Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Segundo examen parcial
II semestre - 2023

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. Una pequeña tienda de donas cerca de la universidad vende, en promedio, 15 donas por hora. Suponga que la cantidad de donas vendidas por hora sigue una distribución de Poisson.

   a) [**2 puntos**] Determine la probabilidad de vender al menos 10 donas por hora.

   b) [**3 puntos**] Suponga que un día particular, la tienda pasa abierta durante 5 horas seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de que vendan a lo sumo 50 donas en ese día?

   Solución.

   a) Suponiendo que X corresponde a la cantidad de donas vendidas por hora, se tiene que $X \sim Poisson\,(15)$, con $R_X = \{0, 1, \ldots\}$, y que la probabilidad solicitada es:

   $$P\,[X \geq 10] = 1 - P\,[X \leq 9] = 1 - \sum_{i=0}^{9} \frac{15^i \cdot e^{-15}}{i!} \approx 0.930146.$$

   Por lo tanto, aproximadamente, hay 93 % de probabilidad de vender al menos 10 donas por hora.

   b) Hay que hacer un cambio en la variable. Suponiendo que Y corresponde a la cantidad de donas vendidas por 5 horas, se tiene que $Y \sim Poisson\,(75)$, con $R_Y = \{0, 1, \ldots\}$, y que la probabilidad solicitada es:

   $$P\,[Y \leq 50] = \sum_{i=0}^{50} \frac{75^i \cdot e^{-75}}{i!} \approx 0.001402.$$

   Por lo tanto, la de probabilidad de que vendan a lo sumo 50 donas en ese día es de, aproximadamente, 0.001402.

2. Una fábrica de bombillos ha detectado que su máquina más nueva fabrica los bombillos con un porcentaje de 95 % de que no esté dañado.

   a) **[3 puntos]** Si se compraron 50 bombillos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 3 bombillos salgan dañados?

   b) **[3 puntos]** Rodolfo compró suficientes bombillos para abastecer el edificio de aulas. Empieza a colocarlos hasta encontrar uno dañado. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30?

Solución.

a) Suponga que X corresponde a la cantidad de bombillos que están dañados, de los 50 que se compraron. Se tiene que $X \sim Bin\,(50, 0.05)$, con $R_X = \{0, 1, \ldots, 50\}$, y se solicita:

$$P\left[X > 3\right] = 1 - P\left[X \leq 3\right] = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{50}{i} (0.05)^i \, (0.95)^{50-i} \approx 0.239592.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que más de 3 bombillos salgan dañados es de, aproximadamente, 23.9 %.

b) Suponga que Y corresponde a la cantidad de bombillos que se colocan hasta encontrar uno dañado. Se tiene que $Y \sim Geo\,(0.05)$, con $R_Y = \{1, 2, \ldots\}$, y se solicita:

$$P\left[Y < 30\right] = \sum_{i=1}^{29} (0.95)^{i-1} \, (0.05) \approx 0.774064.$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar el dañado antes de poner el bombillo número 30 es de, aproximadamente, 77.4 %.

3. Conteste lo que se le solicita.

   a) **[3 puntos]** En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas sin reemplazo. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

   b) **[2 puntos]** En una urna hay 20 bolitas, de las cuales 8 son rojas y 12 son azules. Se extraen aleatoriamente 5 bolitas con reemplazo. Calcula la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas.

Solución.

   a) Suponga que X corresponde a la cantidad de bolitas extraídas en la muestra sin reemplazo que son rojas. Se tiene que $X \sim HG\,(5, 20, 8)$, con $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Se solicita:

$$P\,[X = 3] = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{77}{323} \approx 0.238390.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas es de, aproximadamente, 23.8 %.

   b) Suponga que Y corresponde a la cantidad de bolitas extraídas en la muestra con reemplazo que son rojas. Se tiene que $Y \sim Bin\left(5, \frac{8}{20}\right)$, con $R_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Se solicita:

$$P\,[Y = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{8}{20}\right)^3\left(\frac{12}{20}\right)^{5-3} = \frac{144}{625} = 0.2304.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que exactamente 3 de las bolitas extraídas sean rojas es de, aproximadamente, 23 %.

4. Considere la variable aleatoria discreta X, tal que $E(X) = 4$ y $Var(X) = 1$. Considere las nuevas variables $Y = 3X^2 - 4X + 2$ y $Z = 4 - 3X$.

   a) **[3 puntos]** Determine $E(Y)$.

   b) **[2 puntos]** Determine $Var(Z)$.

Solución.

a) $E(Y) = E(3X^2 - 4X + 2)$

$\Rightarrow E(Y) = 3E(X^2) - 4E(X) + 2$

$\Rightarrow E(Y) = 3\left(Var(X) + [E(X)]^2\right) - 4E(X) + 2$

$\Rightarrow E(Y) = 3(1 + 4^2) - 4 \cdot 4 + 2 = 37$

Por lo tanto, $E(Y) = 37$.

b) $Var(Z) = Var(4 - 3X)$

$\Rightarrow Var(Z) = 9Var(X) = 9$

Por lo tanto, $Var(Z) = 9$.

5. **[3 puntos]** Considere la variable aleatoria discreta X, tal que su función generadora de momentos está dada por el criterio:

$$m_X(t) = \frac{e^t}{3} + \frac{2e^{2t}}{3}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Determine $E(X)$ y $Var(X)$ a partir de esta generadora de momentos.

Solución.

Note que:

- $m'_X(t) = \dfrac{e^t}{3} + \dfrac{4e^{2t}}{3}$
- $m''_X(t) = \dfrac{e^t}{3} + \dfrac{8e^{2t}}{3}$

Además, como no hay indicios que la función generadora de momentos se indefine en $t = 0$ (ni sus derivadas), entonces:

- $m'_X(0) = \dfrac{5}{3}$
- $m''_X(0) = 3$

Por lo tanto, se tiene que $E(X) = \dfrac{5}{3}$, y $Var(X) = 3 - \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$.

6. Un juego llamado "Zodiaco de Estrategia" tiene una mecánica de juego única. En cada turno, un jugador lanza un dado especial con 12 caras, numeradas del 1 al 12. En este dado, cada cara es igualmente probable. Dependiendo del número obtenido, el jugador avanza cierta cantidad de casillas en el tablero del juego, de la siguiente manera:

   - Si se obtiene un número del 1 al 4, el jugador avanza 1 casilla.
   - Si se obtiene un número del 5 al 8, el jugador avanza 2 casillas.
   - Si se obtiene un número del 9 al 11, el jugador avanza 3 casillas.
   - Si se obtiene un 12, el jugador avanza 4 casillas.

   a) [**3 puntos**] Determine la distribución de probabilidad para la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de casillas que un jugador avanza en un solo turno.

   b) [**3 puntos**] Terminando su tercer turno de un juego, ¿cuántas casillas avanza un jugador, en promedio?

Solución.

a) Considere X correspondiente a la cantidad de casillas que un jugador avanza en un solo turno. Se tiene que $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$. La distribución de probabilidad propuesta tiene criterio:

$$f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{4}{12} & \text{, si} \quad k = 1 \\[2ex] \dfrac{4}{12} & \text{, si} \quad k = 2 \\[2ex] \dfrac{3}{12} & \text{, si} \quad k = 3 \\[2ex] \dfrac{1}{12} & \text{, si} \quad k = 4 \end{cases}$$

Note que este criterio cumple $f_X(k) \geq 0$, para cualquier $k \in R_X$, y además $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} f_X(i) = 1$.

Por lo que sí es distribución de probabilidad.

b) Para este punto, es necesario saber cuánto se espera avanzar por turno. Para esto, basta con calcular:
$E(X) = 1 \cdot \dfrac{4}{12} + 2 \cdot \dfrac{4}{12} + 3 \cdot \dfrac{3}{12} + 4 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{25}{12} \approx 2.083333.$
Para el valor solicitado, basta con calcular $E(3X) = 6.25$, y se concluye que se espera que un jugador avance entre 6 y 7 casillas en su tercer turno.