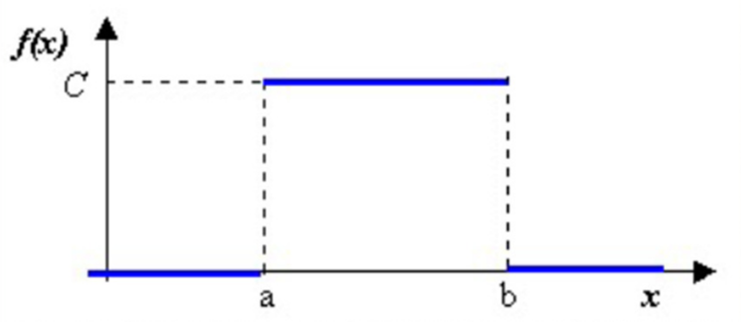
Probabilidades-II 2024

Distribución Uniforme y Distribución Exponencial.

2 Timoteo 3:16-17

Distribución Uniforme



Una variable aleatoria X es continua uniforme en un itervalo $[a,b]$ si tiene una distribución de la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{Si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Se escribe $X \sim U[a,b]$.

$$\mu_X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{tx} dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

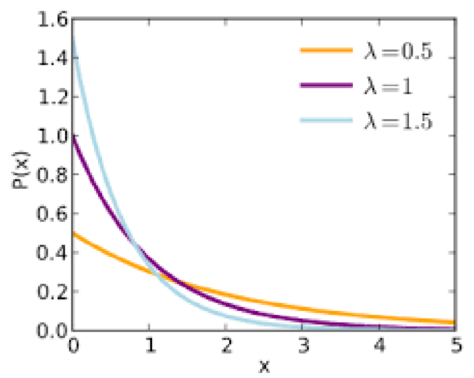
Ejercicios

Suponga que $X \sim \text{Unif}(a, b)$. Si la media de X es 2 y la varianza 3, ¿cuáles son los valores de a y b?

El tiempo en minutos que tarda un señor para ir de su casa al trabajo oscila de forma uniforme entre 20 y 30. Si debe llegar al trabajo a las 8 de la mañana, ¿a qué hora debe salir de su casa para tener una probabilidad de 0.9 de no llegar tarde? 7:31 am

Suponga que el tiempo que toma llenar un formulario sigue una distribución uniforme entre 5 y 15 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que, en los próximos 20 formularios a llenar, en al menos 10 se tarde más de 12 minutos en llenarlos? 0.04796189733

Distribución Exponencial



Si una variable aleatoria continua X tiene una distribución de probabilidad de la forma

$$f_X(x) = f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : \text{ Para } x > 0 \\ 0 & : \text{ En cualquier otro caso} \end{cases},$$

se dice que la variable X sigue una distribución de tipo exponencial. Se escribe $X \sim Exp(\lambda)$.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad t < \lambda$$

$$\boxed{P(X > \omega + \delta | X > \delta) = \frac{e^{-\lambda(\omega+\delta)}}{e^{-\lambda\delta}} = e^{-\lambda\omega} = P(X > \omega)}$$

Importantísimo!!!!

$$F_X(x) = F(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & : \quad \text{Para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & : \quad \text{Para } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Si X (el número de ocurrencias por unidad) sigue una distribución de Poisson con promedio λ, entonces el tiempo entre ocurrencias sucesivas del evento sigue una distribución exponencial con parámetro λ.

Ejercicios

[**4 puntos**] En promedio, por una intersección de carreteras pasan tres taxis por hora siguiendo una distribución de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de esperar un taxi por más de 20 minutos?

Resolver usando Poisson, usando Exponencial (minutos y horas) 0.3678794412

Suponga que el tiempo (en horas) que toma atender una solicitud de cotización sigue una distribución exponencial con media dos horas. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta supere las 4 horas? Si el tiempo de respuesta ha superado las 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 8 horas?

0.1353352832

En una pequeña empresa el tiempo que debe esperarse hasta recibir una computadora para reparación sigue una distribución exponencial con media 3 días. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo antes de recibir una computadora para reparar sea menor de 10 días, si ya han pasado 5 días sin recibir ninguna? 0.8112439716

Ejercicios

Cada día, el tiempo que tarda don Juan en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo sigue una distribución exponencial con un promedio de dos minutos.

a) Determine la probabilidad de que mañana don Juan tarde más de 3 minutos en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo.
Respuesta: 0.22313.

b) En 10 días, ¿cuál es la probabilidad de que, en al menos 8 días, tarde más de 3 minutos ene encontrar la llave para salir de su casa al trabajo.
Respuesta: 0.0178 %.

Gracias por su amable atención!!