)** $D : [4, 8], R : [6, 18]$.

73. **(a)** $h(x) = \operatorname{sen}(2x - 10)$ **(b)** $h(x) = \operatorname{sen}(2x - 5)$

75.

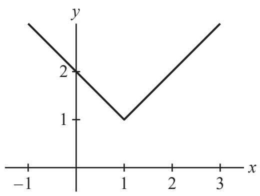


$f(2x)$



$f(x/2)$

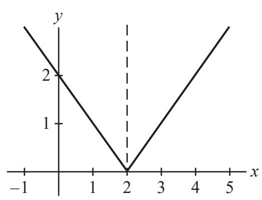
77.



D : todos los reales; $R : \{y : y \geq 1\}$; $f(x) = |x - 1| + 1$

79. Par:
$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) \overset{\text{par}}{=} f(x) + g(x) = (f + g)(x)$
Impar:
$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) \overset{\text{impar}}{=} -f(x) + -g(x) = -(f + g)(x)$

(f) 85. **(a)** Hay muchas posibilidades, una de las cuales es:



$y = |x - 2|$

(b) Sea $g(x) = f(x + a)$. Entonces:
$g(-x) = f(-x + a) = f(a - x) = f(a + x) = g(x)$

Sección 1.2 Ejercicios preliminares

1. -4 **2.** No.

3. Paralela al eje y cuando $b = 0$; paralela al eje x cuando $a = 0$

4. $\Delta y = 9$ **5.** -4 **6.** $(x - 0)^2 + 1$

Sección 1.2 Problemas

1. $m = 3; y = 12; x = -4$ **3.** $m = -\frac{4}{9}; y = \frac{1}{3}; x = \frac{3}{4}$

5. $m = 3$ **7.** $m = -\frac{3}{4}$ **9.** $y = 3x + 8$ **11.** $y = 3x - 12$

13. $y = -2$ **15.** $y = 3x - 2$ **17.** $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$ **19.** $y = 4$

21. $y = -2x + 9$ **23.** $3x + 4y = 12$

25. **(a)** $c = -\frac{1}{4}$ **(b)** $c = -2$

(c) Ningún valor de c da lugar a que esta pendiente sea igual a 0

(d) $c = 0$

27. **(a)** 40,0248 cm **(b)** 64,9597 in **(c)** $L = 65(1 + \alpha(T - 100))$

29. $b = 4$

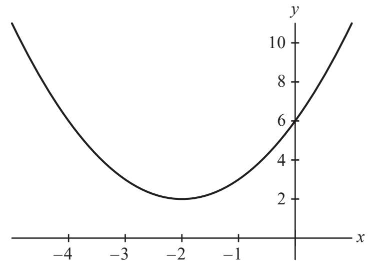
31. No, porque las pendientes entre dos puntos consecutivos no son iguales.

33. **(a)** 1 o $-\frac{1}{4}$ **(b)** $1 \pm \sqrt{2}$

35. El valor mínimo es 0 **37.** El valor mínimo es -7

39. El valor máximo es $\frac{137}{16}$ **41.** El valor máximo es $\frac{1}{3}$

43.



45. Se tiene una raíz doble cuando $c = \pm 2$. No hay raíces reales cuando $-2 < c < 2$.

47. Para todo $x \geq 0$, $0 \leq \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)^2 = x - 2 + \frac{1}{x}$.

51. $4 + 2\sqrt{2}$ y $4 - 2\sqrt{2}$

55. Para x^2, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$.

59. $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = x^2 + (-\alpha - \beta)x + \alpha\beta$

Sección 1.3 Ejercicios preliminares

1. Un ejemplo es $\frac{3x^2 - 2}{7x^3 + x - 1}$

2. $|x|$ no es un polinomio; $|x^2 + 1|$ es un polinomio

3. El dominio de $f(g(x))$ es el conjunto vacío.

4. Decreciente

5. Una posibilidad es $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x$

Sección 1.3 Problemas

1. $x \geq 0$ **3.** Todos los reales **5.** $t \neq -2$ **7.** $u \neq \pm 2$ **9.** $x \neq 0, 1$

11. $y > 0$ **13.** Polinómica **15.** Algebraica **17.** Transcendente

19. Racional **21.** Transcendente **23.** Racional **25.** Sí

27. $f(g(x)) = \sqrt{x + 1}$; D: $x \geq -1$, $g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$; D: $x \geq 0$

29. $f(g(x)) = 2^{x^2}$; D: $\mathbb{R}$, $g(f(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}$; D: $\mathbb{R}$

31. $f(g(x)) = \cos(x^3 + x^2)$; D: $\mathbb{R}$, $g(f(\theta)) = \cos^3\theta + \cos^2\theta$; D: $\mathbb{R}$

33. $f(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{-t^2}}$; D: no es válido para cualquier t,
$g(f(t)) = -\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = -\frac{1}{t}$; D: $t > 0$

35. $P(t + 10) = 30 \cdot 2^{0,1(t+10)} = 30 \cdot 2^{0,1t+1} = 2(30 \cdot 2^{0,1t}) = 2P(t)$;
$g\left(t + \frac{1}{k}\right) = a2^{k(t+1/k)} = a2^{kt+1} = 2a2^{kt} = 2g(t)$

37. $f(x) = x^2$: $\delta f(x) = f(x + 1) - f(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$
$f(x) = x$: $\delta f(x) = x + 1 - x = 1$
$f(x) = x^3$: $\delta f(x) = (x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

39.

$$\begin{aligned}\delta(f+g) &= (f(x+1)+g(x+1))-(f(x)-g(x))\\ &= (f(x+1)-f(x))+(g(x+1)-g(x)) = \delta f(x)+\delta g(x)\\ \delta(cf) &= cf(x+1)-cf(x) = c(f(x+1)-f(x)) = c\delta f(x).\end{aligned}$$

Sección 1.4 Ejercicios preliminares

1. Dos rotaciones que dif eren en un número entero de revoluciones completas tienen el mismo radio f nal.

2. $\frac{9\pi}{4}$ y $\frac{41\pi}{4}$ **3.** $-\frac{5\pi}{3}$ **4.** **(a)**

5. Sea O el centro de la circunferencia unitaria y sea P un punto sobre la circunferencia unitaria tal que el radio $\overline{OP}$ forma un ángulo θ con el eje de las x positivas. Entonces, sen θ es la coordenada y del punto P.

6. Sea O el centro de la circunferencia unitaria y sea P un punto sobre la circunferencia unitaria, tal que el radio $\overline{OP}$ forma un ángulo θ con el eje de las x positivas. El ángulo $\theta+2\pi$ se obtiene a partir del ángulo θ realizando una revolución completa alrededor de la circunferencia. El ángulo $\theta+2\pi$ tendrá, por tanto, el radio $\overline{OP}$ como su lado terminal.

Sección 1.4 Problemas

1. $5\pi/4$

3. **(a)** $\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57{,}3^\circ$ **(b)** 60° **(c)** $\frac{75^\circ}{\pi}\approx 23{,}87^\circ$ **(d)** -135°

5. $s = r\theta = 3{,}6$; $s = r\phi = 8$

7.

θ	$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$	θ	$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	$\frac{5\pi}{4}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-1)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
π	$(-1,0)$	$\frac{7\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{6}$	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$	$\frac{11\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

9. $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **11.** $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **13.** $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

15.

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sec\theta$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ind	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

17. $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$ y $\tan\theta = \frac{12}{5}$

21. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{53}}{53}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{53}}{7}$ y $\cot\theta = \frac{7}{2}$

23. $23/25$

25. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ y $\tan\theta = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

27. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

29. Considere, en primer lugar, los cuatro puntos de la f gura 23(A).

- El punto en el primer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}918,\quad \cos\theta = 0{,}3965 \ \text{y}\ \tan\theta = \frac{0{,}918}{0{,}3965} = 2{,}3153.$$

- El punto en el segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}3965,\quad \cos\theta = -0{,}918 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{0{,}3965}{-0{,}918} = -0{,}4319.$$

- El punto en el tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = -0{,}918,\quad \cos\theta = -0{,}3965 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{-0{,}918}{-0{,}3965} = 2{,}3153.$$

- El punto en el cuarto cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = -0{,}3965,\quad \cos\theta = 0{,}918 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{-0{,}3965}{0{,}918} = -0{,}4319.$$

Considere ahora los cuatro puntos de la f gura 23(B).

- El punto en el primer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}918,\quad \cos\theta = 0{,}3965 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{0{,}918}{0{,}3965} = 2{,}3153.$$

- El punto en el segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}918,\quad \cos\theta = -0{,}3965 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{0{,}918}{0{,}3965} = -2{,}3153.$$

- El punto en el tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = -0{,}918,\quad \cos\theta = -0{,}3965 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{-0{,}918}{-0{,}3965} = 2{,}3153.$$

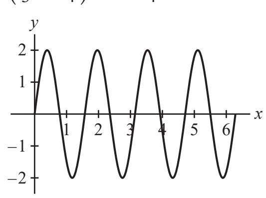
- El punto en el cuarto cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = -0{,}918,\quad \cos\theta = 0{,}3965 \ \text{y}\quad \tan\theta = \frac{-0{,}918}{0{,}3965} = -2{,}3153.$$

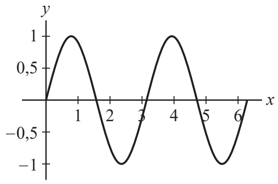
31. $\cos\psi = 0{,}3$, $\operatorname{sen}\psi = \sqrt{0{,}91}$, $\cot\psi = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}91}}$ y $\csc\psi = \frac{1}{\sqrt{0{,}91}}$

33. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

35.



37.



39. Si $|c| > 1$, no hay puntos de intersección; si $|c| = 1$, un punto de intersección; si $|c| < 1$, dos puntos de intersección.

41. $\theta = 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$

43. $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

45. A partir de la fórmula del coseno del ángulo doble, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ y aísle $\cos 2\theta$.

47. Sustituya $x = \theta/2$ en la fórmula del seno del ángulo doble, $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, a continuación aplique raíz cuadrada en ambos lados.

49. $\cos(\theta + \pi) = \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi = \cos\theta(-1) = -\cos\theta$

51. $\tan(\pi - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}(-\theta)}{-\cos(-\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$

53. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+2\cos^2 x-1} = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$

57. 16,928

Sección 1.5 Ejercicios preliminares

1. No

2. **(a)** La pantalla no mostrará nada.

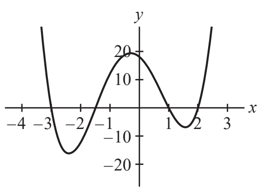
(b) La pantalla mostrará la porción de la parábola entre los puntos $(0, 3)$ y $(1, 4)$.

3. No

4. Experimente con la ventana de visualización para acercarse en el punto inferior de la gráfca de la función. La coordenada y del punto inferior de la gráfca de la función es el valor mínimo de la función.

Sección 1.5 Problemas

1.

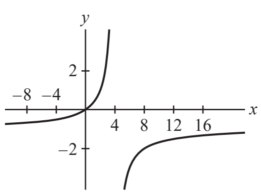


$x = -3$, $x = -1{,}5$, $x = 1$ y $x = 2$

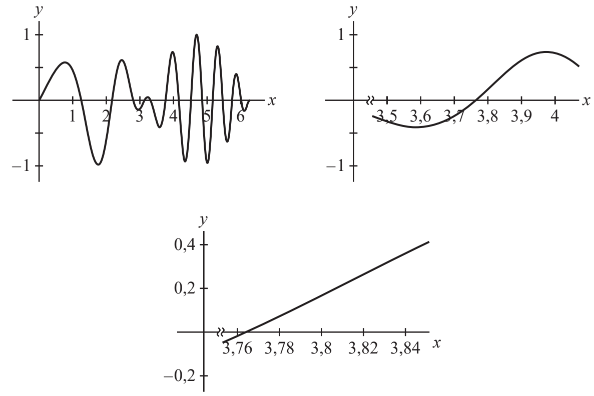
3. Dos soluciones positivas **5.** No hay soluciones

7. Nada. Una ventana de visualización apropiada: $[50, 150]$ por $[1000, 2000]$

9.

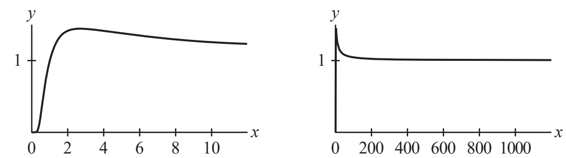


11.



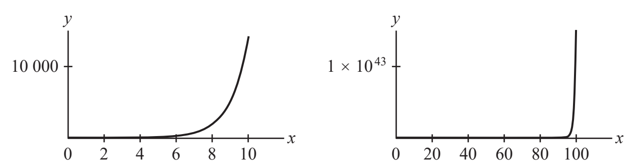
13. La tabla y las gráfcas que se encuentran a continuación sugieren que cuando n aumenta, $n^{1/n}$ tiende a 1.

n	$n^{1/n}$
10	1,258925412
10^2	1,047128548
10^3	1,006931669
10^4	1,000921458
10^5	1,000115136
10^6	1,000013816



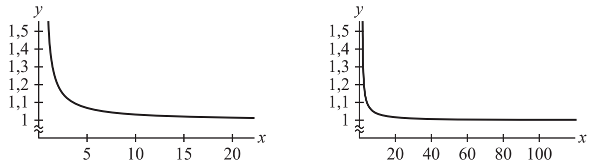
15. La tabla y las gráfcas que se encuentran a continuación sugieren que, cuando n aumenta, $f(n)$ tiende hacia $+\infty$.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
10	13 780,61234
10^2	$1{,}635828711 \times 10^{43}$
10^3	$1{,}195306603 \times 10^{434}$
10^4	$5{,}341783312 \times 10^{4342}$
10^5	$1{,}702333054 \times 10^{43429}$
10^6	$1{,}839738749 \times 10^{434294}$

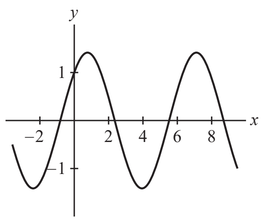


17. La tabla y las gráfcas que se encuentran a continuación sugieren que, cuando x aumenta, $f(x)$ tiende a 1.

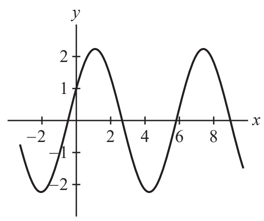
x	$\left(x \tan \frac{1}{x}\right)^x$
10	1,033975759
10^2	1,003338973
10^3	1,000333389
10^4	1,000033334
10^5	1,000003333
10^6	1,000000333



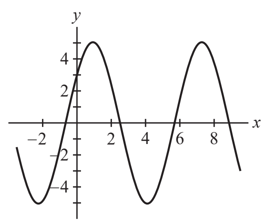
19.



$(A, B) = (1, 1)$



$(A, B) = (1, 2)$



$(A, B) = (3, 4)$

21. $x \in (-2, 0) \cup (3, +\infty)$

23.

$$f_3(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+1) + \frac{x}{\frac{1}{2}(x+1)}\right) = \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} + \frac{x}{\frac{x^2+6x+1}{4(x+1)}}\right) = \frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8(1+x)(1+6x+x^2)}$$

y

$$f_5(x) = \frac{1+120x+1820x^2+8008x^3+12870x^4+8008x^5+1820x^6+120x^7+x^8}{16(1+x)(1+6x+x^2)(1+28x+70x^2+28x^3+x^4)}.$$

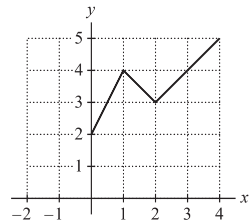
Parece que las f_n son asintóticas hacia $\sqrt{x}$.

Capítulo 1 Repaso

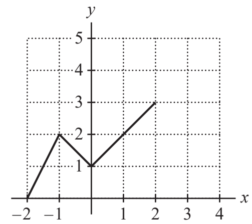
1. $\{x : |x-7| < 3\}$ **3.** $[-5, -1] \cup [3, 7]$

5. $(x, 0)$ con $x \geq 0$; $(0, y)$ con $y < 0$

7.

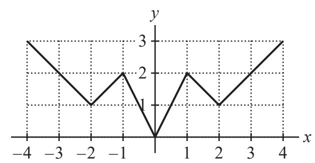


$f(x) + 2$



$f(x + 2)$

9.



11. $D : \{x : x \geq -1\}$; $R : \{y : y \geq 0\}$

13. $D : \{x : x \neq 3\}$; $R : \{y : y \neq 0\}$

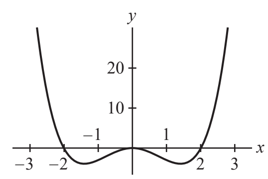
15. **(a)** Decreciente **(b)** Ninguna de las dos cosas

(c) Ninguna de las dos cosas **(d)** Creciente

17. $2x - 3y = -14$ **19.** $6x - y = 53$

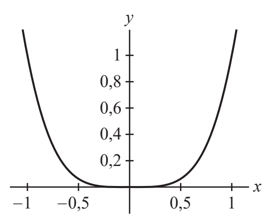
21. $x + y = 5$ **23.** Si

25. Raíces: $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$; decreciente: $x < -1,4$ y $0 < x < 1,4$

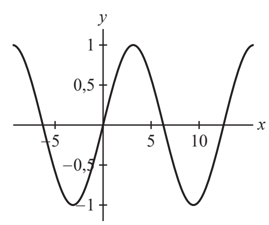


27. $f(x) = 10x^2 + 2x + 5$; el valor mínimo es $\frac{49}{10}$

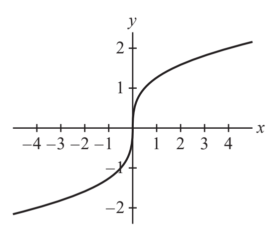
29.



31.

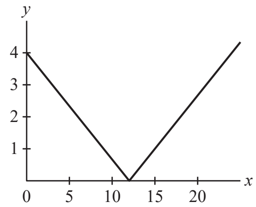


33.



35. Sea $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$. Entonces:

$g(x - 3b) = f\left(\frac{1}{3}(x - 3b)\right) = f\left(\frac{1}{3}x - b\right)$. La gráf ca de $y = \left|\frac{1}{3}x - 4\right|$:



37. $f(t) = t^4$ y $g(t) = 12t + 9$ **39.** 4π

41. (a) $a = b = \pi/2$ **(b)** $a = \pi$

43. $x = \pi/2$, $x = 7\pi/6$, $x = 3\pi/2$ y $x = 11\pi/6$

45. No hay soluciones.

Capítulo 2

Sección 2.1 Ejercicios preliminares

1. La gráf ca de la posición como función del tiempo.

2. No. La velocidad instantánea se def ne como el límite de la velocidad media cuando el lapso de tiempo se reduce a cero.

3. La pendiente de la recta tangente a la gráf ca de la posición como función del tiempo en $t = t_0$.

4. La pendiente de la recta secante sobre el intervalo $[x_0, x_1]$ tiende a la pendiente de la recta tangente en $x = x_0$.

5. La gráf ca de la temperatura de la atmósfera como función de la altitud. Unas posibles unidades para esta tasa de variación son °F/ft o °C/m.

Sección 2.1 Problemas

1. (a) 11,025 m **(b)** 22,05 m/s

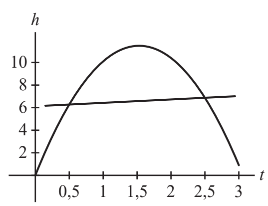
(c)

intervalo tiempo	[2, 2,01]	[2, 2,005]	[2, 2,001]	[2, 2,00001]
velocidad media	19,649	19,6245	19,6049	19,600049

La velocidad instantánea en $t = 2$ es 19,6 m/s.

3. 0,57735 m/(s · K)

5. 0,3 m/s



7. (a) Dólares/año **(b)** [0, 0,5]: 7,8461; [0, 1]: 8

(c) Aproximadamente 8 $/año

9. (a) Aproximadamente 0,283 millones de usuarios de Internet por año. **(b)** Decrece

(c) Aproximadamente 0,225 millones de usuarios de Internet por año.

(d) Mayor que

11. 12 **13.** −0,06 **15.** 1,105 **17.** 0,864

19. (a) [0, 0,1]: −144,721 cm/s; [3, 3,5]: 0 cm/s **(b)** 0 cm/s

21. (a) Segundo por metro; mide la sensibilidad del periodo del péndulo a una variación en la longitud del péndulo.

(b) m B: tasa media de variación en T desde $L = 1$ m hasta $L = 3$ m; A: tasa instantánea de variación de T en $L = 3$ m.

(c) 0,4330 s/m.

23. Las ventas disminuyen más despacio al aumentar el tiempo.

25. • En la gráf ca (A), la partícula se está (c) frenando.

• En la gráf ca (B), la partícula se está (b) acelerando y luego frenando.

• En la gráf ca (C), la partícula se está (d) frenando y luego acelerando.

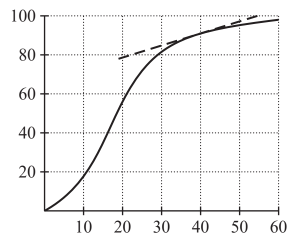
• En la gráf ca (D), la partícula se está (a) acelerando.

27. (a) Porcentaje/día; mide lo rápido que la población de plantas de lino se está infectando.

(b) [40, 52], [0, 12], [20, 32]

(c) Las tasas medias de infección sobre los intervalos [30, 40], [40, 50], [30, 50] son 0,9, 0,5, 0,7 %/d, respectivamente.

(d) 0,55 %/d



31. (B)

33. Intervalo $[1, t]$: tasa media de variación es $t + 1$; intervalo $[2, t]$: tasa media de variación es $t + 2$

35. $x^2 + 2x + 4$

Sección 2.2 Ejercicios preliminares

1. 1 **2.** π **3.** 20 **4.** Si

5. $\lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 1+} f(x) = 3$

6. No **7.** Sí

Sección 2.2 Problemas

1.

x	0,998	0,999	0,9995	0,99999
$f(x)$	1,498501	1,499250	1,499625	1,499993

x	1,00001	1,0005	1,001	1,002
$f(x)$	1,500008	1,500375	1,500750	1,501500

El límite cuando $x \to 1$ es $\frac{3}{2}$.

3.

y	1,998	1,999	1,9999
$f(y)$	0,59984	0,59992	0,599992

y	2,0001	2,001	2,02
$f(y)$	0,600008	0,60008	0,601594

El límite cuando $y \to 2$ es $\frac{3}{5}$.

5. 1,5 **7.** 21 **9.** $|3x-12| = 3|x-4|$

11. $|(5x+2)-17| = |5x-15| = 5|x-3|$

13. Suponga que $|x| < 1$, de manera que $|x^2 - 0| = |x+0||x-0| = |x||x| < |x|$

15. Si $|x| < 1$, $|4x+2|$ no puede ser superior a 6, por tanto $|4x^2+2x+5-5| = |4x^2+2x| = |x||4x+2| < 6|x|$

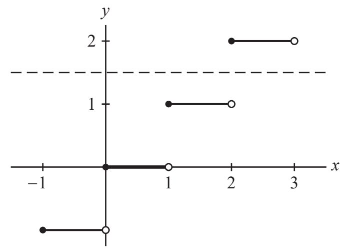
17. $\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{5}{3}$ **21.** 2 **23.** 0

25. Cuando $x \to 4-$, $f(x) \to -\infty$; análogamente, cuando $x \to 4+$, $f(x) \to +\infty$

27. $-\infty$ **29.** 0 **31.** 1

33. 2 **35.** $\frac{1}{2}$

37.



(a) $c-1$ **(b)** c

39. $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$

41. $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \dfrac{1}{6}$

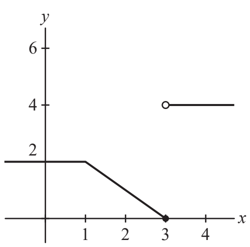
43. $\displaystyle\lim_{x\to -2-} \frac{4x^2+7}{x^3+8} = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -2+} \frac{4x^2+7}{x^3+8} = +\infty$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^5+x-2}{x^2+x-2} = 2$

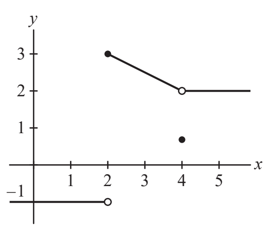
47.
- $\lim_{x\to 2-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\to 4-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 4+} f(x) = 10$.

Las asíntotas verticales son las rectas verticales $x = 2$ y $x = 4$.

49.

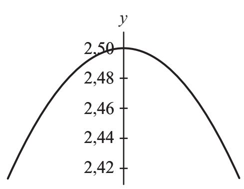


50.

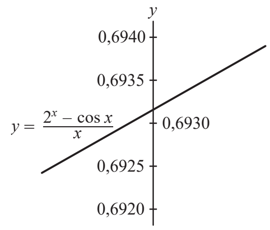


53.
- $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = 3$
- $\lim_{x\to 3-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 3+} f(x) = 4$
- $\lim_{x\to 5-} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to 5+} f(x) = -3$
- $\lim_{x\to 6-} f(x) = \lim_{x\to 6+} f(x) = +\infty$

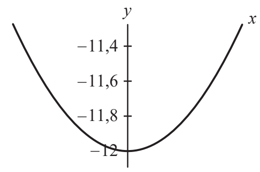
55. $\frac{5}{2}$



57. 0,693 (La respuesta correcta es $\ln 2$.)



59. -12



61. Para n par.

63. (a) No

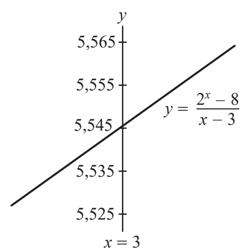
(b) $f(\frac{1}{2n}) = 1$ para todo entero n.

(c) En $x = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$, el valor de $f(x)$ es siempre -1.

65. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\theta} = n$

67. $\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$; $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \frac{n}{m}$

69. (a)



(b) $L = 5{,}545$.

Sección 2.3 Ejercicios preliminares

1. Suponga que tanto $\lim_{x\to c} f(x)$ como $\lim_{x\to c} g(x)$ existen. Según la ley de la suma:

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

Como $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, según la ley del cociente:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

2. **(b)** **3.** **(a)**

Sección 2.3 Problemas

1. 9 **3.** $\frac{1}{16}$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 4,6 **9.** 1 **11.** 9

13. $-\frac{2}{5}$ **15.** 10

17. $\frac{1}{5}$ **19.** $\frac{1}{5}$ **21.** $\frac{2}{5}$ **23.** 64 **27.** 3 **29.** $\frac{1}{16}$ **31.** No

33. $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -1/x$ **35.** Exprese $g(t) = \frac{tg(t)}{t}$ **37. (b)**

Sección 2.4 Ejercicios preliminares

1. Continuidad **2.** $f(3) = \frac{1}{2}$ **3.** No **4.** No; Sí

5. (a) Falso. La respuesta correcta es "$f(x)$ es continua en $x = a$ si los límites por la derecha y por la izquierda de $f(x)$ cuando $x \to a$ existen y son iguales a $f(a)$."

(b) Verdadero.

(c) Falso. La respuesta correcta es "Si los límites por la derecha y por la izquierda de $f(x)$ cuando $x \to a$ coinciden pero no son igual a $f(a)$, entonces f presenta una discontinuidad evitable en $x = a$."

(d) Verdadero.

(e) Falso. La respuesta correcta es "Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$ y $g(a) \neq 0$, entonces $f(x)/g(x)$ es continua en $x = a$."

Sección 2.4 Problemas

1. • La función f es discontinua en $x = 1$; es continua por la derecha.

• La función f es discontinua en $x = 3$; no es ni continua por la izquierda ni continua por la derecha en ese punto.

• La función f es discontinua en $x = 5$; es continua por la izquierda en ese punto.

Ninguna de esas discontinuidades es evitable.

3. $x = 3$; redef na $g(3) = 4$

5. La función f es discontinua en $x = 0$, donde $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0+} f(x) = 2$. La función f también es discontinua en $x = 2$, donde $\lim_{x\to 2-} f(x) = 6$ y $\lim_{x\to 2+} f(x) = 6$. La discontinuidad en $x = 2$ es evitable. La asignación $f(2) = 6$ hace que f sea continua en $x = 2$.

7. x y $\operatorname{sen} x$ son continuas, por lo que también lo es $x + \operatorname{sen} x$ por la propiedad de continuidad (i).

9. Como x y $\operatorname{sen} x$ son continuas, también lo son $3x$ y $4 \operatorname{sen} x$ por la propiedad de continuidad (ii). En consecuencia $3x + 4 \operatorname{sen} x$ es continua por la propiedad de continuidad (i).

11. Como x es continua, también lo es x^2 por la propiedad de continuidad (iii). Recuerde que las funciones constantes, como 1, son continuas. Por tanto $x^2 + 1$ es continua por la propiedad de continuidad (i). Por último, $\frac{1}{x^2+1}$ es continua por la propiedad de continuidad (iv) pues $x^2 + 1$ nunca es 0.

13. La función $f(x)$ es la composición de dos funciones continuas: $\cos x$ y x^2, por lo que $f(x)$ es continua según el teorema 5.

15. 2^x y $\cos 3x$ son continuas, por tanto $2^x \cos 3x$ es continua por la propiedad de continuidad (iii).

17. Discontinua en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad inf nita. La función no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en $x = 0$.

19. Discontinua en $x = 1$, donde presenta una discontinuidad inf nita. La función no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en $x = 1$.

21. Discontinua en los enteros pares, donde se tienen discontinuidades de salto. La función es continua por la derecha en todos los enteros pares pero no es continua por la izquierda.

23. Discontinua en $x = \frac{1}{2}$, donde presenta una discontinuidad inf nita. La función no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en $x = \frac{1}{2}$.

25. Continua para todo x.

27. Discontinuidad de salto en $x = 2$. La función es continua por la izquierda en $x = 2$ pero no es continua por la derecha.

29. Discontinua siempre que $t = \frac{(2n+1)\pi}{4}$, donde n es un entero. En cada uno de estos valores de t se presenta una discontinuidad inf nita. La función no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en cada uno de esos puntos de discontinuidad.

31. Siempre continua.

33. Discontinua en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad inf nita. La función no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en $x = 0$.

35. El dominio es todos los números reales. Tanto $\operatorname{sen} x$ como $\cos x$ son continuas sobre este dominio, por lo que $2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$ es continua por las propiedades de continuidad (i) y (ii).

37. El dominio es $x \geq 0$. Como $\sqrt{x}$ y $\operatorname{sen} x$ son continuas, también lo es $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$ por la propiedad de continuidad (iii).

39. El dominio es todos los números reales. Tanto $x^{2/3}$ como 2^x son continuas sobre este dominio, por lo que $x^{2/3}2^x$ es continua por la propiedad de continuidad (iii).

41. El dominio es $x \neq 0$. Como la función $x^{4/3}$ es continua y diferente de cero para $x \neq 0$, $x^{-4/3}$ es continua para $x \neq 0$ por la propiedad de continuidad (iv).

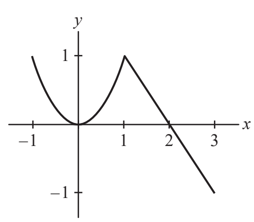
43. El dominio es todos los $x \neq \pm(2n - 1)\pi/2$ donde n es un entero positivo. Como $\tan x$ es continua sobre este dominio, según la propiedad de continuidad (iii), la función $\tan^2 x$ también es continua.

45. El dominio de $(x^4 + 1)^{3/2}$ es todos los números reales. Como $x^{3/2}$ y el polinomio $x^4 + 1$ son continuas, también lo es la función compuesta $(x^4 + 1)^{3/2}$.

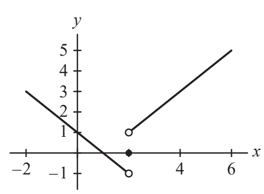
47. El dominio es todos los $x \neq \pm 1$. Como las funciones $\cos x$ y x^2 son continuas sobre este dominio, también lo es la función compuesta $\cos(x^2)$. Por último, como el polinomio $x^2 - 1$ es continuo y diferente de cero para $x \neq \pm 1$, la función $\frac{\cos(x^2)}{x^2-1}$ es continua por la propiedad de continuidad (iv).

49. $f(x)$ es continua por la derecha en $x = 1$; $f(x)$ es continua en $x = 2$.

51. La función f es continua en cualquier punto.



53. La función f no es continua por la derecha ni por la izquierda en $x = 2$.

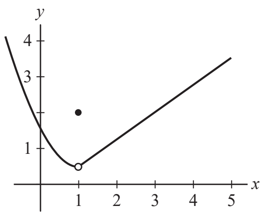


55. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}(x+4) = 8 \neq 10 = f(4)$

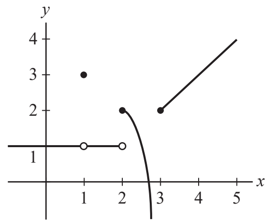
57. $c = \frac{5}{3}$ **59.** $a = 2$ y $b = 1$

61. **(a)** No **(b)** $g(1) = 0$

63.



65.

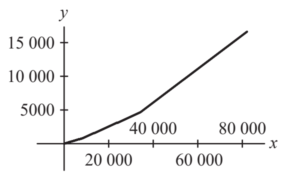


67. -6 **69.** $\frac{1}{3}$ **71.** -1 **73.** $\frac{1}{32}$ **75.** 27 **77.** 1000 **79.** $\frac{1}{2}$

81. No. Considere $f(x) = -x^{-1}$ y $g(x) = x^{-1}$.

83. $f(x) = |g(x)|$ es la composición de las funciones continuas $g(x)$ y $|x|$

85. No.



87. $f(x) = 3$ y $g(x) = [x]$

Sección 2.5 Ejercicios preliminares

1. $\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

2. **(a)** $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **(b)** $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **(c)** $f(x) = \frac{1}{x}$

3. La estrategia se basa en simplif car una función que es indeterminada para obtener una función continua. Cuando esta simplif cación ya se ha realizado, el límite de la función continua resultante se obtiene por evaluación.

Sección 2.5 Problemas

1. $\lim\limits_{x\to 6} \frac{x^2-36}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{(x-6)(x+6)}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}(x+6) = 12$

3. 0 **5.** $\frac{1}{14}$ **7.** -1 **9.** $\frac{11}{10}$ **11.** 2 **13.** 1 **15.** 2

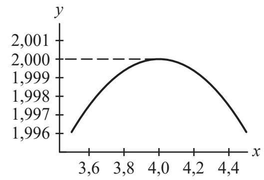
17. $\frac{1}{8}$ **19.** $\frac{7}{17}$

21. El límite no existe.

- Cuando $h \to 0+$, $\dfrac{\sqrt{h+2}-2}{h} \to -\infty$.
- Cuando $h \to 0-$, $\dfrac{\sqrt{h+2}-2}{h} \to +\infty$.

23. 2 **25.** $\frac{1}{4}$ **27.** 1 **29.** 9 **31.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **33.** $\frac{1}{2}$

35. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \approx 2{,}00$; con dos decimales de precisión y que concuerda con el valor de 2 que se obtuvo en el problema 23.



37. 12 **39.** -1 **41.** $\frac{4}{3}$ **43.** $\frac{1}{4}$ **45.** $2a$ **47.** $-4+5a$ **49.** $4a$

51. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ **53.** $3a^2$ **55.** $c = -1$ y $c = 6$ **57.** $c = 3$ **59.** $+$

Sección 2.6 Ejercicios preliminares

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; No

2. Suponga que para $x \neq c$ (en algún intervalo abierto que contenga a c):

$$l(x) \le f(x) \le u(x)$$

y que $\lim\limits_{x\to c} l(x) = \lim\limits_{x\to c} u(x) = L$. Entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

3. **(a)**

Sección 2.6 Problemas

1. Para todo $x \neq 1$ en el intervalo abierto $(0, 2)$ que contiene a $x = 1$, $\ell(x) \le f(x) \le u(x)$. Además:

$$\lim_{x\to 1} \ell(x) = \lim_{x\to 1} u(x) = 2$$

Así, por el teorema de compresión:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

3. $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = 6$

5. **(a)** *no* se dispone de suf ciente información **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$ **9.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{x-1} = 0$

11. $\lim\limits_{t\to 0}(2^t-1)\cos\frac{1}{t} = 0$ **13.** $\lim\limits_{t\to 2}(t^2-4)\cos\frac{1}{t-2} = 0$

15. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos(\tan\theta) = 0$

17. 1 **19.** 3 **21.** 1 **23.** 0 **25.** $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ **27.** **(b)** $L = 14$ **29.** 9

31. $\frac{1}{5}$ **33.** $\frac{7}{3}$ **35.** $\frac{1}{25}$ **37.** 6 **39.** $-\frac{3}{4}$ **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $\frac{6}{5}$ **45.** 0

47. 0 **49.** -1 **53.** $-\frac{9}{2}$

55. $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-\cos t}}{t} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{\sqrt{1-\cos t}}{t} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

59. **(a)**

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,c}{x-c}$	0,999983	0,99999983	0,99999983	0,999983

Aquí $c = 0$ y $\cos c = 1$.

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c}$	0,868511	0,866275	0,865775	0,863511

Aquí $c = \frac{\pi}{6}$ y $\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866025$.

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c}$	0,504322	0,500433	0,499567	0,495662

Aquí $c = \frac{\pi}{3}$ y $\cos c = \frac{1}{2}$.

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c}$	0,710631	0,707460	0,706753	0,703559

Aquí $c = \frac{\pi}{4}$ y $\cos c = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707107$.

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c}$	0,005000	0,000500	−0,000500	−0,005000

Aquí $c = \frac{\pi}{2}$ y $\cos c = 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c} = \cos c$.

(c)

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c}$	−0,411593	−0,415692	−0,416601	−0,420686

Aquí $c = 2$ y $\cos c = \cos 2 \approx -0{,}416147$.

x	$c-0{,}01$	$c-0{,}001$	$c+0{,}001$	$c+0{,}01$
$\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x-c}$	0,863511	0,865775	0,866275	0,868511

Aquí $c = -\frac{\pi}{6}$ y $\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866025$.

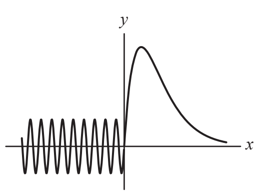
Sección 2.7 Ejercicios preliminares

1. **(a)** Correcto **(b)** Incorrecto **(c)** Incorrecto **(d)** Correcto

2. **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

3.



4. Negativo **5.** Negativo

6. Cuando $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, por lo que

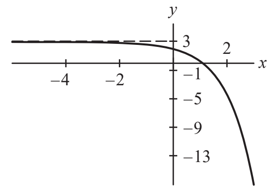
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Por otra parte, $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $\frac{1}{x} \to \pm\infty$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ presenta infinitas oscilaciones.

Sección 2.7 Problemas

1. $y = 1$ y $y = 2$

3.



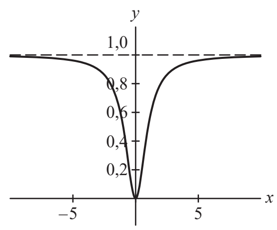
5. **(a)** Según la siguiente tabla, parece que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1.$$

x	±50	±100	±500	±1000
$f(x)$	0,999600	0,999900	0,999996	0,999999

(b) Según la siguiente gráfica, también parece que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1.$$



(c) La asíntota horizontal de $f(x)$ es $y = 1$.

7. 1 **9.** 0 **11.** $\frac{7}{4}$ **13.** $-\infty$ **15.** ∞ **17.** $y = \frac{1}{4}$ **19.** $y = \frac{2}{3}$ y $y = -\frac{2}{3}$ **21.** $y = 0$ **23.** 0 **25.** 2 **27.** $\frac{1}{16}$ **29.** 0

31. 1; la gráfica de $y = 5^{-1/t^2}$ presenta una asíntota horizontal en $y = 1$.

33. **(a)** $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} R(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{As}{K+s} = \lim_{s\to+\infty} \frac{A}{1+\frac{K}{s}} = A$.

(b) $R(K) = \dfrac{AK}{K+K} = \dfrac{AK}{2K} = \dfrac{A}{2}$, la mitad de su valor límite.

(c) 3,75 mM

35. 0 **37.** ∞ **39.** $-\sqrt{3}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x}{2x^2+5} = \lim_{t\to0+} \frac{3-t}{2+5t^2} = \frac{3}{2}$

45. • $b = 0{,}2$:

x	5	10	50	100
$f(x)$	1,000064	1,000000	1,000000	1,000000

Se tiene que $G(0{,}2) = 1$.

• $b = 0{,}8$:

x	5	10	50	100
$f(x)$	1,058324	1,010251	1,000000	1,000000

Se tiene que $G(0{,}8) = 1$.

• $b = 2$:

x	5	10	50	100
$f(x)$	2,012347	2,000195	2,000000	2,000000

Se tiene que $G(2) = 2$.

- $b = 3$:

x	5	10	50	100
$f(x)$	3,002465	3,000005	3,000000	3,000000

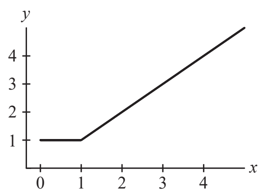
Se tiene que $G(3) = 3$.

- $b = 5$:

x	5	10	50	100
$f(x)$	5,000320	5,000000	5,000000	5,000000

Se tiene que $G(5) = 5$.

Según estas observaciones, la conjetura es que $G(b) = 1$ si $0 \leq b \leq 1$ y $G(b) = b$ para $b > 1$. La gráf ca de $y = G(b)$ se muestra a continuación; la gráf ca parece ser continua.



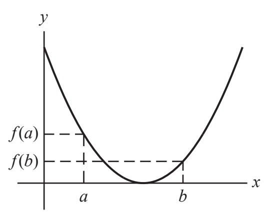
Sección 2.8 Ejercicios preliminares

1. Observe que $f(x) = x^2$ es continua sobre $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Como $f(0) < 0{,}5 < f(1)$, según el teorema del valor intermedio, existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0{,}5$.

2. Se debe suponer que la temperatura es una función continua del tiempo.

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la recta horizontal $y = k$ para cualquier k entre $f(a)$ y $f(b)$ corta la gráf ca de $y = f(x)$ como mínimo una vez.

4.



5. A veces es cierto. **(b)** Siempre es cierto. **(c)** Nunca es cierto. **(d)** A veces es cierto.

Sección 2.8 Problemas

1. Observe que $f(1) = 2$ y $f(2) = 10$. Como f es un polinomio, es siempre continua; es particular sobre $[1, 2]$.Así, según el TVI existe un $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 9$.

3. $g(0) = 0$ y $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16}$. $g(t)$ es continua para todo t entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi^2}{16}$; por tanto, según el TVI, existe un $c \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tal que $g(c) = \frac{1}{2}$.

5. Sea $f(x) = x - \cos x$. Observe que f es continua con $f(0) = -1$ y $f(1) = 1 - \cos 1 \approx 0{,}46$. Así, por el TVI, existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c - \cos c = 0$.

7. Sea $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$. Observe que f es continua sobre $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$ con $f(\frac{1}{4}) = -1$ y $f(2) = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$. Así, por el TVI, existe $c \in \left[\frac{1}{4}, 2\right]$ tal que $f(c) = \sqrt{c} + \sqrt{c+2} - 3 = 0$.

9. Sea $f(x) = x^2$. Observe que f es continua con $f(1) = 1$ y $f(2) = 4$. Así, por el TVI, existe $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = c^2 = 2$.

11. Para cada entero positivo k, sea $f(x) = x^k - \cos x$. Observe que f es continua sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ con $f(0) = -1$ y $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^k > 0$. Así, por el TVI, existe $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(c) = c^k - \cos(c) = 0$.

13. Sea $f(x) = 2^x + 3^x - 4^x$. Observe que f es continua sobre $[0, 2]$ con $f(0) = 1 > 0$ y $f(2) = -3 < 0$. Así, por el TVI, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 2^c + 3^c - 4^c = 0$.

15. Sea $f(x) = 2^x + \frac{1}{x} + 4$. Observe que f es continua sobre $[-\infty, 0)$. $f(-1) = 2^{-1} + \frac{1}{-1} + 4 = \frac{7}{2} > 0$, y $f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2^{1/10}} - 10 + 4 < 0$. Así, por el TVI, existe $c \in \left(-1, -\frac{1}{10}\right)$ tal que $f(c) = 2^c + \frac{1}{c} + 4 = 0$, es decir $2^c + \frac{1}{c} = -4$.

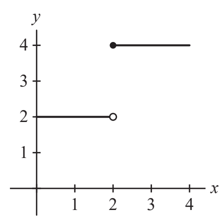
17. (a) $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2^{1{,}5} - (1{,}5)^3 < 3 - 3{,}375 < 0$. Por tanto, $f(x) = 0$ para algún x entre 1 y 1,5.

(b) $f(1{,}25) \approx 0{,}4253 > 0$ y $f(1{,}5) < 0$. Por tanto, $f(x) = 0$ para algún x entre 1,25 y 1,5.

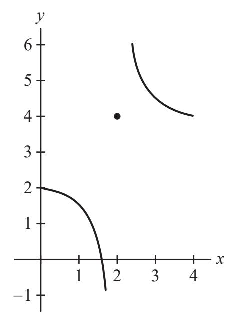
(c) $f(1{,}375) \approx -0{,}0059$. Por tanto, $f(x) = 0$ para algún x entre 1,25 y 1,375.

19. $[0, 0{,}25]$

21.



23.



25. No; no

Sección 2.9 Ejercicios preliminares

1. **(c)**

2. **(b)** y **(d)** son ciertas

Sección 2.9 Problemas

1. $L = 4$, $\epsilon = 0{,}8$, y $\delta = 0{,}1$

3. **(a)**

$$|f(x) - 35| = |8x + 3 - 35| = |8x - 32| = |8(x - 4)| = 8\,|x - 4|$$

(b) Sea $\epsilon > 0$. Sea $\delta = \epsilon/8$ y suponga que $|x - 4| < \delta$. Según el apartado **(a)**, $|f(x) - 35| = 8|x - 4| < 8\delta$. Sustituyendo $\delta = \epsilon/8$, se tiene que $|f(x) - 35| < 8\epsilon/8 = \epsilon$.

5. **(a)** Si $0 < |x - 2| < \delta = 0{,}01$, entonces $|x| < 3$ y $\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| \leq |x - 2|\,(|x| + 2) < 5|x - 2| < 0{,}05$.

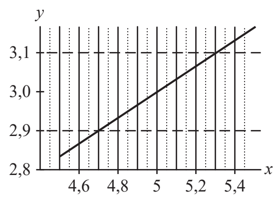
(b) Si $0 < |x-2| < \delta = 0{,}0002$, entonces $|x| < 2{,}0002$ y

$$\left|x^2-4\right| = |x-2||x+2| \le |x-2|\,(|x|+2) < 4{,}0002|x-2|$$
$$< 0{,}00080004 < 0{,}0009$$

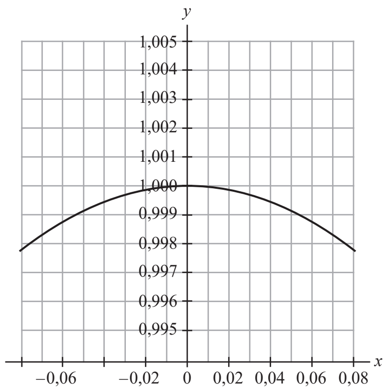
(c) $\delta = 10^{-5}$

7. $\delta = 6\times 10^{-4}$

9. $\delta = 0{,}25$



11. $\delta = 0{,}05$



13. (a) Como $|x-2| < 1$, se tiene que $1 < x < 3$ y, en particular, que $x > 1$. Como $x > 1$, entonces $\dfrac{1}{x} < 1$ y:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-x}{2x}\right| = \frac{|x-2|}{2x} < \frac{1}{2}|x-2|$$

(b) Sea $\delta = \text{mín}\{1, 2\epsilon\}$ y suponga que $|x-2| < \delta$. Entonces, según el apartado (a) se tiene:

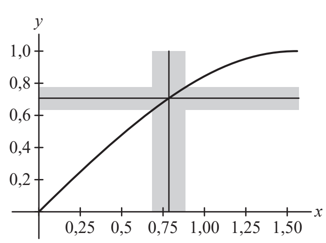
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}|x-2| < \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}\cdot 2\epsilon = \epsilon$$

(c) Considere $\delta = 0{,}02$.

(d) Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces, siempre que $0 < |x-2| < \delta = \min\{1, 2\epsilon\}$, se tiene que:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\delta \le \epsilon$$

15.



17. Dado $\epsilon > 0$, sea:

$$\delta = \text{mín}\left\{|c|, \frac{\epsilon}{3|c|}\right\}$$

Entonces, para $|x-c| < \delta$, se tiene:

$$|x^2-c^2| = |x-c|\,|x+c| < 3|c|\delta < 3|c|\frac{\epsilon}{3|c|} = \epsilon$$

19. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \min(1, 3\epsilon)$. Si $|x-4| < \delta$:

$$|\sqrt{x}-2| = |x-4|\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right| < |x-4|\frac{1}{3} < \delta\frac{1}{3} < 3\epsilon\frac{1}{3} = \epsilon$$

21. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{7})$ y suponga que $|x-1| < \delta$. Por ser $\delta < 1$, $0 < x < 2$. x^2+x+1 es creciente cuando x aumenta para $x > 0$, con lo que $x^2+x+1 < 7$ para $0 < x < 2$ y se tiene:

$$\left|x^3-1\right| = |x-1|\left|x^2+x+1\right| < 7|x-1| < 7\frac{\epsilon}{7} = \epsilon$$

23. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \min(1, \frac{4}{5}\epsilon)$ y suponga que $|x-2| < \delta$. Por ser $\delta < 1$, $|x-2| < 1$, con lo que $1 < x < 3$. Esto signif ca que $4x^2 > 4$ y $|2+x| < 5$, de manera que $\frac{2+x}{4x^2} < \frac{5}{4}$. Se obtiene:

$$\left|x^{-2}-\frac{1}{4}\right| = |2-x|\left|\frac{2+x}{4x^2}\right| < \frac{5}{4}|x-2| < \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\epsilon = \epsilon$$

25. Sea L cualquier número real. Sea $\delta > 0$ cualquier número positivo pequeño. Sea $x = \frac{\delta}{2}$, que cumple $|x| < \delta$ y $f(x) = 1$. Considere los dos casos siguientes:

- ($|f(x)-L| \ge \frac{1}{2}$): ya está.
- ($|f(x)-L| < \frac{1}{2}$): esto signif ca $\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$. En tal caso, sea $x = -\frac{\delta}{2}$. $f(x) = -1$ y, por tanto, $\frac{3}{2} < L - f(x)$.

En cualquiera de los dos casos, existe x tal que $|x| < \frac{\delta}{2}$, pero

$|f(x)-L| \ge \frac{1}{2}$.

27. Sea $\epsilon > 0$ y $\delta = \text{mín}(1, \frac{\epsilon}{2})$. Entonces, siempre que $|x-1| < \delta$, se tiene que $0 < x < 2$. Si $1 < x < 2$, entonces $\text{mín}(x, x^2) = x$ y se tiene:

$$|f(x)-1| = |x-1| < \delta < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Por otra parte, si $0 < x < 1$, entonces $\text{mín}(x, x^2) = x^2$, $|x+1| < 2$ y se tiene:

$$|f(x)-1| = |x^2-1| = |x-1|\,|x+1| < 2\delta < \epsilon$$

Por tanto, siempre que $|x-1| < \delta$, $|f(x)-1| < \epsilon$.

31. Suponga que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-c| < \delta$ fuerza a que $|f(x)-L| < \epsilon/|a|$. Suponga que $|x-c| < \delta$. Entonces $|af(x)-aL| = |a||f(x)-aL| < |a|(\epsilon/|a|) = \epsilon$.

Capítulo 2 Repaso

1. La velocidad media es aproximadamente de 0,954 m/s; la velocidad instantánea es aproximadamente de 0,894 m/s.

3. $\frac{200}{9}$ **5.** 1,50 **7.** 1,69 **9.** 2,00

11. 5 **13.** $-\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **17.** 2

19. No existe;

$$\lim_{t\to 9-} \frac{t-6}{\sqrt{t}-3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 9+} \frac{t-6}{\sqrt{t}-3} = +\infty$$

21. $+\infty$

23. No existe;

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^3-2x}{x-1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1+} \frac{x^3-2x}{x-1} = -\infty$$

25. 2 **27.** $\frac{2}{3}$ **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** $3b^2$ **33.** $\frac{1}{9}$ **35.** ∞

37. No existe;

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}-} \theta \sec\theta = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}+} \theta \sec\theta = -\infty$$

39. No existe;

$$\lim_{\theta\to 0-} \frac{\cos\theta - 2}{\theta} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to 0+} \frac{\cos\theta - 2}{\theta} = -\infty$$

41. $+\infty$ **43.** $+\infty$

45. No existe;

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$$

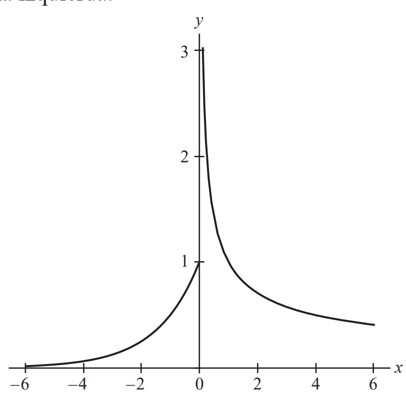
47. 0 **49.** 0

51. Según la gráf ca de $f(x)$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 4-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 4+} f(x) = +\infty.$$

La función es continua por la derecha y por la izquierda en $x = 0$ y no es ni continua por la derecha ni por la izquierda en $x = 2$ y en $x = 4$.

53. En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad inf nita pero es continua por la izquierda.



55. $g(x)$ presenta una discontinuidad de salto en $x = -1$; $g(x)$ es continua por la izquierda en $x = -1$.

57. $b = 7$; $h(x)$ presenta una discontinuidad de salto en $x = -2$.

59. No tiene asíntotas horizontales.

61. $y = 2$ **63.** $y = 1$

65.

$$B = B\cdot 1 = B\cdot L =$$
$$= \lim_{x\to a} g(x)\cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) = A$$

67. $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^5}$

71. Sea $f(x) = x^2 - \cos x$. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$. Por tanto, por el teorema del valor intermedio, existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$; en consecuencia, las curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$ intersecan.

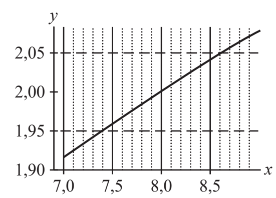
73. Sea $f(x) = 2^{-x^2} - x$. Observe que f es continua en $[0, 1]$ con $f(0) = 2^0 - 0 = 1 > 0$ y $f(1) = 2^{-1} - 1 < 0$. Por tanto, el TVI garantiza que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 2^{-c^2} - c = 0$.

75. $g(x) = [x]$; sobre el intervalo:

$$x \in \left[\frac{a}{2+2\pi a}, \frac{a}{2}\right] \subset [-a, a]$$

$\frac{1}{x}$ varía de $\frac{2}{a}$ a $\frac{2}{a} + 2\pi$, por lo que la función seno recorre un periodo completo y, claramente, alcanza cualquier valor desde $-\operatorname{sen} a$ hasta $\operatorname{sen} a$.

77. $\delta = 0{,}55$;



79. Sea $\epsilon > 0$ y considere $\delta = \epsilon/8$. Entonces, siempre que $|x - (-1)| = |x + 1| < \delta$, se tiene:

$$|f(x) - (-4)| = |4 + 8x + 4| = 8|x + 1| < 8\delta = \epsilon$$

Capítulo 3

Sección 3.1 Ejercicios preliminares

1. B y D

2. $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

3. $a = 3$ y $h = 2$

4. Derivada de la función $f(x) = \tan x$ en $x = \frac{\pi}{4}$

5. **(a)** La diferencia en altura entre los puntos $(0{,}9,\ \operatorname{sen} 0{,}9)$ y $(1{,}3,\ \operatorname{sen} 1{,}3)$.

(b) La pendiente de la recta secante entre los puntos $(0{,}9,\ \operatorname{sen} 0{,}9)$ y $(1{,}3,\ \operatorname{sen} 1{,}3)$.

(c) La pendiente de la recta tangente a la gráf ca en $x = 0{,}9$.

Sección 3.1 Problemas

1. $f'(3) = 30$ **3.** $f'(0) = 9$ **5.** $f'(-1) = -2$

7. Pendiente de la recta secante = 1; la recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(2{,}5, f(2{,}5))$ tiene una pendiente mayor que la recta tangente en $x = 2$.

9. $f'(1) \approx 0$; $f'(2) \approx 0{,}8$

11. $f'(1) = f'(2) = 0$; $f'(4) = \frac{1}{2}$; $f'(7) = 0$

13. $f'(5{,}5)$ **15.** $f'(x) = 7$ **17.** $g'(t) = -3$ **19.** $y = 2x - 1$

21. La recta tangente en cualquier punto es la propia recta.

23. $f(-2 + h) = \dfrac{1}{-2 + h}$; $-\dfrac{1}{3}$

25. $f'(5) = -\frac{1}{10\sqrt{5}}$

27. $f'(3) = 22$; $y = 22x - 18$

29. $f'(3) = -11$; $y = -11t + 18$

31. $f'(0) = 1$; $y = x$

33. $f'(8) = -\dfrac{1}{64}$; $y = -\dfrac{1}{64}x + \dfrac{1}{4}$

35. $f'(-2) = -1$; $y = -x - 1$

37. $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$; $y = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}x + \dfrac{9}{2\sqrt{5}}$

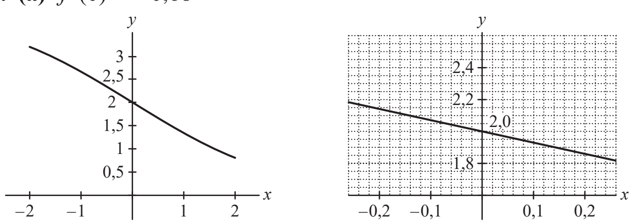
39. $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$; $y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{3}{4}$

41. $f'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}t + \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

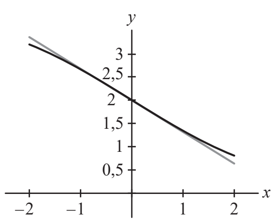
43. $f'(0) = 0$; $y = 1$

45. $W'(4) \approx 0{,}9$ kg/año; pendiente de la recta tangente es cero en $t = 10$ y en $t = 11{,}6$; pendiente de la recta tangente es negativa en $10 < t < 11{,}6$.

47. (a) $f'(0) \approx -0{,}68$



(b) $y = -0{,}68x + 2$



49. Para $1 < x < 2{,}5$ y para $x > 3{,}5$.

51. $f(x) = x^3$ y $a = 5$

53. $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a = \frac{\pi}{6}$

55. $f(x) = 5^x$ y $a = 2$

57. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}7071$

59. • Sobre la curva (A), $f'(1)$ es mayor que

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

La curva se dobla hacia abajo, por lo que la recta secante a la derecha tiene menor ángulo que la recta tangente.

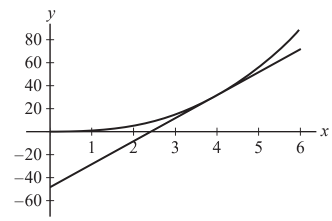
• Sobre la curva (B), $f'(1)$ es menor que

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

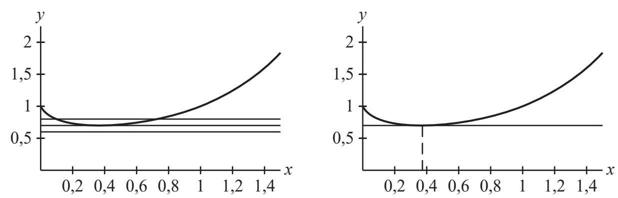
La curva se dobla hacia arriba, por lo que la recta secante a la derecha tiene un ángulo más pronunciado que la recta tangente.

61. (b) $f'(4) \approx 20{,}0000$

(c) $y = 20x - 48$



63. $c \approx 0{,}37$



65.

$$P'(303) \approx \frac{P(313) - P(293)}{20} = \frac{0{,}0808 - 0{,}0278}{20} = 0{,}00265 \text{ atm/K};$$

$$P'(313) \approx \frac{P(323) - P(303)}{20} = \frac{0{,}1311 - 0{,}0482}{20} = 0{,}004145 \text{ atm/K};$$

$$P'(323) \approx \frac{P(333) - P(313)}{20} = \frac{0{,}2067 - 0{,}0808}{20} = 0{,}006295 \text{ atm/K};$$

$$P'(333) \approx \frac{P(343) - P(323)}{20} = \frac{0{,}3173 - 0{,}1311}{20} = 0{,}00931 \text{ atm/K};$$

$$P'(343) \approx \frac{P(353) - P(333)}{20} = \frac{0{,}4754 - 0{,}2067}{20} = 0{,}013435 \text{ atm/K}$$

67. $-0{,}39375$ kph·km/coche

69. $i(3) = 0{,}06$ amperios

71. $v'(4) \approx 160$; $C \approx 0{,}2$ faradios

73. Es la pendiente de la recta secante que conecta los puntos $(a - h, f(a - h))$ y $(a + h, f(a + h))$ sobre la gráf ca de f.

Sección 3.2 Ejercicios preliminares

1. 8 **2.** $(f - g)'(1) = -2$ y $(3f + 2g)'(1) = 19$

3. (a), (b), (c) y **(f)** **4. (b)**

5. (b) Si $f(x)$ es derivable en $x = c$, entonces es continua en $x = c$ por el teorema 4. Sin embargo (vea el ejemplo 9), hay funciones que son continuas en un punto sin ser derivables en éste.

Sección 3.2 Problemas

1. $f'(x) = 3$ **3.** $f'(x) = 3x^2$ **5.** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

7. $\dfrac{d}{dx}x^4\Big|_{x=-2} = 4(-2)^3 = -32$ **9.** $\dfrac{d}{dt}t^{2/3}\Big|_{t=8} = \dfrac{2}{3}(8)^{-1/3} = \dfrac{1}{3}$

11. $0{,}35x^{-0{,}65}$ **13.** $\sqrt{17}t^{\sqrt{17}-1}$

15. $f'(x) = 4x^3$; $y = 32x - 48$

17. $f'(x) = 5 - 16x^{-1/2}$; $y = -3x - 32$

19. $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$; $y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{54}(x - 9)$; $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{54}x$

21. $f'(x) = 6x^2 - 6x$ **23.** $f'(x) = \dfrac{20}{3}x^{2/3} + 6x^{-3}$

25. $g'(z) = -\dfrac{5}{2}z^{-19/14} - 5z^{-6}$

27. $f'(s) = \dfrac{1}{4}s^{-3/4} + \dfrac{1}{3}s^{-2/3}$

29. $g'(x) = 0$ **31.** $h'(t) = 2t^{\sqrt{2}-1}$ **33.** $P'(s) = 32s - 24$

35. $g'(x) = -6x^{-5/2}$ **37.** 1 **39.** −60 **41.** $\frac{47}{16}$

43. • La gráf ca en (A) concuerda con la derivada en (III).

• La gráf ca en (B) concuerda con la derivada en (I).

• La gráf ca en (C) concuerda con la derivada en (II).

• La gráf ca en (D) concuerda con la derivada en (III).

(A) y (D) tienen la misma derivada porque (D) es la traslación vertical de la gráf ca de (A).

45. Etiquete la gráf ca en (A) como $f(x)$, la gráf ca en (B) como $h(x)$ y la gráf ca en (C) como $g(x)$.

47. (B) podría ser la gráf ca de la derivada de $f(x)$.

49. **(a)** $\dfrac{d}{dt}ct^3 = 3ct^2$

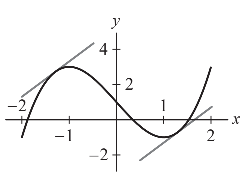
(b) $\dfrac{d}{dz}(5z + 4cz^2) = 5 + 8cz$

(c) $\dfrac{d}{dy}(9c^2y^3 - 24c) = 27c^2y^2$

51. $x = \frac{1}{2}$ **53.** $a = 2$ y $b = -3$

55. • $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq -3$ porque $3x^2$ no es negativo.

• Las dos rectas tangentes paralelas de pendiente 2 se muestran a continuación junto con la gráf ca de $f(x)$.



57. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

59. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h^2 + 2h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h+2)|h|}{h}$

Este límite no existe, pues el término $h + 2$ resulta igual a 2 cuando $h \to 0$, pero el término restante, $|h|/h$, es 1 para $h > 0$ y −1 para $h < 0$. De esta manera, los dos límites laterales no son iguales.

61. Decreciente; $y = -0{,}63216(m - 33) + 83{,}445$; $y = -0{,}25606(m - 68) + 69{,}647$

63.

$$P'(303) \approx \frac{P(313) - P(293)}{20} = \frac{0{,}0808 - 0{,}0278}{20} = 0{,}00265 \text{ atm/K};$$

$$P'(313) \approx \frac{P(323) - P(303)}{20} = \frac{0{,}1311 - 0{,}0482}{20} = 0{,}004145 \text{ atm/K};$$

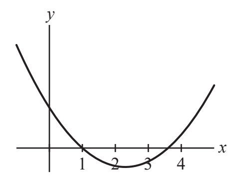
$$P'(323) \approx \frac{P(333) - P(313)}{20} = \frac{0{,}2067 - 0{,}0808}{20} = 0{,}006295 \text{ atm/K};$$

$$P'(333) \approx \frac{P(343) - P(323)}{20} = \frac{0{,}3173 - 0{,}1311}{20} = 0{,}00931 \text{ atm/K};$$

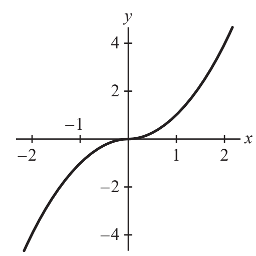
$$P'(343) \approx \frac{P(353) - P(333)}{20} = \frac{0{,}4754 - 0{,}2067}{20} = 0{,}013435 \text{ atm/K}$$

$\dfrac{T^2}{P}\dfrac{dP}{dT}$ es prácticamente constante, con la conclusión de que la ley de Clausius-Clapeyron se cumple y que $k \approx 5000$.

67.



69. Para $x < 0$, $f(x) = -x^2$ y $f'(x) = -2x$. Para $x > 0$, $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$. Por tanto, $f'(0) = 0$.



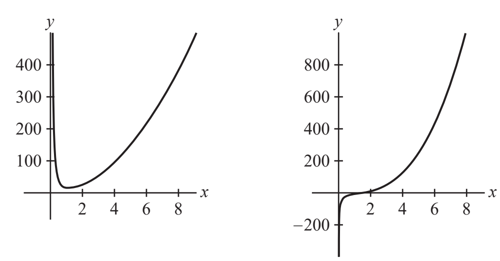
71. $c = 1$ **73.** $c = 0$ **75.** $c = \pm 1$

77. Se tiene que f no es derivable en $a = 0$. De hecho, la recta tangente no existe en este punto.

79. Se tiene que f no es derivable en $a = 3$. De hecho, la recta tangente resulta vertical.

81. Se tiene que f no es derivable en $a = 0$. De hecho, la recta tangente no existe en este punto.

83. La gráf ca de $f'(x)$ se muestra en la f gura siguiente, a la izquierda, de donde se observa claramente que $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. La positividad de $f'(x)$ indica que la gráf ca de $f(x)$ es estrictamente creciente para $x > 0$.



85. $\dfrac{10}{7}$

87. La recta normal corta el eje x en el punto T de coordenadas $(x+f(x)f'(x),0)$. El punto R tiene coordenadas$(a,0)$, por lo que la subnormal es $|x+f(x)f'(x)-x| = |f(x)f'(x)|$.

89. La recta tangente a f en $x=a$ es $y=2ax-a^2$. La intersección con el eje x de esta recta es $\frac{a}{2}$ por lo que la subtangente es $a-a/2=a/2$.

91. La subtangente es $\dfrac{1}{n}a$. **93.** $r \le \dfrac{1}{2}$

Sección 3.3 Ejercicios preliminares

1. Falso. La notación fg denota la función cuyo valor en x es $f(x)g(x)$.

(b) Verdadero.

(c) Falso. La derivada de un producto fg es $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

(d) Falso. $\left.\dfrac{d}{dx}(fg)\right|_{x=4} = f(4)g'(4)+g(4)f'(4)$. **(e)** Verdadero.

2. -1 **3.** 5

Sección 3.3 Problemas

1. $f'(x) = 10x^4+3x^2$

3. $f'(x) = \sqrt{x}(-3x^2)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-x^3) = \dfrac{1-7x^3}{2\sqrt{x}}$

5. $\dfrac{dh}{ds} = -\dfrac{7}{2}s^{-3/2}+\dfrac{3}{2}s^{-5/2}+14$; $\left.\dfrac{dh}{ds}\right|_{s=4} = \dfrac{871}{64}$

7. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

9. $\dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{4t}{(t^2-1)^2}$; $\left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=-2} = \dfrac{8}{9}$

11. $g'(x) = -\dfrac{3\sqrt{x}}{2(1+x^{3/2})^2}$ **13.** $f'(t) = 6t^2+2t-4$

15. $h'(t) = 1$ para $t \neq 1$

17. $f'(x) = 6x^5+4x^3+18x^2+5$

19. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(x+10)^2}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = -\dfrac{1}{169}$

21. $f'(x) = 1$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^5-20x^3+8x}{\left(x^2-5\right)^2}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2} = -80$

25. $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$; $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=1} = -\dfrac{3}{4}$

27. $h'(t) = \dfrac{-2t^3-t^2+1}{\left(t^3+t^2+t+1\right)^2}$

29. $f'(t) = 0$

31. $f'(x) = 3x^2-6x-13$

33. $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}(5x^3+7x^2+x+3)}{2(x+1)^2}$

35. Para $z \neq -2$ y $z \neq 1$, $g'(z) = 2z-1$

37. $f'(t) = \dfrac{-xt^2+8t-x^2}{(t^2-x)^2}$

39. $(fg)'(4) = -20$ y $(f/g)'(4) = 0$

41. $G'(4) = -10$ **43.** $F'(0) = -7$

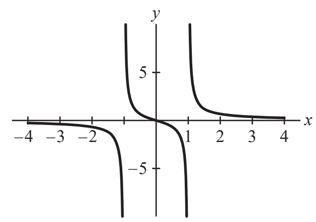
45.

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x\cdot x\cdot x)' = x'\cdot(x\cdot x)+x\cdot(x\cdot x)' \\ &= 1\cdot(x\cdot x)+x\cdot(x'\cdot x+x\cdot x') \\ &= x\cdot x+x\cdot(1\cdot x+x\cdot 1) = 3x\cdot x = 3x^2\end{aligned}$$

47. A partir de la gráf ca de $f(x)$, que se muestra a continuación, se tiene que $f(x)$ es estrictamente decreciente sobre su dominio $\{x : x \neq \pm 1\}$. En consecuencia, $f'(x)$ debe ser negativa. Usando la regla del cociente, se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

que es negativa para todo $x \neq \pm 1$.



49. $a = -2, 4$

51. **(a)** Dado $R(t) = N(t)S(t)$, se tiene que:

$$\frac{dR}{dt} = N(t)S'(t)+S(t)N'(t)$$

(b) $\left.\dfrac{dR}{dt}\right|_{t=0} = 1\ 250\ 000$

(c) El término $5S(0)$ es mayor que el término $10\ 000N(0)$. Por tanto, si sólo se puede llevar a cabo una parte de la campaña, debería ser la parte A: aumentar el número de tiendas en 5 al mes.

53. • En $x=-1$, la recta tangente es $y = \dfrac{1}{2}x+1$.

• En $x=1$, la recta tangente es $y = -\dfrac{1}{2}x+1$.

55. Sea $g = f^2 = ff$. Entonces:

$g' = \left(f^2\right)' = (ff)' = ff'+ff' = 2ff'$

57. Sea $p = fgh$. Entonces:

$p' = (fgh)' = f(gh'+hg')+ghf' = f'gh+fg'h+fgh'$

61.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(xf(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)f(x+h)-f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(x\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x+h)\right) = \\ &= x\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}f(x+h) = \\ &= xf'(x)+f(x).\end{aligned}$$

65. **(a)** Es una raíz múltiple. **(b)** No es una raíz múltiple.

Sección 3.4 Ejercicios preliminares

1. atmósferas/metro. **(b)** moles/(litro·hora).

2. 90 mph **3.** $f(26) \approx 43{,}75$

4. **(a)** $P'(2009)$ mide la tasa de variación de la población de Freedonia en el año 2009.

(b) $P(2010) \approx 5{,}2$ millones.

Sección 3.4 Problemas

1. 10 unidades cuadradas por incremento unitario.

3.

c	TV de $f(x)$ respecto a x en $x = c$
1	$f'(1) = \frac{1}{3}$
8	$f'(8) = \frac{1}{12}$
27	$f'(27) = \frac{1}{27}$

5. $d' = 2$ **7.** $dV/dr = 3\pi r^2$

9. **(a)** 100 km/hora **(b)** 100 km/hora **(c)** 0 km/hora

(d) −50 km/hora

11. **(a)** **(i)** **(b)** **(ii)** **(c)** **(iii)**

13. $\dfrac{dT}{dt} \approx -1{,}5625°\text{C/hora}$

15. -8×10^{-6} 1/s

17. $\left.\dfrac{dT}{dh}\right|_{h=30} \approx 2{,}94°\text{C/km}$; $\left.\dfrac{dT}{dh}\right|_{h=70} \approx -3{,}33°\text{C/km}$; $\dfrac{dT}{dh} = 0$ sobre el intervalo $[13, 23]$ y alrededor de los puntos $h = 50$ y $h = 90$.

19. $v'_{\text{esc}}(r) = -1{,}41 \times 10^7 r^{-3/2}$ **21.** $t = \frac{5}{2}$ s

23. La partícula pasa por el origen en $t = 0$ segundos y cuando $t = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ segundos. La partícula está instantáneamente parada cuando $t = 0$ segundos y cuando $t = 3$ segundos.

25. Velocidad máxima: 200 m/s; altura máxima: 2040,82 m

27. Velocidad inicial: $v_0 = 19{,}6$ m/s; altura máxima: 19,6 m

31. **(a)** $\dfrac{dV}{dv} = -1$ **(b)** −4

35. Tasa de variación de BSA respecto a la masa: $\dfrac{\sqrt{5}}{20\sqrt{m}}$; $m = 70$ kg, la tasa de variación es $\approx 0{,}0133631 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$; $m = 80$ kg, la tasa de variación es $\frac{1}{80}\frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$; la BSA aumenta más rápido con menor masa corporal.

37. 2

39. $\sqrt{2} - \sqrt{1} \approx \frac{1}{2}$; el valor real, con seis decimales de precisión, es 0,414214. $\sqrt{101} - \sqrt{100} \approx 0{,}05$; el valor real, con seis decimales de precisión, es 0,0498756.

41. • $F(65) = 282{,}75$ ft

• Aumentar la celeridad de 65 a 66 provoca un aumento en la distancia de frenado de, aproximadamente, 7,6 ft.

• El incremento real en la distancia de frenado cuando la celeridad aumenta de 65 mph a 66 mph es $F(66) - F(65) = 290{,}4 - 282{,}75 = 7{,}65$ pies, lo que dif ere en menos de un uno por ciento de la estimación hallada usando la derivada.

43. El coste de producir 2000 bagels es 796 $. El coste de la bagel 2001 es aproximadamente 0,244 $, que es indistinguible del coste estimado.

45. Un aumento de los precios del petróleo de un dólar da lugar a una disminución en la demanda de 0,5625 barriles al año y a una disminución del precio en un dólar da lugar a un aumento en la demanda de 0,5625 barriles al año.

47. $\dfrac{dB}{dI} = \dfrac{2k}{3I^{1/3}}$; $\dfrac{dH}{dW} = \dfrac{3k}{2}W^{1/2}$

(a) Cuando I aumenta, $\frac{dB}{dI}$ disminuye, por lo que la tasa de variación de la intensidad percibida disminuye al aumentar la intensidad real.

(b) Cuando W aumenta, $\frac{dH}{dW}$ también aumenta, de modo que la tasa de variación del peso percibido aumenta a medida que aumenta el peso.

49. **(a)** El salario medio en los hogares de la r-ésima parte inferior es:

$$\frac{F(r)T}{rN} = \frac{F(r)}{r} \cdot \frac{T}{N} = \frac{F(r)}{r}A$$

(b) El salario medio en los hogares que se encuentran en el intervalo $[r, r + \Delta r]$ es igual a:

$$\frac{F(r+\Delta r)T - F(r)T}{\Delta r N} = \frac{F(r+\Delta r) - F(r)}{\Delta r} \cdot \frac{T}{N} = \frac{F(r+\Delta r) - F(r)}{\Delta r}A$$

(c) Considere el resultado del apartado (b) y sea $\Delta r \to 0$. Como:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{F(r+\Delta r) - F(r)}{\Delta r} = F'(r)$$

se obtiene que un hogar en el percentil $100r$-ésimo tiene ingresos $F'(r)A$.

(d) El punto P de la f gura 14(B) tiene coordenada r igual a 0,6, mientras que la coordenada r del punto Q es prácticamente 0,75. Por tanto, sobre la curva L_1, el 40 % de los hogares presentan $F'(r) > 1$ y, en consecuencia, tienen ingresos por encima de la media. Sobre la curva L_2, prácticamente el 25 % de los hogares tienen ingresos por encima de la media.

53. Por def nición, la pendiente de la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(x, C(x))$ es:

$$\frac{C(x) - 0}{x - 0} = \frac{C(x)}{x} = C_{\text{avg}}(x)$$

• En el punto A, el coste medio es mayor que el coste marginal.

• En el punto B, el coste medio es mayor que el coste marginal.

• En el punto C, el coste medio y el coste marginal son prácticamente iguales.

• En el punto D, el coste medio es menor que el coste marginal.

Sección 3.5 Ejercicios preliminares

1. La derivada primera de los precios de las acciones debe ser positiva, mientras que la derivada segunda debe ser negativa.

2. Verdadero.

3. Todos los polinomios cuadráticos.

4. e^x

Sección 3.5 Problemas

1. $y'' = 28$ e $y''' = 0$

3. $y'' = 12x^2 - 50$ e $y''' = 24x$

5. $y'' = 8\pi r$ e $y''' = 8\pi$

7. $y'' = -\dfrac{16}{5}t^{-6/5} + \dfrac{4}{3}t^{-4/3}$ e $y''' = \dfrac{96}{25}t^{-11/15} - \dfrac{16}{9}t^{-7/3}$

9. $y'' = -8z^{-3}$ e $y''' = 24z^{-4}$

11. $y'' = 12\theta + 14$ e $y''' = 12$

13. $y'' = -8x^{-3}$ e $y''' = 24x^{-4}$

15. $y'' = \frac{1}{4}(3s^{-5/2} - s^{-3/2})$ e $y''' = \frac{1}{8}(3s^{-5/2} - 15s^{-7/2})$

17. $f^{(4)}(1) = 24$ **19.** $\left.\dfrac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=1} = 54$

21. $\left.\dfrac{d^4x}{dt^4}\right|_{t=16} = \dfrac{3465}{134217728}$ **23.** $f'''(-3) = -\dfrac{62}{9}$

25. $h''(1) = \frac{1}{8}$

27. $y^{(0)}(0) = d$, $y^{(1)}(0) = c$, $y^{(2)}(0) = 2b$, $y^{(3)}(0) = 6a$, $y^{(4)}(0) = 24$, e $y^{(5)}(0) = 0$

29. $\dfrac{d^6}{dx^6}x^{-1} = 720x^{-7}$

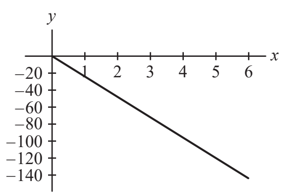
31. $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!x^{-(n+2)}$

33. $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1}{2^n} x^{-(2n+1)/2}$

35. $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!(x+n+1)}{x^{n+2}}$

37. (a) $a(5) = -120$ m/min^2

(b) La aceleración del helicóptero para $0 \le t \le 6$ se muestra en la siguiente figura. Cuando la aceleración del helicóptero es negativa, la velocidad del helicóptero debe ser decreciente. Como la velocidad es positiva para $0 \le t \le 6$, el helicóptero se está parando.



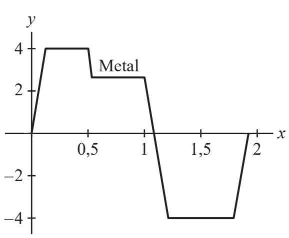
39. (a) f'' (b) f' (c) f

41. Aproximadamente desde el instante 10 al instante 20 y desde el instante 30 al instante 40

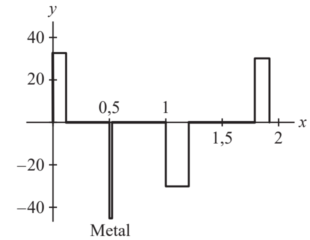
43. $n = -1, 4$

45. (a) $v(t) = -5{,}12$ m/s **(b)** $v(t) = -7{,}25$ m/s

47. Una posible gráfica de la velocidad vertical de la broca es la siguiente:



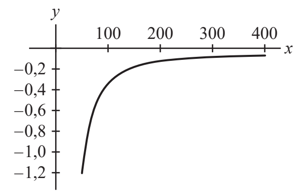
De ésta se puede extraer la gráfica de la aceleración:



49. (a) La velocidad del tráfico se debe reducir cuando la carretera está más concurrida por lo que se espera que $\frac{dS}{dQ}$ sea negativa.

(b) La disminución de la celeridad debida a un aumento unitario en la densidad es aproximadamente $\frac{dS}{dQ}$ (un número negativo). Como $\frac{d^2S}{dQ^2} = 5764Q^{-3} > 0$ es positiva, se puede afirmar que $\frac{dS}{dQ}$ se hace mayor al aumentar Q.

(c) dS/dQ se representa a continuación. Como esta gráfica es estrictamente creciente, se tiene que $d^2S/dQ^2 > 0$.



51.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{3}{(x-1)^2} = (-1)^1\frac{3\cdot 1}{(x-1)^{1+1}}\\
f''(x) &= \frac{6}{(x-1)^3} = (-1)^2\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(x-1)^{2+1}}\\
f'''(x) &= -\frac{18}{(x-1)^4} = (-1)^3\frac{3\cdot 3!}{(x-1)^{3+1}}\\
f^{(4)}(x) &= \frac{72}{(x-1)^5} = (-1)^4\frac{3\cdot 4!}{(x-1)^{4+1}}
\end{aligned}$$

Según el patrón observado anteriormente, se conjetura que:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\frac{3\cdot k!}{(x-1)^{k+1}}$$

53. 99!

55. $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$;

$(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$

57.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x^2e^x + 2xe^x = (x^2+2x)e^x\\
f''(x) &= (x^2+2x)e^x + (2x+2)e^x = (x^2+4x+2)e^x\\
f'''(x) &= (x^2+4x+2)e^x + (2x+4)e^x = (x^2+6x+6)e^x\\
f^{(4)}(x) &= (x^2+6x+6)e^x + (2x+6)e^x = (x^2+8x+12)e^x
\end{aligned}$$

A partir de esta información, se conjetura que la fórmula general es:

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$$

Sección 3.6 Ejercicios preliminares

1. (a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + \cos x) = -\operatorname{sen} x + \cos x$

(b) $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

(c) $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

2. (a) Esta función se puede derivar usando la regla del producto.

(b) Todavía no se ha examinado cómo derivar una función de este tipo.

(c) Esta función se puede derivar usando la regla del producto.

3. 0

4. El cociente incremental para la función $\operatorname{sen} x$ involucra la expresión $\operatorname{sen}(x+h)$. La fórmula de la adición para la función seno se utiliza para desarrollar esta expresión como $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x$.

Sección 3.6 Problemas

1. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **3.** $y = 2x + 1 - \dfrac{\pi}{2}$

5. $f'(x) = -\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ **7.** $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

9. $H'(t) = 2 \operatorname{sen} t \sec^2 t \tan t + \sec t$

11. $f'(\theta) = \left(\tan^2\theta + \sec^2\theta\right)\sec\theta$

13. $f'(x) = (2x^4 - 4x^{-1})\sec x \tan x + \sec x(8x^3 + 4x^{-2})$

15. $y' = \dfrac{\theta \sec\theta \tan\theta - \sec\theta}{\theta^2}$ **17.** $R'(y) = \dfrac{4\cos y - 3}{\operatorname{sen}^2 y}$

19. $f'(x) = \dfrac{2\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2}$ **21.** $f'(x) = \dfrac{-2\cos x}{(\operatorname{sen} x - 1)^2}$

23. $R'(\theta) = \dfrac{-4 \operatorname{sen}\theta}{(4 + \cos\theta)^2}$

25. $y = 1$ **27.** $y = x + 3$

29. $y = (1 - \sqrt{3})\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 + \sqrt{3}$

31. $y = -\dfrac{7}{6}t + \dfrac{3\sqrt{3} + 7\pi}{18}$ **33.** $y = 6\pi x - \dfrac{9}{2}\pi^2$

35. $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$; use la regla del cociente

37. $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$; use la regla del cociente

39. $f''(\theta) = -\theta \operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$

41.
$$y'' = 2\sec^2 x \tan x$$
$$y''' = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x.$$

43. • Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$,
$f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ y $f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$.

• En consecuencia, las derivadas sucesivas de f son cíclicas entre

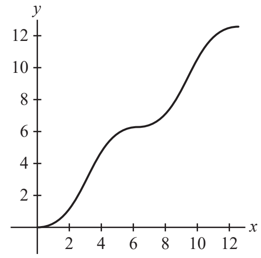
$$\{-\operatorname{sen} x, -\cos x, \operatorname{sen} x, \cos x\}$$

y en este orden. Como 8 es un múltiplo de 4, se tiene que $f^{(8)}(x) = \cos x$.

• Como 36 es un múltiplo de 4, se tiene que $f^{(36)}(x) = \cos x$. Por tanto, $f^{(37)}(x) = -\operatorname{sen} x$.

45. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

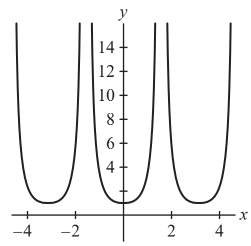
47. (a)



(b) Como $g'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ para todo t, la pendiente de la recta tangente a g es siempre no negativa.

(c) $t = 0, 2\pi, 4\pi$

49. $f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Observe que $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ tiene numerador igual a 1; por tanto, la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución. La menor pendiente para una recta tangente a $\tan x$ es 1. He aquí la gráf ca de f'.



51. $\dfrac{dR}{d\theta} = (v_0^2/9{,}8)(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$; si $\theta = 7\pi/24$, el aumento del ángulo *disminuye* el rango.

53.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left((-\operatorname{sen} x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} + (\cos x)\frac{\cos h - 1}{h}\right) =$$
$$= (-\operatorname{sen} x)\cdot 1 + (\cos x)\cdot 0 = -\operatorname{sen} x$$

Sección 3.7 Ejercicios preliminares

1. (a) La función exterior es $\sqrt{x}$ y la función interior es $4x + 9x^2$.

(b) La función exterior es $\tan x$ y la función interior es $x^2 + 1$.

(c) La función exterior es x^5 y la función interior es $\sec x$.

(d) La función exterior es x^4 y la función interior es $1 + x^{12}$.

2. La función $\frac{x}{x+1}$ se puede derivar usando la regla del cociente y las funciones $\sqrt{x}\cdot\sec x$ y xe^x se pueden derivar usando la regla del producto. Las funciones $\tan(7x^2+2)$, $\sqrt{x}\cos x$ y $e^{\operatorname{sen} x}$ requieren la regla de la cadena.

3. (b)

4. No se dispone de suf ciente información para calcular $F'(4)$. Se necesita el valor de $f'(1)$.

Sección 3.7 Problemas

1.

$f(g(x))$	$f'(u)$	$f'(g(x))$	$g'(x)$	$(f \circ g)'$
$(x^4+1)^{3/2}$	$\frac{3}{2}u^{1/2}$	$\frac{3}{2}(x^4+1)^{1/2}$	$4x^3$	$6x^3(x^4+1)^{1/2}$

3.

$f(g(x))$	$f'(u)$	$f'(g(x))$	$g'(x)$	$(f \circ g)'$
$\tan(x^4)$	$\sec^2 u$	$\sec^2(x^4)$	$4x^3$	$4x^3 \sec^2(x^4)$

5. $4(x + \operatorname{sen} x)^3(1 + \cos x)$

7. **(a)** $2x \operatorname{sen}(9 - x^2)$ **(b)** $\dfrac{\operatorname{sen}(x^{-1})}{x^2}$ **(c)** $-\sec^2 x \operatorname{sen}(\tan x)$

9. 12 **11.** $12x^3(x^4 + 5)^2$ **13.** $\dfrac{7}{2\sqrt{7x - 3}}$

15. $-2(x^2 + 9x)^{-3}(2x + 9)$ **17.** $-4\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta$

19. $9(2\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta)^8(5\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$

21. $(x + 1)(x^2 + 2x + 9)^{-1/2}\cos\sqrt{x^2 + 2x + 9}$.

23. $2\cos(2x + 1)$ **25.** $\sec^2 x - \csc^2 x$

27.
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1)(2x) = -2x\operatorname{sen}(x^2 + 1)$$
$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = -2\operatorname{sen} x \cos x$$

29. $2x\cos\left(x^2\right)$ **31.** $\dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 9}}$

33. $\dfrac{2}{3}\left(x^4 - x^3 - 1\right)^{-1/3}\left(4x^3 - 3x^2\right)$

35. $\dfrac{8(1 + x)^3}{(1 - x)^5}$ **37.** $-\dfrac{\sec(1/x)\tan(1/x)}{x^2}$

39. $(1 - \operatorname{sen}\theta)\sec^2(\theta + \cos\theta)$

41. $4\theta\cot(2\theta^2 - 9)\csc(2\theta^2 - 9)$

43. $(2x + 4)\sec^2(x^2 + 4x)$

45. $3x\operatorname{sen}(1 - 3x) + \cos(1 - 3x)$

47. $2(4t + 9)^{-1/2}$ **49.** $4(\operatorname{sen} x - 3x^2)(x^3 + \cos x)^{-5}$

51. $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2\operatorname{sen} 2x}}$ **53.** $\dfrac{x\cos(x^2) - 3\operatorname{sen} 6x}{\sqrt{\cos 6x + \operatorname{sen}(x^2)}}$

55. $3(x^2\sec^2(x^3) + \sec^2 x\tan^2 x)$ **57.** $\dfrac{-1}{\sqrt{z + 1}\,(z - 1)^{3/2}}$

59. $\dfrac{\operatorname{sen}(-1) - \operatorname{sen}(1 + x)}{(1 + \cos x)^2}$ **61.** $-35x^4\cot^6\left(x^5\right)\csc^2\left(x^5\right)$

63. $-180x^3\cot^4\left(x^4 + 1\right)\csc^2\left(x^4 + 1\right)\left(1 + \cot^5\left(x^4 + 1\right)\right)^8$

65. $-36x^2(1 - \csc^2(1 - x^3))^5\csc^2(1 - x^3)\cot(1 - x^3)$

67. $\dfrac{1 - x^2}{2x^2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-3/2}$ **69.** $\dfrac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{1 + \sqrt{x}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}$

71. $-\dfrac{k}{3}(kx + b)^{-4/3}$ **73.** $2\cos\left(x^2\right) - 4x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)$

75. $-336(9 - x)^5$

77. $\left.\dfrac{dv}{dP}\right|_{P=1,5} = \dfrac{290\sqrt{3}}{3}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{atmósferas}}$

79. **(a)** Cuando $r = 3$, $\dfrac{dV}{dt} = 1{,}6\pi(3)^2 \approx 45{,}24$ cm/s.

(b) Cuando $t = 3$, se tiene $r = 1{,}2$. Por tanto,

$\dfrac{dV}{dt} = 1{,}6\pi(1{,}2)^2 \approx 7{,}24$ cm/s.

81. $W'(10) \approx 0{,}3600$ kg/año **83.** **(a)** $\dfrac{\pi}{360}$ **(b)** $1 + \dfrac{\pi}{90}$

85. $5\sqrt{3}$ **87.** 12 **89.** $\dfrac{1}{16}$

91. $\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{t=3} = -0{,}727\ \dfrac{\text{dólares}}{\text{año}}$

93. $\dfrac{dP}{dh} = -4{,}03366 \times 10^{-16}(288{,}14 - 0{,}000649\,h)^{4{,}256}$; para cada metro adicional de altura, $\Delta P \approx -1{,}15 \times 10^{-2}$ Pa

95. 0,0973 kelvins/año

97. $f'(g(x))g''(x) + f''(g(x))(g'(x))^2$

99. Sea $u = h(x)$, $v = g(u)$ y $w = f(v)$. Entonces:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(h(x))g'(h(x))h'(x)$$

103. Para $n = 1$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

como se quería probar. Ahora, suponga que para algún entero positivo k, se cumple:

$$\frac{d^k}{dx^k}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

Entonces

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\operatorname{sen} x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) =$$
$$= \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{(k + 1)\pi}{2}\right)$$

Sección 3.8 Ejercicios preliminares

1. La regla de la cadena

2. **(a)** Es correcto **(b)** Es correcto

(c) Es incorrecto. Como la derivación es respecto a la variable x, se necesita la regla de la cadena para obtener:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(y^2) = 2y\cos(y^2)\frac{dy}{dx}$$

3. Hay dos errores en la respuesta de Jason. En primer lugar, Jason debería haber aplicado la regla de producto y obtener:

$$\frac{d}{dx}(2xy) = 2x\frac{dy}{dx} + 2y$$

En segundo lugar, debería haber aplicado la regla del producto generalizada al tercer término para obtener:

$$\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

4. **(b)**

Sección 3.8 Problemas

1. $(2, 1)$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2y^3\right) = 3x^2y^2y' + 2xy^3$

5. $\dfrac{d}{dx}\left(\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right) = 3\left(x + yy'\right)\sqrt{x^2+y^2}$

7. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{y}{y+1} = \dfrac{y'}{(y+1)^2}$ **9.** $y' = -\dfrac{2x}{9y^2}$

11. $y' = \dfrac{1-2xy-6x^2y}{x^2+2x^3-1}$ **13.** $R' = -\dfrac{3R}{5x}$

15. $y' = \dfrac{y(y^2-x^2)}{x(y^2-x^2-2xy^2)}$ **17.** $y' = \dfrac{9}{4}x^{1/2}y^{5/3}$

19. $y' = \dfrac{(2x+1)y^2}{y^2-1}$ **21.** $y' = \dfrac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\operatorname{sen} y}$

23. $y' = -\dfrac{\tan^2(x+y)-\tan^2(x)}{\tan^2(x+y)-\tan^2(y)}$

25. $y' = \dfrac{y+3\operatorname{sen}(3x-y)-1}{\operatorname{sen}(3x-y)-x}$ **29.** $y' = \dfrac{1}{4}$ **31.** $y = -\dfrac{1}{2}x+2$

33. $y = -2x+2$ **35.** $y = -\dfrac{12}{5}x + \dfrac{32}{5}$ **37.** $y = 2x + \pi$

39. La recta tangente es horizontal en los puntos $(-1, \sqrt{3})$ y $(-1, -\sqrt{3})$.

41. La recta tangente es horizontal en:

$$\left(\frac{2\sqrt{78}}{13}, -\frac{4\sqrt{78}}{13}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{2\sqrt{78}}{13}, \frac{4\sqrt{78}}{13}\right)$$

43. • Para $y = 2^{1/4}$, se tiene:

$$y' = \frac{-2^{1/4}-1}{4\left(2^{3/4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{8} \approx -0{,}3254$$

Para $y = -2^{1/4}$, se tiene:

$$y' = \frac{2^{1/4}-1}{-4\left(2^{3/4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{8} \approx -0{,}02813$$

• En el punto $(1, 1)$, la recta tangente es $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{4}{5}$.

45. $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ **47.** $x = \dfrac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{2}$

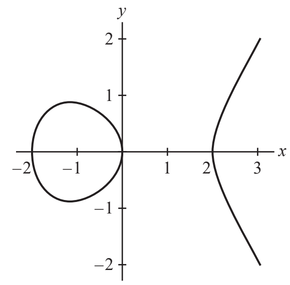
49. • En $(1, 2)$, $y' = \dfrac{1}{3}$ • En $(1, -2)$, $y' = -\dfrac{1}{3}$

• En $(1, \frac{1}{2})$, $y' = \dfrac{11}{12}$ • En $(1, -\frac{1}{2})$, $y' = -\dfrac{11}{12}$

51. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y(2y^2-1)}{x}$; la recta tangente es vertical en:

$$(1,0), (-1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

53. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y}{3x^2-4}$; se tiene que $\frac{dx}{dy} = 0$ para $y = 0$, por lo que la recta tangente a esta curva es vertical en los puntos en que la curva interseca el eje x.



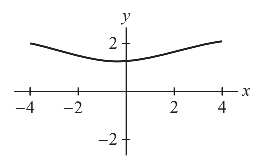
55. **(b)**: $y'' = \dfrac{y^3-2x^2}{y^5}$ **57.** $y'' = \dfrac{10}{27}$

59. $x\dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{dx}{dt} = 0$, y $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{dx}{dt}$

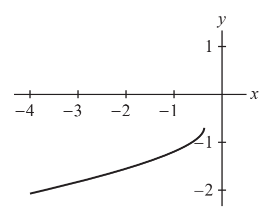
61. **(a)** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^2}{y^2}\dfrac{dx}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x+y}{2y^3+x}\dfrac{dx}{dt}$

63. Sea $C1$ la curva descrita por $x^2 - y^2 = c$ y sea $C2$ la curva descrita por $xy = d$. Suponga que $P = (x_0, y_0)$ se encuentra en la intersección de las dos curvas $x^2 - y^2 = c$ y $xy = d$. Como $x^2 - y^2 = c$, $y' = \frac{x}{y}$. La pendiente de la recta tangente a $C1$ es $\frac{x_0}{y_0}$. Sobre la curva $C2$, como $xy = d$, $y' = -\frac{y}{x}$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente a $C2$ es $-\frac{y_0}{x_0}$. Las dos pendientes son los recíprocos negativos una de la otra, por lo que las rectas tangentes a las dos curvas son perpendiculares.

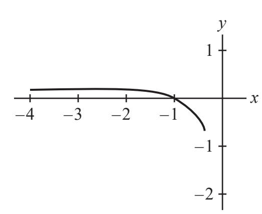
65. • Rama superior:



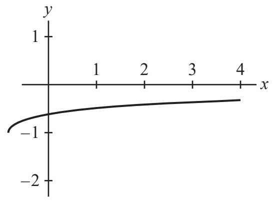
• Parte inferior de la curva inferior izquierda:



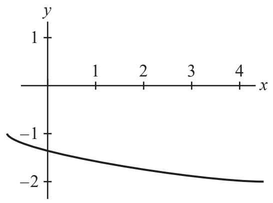
• La parte superior de la curva inferior izquierda:



- La parte superior de la curva inferior derecha:



- La parte inferior de la curva inferior derecha:



Sección 3.9 Ejercicios preliminares

1. Sean s y V la longitud del lado y el correspondiente volumen de un cubo, respectivamente. Determine $\frac{dV}{dt}$ si $\frac{ds}{dt} = 0{,}5$ cm/s.

2. $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$

3. Determine $\frac{dh}{dt}$ si $\frac{dV}{dt} = 2$ cm^3/min.

4. Determine $\frac{dV}{dt}$ si $\frac{dh}{dt} = 1$ cm/min.

Sección 3.9 Problemas

1. 0,039 ft/min

3. **(a)** $100\pi \approx 314{,}16$ m^2/min **(b)** $24\pi \approx 75{,}40$ m^2/min

5. $27\,000\pi$ cm^3/min **7.** 9600π cm^2/min

9. $-0{,}632$ m/s **11.** $x = 4{,}737$ m; $\frac{dx}{dt} \approx 0{,}405$ m/s

13. $\dfrac{9}{8\pi} \approx 0{,}36$ m/min **15.** $\dfrac{1000\pi}{3} \approx 1047{,}20$ cm^3/s

17. 0,675 metros por segundo

19. **(a)** 799,91 km/h **(b)** 0 km/h

21. 1,22 km/min **23.** $\dfrac{1200}{241} \approx 4{,}98$ rad/hr

25. **(a)** $\dfrac{100\sqrt{13}}{13} \approx 27{,}735$ km/h **(b)** 112,962 km/h

27. $\sqrt{16{,}2} \approx 4{,}025$ m **29.** $\dfrac{5}{3}$ m/s **31.** $-1{,}92$ kPa/min

33. $-\dfrac{1}{8}$ rad/s

35. **(b)**: cuando $x = 1$, $L'(t) = 0$; cuando$x = 2$, $L'(t) = \dfrac{16}{3}$

37. $-4\sqrt{5} \approx -8{,}94$ ft/s **39.** $-0{,}79$ m/min

41. Suponga que la ecuación $y = f(x)$ describe la forma de la pista de la montaña rusa. Aplicando $\frac{d}{dt}$ a ambos lados de la ecuación, se obtiene $\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$.

43. **(a)** Según la fórmula de la distancia:

$$L = \sqrt{(x - r\cos\theta)^2 + (-r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}$$

Por tanto:

$$L^2 = (x - r\cos\theta)^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

(b) De (a) se obtiene:

$$0 = 2\,(x - r\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right) + 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

(c) $-80\pi \approx -251{,}33$ cm/min

Capítulo 3 Repaso

1. 3; la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(2, 7)$ y $(0, 1)$ sobre la gráf ca de $f(x)$.

3. $\dfrac{8}{3}$; el valor del cociente incremental debe ser mayor que el valor de la derivada.

5. $f'(1) = 1$; $y = x - 1$

7. $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$; $y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{1}{2}$

9. $-2x$ **11.** $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ **13.** $f'(1)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

15. $f'(\pi)$ donde $f(t) = \mathrm{sen}\,t\cos t$ **17.** $f(4) = -2$; $f'(4) = 3$

19. (C) es la gráf ca de $f'(x)$

21. **(a)** 8,05 cm/año **(b)** Mayor sobre la primera mitad

(c) $h'(3) \approx 7{,}8$ cm/año; $h'(8) \approx 6{,}0$ cm/año

23. $A'(t)$ mide la tasa de variación en la producción de automóviles en EE.UU.; $A'(1971) \approx 0{,}25$ millones automóviles/año; $A'(1974)$ sería negativa.

25. $15x^4 - 14x$ **27.** $-7{,}3t^{-8{,}3}$ **29.** $\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$

31. $6(4x^3-9)(x^4-9x)^5$ **33.** $27x(2+9x^2)^{1/2}$

35. $\dfrac{2-z}{2(1-z)^{3/2}}$ **37.** $2x - \dfrac{3}{2}x^{-5/2}$

39. $\dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-1/2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-1/2}\left(1 + \dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)\right)$

41. $-3t^{-4}\sec^2(t^{-3})$

43. $-6\,\mathrm{sen}^2\,x\cos^2 x + 2\cos^4 x$

45. $\dfrac{1+\sec t - t\sec t\tan t}{(1+\sec t)^2}$ **47.** $\dfrac{8\csc^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}$

49. $-\dfrac{\sec^2(\sqrt{1+\csc\theta})\csc\theta\cot\theta}{2(\sqrt{1+\csc\theta})}$

51. -27 **53.** $-\dfrac{57}{16}$ **55.** -18

57. $(1, 1)$ y $(-3^{1/3}, 3^{2/3})$ **59.** $a = \dfrac{1}{6}$

61. $1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **63.** $k = -2$ (en $x = 1$)

65. $72x - 10$ **67.** $-(2x+3)^{-3/2}$

69. $8x^2\sec^2(x^2)\tan(x^2) + 2\sec^2(x^2)$ **71.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+4x}{1-2xy}$ **75.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

77. Para la representación a la izquierda, las curvas roja, verde y azul son las gráficas de f, f' y de f'' respectivamente. Para la representación a la derecha, las curvas verde, roja y azul son las gráficas de f, f' y de f'' respectivamente.

79. $\frac{dR}{dp} = p\frac{dq}{dp} + q = q\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} + q = q(E+1)$

81. $E(150) = -3$; el número de pasajeros aumenta el 3 % cuando el precio del billete se disminuye en un 1 %.

83. $\frac{-11\pi}{360} \approx -0{,}407$ cm/min

85. $\frac{640}{(336)^2} \approx 0{,}00567$ cm/s **87.** 0,284 m/s

Capítulo 4

Sección 4.1 Ejercicios preliminares

1. Verdadero **2.** $g(1{,}2) - g(1) \approx 0{,}8$ **3.** $f(2{,}1) \approx 1{,}3$

4. Según la aproximación lineal, salvo un pequeño error, la variación en Δf es directamente proporcional a la variación en Δx cuando Δx es pequeño.

Sección 4.1 Problemas

1. $\Delta f \approx 0{,}12$ **3.** $\Delta f \approx -0{,}00222$ **5.** $\Delta f \approx 0{,}003333$

7. $\Delta f \approx 0{,}0074074$

9. $\Delta f \approx 0{,}049390$; el error es 0,000610; el porcentaje de error es 1,24 %

11. $\Delta f \approx -0{,}0245283$; el error es 0,0054717; el porcentaje de error es 22,31 %

13. $\Delta y \approx -0{,}007$ **15.** $\Delta y \approx -0{,}026667$

17. $\Delta f \approx 0{,}1$; el error es 0,000980486

19. $\Delta f \approx -0{,}0005$; el error es $3{,}71902 \times 10^{-6}$

21. $\Delta f \approx 0{,}083333$; el error es $3{,}25 \times 10^{-3}$

23. $\Delta f \approx 0{,}023$; el error es $2{,}03 \times 10^{-6}$ **25.** $f(4{,}03) \approx 2{,}01$

27. $\sqrt{2{,}1} - \sqrt{2}$ es mayor que $\sqrt{9{,}1} - \sqrt{9}$

29. $R(9) = 25110$ euros; si p se aumenta en 0,5 euros, entonces $\Delta R \approx 585$ euros; por potra parte, si p se baja en 0,5 euros, entonces $\Delta R \approx -585$ euros.

31. $\Delta L \approx -0{,}00171$ cm

33. $P \approx 5{,}5 + 0{,}5 \cdot (-{,}87) = 5{,}065$ kilopascals

35. **(a)** $\Delta W \approx W'(R)\Delta x = -\frac{2wR^2}{R^3}h = -\frac{2wh}{R} \approx -0{,}0005wh$

(b) $\Delta W \approx -0{,}7$ libras

37. **(a)** $\Delta h \approx 0{,}71$ cm **(b)** $\Delta h \approx 1{,}02$ cm.

(c) Hay un mayor efecto a velocidades mayores.

39. **(a)** Si $\theta = 34°$ (es decir, $t = \frac{17}{90}\pi$), entonces:

$$\Delta s \approx s'(t)\Delta t = \frac{625}{16}\cos\left(\frac{17}{45}\pi\right)\Delta t = \frac{625}{16}\cos\left(\frac{17}{45}\pi\right)\Delta\theta \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}255\Delta\theta$$

(b) Si $\Delta\theta = 2°$, se tiene que $\Delta s \approx 0{,}51$ ft y, en tal caso, el tiro no hubiera dado en el blanco pues se habría desviado en medio pie.

41. $\Delta V \approx 4\pi(25)^2(0{,}5) \approx 3927$ cm^3; $\Delta S \approx 8\pi(25)(0{,}5) \approx 314{,}2$ cm^2

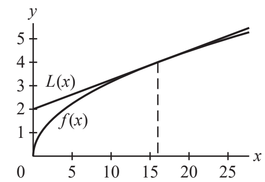
43. $P = 6$ atmósferas; $\Delta P \approx \pm 0{,}45$ atmósferas

45. $L(x) = 4x - 3$ **47.** $L(\theta) = \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

49. $L(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ **51.** $L(x) = 1$ **53.** $L(x) = -\frac{4}{\pi^2}x + \frac{4}{\pi}$

55. $f(2) = 8$

57. $\sqrt{16{,}2} \approx L(16{,}2) = 4{,}025$. Las gráficas de $f(x)$ y $L(x)$ se muestran a continuación. Como la gráfica de $L(x)$ se encuentra por debajo de la de $f(x)$, se espera que la estimación obtenida a partir de la aproximación lineal sea demasiado elevada.



59. $\frac{1}{\sqrt{17}} \approx L(17) \approx 0{,}24219$; el porcentaje de error es del 0,14 %

61. $\frac{1}{(10{,}03)^2} \approx L(10{,}03) = 0{,}00994$; el porcentaje de error es del 0,0027 %

63. $(64{,}1)^{1/3} \approx L(64{,}1) \approx 4{,}002083$; el porcentaje de error es del 0,000019 %

65. $\tan(0{,}04) \approx L(0{,}04) = 0{,}04$; el porcentaje de error es del 0,053 %

67. $\frac{3{,}1/2}{\operatorname{sen}(3{,}1/2)} \approx L(3{,}1/2) = 1{,}55$; el porcentaje de error es del 0,0216 %

69. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $f(9) = 3$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $f'(9) = \frac{1}{6}$. Por tanto, según la aproximación lineal:

$$f(9+h) - f(9) = \sqrt{9+h} - 3 \approx \frac{1}{6}h$$

Además, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, por lo que $|f''(x)| = \frac{1}{4}x^{-3/2}$. Como se trata de una función decreciente, se obtiene que para $x \geq 9$:

$$K = \text{máx}\,|f''(x)| \leq |f''(9)| = \frac{1}{108} < 0{,}01$$

Según la siguiente tabla, se tiene que para $h = 10^{-n}$, $1 \leq n \leq 4$, $E \leq \frac{1}{2}Kh^2$.

h	$E = \vert\sqrt{9+h} - 3 - \frac{1}{6}h\vert$	$\frac{1}{2}Kh^2$
10^{-1}	$4{,}604 \times 10^{-5}$	$5{,}00 \times 10^{-5}$
10^{-2}	$4{,}627 \times 10^{-7}$	$5{,}00 \times 10^{-7}$
10^{-3}	$4{,}629 \times 10^{-9}$	$5{,}00 \times 10^{-9}$
10^{-4}	$4{,}627 \times 10^{-11}$	$5{,}00 \times 10^{-11}$

71. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)} = -\frac{1}{3}$; $y \approx L(2{,}1) = 0{,}967$

73. $L(x) = -\frac{14}{25}x + \frac{36}{25}$; $y \approx L(-1{,}1) = 2{,}056$

75. Sea $f(x) = x^2$. Entonces:

$$\Delta f = f(5+h) - f(5) = (5+h)^2 - 5^2 = h^2 + 10h$$

y

$$E = |\Delta f - f'(5)h| = |h^2 + 10h - 10h| = h^2 = \frac{1}{2}(2)h^2 = \frac{1}{2}Kh^2$$

Sección 4.2 Ejercicios preliminares

1. Un punto crítico es un valor de la variable independiente x del dominio de una función f en que o bien $f'(x) = 0$ o bien $f'(x)$ no exista.

2. **(b)** **3.** **(b)**

4. El teorema de Fermat af rma que: si $f(c)$ es es un valor extremo local, entonces o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Sección 4.2 Problemas

1. **(a)** 3 **(b)** 6 **(c)** Máximo local de 5 en $x = 5$

(d) Hay diferentes respuestas. Un ejemplo es el intervalo $[4, 8]$. Otro es $[2, 6]$.

(e) Hay diferentes respuestas. Un ejemplo es $[0, 2]$.

3. $x = 1$ **5.** $x = -3$ y $x = 6$ **7.** $x = 0$ **9.** $x = \pm 1$

11. $t = 3$ y $t = -1$ **13.** $x = 0, x = \pm\sqrt{2/3}, x = \pm 1$ **15.** $\theta = \dfrac{n\pi}{2}$

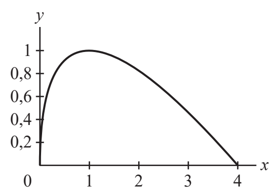
17. **(a)** $c = 2$ **(b)** $f(0) = f(4) = 1$

(c) Valor máximo: 1; valor mínimo: -3.

(d) Valor máximo: 1; valor mínimo: -2.

19. $x = \dfrac{\pi}{4}$; Valor máximo: $\sqrt{2}$; valor mínimo: 1

21. Valor máximo: 1



23. Máximo local en $(x, y) \approx (0{,}860334, 0{,}561096)$; mínimo local en $(x, y) \approx (3{,}425618, -3{,}288371)$.

25. Mínimo: $f(-1) = 3$, máximo: $f(2) = 21$

27. Mínimo: $f(0) = 0$, máximo: $f(3) = 9$

29. Mínimo: $f(4) = -24$, máximo: $f(6) = 8$

31. Mínimo: $f(1) = 5$, máximo: $f(2) = 28$

33. Mínimo: $f(2) = -128$, máximo: $f(-2) = 128$

35. Mínimo: $f(6) = 18{,}5$, máximo: $f(5) = 26$

37. Mínimo: $f(1) = -1$, máximo: $f(0) = f(3) = 0$

39. Mínimo: $f(0) = 2\sqrt{6} \approx 4{,}9$, máximo: $f(2) = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$

41. Mínimo: $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -0{,}589980$,

máximo: $f(4) \approx 0{,}472136$

43. Mínimo: $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, máximo: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

45. Mínimo: $f(0) = -1$, máximo:

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - 1\right) \approx -0{,}303493$

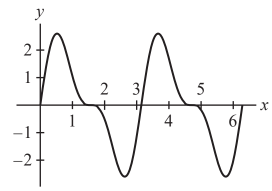
47. Mínimo: $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}685$,

máximo: $g\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) = \dfrac{5}{3}\pi + \sqrt{3} \approx 6{,}968$

49. Mínimo: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 - \dfrac{\pi}{2} \approx -0{,}570796$, máximo: $f(0) = 0$

51. **(d)** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{11\pi}{6}$; el valor máximo es $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{7\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ y el valor mínimo es $f(\frac{5\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(e) Se observa que hay seis puntos en que la gráf ca es plana, comprendidos entre 0 y 2π, tal y como se anunció. Hay 4 extremos locales y 2 puntos en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ donde la gráf ca no presenta ni un máximo ni un mínimo local.



53. Punto crítico: $x = 2$; valor mínimo: $f(2) = 0$, máximo: $f(0) = f(4) = 2$

55. Punto crítico: $x = 2$; valor mínimo: $f(2) = 0$, máximo: $f(4) = 20$

57. $c = 1$ **59.** $c = \dfrac{15}{4}$

61. $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$ por lo que, según el teorema del valor intermedio, existe al menos una raíz; no puede existir otra raíz porque $f'(x) \geq 4$ para todo x.

63. No puede existir una raíz $c > 0$ porque $f'(x) > 4$ para todo $x > 0$.

67. **(a)** $F = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{v_2^2}{v_1^2}\right)\left(1 + \dfrac{v_2}{v_1}\right)$

(b) $F(r)$ alcanza su valor máximo cuando $r = 1/3$.

(c) Si v_2 fuera 0, entonces no pasaría nada de aire por la turbina, lo que no resulta realista.

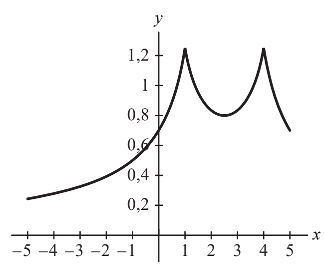
71. • El valor máximo de f sobre $[0, 1]$ es:

$$f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{1/(b-a)}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a/(b-a)} - \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(b-a)}$$

• $\dfrac{1}{4}$

73. Puntos críticos: $x = 1$, $x = 4$ y $x = \frac{5}{2}$;

valor máximo: $f(1) = f(4) = \frac{5}{4}$, valor mínimo: $f(-5) = \frac{17}{70}$



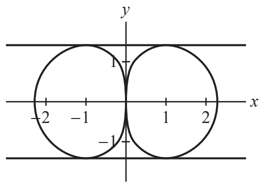
75. **(a)** Hay cuatro puntos en que la derivada es cero:

$$(-1, -\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (1, \sqrt{2})$$

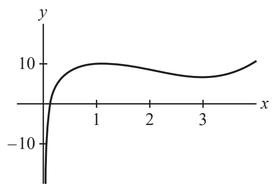
Hay también puntos críticos en que la derivada no existe:

$$(0, 0), (\pm\sqrt[4]{27}, 0)$$

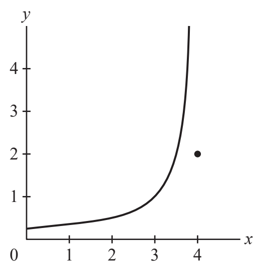
(b) A continuación se representa la curva $27x^2 = (x^2+y^2)^3$ y sus rectas tangentes horizontales.



77.



79.



81. Si $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x$, entonces $f'(x) = a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x$, de manera que $f'(x) = 0$ implica que $a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x = 0$. En consecuencia $\tan x = \frac{a}{b}$. Entonces:

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Por tanto:

$$f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x = a\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$
$$= \pm\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\sqrt{a^2+b^2}$$

83. Sea $f(x) = x^2 + rx + s$ y suponga que $f(x)$ alcanza tanto valores positivos como negativos. Esto garantiza que f tiene dos raíces reales. Según la fórmula para la solución de las ecuaciones de segundo grado, las raíces de f son:

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2-4s}}{2}$$

Observe que el punto medio entre estas raíces es:

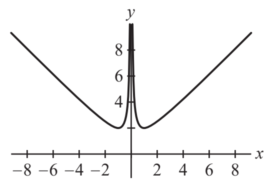
$$\frac{1}{2}\left(\frac{-r+\sqrt{r^2-4s}}{2} + \frac{-r-\sqrt{r^2-4s}}{2}\right) = -\frac{r}{2}$$

Ahora, $f'(x) = 2x + r = 0$ cuando $x = -\frac{r}{2}$ y, como la gráfica de $f(x)$ es una parábola con las ramas hacia arriba, se tiene que $f(-\frac{r}{2})$ es un mínimo.

85. $b > \frac{1}{4}a^2$

87. • Sea $f(x)$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ son mínimos locales en el intervalo $[a, b]$. Según el teorema 1, $f(x)$ debe alcanzar tanto un mínimo como un máximo sobre $[a, b]$. Como el mínimo local se tiene en $f(a)$ y en $f(b)$, el máximo debe ocurrir en algún otro punto del intervalo, llámelo c, para el que $f(c)$ sea un máximo local.

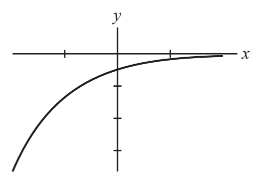
• La función que aquí se representa es discontinua en $x = 0$.



Sección 4.3 Ejercicios preliminares

1. $m = 3$ **2.** **(c)**

3. Sí. La siguiente figura muestra una función que sólo alcanza valores negativos pero que tiene derivada positiva.



4. **(a)** $f(c)$ debe ser un máximo local. **(b)** No.

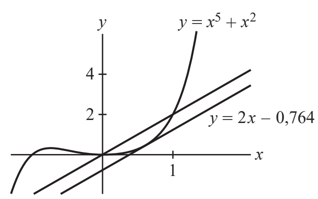
Sección 4.3 Problemas

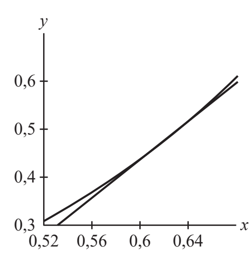
1. $c = 4$ **3.** $c = \frac{7\pi}{4}$ **5.** $c = \pm\sqrt{7}$ **7.** $c = 0$

9. La pendiente de la recta secante entre $x = 0$ y $x = 1$ es:

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2-0}{1} = 2$$

Se tiene que la coordenada x del punto de tangencia es aproximadamente 0,62.

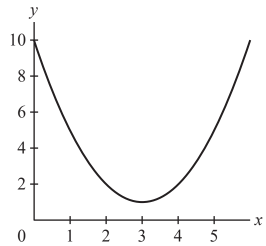




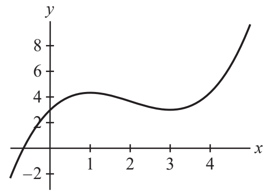
11. La derivada es positiva sobre los intervalos $(0, 1)$ y $(3, 5)$ y negativa sobre los intervalos $(1, 3)$ y $(5, 6)$.

13. $f(2)$ es un máximo local; $f(4)$ es un mínimo local

15.



17.



19. Punto crítico: $x = 3$ - máximo local

21. Punto crítico: $x = -2$ - máximo local; punto crítico: $x = 0$ - mínimo local

23. $c = \frac{7}{2}$

x	$\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$	$7/2$	$\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$
f'	+	0	−
f	↗	M	↘

25. $c = 0, 8$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 8)$	8	$(8, +\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	M	↘	m	↗

27. $c = -2, -1, 1$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	−	0	+	0	−	0	+
f	↘	m	↗	M	↘	m	↗

29. $c = -2, -1$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	M	↘	m	↗

31. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	+	0	+
f	↗	≠	↗

33. $c = (\frac{3}{2})^{2/5}$

x	$\left(0, (\frac{3}{2})^{2/5}\right)$	$\frac{3}{2}^{2/5}$	$\left((\frac{3}{2})^{2/5}, +\infty\right)$
f'	−	0	+
f	↘	m	↗

35. $c = 1$

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	−	0	+
f	↘	m	↗

37. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	+	0	−
f	↗	M	↘

39. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	+	0	+
f	↗	¬	↗

41. $c = \frac{\pi}{2}$ y $c = \pi$

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	π	$(\pi, 2\pi)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	M	↘	m	↗

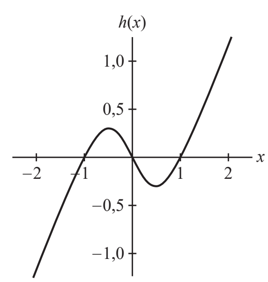
43. $c = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{11\pi}{6}$

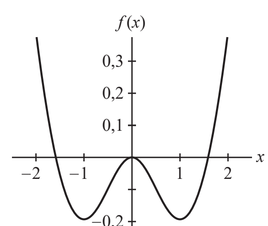
x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	M	↘	m	↗

x	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$	$\frac{11\pi}{6}$	$\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$
f'	0	−	0	+
f	M	↘	m	↗

45. $\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0{,}692201$ **55.** $f'(x) > 0$ para todo x

49. La gráf ca de $h(x)$ se muestra a continuación, a la izquierda. Como $h(x)$ es negativa para $x < -1$ y para $0 < x < 1$, se tiene que $f(x)$ es decreciente para $x < -1$ y para $0 < x < 1$. Análogamente, $f(x)$ es creciente para $-1 < x < 0$ y para $x > 1$ pues $h(x)$ es positiva sobre esos intervalos. Además, $f(x)$ presenta un mínimo local en $x = -1$ y $x = 1$ y un máximo local en $x = 0$. Una gráf ca plausible para $f(x)$ se muestra a continuación, a la derecha.





51. $f'(x) < 0$ siempre que $x < 500$; por tanto, $800^2 + 200^2 = f(200) > f(400) = 600^2 + 400^2$.

53. *Cada* punto $c \in (a, b)$

61. **(a)** Sea $g(x) = \cos x$ y $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Entonces $f(0) = g(0) = 1$ y $g'(x) = -\operatorname{sen} x \geq -x = f'(x)$ para $x \geq 0$ según el problema 67. Ahora, aplique el problema 67 para deducir que $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ para $x \geq 0$.

(b) Sea $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. Entonces $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(x) = \cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 = f'(x)$ para $x \geq 0$ según el apartado (a). Ahora, aplique el problema 67 para deducir que $\operatorname{sen} x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ para $x \geq 0$.

(c) Sea $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ y $f(x) = \cos x$. Entonces $f(0) = g(0) = 1$ y $g'(x) = -x + \frac{1}{6}x^3 \geq -\operatorname{sen} x = f'(x)$ para $x \geq 0$ y según el apartado (b). Ahora, aplique el problema 67 para deducir que $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ para $x \geq 0$.

(d) La siguiente desigualdad en la serie es $\operatorname{sen} x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, válida para $x \geq 0$.

63. Sea $f''(x) = 0$ para x. Entonces $f'(x) =$ constante para todo x. Como $f'(0) = m$, se deduce que $f'(x) = m$ para todo x. Ahora sea $g(x) = f(x) - mx$. Entonces $g'(x) = f'(x) - m = m - m = 0$ lo que implica que $g(x) =$ constante para todo x y, en consecuencia, $f(x) - mx =$ constante para todo x. Reordenando, se obtiene que $f(x) = mx +$ constante. Como $f(0) = b$, se deduce que $f(x) = mx + b$ para todo x.

65. (a) Sea $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = \\ &= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)(-f(x)) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $g'(0) = 0$ para todo x, $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$ debe ser una función constante. Para determinar el valor de C, se puede sustituir cualquier número por x. En particular, para este problema, se sustituirá por $x = 0$ obteniendo que $C = f(0)^2 + f'(0)^2$. Por tanto:

$$f(x)^2 + f'(x)^2 = f(0)^2 + f'(0)^2$$

(b) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = \cos x$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f''(x) = -f(x)$. Ahora, sea $f(x) = \cos x$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$ y se obtiene de nuevo que $f''(x) = -f(x)$. Por último, si se considera $f(x) = \operatorname{sen} x$, el resultado del apartado (a) garantiza que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 = 0 + 1 = 1$$

Sección 4.4 Ejercicios preliminares

1. (a) Creciente **2.** $f(c)$ es un máximo local

3. Falso **4.** Falso

Sección 4.4 Problemas

1. (a) En C, se tiene que $f''(x) < 0$ para todo x.

(b) En A, $f''(x)$ va de + a −.

(c) En B, se tiene que $f''(x) > 0$ para todo x.

(d) En D, $f''(x)$ va de − a +.

3. Siempre convexa; no tiene puntos de inflexión

5. Convexa para $x < -\sqrt{3}$ y para $0 < x < \sqrt{3}$; cóncava para $-\sqrt{3} < x < 0$ y para $x > \sqrt{3}$; punto de inflexión en $x = 0$ y en $x = \pm\sqrt{3}$

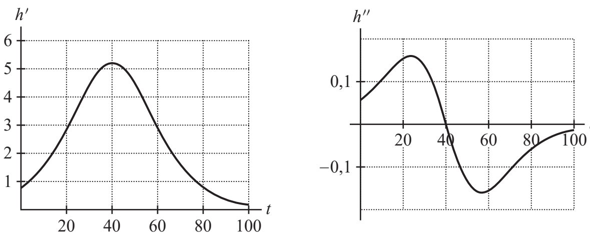
7. Convexa para $0 < \theta < \pi$; cóncava para $\pi < \theta < 2\pi$; punto de inflexión en $\theta = \pi$

9. Cóncava para $0 < x < 9$; convexa para $x > 9$; punto de inflexión en $x = 9$.

11. Convexa sobre $(0, 1)$; cóncava sobre $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; punto de inflexión tanto en $x = 0$ como en $x = 1$.

13. Convexa para $|x| > 1$; cóncava para $|x| < 1$; punto de inflexión tanto en $x = -1$ como en $x = 1$.

15. El punto de inflexión de la figura 15 ocurre en $t = 40$ días. La tasa de crecimiento en el punto de inflexión es de, aproximadamente, 5,5 cm/día. Como la curva logística pasa de ser convexa a cóncava en $t = 40$, la tasa de crecimiento en este punto es la máxima para la planta de girasol. Las gráficas de la primera y segunda derivada de $h(t)$ se muestran a continuación, a la izquierda y a la derecha respectivamente.



17. $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = b$ y otro en $x = e$; $f(x)$ es cóncava para $b < x < e$.

19. (a) f es creciente sobre $(0, 0{,}4)$.

(b) f es decreciente sobre $(0{,}4, 1) \cup (1, 1{,}2)$.

(c) f es convexa sobre $(0, 0{,}17) \cup (0{,}64, 1)$.

(d) f es cóncava sobre $(0{,}17, 0{,}64) \cup (1, 1{,}2)$.

21. Puntos críticos son $x = 3$ y $x = 5$; $f(3) = 54$ es un máximo local, y $f(5) = 50$ es un mínimo local.

23. Puntos críticos son $x = 0$ y $x = 1$; $f(0) = 0$ es un mínimo local, el criterio de la segunda derivada no decide en $x = 1$.

25. Puntos críticos son $x = -4$ y $x = 2$; $f(-4) = -16$ es un máximo local y $f(2) = -4$ es un mínimo local.

27. Puntos críticos son $x = 0$ y $x = \frac{2}{9}$; $f\left(\frac{2}{9}\right)$ es un mínimo local; $f''(x)$ está indefinida en $x = 0$, por lo que el criterio de la segunda derivada no se puede aplicar aquí.

29. Punto críticos en $(0, +\infty)$ es $x = 2$; $f(2) = 32$ es un mínimo local ($f''(2) = 24$).

31. Puntos críticos son $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \pi$; $f(0)$ es un mínimo local, $f(\frac{\pi}{3})$ es un máximo local y $f(\pi)$ es un mínimo local.

33. Punto crítico es $x = 0$; mínimo local ($f''(0) = 2$).

35.

x	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	M	↘	m	↗

x	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
f''	−	0	+
f	⌢	I	⌣

37.

t	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
f'	−	0	+	0	−
f	↘	m	↗	M	↘

t	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
f''	+	0	−
f	⌣	I	⌢

39. $f''(x) > 0$ para todo $x \geq 0$, lo que signif ca que no existen puntos de inf exión.

x	0	$\left(0, (2)^{2/3}\right)$	$(2)^{2/3}$	$\left((2)^{2/3}, +\infty\right)$
f'	U	−	0	+
f	M	↘	m	↗

41.

x	$\left(-\infty, -3\sqrt{3}\right)$	$-3\sqrt{3}$	$\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$	$3\sqrt{3}$	$\left(3\sqrt{3}, +\infty\right)$
f'	−	0	+	0	−
f	↘	m	↗	M	↘

x	$(-\infty, -9)$	-9	$(-9, 0)$	0	$(0, 9)$	9	$(9, +\infty)$
f''	−	0	+	0	−	0	+
f	⌢	I	⌣	I	⌢	I	⌣

43.

θ	$(0, \pi)$	π	$(\pi, 2\pi)$
f'	+	0	+
f	↗	¬	↗

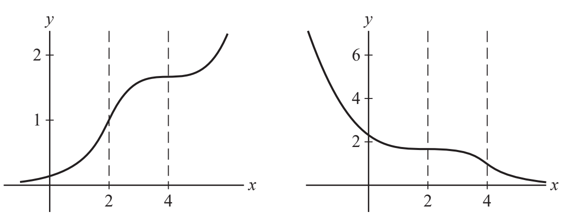
θ	0	$(0, \pi)$	π	$(\pi, 2\pi)$	2π
f''	0	−	0	+	0
f	¬	⌢	I	⌣	¬

45.

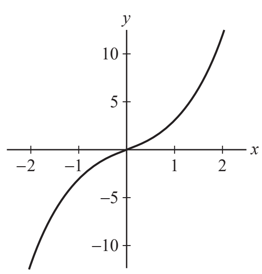
x	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
f'	+
f	↗

x	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
f''	−	0	+
f	⌢	I	⌣

47.



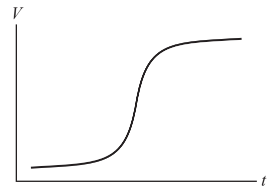
49.



51. (a) Al principio de la epidemia, la gráf ca de R es convexa. Hacia el f nal de la epidemia, R es cóncava.

(b) “Remisión de la epidemia: el número de nuevos casos está disminuyendo”.

53. El punto de inf exión se debe dar cuando el nivel del agua es igual al radio de la esfera. Una posible gráf ca de $V(t)$ se muestra a continuación.



55. (a) De la def nición de la derivada, se tiene:

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

(b) Se sabe que $f''(c) > 0$. Según el apartado (a):

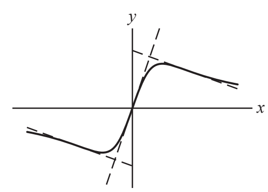
$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h} > 0$$

Dicho de otro modo, para h suf cientemente pequeña:

$$\frac{f'(c+h)}{h} > 0$$

Ahora, si h es suf cientemente pequeña pero negativa, entonces $f'(c+h)$ debe ser también negativa (de manera que el cociente $f'(c+h)/h$ sea positivo) y $c+h < c$. Por otra parte, si h es suf cientemente pequeña pero positiva, entonces $f'(c+h)$ debe ser también positiva y $c+h > c$. Por tanto, existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ y $f'(c) > 0$ para $c < x < b$. Finalmente, como $f'(x)$ pasa de negativa a positiva en $x = c$, $f(c)$ debe ser un mínimo local.

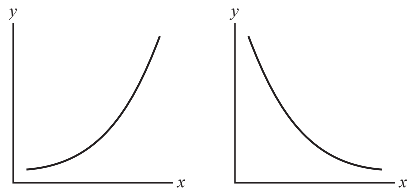
57. (b) $f(x)$ presenta un punto de inf exión en $x = 0$ y en $x = \pm 1$. La siguiente f gura muestra la gráf ca de $y = f(x)$ y sus rectas tangentes en cada uno de los puntos de inf exión. Claramente, las rectas tangentes intersecan con la gráf ca de $f(x)$ en el punto de inf exión.



59. Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n. Entonces $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$ y $f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 6a_3 x + 2a_2$. Si $n \geq 3$ y es impar, entonces $n-2$ es también impar y $f''(x)$ es un polinomio de grado impar. Por tanto $f''(x)$ debe alcanzar tanto valores positivos como negativos. Así, $f''(x)$ tiene como mínimo una raíz c tal que $f''(x)$ cambie de signo en c. La función $f(x)$ debe tener entonces un punto de inf exión en $x = c$. Por otra parte, las funciones $f(x) = x^2$, x^4 y x^8 son polinomios de grados pares que no tienen ningún punto de inf exión.

Sección 4.5 Ejercicios preliminares

1. Un arco con la combinación de signos ++ (creciente, convexa) se muestra a continuación, a la izquierda. Un arco con la combinación de signos −+ (decreciente, convexa) se muestra a continuación, a la derecha.



2. **(c)**

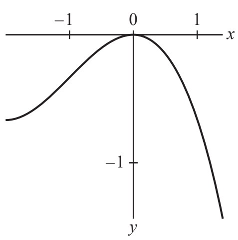
3. $x = 4$ no es del dominio de f.

Sección 4.5 Problemas

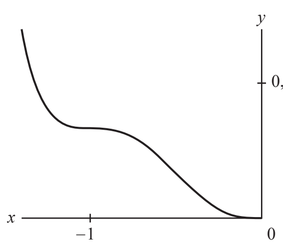
1. • En A, f es decreciente y convexa, por lo que $f' < 0$ y $f'' > 0$.

- En B, f es creciente y convexa, por lo que $f' > 0$ y $f'' > 0$.
- En C, f es creciente y cóncava, por lo que $f' > 0$ y $f'' < 0$.
- En D, f es decreciente y cóncava, por lo que $f' < 0$ y $f'' < 0$.
- En E, f es decreciente y convexa, por lo que $f' < 0$ y $f'' > 0$.
- En F, f es creciente y convexa, por lo que $f' > 0$ y $f'' > 0$.
- En G, f es creciente y cóncava, por lo que $f' > 0$ y $f'' < 0$.

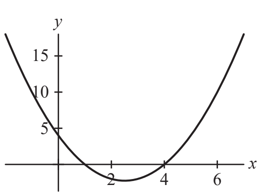
3. Esta función pasa de convexa a cóncava en $x = -1$ y de creciente a decreciente en $x = 0$.



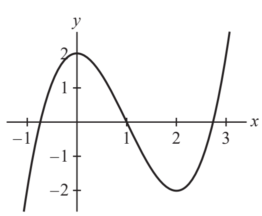
5. La función es siempre decreciente y pasa de convexa a cóncava en $x = -1$ y de cóncava a convexa en $x = -\frac{1}{2}$.



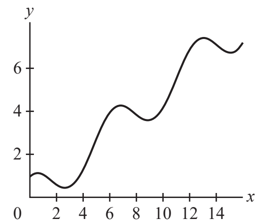
7.



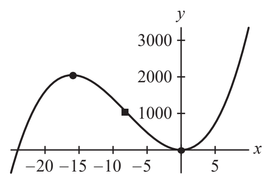
9.



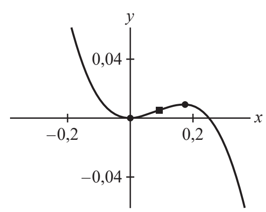
11.



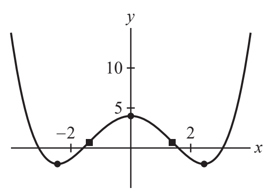
13. Máximo local en $x = -16$, mínimo local en $x = 0$ y punto de inf exión en $x = -8$.



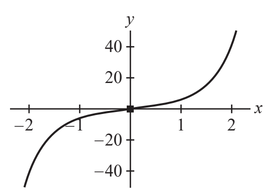
15. $f(0)$ es un mínimo local, $f(\frac{1}{6})$ es un máximo local y hay un punto de inf exión en $x = \frac{1}{12}$.



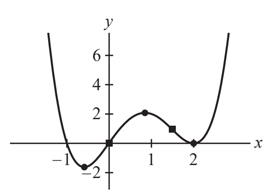
17. f presenta mínimos locales en $x = \pm\sqrt{6}$, un máximo local en $x = 0$ y puntos de inf exión en $x = \pm\sqrt{2}$.



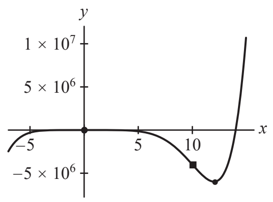
19. La gráf ca no tiene puntos críticos y es siempre creciente, punto de inf exión en $(0, 0)$.



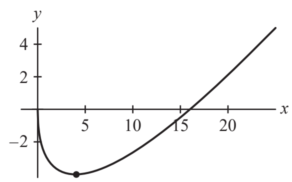
21. $f\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$ y $f(2)$ son mínimos locales y $f\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$ es un máximo local; puntos de inf exión tanto en $x = 0$ como en $x = \frac{3}{2}$.



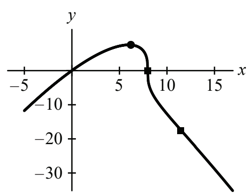
23. $f(0)$ es un máximo local, $f(12)$ es un mínimo local y hay un punto de inf exión en $x = 10$.



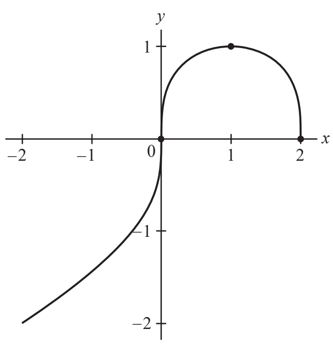
25. $f(4)$ es un mínimo local y la gráf ca es siempre convexa.



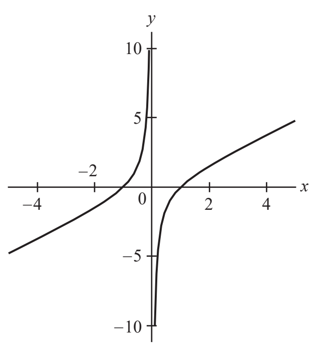
27. f tiene un máximo local en $x = 6$ y puntos de inf exión en $x = 8$ y $x = 12$.



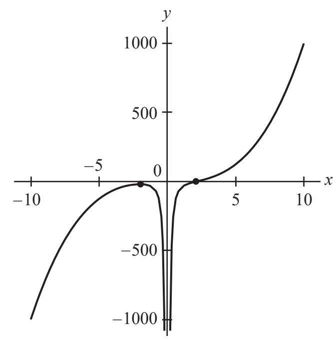
29. f tiene un máximo local en $x = 1$ y ningún punto de inf exión. Son también puntos críticos $x = 0$ y $x = 2$, donde la derivada no existe.



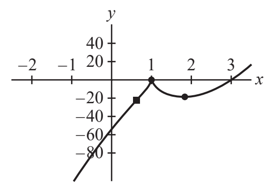
31. f no tiene ni puntos críticos ni puntos de inf exión.



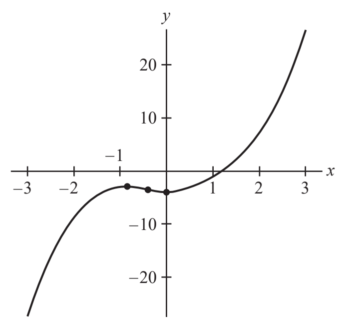
33. f tiene un máximo local en $x = -2$ y un punto de inf exión en $\sqrt[5]{48}$.



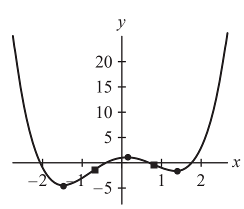
35. La gráf ca presenta un punto de inf exión en $x = \frac{3}{5}$, un máximo local en $x = 1$ (en que la gráf ca tiene un vértice) y un mínimo local en $x = \frac{9}{5}$.



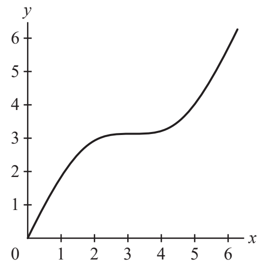
37. f tiene un máximo local en $x \approx -0{,}86776$ y un mínimo local en $x = 0$. Tiene un punto de inf exión en $x \approx -0{,}41119$.



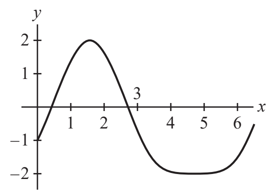
39. f tiene un mínimo local en $x = -1{,}473$ y en $x = 1{,}347$, un máximo local en $x = 0{,}126$ y puntos de inf exión en $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.



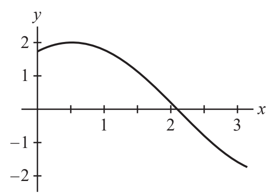
41. La gráf ca tiene un punto de inf exión en $x = \pi$ y no presenta máximos ni mínimos locales.



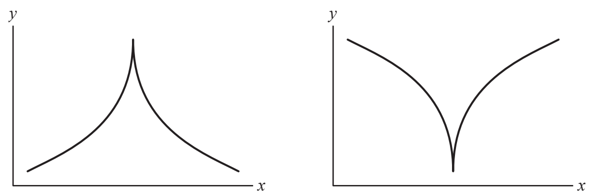
43. Máximo local en $x = \frac{\pi}{2}$,un mínimo local en $x = \frac{3\pi}{2}$ y puntos de inf exión en $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$.



45. Máximo local en $x = \frac{\pi}{6}$ y un punto de inf exión en $x = \frac{2\pi}{3}$.



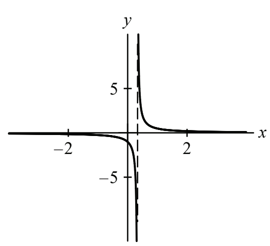
47. En ambos casos, existe un punto en que f no es derivable, en la transición de creciente a decreciente o de decreciente a creciente.



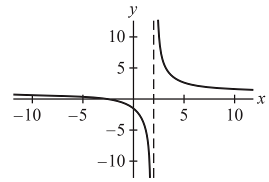
49. La gráf ca (B) no puede ser la de un polinomio.

51. (B) es la gráf ca de $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$; (A) es la gráf ca de $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

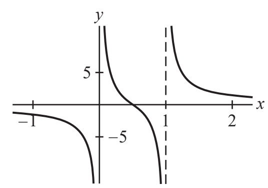
53. f es decreciente para todo $x \neq \frac{1}{3}$, convexa para $x > \frac{1}{3}$, cóncava para $x < \frac{1}{3}$, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y una asíntota vertical en $x = \frac{1}{3}$.



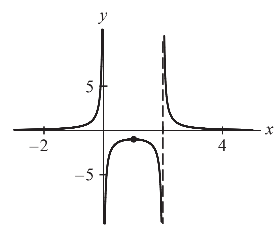
55. f es decreciente para todo $x \neq 2$, convexa para $x > 2$, cóncava para $x < 2$, tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y una asíntota vertical en $x = 2$.



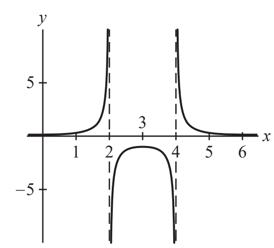
57. f es decreciente para todo $x \neq 0, 1$, convexa para $0 < x < \frac{1}{2}$ y $x > 1$, cóncava para $x < 0$ y $\frac{1}{2} < x < 1$, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y asíntotas verticales en $x = 0$ y en $x = 1$.



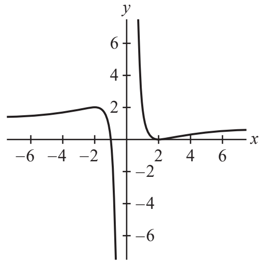
59. f es creciente para $x < 0$ y $0 < x < 1$ y decreciente para $1 < x < 2$ y $x > 2$; f es convexa para $x < 0$ y $x > 2$ y cóncava para $0 < x < 2$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y asíntotas verticales en $x = 0$ y en $x = 2$.



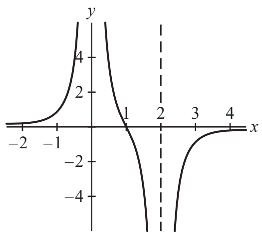
61. f es creciente para $x < 2$ y para $2 < x < 3$, es decreciente para $3 < x < 4$ y para $x > 4$ y tiene un máximo local en $x = 3$; f es convexa para $x < 2$ y para $x > 4$ y es cóncava para $2 < x < 4$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y asíntotas verticales en $x = 2$ y en $x = 4$.



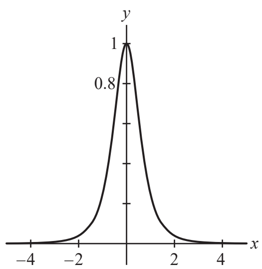
63. f es creciente para $|x| > 2$ y decreciente para $-2 < x < 0$ y para $0 < x < 2$; f es cóncava para $-2\sqrt{2} < x < 0$ y para $x > 2\sqrt{2}$ y convexa para $x < -2\sqrt{2}$ y para $0 < x < 2\sqrt{2}$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y una asíntota vertical en $x = 0$.



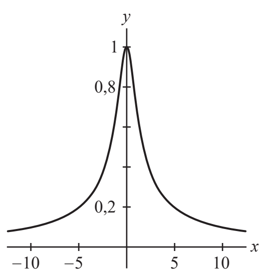
65. f es creciente para $x < 0$ y para $x > 2$ y decreciente para $0 < x < 2$; f es convexa para $x < 0$ y para $0 < x < 1$, es cóncava para $1 < x < 2$ y para $x > 2$ y tiene un punto de inf exión en $x = 1$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y asíntotas verticales en $x = 0$ y en $x = 2$.



67. f es creciente para $x < 0$, decreciente para $x > 0$ y tiene un máximo local en $x = 0$; f es convexa para $|x| > 1/\sqrt{5}$, es cóncava para $|x| < 1/\sqrt{5}$ y tiene puntos de inf exión en $x = \pm 1/\sqrt{5}$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y ninguna asíntota vertical.



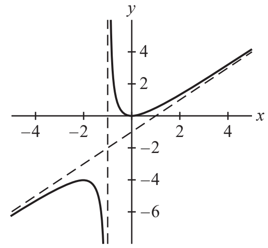
69. f es creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$; f es cóncava para $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ y convexa para $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y ninguna asíntota vertical.



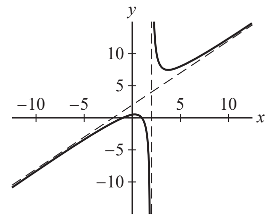
73. f es creciente para $x < -2$ y para $x > 0$, es decreciente para $-2 < x < -1$ y para $-1 < x < 0$, tiene un mínimo local en $x = 0$, tiene un máximo local en $x = -2$, es cóncava sobre $(-\infty, -1)$ y convexa sobre $(-1, +\infty)$; f tiene una asíntota vertical en $x = -1$; realizando la división de polinomios, $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ y

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x+1} - (x-1)\right) = 0,$$

lo que implica que la asíntota oblicua es $y = x - 1$.



75. $y = x+2$ es la asíntota oblicua de $f(x)$; mínimo local en $x = 2+\sqrt{3}$, un máximo local en $x = 2-\sqrt{3}$ y f es cóncava sobre $(-\infty, 2)$ y convexa sobre $(2, +\infty)$; asíntota vertical en $x = 2$.



Sección 4.6 Ejercicios preliminares

1. $b + h + \sqrt{b^2 + h^2} = 10$

2. Si la función tiende a inf nito en los extremos del intervalo, entonces la función debe alcanzar un valor mínimo en un punto crítico.

3. No

Sección 4.6 Problemas

1. **(a)** $y = \frac{3}{2} - x$

(b) $A = x(\frac{3}{2} - x) = \frac{3}{2}x - x^2$ **(c)** Intervalo cerrado $[0, \frac{3}{2}]$

(d) El área máxima 0,5625 m^2 se alcanza para $x = y = \frac{3}{4}$ m.

3. Asigne aproximadamente 5,28 m de alambre a la circunferencia.

5. El centro del alambre.

7. Las dimensiones del corral de área máxima son:

$$x = \frac{300}{1 + \pi/4}\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{150}{1 + \pi/4}\ \text{m}$$

donde x es la amplitud del corral y, por tanto, el diámetro de la semicircunferencia, e y es la altura de la sección rectangular.

9. Cuadrado de lado $4\sqrt{2}$. **11.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

13. $x = 2^{1/4} \approx 1{,}1892$; $(x, y) \approx (1{,}1892, 2{,}8710)$.

15. $\theta = \frac{\pi}{2}$ **17.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

19. 60 cm de ancho por 100 cm de alto para el póster completo (48 cm por 80 cm para la zona de impresión).

21. Radio: $\sqrt{\frac{2}{3}}R$; mitad de la altura: $\frac{R}{\sqrt{3}}$

23. $x = 10\sqrt{5} \approx 22{,}36$ m e $y = 20\sqrt{5} \approx 44{,}72$ m donde x es la longitud de la pared de ladrillo e y es la longitud de un lado adyacente.

25. 1,0718 **27.** $LH + \frac{1}{2}(L^2 + H^2)$ **29.** $y = -3x + 24$

33. $s = 3\sqrt[3]{4}$ m y $h = 2\sqrt[3]{4}$ m, donde s es la longitud de la tapa cuadrada de la caja y h es la altura de la caja.

35. (a) Cada compartimiento tiene longitud igual a 600 m y una amplitud de 400 m.

(b) 240 000 metros cuadrados.

37. $N \approx 58{,}14$ libras y $P \approx 77{,}33$ libras.

39. 990 $

41. 1,2 millones de euros en equipamiento y 600 000 euros en mano de obra.

43. Brandon nada en diagonal hacia un punto situado a 20,2 m río abajo y el resto del trayecto lo realiza corriendo.

45. $h = 3$; las dimensiones son $9 \times 18 \times 3$.

47. $A = B = 30$ cm **49.** $x = \sqrt{bh + h^2}$

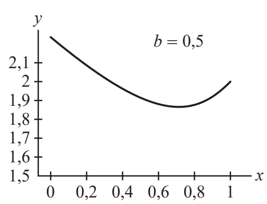
51. Hay N envíos por año, por lo que el intervalo de tiempo entre envíos es de $T = 1/N$ años. Así, el coste total de almacenaje por año es de sQ/N. Los costes de entrega anuales son dN y los costes totales son $C(N) = dN + sQ/N$. Resolviendo:

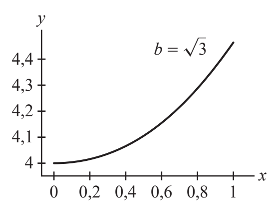
$$C'(N) = d - \frac{sQ}{N^2} = 0$$

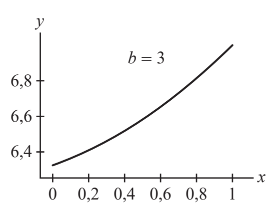
en N se obtiene $N = \sqrt{sQ/d}$. $N = 9$.

53. (a) Si $b < \sqrt{3}a$, entonces $d = a - b/\sqrt{3} > 0$ y el mínimo se tiene en este valor de d. Por otra parte, si $b \geq \sqrt{3}a$, entonces el mínimo se tiene en el extremo $d = 0$.

(b) Gráf cas de $S(d)$ para $b = 0{,}5$, $b = \sqrt{3}$ y $b = 3$ se muestran a continuación. Para $b = 0{,}5$, los resultados de (a) indican que el mínimo debe ocurrir en $d = 1 - 0{,}5/\sqrt{3} \approx 0{,}711$ y esto se conf rma en la representación gráf ca. Tanto para $b = \sqrt{3}$ como para $b = 3$, los resultados de (a) indican que el mínimo se debe dar en $d = 0$ y estas dos conclusiones quedan conformadas por las representaciones gráf cas.





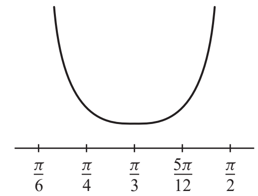


55. Valor mínimo de $F(\theta)$ es $\dfrac{fmg}{\sqrt{1+f^2}}$.

57. $s \approx 30{,}07$ **59.** $15\sqrt{5}$ **61.** $\ell = (b^{2/3} + h^{2/3})^{3/2}$ ft

63. (a) $\alpha = 0$ corresponde a lanzar la bola directamente a la canasta mientras que $\alpha = \pi/2$ corresponde a lanzar la bola directamente hacia arriba. En ninguno de los dos casos es posible que la bola entre en la canasta. Si el ángulo α está muy próximo a 0, la bola se lanza casi directamente a la canasta; por otra parte, si el ángulo α está muy próximo a $\pi/2$, la bola se lanza prácticamente en vertical. En cualquiera de estos dos casos, la bola se debe desplazar a una velocidad enorme.

(b) El mínimo se da, claramente, cuando $\theta = \pi/3$.



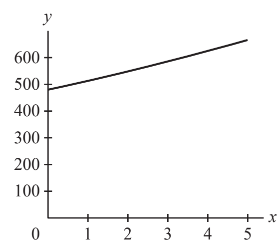
(c) $v^2 = \dfrac{16d}{F(\theta)}$; por tanto v^2 es lo más pequeña posible cuando $F(\theta)$ es lo más grande posible.

(d) Un punto crítico de $F(\theta)$ se da cuando $\cos(\alpha - 2\theta) = 0$, por lo que $\alpha - 2\theta = -\frac{\pi}{2}$ (negativo porque $2\theta > \theta > \alpha$) y esto da lugar a $\theta = \alpha/2 + \pi/4$. El valor mínimo $F(\theta_0)$ se tiene en $\theta_0 = \alpha/2 + \pi/4$.

(e) Considere $\theta_0 = \alpha/2 + \pi/4$. Según la f gura 34 se tiene que:

$$\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

(f) Esto prueba que la velocidad mínima para encestar disminuye cuando la altura del lanzador aumenta. Esto prueba que la altura es una ventaja a la hora de lanzar tiros libres; un lanzador más alto no necesita lanzar la bola tan fuerte para alcanzar la canasta.



65. (a) Según la f gura:

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{c - f(x)}{x} - \tan^{-1}\frac{b - f(x)}{x}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{b - (f(x) - xf'(x))}{x^2 + (b - f(x))^2} - \frac{c - (f(x) - xf'(x))}{x^2 + (c - f(x))^2} = \\
&= (b - c)\frac{x^2 - bc + (b + c)(f(x) - xf'(x)) - (f(x))^2 + 2xf(x)f'(x)}{(x^2 + (b - f(x))^2)(x^2 + (c - f(x))^2)} = \\
&= (b - c)\frac{(x^2 + (xf'(x))^2 - (bc - (b + c)(f(x) - xf'(x)) + (f(x) - xf'(x))^2)}{(x^2 + (b - f(x))^2)(x^2 + (c - f(x))^2)} = \\
&= (b - c)\frac{(x^2 + (xf'(x))^2 - (b - (f(x) - xf'(x)))(c - (f(x) - xf'(x)))}{(x^2 + (b - f(x))^2)(x^2 + (c - f(x))^2)}
\end{aligned}$$

(b) El punto Q es la intersección con el eje y de la recta tangente a la gráf ca de $f(x)$ en el punto P. La ecuación de esta recta tangente es:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

La coordenada y de Q es, por tanto, $f(x) - xf'(x)$.

(c) Según la f gura:

$$BQ = b - (f(x) - xf'(x))$$
$$CQ = c - (f(x) - xf'(x))$$

y

$$PQ = \sqrt{x^2 + (f(x) - (f(x) - xf'(x)))^2} = \sqrt{x^2 + (xf'(x))^2}$$

Comparando estas expresiones con el numerador de $d\theta/dx$, se tiene que $\frac{d\theta}{dx} = 0$ es equivalente a:

$$PQ^2 = BQ \cdot CQ$$

(d) La ecuación $PQ^2 = BQ \cdot CQ$ es equivalente a:

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{CQ}{PQ}$$

Dicho de otro modo, los lados CQ y PQ del triángulo ΔQCP tiene longitud proporcional a los lados PQ y BQ del triángulo ΔQPB. Cuando $\angle PQB = \angle CQP$, se tiene que los triángulos ΔQCP y ΔQPB son semejantes.

Sección 4.7 Ejercicios preliminares

1. Uno.

2. Cualquier término de la secesión del método de Newton continuará siendo x_0.

3. El método de Newton fallará.

4. Sí, se trata de una descripción razonable. La fórmula de iteración para el método de Newton se obtuvo aislando, de la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en x_0, su intersección con el eje de las x.

Sección 4.7 Problemas

1.

n	1	2	3
x_n	2,5	2,45	2,44948980

3.

n	1	2	3
x_n	2,16666667	2,15450362	2,15443469

5.

n	1	2	3
x_n	0,28540361	0,24288009	0,24267469

7. Teniendo presente la f gura, considere $x_0 = -1{,}4$ y calcule:

n	1	2	3
x_n	−1,330964467	−1,328272820	−1,328268856

9. $x \approx 0{,}5739277833$

11. $\sqrt{11} \approx 3{,}317$; según una calculadora 3,31662479.

13. $2^{7/3} \approx 5{,}040$; según una calculadora 5,0396842.

15. 2,093064358 **17.** −2,225 **19.** 1,202

21. $x = 4{,}49341$, que aproximadamente es $1{,}4303\pi$.

23. (2,7984, −0,941684) **25. (a)** $P \approx 156{,}69$ \$

(b) $b \approx 1{,}02121$; la tasa de interés es alrededor de 25,45 %

27. (a) El sector SAB es la sección OAB con a la que se le ha quitado el triángulo OPS. OAB es un sector central de arco θ y radio $\overline{OA} = a$ y, por tanto, de área $\frac{a^2\theta}{2}$. OPS es un triángulo de área $a \operatorname{sen}\theta$ y longitud de la base $\overline{OS} = ea$. Por tanto, el área del sector es:

$$\frac{a^2}{2}\theta - \frac{1}{2}ea^2 \operatorname{sen}\theta = \frac{a^2}{2}(\theta - e \operatorname{sen}\theta)$$

(b) Como la segunda ley de Kepler, el área del sector es proporcional al tiempo t desde que el planeta ha pasado por el punto A, se obtiene:

$$\pi a^2 (t/T) = a^2/2\,(\theta - e \operatorname{sen}\theta)$$
$$2\pi\frac{t}{T} = \theta - e \operatorname{sen}\theta$$

(c) Desde el punto de mira del Sol, Mercurio ha recorrido un ángulo de, aproximadamente, 1,76696 radianes = 101,24°. En consecuencia, Mercurio ha recorrido más de un cuarto de su recorrido alrededor (desde el punto de vista del ángulo central) durante este tiempo.

29. La sucesión de iteraciones diverge espectacularmente, pues $x_n = (-2)^n x_0$.

31. (a) Sea $f(x) = \frac{1}{x} - c$. Entonces:

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{1}{x} - c}{-x^{-2}} = 2x - cx^2$$

(b) Para $c = 10{,}3$, tenemos $f(x) = \frac{1}{x} - 10{,}3$ y por tanto $x_{n+1} = 2x_n - 10{,}3x_n^2$.

- Considere $x_0 = 0{,}1$.

n	1	2	3
x_n	0,097	0,0970873	0,09708738

- Considere $x_0 = 0{,}5$.

n	1	2	3
x_n	−1,575	−28,7004375	−8541,66654

(c) La gráf ca es inconexa. Si $x_0 = 0{,}5$, $(x_1, f(x_1))$ está sobre la otra porción de la gráf ca y no convergerá a ningún punto bajo el método de Newton.

33. $\theta \approx 1{,}2757$; por tanto, $h = L\frac{1 - \cos\theta}{2 \operatorname{sen}\theta} \approx 1{,}11181$.

Sección 4.8 Ejercicios preliminares

1. Cualquier función constante es una primitiva para $f(x) = 0$.

2. No hay diferencia **3.** No

4. (a) Falso. Par si $f(x) = g(x)$, las primitivas F y G pueden diferir en una constante aditiva.

(b) Verdadero. Se obtiene a partir del hecho que la derivada de cualquier constante es 0.

(c) Falso. Si las funciones f y g son diferentes, entonces las primitivas F y G dif eren en una función lineal: $F(x) - G(x) = ax + b$ para algunas constantes a y b.

5. No

Sección 4.8 Problemas

1. $6x^3 + C$ **3.** $\frac{2}{5}x^5 - 8x^3 + 12\ln|x| + C$

5. $2\,\mathrm{sen}\,x + 9\cos x + C$ **7.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + 4\,\mathrm{sen}\,3x + C$

9. **(a)** **(ii)** **(b)** **(iii)** **(c)** **(i)** **(d)** **(iv)**

11. $4x - 9x^2 + C$ **13.** $\frac{11}{5}t^{5/11} + C$

15. $3t^6 - 2t^5 - 14t^2 + C$ **17.** $5z^{1/5} - \frac{3}{5}z^{5/3} + \frac{4}{9}z^{9/4} + C$

19. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$ **21.** $-\frac{18}{t^2} + C$

23. $\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^{3/2} + t + C$

25. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4x^{-1} + C$

27. $12\sec x + C$ **29.** $-\csc t + C$

31. $-\frac{1}{3}\tan(7 - 3x) + C$ **33.** $\frac{25}{3}\tan(3z + 1) + C$

35. $3\,\mathrm{sen}\,4x - 3\cos 3x + C$

37. $\frac{5}{8}\ln(\sec^2(4\theta + 3)) + C$ **39.** $\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3\theta) - 2\tan\left(\frac{\theta}{4}\right) + C$

41. La gráf ca de (B) no tiene los mismos extremos locales que los indicados por $f(x)$ y, por tanto, *no* es una primitiva de $f(x)$.

43. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{7}(x + 13)^7 + C\right) = (x + 13)^6$

45. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(4x + 13)^3 + C\right) = \frac{1}{4}(4x + 13)^2(4) = (4x + 13)^2$

47. $y = \frac{1}{4}x^4 + 4$ **49.** $y = t^2 + 3t^3 - 2$ **51.** $y = \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{3}$

53. $y = \frac{1}{12}(3x + 2)^4 - \frac{1}{3}$ **55.** $y = 1 - \cos x$

57. $y = 3 + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,5x$ **59.** $y = 2\sec(3\theta) - 4 - 2\sqrt{2}$

61. $y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right) + 6$

63. $f'(x) = 6x^2 + 1$; $f(x) = 2x^3 + x + 2$

65. $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + 1$; $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

67. $f'(t) = -2t^{-1/2} + 2$; $f(t) = -4t^{1/2} + 2t + 4$

69. $f'(t) = \frac{1}{2}t^2 - \mathrm{sen}\,t + 2$; $f(t) = \frac{1}{6}t^3 + \cos t + 2t - 3$

71. La ecuación diferencial que cumple $s(t)$ es:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = 6t^2 - t$$

y la condición inicial asociada es $s(1) = 0$; $s(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}$.

73. La ecuación diferencial que cumple $s(t)$ es:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = \mathrm{sen}(\pi t/2)$$

y la condición inicial asociada es $s(0) = 0$; $s(t) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos(\pi t/2))$

75. 6,25 segundos; 78,125 metros

77. 300 m/s **81.** $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$

83. **(a)** Según la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}F(2x)\right) = \frac{1}{2}F'(2x) \cdot 2 = F'(2x) = f(2x)$$

Por tanto $\frac{1}{2}F(2x)$ es una primitiva de $f(2x)$. **(b)** $\frac{1}{k}F(kx) + C$

Capítulo 4 Repaso

1. $8{,}1^{1/3} - 2 \approx 0{,}00833333$; el error es $3{,}445 \times 10^{-5}$

3. $625^{1/4} - 624^{1/4} \approx 0{,}002$; el error es $1{,}201 \times 10^{-6}$

5. $\frac{1}{1{,}02} \approx 0{,}98$; el error es $3{,}922 \times 10^{-4}$

7. $L(x) = 5 + \frac{1}{10}(x - 25)$ **9.** $L(r) = 36\pi(r - 2)$

11. $L(\theta) = 3\theta - \pi$ **13.** $\Delta s \approx 0{,}632$

15. **(a)** Un incremento de 1500 $ en los ingresos.

(b) Un pequeño incremento en el precio conllevaría una disminución de los ingresos.

17. 9 %

19. $\frac{f(8) - f(1)}{7} = -\frac{1}{14} = f'\left(\left(\frac{14}{3}\right)^{3/4}\right)$.

21. $\frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{9}{10} = f'(\sqrt{10})$ ya que $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

23. Sea $x > 0$. Como f es continua sobre $[0, x]$ y derivable sobre $(0, x)$, el teorema del valor medio garantiza que existe $c \in (0, x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad \text{o} \qquad f(x) = f(0) + xf'(c)$$

Ahora, se sabe que $f(0) = 4$ y que $f'(x) \le 2$ para $x > 0$. Por tanto, para todo $x \ge 0$:

$$f(x) \le 4 + x(2) = 2x + 4$$

25. $x = \frac{2}{3}$ y $x = 2$ son puntos críticos; $f(\frac{2}{3})$ es un máximo local mientras que $f(2)$ es un mínimo local.

27. $x = 0$, $x = -2$ y $x = -\frac{4}{5}$ son puntos críticos; $f(-2)$ no es ni máximo local ni un mínimo local, $f(-\frac{4}{5})$ es un máximo local y $f(0)$ es un mínimo local.

29. $\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ es un punto crítico para cualquier entero n; $g\left(\frac{3\pi}{4} + n\pi\right)$ no es ni un máximo local ni un mínimo local cualquier entero n.

31. El valor máximo es 21; el valor mínimo es -11.

33. El valor mínimo es -1; el valor máximo es $\frac{5}{4}$.

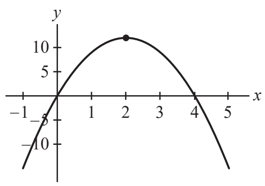
35. El valor mínimo es -1; el valor máximo es 3.

37. El valor mínimo es $2 - 2^{3/2}$ en $x = 2$; el valor máximo es $\frac{4}{27}$ y se da en $x = \frac{4}{9}$.

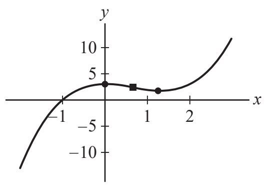
39. El valor mínimo es 2; el valor máximo es 17.

41. $x = \frac{4}{3}$ **43.** $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ **45.** $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$

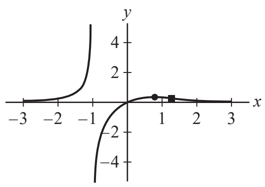
47. No hay asíntotas horizontales; no hay asíntotas verticales.



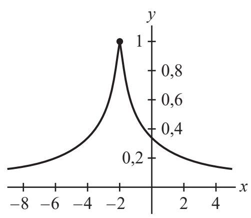
49. No hay asíntotas horizontales; no hay asíntotas verticales.



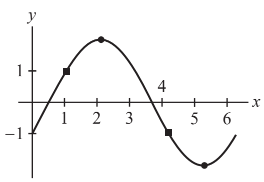
51. $y = 0$ es una asíntota horizontal; $x = -1$ es una asíntota vertical.



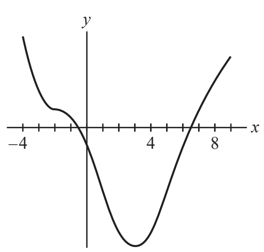
53. Asíntota horizontal $y = 0$; no hay asíntotas verticales.



55.



57.



59. $b = \sqrt[3]{12}$ metros y $h = \frac{1}{3}\sqrt[3]{12}$ metros

61. $t = 8$ días

63. $\dfrac{16}{9}\pi$ **69.** $\sqrt[3]{25} = 2{,}9240$

71. $x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + C$ **73.** $-\cos(\theta - 8) + C$ **75.** $-2t^{-2} + 4t^{-3} + C$

77. $\tan x + C$ **79.** $\dfrac{1}{5}(y + 2)^5 + C$ **81.** $\operatorname{sen}\theta - \dfrac{1}{2}\theta + C$

83. $-4x^{-2} + C$ **85.** $y(x) = x^4 + 3$ **87.** $y(x) = 2x^{1/2} - 1$

89. $y(t) = t - \frac{\pi}{3}(\cos(3t) - 1)$

91. $f(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{3}t^3 - t + 2$

Capítulo 5

Sección 5.1 Ejercicios preliminares

1. Los extremos superiores del intervalo son $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5$, mientras que los extremos inferiores son $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$.

2. **(a)** $\dfrac{9}{2}$ **(b)** $\dfrac{3}{2}$ y 2

3. **(a)** *Son* la misma **(b)** *No son* la misma

(c) *Son* la misma **(d)** *Son* la misma

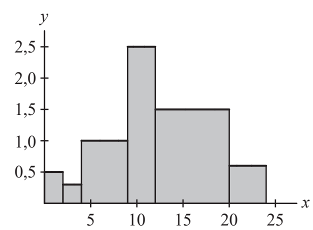
4. El primer término de la suma $\sum_{j=0}^{100} j$ es igual a cero, por lo que se puede omitir; por otra parte, el primer término en $\sum_{j=0}^{100} 1$ no es cero.

5. Sobre $[3, 7]$, la función $f(x) = x^{-2}$ es decreciente.

Sección 5.1 Problemas

1. Sobre el intervalo $[0, 3]$: 0,96 km; sobre el intervalo $[1, 2{,}5]$: 0,5 km

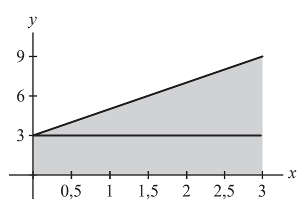
3. 28,5 cm; a continuación se encuentra una gráf ca de las precipitaciones como función del tiempo. El área de la región sombreada representa la precipitación total.



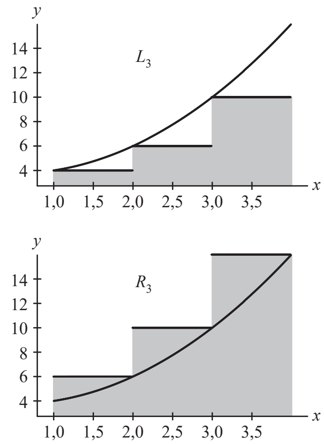
5. $L_5 = 46$; $R_5 = 44$

7. **(a)** $L_6 = 16{,}5$; $R_6 = 19{,}5$

(b) Aplicando geometría (vea la f gura a continuación), el área exacta es $A = 18$. Por tanto, L_6 infraestima el área real ($L_6 - A = -1{,}5$), mientras que R_6 sobreestima el área real ($R_6 - A = +1{,}5$).



9. $R_3 = 32$; $L_3 = 20$; el área bajo la gráfica es mayor que L_3 pero menor que R_3.



11. $R_3 = 2{,}5$; $M_3 = 2{,}875$; $L_6 = 3{,}4375$ **13.** $R_3 = \dfrac{16}{3}$

15. $M_6 = 87$ **17.** $L_6 = 12{,}125$ **19.** $L_4 \approx 0{,}410236$

21. $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k^7$ **23.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} (2^k + 2)$ **25.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i+2)}$

27. (a) 45 **(b)** 24 **(c)** 99

29. (a) -1 **(b)** 13 **(c)** 12

31. 15050 **33.** 352800 **35.** 1093350 **37.** 41650

39. -123165 **41.** $\dfrac{1}{2}$ **43.** $\dfrac{1}{3}$

45. 18; la región por debajo de la gráfica es un triángulo de base 2 y altura 18.

47. 12; la región por debajo de la curva es un trapezoide con base de amplitud 4 y alturas 2 y 4.

49. 2; la región por debajo de la curva sobre $[0, 2]$ es un triángulo de base y altura 2

51. $\lim_{N\to\infty} R_N = 16$

53. $R_N = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2N} + \dfrac{1}{6N^2}$; $\dfrac{1}{3}$

55. $R_N = 222 + \dfrac{189}{N} + \dfrac{27}{N^2}$; 222

57. $R_N = 2 + \dfrac{6}{N} + \dfrac{8}{N^2}$; 2

59. $R_N = (b-a)(2a+1) + (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{N}$;

$(b^2 + b) - (a^2 + a)$

61. El área comprendida entre la gráfica de $f(x) = x^4$ y el eje x a lo largo del intervalo $[0, 1]$.

63. El área comprendida entre la gráfica de $y = x^4$ y el eje x a lo largo del intervalo $[-2, 3]$.

65. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N}\right)$

67. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{15 + \frac{8j}{N}}$

69. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} M_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \tan\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\left(j - \frac{1}{2}\right)\right)$

71. Representa el área comprendida entre la gráfica de $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y el eje x a lo largo del intervalo $[0, 1]$. Se trata de la porción del disco circular $x^2 + y^2 \le 1$ que se encuentra en el primer cuadrante. Por tanto, su área es $\frac{\pi}{4}$.

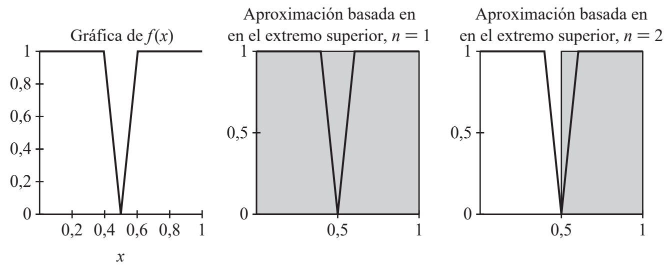
73. De las tres aproximaciones, R_N es la menos precisa, después L_N y finalmente M_N es la más precisa.

75. El área A bajo la curva está entre $L_4 \approx 0{,}518$ y $R_4 \approx 0{,}768$.

77. $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0, \pi/2]$, por lo que $0{,}79 \approx L_4 \le A \le R_4 \approx 1{,}18$.

79. $L_{100} = 0{,}793988$; $R_{100} = 0{,}80399$; $L_{200} = 0{,}797074$; $R_{200} = 0{,}802075$; por tanto, $A = 0{,}80$ con dos decimales de precisión.

81.



83. Si f' es grande, la gráfica de f es más pronunciada y, en consecuencia, hay una diferencia mayor entre f y L_N o R_N.

87. $N > 30000$

Sección 5.2 Ejercicios preliminares

1. 2

2. (a) Falso. $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área *con signo* entre la gráfica y el eje x.

(b) Verdadero. **(c)** Verdadero.

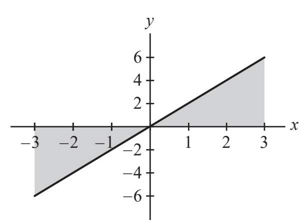
3. Dado que $\cos(\pi - x) = -\cos x$, el área "negativa" entre la gráfica de $y = \cos x$ y el eje x a lo largo de $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ justamente se cancela con el área "positiva" entre la gráfica y el eje x a lo largo de $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. $\displaystyle\int_{-1}^{-5} 8\,dx$

Sección 5.2 Problemas

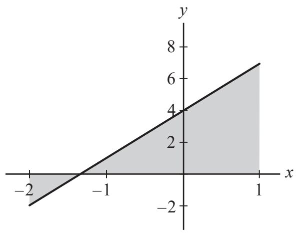
1. La región limitada por la gráfica de $y = 2x$ y el eje x a lo largo del intervalo $[-3, 3]$ está formada por dos triángulos rectángulos. El área de uno de ellos es $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$, por debajo del eje, y el área del otro es $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$, por encima del eje. Por tanto:

$$\int_{-3}^{3} 2x\,dx = 9 - 9 = 0$$



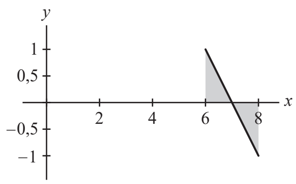
3. La región limitada por la gráf ca de $y = 3x + 4$ y el eje x a lo largo del intervalo $[-2, 1]$ está formada por dos triángulos rectángulos. El área de uno de ellos es $\frac{1}{2}(\frac{2}{3})(2) = \frac{2}{3}$, por debajo del eje, y el área del otro es $\frac{1}{2}(\frac{7}{3})(7) = \frac{49}{6}$ por encima del eje. Por tanto:

$$\int_{-2}^{1}(3x+4)\,dx = \frac{49}{6} - \frac{2}{3} = \frac{15}{2}$$



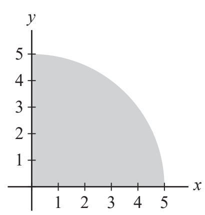
5. La región limitada por la gráf ca de $y = 7 - x$ y el eje x a lo largo del intervalo $[6, 8]$ está formada por dos triángulos rectángulos. El área de uno de ellos es $\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$, por encima del eje, y el área del otro es $\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$ por debajo del eje. Por tanto:

$$\int_{6}^{8}(7-x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$



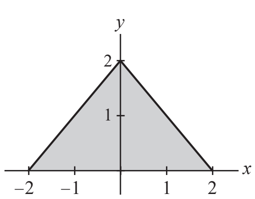
7. La región limitada por la gráf ca de $y = \sqrt{25 - x^2}$ y el eje x a lo largo del intervalo $[0, 5]$ es la cuarta parte de un círculo de radio 5. Por tanto:

$$\int_{0}^{5}\sqrt{25 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(5)^2 = \frac{25\pi}{4}$$



9. La región limitada por la gráf ca de $y = 2 - |x|$ y el eje x a lo largo del intervalo $[-2, 2]$ es a un triángulo situado por encima del eje, de base 4 y altura 2. Por tanto:

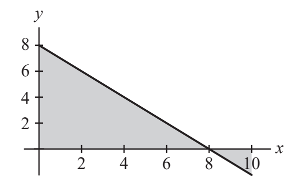
$$\int_{-2}^{2}(2 - |x|)\,dx = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$



11. (a) $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = \lim\limits_{N\to\infty}\left(30 - \frac{50}{N}\right) = 30$

(b) La región limitada por la gráf ca de $y = 8 - x$ y el eje x a lo largo del intervalo $[0, 10]$ está formada por dos triángulos rectángulos. El área de uno de ellos es $\frac{1}{2}(8)(8) = 32$, por encima del eje, y el área del otro es $\frac{1}{2}(2)(2) = 2$ por debajo del eje. Por tanto:

$$\int_{0}^{10}(8-x)\,dx = 32 - 2 = 30.$$



13. (a) $-\dfrac{\pi}{2}$ **(b)** $\dfrac{3\pi}{2}$

15. $\displaystyle\int_0^3 g(t)\,dt = \frac{3}{2}$; $\displaystyle\int_3^5 g(t)\,dt = 0$

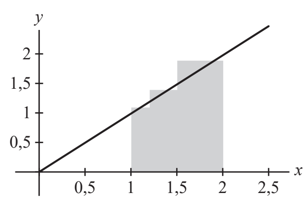
17. La partición P se def ne mediante:

$$x_0 = 0 \quad < \quad x_1 = 1 \quad < \quad x_2 = 2{,}5 \quad < \quad x_3 = 3{,}2 \quad < \quad x_4 = 5$$

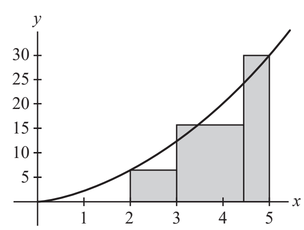
El conjunto de puntos intermedios es:
$C = \{c_1 = 0{,}5, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 4{,}5\}$. Finalmente, el valor de la suma de Riemann es:

$$34{,}25(1-0) + 20(2{,}5-1) + 8(3{,}2-2{,}5) + 15(5-3{,}2) = 96{,}85$$

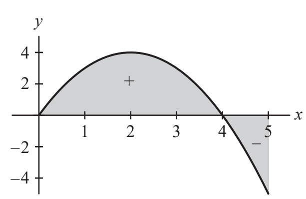
19. $R(f, P, C) = 1{,}59$; he aquí una representación de la gráf ca de f y de los rectángulos.



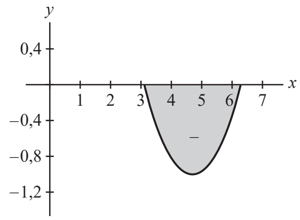
21. $R(f, P, C) = 44{,}625$; he aquí una representación de la gráf ca de f y de los rectángulos.



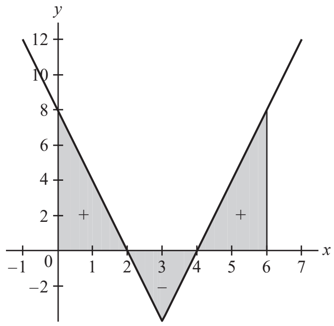
23.



25.



27.



29. El integrando es siempre positivo. En consecuencia, la integral debe ser también positiva, pues el área con signo sólo tiene contribución positiva.

31. El área por debajo del eje es mayor que el área por encima del eje. Por tanto, la integral def nida es negativa.

33. 36 **35.** 243 **37.** $-\frac{2}{3}$ **39.** $\frac{196}{3}$ **41.** $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{6}$

43. 17 **45.** -12 **47.** No. **49.** $\frac{81}{4}$ **51.** $-\frac{63}{4}$ **53.** 7 **55.** 8

57. -7 **59.** $\int_0^7 f(x)\,dx$ **61.** $\int_5^9 f(x)\,dx$ **63.** $\frac{4}{5}$ **65.** $-\frac{35}{2}$

67. Cuando $f(x)$ alcanza tanto valores positivos como negativos en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área con signo entre $f(x)$ y el eje x, mientras que $\int_a^b |f(x)|\,dx$ representa el área total (sin signo) entre $f(x)$ y el eje x. Todas las áreas con contribución negativa en $\int_a^b f(x)\,dx$ pasan a tener contribución positiva en $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

69. $[-1, \sqrt{2}]$ o $[-\sqrt{2}, 1]$ **71.** 9 **73.** $\frac{1}{2}$

75. Sobre el intervalo $[0,1]$, $x^5 \le x^4$; por otra parte, $x^4 \le x^5$ para $x \in [1,2]$.

77. $\operatorname{sen} x$ es creciente sobre $[0{,}2, 0{,}3]$. Por tanto, para $0{,}2 \le x \le 0{,}3$, se tiene:

$$m = 0{,}198 \le 0{,}19867 \approx \operatorname{sen} 0{,}2 \le \operatorname{sen} x \le \operatorname{sen} 0{,}3 \approx$$
$$\approx 0{,}29552 \le 0{,}296 = M$$

Así, según el teorema de comparación, se tiene:

$$0{,}0198 = m(0{,}3 - 0{,}2) = \int_{0{,}2}^{0{,}3} m\,dx \le \int_{0{,}2}^{0{,}3} \operatorname{sen} x\,dx \le \int_{0{,}2}^{0{,}3} M\,dx =$$
$$= M(0{,}3 - 0{,}2) = 0{,}0296$$

79. $f(x)$ es decreciente y no negativa sobre el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$. Por tanto $0 \le f(x) \le f(\pi/4) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ para todo x en $[\pi/4, \pi/2]$.

81. La af rmación $f'(x) \le g'(x)$ es falsa. Considere $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$, $g(x) = 2$. $f(x) \le g(x)$ para todo x en el intervalo $[0,1]$, pero $f'(x) = 1$ mientras que $g'(x) = 0$ para todo x.

83. Si f es una función impar, entonces $f(-x) = -f(x)$ para todo x. En consecuencia, para cualquier área con contribución positiva en el semiplano derecho, donde f queda por encima del eje x, hay una correspondiente contribución negativa en el semiplano izquierdo, donde f queda por debajo del eje x. Análogamente para cualquier área con contribución negativa en el semiplano derecho, donde f queda por debajo del eje x, hay una correspondiente contribución positiva en el semiplano izquierdo, donde f queda por encima del eje x.

Sección 5.3 Ejercicios preliminares

1. **(a)** 4

(b) El área con signo entre $y = f(x)$ y el eje x.

2. 3

3. **(a)** Falso. El TFC I es válido para funciones continuas.

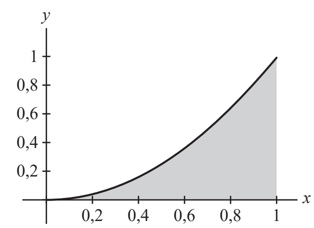
(b) Falso. El TFC I funciona para cualquier primitiva del integrando.

(c) Falso. Si no puede determinar una primitiva del integrando, no puede utilizar el TFC I para evaluar la integral def nida pero ésta (la integral def nida) puede ser que exista.

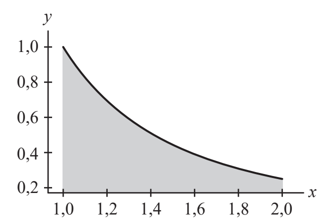
4. 0

Sección 5.3 Problemas

1. $A = \frac{1}{3}$



3. $A = \frac{1}{2}$



5. $\frac{27}{2}$ **7.** -8 **9.** -1 **11.** 128 **13.** $\frac{27}{2}$

15. $\frac{16}{3}$ **17.** $\frac{31}{40}$

19. $\frac{2}{3}$ **21.** 12 **23.** $\frac{11}{6}$ **25.** $60\sqrt{3} - \frac{8}{3}$ **27.** $\sqrt{2}$ **29.** $\frac{3}{2}$

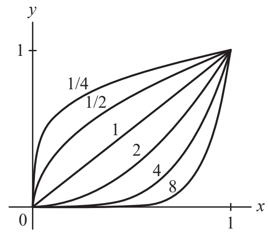
31. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ **33.** $\frac{1}{5}(\sqrt{2} - 1)$ **35.** $\frac{5}{2}$ **37.** $\frac{97}{4}$ **39.** 2

41. $\frac{1}{4}\left(b^4 - 1\right)$ **43.** $\frac{1}{6}(b^6 - 1)$ **45.** $\frac{707}{12}$

47. A nivel gráf co, para una función impar, la contribución positiva del área con signo desde $x = 0$ hasta $x = 1$ se cancela con la contribución negativa del área con signo desde $x = -1$ hasta $x = 0$.

49. 24

51. $\int_0^1 x^n\,dx$ representa el área entre la curva positiva $f(x) = x^n$ y el eje x a lo largo del intervalo $[0,1]$. Esta área resulta cada vez más pequeña cuando n se hace mayor, tal y como resulta evidente a partir del siguiente gráf co, que muestra las curvas para diferentes valores de n.



57. Sean $a > b$ dos reales y sea $f(x)$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para $x \in [a, b]$. Según el TFC:

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Como $f'(x) \geq -K$ para todo $x \in [a, b]$, se obtiene:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \geq -K(x-a)$$

Como $f'(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$, se obtiene:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \leq K(x-a)$$

La combinación de estas dos desigualdades da lugar a:

$$-K(x-a) \leq f(x) - f(a) \leq K(x-a)$$

por lo que, por def nición:

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x-a|$$

Sección 5.4 Ejercicios preliminares

1. **(a)** No **(b)** Sí

2. **(c)**

3. Sí. Toda función continua admite una primitiva, a saber:

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

4. **(b)**, **(e)** y **(f)**

Sección 5.4 Problemas

1. $A(x) = \int_{-2}^x (2t+4)\,dt = (x+2)^2$

3. $G(1) = 0$; $G'(1) = -1$ y $G'(2) = 2$; $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{5}{3}$

5. $G(1) = 0$; $G'(0) = 0$ y $G'(\frac{\pi}{4}) = 1$

7. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{32}{5}$ **9.** $1 - \cos x$ **11.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ **13.** $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}$

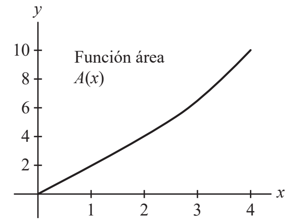
15. $\frac{1}{4}(x^6 - 81x^2)$ **17.** $F(x) = \int_5^x \sqrt{t^3+1}\,dt$

p **19.** $F(x) = \int_0^x \sec t\,dt$ **21.** $x^5 - 9x^3$ **23.** $\sec(5t-9)$

25. **(a)** $A(2) = 4$; $A(3) = 6{,}5$; $A'(2) = 2$ y $A'(3) = 3$.

(b)

$$A(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



29. $\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **31.** $-\cos^4 s \operatorname{sen} s$ **33.** $2x\tan(x^2) - \dfrac{\tan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

35. El valor mínimo de $A(x)$ es $A(1{,}5) = -1{,}25$; el valor máximo de $A(x)$ es $A(4{,}5) = 1{,}25$.

37. $A(x) = (x-2) - 1$ y $B(x) = (x-2)$

39. **(a)** $A(x)$ no tiene un máximo local en P.

(b) $A(x)$ tiene un mínimo local en R.

(c) $A(x)$ tiene un máximo local en S.

(d) Verdadero.

41. $g(x) = 2x + 1$; $c = 2$ o $c = -3$

43. **(a)** Si $x = c$ es un punto de inf exión de $A(x)$, entonces $A''(c) = f'(c) = 0$.

(b) Si $A(x)$ es convexa, entonces $A''(x) > 0$. Como $A(x)$ es la función área asociada a $f(x)$, $A'(x) = f(x)$ según el TFC II, por lo que $A''(x) = f'(x)$. Así $f'(x) > 0$ y, por tanto, $f(x)$ es creciente.

(c) Si $A(x)$ es cóncava, entonces $A''(x) < 0$. Como $A(x)$ es la función área asociada a $f(x)$, $A'(x) = f(x)$ según el TFC II, por lo que $A''(x) = f'(x)$. Así, $f'(x) < 0$ y, por tanto, $f(x)$ es decreciente.

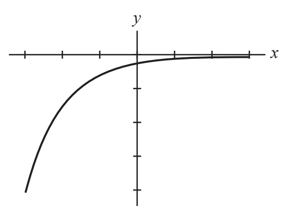
45. **(a)** $A(x)$ es creciente sobre los intervalos $(0, 4)$ y $(8, 12)$ y es decreciente sobre los intervalos $(4, 8)$ y $(12, +\infty)$.

(b) Mínimo local: $x = 8$; máximo local: $x = 4$ y $x = 12$

(c) $A(x)$ presenta puntos de inf exión en $x = 2$, $x = 6$ y $x = 10$.

(d) $A(x)$ es convexa sobre los intervalos $(0, 2)$ y $(6, 10)$ y es cóncava sobre los intervalos $(2, 6)$ y $(10, +\infty)$.

47. La gráf ca de una función de este tipo es:



49. Menor punto crítico positivo: $x = (\pi/2)^{2/3}$ corresponde a un máximo local; menor punto de inf exión positivo: $x = \pi^{2/3}$, $F(x)$ pasa de cóncava a convexa.

51. **(a)** Entonces, por el TFC II, $A'(x) = f(x)$ y, en consecuencia, tanto $A(x)$ como $F(x)$ son primitivas de $f(x)$. Así $F(x) = A(x) + C$ para alguna constante C.

(b)

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (A(b) + C) - (A(a) + C) = A(b) - A(a) = \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

lo que demuestra el TFC I.

53. Exprese

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx = \int_{u(x)}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{v(x)} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{0}^{v(x)} f(x)\,dx - \int_{0}^{u(x)} f(x)\,dx$$

Entonces, por la regla de la cadena y el TFC:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int_{0}^{v(x)} f(x)\,dx - \frac{d}{dx}\int_{0}^{u(x)} f(x)\,dx =$$
$$= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Sección 5.5 Ejercicios preliminares

1. La disminución total en la temperatura a lo largo de los primeros T minutos después de haber sido sumergido en agua fría.

2. 560 km

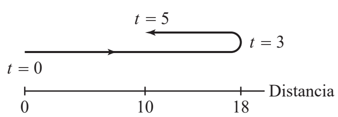
3. Las cantidades **(a)** y **(c)** se representarían de forma natural como primitivas; las cantidades **(b)** y **(d)** se representarían de forma natural como integrales.

Sección 5.5 Problemas

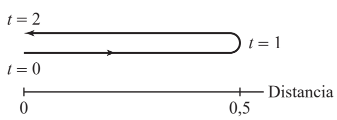
1. 15 250 galones **3.** 3 660 000

5. 33 metros **7.** 3.675 metros

9. Desplazamiento: 10 metros; distancia: 26 metros



11. Desplazamiento: 0 metros; distancia: 1 metro



13. 39 m/s **15.** 9200 coches

17. Coste total: 650 \$; coste medio de los primeros 10: 37,50 \$; coste medio de los últimos 10: 27,50 \$

19. 112,5 pies

21. El área por debajo de la gráf ca en la f gura 5 representa el consumo total de energía en un día en California; $3{,}627 \times 10^{11}$ julios

23. **(a)** $2{,}916 \times 10^{10}$

(b) Aproximadamente 240 526 asteroides de diámetro 50 km.

25. $\int_0^{365} R(t)\,dt \approx 605{,}05$ billones pies cúbicos

27. $100 \le t \le 150$: 404 968 familias; $350 \le t \le 400$: 245,812 familias

29. La velocidad de la partícula es $v(t) = s'(t) = t^{-2}$, una primitiva de ésta es $F(t) = -t^{-1}$. Así, la posición de la partícula en el instante t es:

$$s(t) = \int_1^t s'(u)\,du = F(u)\Big|_1^t = F(t) - F(1) = 1 - \frac{1}{t} < 1$$

para todo $t \ge 1$. De esta manera, la partícula nunca pasará por $x = 1$, lo que implica que tampoco pasará por $x = 2$.

Sección 5.6 Ejercicios preliminares

1. **(a)** y **(b)**

2. **(a)** $u(x) = x^2 + 9$ **(b)** $u(x) = x^3$ **(c)** $u(x) = \cos x$

3. **(c)**

Sección 5.6 Problemas

1. $du = (3x^2 - 2x)\,dx$

3. $du = -2x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$

5. $du = 4\,\mathrm{sen}^3\,\theta\,\cos\theta\,d\theta$

7. $\displaystyle\int (x-7)^3\,dx = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(x-7)^4 + C$

9. $\displaystyle\int t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2} + C$

11.
$$\int \frac{t^3}{(4-2t^4)^{11}}\,dt = -\frac{1}{8}\int u^{-11}\,du = \frac{1}{80}u^{-10} + C =$$
$$= \tfrac{1}{80}(4-2t^4)^{-10} + C$$

13.

$$\int x(x+1)^9\,dx = \int (u-1)u^9\,du = \int (u^{10} - u^9)\,du =$$
$$= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{1}{10}u^{10} + C = \frac{1}{11}(x+1)^{11} - \frac{1}{10}(x+1)^{10} + C$$

15.
$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2u^{1/2}\,du = \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du =$$
$$= \frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C =$$
$$= \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

17. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta\,d\theta = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3\,\theta + C$

19. $\displaystyle\int x\sec^2(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(x^2) + C$

21. $u = x^4$; $\dfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}(x^4) + C$ **23.** $u = x^{3/2}$; $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}(x^{3/2}) + C$

25. $\dfrac{1}{40}(4x+5)^{10} + C$ **27.** $2\sqrt{t+12} + C$

29. $-\dfrac{1}{4(x^2+2x)^2} + C$ **31.** $\sqrt{x^2+9} + C$ **33.** $\dfrac{1}{3}(x^3+x)^3 + C$

35. $\dfrac{1}{36}(3x+8)^{12} + C$ **37.** $\dfrac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$

39. $-\dfrac{1}{2}(x+5)^{-2} + C$ **41.** $\dfrac{1}{39}(z^3+1)^{13} + C$

43. $\dfrac{4}{9}(x+1)^{9/4} + \dfrac{4}{5}(x+1)^{5/4} + C$ **45.** $\dfrac{1}{3}\cos(8-3\theta) + C$

47. $2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{t} + C$ **49.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{\mathrm{sen}\,x + 1}(\mathrm{sen}(x) - 2) + C$

51. $3\tan^4 x - 2\tan^3 x + C$ **53.** $\dfrac{1}{4}\tan(4x+9) + C$

55. $2\tan(\sqrt{x}) + C$ **57.** $-\dfrac{1}{6}(\cos 4x + 1)^{3/2} + C$

59. $\dfrac{1}{2}(\sec\theta - 1)^2 + C$ **61.** $-\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + C$

63. Con $u = \operatorname{sen} x$, $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C_1$; con $u = \cos x$, $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$; los dos resultados pueden diferir en una constante.

65. $u = \pi$ y $u = 4\pi$ **67.** 136 **69.** $\frac{3}{16}$ **71.** $\frac{98}{3}$ **73.** $\frac{243}{4}$

75. $2\sqrt{2}$ **77.** $\frac{1}{4}$ **79.** $\frac{20}{3}\sqrt{5} - \frac{32}{5}\sqrt{3}$

81. $\frac{1}{4}f(x)^4 + C$

83. Sea $u = \operatorname{sen}\theta$. Entonces $u(\pi/6) = 1/2$ y $u(0) = 0$, como se quería probar. Además, $du = \cos\theta\, d\theta$, por lo que:

$$d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$$

Si $\operatorname{sen}\theta = u$, entonces $u^2 + \cos^2\theta = 1$, por lo que $\cos\theta = \sqrt{1-u^2}$. Así, $d\theta = du/\sqrt{1-u^2}$. De esta manera:

$$\int_0^{\pi/6} f(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_0^{1/2} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du.$$

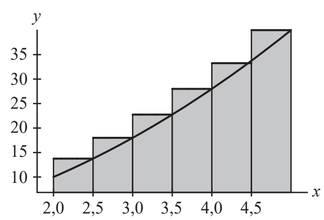
85. $I = \pi/4$

Capítulo 5 Repaso

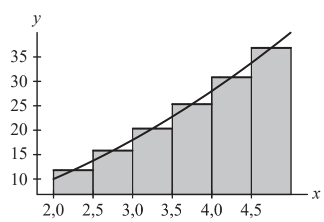
1. $L_4 = \frac{23}{4}$; $M_4 = 7$

3. En general, R_N es mayor que $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre cualquier intervalo $[a,b]$ en que $f(x)$ sea creciente. Con la gráf ca de $f(x)$, se puede considerar $[a,b] = [0,2]$. Para que L_4 sea mayor que $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ debe ser decreciente en el intervalo $[a,b]$. Así, se puede considerar $[a,b] = [2,3]$.

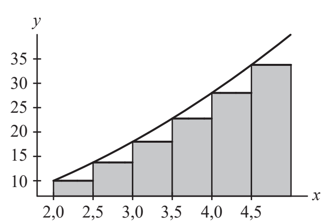
5. $R_6 = \frac{625}{8}$



$M_6 = \frac{1127}{16}$



$L_6 = \frac{505}{8}$. Los rectángulos correspondientes a esta aproximación se muestran a continuación.



7. $R_N = \frac{141}{2} + \frac{45}{N} + \frac{9}{2N^2}$; $\frac{141}{2}$

9. $R_5 \approx 0{,}733732$; $M_5 \approx 0{,}786231$; $L_5 \approx 0{,}833732$

11. El área representada por los rectángulos sombreados es R_5; $R_5 = 90$; $L_5 = 90$

13. $\lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{6N}\sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi j}{6N}\right) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}$

15. $\lim_{N\to\infty} \frac{5}{N}\sum_{j=1}^{N} \sqrt{4 + 5j/N} = \int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$

17. $\frac{1}{120}$ **19.** $\frac{1}{5}\left(1 - \frac{9\sqrt{3}}{32}\right)$

21. $4x^5 - \frac{9}{4}x^4 - x^2 + C$ **23.** $\frac{4}{5}x^5 - 3x^4 + 3x^3 + C$

25. $\frac{1}{4}x^4 + x^3 + C$ **27.** $\frac{46}{3}$ **29.** 3

31. $\frac{1}{150}(10t-7)^{15} + C$ **33.** $-\frac{1}{24}(3x^4 + 9x^2)^{-4} + C$

35. 506 **37.** $-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

39. $\frac{1}{27}\tan(9t^3 + 1) + C$ **41.** $\frac{1}{2}\cot(9 - 2\theta) + C$

43. $3 - \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ **45.** $\frac{1}{5}(2y+3)^{3/2}(y-1) + C$

47. $\tan(1)$ **49.** $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$

51. Mínimo local en $x = 0$, no hay máximos locales, puntos de inf exión en $x = \pm 1$.

53. Consumo diario: 9312 millones de galones; desde las 6 PM a la medianoche: 1,68 millones de galones.

55. 208,245 \$ **57.** 0

59. La función $f(x) = 2^x$ es creciente, por lo que $1 \le x \le 2$ implica que $2 = 2^1 \le 2^x \le 2^2 = 4$. En consecuencia:

$$2 = \int_1^2 2\,dx \le \int_1^2 2^x\,dx \le \int_1^2 4\,dx = 4$$

Por otra parte, la función $f(x) = 3^{-x}$ es decreciente, por lo que $1 \le x \le 2$ implica que:

$$\frac{1}{9} = 3^{-2} \le 3^{-x} \le 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

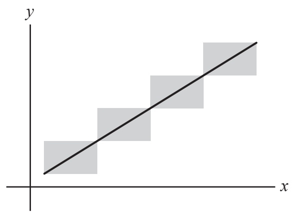
Así, se obtiene que:

$$\frac{1}{9} = \int_1^2 \frac{1}{9}\,dx \le \int_1^2 3^{-x}\,dx \le \int_1^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}$$

61. $\frac{4}{3} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{5}{3}$ **63.** $-\frac{1}{1+\pi}$

65. $\text{sen}^3 x \cos x$ **67.** -2

69. Considere la f gura a continuación, que muestra una porción de la gráf ca de una función lineal.



Los rectángulos sombreados representan las diferencias entre las aproximaciones basadas en los extremos superiores R_N y las basadas en los extremos inferiores L_N. Como la gráf ca de $y = f(x)$ es una recta, la porción inferior de cada rectángulo sombreado es exactamente del mismo tamaño que la porción superior. Por tanto, si se promedian L_N y R_N, el error debido a las dos aproximaciones se cancela, dando lugar a:

$$\frac{1}{2}(R_N + L_N) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Capítulo 6

Sección 6.1 Ejercicios preliminares

1. Área de la región comprendida entre las gráf cas de $y = f(x)$ y de $y = g(x)$, limitada a la izquierda por la recta vertical $x = a$ y a la derecha por la recta vertical $x = b$.

2. Sí

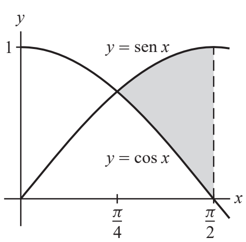
3. $\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx - \int_3^5 (g(x) - f(x))\,dx$

4. Negativa

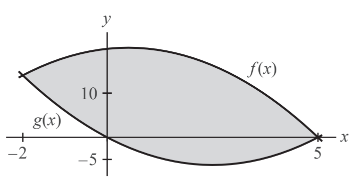
Sección 6.1 Problemas

1. 102 **3.** $\frac{32}{3}$

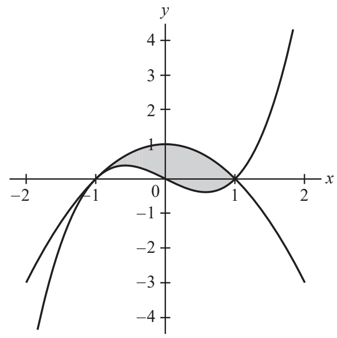
5. $\sqrt{2} - 1$



7. $\frac{343}{3}$

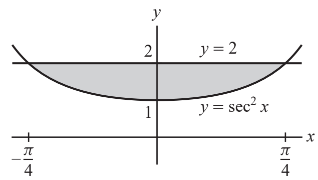


9. Las curvas se intersecan en $(\pm 1, 0)$:



$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) - x(x^2 - 1)\,dx = \frac{4}{3}$$

11. $\pi - 2$

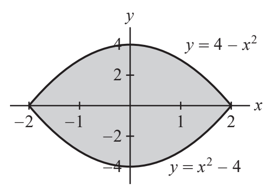


13. $\frac{160}{3}$ **15.** $\frac{12\sqrt{3} - 12 + (\sqrt{3} - 2)\pi}{24}$

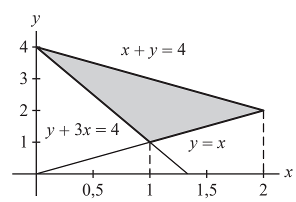
17. $2 - \frac{\pi}{2}$ **19.** $\frac{1{,}331}{6}$

21. 256 **23.** $\frac{32}{3}$ **25.** $\frac{64}{3}$

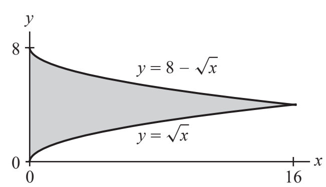
27. $\frac{64}{3}$



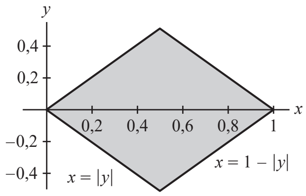
29. 2



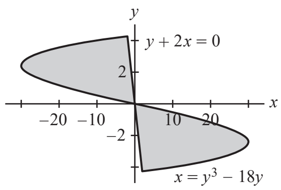
31. $\frac{128}{3}$



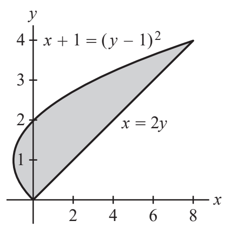
33. $\frac{1}{2}$



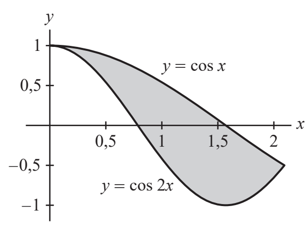
35. $\frac{1{,}225}{8}$



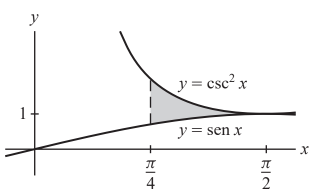
37. $\frac{32}{3}$



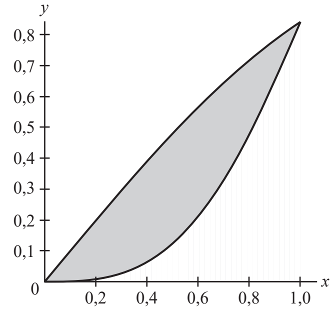
39. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



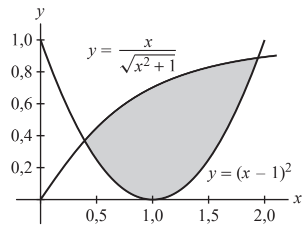
41. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$



43. $\frac{1}{2}(\cos 1 - 1) \approx 0{,}2298$



45. $\approx 0{,}7567130951$



47. **(a)** (ii) **(b)** No

(c) En 10 segundos, atleta 1; en 25 segundos, atleta 2.

49. $\frac{8}{3}c^{3/2}$; $c = \frac{9^{1/3}}{4} \approx 0{,}520021.$

51. $\int_{-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \left[(1+x^2)^{-1} - x^2\right] dx$

53. 0,8009772242 **55.** 214,75 in^2

57. **(b)** $\frac{1}{3}$ **(c)** 0 **(d)** 1

59. $m = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \approx 0{,}206299$

Sección 6.2 Ejercicios preliminares

1. 3 **2.** 15

3. La tasa de f ujo es el volumen de f uido que para a través de una sección transversal de área en un punto concreto, por unidad de tiempo.

4. La velocidad del f uido depende únicamente de la distancia radial al centro del tubo.

5. 15

Sección 6.2 Problemas

1. **(a)** $\frac{4}{25}(20-y)^2$

(b) $\frac{1{,}280}{3}$

3. $\frac{\pi R^2 h}{3}$ **5.** $\pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$ **7.** $\frac{1}{6}abc$ **9.** $\frac{8}{3}$ **11.** 36

13. 18 **15.** $\frac{\pi}{3}$ **17.** 96π

21. **(a)** $2\sqrt{r^2 - y^2}$ **(b)** $4(r^2 - y^2)$ **(c)** $\frac{16}{3}r^3$

23. 160π **25.** 5 kg **27.** ,36 g

29. $P \approx 4\,423{,}59$ miles **31.** $L_{10} = 442{,}24$, $R_{10} = 484{,}71$

33. $P \approx 61$ ciervos **35.** $Q = 128\pi$ cm^3/s **37.** $Q = \frac{8\pi}{3}$ cm^3/s

39. 16 **41.** $\frac{3}{\pi}$ **43.** $\frac{1}{10}$ **45.** -4 **47.** $\frac{1}{n+1}$

49. En [0,24], la temperatura media es 20; en [2,6] la temperatura media es $20 + \frac{15}{2\pi} \approx 22{,}387325$.

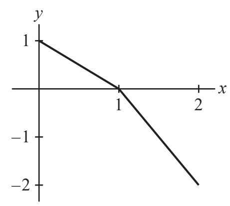
51. $\frac{17}{2}$ m/s

53. Aceleración media $= -80$ m/s^2; celeridad media $= 20\sqrt{5} + 104$ m/s $\approx$ $\approx 148{,}7213596$ m/s **55.** $\frac{3}{5^{1/4}} \approx 2{,}006221$

57. Teorema del valor medio para integrales; $c = \frac{A}{\sqrt[3]{4}}$

59. En [0, 1], $f(x)$; en [1, 2], $g(x)$.

61. Existen muchas soluciones. Una de ellas podría ser:



63. $v_0/2$

Sección 6.3 Ejercicios preliminares

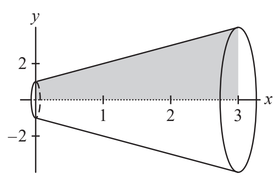
1. (a), (c) **2.** Verdadero

3. Falso, las secciones transversales serán coronas circulares.

4. (b)

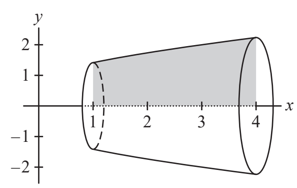
Sección 6.3 Problemas

1. (a)



(b) Disco de radio $x + 1$ **(c)** $V = 21\pi$

3. (a)



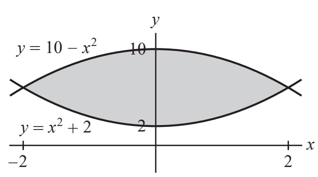
(b) Disco de radio $\sqrt{x+1}$

(c) $V = \frac{21\pi}{2}$

5. $V = \frac{81\pi}{10}$ **7.** $V = \frac{24{,}573\pi}{13}$ **9.** $V = \pi$

11. $V = 2\pi$ **13.** (iv)

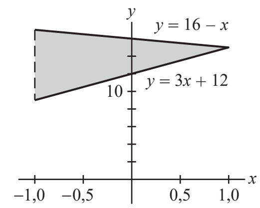
15. (a)



(b) Una corona circular de radio exterior $R = 10 - x^2$ y radio interior $r = x^2 + 2$.

(c) $V = 256\pi$

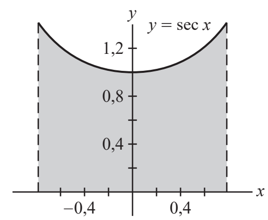
17. (a)



(b) Una corona circular de radio exterior $R = 16 - x$ y radio interior $r = 3x + 12$.

(c) $V = \frac{656\pi}{3}$

19. (a)



(b) Un disco circular de radio $R = \sec x$.

(c) $V = 2\pi$

21. $V = \frac{15\pi}{2}$ **23.** $V = \frac{3\pi}{10}$ **25.** $V = 32\pi$ **27.** $V = \frac{704\pi}{15}$

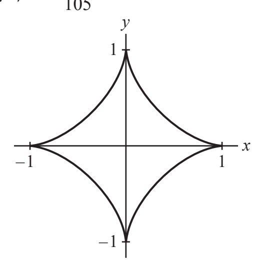
29. $V = \frac{128\pi}{5}$ **31.** $V = 40\pi$ **33.** $V = \frac{376\pi}{15}$ **35.** $V = \frac{824\pi}{15}$

37. $V = \frac{32\pi}{3}$ **39.** $V = \frac{1{,}872\pi}{5}$ **41.** $V = \frac{1{,}400\pi}{3}$

43. $V = \pi\left(\frac{7\pi}{9} - \sqrt{3}\right)$ **45.** $V = \frac{96\pi}{5}$ **47.** $V = \frac{32\pi}{35}$

49. $V = \frac{1184\pi}{15}$ **51.** $V = \frac{9}{8}\pi$ **53.** $V \approx 43\ 000$ cm^3

55. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ **57.** $V = \frac{32\pi}{105}$



59. $V = 4\pi\sqrt{3}$ **61.** $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

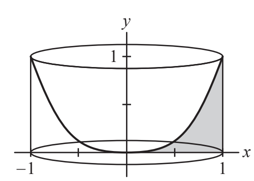
Sección 6.4 Ejercicios preliminares

1. (a) Radio h y altura r. **(b)** Radio r y altura h.

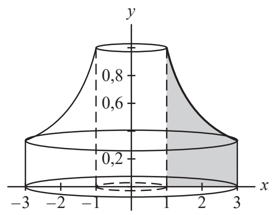
2. (a) Respecto a x. **(b)** Respecto a y.

Sección 6.4 Problemas

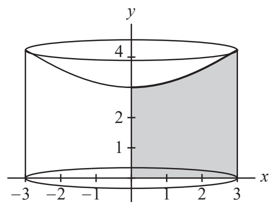
1. $V = \frac{2}{5}\pi$



3. $V = 4\pi$

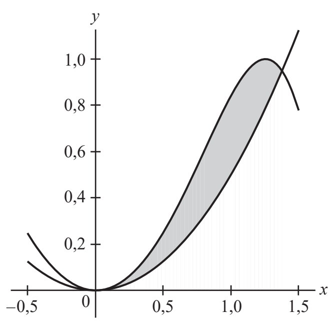


5. $V = 18\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

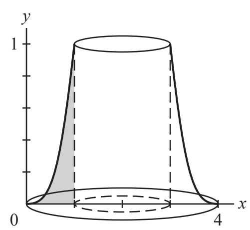


7. $V = \frac{32\pi}{3}$ **9.** $V = 16\pi$ **11.** $V = \frac{32\pi}{5}$

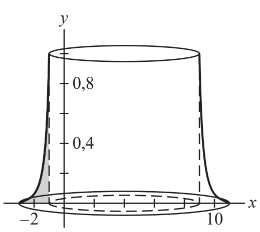
13. Los puntos de intersección son $x = 0, y = 0$ y $x \approx \pm 1{,}376769504, 0{,}9477471335$ y $V \approx 1{,}321975576$.



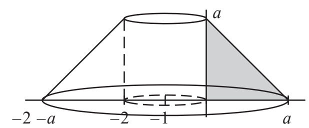
15. $V = \frac{3\pi}{5}$



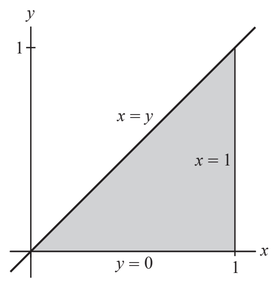
17. $V = \frac{280\pi}{81}$



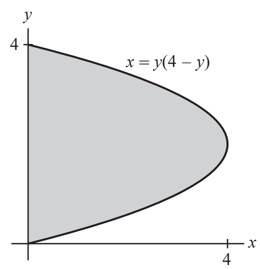
19. $V = \frac{1}{3}\pi a^3 + \pi a^2$



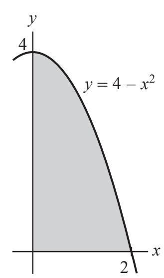
21. $V = \frac{\pi}{3}$



23. $V = \frac{128\pi}{3}$



25. $V = 8\pi$



27. (a) $V = \frac{576\pi}{7}$ **(b)** $V = \frac{96\pi}{5}$

29. (a) $\overline{AB}$ genera un disco de radio $R = h(y)$; $\overline{CB}$ genera una capa de radio x y altura $f(x)$.

(b) Capa, $V = 2\pi \int_0^2 x f(x)\, dx$; Disco, $V = \pi \int_0^{1,3} (h(y))^2\, dy$.

31. $V = \frac{602\pi}{5}$ **33.** $V = 8\pi$ **35.** $V = \frac{40\pi}{3}$ **37.** $V = \frac{1{,}024\pi}{15}$

39. $V = 16\pi$ **41.** $V = \frac{32\pi}{3}$ **43.** $V = \frac{776\pi}{15}$ **45.** $V = \frac{625\pi}{6}$

47. $V = \frac{121\pi}{525}$ **49.** $V = \frac{563\pi}{30}$ **51.** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

53. $V = 2\pi^2 ab^2$

55. (b) $V \approx 4\pi\left(\frac{R}{N}\right)\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{kR}{N}\right)^2$ **(c)** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Sección 6.5 Ejercicios preliminares

1. Porque la fuerza necesaria no es constante durante el proceso de estiramiento.

2. La fuerza necesaria para elevar el depósito es el peso de éste, que es constante. **3.** $\frac{1}{2}kx^2$

Sección 6.5 Problemas

1. $W = 627{,}2$ J **3.** $W = 5{,}76$ J **5.** $W = 8$ J **7.** $W = 11{,}25$ J

9. $W = 3{,}800$ J **11.** $W = 105,840$ J

13. $W = \frac{56{,}448\pi}{5}$ J $\approx 3{,}547 \times 10^4$ J **15.** $W \approx 1{,}842 \times 10^{12}$ J

17. $W = 3{,}92 \times 10^{-6}$ J **19.** $W \approx 1{,}18 \times 10^8$ J

21. $W = 9800\pi\ell r^3$ J **23.** $W = 2{,}94 \times 10^6$ J

25. $W \approx 1{,}222 \times 10^6$ J **27.** $W = 3920$ J **29.** $W = 529{,}2$ J

31. $W = 1,470$ J **33.** $W = 374{,}85$ J

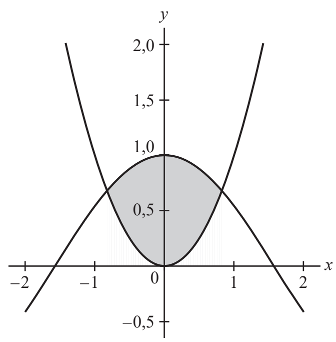
37. $W \approx 5{,}16 \times 10^9$ J **41.** $\sqrt{2GM_e\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r+R_e}\right)}$ m/s

43. $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ m/s

Capítulo 6 Repaso

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **5.** 24 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $3\sqrt{2} - 1$ **11.** $\frac{4}{\pi}\left(1 - 2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

13. Puntos de intersección $x \approx \pm 0{,}8241323123$; Área $\approx 1{,}094753609$



15. $V = 4\pi$ **17.** 2,7552 kg **19.** $\frac{9}{4}$ **21.** $\frac{1}{72}(625 \cdot 5^{3/5} - 5)$

23. $\frac{3\pi}{4}$ **25.** 27 **27.** $\frac{2\pi m^5}{15}$ **29.** $V = \frac{162\pi}{5}$ **31.** $V = 64\pi$

33. $V = 8\pi$ **35.** $V = \frac{56\pi}{15}$ **37.** $V = \frac{128\pi}{15}$ **39.** $V = \pi$

41. $V = 2\pi\left(c + \frac{c^3}{3}\right)$ **43.** $V = c\pi$

45. **(a)** $\int_0^1 \left(\sqrt{1-(x-1)^2} - (1 - \sqrt{1-x^2})\right) dx$

(b) $\pi \int_0^1 \left[(1-(x-1)^2) - (1-\sqrt{1-x^2})^2\right] dx$

47. $W = 1{,}08$ J **49.** 0,75 pies

51. $W = 117\,600\pi$ J $\approx 3{,}695 \times 10^5$ J **53.** $W = 98\,000$ J

Capítulo 7

Sección 7.1 Ejercicios preliminares

1. Las ecuaciones (a), (b), y (d) son correctas pero la ecuación (c) no lo es: $3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72$.

2. El dominio de $\ln x$ es $(0, +\infty)$; su rango es $(-\infty, +\infty)$. $\ln x < 0$ cuando $0 < x < 1$.

3. (a), (c), y (f). Las otras no tienen base variable y exponente constante.

4. $0 < b < 1$ **5.** Para todo $b > 0$ excepto $b = 1$.

6. $(0, 1)$ **7.** (c)

Sección 7.1 Problemas

1. (a) 1 (b) 29 (c) 1 (d) 81 (e) 16 (f) 0 **3.** $x = 4$

5. $x = -\frac{1}{2}$ **7.** $x = -\frac{1}{3}$

9. $k = 9$ **11.** $+\infty$ **13.** $+\infty$

15. $y = 4x + 4$ **17.** $y = e(x+1) + e$

19. $14e^{2x} + 12e^{4x}$ **21.** $\pi e^{\pi x}$

23. $-4e^{-4x+9}$ **25.** $e^{x^2}\frac{2x^2-1}{x^2}$

27. $4(1+e^x)^3 e^x$ **29.** $(2x+2)e^{x^2+2x-3}$

31. $\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$ **33.** $e^{\theta}\cos(e^{\theta})$ **35.** $-\frac{3e^{-3t}}{(1-e^{-3t})^2}$

37. $e^x \frac{3x-2}{(3x+1)^2}$ **39.** $\frac{2e^x - 2e^x x - e^{x+1} - 1}{(2e^x-1)^2}$

41. $16e^{4x-3}$ **43.** $2e^t \cos t$

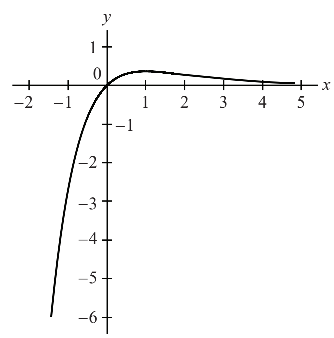
45. $((1-2t)^2 - 2)e^{t-t^2}$

47. Mínimo local en $x = 0$.

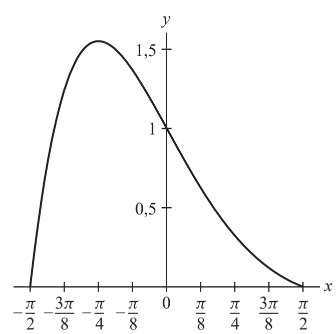
49. Mínimo local en $x = 1$.

51. Punto crítico en $t = 1$, que no es ni máximo ni mínimo.

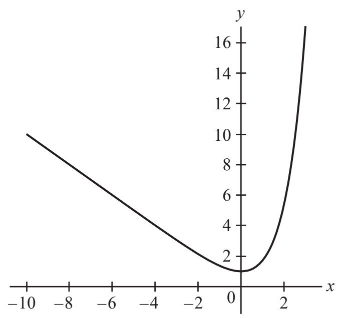
53. Punto crítico, máximo local, en $x = 1$; punto de inflexión en $x = 2$.



55. Punto crítico, máximo local, en $x = -\frac{\pi}{4}$; punto de inflexión en $x = 0$.



57. Punto crítico, mínimo local, en $x = 0$; no presenta puntos de inf exión.



59. $a = 1$ **61.** $y = x$ **63.** $y = x + 1$; $e^{-0,1} \approx 0{,}99$

65. (a) 1,29 cm/año (b) 2,33 años (c) 32 cm

67. $kb^{1/m-1}(b - a)$ **69.** $e^x + 2x + C$

71. $\frac{1}{3}(1 - e^{-3})$ **73.** $\frac{1}{6}(e - e^{-17})$

75. $\frac{1}{4}e^{4x} + x + C$ **77.** $1 - e^{-1/2}$

79. $\frac{2}{3}(e^t + 1)^{3/2} + C$ **81.** $e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + C$ **83.** $2\sqrt{e^x + 1} + C$

85. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **87.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2 - e$ **89.** $e^2 + 1$

91. (b) $e^{-1/16} - e^{-25/64} \approx 0{,}263$

97. $f'(x) = e^x + xe^x$; $f''(x) = 2e^x + xe^x$;
$f'''(x) = 3e^x + xe^x$; $f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$

Sección 7.2 Ejercicios preliminares

1. **(a)**, **(b)**, **(f)** **2.** No

3. Diferentes chicos pueden tener el mismo apellido, por lo que esta función no será inyectiva.

4. Esta función es inyectiva y $f^{-1}(6{:}27)$ = Hamilton Township.

5. La gráf ca de la función inversa es la ref exión de la gráf ca de $y = f(x)$ a través de la recta $y = x$.

6. 2

7. 1/3

Sección 7.2 Problemas

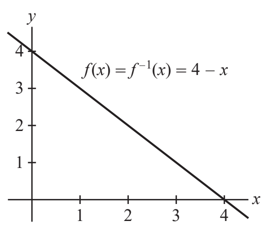
1. $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{7}$ **3.** $[-\pi/2, \pi/2]$

5. • $f(g(x)) = \left((x-3)^{1/3}\right)^3 + 3 = x - 3 + 3 = x$

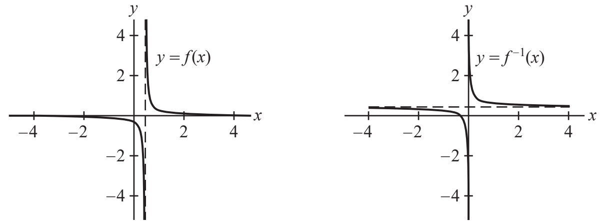
• $g(f(x)) = \left(x^3 + 3 - 3\right)^{1/3} = \left(x^3\right)^{1/3} = x$

7. $v^{-1}(R) = \frac{2GM}{R^2}$

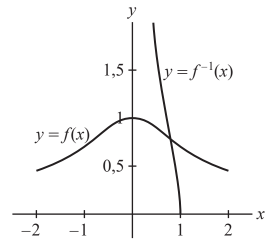
9. $f^{-1}(x) = 4 - x$



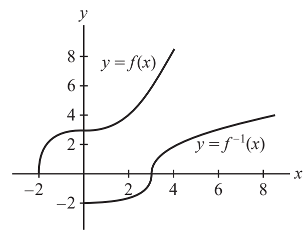
11. $f^{-1}(x) = \frac{1}{7x} + \frac{3}{7}$



13. Dominio $\{x : x \geq 0\}$: $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; dominio$\{x : x \leq 0\}$: $f^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

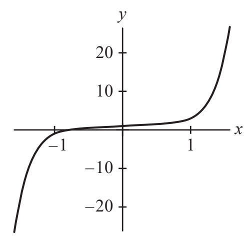


15. $f^{-1}(x) = (x^2 - 9)^{1/3}$



17. Figuras (B) y (C)

19. **(a)**



(b) $(-\infty, +\infty)$ **(c)** $f^{-1}(3) = 1$

21. Dominio $x \leq 1$: $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$;
dominio $x \geq 1$: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

23. $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

25. $g'(x) = \dfrac{1}{7}$ **27.** $g'(x) = -\dfrac{1}{5}x^{-6/5}$

29. $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ **31.** $g(7) = 1$; $g'(7) = \dfrac{1}{5}$

33. $g(1) = 0$; $g'(1) = 1$ **35.** $g(4) = 2$; $g'(4) = \dfrac{4}{5}$

37. $g(1/4) = 3$; $g'(1/4) = -16$

41. (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) F (g) V

Sección 7.3 Ejercicios preliminares

1. $\log_{b^2}(b^4) = 2$ **2.** Para $0 < x < 1$ **3.** $\ln(-3)$ no está def nido

4. Esta frase es una descripción verbal de la propiedad de los logaritmos que af rma $\log(ab) = \log a + \log b$.

5. D: $x > 0$; R: números reales **6.** $\ln(-x)$ **7.** $\ln 4$ **8.** $\frac{1}{10}$

Sección 7.3 Problemas

1. 3 **3.** 0 **5.** $\frac{5}{3}$ **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{5}{6}$ **11.** 1 **13.** 7 **15.** 29

17. (a) $\ln 1600$ **(b)** $\ln(9x^{7/2})$

19. $t = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{100}{7}\right)$ **21.** $x = -1$ o $x = 3$

23. $x = e$ **25.** Sean $a = e^2$ y $b = e^3$

27. Junio 2012 (sobre 11,55 años).

29. $\frac{d}{dx}x\ln x = \ln x + 1$ **31.** $\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = \frac{2}{x}\ln x$

33. $\frac{d}{dx}\ln(9x^2 - 8) = \frac{18x}{9x^2 - 8}$

35. $\frac{d}{dt}\ln(\operatorname{sen} t + 1) = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t + 1}$

37. $\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ **39.** $\frac{d}{dx}\ln(\ln x) = \frac{1}{x\ln x}$

41. $\frac{d}{dx}(\ln(\ln x))^3 = \frac{3(\ln(\ln x))^2}{x\ln x}$

43. $\frac{d}{dx}\ln((x+1)(2x+9)) = \frac{4x + 11}{(x+1)(2x+9)}$

45. $\frac{d}{dx}11^x = \ln 11 \cdot 11^x$

47. $\frac{d}{dx}\frac{2^x - 3^{-x}}{x} = \frac{x(2^x\ln 2 + 3^{-x}\ln 3) - (2^x - 3^{-x})}{x^2}$

49. $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 2}$ **51.** $\frac{d}{dt}\log_3(\operatorname{sen} t) = \frac{\cot t}{\ln 3}$

53. $y = 36\ln 6(x - 2) + 36$

55. $y = 3^{20}\ln 3(t - 2) + 3^{18}$

57. $y = 5^{-1}$ **59.** $y = -1(t - 1) + \ln 4$

61. $y = \frac{12}{25\ln 5}(z - 3) + 2$ **63.** $y = \frac{8}{\ln 2}\left(w - \frac{1}{8}\right) - 3$

65. $y' = 2x + 14$ **67.** $y' = 3x^2 - 12x - 79$

69. $y' = \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}\right)$

71. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x+2)}{(2x+1)(3x+2)}}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x+2}\right)$

73. $\frac{d}{dx}x^{3x} = x^{3x}(3 + 3\ln x)$

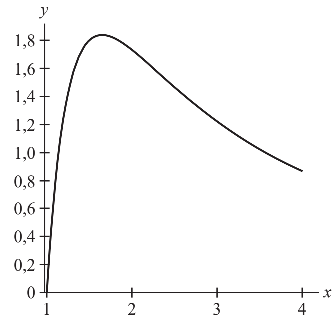
75. $\frac{d}{dx}x^{e^x} = x^{e^x}\left(\frac{e^x}{x} + e^x\ln x\right)$

77. $\frac{d}{dx}x^{3^x} = x^{3^x}\left(\frac{3^x}{x} + (\ln x)(\ln 3)3^x\right)$

79. $g(e)$ es un máximo local.

81. $g(e^{1/3})$ es un máximo local.

83. Hay un máximo local en $x = e^{1/2} \approx 1{,}65$ y un punto de inf exión en $x = e^{5/6} \approx 2{,}301$.



85. $7\ln x + C$ **87.** $\frac{1}{2}\ln(2x + 4) + C$

89. $\frac{1}{2}\ln(t^2 + 4) + C$ **91.** $\frac{1}{2}\ln(9 - 2x + 3x^2) + C$

93. $\ln|\operatorname{sen} x| + C$

95. $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$ **97.** $\frac{1}{3}\ln^3 x + C$ **99.** $\frac{1}{4}\ln(\ln(8x - 2)) + C$

101. $\frac{1}{2}\ln^2(\operatorname{sen} x) + C$ **103.** $\frac{1}{2\ln 3}3^{x^2} + C$

105. $-\frac{1}{3\ln 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$ **107.** $\ln 3$

109. $\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 5$ **111.** $\ln 2$ **113.** $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = \frac{1}{e^{-e}}$

115. 1,22 céntimos por año

117. (a) $\frac{dP}{dT} = -\frac{1}{T\ln 10}$ **(b)** $\Delta P \approx -0{,}054$

119. Pruebe el equivalente $\log_a x = \log_a b \log_b x$. Pero $a^{\log_a b \log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x = a^{\log_a x}$, por lo que es cierto.

Sección 7.4 Ejercicios preliminares

1. El tiempo de duplicación es inversamente proporcional a la constante de crecimiento. En consecuencia, la cantidad con $k = 3{,}4$ se duplica antes.

2. La población tarda más en aumentar de una célula a dos células.

3. $\frac{dS}{dn} = -\ln 2S(n)$

4. Sería mayor, más antigua, pues se ha sobrestimado la cantidad total de C^{14} y, por tanto, sobreestimado el tiempo necesario para desintegrarse.

Sección 7.4 Problemas

1. (a) 2000 bacterias inicialmente **(b)** $t = \frac{1}{1{,}3}\ln 5 \approx 1{,}24$ horas

3. $f(t) = 5e^{t\ln 7}$

5. $N'(t) = \frac{\ln 2}{3}N(t)$; 1 048 576 moléculas pasada una hora.

7. $y(t) = Ce^{-5t}$ para alguna constante C; $y(t) = 3{,}4e^{-5t}$

9. $y(t) = 1000e^{3(t-2)}$ **11.** 5,33 años

13. $k \approx 0{,}023$ horas^{-1}; $P_0 \approx 332$

15. Doble: 11,55 años; triple: 18,31 años; por siete: 32,43 años

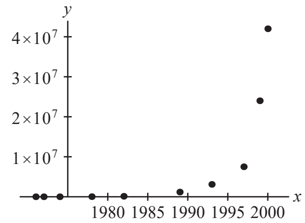
17. Mitad: 1,98 días; un tercio: 3,14 días; una décima: 6,58 días

19. Datos I **21. (a)** 26,39 años **(b)** 1969

23. 7600 años **25.** $2{,}34 \times 10^{-13}$ a $2{,}98 \times 10^{-13}$ **27.** 2,55 horas

29. (a) Sí, la gráf ca tiene la forma de una exponencial especialmente hacia los últimos años; $k \approx 0{,}369$ años^{-1}.

(b)



(c) $N(t) = 2250e^{0,369t}$

(d) El tiempo de duplicación es $\ln 2/0{,}369 \approx 1{,}88$ años.

(e) $\approx 2{,}53 \times 10^{10}$ transistores

(f) No, no se puede considerar un microchip menor que un átomo.

31. Con $t_0 = 10$, el tiempo de duplicación es 14; con $t_0 = 20$, el tiempo de duplicación es 24.

33. $T = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{d}{L}\right)$

35. $P(t) = 204e^{ae^{0,15t}}$ con $a \approx -0{,}02$; 136 ratas pasados 20 meses.

37. Para multiplicarse por m, $P(t) = mP_0$ para algún t. Resolviendo $mP_0 = P_0e^{kt}$ para t, se obtiene $t = \frac{\ln m}{k}$.

Sección 7.5 Ejercicios preliminares

1. 12 % compuesto trimestralmente corresponde a una tasa anual de 12,55 %; 11 % continuamente compuesto es 11,63 %, por tanto, 12 % compuesto trimestralmente.

2. 1,0942; 1,0931 **3.** **(b)**

4. Si la tasa de interés aumenta, el valor actual de 1 \$ por año, a partir de ahora, disminuirá.

5. Estará triste porque al 7 %, la cantidad que alguien necesita invertir hoy para obtener 1000 \$ al cabo de un año sería menor de lo que necesitaría al 6 %. Por tanto, su valor, hoy, será inferior.

Sección 7.5 Problemas

1. **(a)** $P(10) = 4870{,}38$ \$ **(b)** $P(10) = 4902{,}71$ \$

(c) $P(10) = 4919{,}21$ \$

3. **(a)** 1,0508 **(b)** 1,0513

5. 12 752,56 \$ **7.** En 3 años:

(a) $PV = 4176{,}35$ \$ **(b)** $PV = 3594{,}62$ \$

En 5 años:

(a) $PV = 3704{,}09$ \$ **(b)** $PV = 2884{,}75$ \$

9. 9,16 %

11. **(a)** El valor actual de los costes de mano de obra reducidos son:

$$7000(e^{-0,08} + e^{-0,16} + e^{-0,24} + e^{-0,32} + e^{-0,4}) = 27\ 708{,}50\ \$$$

Es superior a los 25 000 \$ de coste del sistema informático, por lo que se debería comprar el sistema informático.

(b) El valor actual de los ahorros es:

$$27\ 708{,}50\$ - 25\ 000\ \$ = 2708{,}50\ \$$$

13. 39 346,93 \$ **15.** 41 906,75 \$ **19.** $R = 1200$ \$

21. 71 460,53 \$

23. e^6 **25.** e^6

27. Empiece expresando:

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \int_1^{1+x/n} \frac{dt}{t}$$

Siguiendo la demostración en el texto, observe que:

$$\frac{x}{n+x} \le \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n}$$

siempre que $x > 0$, mientras que:

$$\frac{x}{n} \le \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n+x}$$

cuando $x < 0$. Multiplicando ambas desigualdades por n y pasando al límite cuando $n \to \infty$, el teorema de compresión garantiza que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)^n = x$$

Finalmente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

29. **(a)** 9,38 %

(b) En general:

$$P_0(1 + r/M)^{Mt} = P_0(1 + r_e)^t$$

de manera que $(1 + r/M)^{Mt} = (1 + r_e)^t$ o $r_e = (1 + r/M)^M - 1$. Si el interés se compone continuamente, entonces $P_0e^{rt} = P_0(1 + r_e)^t$ por lo que $e^{rt} = (1 + r_e)^t$ o $r_e = e^r - 1$. **(c)** 11,63 %

(d) 18,26 %

Sección 7.6 Ejercicios preliminares

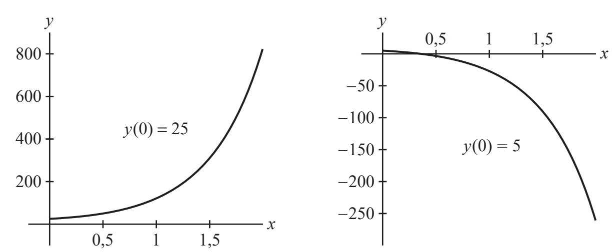
1. $y(t) = 5 - ce^{4t}$ para cualquier constante positiva c.

2. No **3.** Verdadero

4. La diferencia en temperatura entre un objeto que se está enfriando y la temperatura ambiente es decreciente. Por tanto, la tasa de enfriamiento, que es proporcional a esta diferencia, también es decreciente en magnitud.

Sección 7.6 Problemas

1. Solución general: $y(t) = 10 + ce^{2t}$; solución que cumple $y(0) = 25$: $y(t) = 10 + 15e^{2t}$; solución que cumple $y(0) = 5$: $y(t) = 10 - 5e^{2t}$



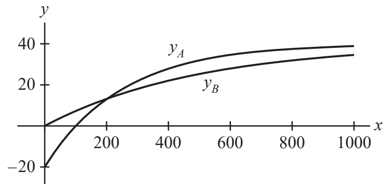
3. $y = -6 + 11e^{4x}$

5. **(a)** $y' = -0{,}02(y - 10)$ **(b)** $y = 10 + 90e^{-\frac{1}{50}t}$

(c) $100\ln 3$ s $\approx 109{,}8$ s

7. $\approx$ 5:50 AM **9.** $\approx 0{,}77$ min $= 46{,}6$ s

11. $500 \ln \frac{3}{2}$ s ≈ 203 s $= 3$ min 23 s



13. $-58{,}8$ m/s **15.** $-11{,}8$ m/s

17. (a) 17 563,94 \$ **(b)** 13,86 años

19. 120 000 \$ **21.** 8 %

23. (b) $t = \frac{1}{0{,}09} \ln\left(\frac{13{,}333{,}33}{3{,}333{,}33}\right) \approx 15{,}4$ años **(c)** No

25. (a) $N'(t) = k(1 - N(t)) = -k(N(t) - 1)$

(b) $N(t) = 1 - e^{-kt}$ **(c)** $\approx 64{,}63$ %

29. (a) $v(t) = \dfrac{-g}{k} + \left(v_0 + \dfrac{g}{k}\right)e^{-kt}$

Sección 7.7 Ejercicios preliminares

1. No es de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ **2.** No

Sección 7.7 Problemas

1. La regla de L'Hôpital no se puede aplicar.

3. La regla de L'Hôpital no se puede aplicar.

5. La regla de L'Hôpital no se puede aplicar.

7. La regla de L'Hôpital no se puede aplicar.

9. 0 **11.** El cociente es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; $-\dfrac{9}{2}$

13. El cociente es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; 0

15. El cociente es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; 0

17. $\dfrac{5}{6}$ **19.** $-\dfrac{3}{5}$ **21.** $-\dfrac{7}{3}$ **23.** $\dfrac{9}{7}$ **25.** $\dfrac{2}{7}$ **27.** 1 **29.** 2

31. -1 **33.** $\dfrac{1}{2}$ **35.** 0 **37.** $-\dfrac{2}{\pi}$ **39.** 1 **41.** No existe

43. 0 **45.** $\ln a$ **47.** e **49.** $e^{-3/2}$

51.

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos mx}{\cos nx} = \begin{cases} (-1)^{(m-n)/2}, & m, n \text{ par} \\ \text{no existe}, & m \text{ par}, n \text{ impar} \\ 0 & m \text{ impar}, n \text{ par} \\ (-1)^{(m-n)/2}\frac{m}{n}, & m, n \text{ impar} \end{cases}$$

53.

$$\lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

así $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^1 = e$; $x = 0{,}0005$

55. (a) $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$

(b) f es creciente para $0 < x < e$, es decreciente para $x > e$ y tiene un máximo en $x = e$. El valor máximo es $f(e) = e^{1/e} \approx 1{,}444668$.

57. Ninguna de las dos posibilidades.

59. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a}x^{-a} = 0$

63. (a) $1 \le 2 + \operatorname{sen} x \le 3$, por lo que:

$$\frac{x}{x^2+1} \le \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x^2+1} \le \frac{3x}{x^2+1}$$

y, según el teorema de compresión:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x^2+1} = 0$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(2+\operatorname{sen} x) \ge \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ y

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$, pero

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\cos x) + (2+\operatorname{sen} x)}{2x}$$

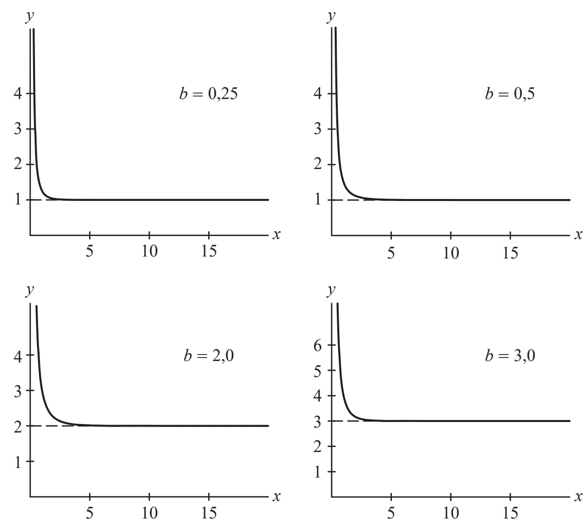
no existe, pues $\cos x$ oscila. Esto no contradice la regla de L'Hôpital pues el teorema, claramente, af rma que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

"siempre que el límite a la derecha exista".

65. (a) Aplicando el problema 64, se tiene que $G(b) = e^{H(b)}$. Por tanto, $G(b) = 1$ si $0 \le b \le 1$ y $G(b) = b$ si $b > 1$.

(b)



67. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k e^{1/x^2}}$. Sea $t = 1/x$. Cuando $x \to 0$, $t \to +\infty$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k e^{1/x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^k}{e^{t^2}} = 0$$

según el problema 66.

69. Para $x \ne 0$, $f'(x) = e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right)$. Aquí $P(x) = 2$ y $r = 3$. Suponga que $f^{(k)}(x) = \frac{P(x)e^{-1/x^2}}{x^r}$. Entonces:

$$f^{(k+1)}(x) = e^{-1/x^2}\left(\frac{x^3P'(x) + (2 - rx^2)P(x)}{x^{r+3}}\right)$$

que es de la forma que se pedía.

Además, según el problema 67, $f'(0) = 0$. Suponga que $f^{(k)}(0) = 0$. Entonces:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)e^{-1/x^2}}{x^{r+1}} =$$
$$= P(0) \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{r+1}} = 0$$

75. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. Para aplicar la regla de L'Hôpital en la evaluación de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, se debe saber que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$, pero para determinar la derivada de $\operatorname{sen} x$, se debe poder evaluar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

77. **(a)** $e^{-1/6} \approx 0{,}846481724$

x	1	0,1	0,01
$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$	0,841471	0,846435	0,846481

(b) 1/3

x	±1	±0,1	±0,01
$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}$	0,412283	0,334001	0,333340

Sección 7.8 Ejercicios preliminares

1. **(b)** y **(c)**

2. Cualquier ángulo $\theta < 0$ o $\theta > \pi$ funciona.

3. La suma de los dos ángulos no rectos en un triángulo rectángulo es $\pi/2$. Esto informa que las derivadas de las dos funciones son una la opuesta de la otra (pues su suma es igual a cero).

4. $\sqrt{3}$ **5.** $x = \pm 4u$

Sección 7.8 Problemas

1. 0 **3.** $\frac{\pi}{4}$ **5.** $\frac{\pi}{3}$ **7.** $\frac{\pi}{3}$ **9.** $\frac{\pi}{2}$ **11.** $-\frac{\pi}{4}$ **13.** π

15. No existe la inversa. **17.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **19.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **21.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **23.** $\frac{4}{3}$

25. $\sqrt{3}$ **27.** $\frac{1}{20}$ **29.** $\frac{5}{4}$ **31.** $\frac{1}{4\sqrt{15}}$

33. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1}(7x) = \frac{7}{\sqrt{1-(7x)^2}}$

35. $\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x^2) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

37. $\frac{d}{dx} x \tan^{-1} x = x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \tan^{-1} x$

39. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

41. $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t^2} + \operatorname{sen}^{-1} t\right) = \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}$

43. $\frac{d}{dx}\left((\tan^{-1} x)^3\right) = \frac{3(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}$

45. $\frac{d}{dt}(\cos^{-1} t^{-1} - \sec^{-1} t) = 0$

47. $\frac{d}{dt} \cos^{-1}(\ln x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

49. Sea $\theta = \cos^{-1} x$. Entonces $\cos\theta = x$ y se verif ca:

$$-\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dx} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)}$$

Además, $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}$. **53.** 7 **55.** $\frac{\pi}{6}$

57. Sea $u = x/3$. Entonces, $x = 3u$, $dx = 3\,du$, $9 + x^2 = 9(1+u^2)$, y:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{3\,du}{9(1+u^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$$

59. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ **61.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(4t) + C$ **63.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}t + C$

65. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}(2x) + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\csc^{-1}(2x) + C$

67. $\frac{1}{2}\sec^{-1} x^2 + C = -\frac{1}{2}\csc^{-1} x^2 + C$

69. $-\frac{1}{2}\ln^2(\cos^{-1} x) + C$ **71.** $2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$

73. $\frac{1}{2}e^{y^2} + C$ **75.** $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9} + C$ **77.** $-\frac{7^{-x}}{\ln 7} + C$

79. $\frac{1}{8}\tan^8\theta + C$ **81.** $-\sqrt{7-t^2} + C$

83. $\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \tan^{-1}(x/2) + C$ **85.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(4x) + C$

87. $-e^{-x} - 2x^2 + C$ **89.** $e^x - \frac{e^{3x}}{3} + C$

91. $-\sqrt{4-x^2} + 5\operatorname{sen}^{-1}(x/2) + C$ **93.** $\operatorname{sen}(e^x) + C$

95. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4x}{3}\right) + C$ **97.** $\frac{e^{7x}}{7} + \frac{3e^{5x}}{5} + e^{3x} + e^x + C$

99. $\frac{1}{3}\ln|x^3+2| + C$ **101.** $\ln|\operatorname{sen} x| + C$

103. $\frac{1}{8}(4\ln x + 5)^2 + C$ **105.** $\frac{3^{x^2}}{2\ln 3} + C$ **107.** $\frac{(\ln(\operatorname{sen} x))^2}{2} + C$

109. $\frac{2}{7}(t-3)^{7/2} + \frac{12}{5}(t-3)^{5/2} + 6(t-3)^{3/2} + C$

111. La integral def nida $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$ representa el área de la región por debajo de la mitad superior de la circunferencia unitaria, de 0 a x. La región está formada por un sector de la circunferencia y un triángulo rectángulo. El sector tiene un ángulo central de $\frac{\pi}{2} - \theta$, donde $\cos\theta = x$ y el triángulo rectángulo tiene una base de longitud x y una altura de $\sqrt{1-x^2}$.

113. Muestre que $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t^2} + t\operatorname{sen}^{-1} t\right) = \operatorname{sen}^{-1} t$.

Sección 7.9 Ejercicios preliminares

1. $\cosh x$ y $\operatorname{sech} x$ **2.** $\operatorname{senh} x$ y $\tanh x$

3. Paridad, identidades y fórmulas de derivación.

4. $\cosh x$, $\operatorname{senh} x$

Sección 7.9 Problemas

1.

x	-3	0	5
$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$-10{,}0179$	0	$74{,}203$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$10{,}0677$	1	$74{,}210$

3. senh x es siempre creciente y estrictamente creciente para $x \neq 0$; cosh x es creciente para $x \geq 0$ y estrictamente creciente para $x > 0$.

7. $\cosh x \ \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y =$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

9. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{senh}(9x) = 9\cosh(9x)$

11. $\dfrac{d}{dt} \cosh^2(9-3t) = -6\cosh(9-3t)\operatorname{senh}(9-3t)$

13. $\dfrac{d}{dx} \sqrt{\cosh x + 1} = \dfrac{1}{2}(\cosh x + 1)^{-1/2} \operatorname{senh} x$

15. $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\coth t}{1 + \tanh t} = -\dfrac{(\operatorname{csch} t^2 + 2\operatorname{csch} t \operatorname{sech} t)}{(1+\tanh t)^2}$

17. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{senh}(\ln x) = \dfrac{\cosh(\ln x)}{x}$

19. $\dfrac{d}{dx} \tanh(e^x) = e^x \operatorname{sech}^2(e^x)$

21. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{sech}(\sqrt{x}) = -\dfrac{1}{2}x^{-1/2} \operatorname{sech} \sqrt{x} \tanh \sqrt{x}$

23. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{sech} x \coth x = -\operatorname{csch} x \coth x$

25. $\dfrac{d}{dx} \cosh^{-1}(3x) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

27. $\dfrac{d}{dx} (\operatorname{senh}^{-1}(x^2))^3 = 3(\operatorname{senh}^{-1}(x^2))^2 \dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$

29. $\dfrac{d}{dx} e^{\cosh^{-1} x} = e^{\cosh^{-1} x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

31. $\dfrac{d}{dt} \tanh^{-1}(\ln t) = \dfrac{1}{t(1-(\ln t)^2)}$

35. $\frac{1}{3}\operatorname{senh} 3x + C$ **37.** $\frac{1}{2}\cosh(x^2+1) + C$

39. $-\frac{1}{2}\tanh(1-2x) + C$ **41.** $\frac{1}{2}\tanh^2 x + C$

43. $\ln \cosh x + C$ **45.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

47. $\dfrac{d}{dx} \tanh x = \dfrac{d}{dx} \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$

49. Observe que:

$$\frac{d}{dt}\cosh(\operatorname{senh}^{-1} t) = \operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1} t)\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{d}{dt}\sqrt{t^2+1}$$

así $\cosh(\operatorname{senh}^{-1} t)$ y $\sqrt{t^2+1}$ dif eren en una constante; sustituyendo $t = 0$, se obtiene que la constante es 0. Por tanto, $\cosh(\operatorname{senh}^{-1} t) = \sqrt{t^2+1}$.

53. $\cosh^{-1} 4 - \cosh^{-1} 2$ **55.** $\operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{3} + C$

57. $\tanh^{-1} \frac{1}{2} - \tanh^{-1} \frac{1}{3}$ **59.** $\frac{1}{4}\ln \frac{95}{63}$

61. Sea $x = \operatorname{senh}^{-1} t$. Entonces $\operatorname{senh} x = t$. Según la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ se tiene que $\cosh x = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 x} = \sqrt{1+t^2}$. Recuerde que $\cosh x > 0$ para todo x. Como:

$$\operatorname{senh} x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

se tiene que $x = \ln(\operatorname{senh} x + \cosh x)$. Finalmente, $\operatorname{senh}^{-1} t = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

63. Sea $A = \tanh^{-1} t$. Entonces:

$$t = \tanh A = \frac{\operatorname{senh} A}{\cosh A} = \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}}$$

Resolviendo en A, se obtiene:

$$A = \tanh^{-1} t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

65. (a) Según la ley de Galileo, $w = 500 + 10 = 510$ m/s. Según la ley de Einstein, $w = c \cdot \tanh(1{,}7 \times 10^{-6}) \approx 510$ m/s.

(b) Según la ley de Galileo, $u + v = 10^7 + 10^6 = 1{,}1 \times 10^7$ m/s. Según la ley de Einstein, $w \approx c \cdot \tanh(0{,}036679) \approx 1{,}09988 \times 10^7$ m/s.

69. (d)

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

(e) $k = \frac{150(78{,}545{,}5)}{100^2} = 1178{,}18$ lbs/mi

71. $s = y(M) - y(0) =$

$$= a\cosh\left(\frac{M}{a}\right) + C - (a\cosh 0 + C) = a\cosh\left(\frac{M}{a}\right) - a$$

(a) $\frac{ds}{da} = \cosh\left(\frac{M}{a}\right) - \frac{M}{a}\operatorname{senh}\left(\frac{M}{a}\right) - 1$

(b) $\frac{da}{dL} = \left(2\operatorname{senh}\left(\frac{M}{a}\right) - \frac{2M}{a}\cosh\left(\frac{M}{a}\right)\right)^{-1}$

(c) Por la regla de la cadena, $\frac{ds}{dL} = \frac{ds}{da} \cdot \frac{da}{dL}$. La fórmula para $\frac{ds}{dL}$ sigue a la sustitución de los resultados de las partes (a) y (b).

Capítulo 7 Repaso

1. (a) ninguna relación **(b)** ninguna relación **(c) (i):** $(2^a)^b = 2^{ab}$

(d) (iii): $2^{a-b}3^{b-a} = 2^{a-b}\left(\frac{1}{3}\right)^{a-b} = \left(\frac{2}{3}\right)^{a-b}$

3. (b): $(\ln 2)2^x$

5. $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x-1}$; dominio $\{x : x \neq 1\}$; rango: $\{y : y \neq 1\}$

7. $g(g(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$

9. **(a)** (iii) **(b)** (iv) **(c)** (ii) **(d)** (i) **11.** $\frac{1}{2}e$

13. $-36e^{-4x}$ **15.** $-\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$ **17.** $\frac{2}{s}\ln s$

19. $(4-2t)e^{4t-t^2}$ **21.** $\cot\theta$

23. $\frac{e^x-4}{e^x-4x}$ **25.** $\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x+\ln x}$ **27.** $-2^{1-y}\ln 2$

29. $-2\ln 7\cdot 7^{-2x}$ **31.** $\frac{1}{\sqrt{s^4-s^2}}$

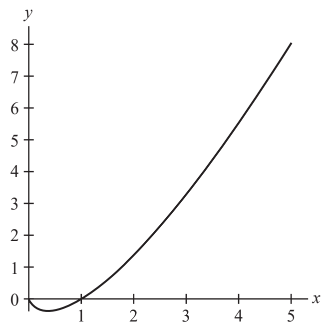
33. $-\frac{1}{|x|\csc^{-1}x\sqrt{x^2-1}}$ **35.** $1+\ln s$

37. $(\mathrm{sen}^{2t}\,t)(2\ln\mathrm{sen}\,t+2t\cot t)$ **39.** $2t\cosh(t^2)$

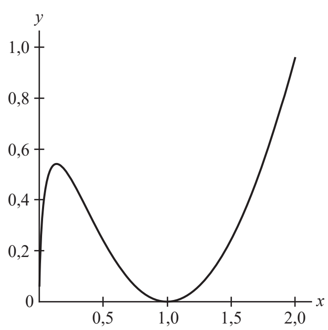
41. $\frac{e^x}{1-e^{2x}}$ **43.** $y=-\frac{1}{2}x+6$

47. Mínimo global en $x=\ln(2)$; ningún máximo.

49. Mínimo local en $x=e^{-1}$; ningún punto de inflexión; $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$; $\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$.



51. Mínimo local en $x=1$; máximo local en $x=e^{-2}$; punto de inflexión en $x=\frac{1}{e}$; $\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^2=0$; $\lim_{x\to\infty} x(\log x)^2=+\infty$.



53. $y'=\frac{(x+1)^3}{(4x-2)^2}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{8}{4x-2}\right)$

55. $y'=4e^{(x-1)^2}e^{(x-3)^2}(x-2)$

57. $y'=\frac{e^{3x}(x-2)^2}{(x+1)^2}\left(3+\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right)$

59. **(a)** $f'(u)=\dfrac{be^{b(a-u)}}{(1+e^{b(a-u)})^2}>0$

(b) $u=a+\dfrac{1}{b}\ln 2$

61. $\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$ **63.** $-\mathrm{sen}^{-1}(e^{-x})+C$

65. $\tan^{-1}(\ln t)+C$ **67.** $-\frac{1}{2}e^{9-2x}+C$

69. $\frac{1}{2}\cos(e^{-2x})+C$ **71.** $\frac{1}{4}(e^9-e)$ **73.** $\frac{1}{2}$

75. $\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)-\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ **77.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{senh}\,2$ **79.** $\frac{1}{2}\ln 2$

81. $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^{-1}x^2+C$ **83.** $\frac{1}{2(e^{-x}+2)^2}$ **85.** $\frac{1}{2}\ln 2$

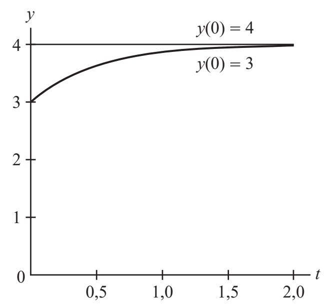
87. $\frac{1}{2}(\mathrm{sen}^{-1}x)^2+C$ **89.** $\frac{1}{4}\,\mathrm{senh}^4 x+C$ **91.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}(4\sqrt{2})$

93. **(a)** $y'(t)=-\frac{\ln 2}{24{,}5}y(t)$ **(b)** $y(365)\approx 0{,}0655$ g

95. 3938,5 año

97. $\frac{dk}{dT}\approx 12{,}27$ hr^{-1}-K^{-1}; variación aproximada en k cuando T aumenta de 500 a 510: 122,7 hr^{-1}.

99. Solución cumpliendo $y(0)=3$: $y(t)=4-e^{-2t}$; solución cumpliendo $y(0)=4$: $y(t)=4$



101. **(a)** 12

(b) $+\infty$, si $y(0)>12$; 12, si $y(0)=12$; $-\infty$, si $y(0)<12$

(c) -3

103. $P'(t)=0{,}05P(t)-2000$ **105.** $20\ln\left(\frac{20}{19}\right)\approx 1{,}025$ años

107. Sí; el valor actual de los ahorros es 1 134 704 \$. La mayor tasa de interés para la que se trata de una buena inversión es sobre el 10,66 %.

109. 4 **111.** 0 **113.** 3 **115.** $\ln 2$ **117.** $\frac{1}{6}$ **119.** 2

121. Cuando $x\to+\infty$, tanto $2x-\mathrm{sen}\,x$ como $3x+\cos 2x$ tienden hacia infinito por lo que se puede aplicar la regla de L'Hôpital a $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\mathrm{sen}\,x}{3x+\cos 2x}$; sin embargo, el límite resultante, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\cos x}{3-2\,\mathrm{sen}\,2x}$, no existe debido a la oscilación de $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\mathrm{sen}\,x}{3x+2\cos x}=\frac{2}{3}$.

123. e^4

127. Sea $gd(y)=\tan^{-1}(\mathrm{senh}\,y)$. Entonces:

$$\frac{d}{dy}gd(y)=\frac{1}{1+\mathrm{senh}^2 y}\cosh y=\frac{1}{\cosh y}=\mathrm{sech}\,y$$

129. Sea $x=gd(y)=\tan^{-1}(\mathrm{senh}\,y)$. Resolviendo en y, se tiene $y=\mathrm{senh}^{-1}(\tan x)$. Por tanto:

$$gd^{-1}(y)=\mathrm{senh}^{-1}(\tan y)$$

Capítulo 8

Sección 8.1 Ejercicios preliminares

1. La fórmula de integración por partes se deduce de la regla del producto.

3. La transformación de $v'=x$ en $v=\frac{1}{2}x^2$ aumenta la potencia de x y hace que la nueva integral sea más complicada que la original.

Sección 8.1 Problemas

1. $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$ **3.** $e^x(2x+7)+C$

5. $\frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C$ **7.** $-e^{-x}(4x+1)+C$

9. $\frac{1}{25}(5x-1)e^{5x+2}+C$ **11.** $\frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

13. $-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$

15. $-\frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$

17. $-\frac{1}{26}e^{-5x}(\cos(x) + 5\operatorname{sen}(x)) + C$

19. $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$ **21.** $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$

23. $x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right] + C$

25. $x\tan x - \ln|\sec x| + C$

27. $x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$

29. $x\sec^{-1} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

31. $\dfrac{3^x(\operatorname{sen} x + \ln 3\cos x)}{1+(\ln 3)^2} + C$

33. $(x^2+2)\operatorname{senh} x - 2x\cosh x + C$

35. $x\tanh^{-1} 4x + \frac{1}{8}\ln|1-16x^2| + C$

37. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$

39. $\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$

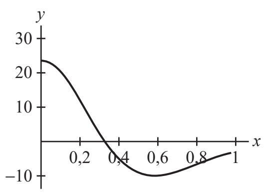
41. $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C$

43. $\operatorname{sen} x\ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + C$

45. $2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$

47. $\frac{1}{4}(\ln x)^2[2\ln(\ln x) - 1] + C$

49. $\frac{1}{16}(11e^{12}+1)$



51. $2\ln 2 - \frac{3}{4}$ **53.** $\frac{e^{\pi}+1}{2}$

55. $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C.$

57. $\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx$

59. Use integración por partes, con $u = \ln x$ y $v' = \sqrt{x}$.

61. Use sustitución, seguida de manipulación algebraica, con $u = 4 - x^2$ y $du = -2x\,dx$.

63. Use sustitución con $u = x^2 + 4x + 3$, $\frac{du}{2} = x + 2\,dx$.

65. Use integración por partes, con $u = x$ y $v' = \operatorname{sen}(3x+4)$.

67. $x(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}^{-1} x - 2x + C$

69. $\frac{1}{4}x^4\operatorname{sen}(x^4) + \frac{1}{4}\cos(x^4) + C$

71. $2\pi(e^2+1)$ **73.** $42,995

75. Para $k=2$: $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$; para $k=3$: $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$.

77. Use integración por partes con $u = x$ y $v' = b^x$.

79. **(b)** $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ es más simple y da lugar a $\frac{1}{2}(x^2\tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x) + C$.

81. Un ejemplo de una función que cumpla estas propiedades para algún λ es $f(x) = \operatorname{sen}\pi x$.

83. **(a)** $I_n = \frac{1}{2}x^{n-1}\operatorname{sen}(x^2) - \frac{n-1}{2}J_{n-2}$;
(c) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2) + C$

Sección 8.2 Ejercicios preliminares

1. Reescriba $\operatorname{sen}^5 x = \operatorname{sen} x\operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)^2$ y, a continuación, sustituya $u = \cos x$.

3. No, no se necesita una fórmula de reducción porque la función seno se encuentra elevada a una potencia impar.

5. La segunda integral necesita utilizar fórmulas de reducción y, por tanto, más trabajo.

Sección 8.2 Problemas

1. $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

3. $-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta + C$

5. $-\frac{1}{4}\cos^4 t + \frac{1}{6}\cos^6 t + C$ **7.** 2

9. $\frac{1}{4}\cos^3 y\operatorname{sen} y + \frac{3}{8}\cos y\operatorname{sen} y + \frac{3}{8}y + C$

11. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x\cos x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{16}x + C$

13. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{1}{15}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{2}{15}\cos x + C$

15. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

17. $\frac{1}{5}\tan x\sec^4 x - \frac{1}{15}\tan(x)\sec^2 x - \frac{2}{15}\tan x + C$

19. $-\frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\csc x| + C$ **21.** $-\frac{1}{6}\cot^6 x + C$

23. $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$

25. $\frac{1}{12}(\cos^3 x\operatorname{sen} x + \frac{3}{2}(x + \operatorname{sen} x\cos x)) + C$

27. $\frac{1}{5\pi}\operatorname{sen}^5(\pi\theta) - \frac{1}{7\pi}\operatorname{sen}^7(\pi\theta) + C$

29. $-\frac{1}{12}\operatorname{sen}^3(3x)\cos(3x) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(3x)\cos(3x) + \frac{9}{8}x + C$

31. $\frac{1}{2}\cot(3-2x) + C$ **33.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$

35. $\frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{3}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

37. $\frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$

39. $-\frac{1}{9}\csc^9 x + \frac{2}{7}\csc^7 x - \frac{1}{5}\csc^5 x + C$ **41.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C$

43. $\frac{1}{6}\cos^2(t^2)\operatorname{sen}(t^2) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t^2) + C$

45. $\frac{1}{2}\cos(\operatorname{sen} t)\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + C$

47. π **49.** $\frac{8}{15}$ **51.** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ **53.** $\ln 2$

55. $\frac{8}{3}$ **57.** $-\frac{6}{7}$ **59.** $\frac{8}{15}$

61. En primer lugar, observe $\operatorname{sen} 4x = 2\operatorname{sen} 2x\cos 2x =$
$= 2\operatorname{sen} 2x(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = 2\operatorname{sen} 2x - 4\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen}^2 x =$
$= 2\operatorname{sen} 2x - 8\operatorname{sen}^3 x\cos x$. Entonces $\frac{1}{32}(12x - 8\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x) + C =$
$= \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + C =$
$= \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + C.$

63. $\frac{\pi^2}{2}$ **65.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x\cos 2x + C$

67. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{48}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2x\cos 2x + \frac{1}{48}\cos^2 2x\operatorname{sen} 2x + C$

69. Use la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y la sustitución $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$.

71. **(a)** $I_0 = \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^0 x\,dx = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx = 1$

(b) $\frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx$

(c) $I_2 = \frac{\pi}{4}$; $I_3 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3\pi}{16}$; $I_5 = \frac{8}{15}$

73. $\cos(x) - \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \ln|\csc(x) - \cot(x)| + C$

77. Use integración por partes con $u = \sec^{m-2} x$ y $v' = \sec^2 x$.

Sección 8.3 Ejercicios preliminares

1. **(a)** $x = 3\operatorname{sen}\theta$ **(b)** $x = 4\sec\theta$ **(c)** $x = 4\tan\theta$

(d) $x = \sqrt{5}\sec\theta$

3. $2x\sqrt{1-x^2}$

Sección 8.3 Problemas

1. **(a)** $\theta + C$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

3. **(a)** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$

(b) $\frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$ **(c)** $\ln|\sqrt{4x^2+9} + 2x| + C$

5. $\frac{8}{\sqrt{5}}\arccos\left(\frac{\sqrt{16-5x^2}}{4}\right) + \frac{x\sqrt{16-5x^2}}{2} + C$

7. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$ **9.** $\frac{-x}{4\sqrt{x^2-4}} + C$

11. $\sqrt{x^2-4} + C$

13. **(a)** $-\sqrt{1-x^2}$ **(b)** $\frac{1}{8}(\operatorname{arc\,sen} x - x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2))$

(c) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$

(d) $\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8}\right) + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,sen}(x)$

15. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$

17. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right| + C$ **19.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + C$

21. $-\frac{\sqrt{5-y^2}}{5y} + C$ **23.** $\frac{1}{5}\ln\sqrt{25x^2+25x} + C$

25. $\frac{1}{16}\sec^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{\sqrt{z^2-4}}{8z^2} + C$

27. $\frac{1}{12}x\sqrt{6x^2-49} + \frac{1}{2}\ln x + \sqrt{x^2-1} + C$

29. $\frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{t}{18(t^2+9)} + C$

31. $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$

33. Use la sustitución $x = \sqrt{a}\,u$.

35. **(a)** $x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 4$

(b) $\ln\left|\sqrt{u^2+4} + u\right| + C$

(c) $\ln\left|\sqrt{(x-2)^2+4} + x - 2\right| + C$

37. $\ln\left|\sqrt{x^2+4x+13} + x + 2\right| + C$

39. $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln 12x + 1 + 2\sqrt{6}\sqrt{x+6x^2} + C$

41. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-4x+3} + \frac{7}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right| + C$

43. Empiece multiplicando por -1, a continuación complete el cuadrado y realice una sustitución en u ($u = (x+3)$; $du = dx$); f nalmente aplique sustitución trigonométrica.

45. Use uno de los siguientes métodos trigonométricos: reescriba $\operatorname{sen}^3 x = (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x$ y considere $u = \cos x$, o reescriba $\cos^3 x = (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x$ y considere $u = \operatorname{sen} x$.

47. Use substitución trigonométrica, con $x = 3\operatorname{sen}\theta$ o substitución con $x = 3u$ y $dx = 3\,du$.

49. Las técnicas que se han estudiado hasta el momento son insuf cientes para resolver esta integral.

51. Las técnicas que se han estudiado hasta el momento son insuf cientes para resolver esta integral. Esta integral se debe resolver utilizando una técnica denominada de fracciones parciales.

53. $x\sec^{-1} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

55. $x(\ln(x^2+1) - 2) + 2\tan^{-1} x + C$

57. $\frac{\pi}{4}$ **59.** $4\pi\left[\sqrt{3} - \ln\left|2+\sqrt{3}\right|\right]$

61. $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

63. **(a)** $1{,}789\times 10^6\ \frac{V}{m}$ **(b)** $3{,}526\times 10^6\ \frac{V}{m}$

Sección 8.4 Ejercicios preliminares

1. **(a)** $x = \operatorname{senh} t$ **(b)** $x = 3\operatorname{senh} t$ **(c)** $3x = \operatorname{senh} t$

3. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Sección 8.4 Problemas

1. $\frac{1}{3}\operatorname{senh} 3x + C$ **3.** $\frac{1}{2}\cosh(x^2+1) + C$

5. $-\frac{1}{2}\tanh(1-2x) + C$ **7.** $\frac{\tanh^2 x}{2} + C$ **9.** $\ln\cosh x + C$

11. $\ln|\operatorname{senh} x| + C$ **13.** $\frac{1}{16}\operatorname{senh}(8x-18) - \frac{1}{2}x + C$

15. $\frac{1}{32}\operatorname{senh} 4x - \frac{1}{8}x + C$ **17.** $\cosh^{-1} x + C$

19. $\frac{1}{5}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{5x}{4}\right) + C$ **21.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\cosh^{-1} x + C$

23. $2\tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **25.** $\operatorname{senh}^{-1} 1$

27. $\frac{1}{4}\left(\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) - \operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ **29.** $\cosh^{-1} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

31. Considere $x = \operatorname{senh} t$ para la primera fórmula y $x = \cosh t$ para la segunda.

33. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\ln\left|\frac{x}{4} + \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\right| + C$

35. Use integración por partes con $u = \cosh^{n-1} x$ y $v' = \cosh x$ para empezar la demostración.

37. $-\frac{1}{2}\left(\tanh^{-1} x\right)^2 + C$ **39.** $x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C$

41. $u = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$. De aquí se tiene que $\cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$, $\operatorname{senh} x = \frac{2u}{1-u^2}$ y $dx = \frac{2du}{1-u^2}$.

43. $\int du = u + C = \tanh\frac{x}{2} + C$

45. Sea $gd(y) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} y)$. Entonces:

$$\frac{d}{dy}gd(y) = \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2 y}\cosh y = \frac{1}{\cosh y} = \operatorname{sech} y$$

donde se ha utilizado la identidad $1 + \operatorname{senh}^2 y = \cosh^2 y$.

47. Sea $x = gd(y) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} y)$. Resolviendo en y se tiene $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$. Por tanto, $gd^{-1}(y) = \operatorname{senh}^{-1}(\tan y)$.

49. Sea $x = it$. Entonces $\cosh^2 x = (\cosh(it))^2 = \cos^2 t$ y $\operatorname{senh}^2 x = (\operatorname{senh}(it))^2 = i^2\operatorname{sen}^2 t = -\operatorname{sen}^2 t$. Por tanto, $1 = \cosh^2(it) - \operatorname{senh}^2(it) = \cos^2 t - (-\operatorname{sen}^2 t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$, como se quería probar.

Sección 8.5 Ejercicios preliminares

1. No, $f(x)$ no puede ser una función racional porque la integral de una función racional no puede contener un término con un exponente no entero, como $\sqrt{x+1}$

3. (a) El cuadrado ya está completo; irreducible.

(b) El cuadrado ya está completo; factores como $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

(c) $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$; irreducible.

(d) $x^2+4x+2=(x+2)^2-2$; factores como $(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$.

Sección 8.5 Problemas

1. (a) $\dfrac{x^2+4x+12}{(x+2)(x^2+4)}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2+4}$

(b) $\dfrac{2x^2+8x+24}{(x+2)^2(x^2+4)}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{-x+2}{x^2+4}$

(c) $\dfrac{x^2-4x+8}{(x-1)^2(x-2)^2}=\dfrac{-8}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}+\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{5}{(x-1)^2}$

(d) $\dfrac{x^4-4x+8}{(x+2)(x^2+4)}=x-2+\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{4x-4}{x^2+4}$

3. -2 **5.** $\frac{1}{9}(3x+4\ln(3x-4))+C$

7. $\frac{x^3}{3}+\ln(x+2)+C$ **9.** $-\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-4|+C$

11. $\ln|x|-\ln|2x+1|+C$ **13.** $x-3\,\text{arc tan}\,\frac{x}{3}+C$

15. $2\ln|x+3|-\ln|x+5|-\frac{2}{3}\ln|3x-2|+C$

17. $3\ln|x-1|-2\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C$

19. $2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-2\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C$

21. $\ln(x)-\ln(x+2)+\frac{2}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}+C$

23. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right|-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right|+C$

25. $\frac{5}{2x+5}-\frac{5}{4(2x+5)^2}+\frac{1}{2}\ln(2x+5)+C$

27. $-\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

29. $x+\ln|x|-3\ln|x+1|+C$

31. $2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-3\tan^{-1}x+C$

33. $\frac{1}{25}\ln|x|-\frac{1}{50}\ln|x^2+25|+C$

35. $6x-14\ln x+3+2\ln x-1+C$

37. $-\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{10}\ln|x^2+9|-\frac{4}{15}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

39. $\frac{1}{64}\ln|x|-\frac{1}{128}\ln|x^2+8|+\frac{1}{16(x^2+8)}+C$

41. $\frac{1}{6}\ln|x+2|-\frac{1}{12}\ln|x^2+4x+10|+C$

43. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-5\dfrac{5}{2(x^2+2x+5)}-3\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

45. $\frac{1}{2}\,\text{arc tan}(x^2)+C$ **47.** $\ln(e^x-1)-x+C$

49. $2\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}-1|-\ln|\sqrt{x}+1|+C$

51. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right|+C=\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right|+C$

53. $-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)+C=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$

55. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\,\text{sen}\,4x\cos 4x+C$

57. $\frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{18(x^2+9)}+C$

59. $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{2}{3}\sec^3 x+\sec x+C$

61. $x\ln(x^2+1)+(x+1)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)-4x-2\,\text{arc tan}\,x+C$

63. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$

65. $\frac{2}{3}\tan^{-1}(x^{3/2})+C$

67. Si $\theta=2\tan^{-1}t$, entonces $d\theta=2\,dt/(1+t^2)$. También se tiene que $\cos(\frac{\theta}{2})=1/\sqrt{1+t^2}$ y $\text{sen}(\frac{\theta}{2})=t/\sqrt{1+t^2}$. Para hallar $\cos\theta$, se aplica la identidad para el ángulo doble $\cos\theta=1-2\,\text{sen}^2(\frac{\theta}{2})$. De aquí se obtiene $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Para hallar $\text{sen}\,\theta$, se aplica la identidad para el ángulo doble $\text{sen}\,\theta=2\,\text{sen}(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$. De aquí se obtiene $\text{sen}\,\theta=\frac{2t}{1+t^2}$. En consecuencia:

$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta+\frac{3}{4}\,\text{sen}\,\theta}=-\frac{4}{5}\ln\left|2-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|+\frac{4}{5}\ln\left|1+2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|+C$$

69. Utilizando descomposición en fracciones parciales:

$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{\frac{1}{a-b}}{x-a}+\frac{\frac{1}{b-a}}{x-b}$.

Esto se puede utilizar para probar que $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$.

71. $\frac{2}{x-6}+\frac{1}{x+2}$

Sección 8.6 Ejercicios preliminares

1. (a) La integral es convergente.

(b) La integral es divergente.

(c) La integral es divergente.

(c) La integral es convergente.

3. Cualquier valor de b que verif que $|b|\geq 2$ daría lugar a una integral impropia.

5. Saber que una integral es menor que una integral divergente no permite obtener ninguna conclusión a partir del criterio de comparación.

Sección 8.6 Problemas

1. (a) Impropia. La función $x^{-1/3}$ es inf nita en 0.

(b) Impropia. Intervalo inf nito de integración.

(c) Impropia. Intervalo inf nito de integración.

(d) Propia. La función e^{-x} es continua sobre el intervalo f nito $[0,1]$.

(e) Impropia. La función $\sec x$ es inf nita en $\frac{\pi}{2}$.

(f) Impropia. Intervalo inf nito de integración.

(g) Propia. La función $\text{sen}\,x$ es continua sobre el intervalo f nito $[0,1]$.

(h) Propia. La función $1/\sqrt{3-x^2}$ es continua sobre el intervalo f nito $[0,1]$.

(i) Impropia. Intervalo inf nito de integración.

(j) Impropia. La función $\ln x$ es inf nita en 0.

3. $\int_1^{+\infty}x^{-2/3}\,dx=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_1^R x^{-2/3}\,dx=\lim\limits_{R\to+\infty}3\left(R^{1/3}-1\right)=+\infty$

5. La integral no es convergente.

7. La integral es convergente; $I = 10\,000e^{0,0004}$.

9. La integral no es convergente.

11. La integral es convergente; $I = 4$.

13. La integral es convergente; $I = \frac{1}{8}$.

15. La integral es convergente; $I = 2$.

17. La integral es convergente; $I = 1{,}25$.

19. La integral es convergente; $I = \frac{1}{3e^{12}}$.

21. La integral es convergente; $I = \frac{1}{3}$.

23. La integral es convergente; $I = 2\sqrt{2}$.

25. La integral no es convergente.

27. La integral es convergente; $I = \frac{1}{2}$.

29. La integral es convergente; $I = \frac{1}{2}$.

31. La integral es convergente; $I = \frac{\pi}{2}$.

33. La integral no es convergente. **35.** La integral no es convergente.

37. La integral es convergente; $I = -1$.

39. La integral no es convergente.

41. (a) La descomposición en fracciones parciales da lugar a $\frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \frac{dx}{x-3} - \frac{dx}{x-2}$. De aquí se tiene $\int_4^R \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln\left|\frac{R-3}{R-2}\right| - \ln\frac{1}{2}$
(b) $I = \lim_{R\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{R-3}{R-2}\right| - \ln\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$

43. La integral no es convergente. **45.** La integral no es convergente.

47. La integral es convergente; $I = 0$.

49. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{1/3}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{1/3}} + \int_0^1\frac{dx}{x^{1/3}} = 0$

51. La integral es convergente para $a < 0$.

53. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

55. $\frac{1}{x^3+4} \le \frac{1}{x^3}$. En consecuencia, por el criterio de comparación, la integral converge.

57. Para $x \ge 1$, $x^2 \ge x$, por lo que $-x^2 \le -x$ y $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Así, $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge, así $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge por el criterio de comparación. Finalmente se obtiene la convergencia de la integral del enunciado si se expresa como la suma:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

59. Sea $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{x^2}$. Como $f(x) \le \dfrac{2}{x^2}$ y $\displaystyle\int_1^{\infty} 2x^{-2}\,dx = 2$, se tiene que $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1-\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ converge por el criterio de comparación.

61. La integral es convergente.

63. La integral no es convergente.

65. La integral es convergente.

67. La integral no es convergente.

69. La integral es convergente.

71. La integral es convergente.

73. La integral no es convergente.

75. Tanto $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^{1/2}(x+1)}$ como $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/2}(x+1)}$ son convergentes, por tanto J también es convergente.

77. $\frac{250}{0{,}07}$ **79.** 2 000 000 $

81. (a) π **(b)** $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$ es divergente.

83. $W = \lim_{T\to+\infty} CV^2\left(\frac{1}{2} - e^{-T/RC} + \frac{1}{2}e^{-2T/RC}\right) =$
$= CV^2\left(\frac{1}{2} - 0 + 0\right) = \frac{1}{2}CV^2$

85. El integrando es inf nito en el límite superior de integración, $x = \sqrt{2E/k}$, por lo que la integral es impropia.
$T = \lim_{R\to\sqrt{2E/k}} T(R) = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\operatorname{sen}^{-1}(1) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

87. $Lf(s) = \dfrac{-1}{s^2+\alpha^2}\lim_{t\to+\infty} e^{-st}(s\operatorname{sen}(\alpha t) + \alpha\cos(\alpha t)) - \alpha$

89. $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ **91.** $J_n = \frac{n}{\alpha}J_{n-1} = \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

93. $E = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^{\infty}\frac{\nu^3}{e^{\alpha\nu}-1}\,d\nu$. Como $\alpha > 0$ y $8\pi h/c^3$ es una constante, E es f nita según el problema 92.

95. Como $t > \ln t$ para $t > 2$, $F(x) = \displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln t} > \int_2^x\frac{dt}{t} > \ln x$. Por tanto, $F(x)\to+\infty$ cuando $x\to+\infty$. Además, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x = \infty$. Así, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)}$ es de la forma ∞/∞ y se puede aplicar la regla de L'Hôpital. Por último, $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$.

97. La integral es absolutamente convergente. Use el criterio de comparación con $\frac{1}{x^2}$.

Sección 8.7 Ejercicios preliminares

1. No, $p(x) \ge 0$ no se cumple. **3.** $p(x) = 4e^{-4x}$

Sección 8.7 Problemas

1. $C = 2$; $P(0 \le X \le 1) = \frac{3}{4}$ **3.** $C = \frac{1}{\pi}$; $P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

5. $C = \frac{2}{\pi}$; $P(-\frac{1}{2} \le X \le 1) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

7. $\int_1^{+\infty} 3x^{-4} = 1$; $\mu = \frac{3}{2}$

9. La integración conf rma que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{50}e^{-t/50} = 1$

11. $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}2231$ **13.** $\frac{1}{2}\left(2 - 10e^{-2}\right) \approx 0{,}32$

15. $F(-\frac{2}{3}) - F(-\frac{13}{6}) \approx 0{,}2374$ **17. (a)** $\approx 0{,}8849$ **(b)** $\approx 0{,}6554$

19. $1-F(z)$ y $F(-z)$ son la misma área, pero en colas opuestas de la función de distribución. Manipulación algebraica simple sobre la función de distribución (acumulada) de la ley normal prueba que
$P(\mu - r\sigma \le X \le \mu + r\sigma) = 2F(r) - 1$

21. $\approx 0{,}0062$ **23.** $\mu = 5/3$; $\sigma = \sqrt{10/3}$ **25.** $\mu = 3$; $\sigma = 3$

27. (a) $f(t)$ es la fracción de átomos iniciales que están presentes en el instante t. Por tanto, la fracción de átomos que se desintegran será la tasa de variación del número total de átomos. Sobre un pequeño intervalo, se trata simplemente de $-f'(t)\Delta t$.

(b) La fracción de átomos que se desintegra a lo largo de un intervalo arbitrariamente pequeño es equivalente a la probabilidad de que un átomo concreto se desintegre a lo largo de ese mismo intervalo. Por tanto, la función de densidad de probabilidad resulta $-f'(t)$.

(c) $\int_0^{+\infty} -tf'(t)\,dt = \frac{1}{k}$

Sección 8.8 Ejercicios preliminares

1. $T_1 = 6$; $T_2 = 7$

3. La regla Trapezoidal integra funciones lineales de forma exacta, por lo que error será cero.

5. Las dos interpretaciones gráf cas de la regla del punto medio son la suma de las áreas de los rectángulos basados en el punto medio y la suma de las áreas de los trapezoides tangenciales.

Sección 8.8 Problemas

1. $T_4 = 2{,}75$; $M_4 = 2{,}625$ **3.** $T_6 = 64{,}6875$; $M_6 \approx 63{,}2813$

5. $T_6 \approx 1{,}4054$; $M_6 \approx 1{,}3769$ **7.** $T_6 = 1{,}1703$; $M_6 = 1{,}2063$

9. $T_4 \approx 0{,}3846$; $M_5 \approx 0{,}3871$ **11.** $T_5 = 1{,}4807$; $M_5 = 1{,}4537$

13. $S_4 \approx 5{,}2522$ **15.** $S_6 \approx 1{,}1090$ **17.** $S_4 \approx 0{,}7469$

19. $S_8 \approx 2{,}5450$ **21.** $S_10 \approx 0{,}3466$ **23.** $\approx 2{,}4674$

25. $\approx 1{,}8769$ **27.** $\approx 608{,}611$

29. (a) Suponiendo que la celeridad del tsunami es una función continua, a x millas de la costa la celeridad es $\sqrt{15f(x)}$. Si se considera una distancia inf nitesimalmente pequeña, dx, el tiempo T necesario para que el tsunami recorra esta distancia es $\dfrac{dx}{\sqrt{15f(x)}}$. De aquí se obtiene que $T = \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{15f(x)}}$.

(b) $\approx 3{,}347$ horas.

31. (a) Como x^3 es convexa en $[0,2]$, T_6 es demasiado grande.

(b) Se tiene que $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$. Como $|f''(x)| = |6x|$ es *creciente* en $[0,2]$, su valor máximo se tiene en $x = 2$ y se puede considerar $K_2 = |f''(2)| = 12$. Así, $\text{Error}(T_6) \le \frac{2}{9}$.

(c) $\text{Error}(T_6) \approx 0{,}1111 < \frac{2}{9}$

33. T_10 sobrestima la integral. $\text{Error}(T_{10}) \le 0{,}045$.

35. M_10 sobrestima la integral. $\text{Error}(M_{10}) \le 0{,}0113$

37. $N \ge 10^3$; Error $\approx 3{,}333 \times 10^{-7}$

39. $N \ge 750$; Error $\approx 2{,}805 \times 10^{-7}$

41. $\text{Error}(T_{10}) \le 0{,}0225$; $\text{Error}(M_{10}) \le 0{,}01125$

43. $S_8 \approx 4{,}0467$; $N \ge 23$

45. $\text{Error}(S_{40}) \le 1{,}017 \times 10^{-4}$.

47. $N \ge 305$ **49.** $N \ge 186$

51. (a) El valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ sobre el intervalo $[0,1]$ es 24.

(b) $N \ge 20$; $S_{20} \approx 0{,}785398$; $|0{,}785398 - \frac{\pi}{4}| \approx 1{,}55 \times 10^{-10}$.

53. (a) Observe que $|f''(x)| = |2\cos(x^2) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)|$; de aquí se obtiene la demostración.

(b) Cuando $K_2 = 2$, $\text{Error}(M_N) \le \frac{1}{4N^2}$.

(c) $N \ge 16$

55. $\text{Error}(T_4) \approx 0{,}1039$; $\text{Error}(T_8) \approx 0{,}0258$; $\text{Error}(T_{16}) \approx 0{,}0064$; $\text{Error}(T_{32}) \approx 0{,}0016$; $\text{Error}(T_{64}) \approx 0{,}0004$. Es casi dos veces el error en M_N.

57. $S_2 = \frac{1}{4}$. Es el valor exacto de la integral.

59. $T_N = \dfrac{r(b^2 - a^2)}{2} + s(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

61. (a) Este resultado se obtiene observando que los extremos interiores con numeración par coinciden:

$$\sum_{i=0}^{(N-2)/2} S_2^{2j} = \frac{b-a}{6}\left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots\right]$$
$$= \frac{b-a}{6}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{N-1} + y_N\right] = S_N.$$

(b) Si $f(x)$ es un polinomio cuadrático, entonces por el apartado (a) se tiene:

$$S_N = S_2^0 + S_2^2 + \cdots + S_2^{N-2} = \int_a^b f(x)\,dx$$

63. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, un polinomio cúbico cualquiera. Entonces, $f^{(4)}(x) = 0$, por lo que se puede considerar $K_4 = 0$. De aquí se obtiene $\text{Error}(S_N) \le \frac{0}{180N^4} = 0$. Dicho de otro modo, S_N es exacta para todo polinomio cúbico y para todo N.

Capítulo 8 Repaso

1. (a) (v) **(b)** (iv) **(c)** (iii) **(d)** (i) **(e)** (ii)

3. $\frac{\operatorname{sen}^9\theta}{9} - \frac{\operatorname{sen}^{11}\theta}{11} + C$

5. $\frac{\tan\theta\sec^5\theta}{6} - \frac{7\tan\theta\sec^3\theta}{24} + \frac{\tan\theta\sec\theta}{16} + \frac{1}{16}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$

7. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \sec^{-1}x + C$ **9.** $2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

11. $-\frac{\tan^{-1}x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$

13. $\frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32} \approx 8{,}50$ **15.** $\frac{\cos^{12}6\theta}{72} - \frac{\cos^{10}6\theta}{60} + C$

17. $5\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$

19. $\frac{\tan^3\theta}{3} + \tan\theta + C$ **21.** $\approx 1{,}0794$

23. $-\frac{\cos^5\theta}{5} + \frac{2\cos^3\theta}{3} - \cos\theta + C$ **25.** $-\frac{1}{4}$

27. $\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C$

29. $\frac{\operatorname{sen}^6\theta}{6} - \frac{\operatorname{sen}^8\theta}{8} + C$ **31.** $-\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x + C$

33. $\approx 0{,}4202$ **35.** $\frac{1}{49}\ln\left|\frac{t+4}{t-3}\right| - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{t-3} + C$

37. $\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2} + C$

39. $$\int \frac{dx}{x^{3/2} + ax^{1/2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + C & a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{-a}}\right| + C & a < 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{x}} + C & a = 0 \end{cases}$$

41. $\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} + C$

43. $-\ln|x-2| - 2\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 4\right) + C$

45. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+4}{3}\right) + C$ **47.** $\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} + C$

49. $-\frac{\left(x^2+4\right)^{3/2}}{48x^3} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{16x} + C$ **51.** $-\frac{1}{9}e^{4-3x}(3x+4) + C$

53. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$

55. $\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

57. $x\ln\left(x^2+9\right) - 2x + 6\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

59. $\frac{1}{2}\operatorname{senh}2$ **61.** $t + \frac{1}{4}\coth(1-4t) + C$ **63.** $\frac{\pi}{3}$

65. $\tan^{-1}(\tanh x) + C$

67. (a) $I_n = \int \frac{x^n}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^{n-2}(x^2+1-1)}{x^2+1}\,dx =$

$= \int x^{n-2}\,dx - \int \frac{x^{n-2}}{x^2+1}\,dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$

(b) $I_0 = \tan^{-1}x + C$; $I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; $I_2 = x - \tan^{-1}x + C$;
$I_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; $I_4 = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x + C$;
$I_5 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

(c) Realice la demostración por inducción; pruebe que funciona para $n = 1$, a continuación suponga que funciona para $n = k$ y use este resultado para demostrar que funciona para $n = k+1$.

69. $\frac{3}{4}$ **71.** $C = 2$; $p(0 \le X \le 1) = 1 - \frac{2}{e}$

73. (a) 0,1587 **(b)** 0,49997

75. La integral converge; $I = \frac{1}{2}$.

77. La integral converge; $I = 3\sqrt[3]{4}$.

79. La integral converge; $I = \frac{\pi}{2}$.

81. La integral no es convergente.

83. La integral no es convergente.

85. La integral es convergente.

87. La integral es convergente.

89. La integral es convergente. **91.** π **95.** $\frac{2}{(s-\alpha)^3}$

97. (a) T_N es menor y M_N es mayor que la integral.

(b) M_N es menor y T_N es mayor que la integral.

(c) M_N es menor y T_N es mayor que la integral.

(d) T_N es menor y M_N es mayor que la integral.

99. $M_5 \approx 0{,}7481$ **101.** $M_4 \approx 0{,}7450$ **103.** $S_6 \approx 0{,}7469$

105. $V \approx T_9 \approx 20$ hectáreas-pies $= 871\ 200\ \text{ft}^3$

107. Error $\le \frac{3}{128}$ **109.** $N \ge 29$

Capítulo 9

Sección 9.1 Ejercicios preliminares

1. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

2. La gráfica de $y = f(x) + C$ es una traslación vertical de la gráfica de $y = f(x)$; por tanto, las dos gráficas deben tener la misma longitud de arco. Se puede probar explícitamente esta afirmación de la siguiente manera:

$$\text{Longitud de } y = f(x)+C = \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}(f(x)+C)\right]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \text{longitud de } y = f(x)$$

3. Como $\sqrt{1+f'(x)^2} \ge 1$ para cualquier función f, se tiene:

$$\begin{array}{c}\text{Longitud de la gráfica de } f(x)\\ \text{a lo largo de } [1,4]\end{array} = \int_1^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \ge \int_1^4 1\,dx = 3$$

Sección 9.1 Problemas

1. $L = \int_2^6 \sqrt{1+16x^6}\,dx$ **3.** $\frac{13}{12}$ **5.** $3\sqrt{10}$

7. $\frac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13})$ **9.** $e^2 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4}$

11. $\int_1^2 \sqrt{1+x^6}\,dx \approx 3{,}957736$

13. $\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \approx 1{,}132123$ **15.** 6

19. $a = \operatorname{senh}^{-1}(5) = \ln(5+\sqrt{26})$

23. Sea s la longitud de arco. Entonces:
$s = \frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4}\ln|\sqrt{1+4a^2} + 2a|$. Por tanto, cuando $a = 1$,
$s = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}+2) \approx 1{,}478943$.

25. $\sqrt{1+e^{2a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2a}}-1}{\sqrt{1+e^{2a}}+1} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

27. $\ln(1+\sqrt{2})$ **31.** 1.552248 **33.** $16\pi\sqrt{2}$

35. $\frac{\pi}{27}(145^{3/2} - 1)$ **37.** $\frac{384\pi}{5}$ **39.** $\frac{\pi}{16}(e^4 - 9)$

41. $2\pi\int_1^3 x^{-1}\sqrt{1+x^{-4}}\,dx \approx 7{,}60306$

43. $2\pi\int_0^2 e^{-x^2/2}\sqrt{1+x^2e^{-x^2}}\,dx \approx 8{,}222696$

45. $2\pi\ln 2 + \frac{15\pi}{8}$ **47.** $4\pi^2 br$

49. $2\pi b^2 + \frac{2\pi ba^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a} + \frac{b}{a}\right|$

Sección 9.2 Ejercicios preliminares

1. La presión se define como fuerza por unidad de área.

2. El factor de proporcionalidad es la densidad del peso del fluido, $w = \rho g$.

3. La fuerza del fluido actúa en la dirección perpendicular a la cara del objeto sumergido.

4. La presión depende únicamente de la profundidad y no cambia horizontalmente, a una profundidad dada.

5. Cuando una placa se sumerge en vertical, la presión no es constante a lo largo de la placa, por lo que la fuerza del fluido no es igual a la presión por el área.

Sección 9.2 Problemas

1. (a) Superior: $F = 176\ 500$ N; inferior: $F = 705\ 600$ N

(b) $F \approx \sum_{j=1}^{N} \rho g 3 y_j\,\Delta y$ **(c)** $F = \int_2^8 \rho g 3y\,dy$

(d) $F = 882\ 000$ N

3. (a) La amplitud del triángulo varía de forma lineal, desde 0, a una profundidad de $y = 3$ m, hasta 1, a una profundidad de $y = 5$ m. Por tanto, $f(y) = \frac{1}{2}(y-3)$.

(b) El área de la tira, a profundidad y, es $\frac{1}{2}(y-3)\Delta y$ y la presión a profundidad y es $\rho g y$, donde $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$ y $g = 9{,}8$. Por tanto, la fuerza del fluido que actúa a profundidad y es aproximadamente igual a $\rho g \frac{1}{2} y(y-3)\Delta y$.

(c) $F \approx \sum_{j=1}^{N} \rho g \frac{1}{2} y_j(y_j - 3)\,\Delta y \to \int_3^5 \rho g \frac{1}{2} y(y-3)\,dy$

(d) $F = \frac{127{,}400}{3}$ N

5. (b) $F = \frac{19\ 600}{3} r^3$ N **7.** $F = \frac{19\ 600}{3} r^3 + 4\ 900\pi m r^2$ N

9. $F \approx 321\ 250\ 000$ lb

11. $F = \frac{815360}{3}$ N **13.** $F \approx 5593{,}804$ N **15.** $F \approx 5652{,}4$ N

17. $F = 940,800$ N

19. $F = 4\ 532\ 500\ 000 \sec\left(\frac{7\pi}{36}\right) \approx 5{,}53316 \times 10^9$ N

21. $F = (15b + 30a)h^2$ lb

23. Parte anterior y posterior: $F = \frac{62{,}5\sqrt{3}}{9}H^3$; lados inclinados: $F = \frac{62{,}5\sqrt{3}}{3}\ell H^2$.

Sección 9.3 Ejercicios preliminares

1. $M_x = M_y = 0$ **2.** $M_x = 21$ **3.** $M_x = 5$; $M_y = 10$

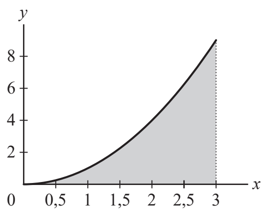
4. Como un triángulo es simétrico respecto a la recta vertical y también a la horizontal que pasan por el centro, por el principio de simetría se puede af rmar que el centroide del rectángulo se debe encontrar en estas dos rectas. El único punto en común de estas dos rectas de simetría es el centro del rectángulo, por lo que el centroide debe ser el centro del rectángulo.

Sección 9.3 Problemas

1. (a) $M_x = 4m$; $M_y = 9m$; centro de masas: $\left(\frac{9}{4}, 1\right)$

(b) $\left(\frac{46}{17}, \frac{14}{17}\right)$

5. A continuación se muestra una representación de la lámina.



(a) $M_x = \frac{729}{10}$; $M_y = \frac{243}{4}$

(b) Área = 9 cm^2; centro de masas: $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{10}\right)$

7. $M_x = \frac{64\rho}{7}$; $M_y = \frac{32\rho}{5}$; centro de masas : $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{7}\right)$

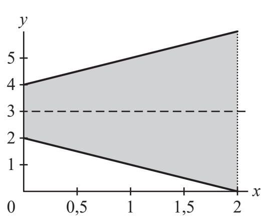
9. (a) $M_x = 24$

(b) $M = 12$, por lo que $y_{cm} = 2$; centro de masas: $(0, 2)$

11. $\left(\frac{93}{35}, \frac{45}{56}\right)$ **13.** $\left(\frac{9}{8}, \frac{18}{5}\right)$

15. $\left(\frac{1-5e^{-4}}{1-e^{-4}}, \frac{1-e^{-8}}{4(1-e^{-4})}\right)$ **17.** $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

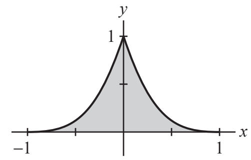
19. A continuación se muestra una representación de la región.



La región es claramente simétrica respecto a la recta $y = 3$, por lo que cabe esperar que el centroide de la región se encuentre a lo largo de esta recta. Se tiene que $M_x = 24$, $M_y = \frac{28}{3}$, centroide: $\left(\frac{7}{6}, 3\right)$.

21. $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$ **23.** $\left(\frac{1}{2(e-2)}, \frac{e^2-3}{4(e-2)}\right)$ **25.** $\left(\frac{\pi\sqrt{2}-4}{4(\sqrt{2}-1)}, \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)}\right)$

27. A continuación se muestra una representación de la región. Centroide: $\left(0, \frac{2}{7}\right)$



29. $\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$ **31.** $\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$

33. $\left(0, \frac{\frac{2}{3}(r^2-h^2)^{3/2}}{r^2 \,\mathrm{sen}^{-1}\sqrt{1-h^2/r^2} - h\sqrt{r^2-h^2}}\right)$; con $r = 1$ y $h = \frac{1}{2}$: $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}\right) \approx (0, 0{,}71)$

35. $\left(0, \frac{49}{24}\right)$ **37.** $\left(-\frac{4}{9\pi}, \frac{4}{9\pi}\right)$

39. Para el cuadrado a la izquierda: $(4, 4)$;
para el cuadrado a la derecha: $\left(4, \frac{25}{7}\right)$.

Sección 9.4 Ejercicios preliminares

1. $T_3(x) = 9 + 8(x-3) + 2(x-3)^2 + 2(x-3)^3$

2. El polinomio representado a la derecha es un polinomio de Maclaurin.

3. Un polinomio de Maclaurin proporciona exactamente el valor de $f(0)$.

4. La af rmación correcta es **(b)**: $|T_3(2) - f(2)| \le \frac{2}{3}$

Sección 9.4 Problemas

1. $T_2(x) = x$; $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

3. $T_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2$;
$T_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2 - \frac{1}{81}(x-2)^3$

5. $T_2(x) = 75 + 106(x-3) + 54(x-3)^2$;
$T_3(x) = 75 + 106(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3$

7. $T_2(x) = x$; $T_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$

9. $T_2(x) = 2 - 3x + \frac{5x^2}{2}$; $T_3(x) = 2 - 3x + \frac{5x^2}{2} - \frac{3x^3}{2}$

11. $T_2(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{2e}(x-1)^2$;
$T_3(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{2e}(x-1)^2 - \frac{1}{6e}(x-1)^3$

13. $T_2(x) = (x-1) - \frac{3(x-1)^2}{2}$;
$T_3(x) = (x-1) - \frac{3(x-1)^2}{2} + \frac{11(x-1)^3}{6}$

15. Sea $f(x) = e^x$. Entonces, para todo n:

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{y} \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Se tiene que:

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

19. $T_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

21. $T_n(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{e(x-1)^n}{n!}$

23. $T_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \cdots$

En general, el coef ciente de $(x - \pi/4)^n$ es:

$$\pm\frac{1}{(\sqrt{2})n!}$$

con el patrón de signos $+, -, -, +, +, -, -, \ldots$.

25. $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$; $|T_2(-0{,}5) - f(-0{,}5)| \approx 0{,}018469$

27. $T_2(x) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{5}{9}(x-1)^2$;

$|f(1{,}2) - T_2(1{,}2)| \approx 0{,}00334008$

29. $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

31. $\frac{e^{1,1}|1{,}1|^4}{4!}$

33. $T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; error máximo $= \frac{(0{,}25)^6}{6!}$

35. $T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{256}(x-4)^2 - \frac{5}{2048}(x-4)^3$;

error máximo $= \frac{35(0{,}3)^4}{65{,}536}$

37. $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$; $T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$. Con $K = 5$,

$$\left|T_3\left(\frac{1}{2}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right| \le \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = \frac{5}{384}.$$

39. $K = 8$ es aceptable.

41. $n = 4$

43. $n = 6$

47. $n = 4$

51. $T_{4n}(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$

53. En $a = 0$,

$$\begin{aligned} T_1(x) &= -4 - x \\ T_2(x) &= -4 - x + 2x^2 \\ T_3(x) &= -4 - x + 2x^2 + 3x^3 = f(x) \\ T_4(x) &= T_3(x) \\ T_5(x) &= T_3(x) \end{aligned}$$

En $a = 1$,

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 12(x-1) \\ T_2(x) &= 12(x-1) + 11(x-1)^2 \\ T_3(x) &= 12(x-1) + 11(x-1)^2 + 3(x-1)^3 \\ &= -4 - x + 2x^2 + 3x^3 = f(x) \\ T_4(x) &= T_3(x) \\ T_5(x) &= T_3(x) \end{aligned}$$

55. $T_2(t) = 60 + 24t - \frac{3}{2}t^2$; distancia del camión a la intersección pasados 4 s es ≈ 132 m

57. (a) $T_3(x) = -\frac{k}{R^3}x + \frac{3k}{2R^5}x^3$

65. $T_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4$; el error es aproximadamente

$|0{,}461458 - 0{,}461281| = 0{,}000177$

67. (b) $\int_0^{1/2} T_4(x)\,dx = \frac{1841}{3840}$; cota del error:

$$\left|\int_0^{1/2}\cos x\,dx - \int_0^{1/2}T_4(x)\,dx\right| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{6!}$$

69. (a) $T_6(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^6$

Capítulo 9 Repaso

1. $\frac{779}{240}$ **3.** $4\sqrt{17}$ **7.** $24\pi\sqrt{2}$ **9.** $\frac{67\pi}{36}$

11. $12\pi + 4\pi^2$ **13.** 176,400 N

15. Fuerza del f uido sobre la cara triangular: $183\ 750\sqrt{3} + 306\ 250$ N; fuerza del f uido sobre un lado rectangular inclinado: $122\ 500\sqrt{3} + 294\ 000$ N

17. $M_x = 20480$; $M_y = 25600$; centro de masas: $\left(2, \frac{8}{5}\right)$ **19.** $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$

21. $T_3(x) = 1 + 3(x-1) + 3(x-2)^2 + (x-1)^3$

23. $T_4(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$

25. $T_4(x) = x - x^3$

27. $T_n(x) = 1 + 3x + \frac{1}{2!}(3x)^2 + \frac{1}{3!}(3x)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(3x)^n$

29. $T_3(1{,}1) = 0{,}832981496$; $|T_3(1{,}1) - \tan^{-1}1{,}1| = 2{,}301 \times 10^{-7}$

31. $n = 11$ es suf ciente.

33. El polinomio de Maclaurin de orden n para $g(x) = \frac{1}{1+x}$ es $T_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n$.

Capítulo 10

Sección 10.1 Ejercicios preliminares

1. (a) Primer orden **(b)** Primer orden **(c)** Orden 3 **(d)** Orden 2

2. Sí **3.** Ejemplo: $y' = y^2$ **4.** Ejemplo: $y' = y^2$

5. Ejemplo: $y' + y = x$

Sección 10.1 Problemas

1. (a) Primer orden **(b)** No es de primer orden **(c)** Primer orden **(d)** Primer orden **(e)** No es de primer orden **(f)** Primer orden

3. Sea $y = 4x^2$. Entonces $y' = 8x$ e $y' - 8x = 8x - 8x = 0$.

5. Sea $y = 25e^{-2x^2}$. Entonces $y' = -100xe^{-2x^2}$ e $y' + 4xy = -100xe^{-2x^2} + 4x(25e^{-2x^2}) = 0$.

7. Sea $y = 4x^4 - 12x^2 + 3$. Entonces

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 8y &= (48x^2 - 24) - 2x(16x^3 - 24x) + 8(4x^4 - 12x^2 + 3) = \\ &= 48x^2 - 24 - 32x^4 + 48x^2 + 32x^4 - 96x^2 + 24 = 0 \end{aligned}$$

9. (a) Separable: $y' = \frac{9}{x}y^2$ **(b)** Separable: $y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{4 - x^2}}e^{3y}$

(c) No separable **(d)** Separable: $y' = (1)(9 - y^2)$

11. $C = 4$

13. $y = \left(2x^2 + C\right)^{-1}$, donde C es una constante arbitraria.

15. $y = \ln\left(4t^5 + C\right)$, donde C es una constante arbitraria.

17. $y = Ce^{-(5/2)x} + \frac{4}{5}$, donde C es una constante arbitraria.

19. $y = Ce^{-\sqrt{1-x^2}}$, donde C es una constante arbitraria.

21. $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, donde C es una constante arbitraria.

23. $x = \tan\left(\frac{1}{2}t^2 + t + C\right)$, donde C es una constante arbitraria.

25. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$, donde C es una constante arbitraria.

27. $y = C \sec t$, donde C es una constante arbitraria.

29. $y = 75e^{-2x}$ **31.** $y = -\sqrt{\ln\left(x^2 + e^4\right)}$

33. $y = 2 + 2e^{x(x-2)/2}$ **35.** $y = \tan\left(x^2/2\right)$ **37.** $y = e^{1-e^{-t}}$

39. $y = \frac{et}{e^{1/t}} - 1$ **41.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}e^x\right)$ **43.** $a = -3, 4$

45. $t = \pm\sqrt{\pi + 4}$

47. (a) $\approx$ 1145 s o 19,1 min (b) $\approx$ 3910 s o 65,2 min

49. $y = 8 - (8 + 0{,}0002215t)^{2/3}$; $t_e \approx 66\,000$ s o 18 h, 20 min

53. **(a)** $q(t) = CV\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

(b) $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} CV\left(1 - e^{-t/RC}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} CV(1 - 0) = CV$

(c) $q(RC) = CV\left(1 - e^{-1}\right) \approx (0{,}63)\,CV$

55. $V = (kt/3 + C)^3$, V aumenta, aproximadamente, con el cubo del tiempo.

57. $g(x) = Ce^{(3/2)x}$, donde C es una constante arbitraria; $g(x) = \frac{C}{x-1}$, donde C es una constante arbitraria.

59. $y = Cx^3$ y $y = \pm\sqrt{A - \frac{x^2}{3}}$

61. **(b)** $v(t) = -9{,}8t + 100(\ln(50) - \ln(50 - 4{,}75t))$;
$v(10) = -98 + 100(\ln(50) - \ln(2{,}5)) \approx 201{,}573$ m/s

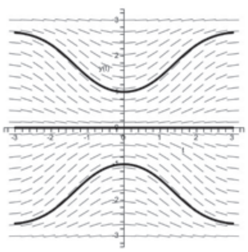
67. **(c)** $C = \frac{7\pi}{60B}R^{5/2}$

Sección 10.2 Ejercicios preliminares

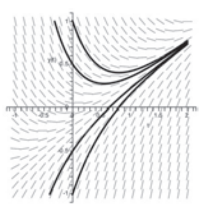
1. 7 **2.** $y = \pm\sqrt{1 + t}$ **3.** (b) **4.** 20

Sección 10.2 Problemas

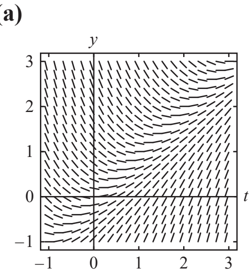
1.



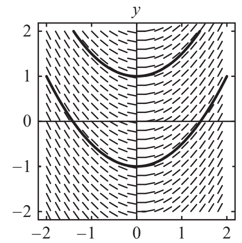
3.



5. **(a)**

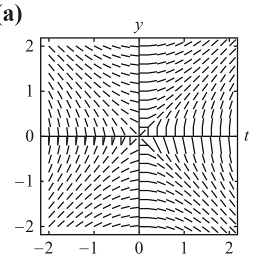


7. Para $y' = t$, y' sólo depende de t. Las isoclinas para cualquier pendiente c serán las rectas verticales $t = c$.



9. (i) C (ii) B (iii) F (iv) D (v) A (vi) E

11. **(a)**



13. **(a)** $y_1 = 3{,}1$ **(b)** $y_2 = 3{,}231$

(c) $y_3 = 3{,}3919$, $y_4 = 3{,}58171$, $y_5 = 3{,}799539$, $y_6 = 4{,}0445851$

(d) $y(2{,}2) \approx 3{,}231$, $y(2{,}5) \approx 3{,}799539$

15. $y(0{,}5) \approx 1{,}7210$ **17.** $y(3{,}3) \approx 3{,}3364$

19. $y(2) \approx 2{,}8838$ **23.** $y(0{,}5) \approx 1{,}794894$

25. $y(0{,}25) \approx 1{,}094871$

Sección 10.3 Ejercicios preliminares

1. **(a)** No **(b)** Sí **(c)** No **(d)** Sí

2. No **3.** Sí

Sección 10.3 Problemas

1. $y = \dfrac{5}{1 - e^{-3t}/C}$ y $y = \dfrac{5}{1 + (3/2)e^{-3t}}$ **3.** $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 2$

5. **(a)** $P(t) = \dfrac{2000}{1 + 3e^{-0{,}6t}}$ **(b)** $t = \frac{1}{0{,}6}\ln 3 \approx 1{,}83$ años

7. $k = \ln\frac{81}{31} \approx 0{,}96$ años^{-1}; $t = \frac{\ln 9}{2\ln 9 - \ln 31} \approx 2{,}29$ años

9. Pasadas $t = 8$ horas, o a las 4:00 PM

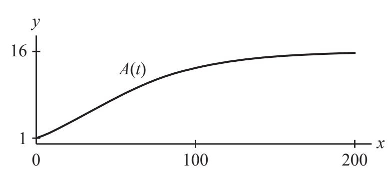
11. **(a)** $y_1(t) = \frac{10}{10 - 9e^{-t}}$ e $y_2(t) = \frac{1}{1 - 2e^{-t}}$

(b) $t = \ln\frac{9}{8}$ **(c)** $t = \ln 2$

13. **(a)** $A(t) = 16(1 - \frac{5}{3}e^{t/40})^2/(1 + \frac{5}{3}e^{t/40})^2$

(b) $A(10) \approx 2{,}1$

(c)



15. $\approx$ 943 millones **17.** **(d)** $t = -\frac{1}{k}(\ln y_0 - \ln(A - y_0))$

Sección 10.4 Ejercicios preliminares

1. **(a)** Sí **(b)** No **(c)** Sí **(d)** No

2. (b)

Sección 10.4 Problemas

1. **(c)** $y = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$ **(d)** $y = \frac{x^4}{5} - \frac{1}{5x}$

5. $y = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}$

7. $y = -\frac{1}{4}x^{-1} + Cx^{1/3}$ **9.** $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3} + Cx^{-3}$

11. $y = -x\ln x + Cx$ **13.** $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$

15. $y = x\cos x + C\cos x$ **17.** $y = x^x + Cx^x e^{-x}$

19. $y = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{6}{5}e^{-3x}$ **21.** $y = \frac{\ln|x|}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{5}{x+1}$

23. $y = -\cos x + \operatorname{sen} x$ **25.** $y = \tanh x + 3\operatorname{sech} x$

27. Para $m \neq -n$: $y = \frac{1}{m+n}e^{mx} + Ce^{-nx}$; para $m = -n$: $y = (x + C)e^{-nx}$

29. **(a)** $y' = 4000 - \frac{40y}{500+40t}$; $y = 1000\frac{4t^2+100t+125}{2t+25}$

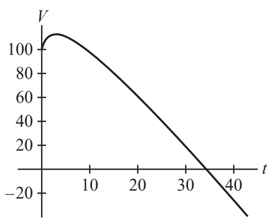
(b) 40 g/L

31. 50 g/L

33. **(a)** $\frac{dV}{dt} = \frac{20}{1+t} - 5$ y $V(t) = 20\ln(1+t) - 5t + 100$

(b) El valor máximo es $V(3) = 20\ln 4 - 15 + 100 \approx 112{,}726$

(c)



35. $I(t) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-20t}\right)$

37. **(a)** $I(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}$ **(c)** Aproximadamente 0,0184 s

39. **(b)** $c_1(t) = 10e^{-t/6}$

Capítulo 10 Repaso

1. **(a)** No, primer orden **(b)** Sí, primer orden **(c)** No, orden 3

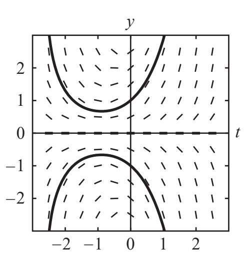
(d) Sí, segundo orden

3. $y = \pm\left(\frac{4}{3}t^3 + C\right)^{1/4}$, donde C es una constante arbitraria.

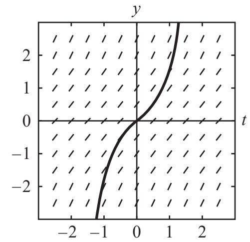
5. $y = Cx - 1$, donde C es una constante arbitraria.

7. $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + \frac{\pi}{4}$ **9.** $y = \frac{2}{2-x^2}$

11.



(b) 13. $y(t) = \tan t$



15. $y(0{,}1) \approx 1{,}1$; $y(0{,}2) \approx 1{,}209890$; $y(0{,}3) \approx 1{,}329919$

17. $y = x^2 + 2x$ **19.** $y = \frac{1}{2} + e^{-x} - \frac{11}{2}e^{-2x}$

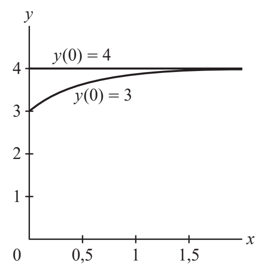
21. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - 2\cos x$ **23.** $y = 1 - \sqrt{t^2 + 15}$

25. $w = \tan\left(k\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$

27. $y = -\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{C}{x}$, donde C es una constante arbitraria.

29. Solución cumpliendo $y(0) = 3$: $y(t) = 4 - e^{-2t}$;

solución cumpliendo $y(0) = 4$: $y(t) = 4$



31. $y = 1$ **35.** $\frac{-1{,}77\sqrt{y}}{240y+64800}$; $t = 9198$ s alrededor de 2,56 horas.

37. 2 **39.** $t = 5\ln 441 \approx 30{,}45$ días

41. **(a)** $\frac{dc_1}{dt} = -\frac{2}{5}c_1$ **(b)** $c_1(t) = 8e^{(-2/5)t}$ g/L

Capítulo 11

Sección 11.1 Ejercicios preliminares

1. $a_4 = 12$ **2.** (c) **3.** $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2}$ **4.** (b)

5. **(a)** Falso. Contraejemplo: $a_n = \cos \pi n$

(b) Verdadero **(c)** Falso. Contraejemplo: $a_n = (-1)^n$

Sección 11.1 Problemas

1. **(a)** (iv) **(b)** (i) **(c)** (iii) **(d)** (ii)

3. $c_1 = 3, c_2 = \frac{9}{2}, c_3 = \frac{9}{2}, c_4 = \frac{27}{8}$

5. $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 47, a_4 = 4415$

7. $b_1 = 4, b_2 = 6, b_3 = 4, b_4 = 6$

9. $c_1 = 1, c_2 = \frac{3}{2}, c_3 = \frac{11}{6}, c_4 = \frac{25}{12}$

11. $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 8, b_4 = 19$

13. **(a)** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ **(b)** $a_n = \frac{n+1}{n+5}$

15. $\lim_{n\to\infty} 12 = 12$ **17.** $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{12n+9} = \frac{5}{12}$

19. $\lim_{n\to\infty}\left(-2^{-n}\right) = 0$ **21.** La sucesión es divergente.

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ **25.** $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{12n+2}{-9+4n}\right) = \ln 3$

27. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2$ **29.** $\lim_{n\to\infty} \cos^{-1}\left(\frac{n^3}{2n^3+1}\right) = \frac{\pi}{3}$

31. (a) $M = 999$ **(b)** $M = 99\,999$

35. $\lim_{n\to\infty} \left(10 + \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right) = 10$ **37.** La sucesión es divergente.

39. $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$ **41.** $\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{n!} = 0$

43. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+2}{2n^2-3} = \frac{3}{2}$ **45.** $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

47. La sucesión es divergente. **49.** $\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{4}{n^2}\right)^{1/3} = 2^{1/3}$

51. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right) = \ln\frac{2}{3}$ **53.** La sucesión es divergente.

55. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n+(-3)^n}{5^n} = 0$ **57.** $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \pi$

59. $\lim_{n\to\infty} \frac{3-4^n}{2+7\cdot 4^n} = -\frac{1}{7}$ **61.** $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

63. $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$ **65.** $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \frac{1}{2}$

67. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^8}} = 0$ **69.** $\lim_{n\to\infty} (2^n+3^n)^{1/n} = 3$ **71.** (b)

73. Cualquier número mayor o igual que 3 es una cota superior.

75. Ejemplo: $a_n = (-1)^n$ **79.** Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen}\pi x$

87. (e) $AGM\left(1, \sqrt{2}\right) \approx 1{,}198$

Sección 11.2 Ejercicios preliminares

1. La suma de una serie infinita se define como el límite de la sucesión de sumas parciales. Si el límite de esta sucesión no existe, se dice que la serie es divergente.

2. $S = \frac{1}{2}$

3. El resultado es negativo, por lo que éste no es válido: una serie cuyos términos son todos positivos no puede tener como suma un valor negativo. La fórmula no es válida porque una serie geométrica con $|r| \geq 1$ es divergente.

4. No **5.** No **6.** $N = 13$

7. No, S_N es creciente y converge a 1, por lo que $S_N \leq 1$ para todo N.

8. Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/10}}$

Sección 11.2 Problemas

1. (a) $a_n = \frac{1}{3^n}$ **(b)** $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

(c) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n^n}{n!}$ **(d)** $a_n = \frac{1+\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}{n^2+1}$

3. $S_2 = \frac{5}{4}, S_4 = \frac{205}{144}, S_6 = \frac{5369}{3600}$

5. $S_2 = \frac{2}{3}, S_4 = \frac{4}{5}, S_6 = \frac{6}{7}$ **7.** $S_6 = 1{,}24992$

9. $S_{10} = 0{,}03535167962$, $S_{100} = 0{,}03539810274$, $S_{500} = 0{,}03539816290$, $S_{1000} = 0{,}03539816334$. Sí.

11. $S_3 = \frac{3}{10}, S_4 = \frac{1}{3}, S_5 = \frac{5}{14}, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$

13. $S_3 = \frac{3}{7}, S_4 = \frac{4}{9}, S_5 = \frac{5}{11}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$

15. $S = \frac{1}{2}$ **17.** $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n+12} = \frac{1}{10} \neq 0$

19. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)$ no existe. **21.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \cos\frac{1}{n+1} = 1 \neq 0$

23. $S = \frac{8}{7}$

25. La serie es divergente. **27.** $S = \frac{59049}{3328}$

29. $S = \frac{1}{e-1}$ **31.** $S = \frac{35}{3}$ **33.** $S = 4$ **35.** $S = \frac{7}{15}$

37. (b) y (c)

41. (a) Contraejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

(b) Contraejemplo: si $a_n = 1$, entonces $S_N = N$.

(c) Contraejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

(d) Contraejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n \neq 1$.

43. El área total es $\frac{1}{4}$.

45. La longitud total de la trayectoria es $2+\sqrt{2}$.

Sección 11.3 Ejercicios preliminares

1. (b)

2. Una función $f(x)$ tal que $a_n = f(n)$ debe ser positiva, decreciente y continua para $x \geq 1$.

3. Convergencia de p-serie o criterio integral.

4. Criterio de comparación.

5. No; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, pero como $\frac{e^{-n}}{n} < \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$, el criterio de comparación no proporciona información sobre la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$.

Sección 11.3 Problemas

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}\, dx$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

3. $\int_1^{+\infty} x^{-1/3}\, dx = \infty$, por tanto, la serie es divergente.

5. $\int_{25}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3+9)^{5/2}}\, dx$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

9. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

11. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2^{\ln x}} = +\infty$, por tanto, la serie es divergente.

15. $\frac{1}{n^3+8n} \leq \frac{1}{n^3}$, por tanto, la serie es convergente.

19. $\frac{1}{n2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, por tanto, la serie es convergente.

21. $\frac{1}{n^{1/3}+2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, por tanto, la serie es convergente.

23. $\frac{4}{m!+4^m} \leq 4\left(\frac{1}{4}\right)^m$, por tanto, la serie es convergente.

25. $0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$, por tanto, la serie es convergente.

27. $\frac{2}{3^n+3^{-n}} \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$, por tanto, la serie es convergente.

29. $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n^2}$, por tanto, la serie es convergente.
31. $\frac{\ln n}{n^3} \le \frac{1}{n^2}$ para $n \ge 1$, por tanto, la serie es convergente.
33. $\frac{(\ln n)^{100}}{n^{1,1}} \le \frac{1}{n^{1,09}}$ para n suf cientemente grande, por tanto, la serie es convergente.
35. $\frac{n}{3^n} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para $n \ge 1$, por tanto, la serie es convergente.
39. La serie es convergente. **41.** La serie es divergente.
43. La serie es convergente. **45.** La serie es divergente.
47. La serie es convergente. **49.** La serie es convergente.
51. La serie es divergente. **53.** La serie es convergente.
55. La serie es divergente. **57.** La serie es convergente.
59. La serie es divergente. **61.** La serie es divergente.
63. La serie es divergente. **65.** La serie es convergente.
67. La serie es divergente. **69.** La serie es divergente.
71. La serie es convergente. **73.** La serie es convergente.
75. La serie es divergente. **77.** La serie es convergente.
79. La serie es convergente para $a > 1$ y es divergente para $a \le 1$.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5} \approx 1{,}0369540120$

91. $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2} = 1{,}6439345667$ y $1 + \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2(n+1)} = 1{,}6448848903$

La segunda suma es una mejor aproximación de

$\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449340668$.

Sección 11.4 Ejercicios preliminares

1. Ejemplo: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ **2.** (b) **3.** No.
4. $|S - S_{100}| \le 10^{-3}$, y S es mayor que S_{100}.

Sección 11.4 Problemas

3. Es condicionalmente convergente
5. Es absolutamente convergente
7. Es condicionalmente convergente
9. Es condicionalmente convergente
11. **(a)**

n	S_n	n	S_n
1	1	6	0,899782407
2	0,875	7	0,902697859
3	0,912037037	8	0,900744734
4	0,896412037	9	0,902116476
5	0,904412037	10	0,901116476

13. $S_5 = 0{,}947$ **15.** $S_{44} = 0{,}06567457397$
17. Es convergente (por series geométricas).
19. Es convergente (por el criterio de comparación).
21. Es convergente (por el criterio de comparación por el paso al límite).
23. Es divergente (por el criterio de comparación por el paso al límite).
25. Es convergente (por series geométricas y linealidad).
27. Es absolutamente convergente (por el criterio integral).
29. Es condicionalmente convergente (por el criterio de Leibniz).
31. Es convergente (por el criterio integral).
33. Es condicionalmente convergente.

Sección 11.5 Ejercicios preliminares

1. $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
2. El criterio del cociente decide para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ y no decide para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
3. No.

Sección 11.5 Problemas

1. Es absolutamente convergente.
3. Es absolutamente convergente.
5. El criterio del cociente no decide. **7.** Es divergente.
9. Es absolutamente convergente.
11. Es absolutamente convergente.
13. Es divergente. **15.** El criterio del cociente no decide.
17. Es absolutamente convergente.
19. Es absolutamente convergente.
21. $\rho = \frac{1}{3} < 1$ **23.** $\rho = 2|x|$
25. $\rho = |r|$ **29.** Es absolutamente convergente.
31. El criterio del cociente no decide, por tanto, la serie converge o diverge.
33. Es absolutamente convergente.
35. El criterio del cociente no decide.
37. Es absolutamente convergente.
39. Es absolutamente convergente.
41. Es absolutamente convergente.
43. Es convergente (por series geométricas y linealidad).
45. Es convergente (por el criterio del cociente).
47. Es convergente (por el criterio de comparación por el paso al límite).
49. Es divergente (por p-series). **51.** Es convergente (por series geométricas).
53. Es convergente (por el criterio de comparación por el paso al límite).
55. Es divergente (por el criterio de divergencia).

Sección 11.6 Ejercicios preliminares

1. Sí. La serie debe ser convergente tanto para $x = 4$ como para $x = -3$.
2. (a), (c) **3.** $R = 4$
4. $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$; $R = 1$

Sección 11.6 Problemas

1. $R = 2$. No es convergente en los extremos.
3. $R = 3$ para las tres series.
9. $(-1, 1)$ **11.** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ **13.** $[-1, 1]$ **15.** $(-\infty, +\infty)$
17. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ **19.** $(-1, 1]$ **21.** $(-1, 1)$ **23.** $[-1, 1)$ **25.** $(2, 4)$
27. $(6, 8)$ **29.** $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$ **31.** $(-\infty, +\infty)$ **33.** $(2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e})$
35. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ sobre el intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
37. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ sobre el intervalo $(-3, 3)$.

39. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ sobre el intervalo $(-1, 1)$.

43. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-5)^n$ sobre el intervalo $(4, 6)$.

47. (c) $S_4 = \frac{69}{640}$ y $|S - S_4| \approx 0{,}000386 < a_5 = \frac{1}{1920}$

49. $R = 1$ **51.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ **53.** $F(x) = \frac{1-x-x^2}{1-x^3}$

55. $-1 \le x \le 1$ **57.** $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

59. N debe ser como mínimo 5; $S_5 = 0{,}3680555556$

61. $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-3)}{(2n)!} x^{2n}$; $R = \infty$

Sección 11.7 Ejercicios preliminares

1. $f(0) = 3$ y $f'''(0) = 30$

2. $f(-2) = 0$ y $f^{(4)}(-2) = 48$

3. Sustituya x^2 por x en la serie de Maclaurin para sen x.

4. $f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}$ **5.** (c)

Sección 11.7 Problemas

1. $f(x) = 2 + 3x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$

3. $\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ sobre el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5. $\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n x^{2n}}{(2n)!}$ sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

7. $\operatorname{sen}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

9. $\ln(1 - x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ sobre el intervalo $(-1, 1)$.

11. $\tan^{-1}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

13. $e^{x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^2 n!}$ sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

15. $\ln(1 - 5x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}$ sobre el intervalo $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

17. $\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

19. $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

21. $\frac{\operatorname{sen} x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{6} + \cdots$

23. $(1 + x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 + \cdots$

25. $e^x \tan^{-1} x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$

27. $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$

29. $\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ sobre el intervalo $(0, 2)$.

31. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{4^{n+1}}$ sobre el intervalo $(1, 9)$.

33. $21 + 35(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$ sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

35. $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(x-4)^n}{4^{n+2}}$ sobre el intervalo $(0, 8)$.

37. $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2^{n+1}-1)}{2^{2n+3}}(x-3)^n$ sobre el intervalo $(1, 5)$.

39. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4)^n x^{2n}}{(2n)!}$

45. $S_4 = 0{,}1822666667$

47. **(a)** 4 **(b)** $S_4 = 0{,}7474867725$

49. $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)}$; $S_3 = 0{,}9045227920$

51. $\int_0^1 e^{-x^3}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}$; $S_5 = 0{,}8074461996$

53. $\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!2n}$

55. $\int_0^x \ln(1 + t^2)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$

57. $\frac{1}{1+2x}$ **63.** e^{x^3} **65.** $1 - 5x + \operatorname{sen} 5x$

67. $\frac{1}{(1-2x)(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1} - 1\right)x^n$

69. $I(t) = \frac{V}{R}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(\frac{Rt}{L}\right)^n$

71. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}$ y $f^{(6)}(0) = -360$.

73. $e^{20x} = 1 + x^{20} + \frac{x^{40}}{2} + \cdots$ **75.** No.

81. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120}$

83. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^4} - \frac{\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$

85. $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ $\int_0^1 g(t)\, dt = S$ **89.** $L \approx 28{,}369$

Capítulo 11 Repaso

1. **(a)** $a_1^2 = 4, a_2^2 = \frac{1}{4}, a_3^2 = 0$

(b) $b_1 = \frac{1}{24}, b_2 = \frac{1}{60}, b_3 = \frac{1}{240}$

(c) $a_1 b_1 = -\frac{1}{12}, a_2 b_2 = -\frac{1}{120}, a_3 b_3 = 0$

(d) $2a_2 - 3a_1 = 5, 2a_3 - 3a_2 = \frac{3}{2}, 2a_4 - 3a_3 = \frac{1}{12}$

3. $\lim_{n\to\infty}(5a_n - 2a_n^2) = 2$ **5.** $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^2$

7. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n$ no existe.

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2}\right) = 0$ **11.** $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n^2} = 1$

13. La sucesión es divergente.

15. $\lim_{n\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{n+2}{n+5}\right) = \frac{\pi}{4}$

17. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) = \frac{1}{2}$

19. $\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{3m} = e^3$ **21.** $\lim_{n\to\infty}(n\ln(n+1) - \ln n) = 1$

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ **27.** $S_4 = -\frac{11}{60}, S_7 = \frac{41}{630}$

29. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4}{3}$ **31.** $\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{3^n} = 36$

33. Ejemplo: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, b_n = -1$

35. $S = \frac{47}{180}$ **37.** La serie es divergente.

39. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+2)(\ln(x+2))^3}\,dx = \frac{1}{2(\ln(3))^2}$, por tanto, la serie es convergente.

41. $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, por tanto, la serie es convergente.

43. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1,5}}$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

45. $\frac{n}{\sqrt{n^5+2}} < \frac{1}{n^{3/2}}$, por tanto, la serie es convergente.

47. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n$ es convergente, por tanto, la serie es convergente.

49. Es convergente.

53. **(b)** $,3971162690 \le S \le 0,3971172688$, por lo que el tamaño máximo para el error es 10^{-6}.

55. Es absolutamente convergente. **57.** Es divergente.

59. **(a)** 500 **(b)** $K \approx \sum_{n=0}^{499}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0{,}9159650942$

61. **(a)** Es convergente. **(b)** Es convergente. **(c)** Es divergente. **(d)** Es convergente.

63. Es convergente. **65.** Es convergente. **67.** Es divergente.

69. Es divergente. **71.** Es convergente. **73.** Es convergente.

75. Es convergente (por series geométricas).

77. Es convergente (por series geométricas).

79. Es convergente (por el criterio de Leibniz).

81. Es convergente (por el criterio de Leibniz).

83. Es convergente (por el criterio de comparación).

85. Es convergente usando las sumas parciales (la serie es telescópica).

87. Es divergente (por el criterio de comparación).

89. Es convergente (por el criterio de comparación).

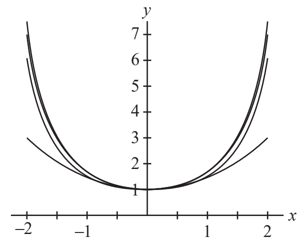
91. Es convergente (por el criterio de comparación).

93. Es convergente sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$ **95.** Es convergente sobre el intervalo $[2, 4]$. **97.** Es convergente en $x = 0$.

99. $\frac{2}{4-3x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n x^n$

La serie es convergente sobre el intervalo $\left(\frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

101. **(c)**



103. $e^{4x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}x^n$

105. $x^4 = 16 + 32(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

107. $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

109. $\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+1}}(x+2)^n$ **111.** $\ln\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n2^n}$

113. $(x^2 - x)e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+2}-x^{2n+1}}{n!}\right)$ por lo que $f^{(3)}(0) = -6$

115. $\frac{1}{1+\tan x} = -x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$ por lo que $f^{(3)}(0) = -8$

117. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3 3!} + \frac{\pi^5}{2^5 5!} - \frac{\pi^7}{2^7 7!} + \cdots = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

Capítulo 12

Sección 12.1 Ejercicios preliminares

1. Una circunferencia de radio 3 centrada en el origen.

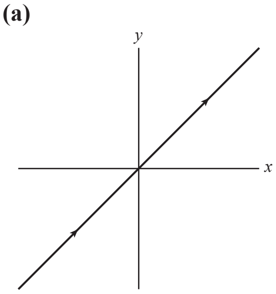
2. El centro se encuentra en (4, 5) **3.** Altura máxima: 4

4. Sí; no **5.** (a) ↔ (iii), (b) ↔ (ii), (c) ↔ (i)

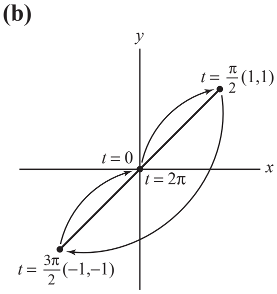
Sección 12.1 Problemas

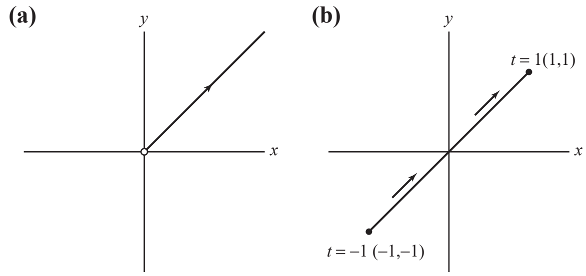
1. $(t = 0)(1, 9)$; $(t = 2)(9, -3)$; $(t = 4)(65, -39)$

5. **(a)**



(b)

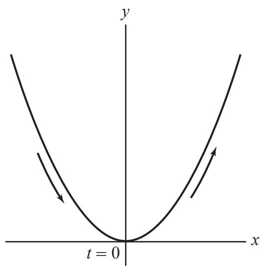




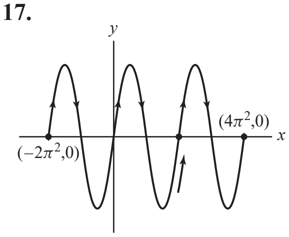
7. $y = 4x - 12$ **9.** $y = \tan^{-1}\left(x^3 + e^x\right)$

11. $y = \frac{6}{x^2}$ (donde $x > 0$) **13.** $y = 2 - e^x$

15.



17.



19. (a) ↔ (iv), (b) ↔ (ii), (c) ↔ (iii), (d) ↔ (i)

21. $\pi \le t \le 2\pi$ **23.** $c(t) = (t, 9 - 4t)$ **25.** $c(t) = \left(\frac{5+t^2}{4}, t\right)$

27. $c(t) = (-9 + 7\cos t, 4 + 7\,\mathrm{sen}\, t)$ **29.** $c(t) = (-4 + t, 9 + 8t)$

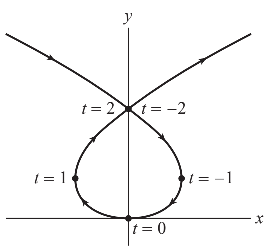
31. $c(t) = (3 - 8t, 1 + 3t)$ **33.** $c(t) = (1 + t, 1 + 2t)$ $(0 \le t \le 1)$

35. $c(t) = (3 + 4\cos t, 9 + 4\,\mathrm{sen}\, t)$ **37.** $c(t) = \left(-4 + t, -8 + t^2\right)$

39. $c(t) = (2 + t, 2 + 3t)$ **41.** $c(t) = \left(3 + t, (3 + t)^2\right)$

43. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $(1 \le x¡\infty)$ **45.** Plot III.

47.

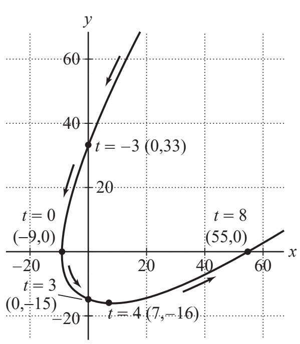


49. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-4} = -\frac{1}{6}$ **51.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{s=-1} = -\frac{3}{4}$

53. $y = -\frac{9}{2}x + \frac{11}{2}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{2}$

55. $y = x^2 + x^{-1}$; $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x^2}$ **57.** $(0, 0)$, $(96, 180)$

59.

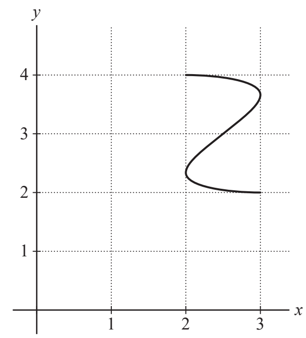


La gráf ca está en el: cuadrante (i) para $t < -3$ o $t > 8$, cuadrante (ii) para $-3 < t < 0$, cuadrante (iii) para $0 < t < 3$, cuadrante (iv) para $3 < t < 8$.

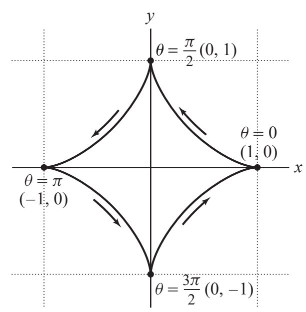
61. $(55, 0)$

63. Las coordenadas de P, $(R\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, describen una elipse para $0 \le \theta \le 2\pi$.

67. $c(t) = (3 - 9t + 24t^2 - 16t^3, 2 + 6t^2 - 4t^3)$, $0 \le t \le 1$



71. $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$



73. $((2k - 1)\pi, 2)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

83. $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = -\frac{21}{512}$ **85.** $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-3} = 0$ **87.** Convexa: $t > 0$

Sección 12.2 Ejercicios preliminares

1. $S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ **2.** La celeridad en el instante t.

3. Desplazamiento: 5; no **4.** $L = 180$ cm

Sección 12.2 Problemas

1. $S = 10$ **3.** $S = 16\sqrt{13}$ **5.** $S = \frac{1}{2}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 256{,}43$

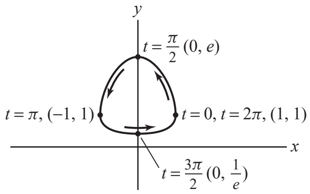
7. $S = 3\pi$ **9.** $S = -8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 2{,}34$

13. $S = \ln(\cosh(A))$ **15.** $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$ m/s

17. $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=9} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ m/s **19.** $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{\text{mín}} \approx \sqrt{4{,}89} \approx 2{,}21$

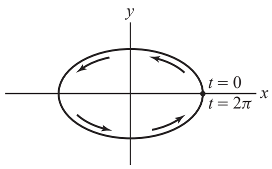
21. $\frac{ds}{dt} = 8$

23.



$M_{10} = 6{,}903734$, $M_{20} = 6{,}915035$, $M_{30} = 6{,}914949$, $M_{50} = 6{,}914951$

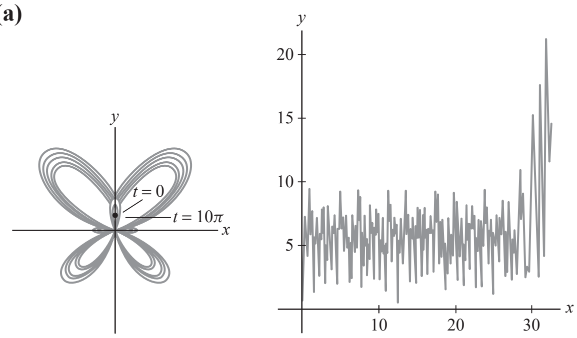
25.



$M_{10} = 25{,}528309$, $M_{20} = 25{,}526999$, $M_{30} = 25{,}526999$, $M_{50} = 25{,}526999$

27. $S = 2\pi^2 R$ **29.** $S = m\sqrt{1+m^2}\pi A^2$ **31.** $S = \frac{64\pi}{3}$

33. (a)



(b) $L \approx 212{,}09$

Sección 12.3 Ejercicios preliminares

1. (b) **2.** Positivo: $(r,\theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$; negativo: $(r,\theta) = \left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$

3. (a) Ecuación de la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

(b) Ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.

(c) Ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(2, 0)$.

4. (a)

Sección 12.3 Problemas

1. (A): $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$; (B): $(3, \pi)$;
(C): $\left(\sqrt{5}, \pi + 0{,}46\right) \approx \left(\sqrt{5}, 3{,}60\right)$; (D): $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$;
(E): $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; (F): $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$; (G): $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$

3. (a) $(1, 0)$ **(b)** $\left(\sqrt{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ **(c)** $\left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right)$ **(d)** $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

5. (a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **(b)** $\left(-\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $(0, 0)$ **(d)** $(0, -5)$

7. (A): $0 \le r \le 3$, $\pi \le \theta \le 2\pi$, (B): $0 \le r \le 3$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$,
(C): $3 \le r \le 5$, $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$

9. $m = \tan\frac{3\pi}{5} \approx -3{,}1$ **11.** $x^2 + y^2 = 7^2$

13. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ **15.** $y = x - 1$ **17.** $r = \sqrt{5}$

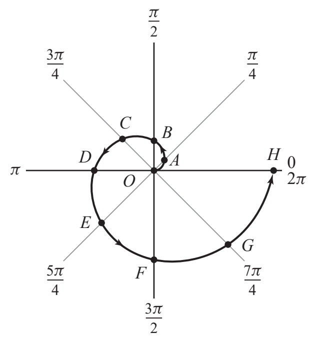
19. $r = \tan\theta \sec\theta$

21. (a)↔(iii), (b)↔(iv), (c)↔(i), (d)↔(ii)

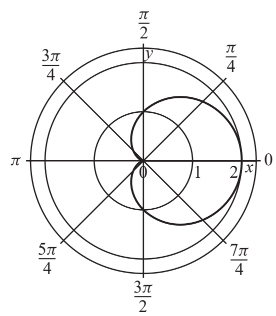
23. (a) $(r, 2\pi - \theta)$ **(b)** $(r, \theta + \pi)$ **(c)** $(r, \pi - \theta)$
(d) $\left(r, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$

25. $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = d$

27.



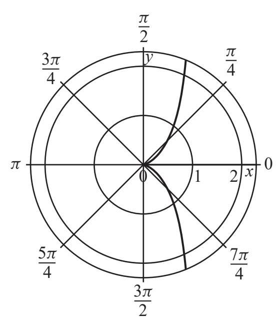
29.



31. (a) A, $\theta = 0$, $r = 0$; B, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4} = 1$; C, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$; D, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $r = \operatorname{sen}\frac{2\cdot 3\pi}{4} = -1$; E, $\theta = \pi$, $r = 0$; F, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $r = 1$; G, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $r = 0$; H, $\theta = \frac{7\pi}{4}$, $r = -1$; I, $\theta = 2\pi$, $r = 0$

(b) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ está en el primer cuadrante. $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ está en el cuarto cuadrante. $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ está en el tercer cuadrante. $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ está en el segundo cuadrante.

33.

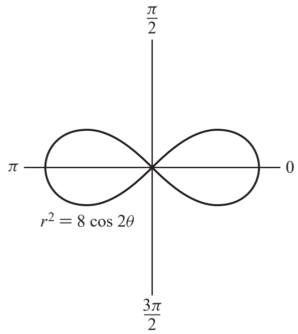


35. $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, centrada en el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

37. $r^2 = \sec 2\theta$ **39.** $(x^2 + y^2) = x^3 - 3y^2 x$

41. $r = 2\sec\left(\theta - \frac{\pi}{9}\right)$ **43.** $r = 2\sqrt{10}\sec(\theta - 4{,}39)$

47. $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$



51. $\theta = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{2}{\pi}; \theta = \pi, m = \pi$

53. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

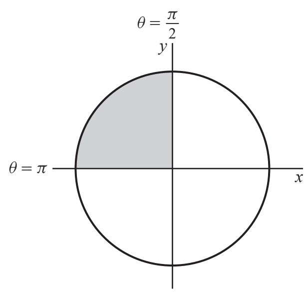
55. A: $m = 1$, B: $m = -1$, C: $m = 1$

Sección 12.4 Ejercicios preliminares

1. (b) **2.** Sí **3.** (c)

Sección 12.4 Problemas

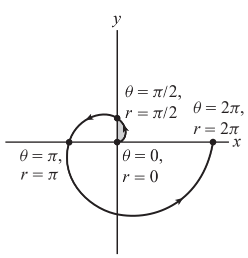
1. $A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} r^2\, d\theta = \frac{25\pi}{4}$



3. $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\theta = 4\pi$ **5.** $A = 16$

7. $A = \frac{3\pi}{2}$ **9.** $A = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}39$

11. $A = \frac{\pi^3}{48}$



13. $A = \frac{\sqrt{15}}{2} + 7\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 11{,}163$

15. $A = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}54$ **17.** $A = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \approx 0{,}14$ **19.** $A = 4\pi$

21. $A = \frac{9\pi}{2} - 4\sqrt{2}$ **23.** $A = 4\pi$

25. $L = \frac{1}{3}\left(\left(\pi^2 + 4\right)^{3/2} - 8\right) \approx 14{,}55$

27. $L = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \approx 755{,}9$ **29.** $L = 8$

31. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\cos\theta}\,(2 - \cos\theta)^{-2}\, d\theta$ **33.** $L \approx 6{,}682$

35. $L \approx 79{,}564$

Sección 12.5 Ejercicios preliminares

1. **(a)** Hipérbola **(b)** Parábola **(c)** Elipse

(d) No es una sección cónica

2. Hipérbolas **3.** Los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$

4. $\pm\frac{b}{a}$ son las pendientes de las dos asíntotas de la hipérbola.

Sección 12.5 Problemas

1. $F_1 = \left(-\sqrt{65}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{65}, 0\right)$. Los vértices son $(9, 0)$, $(-9, 0)$, $(0, 4)$ y $(0, -4)$.

3. $F_1 = \left(\sqrt{97}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{97}, 0\right)$. Los vértices son $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.

5. $F_1 = \left(\sqrt{65} + 3, -1\right)$, $F_2 = \left(-\sqrt{65} + 3, -1\right)$. Los vértices son $(10, -1)$ y $(-4, -1)$.

7. $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ **9.** $\frac{(x-14)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{3^2} = 1$

11. $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$ **13.** $\frac{x^2}{(40/3)^2} + \frac{y^2}{(50/3)^2} = 1$

15. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ **17.** $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 1$

19. $\left(\frac{x-2}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{10\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ **21.** $y = 3x^2$

23. $y = \frac{1}{20}x^2$ **25.** $y = \frac{1}{16}x^2$ **27.** $x = \frac{1}{8}y^2$

29. Vértices: $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 2)$. Focos: $\left(\pm\sqrt{12}, 0\right)$.

Centrada en el origen.

31. Vértices: $(7, -5)$, $(-1, -5)$. Focos: $\left(\sqrt{65} + 3, -5\right)$, $\left(-\sqrt{65} + 3, -5\right)$. Centro: $(3, -5)$.

Asíntotas: $y = \frac{4}{7}x + \frac{47}{7}$ e $y = -\frac{4}{7}x + \frac{23}{7}$.

33. Vértices: $(5, 5)$, $(-7, 5)$. Focos: $\left(\sqrt{84} - 1, 5\right)$, $\left(-\sqrt{84} - 1, 5\right)$. Centro: $(-1, 5)$. Asíntotas: $y = \frac{\sqrt{48}}{6}(x + 1) + 5 \approx 1{,}15x + 6{,}15$ e

$y = -\frac{\sqrt{48}}{6}(x + 1) + 5 \approx -1{,}15x + 3{,}85$.

35. Vértice: $(0, 0)$. Foco: $\left(0, \frac{1}{16}\right)$.

37. Vértices: $\left(1 \pm \frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$, $\left(1, \frac{1}{5} \pm 1\right)$.

Focos: $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2} + 1, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2} + 1, \frac{1}{5}\right)$. Centrada en $\left(1, \frac{1}{5}\right)$.

39. $D = -87$; elipse **41.** $D = 40$; hipérbola

47. Foco: $(0, c)$. Directriz: $y = -c$. **49.** $A = \frac{8}{3}c^2$

51. $r = \frac{3}{2+\cos\theta}$ **53.** $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$

55. Hipérbola, $e = 4$, directriz $x = 2$.

57. Elipse, $e = \frac{3}{4}$, directriz $x = \frac{8}{3}$ **59.** $r = \frac{12}{5-6\cos\theta}$

61. $\left(\frac{x+3}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{16/5}\right)^2 = 1$

63. 4,5 billones de millas

Capítulo 12 Repaso

1. (a), (c)

3. $c(t) = (1 + 2\cos t, 1 + 2\,\mathrm{sen}\,t)$. Los puntos de intersección con el eje y son $\left(0, 1 \pm \sqrt{3}\right)$. Los puntos de intersección con el eje x son $\left(1 \pm \sqrt{3}, 0\right)$.

5. $c(\theta) = (\cos(\theta + \pi), \mathrm{sen}(\theta + \pi))$ **7.** $c(t) = (1 + 2t, 3 + 4t)$

9. $y = -\frac{x}{4} + \frac{37}{4}$ **11.** $y = \frac{8}{(3-x)^2} + \frac{3-x}{2}$

13. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=3} = \frac{3}{14}$ **15.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{\cos 20}{e^{20}}$

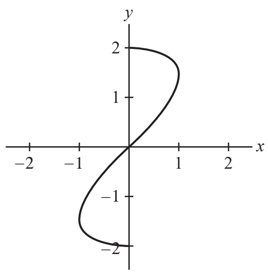
17. $(0, 1)$, $(\pi, 2)$, $(0{,}13, 0{,}40)$, y $(1{,}41, 1{,}60)$

19. $x(t) = -2t^3 + 4t^2 - 1$, $y(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t - 1$

21. $\frac{ds}{dt} = \sqrt{3 + 2(\cos t - \mathrm{sen}\,t)}$; celeridad maximal: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

23. $s = \sqrt{2}$

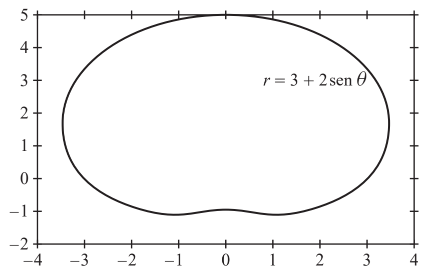
25.



$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 2t + \mathrm{sen}^2\, t}\, dt \approx 6{,}0972$

27. $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$ tienen coordenadas rectangulares $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

29. $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x-y}$ **31.** $r = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$



33. $A = \frac{\pi}{16}$ **35.** $e - \frac{1}{e}$

Nota: es necesario duplicar la integral de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ para tener en cuenta ambos lados de la gráf ca.

37. $A = \frac{3\pi a^2}{2}$

39. Exterior: $L \approx 36{,}121$, interior: $L \approx 7{,}5087$, diferencia: $28{,}6123$

41. Elipse. Vértices: $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$. Focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

43. Elipse. Vértices: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. Focos: $\left(0, \pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

45. $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{61}}\right)^2 = 1$ **47.** $\left(\frac{x}{8}\right)^2 - \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$ **49.** $x = \frac{1}{32}y^2$

51. $y = \sqrt{3}x + \left(\sqrt{3} - 5\right)$ y $y = -\sqrt{3}x + \left(-\sqrt{3} - 5\right)$

REFERENCIAS

El recurso on-line MacTutor History of Mathematics Archive **www-history.mcs.st-and.ac.uk** ha sido una valiosa fuente de información.

Sección 1.1

(EJ 77) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 9.

Sección 1.2

(EJ 25) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 9.

Sección 1.5

(EJEMP 4) Adaptado de B. Waits and F. Demana, "The Calculator and Computer Pre-Calculus Project, " in *The Impact of Calculators on Mathematics Instruction*, University of Houston, 1994.

(EJ 12) Adaptado de B. Waits and F. Demana, "The Calculator and Computer Pre-Calculus Project, " in *The Impact of Calculators on Mathematics Instruction*, University of Houston, 1994.

Sección 2.2

(EJ 61) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, Nota 28.

Sección 2.3

(EJ 38) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, Nota 28.

Capítulo 2 Repaso

(EJ 68) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, Nota 28.

Sección 3.1

(EJ 75) Problema sugerido por Dennis DeTurck, University of Pennsylvania.

Sección 3.2

(EJ 92) Problema sugerido por Chris Bishop, SUNY Stony Brook.

(EJ 93) Problema sugerido por Chris Bishop, SUNY Stony Brook.

Sección 3.4

(PQ 2) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 25.

(EJ 48) Karl J. Niklas and Brian J. Enquist, "Invariant Scaling Relationships for Interspecif c Plant Biomass Production Rates and Body Size," *Proc. Natl. Acad. Sci.* 98, no. 5:2922-2927 (February 27, 2001)

Sección 3.5

(EJ 47) Adaptado de una contribución realizada por Jo Hoffacker, University of Georgia.

(EJ 48-49) Adaptado de una contribución realizada por Thomas M. Smith, University of Illinois at Chicago y Cindy S. Smith, Plainf eld High School.

(EJ 45) Adaptado de Walter Meyer, *Falling Raindrops,* en *Applications of Calculus*, P. Straff n, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993

(EJ 52, 56) Problemas sugeridos por Chris Bishop, SUNY Stony Brook.

Sección 3.9

(EJ 32) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

(EJ 34) Problema sugerido por Kay Dundas.

(EJ 38, 44) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Capítulo 3 Repaso

(EJ 64, 83) Problemas sugeridos por Chris Bishop, SUNY Stony Brook.

Sección 4.2

(NM p. 184) Adaptado de “Stories about Maxima and Minima,” V. M. Tikhomirov, AMS, (1990).

(NM p. 189) De Pierre Fermat, On Maxima and Minima and on Tangents, traducido por D.J. Struik (ed.), A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.

Sección 4.5

(EJ 26-27) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

(EJ 40) Problema sugerido por John Haverhals, Bradley University. *Fuente:* Illinois Agrinews.

(EJ 42) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

(EJ 66-68) Adaptado de B. Noble, Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering, Macmillan, New York, 1967.

(EJ 70) Adaptado de Roger Johnson, “A Problem in Maxima and Minima,” *American Mathematical Monthly*, 35:187-188 (1928).

Sección 4.6

(EJ 67) Adaptado de Robert J. Bumcrot, “Some Subtleties in L’ Hôpital’s Rule,” en *A Century of Calculus*, Part II, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

(EJ 28) Adaptado de “Calculus for a Real and Complex World” por Frank Wattenberg, PWS Publishing, Boston, 1995.

Sección 4.7

(EJ 20) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 52.

(EJ 32-33) Adaptado de E. Packel y S. Wagon, *Animating Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1997, p. 79.

Capítulo 4 Repaso

(EJ 68) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Sección 5.1

(EJ 3) Problema sugerido por John Polhill, Bloomsburg University.

Sección 5.2

(FI&C 84) Problema sugerido por Chris Bishop, SUNY Stony Brook.

Sección 5.4

(EJ 40-41) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 102.

(EJ 42) Problema sugerido por Dennis DeTurck, University of Pennsylvania.

Sección 5.5

(EJ 25-26) M. Newman y G. Eble, “Decline in Extinction Rates and Scale Invariance in the Fossil Record.” *Paleobiology* 25:434-439 (1999).

(EJ 28) De H. Flanders, R. Korfhage y J. Price, *Calculus,* Academic Press, New York, 1970.

Sección 5.6

(EJ 62) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 121.

Sección 6.1

(EJ 48) Adaptado de Tom Farmer and Fred Gass, “Miami University: An Alternative Calculus” en *Priming the Calculus Pump*, Thomas Tucker, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990, Nota 17.

(EJ 61) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Sección 6.3

(EJ 60, 62) Adaptado de G. Alexanderson and L. Klosinski, “Some Surprising Volumes of Revolution, “ *Two-Year College Mathematics Journal* 6, 3:13-15 (1975).

Sección 7.7

(EJ 48, 79) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Sección 8.1

(EJ 56-58, 59, 60-62, 65) Problemas sugeridos por Brian Bradie, Christopher Newport University.

(EJ 70) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

(FI&C 79) Adaptado de J. L. Borman, “A Remark on Integration by Parts,” *American Mathematical Monthly* 51:32-33 (1944).

Sección 8.3

(EJ 43-47, 51) Problemas sugeridos por Brian Bradie, Christopher Newport University.

(EJ 62) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 118.

Sección 8.6

(EJ 81) Problema sugerido por Chris Bishop, SUNY Stony Brook.

Sección 8.8

See R. Courant y F. John, Introduction to Calculus and Analysis, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1989.

Sección 9.1

(FI&C 52) Adaptado de G. Klambauer, *Aspects of Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1986, Ch 6.

Sección 10.1

(EJ 55) Adaptado de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Springer-Verlag, New York, 1979.

(EJ 57) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

(EJ 58, 63) Adaptado de M. Tenenbaum and H. Pollard, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1985.

Sección 11.1

(EJ 68) Adaptado de G. Klambauer, *Aspects of Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1986, p. 393.

(EJ 92) Adaptado de Apostol y Mnatsakanian, “New Insights into Cycloidal Areas,” *American Math Monthly*, Agosto-Septiembre 2009.

Sección 11.2

(EJ 42) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 137.

(EJ 43) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 138.

(FI&C 51) Adaptado de George Andrews, “The Geometric Series in Calculus,” *American Mathematical Monthly* 105, 1:36-40 (1998)

(FI&C 54) Adaptado de Larry E. Knop, “Cantor’s Disappearing Table,” *The College Mathematics Journal* 16, 5:398-399 (1985).

Sección 11.4

(EJ 33) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993, p. 145.

Sección 12.2

(FI&C 35) Adaptado de Richard Courant y Fritz John, *Differential and Integral Calculus*, Wiley-Interscience, New York, 1965.

Sección 12.3

(EJ 56) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

CRÉDITOS DE LAS FOTOS

PÁGINA 1, CO1
Roger Whiteway/ iStockphoto.com

PÁGINA 34
izquierda Eric Dietz/
http://www.wrongway.org/java/ mandel.php

PÁGINA 34
derecha Eric Dietz/
http://www.wrongway.org/java/ mandel.php

PÁGINA 40, CO2
Scott Camazine/Photo Researchers

PÁGINA 41
derecha NASA/JPL-Caltech/STScI

PÁGINA 41
izquierda Wayne Boucher

PÁGINA 81
NASA

PÁGINA 86
derecha University Archives, University of Pittsburgh

PÁGINA 86
izquierda Rockefeller Archive Center

PÁGINA 101, CO3
United States Department of Defense

PÁGINA 111
The Granger Collection, New York

PÁGINA 127
Brian Jackson/ iStockphoto.com

PÁGINA 134
derecha Bettmann/Corbis

PÁGINA 134
izquierda Franca Principe/ IMSS - Florence

PÁGINA 150
Bettmann/Corbis

PÁGINA 155
superior A & J Visage / Alamy

PÁGINA 155
inferior Doug James/ Dreamstime.com

PÁGINA 175, CO4
John Derbyshire

PÁGINA 177
Space Age Control, Inc.

PÁGINA 189
Bettmann/Corbis

PÁGINA 189
Stapleton Collection/Corbis

PÁGINA 193
Daniel Grill/ iStockphoto.com

PÁGINA 244, CO5
Aerial Archives / Alamy

PÁGINA 253
Bettmann/Corbis

PÁGINA 254
Daryl Balfour/Gallo Images/ Alamy

PÁGINA 259
The Granger Collection

PÁGINA 296, CO6
Mason Morf t/ Peter Arnold Images / Photolibrary

PÁGINA 310
Corbis/ Alamy

PÁGINA 334
Elvele Images / Alamy

PÁGINA 339, CO7
Pierre Vauthey/Corbis SYGMA

PÁGINA 339
AP Photo/Paul Sakuma

PÁGINA 355
Romeo Gacad/AFP/ Getty Images

PÁGINA 365
Dr. Gary Gaugler / Photo Researchers, Inc

PÁGINA 366
cortesía de Michael Zingale

PÁGINA 367
Copyright © 2010 The Regents of the University of California. Todos los derechos reservados.
Utilizar con permiso.

PÁGINA 368
Bettmann/Corbis

PÁGINA 368
Pierre Vauthey/Corbis SYGMA

PÁGINA 369
G.D. Carr

PÁGINA 378
Mr_Jamsey/ iStockphoto

PÁGINA 378
Hector Mandel/ iStockphoto

PÁGINA 399
Corbis

PÁGINA 410
izquierda Library of Congress

PÁGINA 410
derecha Library of Congress

PÁGINA 413, CO8
Cortesía, Steven N. Ward, University of California Santa Cruz http://es.ucsc.edu/ ward

PÁGINA 478, CO9
NASA Ames Research Center / Photo Researchers

PÁGINA 485
Jeff Rotman

PÁGINA 487
Lester Lefkowitz/ Corbis

PÁGINA 490
REUTERS/STR /Landov

PÁGINA 491
Mark Dadswell/Getty Images

PÁGINA 496
The Granger Collection, New York

PÁGINA 498
Roger Viollet Collection/Getty Images

PÁGINA 502
The Granger Collection

PÁGINA 503
Alexandr Ozerov/iStockphoto

PÁGINA 513, CO10
Elizabeth Kreutz/Corbis

PÁGINA 543, CO11
NASA y J.J. Hester (Arizona State University)

PÁGINA 561
Mechanics Magazine London, 1824

PÁGINA 613, CO12
Mircea Bezergheanu/ iStockphoto

PÁGINA 620
Renault Communication /TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS

PÁGINA 654
Stockbyte

PÁGINA 655
Architect of the Capitol

ÍNDICE DE MATERIAS

Los números en negrita corresponden al volumen de **varias variables**.

abscisas, *véase* coordenadas x
aceleración, 132, 140, **762**
– normal, **765**
– tangencial, **765**, **770**
aditividad
– de integrales de línea, **961**
– de momentos, 495
– para intervalos adyacentes, 262
afelio (de órbita planetaria), 659
Agnesi, Maria, 127
álgebra
– lineal, teoría de matrices y determinantes, **694**
– vectorial, **665–670**
– y producto vectorial, **694**
altura
– máxima, 132–133
– y velocidad, 132
amplitud (de una gráf ca), 9
análisis vectorial, teoremas fundamentales de, **1009–1017**
Andrews, George, 564
ángulo(s)
– complementarios, 30, 392
– de declinación (ϕ), **721**
– de incidencia, 220
– de inclinación, **827**
– – de una curva plana, **756**
– de ref exión, 220
– en radianes, 26
– entre vectores, y producto escalar, **684–686**
– estudio de, **687**
– obtuso, comprobación, **687**
anticonmutatividad, de producto vectorial, **696**
antiderivación, *véase* integración
antiguos griegos, matemáticos y f lósofos, 496, 647
anualidad, 379
– perpetua, 450–451
aplicación(es), 4, **926–929**
– cambios de área por una, **929–931**
– cuadrícula rectangular, **932**
– de coordenada polar, **926**
– inversas, **935**
– inyectiva, **931**
– jacobianos, **929–931**
– lineales, **926–927**
– – jacobiano de, **929–930**
– y cambio de variables, **931–936**
Apolonio de Perga, 121
aproximación(es)
– basada en
– – el extremo inferior, 248, 249, 251, 304, 465
– – el extremo superior, 246, 250, 324
– – el punto medio, 248, 257
– – los extremos, 253, 257, 258, 280, 526
– de la derivada, 104
– de paralelogramos, **930**
– de primer orden, 488, **1028**
– de rectángulos, **930**
– de sumas inf nitas, 554
– error en, 176, 179–180
– extremo superior, 246, 250–251, 465
– lineales, 175–178, 499, **814–816**
– numéricas, 228–230
– parabólicas, 471
– poligonales, 478–480, 481, 626, **747**
– por linealización, 178
– por sumas de Riemann, 257, 268
– punto medio, 248, 257
– trapezoidal, 280
– y polinomios de Taylor, 499
aproximadamente igual a (≈), 175
arcos
– de circunferencia, longitud de, 25, 627
– formas gráf cas de, 208–209
arcotangente, de funciones lineales o cuadráticas, 444
área, 244
– acumulada de una función, 273
– – derivada de, 273
– – y concavidad, 278
– aproximación
– – del área por debajo de una gráf ca, 244–253
– – mediante rectángulos, 244–246
– – y cálculo de, 244–253
– bajo una gráf ca, aproximación trapezoidal, 465
– cálculo
– – mediante el teorema de Green, **1012**
– – como el límite de aproximaciones, 250–253
– – como un límite, 250
– – dividiendo una región, 250
– cambios por una aplicación, **929–931**
– con signo, 259–260, 299, 447
– de un polígono, **1020**
– de un trapecio, 465
– de una elipse, **1012**
– de una superf cie, 629, **985–989**
– entre dos curvas, 296–298, 315–316
– entre gráf cas, 396–398
– paralelogramo, **986**
– producto vectorial y determinantes, **698–699**
– y coordenadas polares, 640–643
– y producto vectorial, **694–697**
Aristarco, **775**
Arquímedes, 496, 561, **898**
asíntota(s)
– de una hipérbola, 649–650, 651–653
– funciones con, 36
– horizontal, 36, 81–82, 212
– vertical, 35, 53–54, 208, 211, 212

ball grid array (BGA), **802**
banda de Möbius, **999**
Barrow, Isaac, 267
base (función exponencial), 22, 339
Bernoulli, Jacob, 253, 561, 618
Bernoulli, Johann, 561
Bernstein, Sergei, 620
Bézier, Pierre, 620
Brahe, Tycho, **775**

bruja de Agnesi, 127
Bubble Sort, 385

cabeza (en el plano), **663**
caída libre, 377–378
calculadoras
– representación gráf ca, 34–37
– y funciones exponenciales, 339
cálculo(s)
– *véase también* teorema fundamental del cálculo (FTC)
– diferencial, 40, 101
– integral, 40, 78, 244
– inventores del, 41, 111, 189
– f nancieros y funciones exponenciales, 371–372
– series inf nitas, 543
– y teoría de series inf nitas, 543
caloría, 330
cambio
– de base, fórmula, 356
– de signo, 196–197, 199, 208
campo(s)
– campo vectorial velocidad, **1006**
– de fuerza, **962**–**972**
– de pendientes, 522–528
– de un f ujo de f uido, **999**–**1000**
– de vorticidad, **967**, **976**
– eléctricos, **956**, **973**, **1001**–**1012**, **1041**–**1043**
– espinoriles, **947**
– magnéticos, **1001**–**1003**, **1030**, **1043**
– – de un solenoide, **1028**–**1029**
– – velocidad en, **697**
– – y producto vectorial, **694**
– potenciales para, **949**
– teorema fundamental para, **969**
– vectoriales, **945**–**948**, **1011**, **1014**, **1016**, **1030**
– – circulación de, **969**
– – componente normal de, **997**
– – con divergencia cero, **1034**–**1044**
– – con divergencia igual a cero, **1038**
– – con f ujo diferente de cero, **1044**
– – con rotacional diferente de cero, **1013**
– – conservativos, **947**–**949**, **969**–**979**
– – constante, **946**
– vectorial de vorticidad, **973**
– – divergencia de, **1034**
– – gradiente, **947**
– – integrales de superf cie de, **995**–**999**
– – irrotacional, **1046**
– – radial, **1034**
– – radial cuadrático inverso, **1039**–**1041**
– – radial unitario, **1039**
– – rotacionales, independencia de la superf cie para, **1027**
– – unitario, **945**–**951**
– velocidad
Cantor, la mesa que desaparece, 565
capa f na, 323
capacidad calorífica, 284
capacidad de carga, 529
capas cilíndricas, método de, *véase* método de las capas
caracol, 635–636
– de Pascal, 162
Cauchy, Augustin Louis, 50, 92, 581, **1036**
centro
– de curvatura, **757**
– de masa, 491–495, **915**
– de una elipse, 649
– de una hipérbola, 649
centroide, 493–495
polinomios de Chebyshev, 38
cicloide, 618–619, 624, 627
– vectores tangentes horizontales a la, **741**–**742**
cilindros
– cuadráticos, **715**
– curvas de cuadrícula sobre, **983**
– ecuación de, **676**
– parametrizaciones de, **981**–**982**
– rectos, volumen de, 304
cinturones de Van Allen, **694**
circuitos, corriente en, 384
circulación, **969**, **1013**
– por unidad de área, **1017**
círculo, área de, 642
circunferencia
– curvatura de, **753**
– ecuación de la, 4
– involuta de, 635, **752**
– momento de, 495
– osculatriz, **756**–**757**
– parametrización de, 616, **732**–**733**
– que mejor ajusta, **756**
– unidad, 25, 26, 28, 48, 618, **718**
– y ecuaciones polares, 637
cisoide, 639
Clairaut, Alexis, **805**
clotoide, **760**
Cobb, Charles, **855**
cociente(s), 1, 21, 340, 356
– incremental, 101, **741**
– – y aproximaciones a la derivada, 102
– límites de, y regla de L'Hôpital, 385
– regla de continuidad, 65–66
coef ciente(s), 21
– binomial, 602, 603
– – relación de recurrencia para, A15
– principal, de un polinomio, 21
– – patrón de, 469
– indeterminados, y fracciones parciales, 441, 438
cola (en el plano), **663**
combinación(es)
– de signo, 208
– lineal de
– – funciones, 22–23
– – vectores, **667**–**668**, **677**
conmutatividad, del producto escalar, **685**
completar cuadrados, técnica, 18, **846**
componente(s)
– de vectores, **664**
– de **u**, **688**
– **i**, **j** y **k**, **664**–**668**, **729**, **1023**–**1028**
– normal de aceleración, **765**, **766**
– normal de un campo vectorial, **963**
– tangencial
– – de aceleración, **765**, **766**
– – de campo vectorial, **958**, **960**, **962**, **963**
– y operaciones de vectores, **666**–**667**
comportamiento asintótico, 81, 208, 210–212
concavidad
– criterio de, 202
– def nición de, 201
– y criterio de la segunda derivada, 204–205
– y función área, 276
concha de nautilus, 613
concoide, 162
condición de Lagrange, **854**
condición de las parciales cruzadas, **948**, **950**, **974**–**977**
condición inicial, 237, 515–516
– y primitivas, 237–238
conjunto
– de números racionales, 1
– de puntos intermedios, 293
– de Mandelbrot, 33
– de todas las ternas, **674**
– S, 3
cono, **789**, **909**
– parametrización, **980**–**981**
constante
– de enfriamiento, 377
– de Euler, 554
– de gravitación universal de Newton, **766**
– de integración, 235
– del muelle, 331
– integral de una, 260
consumo de potencia, y velocidad, 36

continuidad, 62
– de funciones compuestas, 66
– de polinomio y funciones racionales, 65
– de series de potencias, 597
– en un punto, 62
– lateral, 63
– para funciones, **794**, **795**
– por la derecha, 63
– por la izquierda, 63
– propiedades, 64–66
– reglas para cocientes, 65–66
– y derivabilidad, 115
– y límites, 62–68
– y método de sustitución, 66–67
convergencia
– absoluta, 575
– condicional, 575, 576
– de integrales impropias, 448
– de series de términos positivos, 580–586
– de una serie inf nita, 555
– radio de, 600–602
– – inf nito, 594
coordenadas, 3
– angulares, 633, 634, 637
– cartesianas, *véase* coordenadas rectangulares
– cilíndricas, **719–721**, **981–982**
– – integrales triples en, **905–906**
– curvilíneas, **982**
– esféricas, **721–724**, **907**
– – integrales triples en, **891–896**
– – superf cies de nivel en, **720**
– – y campo magnético terrestre, **694**, **907**
– – y longitud y latitud, **721**
– polares, 632–636, 640–643, **834**
– – derivada en, 639
– – integrales dobles en, **902–905**
– – longitud de un arco en, 640–643
– – y área, 640–643
– radiales, 632–634
– rectangulares (o cartesianas), 3, 613, 632–636, **720–724**
– – superf cies de nivel en, **720**
– x e y, 3
Copérnico, Nicolás, **775**
copo de nieve de Koch, 565
cordillera del monte Whitney, **786**
córnea, contorno de, **760**
coronas circulares (discos), 325–326
corriente
– de transición, 540
– en un circuito, 382
cosecante, 28
– hiperbólica, 401
coste
– marginal, 131–132, 282
– – de reducción, 284
– total, 282
cota
– del error, 179
– para la regla de Simpson, 469–470
– para las reglas del trapecio y del punto medio, 465–466
– para polinomios de Taylor, 503–506, 599
– superior de una sucesión, 549
cotangente, 28
– hiperbólica, 401
crecimiento
– de poblaciones, 529
– y decrecimiento exponencial, 364–368
criterio(s)
– de comparación
– – para la convergencia de series de términos positivos, 568
– – para la convergencia de series de términos positivos, 568
– – para límites, 570
– – por paso al límite del cociente, 570
– de divergencia, 559
– de la primera derivada, 196–197
– – para puntos críticos, 196–198
– de la raíz, 583
– de la recta vertical, 6
– de la segunda derivada, **846**
– – para puntos críticos, 205, **841–843**
– – prueba de, 207
– de Leibniz para series alternadas, 576–577
– del cociente, 581–584, 587–594
– del discriminante, 657
– integral, 566, 567
– para la convergencia y divergencia de series
– – p-series, 567–568
– – criterio de comparación (por paso al Límite del cociente), 570
– – criterio de comparación, 568
– – criterio de divergencia, 559–560
– – criterio de la raíz, 583
– – criterio de Leibniz para series alternadas, 576–577
– – criterio del cociente, 581–582
– – criterio integral, 566
– – teorema de la dicotomía para series de términos positivos, 566
cuadrícula
– curvilínea, **932**
– rectangular, aplicación de, **932**
cuevas de Chauvet, 370
cuña esférica, **907–908**
curva(s)
– área entre dos, 296–298, 642
– Bézier, 620
– cerrada, **1014**
– – simple, **878**, **887**, **1009**, **1015**
– cóncava y convexa, 201–202
– cúbica torcida, **755**
– de cuadrícula, **982–983**
– de frontera, **1015**, **1021**
– – suave a trozos, **878**
– – suave a trozos, **878**
– de la restricción, **853–856**
– – acotada, **855**
– de nivel, **782–788**, **842**
– – de una función potencial, **971**
– – espaciado de, **784–785**
– de resonancia, 192
– dirección de, **957**
– en el espacio, **730**, **733**
– familia ortogonal de, 521
– frontera suave a trozos, **878**
– gaussiana, **913**
– hélice, **731–732**
– índice de la trayectoria de, **977**
– integrales, 522, **1013**
– lemniscata, 639
– orientadas, **957**
– paramétricas, 613–614, 616–617, 620, 622, **730**
– – área debajo de, 625
– – derivada segunda de, 624
– plana, longitud de arco, 626
– regiones entre, **880–885**
– suave, **878**
– – a trozos, **878**, **960**
– tridente, 161–162
– y secciones cónicas, 615
curvatura, **752–759**
– centro de, **757**
– de una gráf ca en el plano, **755–756**
– fórmula para, **754**
– radio de, **753**

datación por carbono, 368
decimales
– f nitos, 1
– inf nitos no periódicos, 1
– inf nitos periódicos, 1
declinación magnética, para Estados Unidos, **809**
delta (δ), 92
delta (Δ) notación, 42
densidad
– de masa

– – constante, 491, 494, **794**
– – de una curva, **955**–**956**
– – lineal, 306–307
– – y masa total, 306–307
– de población, 307, 313
– del agua de mar, **780**, **810**
– – mapa de contorno de, **803**
– lineal de masa, 306
– uniforme, 491, 494, **794**
derivación, 103, 139, **811**–**815**
– criterio para la, **812**, A25
– de una series de potencias, 590
– de vectores, **750**
– e integración, 275
– e integración término a término, 590
– implícita, 122, 157–160, **834**–**835**
– logarítmica, 359
– parcial
– reglas básicas de, 112–114
– y continuidad, 115
– y linealización local, 116
– y plano tangente, 102, 115, **812**
derivadas *véase también* primitivas; criterio de la primera derivada; criterio de la segunda derivada
– aceleración, 140
– como una función, 110–111
– como vector tangente, **740**–**742**
– con valores escalares, **721**, **729**, **739**, **741**
– de b^x, 341–343
– de funciones
– – hiperbólicas inversas, 400, 402, 435
– – inversas, 354
– – logarítmicas, 355–357
– – trigonométrica, 144–146
– – trigonométricas inversas, 393
– – vectoriales, **737**–**738**, **742**
– de orden *n*, 138, 139
– – y teorema de Clairaut, **805**
– de orden superior, 138–141, **804**–**806**
– de series de potencias, 590
– de una función constante, 104
– de vector velocidad, **762**
– def nición de, 101–102
– direccionales, **823**–**828**
– discontinuas, 156
– en coordenadas polares, 632
– estimación, 104
– – mediante mapas de contorno, **803**
– normal, **1021**
– parciales, **780**, **800**–**807**, **814**, **840**
– – mixtas, **804**
– – mixtas, igualdad de, **805**
– primaria, **832**–**834**
– primera, 139, 203–204
– segundas, 138–141, 204–205, **752**
– – para una curva parametrizada, 624
– – trapecio, 465–466
– – y vector aceleración, **762**
– signo de la, 195
– trigonométricas en grados, 152
– y recta tangente, 102
desarrollo(s)
– de Maclaurin, 599–600
– de Taylor, 599, 600
– decimal, 1–2
– – f nito, 1
– en serie de potencias, 589, 597–598
Descartes, René, 3, 189
descomposición
– de cuña esférica, **907**
– de rectángulo polar, **904**
– en fracciones parciales, 438-441, 442–445
desigualdad triangular, 2, **670**
desigualdades e intervalos, 3
desplazamiento, 628
– de una gráf ca, 8
– y cambio de posición, 42
determinante(s)
– jacobiano, **929**–**931**
– – de aplicación inversa, **935**–**936**
– menores, **694**
– simbólicos, **694**
– valor absoluto de, **698**
– y área y volumen, **697**–**699**
– y producto vectorial, **694**
diagrama de fuerzas, **669**
dicotomía de las series de términos positivos, 566, 568
diferencial longitud de arco, **954**
diferenciales, 111, 176, 235, 286, **815**
– mediante sustitución, 286–288
dilatación térmica, 177
dinámica de f uidos, **945**
– computacional, 478
Dirac, Paul, **947**
dirección hacia arriba, a lo largo de una curva, **957**
directriz, 650–653
Dirichlet, Lejeune, 581
disco
– abierto, **793**
– perforado, **793**
discontinuidad, 62–64
– de salto, 63–64
– de una función, 183
– evitable, 63
– inf nita, 64, 451, 452
discriminantes, 17, **841**–**843**, **846**–**847**
– y secciones cónicas, 656–657
distancia
– de frenado, 130
– recorrida
– – velocidad y tiempo, 244
– – y desplazamiento, 628
distribución de Boltzmann, **862**
divergencia
– de integrales impropias, 448
– de series armónicas, 561
– de un campo vectorial, **1035**
– de una serie inf nita, 555
– de una sucesión, 544
DNA, y curvatura, **752**
dominios, 4, 5, 348, 349, **843**
– abierto, **812**, **843**
– – y arcoconexo, **948**, **949**
– acotados, **843**, **844**
– arcoconexo, **885**
– – y no arcoconexo, **885**
– cerrados, **843**, **878**
– de integración, **868**
– de los parámetros, **980**, **981**
– descomposición de, **886**
– integrales dobles sobre, **878**–**887**
– simplemente conexas, **974**–**975**
– sin agujeros, **1042**
– y coordenadas cilíndricas, **920**
– y coordenadas polares, **905**
– y curvas de frontera, **1015**
– y diferenciabilidad, **812**
– y fórmula del cambio de variables, **934**–**935**
– y fronteras, **1009**, **1034**
– y jacobianos, **929**
– y *n* variables, **780**–**781**
– y regiones entre curvas, **880**–**885**
– y sucesiones, 543
– y teorema de Green, **1009**
Douglas, Paul, **855**
Dürer, Albrecht, 636

e, 342
– irracionalidad de, 609
ecuación(es)
– de Korteweg-deVries, **810**
– de la recta tangente, 102
– de Lagrange, **854**–**855**
– de Laplace, **990**
– de Maxwell del electromagnetismo, **1043**
– de onda, **1043**
– de restricción, 217
– de una elipse, 648

– de una hipérbola, 650
– de una parábola, 651
– de una recta, 13, 16
– – forma pendiente-ordenada, 13, 16, 17
– – forma punto-punto, 16
– del calor, **806**
– del campo de Einstein, **775**
– diferenciales, 237, 513–518
– – de Gompertz, 371
– – de primer orden, 525
– – de segundo orden, 404
– – homogéneas, 540
– – lineales, 513, 514
– – lineales de primer orden, 534–538
– – logística, 529–532
– – orden de, 514
– – para funciones vectoriales, **743**
– – serie de potencias solución de, 591–594
– – solución general, 513
– – solución particular, 237
– – soluciones a, **776**
– – y funciones exponenciales, 364–365, 370
– en derivadas parciales, **806**
– generales de grado dos, 655–657
– lineal, 16
– – de primer orden, 534–538
– logística inversa, 528, 533
– paramétricas, 613–621
– – de una recta, **678**–**681**
– polares, 634, 637, 654, 657
– – de secciones cónicas, 654
– punto-pendiente de una recta, 16
– punto-punto de una recta, 16
– representación gráf ca de, 6
– segmentaria, 19
– separables, 514
efecto Aharonov-Bohm (efecto AB), **1030**
efecto de un pequeño cambio, 175
Einstein, Albert, 403, 134, 259, 331
– ley de suma de velocidades, 403–404
eje(s), 3
– conjugado de una elipse, 647
– de la parábola, 650
– de una elipse, 649
– de una hipérbola, 650
– horizontal, 334–335
– – revolución alrededor de un, 316–318
– vertical, revolución alrededor de un, 318–319, 325–326
– *x*, 3
– – rotación alrededor del, 314
– – simetría alrededor de, 646
– *y*, 3
– – integración a lo largo de, 318–319
– *z*, **714**
elección inicial, 228, 229
electromagnetismo, **1043**
electrones, trayectoria de, **1030**
elemento
– de línea, **954**
– de superf cie, **987**
elipse, 647–649, **726**, **727**
– área de, 292, **1012**
– def nición de foco-directriz, 653
– directriz de, 651
– en coordenadas polares, 654
– excentricidad de, 651
– parametrización de, 616–617
– propiedades de ref exión de, 655
– traslación, 649
elipsoides, **711**
energía
– cinética, 67, 336, 450, **917**–**918**, **972**
– conservación de, 450, **972**–**973**
– potencial, **972**–**973**
– y trabajo, 330–333
enfriamiento, tasa de, 377
epsilon (ϵ), 92
equilibrio
– estable, 530
– inestable, 530
error, 179
– en aproximación lineal, 175–176, 179–180
– en linealización, 178–179
– porcentaje, 179
escala, 14
– Richter, 355
escalar, **666**
– y producto escalar, **684**
esfera
– en dimesiones mayores, **898**
– parametrización de, **854**
– potencial gravitatorio de, **990**
– volumen de, 365, **898**–**899**
– y gradiente, **825**
– y superf cies de nivel, **788**
espectros de absorción, 543
espiral
– de Bernoulli, **746**
– equiangular, 613
Euler, Leonhard, 342, 404, 450, 561
excentricidad
– de hipérbola, 653
– de la órbita de Mercurio, 233
– de una sección cónica, 652
– y elipses, 652–653
exponentes
– negativos, 340
– regla de los, 339–340
expresiones con raíz cuadrada, 426
extremos locales, 184–186, **839**–**840**

factor(es)
– de integración, 534
– cuadráticos, 442–445
– – irreducibles, 442–443
– – reducibles, 442
– – repetidos, 443
– lineales distintos, 438
familias ortogonales de curvas, 521
Faraday, ley de la inducción, 136, **1001**–**1002**
Fermat, Pierre de, 189
Feynman, Richard, 131, 330
Fior, Antonio, 232
f uido incompresible, **1039**
f ujo, **996**, **999**
– a través de un campo vectorial, **995**, **998**, **1040**–**1042**
– de Couette, **1014**
– de f uidos, **999**–**1003**
– de ingresos, 373
– de tensiones (f ujo de Couette), **1014**
– laminar, 308
eje focal, de una elipse, 647
foco-directriz def nición (de cónicas), 652, 653
focos
– de una elipse, 647, **771**
– de una hipérbola, 649
folium de Descartes, 161, 624, **1018**
formas
– diferenciales, teoría de, **1035**
– cuadráticas, **846**
fórmula(s)
– cuadrática, 17
– de adición, 30,
– de Bernoulli, 253
– de desplazamiento, 30
– de Euler, 405
– de Frenet, **762**
– de integración, 236, 238
– – de funciones trigonométricas inversas, 393, 394
– de la distancia, 3–4, 639
– – en tres dimensiones, **674**–**675**
– – y vectores, **664**
– de reducción, 415–416
– – para el seno y el coseno, 419
– – para integrales, 415–416
– del ángulo doble, 30

– del cambio de variables, 286, 288–289, **926–931**
– – en tres variables, **936**
– – linealización de, 261
– – propiedades de, 260–263
– – y aplicaciones, **931–936**
– – y teorema fundamental del cálculo, 267
– del producto
– para integrales, 237, 396, 401, 406, 433, 435
– recursivas, *véase* fórmulas de reducción, 415
fracciones, derivadas como, 150
Franklin, Benjamin, 533
Fraunhofer, patrón de difracción, 57
bloqueo de variables, **711**
fronteras, **1021**
– del cuadrado, **843**
– orientada, **1027**
fuerza, 330, 485–488
– cálculo, 485–486
– centrípeta, 521
– como magnitud vectorial, **669**
– componente tangencial de, **963**
– de gravitación, **973**
– de un f uido, 485–488
– electrostática, **949**
– en campo magnético, **697**
– en una superf cie inclinada, 487
– normal, **688**
– orientadas, **1021**
– resultante, **669**
– y trabajo, **962–963**
función(es)
– algebraicas, 22
– arcoseno, 390, 391
– – derivada de, 392
– área, 273, 278
– – acumulada
– armónicas, 554, 567, **1021**
– cero (o raíz) de, 5, 88, 228
– combinación lineal, 22
– componentes, **729**, **765**
– compuestas, 66, 68, 148, 273, 283, **744**, **795**
– – continuidad de, 66
– – y regla de la cadena, **832**
– con asíntotas, 36
– con derivada cero, 188, 195
– con discontinuidad inf nita, 64
– con valores escalares, **729**
– con valores reales, **729**
– – de *n* variables, **780**
– construcción de nuevas funciones, 22–23
– continuas, 62–68, 64–66, 67–68, 115, 183–184, **844**, **870**
– – integrabilidad de, 258, A22
– – por la derecha, 63
– – por la izquierda, 63
– continuidad de, 62–63
– coordenadas, **729**
– coseno
– – circunferencia unidad, def nición de, 26
– – derivada del, 144
– – desarrollos de Maclaurin, 602–603
– – período del, 27
– – propiedades básicas del, 31
– coste, 282
– – medio, 138
– crecientes, 6, 195
– cuadráticas, 17, 19, 444
– – gráf ca de, 17
– – hallar el mínimo de, 18
– curvas de nivel de, **782–784**
– de Bessel, 22, 586, 592, 604
– de dos o más variables, **780–788**
– de Gudermann, 437
– de producción de Cobb-Douglas, **855**
– de varias variables, **780**
– decreciente, 6
– def nición de, 4
– def nida a trozos, 63–64
– def nidas implícitamente, 22
– densidad de probabilidad, 459
– densidad radial, 307–308
– derivables, 102, 110, 115, **811**
– derivadas, 101–102
– – como, 110–114
– – parciales de orden superior, **804–807**
– diferenciable continuamente, **982**
– discontinuas, 62–64, 100
– elementales, 23
– elíptica
– – de primera especie, 604
– – de segunda especie, 609
– escalares, límites, **737**
– estrictamente creciente, 6
– estrictamente decreciente, 6
– exponenciales, 21, 22, 112, 339–346
– – con base *b*, 22, 355
– – continuidad de, 65
– – derivadas de, 341, 357–358
– – diferenciales ecuaciones de, 365
– – propiedades de, 339–340
– – series de potencias de, 585
– – y cálculos f nancieros, 371–372
– extremos locales de, 184–186
– formas indeterminadas de, 382
– función parte entera, 67
– gamma, 22, 458
– gaussianas, 461, 465
– gradiente de, **819**
– gráf ca de, 5
– hiperbólicas, 399-400, 407, 401, 433
– – derivadas de, 400–401
– – inversas, 401–405, 408, 433–436
– imagen de, 4, 5
– impares, 6–7
– integrables, 258, 508
– integral(es)
– – con funciones vectoriales, **742**
– – de superf cie de, **987**
– – triples de, **891–898**
– inversas, 347–353
– – def nida, 348
– – derivada de, A24
– – existencia de, 350
– invertibles, 350–351
– – derivadas de, 352–353
– inyectivas, 349-351, 353
– – gráf ca de, 350
– lineales, 13, **782**, **786–787**
– – derivada de, 104
– – gráf ca de, 16–17
– – mapa de contorno de, **785–786**
– – trazas de, **780**
– – y no lineales, 13, 16, 45, 104
– linealización, **811–812**
– – local de, 37
– localmente lineales, 116
– logarítmicas, 22, 355–356, 361
– longitud de arco, **746**, **747**, **749**, **753**
– modelización de, 67–68
– monótonas, 194–249
– no decreciente, 195
– no derivable, 185
– no lineal, 15
– numéricas, 5
– pares, 6, 7
– paridad de, 6–7
– periódicas, 27, 28
– polinomios, 21
– potencial, 21, **794**, **947**, **969–977**
– – determinación, **974–977**
– – existencia de, **974**
– producto, integral iterada de, **874**
– producto de, **874**, **795**
– racional propia, 438

– racionales, 21, 22, 65, 83, 438, **794**
– – continuas, **794**
– – continuidad de, 68
– radiales, **839**
– raíz de, 88
– rango o recorrido de, 4, 5
– representadas como una series de potencias, 586
– seno
– – circunferencia unidad, def nición de, 26
– – derivada de, 144–145
– – desarrollo de Maclaurin de, 600–601
– – período de, 27
– – propiedades básicas de, 31
– sucesiones def nidas por, 545
– tangente
– – derivada de, 145
– – integral de, 429–430
– tipos básicos de, 21–23
– trascendentes, 22
– trigonométricas, 22, 25–31, 144–146, 188, 390, 400, 401, 418
– – derivadas de, 145, 401, 435
– – integrales para, 237
– trigonométricas inversas, 21, 390–395, 415
– – derivadas de, 393–394
– – fórmulas de integración, 394
– valor absoluto
– – integral de, 260
– – no derivabilidad de, 116
– valor medio de, 309–310, 318–320
– valores extremos de, 183–189
– vectoriales, **729**–**733**, **737**–**745**, **772**
– – cálculo de, **746**–**747**
– – continuas, **750**
– – continuidad de, **748**
– – de longitud constante, **767**
– – derivadas de, **749**
– – ecuaciones diferenciales de, **755**, **785**
– – límites de, **747**–**748**
– – ortogonalidad de, **740**–**741**
– – productos escalar y vectorial de, **754**
– – teorema fundamental del cálculo, **743**
– velocidad, **743**, **756**
– y diferenciabilidad, **811**
– y gráf cas de dos variables, **781**–**783**
– y primitivas, 234
– y teorema de compresión, 76–79

galaxias Antennae, **775**
Galilei, Galileo, 41, 134, **775** *véase también* ley de Galileo
Gauss, C. F., 259
generación con vectores, **667**
Gompertz, Benjamin, 371
– ecuaciones diferenciales, 371
grado de un polinomio, 21
grados, 25, 26
gráf ca(s)
– amplitud de, 8, 9
– aproximación del área por debajo de, 244–246
– de curva cúbica torcida, **755**
– de funciones inyectivas, 349
– de funciones trigonométricas, 28
– de una función, 5
– – cuadrática, 17
– – lineal, 13, 16
– – no lineal, 15
– – parametrización de, **982**
– forma de, 201–205
– integral de superf cie de, **998**
– polar, 642
– ramas de, 159
– reescalado (cambio de escala) de, 8–9
– traslación (desplazamiento de), 7–8
– trazado, 7, 208–213
– y escalas, 14
– y rectángulos de visualización, 34
gravedad
– ley cuadrática inversa, 331
– trabajo contra la, **973**
– y aceleración, 132, 140
– y movimiento, 131
– y trabajo, 352
gravitación, ley universal de Newton, **772**
Gregory, James, 421, 599

Hamilton, William Rowan, **778**
hélice
– curva descrita, **731**–**732**
– vector unitario normal a, **756**
Herón de Alejandría, 220
hipérbolas, 399, 647, 651, 653, **712**, **717**
– asíntotas de, 652, 660
– directriz de, 650
– ecuación de, **665**
– excentricidad de, 650
– foco-directriz def nición de, 653
– propiedades de ref exión de, 655
– trazas horizontales, **784**
hiperboloide, 322, **713-714**, **788**
hipervolumen, **898**–**899**
hipótesis de Riemann, 259
Hooke, Robert, 331
Huxley, Julian, 5
Huygens, Christiaan, 150, 509, 618

identidades, 399
– trigonométricas, 29–31
imagen, **928**–**929**
inclinación de una recta, 13–14
independencia respecto a la trayectoria (de un campo vectorial), **969**, **971**
indeterminación, 72, 385
índice
– de la trayectoria de la curva, **977**
– de masa corporal, **815**
– de una serie inf nita, 555
– de una sucesión, 543
instrumento coductividad-temperatura-profundidad, **780**
integrabilidad, **870**
integración
– constante de, 235, 515, 535
– de series de potencias, 590
– doble, 307
– en coordenadas polares, **902**–**910**
– intercambio de límites de, 261–262
– límites de, 259, 373
– mediante
– – fracciones parciales, 438
– – sustitución, 285–290
– – sustitución trigonométrica, 426–431
– múltiple, **866**–**886**
– numérica, 413–438, 465–471
– para calcular trabajo, 330
– por partes, 413
– sobre
– – parte de una circunferencia, **879**
– – rectángulos, **880**
– – una caja, **891**
– término a término, 590
– vectorial, **742**–**743**
– y área de una región irregular, 244
– y búsqueda de primitivas, 244
– y cálculo de volúmenes, 304–305
– y diferenciación, 275
integral(es)
– alrededor de una trayectoria cerrada, **970**
– aplicaciones de, 296–326
– como variación neta de una tasa, 279, 288
– comparación de, 453
– de línea, **952**–**964**, **1009**–**1011**, **1025**
– – escalares, **952**–**955**
– – teorema fundamental para, **1034**
– – vectoriales, **957**–**963**
– – y teorema de Green, **1009**–**1010**, **1011**–**1012**
– – y teorema de Stokes, **1026**

– de superf cie, **981–990**, **987**, **988**, **990**, **991**, **997–1004**, **1026**, **1030**
– – de campos vectoriales, **996–1003**
– – sobre una gráf ca, **998**
– – vectorial, **996**
– de un vector gradiente, **947**
– de una constante, 260
– de una variable, **866**, **874**
– de valores absolutos, 271
– de velocidad, 279–280
– def nidas, 257–263, 267, 270, 273, 414
– derivación, 275
– dobles, **866**, **868–874**, **902–904**, **906**
– – linealización de, **870**
– – sobre dominios más generales, **878–887**
– – y cambio de variables fórmula, **926**
– elíptica de segunda especie, 609
– en una variable, **866**, **873**
– fórmulas de reducción, 415–416
– impropias, 447–458
– – absolutamente convergente, 458
– – convergencia de, 449
– – de x^p, 452
– – doblemente inf nita, 448
– – test de comparación, 453
– indef nidas, 235–238, 267
– – linealización de, 236
– – y teorema fundamental del cálculo (FTC), 268–269
– inf nitas, 448–449, 455
– interiores, **871**
– iteradas, **871–876**, **882–883**
– – integrales triples, **891–893**
– longitud de arco, 478–480, 627, 628
– múltiples, **866–874**
– – impropias, **913**
– primitivas como, 275, 279
– sobre superf cies vectoriales, **980**
– sobre una semiesfera, **997**
– teoremas del valor medio para, **885**
– trigonométricas, 236, 418–423
– – básicas, 236–237
– – tabla de, 418–422, 423
– triples, **891–900**, **905–906**, **907–910**
– – en coordenadas cilíndricas, **905–907**
– – en coordenadas esféricas, **907–910**
– y fórmula del cambio de variables, 286, 288
– y volumen, 304–306, 311, 314–320
integrandos, 235, 259
– con esenciales discontinuidades, 451
– e integración por partes, 413
– e integrales impropias, 451
intensidad de la luz, 369
interés compuesto, 371–373
– continuo, 372
intervalo(s)
– abierto, 2, 3, 184, 219
– adyacentes, 262
– cerrados, 2, 3, 184, 186
– – optimización en, 186–188
– – optimización en intervalos abiertos, 220–221
– de contorno, **784**, **786**, **787**, **809**
– de crecimiento y decrecimiento, 195, 197
– de tiempo, y velocidad media, 41–42, 43
– descripción mediante desigualdades, 3
– inf nito, 2, 448, 451
– notación estándar para, 2
– punto medio de, 3
– puntos críticos y puntos extremos de, 219
– radio de, 3
– semiabierto, 2
– valores de prueba dentro de, 209, 210, 211
– valores extremos en, 183
– y de puntos prueba, 197
involuta, 631
isoclina, 523
iteración, método de Newton, 228–230

julio, 330

Kepler, Johannes, 41, 223, 331, **771**, **775**
Kleiber, ley, 137
Koch, Helge von, 565

Lagrange, Joseph Louis, 111
láminas, 492–494, 496
Laplace, Pierre Simon, Marqués de, 404, **990**
latitud, **723**
Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 22, 103, 111, 123, 150, 189, 259, 286, 561, 600, 618
– notación, 111, 122, 128, 139, 150, 153, 286
– – derivadas de funciones vectoriales, **738**
– – derivadas de orden superior, 139
– – derivadas parciales, **800**
– – derivadas parciales de orden superior, **798**
– – diferenciales, 286
– – e integral def nida, 259
– – regla de la cadena, 150
lemniscata, 163, 639
ley(es)
– de Beer–Lambert, 372
– de Coulomb, **956**
– de enfriamiento de Newton, 377–378, 525
– de Galileo, 403
– de Gauss, **990**, **1041**
– de Hooke, 331
– de igual área en igual tiempo, **772**
– de Kepler, 41, 331, **772–775**
– de la conservación de la Energía, **947**, **972**
– de la gravitación universal de Newton, 496, **772**
– de la palanca de Arquímedes, 496
– de las elipses, **772**, **774–775**
– de logaritmos, 356
– de los cosenos, 30, **685**, **693**
– de Moore, 339, 372
– de Newton, **775**
– – y conservación de energía, **777**, **972**
– de Ohm, 127, **800**
– de Poiseuille del f ujo laminar, 224, 308
– de radiación de Planck, 458
– de Snell, 220
– de Torricelli, 517
– del paralelogramo, **665–666**, **669**, **671**, **677**
– del período de movimiento, **772**
– demostración de, **774–775**
– universales del movimiento y gravitación, 41, **772**
L'Hôpital, Guillaume François Antoine, Marqués de, 382
– regla de, 87, 382–387
– – demostración de, 387
– – para límites, 382–387, 449, 450
Libby, Willard, 368
límites, 40–46, **793**
– cálculo
– – algebraicos, 71–75
– – de áreas como, 251
– – mediante sustitución, 66–68
– – por sustitución, **795**
– de aproximaciones, 250–253
– – poligonales, 626
– de funciones escalares, **737**
– de funciones vectoriales, **737–739**
– de integración, 259, 261, 288, 395, 403, 436
– de sumas de Riemann, **867–868**
– de una sucesión, 545–546
– def nición, 49–50
– – formal, 91–96
– discontinuas, 62
– en el inf nito, 81–85
– en varias variables, **792–794**
– examen de un, **797**
– indeterminados, 72
– inf nitos, 53–54
– investigación gráf ca y numérica de, 50–52
– laterales, 53–54, 451
– necesidad de los, 105
– reglas básicas, 58–60
– reglas de linealización para, 557

– trigonométricos, 76–79
– y continuidad, 62–68
– y velocidad instantánea, 40
linealidad
– de integrales
– – de línea, **961**
– – indef nidas, 236
– de los sumatorios, 247
– local, 37, 115–117, 180
linealización, 178–180
– de una función, **811**–**812**
– error en, 179
– local, 55, 212, **812**
– – de funciones diferenciables, 180
líneas de cuadrícula, en coordenadas polares, 632
logaritmo(s), 355–362
– cálculo de, 357–359
– con base *b*, 355, 356
– derivadas de, 357–358
– leyes de, 356–357
– naturales, 58, 356, 358, 360
longitud(es), **723**
– de arco, 478–482, 626–627, **747**
– – de una curva en el plano, **747**
– – de una trayectoria, **747**
– de onda
– – de Balmer, 545–546
– – del átomo de hidrógeno, 543
– de un vector, **663**, **676**
– y producto escalar, **685**

Maclaurin, Colin, 502, 599 *véase también* polinomios; serie(s); desarrollo(s)
Madhava, 599
magnitud vectorial, **663**,**669**
mapa de proyección de Mercator, 421
mapas de contorno, **784**–**788**
– de una función lineal, **786**–**787**
– de una silla, **715**
– para campo vectorial conservativo, **978**
– y derivada direccional, **826**
– y estimación de derivadas parciales, **803**
– y puntos críticos, **840**
masa(s)
– cálculo por la densidad de masa, 306–307
– centro de, 493, **915**
– e integrales triples, **914**–**915**
– total, 306–307, **955**
– – integrales de línea escalares como, **955**–**956**
– puntuales, 492
matrices y determinantes, teoría de, **674**
matriz, **674**
máximo
– local, 184, 186, 196, 204, **839**–**841**
– y mínimo absolutos, 183
Maxwell, James Clerk, **819**, **1043**
media
– aritmético-geométrica, 554
– ponderada y regla de Simpson, 469
mediana, de un triángulo, 500
medida de ángulos, radianes y grados, 25, 26
Mengoli, Pietro, 561
menores, **694**
Mercurio, órbita de, **776**
meridiano cero, **723**
método
– de aceleración de Kummer, 574
– de bisección, 88–89
– de Euler, 522, 525–527
– de las capas, 323, 328
– de las fracciones parciales, 438–445
– de Newton, 228–230
– de sustitución, 66–68, 286
– del disco (para cálculo de volumen), 314–316
– del punto medio de Euler, 529
microchips, comprobación de la f abilidad de, **802**
mínima distancia, principio de, 220
mínimo local, 184, 186, 196, 204, **839**–**843**
modelización mediante funciones continuas, 67
modelo(s)
– de Glatzmaier-Roberts, **902**
– y ecuaciones diferenciales, 527
momento(s), 493
– adivitividad de, 491, 497
– angular, **746**, **772**
– de la circunferencia, 495
– del triángulo, 495
– *x*, 495
– *y*, 495
montañas, y mapas de contorno, **786**–**787**
montañas rusas, y curvatura, **752**
Moore, Gordon, 339, 372
movimiento
– circular
– – no uniforme, **764**–**765**, **767**
– – uniforme, **764**–**765**
– en tres dimensiones, **762**–**765**
– ley(es)
– – del período de, **772**
– – de Newton, 41, 134
– – para la caída de objetos, 134
– lineal, 41, 131–132
– planetario, leyes, **771**–**774**
– – de Kepler, 41, **771**
– segunda ley de Newton, **772**
– y gravedad, 132
multiplicación
– de series de Taylor, 601
– por el conjugado, 73
– por un escalar, **666**, **677**
multiplicadores de Lagrange
– con varias restricciones, **857**
– en tres variables, **856**–**857**

n variables, **780**
nabla, **819**, **1022**
newton, 330, 452, **962**
Newton, Isaac, 41, 103, 150, 267, 374, 331, 524, 602, **771**, **990**
– leyes del movimiento, 41, 134
newton-metro (N-m), **962**
norma, *véase también* perpendicular
– de partición, 259
– de un vector, *véase* longitud; magnitud
notación
– “prima”, 111
– sumatorio, 247–250
números
– *e*, 339
– Bernoulli, 253
– complejos, 404
– – imaginarios, 404
– irracionales, 1
– naturales, 1
– racionales, 1
– reales, 1
– – distancia entre, 2
– – propiedad de completitud de, 89, 184, A9
– – valor absoluto de, 2
– sucesiones de, 543

octantes, **674**
onda electromagnética, **1043**
onda sinusoidal, 27
operaciones
– de vectores, usando componentes, **666**–**672**
– inversas, integración y diferenciación, 275
– lineales, y rotacional, **1023**
operador de Laplace (Δ)M, **810**, **839**, **990**, **1021**, **1043**
optimización, 183
– con multiplicadores de Lagrange, **853**–**857**
– en un intervalo abierto, 184
– en varias variables, **839**–**847**
órbitas
– hiperbólicas, **776**

– planetarias, **771**, **775**
– perihelio de, 659
– y ley de las elipses, **774**–**775**
orden, de una ecuación diferencial, 514
ordenada, *véase* coordenada *y*
Oresme, Nicole d', 561
orientación
– de la frontera, **1009**, **1021**
– inversa, de integrales de línea, **961**
origen, 1, 3
ortogonales vectores, **688**
ortogonalidad
– comprobación de la, **686**
– de funciones vectoriales, **742**
óvalo, **761**

p-integral, 449, 451
p-series, 567
pájaros
– migración, 217, 226
– vuelo, 36
parábola, 17, 650–651, 655
– excentricidad de, 651
– gráf ca de la función cuadrática, 18
– propiedades de ref exión de, 654–655
– trazas verticales, **782**
paraboloides, **714**–**715**
– elípticos, **714**
– hiperbólicos, **714**–**715**
paralelepípedo, **697**–**698**
paralelogramo, **667**
– área de, **985**–**986**
– curvado, **986**
parametrización, 613
– de curva de integral de línea, **953**
– de integral de línea vectorial, **957**
– de la esfera, **985**
– de la gráf ca de una función, **982**
– de un cilindro, **982**
– de un cono, **981**
– por longitud de arco, **748**–**752**, **754**
– regular, **752**, **858**, **958**
– velocidad unitaria, **749**
parametrización de vectores, **679**, **686**, **692**, **759**
– de la cicloide, **741**
parámetros, 613, **729**
– y ecuaciones paramétricas, 613
paridad, de una función, 6–7, 399
particiones, 258–259
– regulares, **869**, **872**
Pascal, Blaise, 162, 618
– caracol de, 162
paso del tiempo, 525, 526–527
pendiente de una recta, 14
– y ecuación polar, 634
pendiente negativa, 14
pendiente-ordenada, forma de una ecuación, 13
perihelio (de órbita planetaria), 659
período (de una órbita), 659, **771**
pies por libras (ft-lb), 330, **962**
pinturas de la cueva de Lascaux, 339, 368
pirámide, volumen, 305
planímetro, **1012**
plano(s)
– coordenados, **674**
– – trazas en, **711**
– determinado por tres puntos, **707**
– ecuación en forma punto-normal, **705**
– en tres dimensiones, **705**–**708**
– intersección con una recta, **707**
– osculatriz, **757**
– paralelos a un plano dado, **706**
– tangente, **812**, **982**–**983**
– – en un extremo local, **839**
– – hallar una ecuación de, **828**
– – y diferenciabilidad, **814**
– trazas, **708**
– *xy*, **887**–**888**
– *xz*, **888**
– *yz*, **905**–**906**
Poiseuille, Jean, 308
polígono, área de, **1020**
polinomios, 21, 23
– Bernstein, 620
– Chebyshev, 38
– coef cientes de, 21
– continuidad de, 65
– continuos, **794**
– cuadráticos, 17-18, 209, 442
– de Maclaurin, 500, 502, 503, 504, 506
– de Taylor, 499–508, 598, 599, 601
– grado de un, 21, 23
– gráf cas de, 208–211
porcentaje de error, 179
posición estándar
– de cuádricas, **711**
– de un parábola, 651
– de una elipse, 648
– de una hipérbola, 649
posición, y tasas de cambio, 40
positrón, **947**
potencia de una potencia, 340
potencial(es)
– escalares, **1030**
– gravitatorio, **972**, **990**, **990**
– vectoriales, **1027**, **1030**, **1042**
– – para un solenoide, **1028**, **1030**
presión, 485
– atmosférica, 369–370, 372
– de un f uido, 485–487
– y profundidad, 485
primer octante, **674**
primera derivada, 139
– y puntos de inf exión, 202–203
primera diferencia, 24
primera ley de Kepler, 659
primitivas, 234–238, 270, 285, **742**–**743**
– cálculo de integrales def nidas con, 273
– como integrales, 275, 279
– def nición de, 234
– general, 234
– y teorema fundamental del cálculo (FTC), 269–270
principal, 368
principio
– de equivalencia, 134
– de inducción de, A13
– de mínima distancia, 220
– de simetría, 494, 496
– de tiempo mínimo, 220
problemas
– de mezclas, 536
– de optimización, 217, 220, 221
– de valores iniciales, 237
– – solución de, 237
– del barril de vino de Kepler, 223
producto(s), 22, 23, 285
– escalar, **984**–**985**
– – propiedades de, **685**
– – reglas del producto para, **742**
– – y ángulo entre vectores, **684**–**685**
– – y comprobación de la ortogonalidad, **686**–**687**
– interno *véase* producto escalar
– mixto, **697**
– vectorial, **694**–**700**
– – anticonmutatividad de, **696**
– – básicos propiedades de, **696**
– – demostraciones de propiedades de, **699**–**700**
– – descripción geométrica de, **695**
– – fórmula del producto para, **740**
– – reglas del producto, **739**
– – y área y volumen, **697**–**699**
– – y propiedad distributiva, **696**–**697**

progresión geométrica, 546
propiedad(es)
– asociativa, **667**
– braquistócrona, 618
– conmutativa, **667**
– de completitud de números reales, 89, 184
– de la continuidad, 64–66
– de la menor cota superior, 587
– de la suma, 58–60, 95, **794**
– – demostración de, 95
– de múltiplo constante, 58, 59
– del cociente, 58, **794**
– del producto, 58-59, **794**
– distributiva, **687**
– – y producto escalar, **685**
– – y producto vectorial, **-695**
– – para escalares, **667**
proporcionalidad, constante de, **772**
prospección sísmica, 227
protones
– en campo magnético, **697**
proyección, **687**
– de regiones sólidas, **893**
psi (ψ), **827**
punto(s)
– base (en el plano), **663**
– críticos, 184–185, 196, 197
– – criterio de la primera derivada para, 196–197
– – estudio, 196–197
– – estudio de, 196–197
– – fuera del intervalo, 186–187
– – segunda derivada para, 204–205
– – sin cambio de signo, 198
– – y problemas de optimización, 220
– de inf exión, 186, 202–204
– de transición, de gráf cas, 208
– extremos, 187–188
– frontera de un dominio, **843**
– interior de un dominio, **843**
– intermedios, **867**, **868**, **869**, **879**
– medio, fórmula, **680**
– medios, 467, 469
– – de intervalos, 3
– o números reales, 1
– silla, **841**, **842**

Quick Sort, 385

Römer, Olaf, **1043**
radianes, 25, 26
radio
– de intervalos, 3
– de convergencia, 586–594
– – inf nito, 594
– de curvatura, **757**
Radón-222, 367
raíces cuadradas, con convergencia cuadrática a, 233
raíces de funciones, 5, 88, 230
raíces dobles, 17, 18
raíz (cero), de una función, 5, 88, 228
ramas (de un gráf ca), 159
rampa helicoidal, **984**
rango (de una función), 4, 5, 347, **926**
razón, 546, 557
recíprocos, 21
recta(s)
– paralelas, 14
– paramétricas, 615
– perpendiculares, 14
– tangentes, 40–41, 102, **740**, **811**
– – def nida, 102
– – límite de rectas secantes, 43, 101
– – para una curva en forma paramétrica, 618–619
– – pendientes de, 43, 44, 101, 619, **808**, **825**
– – verticales, 98
– – y ecuación de la potencia, 114
– dirección en el plano, **706**–**707**
– ecuación de, 13–16
– ecuaciones paramétricas de, **678**–**681**
– forma punto-direction, **679**
– horizontal y vertical, 14
– intersección, **680**
– – con un plano, **707**
– paralelas, 14
– parametrizaciones vectoriales de, **730**
– perpendiculares, 14
– vertical, 14
– secante, 43, 101–102
– – pendiente de, 101
– – y teorema del valor medio, 194
– y curvatura cero, **753**
– y pendiente de, 13–15
– y trazas de una función lineal, **786**
rectángulos
– como dominios de integración, **866**
– curvilíneos, **928**
– de visualización, 34
– extremo inferior, 248–249
– integración sobre, **881**
– polares, **902**
– – descomposición de, **904**
– y aproximación
– – de una área, 245–246
– – lineal, **931**
reescalado
– de una gráf ca (cambio de escala), 8
– – y secciones cónicas, 652
– horizontal, 8, 9
– vertical, 8–9
ref exión (de una función), 351
región(es) *véase también* dominios
– horizontalmente simple, **880**, **882**, **896**
– polares, **904**
– simples, **880**
– sin agujeros, **1042**
– sólidas, **892**–**894**
– – integración sobre, **894**–**895**
– verticalmente simple, **880**– **889**
regla(s)
– de derivación, **738**–**739**
– de la cadena, 111, 122, 148–153, 275, **739**, **804**, **831**–**834**
– – combinada con el teorema fundamental del cálculo (FTC), 275
– – demostración de, 152
– – en derivadas parciales, **801**
– – para gradientes, **820**
– – para Trayectorias, **820**–**822**
– – y diferenciación implícita, **834**–**835**
– de la diferencia, 113
– de la mano derecha, **674**, **695**
– de la potencia, 112–113, 114, 117, 150
– – para derivadas, 235
– – para exponentes fraccionarios, 156
– – para integrales, 235
– – generalizada, 150
– de la suma, 113–114, 236, **738**–**739**
– de la tangente, *véase* regla del punto medio, 466
– de los exponentes, 339–341
– de Guldin, *véase* teorema de Pappus
– de Simpson, 469, 520
– del banquero, 376
– del cociente, 122, 124, 145
– – y cálculo de derivadas, 122
– del desplazamiento y cambio de escala, 151, 153
– del límite, 51, 58–60, 95, **794**
– – para sucesiones, 547
– del múltiplo, 236
– – constante, 113, **739**
– del producto, 122, 140, **739**–**740**, **754**
– – para gradientes, **820**
– – y cálculo de derivadas, 122–124
– del punto medio, 467
– del trapecio, 465
– exponencial general, 151
– para la suma para límites, 113

regresión lineal, 16
relación lineal, 15–16
relación recurrente, 592–593
relaciones ortogonales, 426
representación gráf ca, 3–9
– con calculadoras, 33–37
– de ecuaciones, 6
– de funciones de dos variables, **781–782**
resistencia del aire, 377, 380, 384
resta de vectores, **665**
resto de orden *n*, 507
restricciones, **857**
– y multiplicadores de Lagrange, **857**
revolución científ ca, **771**
Riemann, Georg Friedrich, 259
rotacional
– de un campo vectorial, **1013**
– escalar, **1030**
– valor constante de, **1013**
– vectorial, **1017**

secante, 28
– hiperbólica, 399
– integral de, 421
secciones
– cónicas, 647, **711**
– – degeneradas, 655
– – ecuaciones polares de, 654, **775–776**
– – excentricidad de, 651
– – foco-directriz def nición de, 653
– – no degeneradas, 655
– – propiedades de ref exión de, 654–655
– transversales, *véase también* coronas circulares
– – horizontales, y volumen, 304, 305
– – verticales, y volumen, 319
segunda ley
– de Kepler, 233, **772–773**
– demostración de, **773**
– de Newton, 336, **763**, **973**
semiesfera, integrales sobre una, **999**
semivida, 367
separación de variables, 514
serie(s)
– absolutamente convergente, 575–576
– alternadas, 576
– armónicas, 561, 567, 578–579
– – alternadas, 578–579
– divergencia de, 581
– binomial, 602, 604
– condicionalmente convergente, 576
– convergentes, 555, 561
– de Balmer, 543, 546
– de Fourier, 422
– de Gregory–Leibniz, 543
– de Maclaurin, 598, 600–601, 603, 605
– de potencias, 585–594, 597
– – derivación, 590
– – derivación término a término, 590
– – e integración, 590
– – hallar el radio de convergencia, 587
– – intervalo de convergencia de, 586
– – representación de funciones por, 562
– – soluciones de ecuaciones diferenciales, 591–594
– de Taylor, 597–609, *véase también* Serie de Maclaurin
– – integración de, 601
– – métodos directos para hallar, 600–602
– – multiplicación de, 601
– de términos positivos, 565–571
– diferencia con una sucesión, 556
– divergentes, 555, 559–560
– geométricas, 556, 557, 558, 559, 561, 589
– – suma de, 558
– inf nitas, 543, 554–561
– – convergencia de, 555
– – linealización de, 557
– – suma de, 554–562
– *p*-series, 567
– sumas parciales de, 554
– telescópicas, 555–556
sigma (Σ), 247
silla, **785**
– de mono, **843**
simetría, 494
– y parametrización, 613
Simpson, Thomas, 223
sistema(s)
– algebraicos informáticos, 419, 445, 469, 470, **782**
– – y método de Euler, 526–527
– de coordenadas
– – superf cies de nivel de, **720**
– – tridimensional, **674**
– orientado positivamente, **695**
solenoide, potencial vectorial para, **1028**, **1029**
sólidos
– de revolución, 314
– – volumen de, 314–319
– secciones transversales de, 314
– volumen de, 304
Solidum, Renato, 355
solución
– de equilibrio, 530
– general (de una ecuación diferencial), 513
– particular (de ecuaciones diferenciales), 237
sonido, velocidad del, 44
subintervalos, 245
sucesiones, 543
– acotadas, 548–551
– convergencia de, 544–545, 549, 550
– convergente, 548, 549–586
– creciente, 549
– de Fibonacci, A16
– decreciente, 550
– def nida por una función, 545
– def nidas recursivamente, 543–544
– diferencia con series, 556
– divergencia de, 544, 549
– divergentes, 549
– geométricas, 546
– límites de, 544–545, 546
– monótonas acotadas, 550
– no acotadas, 549
– propiedades de los límites de, 547
– recursivas, 544, 550
– teorema de compresión para, 547
– término de, 543
suma(s)
– de potencias, 250, 252, 253
– de Riemann, 257–263, 376, 481, 483, 486, 490, 626, 641, **868**, **879**
– – dobles integral límite, **866**
– – e integrales de línea escalares, **952–953**
– – e integrales dobles, **986**
– – y áreas de rectángulos, **866–868**
– de vectores, **665–671**, **677**
– parciales, 554, 555, 566, 576–577
– – de índice impar, 577
– – de índice par, 577
– – de series de términos positivos, 566
superf cies, **1042**
– apunta hacia arriba, **985**
– carga total sobre, **989–990**
– cerradas, **1021**
– cuádricas, **715–716**, **711**
– – degeneradas, **715**
– – no degeneradas, **715**
– de nivel, **720**
– – de un sistema de coordenadas, **720–722**
– – de una función de tres variables, **788**
– – en coordenadas esféricas, **722**
– de revolución, 480, **994**
– frontera de, **1021**
– helicoidal, **984**
– independencia para campos vectoriales rotacionales, **1027**
– intersección de, **730–731**
– orientación de, **1021**
– orientadas, **995**, **997**

– parametrización de la intersección de, **730–731**
– parametrizada, **980–991**
– suaves, **1008**
– tasa de f ujo de un f uido a través de, **1000**
– y fronteras, **1027**
– y teorema de Stokes, **1009**
sustitución
– con funciones hiperbólicas, 433
– hiperbólica, 434
– mediante diferenciales, 286–289
– trigonométrica, 426–430
– y cálculo de límites, **794–795**
– y fracciones parciales, 438
– y serie de Maclaurin, 598

Tait, P. G., **819**
tangente(s), 28
– aproximación por la recta tangente (aproximación lineal), 176
– hiperbólica, 401, 402
– unitaria, **752**
– verticales, 116
Tartaglia, Niccolo, 222, 232
tasa de f ujo, 307–308, **999–1003**
– de un f uido a través de una superf cie, **1000**
tasa de interés, 371, 372
tasa de variación, 14, 40, 44, 51, 163–167, 517
– de una función, 128–133
– instantánea, 44–45, 128, 44, 128
– media, 44–45, **786–787**, **802–804**
– y crecimiento y decrecimiento exponencial, 364
– y derivadas parciales, **800**
– y notación de Leibniz, 128
tasas relacionadas, 163–167
Taylor, Brook, 499
tecnología de computadores, 33
temperatura, derivada direccional de, **825**
teorema
– binomial, 602, 603 A15
– de Apolonio, 121
– de Bolzano-Weierstrass, A10
– de Clairaut, **805**, A24
– de comparación (para Integrales), 263
– de compresión, 76–79
– – para sucesiones, 543–544
– de Fermat en extremos locales, 186, **840**
– de Fubini, **872–873**, **881**, **892**
– de Gauss, *véase* teorema de la divergencia
– de Gauss-Ostrogradsky, *véase* teorema de la divergencia
– de Green, **1009–1016**, **1022**, **1024**
– de la divergencia, **1034–1043**
– de la función implícita, **835**, **854**
– de los valores intermedios, 87–89, 310, A12
– de Pappus, **925**, **995**
– de Pitágoras, 391, **674–675**, **766**
– de Rolle, 188–189, 198
– – y teorema del valor medio, 194
– de Stokes, **1021–1030**
– de Taylor, 505
– del bocadillo de jamóm, 91
– del trabajo-energía, 336
– del valor medio, 194–195, 198, 267, 310, 479, 561, 626
– – para integrales, **887**
– – para integrales dobles, **885**
– estudio, A6
– fundamental
– – para integrales de línea, **1034**
– – para campos vectoriales conservativos, **969–970**,
– – del cálculo (FTC), 267–270, 273–276, 316, **747**, **866**, **969**, **1009**, **1010**, **1034–1035**
– – demostración de, 279
– unicidad, 515
teoría
– de Galois, 228
– especial de la relatividad, 403
– general de la relatividad, 134, 259, **775**
tercera derivada, 139
tercera ley de Kepler, 632, 659
término cruzado, 655
término general (de una sucesión), 543
– en notación sumatoria, 247–249
test
– de comparación, 449, 453–454
– de la recta horizontal, 350
textos cuneiformes, completar cuadrados, 18
tiempo
– de duplicación, 367
– medio de decaimiento, 371
– mínimo, principio de, 220
tierra, campo magnético, **902**
Tonomura, Akira, **1036**
toro, 322
– área de, **995**
torsión, **746**, **761**
trabajo
– cálculo mediante integración, 331
– def nición de, 330–331
– y energía, 330–333
– y fuerza, **962–963**
– y gravedad, 330, 331, 332, **973**
tractriz, 322, 520, 625, 629
transbordador espacial, **762**
– órbita de, **771**
transductores de posición de cable, 177
transformaciones, *véase* aplicaciones
transformada de Laplace, 457
trapecios
– aproximación a áreas debajo de gráf cas, 465
– área de, 466
traslación (desplazamiento)
– de un vector, **663**, **676**
– de una gráf ca, 8
– horizontal, 8
– vertical, 7–8
trayectoria, **729–730**
– de ascenso más pronunciado, **788**
– de descenso más pronunciado, **788**
– longitud de arco de, **747**
– parametrización de, **748**
– regla de la cadena para, **820–822**
trazas, **707**, **708**, **782–784**
– de hiperboloides de una hoja, **713**
– de superf cies, **712**
– de un elipsoide, **712**
– horizontales, **784–785**
triángulo(s)
– de Pascal, A14–A15
– imagen bajo una aplicación lineal, **928**
– mediana de, 498
– momento de, 496
– rectángulos, 26
– y fuerza de un f uido, 487
derivadas trigonométricas, en grados, 152
tsunami de Indonesia (**1996**), 413

utilidad, **861**
– marginal, **861**

Valladas, Helene, 370
valor(es)
– absoluto de un número real, 2
– actual, 371–372
– – de f ujo de ingresos, 374
– de prueba, dentro de intervalos, 204
– de una función, 4, 5
– desconocidos, estimación de, 105
– extremos, 183–186, **839**, **844**
– – absolutos, **843**
– – existencia en un intervalo cerrado, A21
– – globales, **839**, **843–847**
– – locales, **839**
– máximo (máx), 183–189
– – del cuadrado unidad, **844**
– medio de una función, 309–310, **885**
– mínimo (mín), 183–188

variables
– cambio de, **906**
– dependientes, 5, **831**
– fórmula del cambio de, 367, **931**–**937**
– funciones de dos o más variables, **780**–**789**
– independientes y dependientes, 5, **831**, **842**
– mudas, 247, 259
– representación gráf ca de funciones de, **781**–**789**
– separación de, 514
– y límites, **800**–**802**
variación
– neta, 268, 279–280
– unitaria, 130
vector(es), **674**
– aceleración, **762**–**763**, **765**–**768**
– – de tres partículas, **767**
– – para el movimiento circular uniforme, **764**
– base canónica, **680**, **698**, **702**
– combinación lineal de, **667**–**668**
– componentes de, **678**, **691**
– constante, **743**
– de fuerza, **669**
– de la base canónica, **669**, **671**, **677**
– de posición, **663**, **677**
– dirección, **691**
– director, **679**
– en dos dimensiones, **663**
– en movimiento, **730**
– en tres dimensiones, **674**–**681**, **686**–**694**
– equivalentes, **664**, **676**, **677**, **690**
– fuerza, **663**
– gradiente, **780**, **819**–**820**, **822**, **826**
– – propiedades de, **820**
– – regla del producto y regla de la cadena para, **820**
– longitud de **i**, **j**, **k**, **689**
– momento angular, **772**
– no nulo, **666**, **668**, **671**, **677**
– normal, **705**–**721**, **725**, **726**, **836**, **983**, **978**
– – a un plano, **707**
– – unitario, **756**, **768**–**771**, **777**, **953**, **995**
– nulo, **678**
– ortogonales, **705**
– paralelos, **663**, **677**
– perpendiculares, **699**
– posición, **690**
– producto, **694**–**697**
– producto vectorial de, **699**
– radial, **772**, **784**
– tangente, **776**, **980**
– tangente unitario, **752**–**758**, **768**, **793**, **956**, **957**
– tangentes, **744**, **983**
– – derivadas, **740**–**742**
– – horizontal, a la cicloide, **741-742**
– – representación de, **741**
– traslación de, **678**, **690**
– unidad, **682**, **834**
– unitario ortogonal, **689**
– unitarios, **689**, **823**, **995**
– unitarios y ortogonales, **689**
– velocidad, **740**, **744**, **758**–**759**, **776**, **779**, **832**, **945**
– velocidad media, **769**
velocidad, 41, 67, 628, 637
– a lo largo de una trayectoria parametrizada, 628
– angular, 629, 640, **765**, **1013**
– como magnitud vectorial, **676**
– de escape, 336, 450
– del viento, **945**
– en un campo magnético, **697**
– inicial, **764**, **757**
– instantánea, 41–43, 62
– integral de, 280–281
– interpretación gráf ca de, 43
– ley de suma velocidades de Einstein, 407
– media, 41–43
– y aceleración, 131–132, **773**
– y pendiente de un recta secante, 44–45
– y tasa de f ujo, 307–308
– y tasas de cambio, 40
– y velocidad, 41, 131–132
Verhuls, Pierre-François, 529
vértice(s)
– de una elipse, 660
– de una hipérbola, 661–**663**
– de un parábola, **663**
Vía láctea, masa de, **776**
Viète, fórmulas, 21
volumen
– cálculo por integración, 314–316
– como integral del área de la seccción transversal, 304–306
– con signo de una región, **875**
– de un sólido de revolución, 314–319
– de una capa cilíndrica, 323–327
– de una esfera, 315, **907**–**908**
– de una pirámide, 305
– de una región, **891**
– e integrales triples, **906**
– máximo, **845**
– producto vectorial y determinantes, **697**–**700**
– y producto vectorial, **707**–**708**

Wright, Edward, 421

zonas de Fresnel, 509

ÁLGEBRA

Rectas

Pendiente de la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación explícita de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b:

$$y = mx + b$$

Ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$
de pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación punto-punto de la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$
y por $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{donde} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Las rectas de pendientes m_1 y m_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.
Las rectas de pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares
si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Circunferencias

Ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Fórmulas para la distancia y para el punto medio

Distancia entre $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Leyes de los exponentes

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Factorizaciones especiales

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k}$

Solución general de la ecuación de segundo grado

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Desigualdades y valor absoluto

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

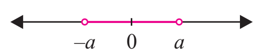
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

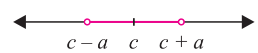
Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

$|x| = x \quad$ si $x \geq 0$.

$|x| = -x \quad$ si $x \leq 0$.



$|x| < a$ signif ca $-a < x < a$.



$|x - c| < a$ signif ca $c - a < x < c + a$.

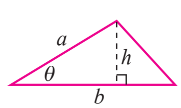
GEOMETRÍA

Fórmulas para el área A, circunferencia C y volumen V

Triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$

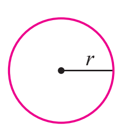
$ = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$



Círculo

$A = \pi r^2$

$C = 2\pi r$

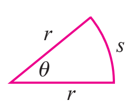


Sector de un círculo

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

$s = r\theta$

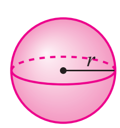
(θ en radianes)



Esfera

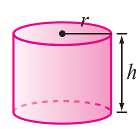
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



Cilindro

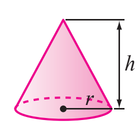
$V = \pi r^2 h$



Cono

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

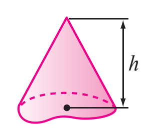
$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Cono de base arbitraria

$V = \frac{1}{3}Ah$

donde A es el área de la base



Teorema de Pitágoras: dado un triángulo rectángulo para el que la longitud de la hipotenusa es c y las longitudes de sus catetos son a y b, se verif ca: $c^2 = a^2 + b^2$.

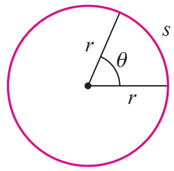
TRIGONOMETRÍA

Medidas angulares

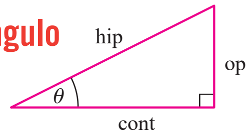
π radianes $= 180°$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

$s = r\theta \quad (\theta$ en radianes)



Definiciones en un triángulo rectángulo

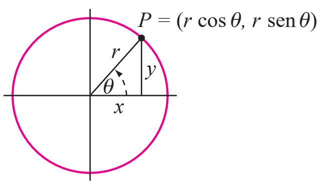


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cont}}{\text{hip}}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{op}}{\text{cont}} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\text{cont}}{\text{op}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{hip}}{\text{cont}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

Funciones trigonométricas

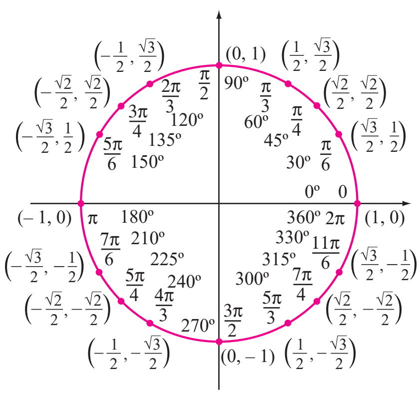


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$$



Identidades fundamentales

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$1 + \cot^2 = \csc^2\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

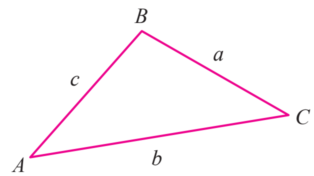
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

El teorema del seno

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



El teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Fórmulas de adición y sustracción

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}x\cos y - \cos x\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

Fórmulas para el ángulo doble

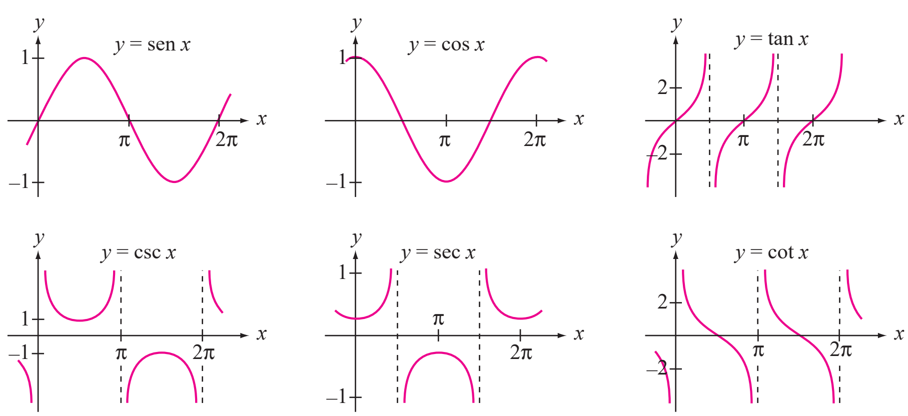
$$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

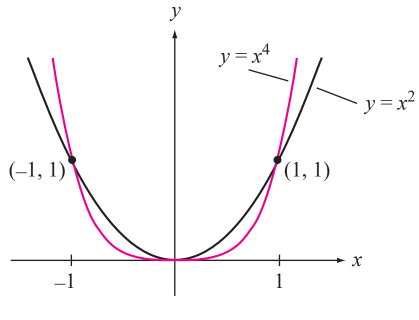
Gráficas de las funciones trigonométricas



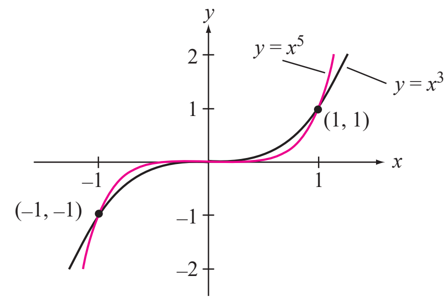
FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones potenciales

$f(x) = x^n$, n entero positivo

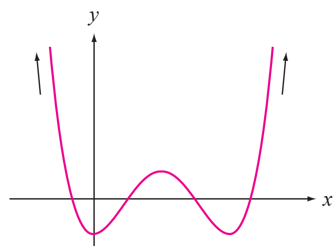


n par



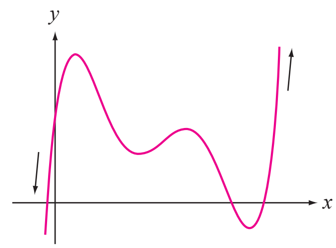
n impar

Comportamiento asintótico de una función polinómica de grado par y término dominante positivo



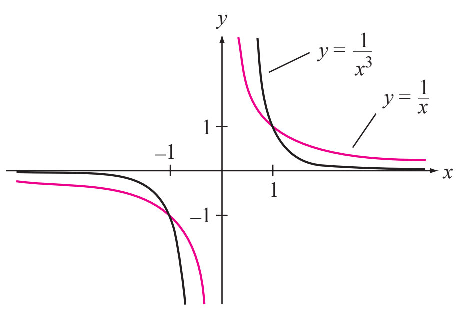
n par

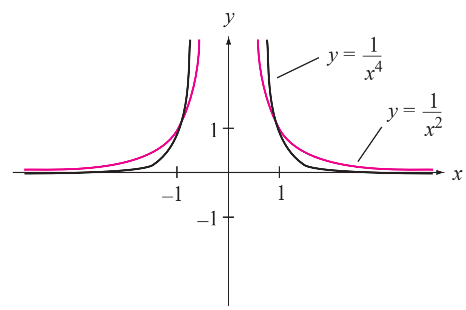
Comportamiento asintótico de una función polinómica de grado impar y término dominante positivo



n impar

$f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

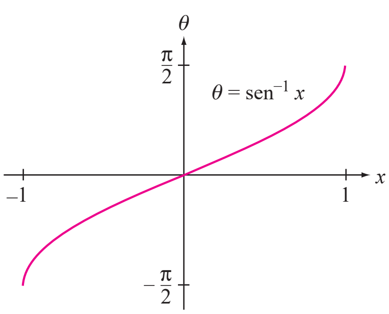




Funciones trigonométricas

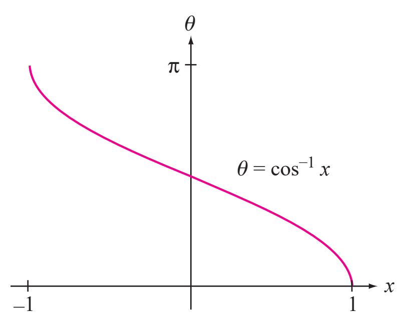
$\text{arc sen}\, x = \text{sen}^{-1}\, x = \theta$

$\Leftrightarrow \quad \text{sen}\,\theta = x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



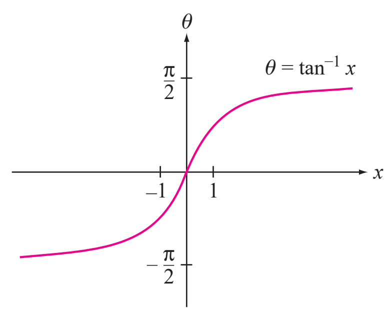
$\text{arc cos}\, x = \cos^{-1} x = \theta$

$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = x, \quad 0 \le \theta \le \pi$



$\text{arc tan}\, x = \tan^{-1} x = \theta$

$\Leftrightarrow \quad \tan\theta = x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$



Funciones exponenciales y logarítmicas

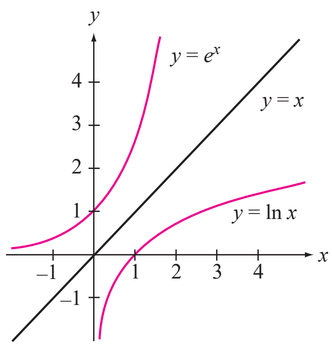
$\boxed{\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x}$

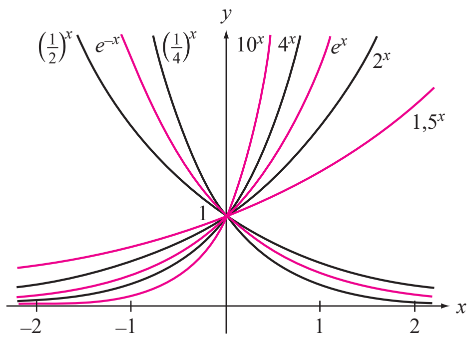
$$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

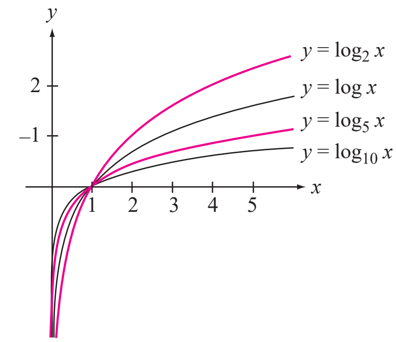
$\boxed{\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$

$$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$$
$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a(x^r) = r \log_a x$$







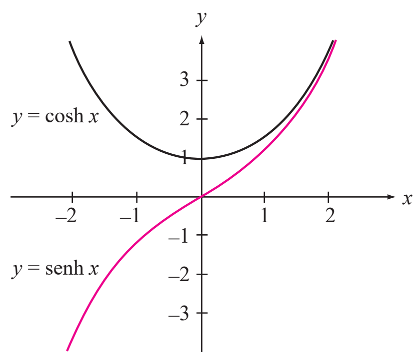
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1$$

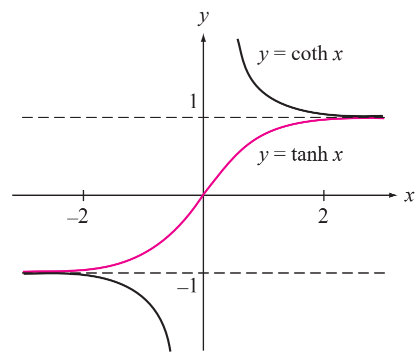
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad a > 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty, \quad a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad a > 1$$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$
$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$





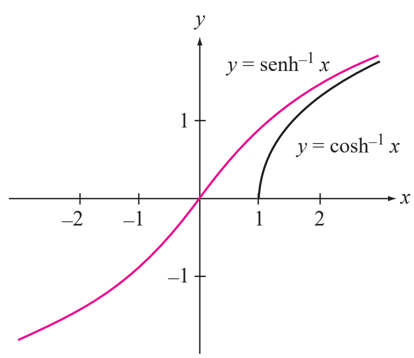
$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{senh} y = x$$
$$y = \cosh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \cosh y = x \quad \text{e} \quad y \geq 0$$
$$y = \tanh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \tanh y = x$$

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x > 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$



DERIVACIÓN

Reglas de derivación

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}x = 1$

3. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Regla de la potencia

4. $\dfrac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\,f'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

6. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ Regla del producto

7. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ Regla del cociente

8. $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$ Regla de la cadena

9. $\dfrac{d}{dx}f(x)^n = n\,f(x)^{n-1}\,f'(x)$ Regla de la potencia generalizada

10. $\dfrac{d}{dx}f(kx + b) = k\,f'(kx + b)$

11. $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ donde $g(x)$ es la inversa $f^{-1}(x)$

12. $\dfrac{d}{dx}\ln f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Funciones trigonométricas

13. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

14. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

15. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

16. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\,\cot x$

17. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\,\tan x$

18. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\,\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{|x|\,\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Funciones exponenciales y logarítmicas

25. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

26. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)\,a^x$

27. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

28. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{(\ln a)\,x}$

Funciones hiperbólicas

29. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

30. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

31. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

32. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x\,\coth x$

33. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x\,\tanh x$

34. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

35. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

37. $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

38. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\,\sqrt{x^2 + 1}}$

39. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\,\sqrt{1 - x^2}}$

40. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

INTEGRACIÓN

Sustitución

Si un integrando es de la forma $f(u(x))u'(x)$, entonces reescriba la integral en términos de u y de su diferencial $du = u'(x)dx$:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Fórmula de integración por partes

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

6. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\displaystyle\int \sec u\,\tan u\,du = \sec u + C$

10. $\displaystyle\int \csc u\,\cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\displaystyle\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

12. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

13. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

14. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

Formas exponenciales y logarítmicas

17. $\displaystyle\int u\,e^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au - 1)\,e^{au} + C$

18. $\displaystyle\int u^n\,e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n\,e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}\,e^{au}\,du$

19. $\displaystyle\int e^{au}\,\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

20. $\displaystyle\int e^{au}\,\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

21. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\,\ln u - u + C$

22. $\displaystyle\int u^n\,\ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\,\ln u - 1] + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{u\,\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

24. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

25. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

26. $\displaystyle\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

27. $\displaystyle\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

29. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh\frac{1}{2}u\right| + C$

30. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

31. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

32. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

33. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\,\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas trigonométricas

34. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

35. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

36. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

37. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}\left(2 + \operatorname{sen}^2 u\right)\cos u + C$

39. $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right)\operatorname{sen} u + C$

40. $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

41. $\displaystyle\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

42. $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\,\tan u + \frac{1}{2}\ln[\sec u + \tan u] + C$

43. $\displaystyle\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{n}\csc u\cot u + \frac{1}{n}\ln|\csc u - \cot u| + C$

44. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

45. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

46. $\displaystyle\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

47. $\displaystyle\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

48. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

49. $\displaystyle\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u\csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

50. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au\operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

51. $\displaystyle\int \cos au\cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

52. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au\cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

53. $\displaystyle\int u\operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

54. $\displaystyle\int u\cos u\,du = \cos u + u\operatorname{sen} u + C$

55. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen} u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

56. $\displaystyle\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

57. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\cos^m u\,du =$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u\cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\cos^m u\,du$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u\cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u\cos^{m-2} u\,du$$

Formas trigonométricas inversas

58. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

59. $\displaystyle\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

60. $\displaystyle\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + C$

61. $\displaystyle\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

62. $\displaystyle\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

63. $\displaystyle\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

64. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

65. $\displaystyle\int u^n\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

66. $\displaystyle\int u^n\tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right],\ n \neq -1$

Formas que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$, $a > 0$

67. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

68. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

69. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

70. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

71. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

72. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

73. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

74. $\displaystyle\int \left(a^2-u^2\right)^{3/2}du = -\frac{u}{8}\left(2u^2-5a^2\right)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

75. $\displaystyle\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas que contienen $\sqrt{u^2-a^2}$, $a > 0$

76. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

77. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du =$

$$= \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

78. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

79. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

80. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

81. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

82. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

83. $\displaystyle\int \frac{du}{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

Formas que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$, $a > 0$

84. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

85. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du =$

$$= \frac{u}{8}\left(a^2+2u^2\right)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$$

86. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

87. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

88. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

89. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

90. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

91. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2 u} + C$

92. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Formas que contienen $a + bu$

93. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|) + C$

94. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu}$

$$= \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$$

95. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

96. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

97. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

98. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

99. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2}$

$$= \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$$

100. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

101. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du =$

$$= \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$$

102. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

103. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

104. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C,$ si $a > 0$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \quad \text{si } a < 0$$

105. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

106. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

107. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

Formas que contienen $\sqrt{2au - u^2}$, $a > 0$

108. $\displaystyle\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

109. $\displaystyle\int u\sqrt{2au-u^2}\,du =$

$$= \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

110. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

111. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema del valor intermedio

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier valor M comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Teorema del valor medio

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Valores extremos sobre un intervalo cerrado

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza tanto su valor máximo, como mínimo, en el intervalo $[a, b]$. Además, si $c \in [a, b]$ y $f(c)$ es un valor extremo (máximo o mínimo), entonces c es o bien un punto crítico de $f(x)$ o bien uno de los extremos a o b.

El teorema fundamental del cálculo (Parte I)

Suponga que $f(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ sobre $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

El teorema fundamental del cálculo (Parte II)

Suponga que $f(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$. Entonces la función área $A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$, es decir:

$$A'(x) = f(x) \text{ o equivalentemente } \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Además, $A(x)$ cumple la condición inicial $A(a) = 0$.

JON ROGAWSKI

CÁLCULO

UNA VARIABLE

Segunda edición
a todo color

Jon Rogawski, con una trayectoria docente de más de 30 años, ha tenido la oportunidad de escuchar y aprender de sus propios estudiantes. Estas valiosas enseñanzas forman ya parte de su pensamiento, manera de escribir y de diseñar un libro de cálculo infinitesimal. Fruto de esa larga experiencia, este libro pone especial énfasis en los siguientes aspectos:

(a) Exposición clara y de fácil comprensión que se anticipa a las dificultades de los estudiantes.

(b) Diseño y figuras que transmiten las ideas expuestas en el texto.

(c) Elementos destacados en el texto que enfatizan los conceptos y el razonamiento matemático: *Apunte conceptual*, *Apunte gráfico*, *Las hipótesis son importantes*, *Recordatorio* y *Perspectiva histórica*.

(d) Una amplia colección de ejemplos y ejercicios de dificultad gradual que enseñan las destrezas básicas y técnicas de resolución de problemas, refuerzan la comprensión conceptual y motivan el cálculo a través de aplicaciones interesantes. Cada sección contiene ejercicios que abordan nuevas ideas y retos que ayudan a los estudiantes a desarrollar sus capacidades.

EDITORIAL
REVERTÉ

www.reverte.com