Escuela de Matemáticas

Los números complejos

M. Sc. Luis Alejandro Acuña Prado

2014

Contenido

Nota

Este folleto es parte de una serie de folletos desarrollados para el curso "Cálculo y álgebra lineal". Cada uno contiene, además de los capítulos indicados abajo, un apéndice con sugerencias para los ejercicios más difíciles y otro apéndice con las soluciones de casi todos los ejercicios.

Los folletos son:

Los números complejos

Cap. 1: El álgebra de los números complejos

Cap. 2: La geometría de los números complejos

Cap. 3: Funciones de números complejos

Matrices y sus aplicaciones

Cap. 4: Matrices

Cap. 5: Sistemas de ecuaciones lineales

Cap. 6: Inversa de una matriz

Cap. 7: Determinantes

Vectores y espacios vectoriales

Cap. 8: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Cap. 9: Producto escalar y producto vectorial

Cap. 10: Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

Cap. 11: Espacios vectoriales

Cap. 12: Independencia lineal y bases

Cap. 13: Vectores propios y valores propios

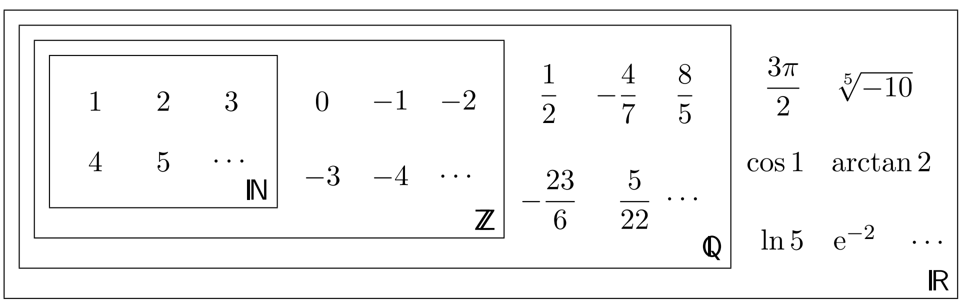
Capítulo 1

El álgebra de los números complejos

En este capítulo vamos a estudiar los números complejos, que pueden verse como un paso más allá de los números reales. Como veremos, los números complejos resuelven muchas ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{R}$, empezando por la ecuación $x^2 = -1$. De hecho, vamos a ver que todas las ecuaciones polinomiales de grado 1 o mayor tienen solución en los números complejos.

1.1 Qué son los números complejos

Tradicionalmente se cuenta la historia de los números naturales, los números más simples como 1, 2, 3, cuyo conjunto se denota $\mathbb{N}$, y de cómo al agregar cero y los enteros negativos se obtiene el conjunto de todos los enteros, $\mathbb{Z}$. Luego vienen las fracciones de enteros, como $2/3$, que junto con $\mathbb{Z}$ forman el conjunto de los racionales, $\mathbb{Q}$. Y por último, se dice, al añadir los irracionales como $\sqrt{2}$ o π se completa el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.



Pero $\mathbb{R}$ no es el final de la historia. Los números complejos son una extensión de los números reales, lo cual significa que el conjunto de los números complejos incluye a todos los números reales y también a otros, llamados imaginarios. La base de los números imaginarios es el número i, definido así:

Definición (el número i)

El número i es una raíz cuadrada de -1; es decir, un número tal que $\mathrm{i}^2 = -1$.

¿Cómo se puede hablar de una raíz cuadrada de -1, si tanto se ha dicho que los números negativos no tienen raíz cuadrada? Recordemos con cuidado: el número -1 no tiene una raíz cuadrada *real*, en el sentido de que no existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$, porque $x^2 \geq 0$ para cualquier x real. ¿Pero no podría existir otro número, que no sea real, cuyo cuadrado sea -1?

Igualmente podríamos preguntarnos cómo se puede hablar, por ejemplo, de la raíz cuadrada de 2. ¿Acaso existe un número que elevado al cuadrado dé 2? Es cierto que $1.414213^2 \approx 1.9999984$ y que $1.414214^2 \approx 2.0000012$, y que podemos acercarnos más a 2 tomando más decimales en $1.41421\ldots$ ¿Pero de veras existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que x^2 sea *exactamente* 2? La pregunta no es trivial, y resulta que si $x^2 = 2$ entonces x no puede ser racional. La solución, si existe, debe ser un número irracional.

Volviendo a la pregunta anterior, sabemos que no existe un número real x tal que $x^2 = -1$. Eso no significa que no existe la raíz cuadrada de -1, sino solamente que no puede ser real. Debe ser un número "irreal", más correctamente llamado *imaginario*. Los números imaginarios existen en el mismo sentido en el que existen los números irracionales: su existencia debe aceptarse como una de las "reglas del juego" matemático. El que quiera jugar Matemáticas acepta las reglas, aún a veces sin demostración.

> "*La Filosofía es un juego con objetivos y sin reglas. La Matemática es un juego con reglas y sin objetivos.*" Ian Ellis

Aceptemos entonces que existe un número, denotado i, cuyo cuadrado es -1. ¿No habíamos aceptado, también sin demostración, que existía un x cuyo cuadrado era 2, es decir, que existía la raíz cuadrada de 2? Ahora resulta que -1 tiene dos raíces cuadradas: i y $-$i. Convengamos en denotar $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. Entonces todos los números reales tienen raíz cuadrada.

Ejemplo 1: raíces cuadradas de números negativos

La raíz cuadrada de -9 es

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,\sqrt{-1} = 3\mathrm{i}$$

En efecto, $(3\mathrm{i})^2 = 3^2\,\mathrm{i}^2 = 9 \cdot (-1) = -9$.

La raíz cuadrada de -12 es $\sqrt{-12} = \sqrt{4}\,\sqrt{3}\,\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, o mejor $2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Repaso

Calcule la raíz cuadrada de -90. Solución: $3\mathrm{i}\sqrt{10}$

Es preferible escribir $2\mathrm{i}\sqrt{3}$ en vez de $2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ por la misma razón por la que se prefiere $2x\sqrt{3}$ en vez de $2\sqrt{3}x$: al escribir a mano, en la segunda forma puede no quedar claro si x está dentro o fuera de la raíz, mientras que en la primera forma no hay duda de que está fuera.

Debe notarse que la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que se cumple cuando a y b son positivos, falla para números negativos. Por ejemplo,

$$\sqrt{-4}\,\sqrt{-25} = (2\mathrm{i})(5\mathrm{i}) = 10\mathrm{i}^2 = -10$$

mientras que

$$\sqrt{(-4)(-25)} = \sqrt{100} = 10$$

Combinando los números reales con i conseguimos los números complejos.

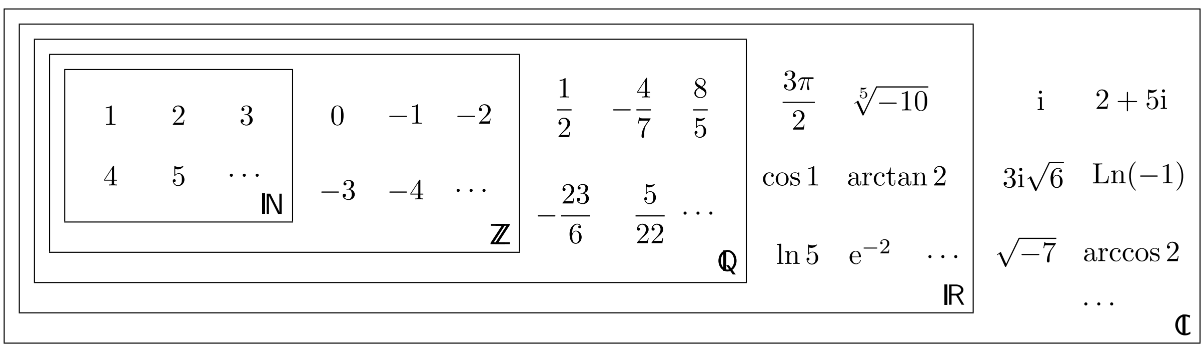
Definición (número complejo)

Un número *complejo* z es uno de la forma $z = a + b\mathrm{i}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

El número a es la *parte real* de z, denotada $\operatorname{Re} z$, y el número b es la *parte imaginaria* de z, denotada $\operatorname{Im} z$.

El conjunto de los números complejos se denota $\mathbb{C}$.

El diagrama de la página 1 ahora resulta ampliado así[1]:



"*Dios creó los números naturales; todo lo demás es obra del hombre.*"

Leopold Kronecker

Al escribir un número complejo en la forma $z = a + b\mathrm{i}$, los valores de a y b son únicos, en el sentido de que no es posible escribir el mismo número como $z = c + d\mathrm{i}$ a menos que $a = c$ y $b = d$. Más formalmente, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tenemos la implicación

$$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

(vea el Ejercicio 15). Dicho en palabras, si dos números complejos son iguales, sus partes reales respectivas son iguales entre ellas, así como sus partes imaginarias respectivas.

Todos los números reales son complejos, con parte imaginaria igual a cero. Por ejemplo, el número real 3 es igual a $3+0\mathrm{i}$: su parte real es 3 y su parte imaginaria es 0. En contraste, los números con parte real igual a cero, como $4\mathrm{i}$, se llaman *imaginarios puros*.

[1] Es bien sabido que $\operatorname{Ln}(-1)$ y $\arccos 2$, que se muestran como ejemplos de números complejos, no existen en los números reales. Los logaritmos complejos se definen en la página 44, y las funciones trigonométricas inversas complejas en la página 49.

Ejemplo 2: partes real e imaginaria

Los números $z = 3 - 2\mathrm{i}$ y $w = \dfrac{5\mathrm{i} - 12}{7}$ son complejos.

Sus partes reales son $\operatorname{Re} z = 3$ y $\operatorname{Re} w = -12/7$, y sus partes imaginarias son $\operatorname{Im} z = -2$ e $\operatorname{Im} w = 5/7$, respectivamente.

Repaso

¿Cuáles son las partes real e imaginaria de $y = \frac{1}{2}(4\mathrm{i} - 5)$?

Solución: $\operatorname{Re} y = -\frac{5}{2}$, $\operatorname{Im} y = 2$

Ejemplo 3: una ecuación cuadrática sin soluciones reales

Resolver la ecuación $2x^2 - 2x + 1 = 0$.

El discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(2)(1) = -4$. Cuando el discriminante de una ecuación cuadrática con coeficientes reales es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales, pero sí tiene dos soluciones complejas. En este caso,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 \pm 2\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

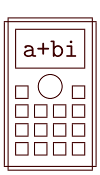
Comprobemos la primera solución. Para $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ la expresión $2x^2 - 2x + 1$ es

$$\begin{aligned} 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 - 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) + 1 &= 2\left(\tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\mathrm{i} + \tfrac{1}{4}\mathrm{i}^2\right) - 1 - \mathrm{i} + 1 \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{i} - \frac{1}{2} - \mathrm{i} = 0 \end{aligned}$$

Repaso

Resuelva $t^2 - 4t + 5 = 0$.

Solución: $t = 2 \pm \mathrm{i}$



Muchas calculadoras permiten resolver ecuaciones cuadráticas aunque las soluciones sean complejas. Al resolver la ecuación de este ejemplo en una de ellas (pasando al modo de ecuación cuadrática y digitando los coeficientes), es probable que la pantalla diga $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, y debe haber una forma de alternar en la pantalla entre esta solución y la otra, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Ejemplo 4: factorizar una suma de cuadrados

Factorizar el polinomio $9x^2 + 4$.

En los reales no hay un método general para factorizar una suma de cuadrados. Pero en los complejos puede convertirse la suma $9x^2 + 4$ en una *diferencia* de cuadrados para factorizarla así:

$$9x^2 + 4 = 9x^2 - (-4) = (3x)^2 - (2\mathrm{i})^2 = (3x + 2\mathrm{i})(3x - 2\mathrm{i})$$

Repaso

Factorice $25z^2 + 12$. Solución: $(5z + 2\mathrm{i}\sqrt{3})(5z - 2\mathrm{i}\sqrt{3})$

Ejemplo 5: resolver una ecuación compleja

Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ si $(3 - a) + (b + 1)\mathrm{i} = (4a - b)\mathrm{i} - 3$.

Como una igualdad entre números complejos implica igualdad entre las partes reales e igualdad entre las partes imaginarias, tenemos dos ecuaciones.

- Partes reales: $3 - a = -3 \Rightarrow a = 6$.
- Partes imaginarias: $b + 1 = 4a - b \Rightarrow 2b = 4a - 1 = 23$ (porque $a = 6$), así que $b = 23/2$.

Repaso

Encuentre x, y en $\mathbb{R}$ si $(2x - y)\mathrm{i} - (x + y) = 6 - 9\mathrm{i}$. Solución: $x = -5$, $y = -1$

La vida es compleja: tiene partes reales y partes imaginarias. (Anónimo)

Ejercicios

Encuentre todas las soluciones complejas.

1. $t^2 - 6t + 10 = 0$

2. $2z^2 + 2z + 5 = 0$

3. $4x^2 - 4x + 2 = 0$

4. $z^4 - 9 = 0$

5. $5x^2 + 4 = 4x$

6. $4y^4 + 15y^2 = 4$

Factorice completamente en $\mathbb{C}$.

7. $8z^2 + 18$

8. $x^2 + 10$

9. $9y^4 - 25$

10. $3t^2 + 12$

Encuentre los valores reales de a y b que cumplen la ecuación.

11. $5a - 7\mathrm{i} + 3b\mathrm{i} = 8b - \mathrm{i} - 1$

12. $b\mathrm{i} - 10 = 2b + 3a - 5\mathrm{i}$

13. $3a + 2 - 6b\mathrm{i} = 10ai - b\mathrm{i} + 1 - 2b$

14. $2a + 1 - b\mathrm{i} = b - (a+2)\mathrm{i}$

15. En este ejercicio se demuestra que las coordenadas real e imaginaria de un número complejo son únicas, o bien que si dos números complejos son iguales, sus partes reales e imaginarias son iguales.

(a) Demuestre que si $x + y\mathrm{i} = 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x = 0$ y $y = 0$.

(b) Demuestre que si $a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

1.2 Operaciones con números complejos

Las sumas y restas de números complejos se calculan como si se tratara de binomios comunes. Para productos y divisiones, necesitamos recordar que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Ejemplo 6: operaciones con números complejos

Tomemos $z = 3 - 2\mathrm{i}$ y $w = -1 + \mathrm{i}$. Entonces:

- $z + w = (3 - 2\mathrm{i}) + (-1 + \mathrm{i}) = 3 - 1 + (-2 + 1)\mathrm{i} = 2 - \mathrm{i}$
- $z - w = (3 - 2\mathrm{i}) - (-1 + \mathrm{i}) = 3 + 1 + (-2 - 1)\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i}$
- $z \cdot w = (3 - 2\mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}) = -3 + 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = -3 + 5\mathrm{i} - 2(-1) = -1 + 5\mathrm{i}$
- $(3z+2w)^2 = (9-6\mathrm{i}-2+2\mathrm{i})^2 = (7-4\mathrm{i})^2 = 49-56\mathrm{i}+16\mathrm{i}^2 = 49-56\mathrm{i}-16 = 33 - 56\mathrm{i}$

Repaso

Calcule $(4 - \mathrm{i})(5\mathrm{i} - 2)$. Solución: $22\mathrm{i} - 3$

Es interesante notar que las potencias enteras de i son cíclicas. Esto significa que se repiten en un ciclo. Veamos:

$\mathrm{i}^0 = 1$	$\mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$	$\mathrm{i}^8 = \mathrm{i}^4\,\mathrm{i}^4 = 1$
$\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$	$\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4\,\mathrm{i} = \mathrm{i}$	$\mathrm{i}^9 = \mathrm{i}^8\,\mathrm{i} = \mathrm{i}$
$\mathrm{i}^2 = -1$	$\mathrm{i}^6 = \mathrm{i}^4\,\mathrm{i}^2 = -1$	$\mathrm{i}^{10} = \mathrm{i}^8\,\mathrm{i}^2 = -1$
$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}$	$\mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^4\,\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$	$\dots$

Como vemos, $\mathrm{i}^0 = \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^8 = \mathrm{i}^{12} = \cdots = 1$: el resultado de elevar i a un entero múltiplo de 4 es siempre 1. Sabiendo eso, es fácil encontrar cualquier potencia natural de i así: para calcular i^n con $n \in \mathbb{N}$, buscamos el último múltiplo de 4 antes de n y descomponemos, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7: potencias de i

Así se calcula i^{511}:

$$\mathrm{i}^{511} = \mathrm{i}^{508+3} = \mathrm{i}^{508} \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$$

Repaso

Calcule i^{234}. Solución: -1

Para la división, necesitamos primero definir el conjugado de un número complejo.

Definición (conjugado)

Si $z = a + b\mathrm{i}$ es un número complejo, su *conjugado* es $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$.

Ya hemos encontrado el concepto de conjugado en el contexto de racionalizar denominadores. Por ejemplo, para racionalizar la fracción $1/(3 - 2\sqrt{5})$ sabemos que deben multiplicarse numerador y denominador por el conjugado del denominador, $3 + 2\sqrt{5}$:

$$\frac{1}{3 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}}$$

En el caso de los números complejos, el conjugado es lo mismo. Por ejemplo, $3 - 2\mathrm{i}$ significa $3 - 2\sqrt{-1}$, y su conjugado es $3 + 2\mathrm{i}$, que significa $3 + 2\sqrt{-1}$.

Para dividir dos números complejos usamos la misma idea de racionalizar el denominador: multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador.

Ejemplo 8: división de números complejos

Usando los mismos $z = 3 - 2\mathrm{i}$ y $w = -1 + \mathrm{i}$ del Ejemplo 6,

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{3 - 2\mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i}} = \frac{3 - 2\mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i}} \cdot \frac{-1 - \mathrm{i}}{-1 - \mathrm{i}} = \frac{-3 - 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{(-1)^2 - \mathrm{i}^2} \\ &= \frac{-5 - \mathrm{i}}{1 - (-1)} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Repaso

Divida $(4 - \mathrm{i}) \div (3\mathrm{i} - 4)$. Solución: $-0.76 - 0.32\mathrm{i}$

Los conjugados complejos tienen las siguientes propiedades (vea los Ejercicios 39–42).

Teorema

Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w} \quad$ si $w \neq 0$
- $\bar{\bar{z}} = z$

Ejemplo 9: un sistema de ecuaciones complejas

Resolver el sistema siguiente, con incógnitas $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w = 1 - 9\mathrm{i} \\ (2-\mathrm{i})\bar{z} + \bar{w} = 5 + 3\mathrm{i} \end{cases}$$

Como en casi cualquier sistema de ecuaciones, existen varias formas de encontrar la solución. Veamos un método posible (en el Ejemplo 7 del Capítulo 5, página 87, y en el Ejemplo 9 del Capítulo 7, página 135, veremos otros dos).

Como el sistema involucra z, w, $\bar{z}$ y $\bar{w}$, en principio tenemos cuatro incógnitas. Pero podemos tomar el conjugado de toda la segunda ecuación para que el sistema esté en términos de z y w solamente:

$$\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w = 1 - 9\mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})z + w = 5 - 3\mathrm{i} \end{cases}$$

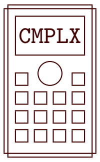
Ahora podemos despejar w en la segunda ecuación y sustituirlo en la primera, la cual tendrá entonces solo una incógnita.

$$\begin{aligned} w &= 5 - 3\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})z \\ 3z - \mathrm{i}(5 - 3\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})z) &= 1 - 9\mathrm{i} \\ 3z - 5\mathrm{i} - 3 + 2\mathrm{i}z - z &= 1 - 9\mathrm{i} \\ z(2+2\mathrm{i}) &= 4 - 4\mathrm{i} \\ z &= \frac{4-4\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \cdots = -2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Por último, $w = 5 - 3\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})z = 5 - 3\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})(-2\mathrm{i}) = \cdots = 3 + \mathrm{i}$.

Repaso

Resuelva $\{\, 2z - w = 2 - 4\mathrm{i},\ z + 4\mathrm{i}w = -7 - \mathrm{i} \,\}$. Solución: $z = 1 - \mathrm{i}$, $w = 2\mathrm{i}$



Es probable que su calculadora tenga un modo para trabajar con números complejos. Si es así, entonces las operaciones que hemos descrito pueden hacerse mucho más fácilmente en ese modo. Por ejemplo, las operaciones $(2\mathrm{i}-6)-3(1+\mathrm{i})$, $(4-\mathrm{i})(5\mathrm{i}-2)$ y $(4-\mathrm{i})\div(3\mathrm{i}-4)$ se calculan escribiendo en la calculadora

`( 2 i - 6 ) - 3 ( 1 + i ) =`

`( 4 - i ) ( 5 i - 2 ) =`

y

`( 4 - i ) ÷ ( 3 i - 4 ) =` o bien $\dfrac{\texttt{4 - i}}{\texttt{3 i - 4}}$ `=`

respectivamente (la letra `i` probablemente esté en la tecla [`ENG`]).

Ejercicios

Calcule el resultado de la operación en la forma $a+b\mathrm{i}$.

16. $\mathrm{i}(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$

17. $(-7+2\mathrm{i})(-7-2\mathrm{i})$

18. $(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^2$

19. $\mathrm{i}^{57}+\mathrm{i}^{98}-\mathrm{i}^{75}$

20. $\dfrac{1+\mathrm{i}^3}{(1+\mathrm{i})^3}$

21. $\dfrac{5\mathrm{i}(2+2\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}$

22. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

23. $\dfrac{3\mathrm{i}^{-50}-2\mathrm{i}^{-37}}{4\mathrm{i}^{-13}+5\mathrm{i}^{-19}}$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\mathrm{i}^k=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{100}$

Resuelva el sistema de ecuaciones.

25. $\begin{cases} z+w\mathrm{i}=1 \\ z\mathrm{i}+w=1+\mathrm{i} \end{cases}$

26. $\begin{cases} (1+\mathrm{i})x-y\mathrm{i}=3-\mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})x+(2-\mathrm{i})y=2\mathrm{i} \end{cases}$

27. $\begin{cases} \mathrm{i}u+(1+\mathrm{i})w=3+\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})\bar{u}-(6-\mathrm{i})\bar{w}=4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6w+(4\mathrm{i}-1)x=-3-7\mathrm{i} \\ (\mathrm{i}-1)\bar{w}-\bar{x}=7\mathrm{i}-5 \end{cases}$

Encuentre dos números reales x, y que cumplan la condición.

29. $(3-4\mathrm{i})^2-2(x-y\mathrm{i})=x+\mathrm{i}$

30. $3+2x\mathrm{i}+3y\mathrm{i}=8\mathrm{i}+x-2y$

31. $(3-2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=2(x-2y\mathrm{i})-1+2\mathrm{i}$

32. $(1-\mathrm{i})x+2y\mathrm{i}=4+2\mathrm{i}$

33. $z=-3+\mathrm{i}x^2y$ y $w=x^2+y+4\mathrm{i}$ son conjugados entre ellos

34. Resuelva la ecuación $\dfrac{z-1}{1+\mathrm{i}z\sqrt{3}}=3\mathrm{i}\sqrt{3}$.

35. Dado $z=3-4\mathrm{i}$, encuentre un $w\in\mathbb{C}$ tal que $\bar{z}\,\bar{w}=2\mathrm{i}-1$.

36. Si z es un número complejo, ¿en qué condiciones se tiene $z = \bar{z}$?

37. ¿Cuál debe ser la relación entre los números reales x, y para que $(x + y\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})$ sea un número real?

38. Encuentre los números reales x tales que $w = (x - \mathrm{i})(x + 3 - 4\mathrm{i})$ sea imaginario puro. Dé también los valores correspondientes de w.

Demuestre la identidad para z y w números complejos.

39. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

40. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

41. $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ si $w \neq 0$

42. $\bar{\bar{z}} = z$

1.3 El teorema fundamental del Álgebra

En los números reales, sabemos que todas las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una solución única, y que las de segundo grado tienen dos, una o ninguna[2]. En los números complejos, como vimos en la Sección 1.1, aun las ecuaciones de segundo grado con discriminante negativo tienen dos soluciones.

Dada una ecuación polinomial $P(x) = 0$, las soluciones se llaman también raíces de la ecuación, o ceros del polinomio P. El párrafo anterior puede expresarse así: los polinomios de grado 1 tienen un cero, y los de grado 2 tienen hasta dos ceros.

¿Y cuántas raíces tienen las ecuaciones de grado 3 o mayor? Los siguientes ejemplos ilustran la situación general.

Ejemplo 10: una ecuación cúbica

Resolver la ecuación $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

Podemos factorizar el lado izquierdo por agrupación o por división sintética, y llegamos a

$$(x - 1)(x^2 + 1) = 0$$

Si nos limitáramos a los números reales, $x = 1$ sería la única solución. Pero en los complejos, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ lleva a $x^2 = -1$ y entonces tiene dos soluciones: $x = \mathrm{i}$ y $x = -\mathrm{i}$.

Las raíces de la ecuación original son entonces tres: $x = 1$, $x = \mathrm{i}$ y $x = -\mathrm{i}$.

Repaso

Resuelva $8z^3 + 18z = 0$. Solución: $z = 0$, $z = \pm 1.5\mathrm{i}$

[2]Una ecuación de grado n con una incógnita es una igualdad entre dos polinomios en una misma variable, uno de grado n y el otro de grado menor o igual que n. Esas ecuaciones se pueden escribir en la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, donde x es la incógnita y $a_n, \ldots, a_0$ son constantes.

Ejemplo 11: ceros repetidos de un polinomio

Encontrar los ceros del polinomio $P(z) = z^3 - z^2$.

Buscamos las soluciones de $z^3 - z^2 = 0$, es decir $z^2(z-1) = 0$. Es claro que las soluciones son $z = 0$ y $z = 1$ (pero vea el comentario después del siguiente ejemplo, y vea también el Ejemplo 14).

Repaso

Resuelva $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$. Solución: $x = 0$, $x = -2$

Ejemplo 12: ecuación de grado cuatro

Resolver la ecuación $t^4 + 2t^3 - 8t - 16 = 0$.

Factorizando por división sintética, o por agrupación y luego diferencia de cubos, llegamos a

$$(t+2)(t-2)(t^2+2t+4) = 0$$

Tenemos entonces dos soluciones reales: $t = 2$ y $t = -2$, y dos complejas (del tercer paréntesis): $t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ y $t = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$: cuatro soluciones en total.

Repaso

Resuelva $4y^4 - 5y^2 = 9$. Solución: $y = \pm 3/2$, $y = \pm\mathrm{i}$

En general, los polinomios de grado n tienen n ceros complejos (los números reales también son complejos), aunque no sean n ceros *distintos*, porque a veces habrá ceros repetidos. En el Ejemplo 11, como la factorización de $P(z)$ es $z \cdot z \cdot (z-1)$, los ceros son $z = 0$, $z = 0$ y $z = 1$ (uno para cada factor, pero no necesariamente distintos). Y en el Repaso de ese ejemplo, como la factorización es $x(x+2)(x+2)$, los ceros son $x = 0$, $x = -2$ y $x = -2$.

Dicho de otra forma, las ecuaciones polinomiales de grado n tienen n soluciones complejas. Esto es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema fundamental del Álgebra

Cualquier polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales o complejos, tiene al menos un cero complejo.

Así no parece un teorema muy impresionante. Acabamos de hablar de n ceros, y el teorema fundamental del Álgebra (TFA) garantiza solo uno. Pero la importancia del TFA es que puede aplicarse repetidamente de la siguiente forma:

Sea P un polinomio de grado n. Por el TFA, P tiene un cero c_1, es decir un número tal que $P(c_1) = 0$. Por el teorema del factor[3], esto implica que $P(x)$ puede factorizarse como

$$P(x) = (x - c_1)Q_1(x)$$

donde Q_1 es algún polinomio de grado $n - 1$.

Ahora el TFA nos dice que Q_1 tiene al menos un cero, que llamaremos c_2. Entonces $Q_1(c_2) = 0$, y de nuevo el teorema del factor nos permite factorizar:

$$Q_1(x) = (x - c_2)Q_2(x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - c_1)(x - c_2)Q_2(x)$$

donde Q_2 es algún polinomio de grado $n - 2$.

Continuando de esta forma, tendremos en el siguiente paso que

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)Q_3(x)$$

donde Q_3 es algún polinomio de grado $n - 3$.

Finalmente llegaremos a que

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)Q_n(x)$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son los ceros de $P(x)$, y Q_n es algún polinomio de grado $n - n = 0$. Así, Q_n es constante, y podemos denotarlo a y escribirlo a la izquierda de los paréntesis. De hecho, esta constante a es igual al coeficiente de x^n en $P(x)$, como veremos en el Ejemplo 13. Por ahora tenemos:

Teorema (corolario del TFA)

Si P es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ se factoriza completamente como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son los ceros de P, y a es el coeficiente de x^n en $P(x)$.

Ejemplo 13: factorizar un polinomio con ceros complejos

Factorizar $2x^4 + 5x^2 - 5x^3 - 5x + 3$.

Por división sintética encontramos:

$$2x^4 + 5x^2 - 5x^3 - 5x + 3 = (x - 1)(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$$

[3] El teorema del factor dice que si P es un polinomio de grado n y c es un cero de P, entonces $P(x)$ se factoriza como $(x - c)Q(x)$, donde Q es algún polinomio de grado $n - 1$.

Ahora podemos usar agrupación en el segundo paréntesis:

$$2x^4 + 5x^2 - 5x^3 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)(x^2+1)$$

Escribiendo $x^2 + 1$ como $x^2 - (-1)$ podemos usar diferencia de cuadrados en el tercer paréntesis:

$$2x^4 + 5x^2 - 5x^3 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$$

Entonces los ceros son $x = 1$, $x = 3/2$, $x = \mathrm{i}$ y $x = -\mathrm{i}$, y la factorización completa es:

$$2x^4 + 5x^2 - 5x^3 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\tfrac{3}{2})(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$$

Las dos formas que acabamos de ver para la factorización,

$$(x-1)(2x-3)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) \qquad \text{y} \qquad 2(x-1)(x-\tfrac{3}{2})(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$$

son válidas, pero la segunda ilustra mejor lo que dice el corolario anterior.

Repaso

Factorice $9w^4 - 4.5w^3 + 11.5w^2 - 8w - 8$.

Solución: $9(w-1)(w+0.5)(w+\frac{4}{3}\mathrm{i})(w-\frac{4}{3}\mathrm{i})$

Definición (multiplicidad)

Cuando un factor $(x-c)$ aparece k veces en la factorización de $P(x)$, se dice que $(x-c)$ es un factor con *multiplicidad* k, y que c es un cero con *multiplicidad* k.

Los factores o ceros no repetidos ($k = 1$) se llaman *simples*, y los repetidos ($k > 1$) se llaman *múltiples*.

Ejemplo 14: ceros múltiples

En el Ejemplo 11 vimos que $P(z) = z^3 - z^2 = (z-0)(z-0)(z-1)$ tiene $z = 0$ como cero múltiple con multiplicidad 2 (es un cero doble), y $z = 1$ como cero simple.

En el polinomio $Q(t) = -4(t+1)^3(t-6)^2$, el cero $t = -1$ tiene multiplicidad 3 y el cero $t = 6$ tiene multiplicidad 2: son un cero triple y un cero doble, respectivamente.

En los ejemplos que hemos visto podemos notar que cuando hay ceros que no son reales estos aparecen en pares conjugados. En los Ejemplos 10 y 13 los ceros no reales son $x = \pm\mathrm{i}$, y en el Ejemplo 12 son $t = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Esto sucede siempre que los coeficientes sean reales, como dice el siguiente teorema.

Teorema de los ceros conjugados

Si P es un polinomio con todos sus coeficientes reales, y $x = a + b\mathrm{i}$ es un cero de P, entonces su conjugado $\bar{x} = a - b\mathrm{i}$ también es un cero de P.

Cuando no todos los coeficientes son reales, no podemos asegurar que los ceros complejos estén en pares conjugados. Por ejemplo, el polinomio $R(x) = x^2 - \mathrm{i}x$ se factoriza como $x(x - \mathrm{i})$, de modo que sus ceros son $x = 0$ y $x = \mathrm{i}$. El cero complejo $x = \mathrm{i}$ no está acompañado de su conjugado $\bar{x} = -\mathrm{i}$ en la lista de ceros de R, pero esto es porque no todos los coeficientes en $R(x)$ son reales (el coeficiente de x es $-\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$).

Ejemplo 15: ceros conjugados

Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10 = 0$, sabiendo que $2 - \mathrm{i}$ es una de las soluciones.

Denotemos $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10$. Como todos los coeficientes son reales y $2 - \mathrm{i}$ es un cero, también $2 + \mathrm{i}$ debe ser un cero. Esto significa que

$$P(x) = [x - (2 - \mathrm{i})][x - (2 + \mathrm{i})]\, Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$ de grado $4-2 = 2$. Este $Q(x)$ se despeja dividiendo $P(x)$ por $[x - (2 - \mathrm{i})][x - (2 + \mathrm{i})]$:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{[x - (2 - \mathrm{i})][x - (2 + \mathrm{i})]}$$

Para esto tenemos dos opciones:

Método 1: Desarrollar el producto y usar división larga.

Reagrupamos y usamos la tercera fórmula notable:

$$\begin{aligned}[x - (2 - \mathrm{i})][x - (2 + \mathrm{i})] &= [(x - 2) + \mathrm{i}][(x - 2) - \mathrm{i}] \\ &= (x - 2)^2 - \mathrm{i}^2 = x^2 - 4x + 4 - (-1) \\ &= x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

Ahora dividimos:

$$Q(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10}{x^2 - 4x + 5} = x^2 + 2x + 2$$

Método 2: Usar división sintética sucesivamente para cada factor.

Primero dividimos $P(x)$ entre $[x-(2-\mathrm{i})]$:

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & -1 & 2 & 10 & 2-\mathrm{i} \\
 & 2-\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & -6-2\mathrm{i} & -10 & \\
\hline
1 & -\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & 0 &
\end{array}$$

Ahora dividimos este resultado entre $[x-(2+\mathrm{i})]$:

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\
 & 2+\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

Entonces $Q(x) = x^2 + 2x + 2$.

Habiendo encontrado $Q(x) = x^2 + 2x + 2$ por cualquiera de los dos métodos, resolvemos $Q(x) = 0$, cuyas soluciones son $x = -1 + \mathrm{i}$ y $x = -1 - \mathrm{i}$.

Finalmente, las cuatro soluciones de $P(x) = 0$ son $x = 2 \pm \mathrm{i}$ y $x = -1 \pm \mathrm{i}$.

Repaso

Resuelva $t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 4t + 3 = 0$ sabiendo que $-\mathrm{i}$ es una solución.

Solución: $t = \mathrm{i}$, $t = -\mathrm{i}$, $t = -3$, $t = -1$

Ejercicios

Factorice completamente en $\mathbb{C}$.

43. $2x^3 - x^2 + 6x - 3$

44. $t^3 - 3t^2 + 12t - 10$

45. $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5$

46. $y^4 - 2y^2 + 3y - 2$

47. $z^4 + 14z^2 + 49$

48. $6w^4 + 10w^3 + 5w^2 - 3w$

49. $3r^4 - \frac{11}{2}r^3 + 13r^2 + \frac{9}{2}r - 5$

50. $10t^5 - 75t^4 + 195t^3 - 180t^2 + 50t$

51. $5w^4 - \frac{43}{2}w^3 + 2w^2 + 67w + 30$, sabiendo que $w = 3 + \mathrm{i}$ es un cero

52. $x^5 - 4x^4 + 14x^3 - 36x^2 + 45x$, sabiendo que $x = 2 - \mathrm{i}$ es un cero

Encuentre todas las soluciones complejas.

53. $w^2 - w = -1$

54. $2t^3 + t^2 + 1 = 0$

55. $y^4 - 2y^2 - 3 = 0$

56. $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$, sabiendo que $1 + \mathrm{i}$ es una solución

57. $z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 2 = 0$, sabiendo que $1 + \mathrm{i}$ es una solución

58. $w^4 + 3w^3 + 5w^2 + 4w + 2 = 0$, sabiendo que $\mathrm{i} - 1$ es una solución

59. $2v^4 - 10v^3 + 9v^2 + 14v + 10 = 0$, sabiendo que $3 + \mathrm{i}$ es una solución

60. $u^4 + u^3 - 4u^2 + 2u - 12 = 0$, sabiendo que $\mathrm{i}\sqrt{2}$ es una solución

61. $y^4 + 4y^2 + 3 = 0$, sabiendo que $-\mathrm{i}$ es una solución

En resumen. . .

- El número i es la raíz cuadrada de -1: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$
- Un número complejo es uno de la forma $a + b\mathrm{i}$, con a y b reales.
- El conjunto de los números complejos es $\mathbb{C}$.
- Si a y b son reales, la parte real del número $z = a + b\mathrm{i}$ es $\operatorname{Re} z = a$, y la parte imaginaria es $\operatorname{Im} z = b$.
- Si a y b son reales, el conjugado del número $z = a + b\mathrm{i}$ es $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$.
- Para dividir dos números complejos se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} \cdot \frac{c - d\mathrm{i}}{c - d\mathrm{i}} = \cdots$$

- El teorema fundamental del Álgebra dice que cualquier polinomio con grado ≥ 1 y coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo.
- La factorización completa de un polinomio $P(z)$ de grado n es

$$P(z) = a(z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_n)$$

  donde a es el coeficiente de z^n y c_1, c_2, …, c_n son los ceros de P.
- El teorema de los ceros conjugados dice que si $P(z)$ es un polinomio con todos sus coeficientes reales, y z es un cero de P, entonces $\bar{z}$ también es un cero de P.

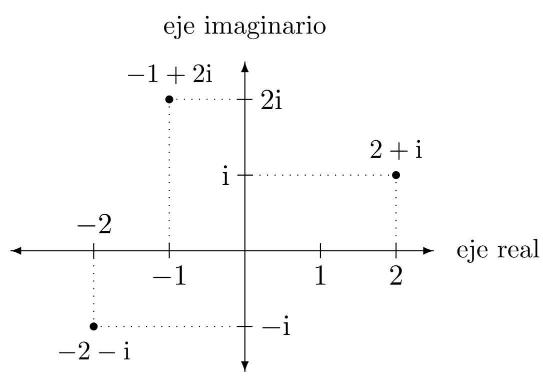
Capítulo 2

La geometría de los números complejos

Luego de haber estudiado las propiedades algebraicas de los números complejos (acerca de sus operaciones), pasemos al enfoque geométrico. Vamos a ver los complejos como puntos en un plano e identificarlos según sus coordenadas rectangulares o polares.

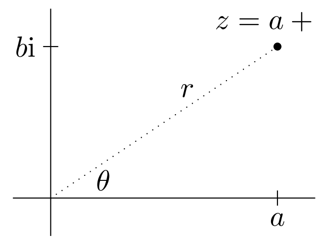
2.1 Representación gráfica de los números complejos

Los números reales usualmente se representan en una recta horizontal, llamada la recta real, en la que cada punto representa un número. De manera análoga, se acostumbra representar los números complejos gráficamente, usando dos ejes como los ejes cartesianos. Esta representación se llama el *plano complejo*, y cada punto en el plano representa un número complejo. La parte real se representa en el eje horizontal, llamado *eje real*, y la parte imaginaria en el eje vertical, llamado *eje imaginario*. Veamos por ejemplo los siguientes puntos:



Dada su representación gráfica, la forma $z = a + b\mathrm{i}$ de un número complejo se llama *forma rectangular*, y los números a y b son las *coordenadas rectangulares* de z.

Hay otra forma importante de representar números complejos, llamada *forma polar*. Esta forma está basada en que un punto en el plano complejo puede describirse no solo por sus coordenadas rectangulares (horizontal y vertical, o parte real y parte imaginaria), sino también por la distancia al origen y el ángulo con el eje real positivo. En el siguiente gráfico, el punto correspondiente al número $z = a + b\mathrm{i}$ está a una distancia r del origen y formando un ángulo θ con el eje real positivo.



Definición (coordenadas polares)

Los números r y θ son las *coordenadas polares* de z.

- r es el *valor absoluto* o *módulo*, y se denota $|z|$.
- θ es el *argumento* o *amplitud*.

Por trigonometría podemos observar las siguientes relaciones:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r\operatorname{sen}\theta$$

Las dos ecuaciones arriba a la derecha permiten pasar de coordenadas polares a rectangulares; es decir, calcular a y b conociendo r y θ. Para convertir de rectangulares a polares (calcular r y θ a partir de a y b) podemos observar lo siguiente (conviniendo en que $r \geq 0$):

$$r^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \ldots ?$$

Desgraciadamente, la última ecuación no puede despejarse directamente para llegar a $\theta = \arctan(b/a)$, porque arctan siempre da un resultado entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, y el argumento puede no estar en ese intervalo. Lo que eso implica es que el argumento de $z = a + b\mathrm{i}$ es igual a $\arctan(b/a)$ solamente si z está a la derecha del eje imaginario (con argumento entre $-\pi/2$ y $\pi/2$); eso es si $a > 0$. Pero si $a \leq 0$, el argumento de z *no* es $\arctan(b/a)$.

Pronto veremos, en el Ejemplo 2, cómo resolver este problema. Por el momento, las dos ecuaciones $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$ implican que $z = a + b\mathrm{i}$ puede escribirse como

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$$

(con i a la izquierda para que sea claro que no está dentro de la función seno).

La siguiente definición simplifica la notación polar.

Definición (la función cis)

Se define la función cis = cos + i sen. Es decir, para cualquier ángulo θ,

$$\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$$

Entonces el número z del gráfico puede escribirse $z = r\operatorname{cis}\theta$.
En resumen:

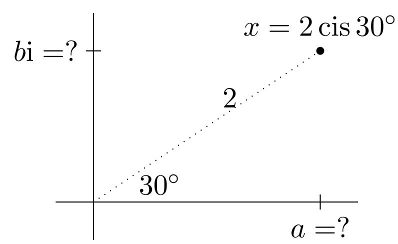
Definición (formas rectangular y polar)

La *forma rectangular* de un número complejo es $z = a + b\mathrm{i}$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria.

La *forma polar* es $z = r\operatorname{cis}\theta$, donde r es el valor absoluto y θ es el argumento.

Ejemplo 1: convertir de forma polar a forma rectangular

Sea $x = 2\operatorname{cis}30°$, en forma polar.



Para convertir x a forma rectangular basta con usar la definición de cis y distribuir:

$$x = 2(\cos 30° + \mathrm{i}\operatorname{sen}30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$$

Repaso

Convierta $4\sqrt{3}\operatorname{cis}(5\pi/6)$ a forma rectangular. Solución: $-6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

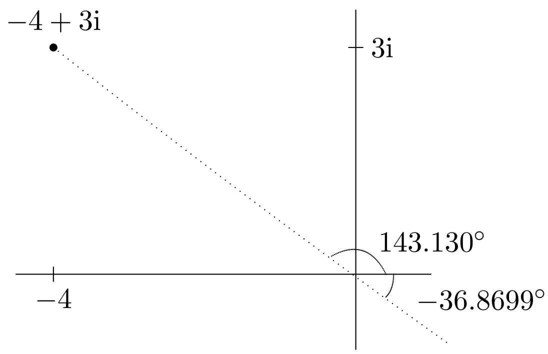
Ejemplo 2: convertir de forma rectangular a forma polar

Sea $y = -4 + 3\mathrm{i}$, en forma rectangular. Para convertirlo a forma polar calculamos r y θ.

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

- $\tan\theta = b/a = -3/4$. Pero $\arctan(-3/4) \approx -36.8699°$, que está en el cuarto cuadrante, y obviamente (por los signos de sus partes real e imaginaria) el punto y está en el segundo cuadrante. Debemos sumar 180°:

$$\theta = \arctan(-3/4) + 180° \approx 143.130°$$



Entonces la forma polar es $y = 5 \operatorname{cis} 143.130°$; en radianes, $y = 5 \operatorname{cis} 2.49809$.

Repaso

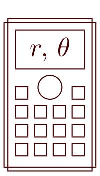
Convierta $5 - 12\mathrm{i}$ a forma polar. Solución: $13 \operatorname{cis}(-1.17601)$

En este último ejemplo la parte real de y es menor que 0 y por eso el argumento no es igual a $\arctan(b/a)$. También pudimos haber restado 180° para conseguir la forma equivalente $y = 5 \operatorname{cis}(-216.870°)$. En realidad hay infinitos valores posibles para el ángulo θ. Se acostumbra escoger el único valor entre $-180°$ y $180°$ (o entre $-\pi$ y π) y llamarlo el argumento principal.

Definición (argumento principal)

El *argumento principal* de $z = r \operatorname{cis}\theta$ es el único valor de θ en el intervalo $]-\pi, \pi]$, o bien $]-180°, 180°]$. Se denota $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Habíamos visto que la representación rectangular de un número complejo es única: si $a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$ entonces $a = c$ y $b = d$ (Ejercicio 15 del Capítulo 1, página 6). Pero es importante notar que la representación polar no es única. Que $r \operatorname{cis}\theta = s \operatorname{cis}\alpha$ no implica que $\theta = \alpha$. Al menos r y s sí deben ser iguales, pero como acabamos de ver, los ángulos pueden ser distintos para un mismo número. En el ejemplo anterior, $5 \operatorname{cis} 143.130° = 5 \operatorname{cis}(-216.870°)$.



La mayoría de las calculadoras científicas incluyen funciones para convertir entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares. Usualmente hay una tecla [`Rec(`] para convertir de polar a rectangular, y una tecla [`Pol(`] para convertir de rectangular a polar.

En el primer ejemplo anterior, para encontrar las coordenadas rectangulares de $2\operatorname{cis} 30°$ $(\sqrt{3} + \mathrm{i})$, primero se verifica que la calculadora esté en modo de grados. Entonces se escribe

`[Rec(] 2 , 30 ) =`

y los resultados probablemente estarán en la pantalla y en las memorias X y Y, dependiendo de la calculadora.

En el segundo ejemplo, para las coordenadas polares de $-4 + 3\mathrm{i}$ se escribe

`[Pol(] -4 , 3 ) =`

Ahora la pantalla y las memorias X y Y tendrán los valores de r y θ, respectivamente.

Si su calculadora tiene un modo para números complejos, es probable que tenga programada la función cis, aunque no con ese nombre. Tal vez se denote $\angle$ y esté en `[SHIFT]` `[(-)]`. En tal caso, para convertir $2\operatorname{cis} 30°$ a coordenadas polares, escriba (con la calculadora en grados)

`2 ∠ 30 =`

y la calculadora responderá con $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

También es posible convertir a coordenadas polares en este modo. Entre las funciones de números complejos (probablemente en `[SHIFT]` `2`) está la función $\triangleright\mathtt{r}\angle\theta$. Así, para convertir $-4 + 3\mathrm{i}$ a forma polar, escriba

`- 4 + 3 i [CMPLX]` $\triangleright r\angle\theta$ `=`

y la pantalla mostrará el resultado, $5\angle 143.13\ldots$ (que en nuestra notación significa $5\operatorname{cis} 143.13\ldots°$).

Note que la calculadora halla correctamente el argumento principal, independientemente de que la parte real sea positiva o negativa.

De paso, mencionamos que en el modo complejo la función `[Abs(]` calcula el valor absoluto o módulo de un número complejo, y la función `arg` (en el menú de funciones complejas) calcula su argumento principal.

En los siguientes problemas encontramos números complejos que cumplan ciertas condiciones sobre su valor absoluto y su argumento.

Ejemplo 3: encontrar un número con dos condiciones geométricas

Encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z + \mathrm{i}| = 5$ y $\operatorname{Arg}(\bar{z} + 2) = -3\pi/4$.

Empecemos por escribir $z = a+b\mathrm{i}$ para que las incógnitas sean $a, b \in \mathbb{R}$. Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

Como $z+\mathrm{i} = a+b\mathrm{i}+\mathrm{i} = a+(b+1)\mathrm{i}$, la primera condición, $|z+\mathrm{i}| = 5$, significa que $\sqrt{a^2+(b+1)^2} = 5$, es decir,

$$a^2 + (b+1)^2 = 25$$

Esta será la primera ecuación del sistema.

Por otra parte, como $\bar{z}+2 = a-b\mathrm{i}+2 = (a+2)-b\mathrm{i}$, la segunda condición, $\operatorname{Arg}(\bar{z}+2) = -3\pi/4$, implica que $\tan(-3\pi/4) = -b/(a+2)$, así que

$$-b = (a+2)\tan(-3\pi/4) = a+2$$

y de aquí obtenemos que $b = -a-2$, que viene a ser nuestra segunda ecuación.

Sustituyendo $b = -a-2$ en la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned} a^2 + (-a-2+1)^2 &= 25 \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 &= 25 \\ 2a^2 + 2a - 24 &= 0 \end{aligned}$$

Hay dos soluciones: $a_1 = 3$ y $a_2 = -4$. Como $b = -a-2$, también hay dos soluciones para b: $b_1 = -5$ y $b_2 = 2$. Finalmente, como $z = a+b\mathrm{i}$, las dos soluciones son $z_1 = 3-5\mathrm{i}$ y $z_2 = -4+2\mathrm{i}$.

No tan finalmente: z_1 y z_2 sí satisfacen $a^2+(b+1)^2 = 25$, que es equivalente a $|z+\mathrm{i}| = 5$. Y también satisfacen $-b = a+2$, pero esta condición *no* es equivalente a $\operatorname{Arg}(\bar{z}+2) = -3\pi/4$ (por el ajuste de los $180° = \pi$). Comprobemos[1].

Con $z_1 = 3-5\mathrm{i}$:

- $|z_1+\mathrm{i}| = |3-5\mathrm{i}+\mathrm{i}| = |3-4\mathrm{i}| = \sqrt{9+16} = 5$ como debía ser.
- $\operatorname{Arg}(\bar{z}_1+2) = \operatorname{Arg}(3+5\mathrm{i}+2) = \operatorname{Arg}(5+5\mathrm{i}) = \pi/4$, no $-3\pi/4$.

Con $z_2 = -4+2\mathrm{i}$:

- $|z_2+\mathrm{i}| = |-4+2\mathrm{i}+\mathrm{i}| = |-4+3\mathrm{i}| = \sqrt{16+9} = 5$ como se pidió.
- $\operatorname{Arg}(\bar{z}_2+2) = \operatorname{Arg}(-4-2\mathrm{i}+2) = \operatorname{Arg}(-2-2\mathrm{i}) = -3\pi/4$ también como debía.

En conclusión, la única solución verdadera es $z_2 = -4+2\mathrm{i}$.

Repaso

Encontrar $x \in \mathbb{C}$ con $|x-3\mathrm{i}| = 5$ y $\operatorname{Arg}(x-4) = \dfrac{3\pi}{4}$. Solución: $x = 7\mathrm{i}-3$

[1] Como en las ecuaciones radicales, logarítmicas y otras, aquí las soluciones deben comprobarse en las ecuaciones originales (antes de elevar al cuadrado y sacar tangente).

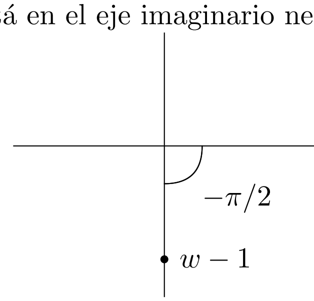
Ejemplo 4: encontrar un número con dos condiciones geométricas

Encontrar un número complejo w con $|w+3| = 5$ y $\operatorname{Arg}(w-1) = -\pi/2$.

Escribiendo $w = a + b\mathrm{i}$ como antes, tenemos $w + 3 = a + 3 + b\mathrm{i}$ y también $w - 1 = a - 1 + b\mathrm{i}$, así que la primera condición resulta en

$$(a+3)^2 + b^2 = 25$$

Pero la segunda condición, $\operatorname{Arg}(w-1) = -\pi/2$, no puede tratarse como en el ejemplo anterior porque $\tan(-\pi/2)$ no existe. En cambio, debemos interpretarla geométricamente: que el argumento de un número complejo sea $-\pi/2$ significa que el número está en el eje imaginario negativo.



Entonces $w - 1 = a - 1 + b\mathrm{i}$ está en el eje imaginario negativo, lo cual tiene dos implicaciones: que su parte real es cero y que su parte imaginaria es negativa:

$$a - 1 = 0 \quad \text{y} \quad b < 0$$

De lo anterior despejamos $a = 1$, y lo sustituimos en la primera ecuación.

$$(1+3)^2 + b^2 = 25 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 = 25 - 4^2 = 9$$

De las dos soluciones, $b = 3$ y $b = -3$, solo nos sirve $b = -3$ porque habíamos quedado en que $b < 0$.

Finalmente[2], la solución es $w = a + b\mathrm{i} = 1 - 3\mathrm{i}$.

"El número que usted marcó es imaginario. Por favor gire su teléfono noventa grados e intente de nuevo." (Anónimo)

Ejercicios

1. Determine todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a + b\mathrm{i} = |a + b\mathrm{i}|$.

[2] El paso en que pueden introducirse soluciones falsas, como en el ejemplo anterior, es al tomar tangente en ambos lados (porque la función tan no es inyectiva). En este ejemplo no trabajamos con tangentes, así que no hay riesgo de soluciones falsas: si no hay errores en el procedimiento, la solución es correcta. De todos modos comprobemos: $|(1-3\mathrm{i})+3| = |4-3\mathrm{i}| = \sqrt{16+9} = 5$, y $\operatorname{Arg}(w-1) = \operatorname{Arg}(-3\mathrm{i}) = -\pi/2$, ambos como tenían que ser.

Demuestre la identidad para z y w números complejos.

2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

3. $|zw| = |z|\,|w|$

4. $|z/w| = |z|/|w|$

5. $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w)$

6. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

Encuentre el número complejo que cumple las condiciones dadas.

7. $\begin{cases} |z| = 3\sqrt{10} \\ \mathrm{Arg}(z) = -2\pi/3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} |w| = 13 \\ \mathrm{Arg}(w) = \pi/2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} |z| = 0.5 \\ \mathrm{Arg}(z) = 3\pi/4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} |y| = 1 \\ \mathrm{Arg}(y) = \pi \end{cases}$

11. $\begin{cases} |v| = 12 \\ \mathrm{Arg}(v) = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} |u| = \sqrt{3} \\ \mathrm{Arg}(u) = 3\pi/2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} |\sqrt{2} - 5\mathrm{i} + x| = 1 \\ \mathrm{Arg}(\sqrt{2} - 5\mathrm{i} + x) = \pi/4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} |t-2| = 3 \\ \mathrm{Arg}(t+1) = 3\pi/4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} |y - \mathrm{i}| = 1 \\ \mathrm{Arg}(y) = \pi/2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} |z-3| = 5 \\ \mathrm{Arg}(z-2) = 3\pi/4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} |\mathrm{i} + \bar{z}| = 5 \\ \mathrm{Arg}(z+2) = -3\pi/4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} |w + 2\mathrm{i}| = |w| \\ \mathrm{Arg}(\bar{w} + 2) = 2\pi/3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} |v+1| = \sqrt{3} \\ \mathrm{Arg}(v + \bar{v} + 2\mathrm{i}) = 3\pi/4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} |2-u| = \sqrt{5} \\ u \cdot \bar{u} = 7 \end{cases}$

21. $\begin{cases} |1-x| = \sqrt{5} \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{\bar{x}}{10} \end{cases}$

22. $\begin{cases} |w| = \left|\dfrac{1}{w}\right| \\ |w| = |1-w| \end{cases}$

23. $\begin{cases} |v+1| = \sqrt{3}|v-1| \\ |v| = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \mathrm{Arg}(t+k) = \pi/2 \\ \mathrm{Arg}(t-k) = 2\pi/3 \end{cases}$
con $k > 0$, constante

2.2 Productos, cocientes y potencias en forma polar

Así como es muy sencillo sumar y restar números complejos en forma rectangular, resulta que las multiplicaciones y divisiones son mucho más fáciles de efectuar en forma polar. Todo empieza con las siguientes identidades, que se cumplen para cualesquiera ángulos α y β:

$$\mathrm{cis}(\alpha) \cdot \mathrm{cis}(\beta) = \mathrm{cis}(\alpha + \beta)$$

y

$$\frac{\mathrm{cis}(\alpha)}{\mathrm{cis}(\beta)} = \mathrm{cis}(\alpha - \beta)$$

La primera de ellas puede demostrarse así:

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}(\alpha)\cdot\operatorname{cis}(\beta) &= (\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{i}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{i}^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{i}(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta)\\ &= \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\\ &= \operatorname{cis}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Para la segunda, la demostración es semejante[3].

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{cis}(\alpha)}{\operatorname{cis}(\beta)} &= \frac{\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\beta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}\cdot\frac{\cos\beta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta}\\ &= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{i}(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta)}{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\,\beta}\\ &= \frac{\cos(\alpha-\beta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)}{1} = \operatorname{cis}(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de lo anterior.

Teorema

Si $z = r\operatorname{cis}\alpha$ y $w = s\operatorname{cis}\beta$, entonces

$$z\cdot w = rs\operatorname{cis}(\alpha+\beta)$$

y

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\operatorname{cis}(\alpha-\beta)$$

En palabras, para multiplicar dos números complejos se multiplican los valores absolutos o módulos, y se suman los argumentos; para dividir dos números complejos, se dividen los valores absolutos y se restan los argumentos.

Ejemplo 5: operaciones en forma polar

Sean $x = 12\operatorname{cis}148°$ y $y = 8\operatorname{cis}(-63°)$. Entonces

$$xy = 12\cdot 8\operatorname{cis}(148° + -63°) = 96\operatorname{cis}85°$$

y

$$\frac{x}{y} = \frac{12}{8}\operatorname{cis}(148° - -63°) = 1.5\operatorname{cis}211°$$

Repaso

Calcule $(7\operatorname{cis}85°)/(2\operatorname{cis}(-12°))$. Solución: $3.5\operatorname{cis}97°$

[3] Otra demostración alterna va así: $\operatorname{cis}(\beta)\cdot\operatorname{cis}(\alpha-\beta) = \operatorname{cis}(\beta+\alpha-\beta) = \operatorname{cis}(\alpha)$ por lo que acabamos de demostrar, y entonces despejando $\operatorname{cis}(\alpha-\beta)$ se obtiene $\operatorname{cis}(\alpha)/\operatorname{cis}(\beta)$.

Como vemos, los productos y cocientes se calculan más fácilmente en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Lo mismo es cierto para las potencias de números complejos: el trabajo se simplifica cuando se hace en coordenadas polares, a tal punto que vale la pena de convertir primero las coordenadas rectangulares en polares antes de calcular potencias, como estamos a punto de ver.

Para elevar un número complejo a una potencia entera usamos una variación de la fórmula para productos. Supongamos que $z = r \operatorname{cis} \theta$. Entonces

$$z^2 = z \cdot z = (r \operatorname{cis} \theta)(r \operatorname{cis} \theta) = r^2 \operatorname{cis}(2\theta)$$

Similarmente,

$$z^3 = z^2 \cdot z = (r^2 \operatorname{cis}(2\theta))(r \operatorname{cis} \theta) = r^3 \operatorname{cis}(3\theta)$$

El patrón es fácil de ver. En general tenemos la siguiente fórmula (vea el Ejercicio 36).

Teorema de DeMoivre

Si $z = r \operatorname{cis} \theta$, entonces $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

La fórmula de DeMoivre es válida para cualquier n entero, positivo o negativo (excepto, claro, que 0^n no existe si $n \leq 0$).

Ejemplo 6: potencia entera de un número complejo

Calcular $(2 + 3\mathrm{i})^5$.

Empezamos por convertir $2 + 3\mathrm{i}$ a forma polar: $2 + 3\mathrm{i} \approx \sqrt{13} \operatorname{cis} 56.3099°$.

Entonces

$$(\sqrt{13} \operatorname{cis} 56.3099°)^5 = \sqrt{13}^{\,5} \operatorname{cis}(5 \cdot 56.3099°) \approx 609.338 \operatorname{cis} 281.5597°$$

Ya tenemos el resultado en forma polar. Opcionalmente podemos convertirlo a forma rectangular:

$$609.338 \operatorname{cis} 281.5597° \approx 122 - 597\mathrm{i}$$

No es de extrañar que el resultado tenga enteras sus partes real e imaginaria (a pesar de todos los decimales en el procedimiento): así deberá ser siempre que se eleve un complejo con partes enteras a una potencia entera y positiva.

Ejemplo 7: potencia entera negativa de un número complejo

Calcular $(1 - \mathrm{i})^{-4}$.

En forma polar, $1 - \mathrm{i}$ tiene $r = \sqrt{2}$ y $\theta = -\pi/4$. Entonces

$$(1 - \mathrm{i})^{-4} = \left[\sqrt{2} \operatorname{cis}(-\pi/4)\right]^{-4} = (\sqrt{2})^{-4} \operatorname{cis}(-4 \cdot -\pi/4) = \frac{1}{4} \operatorname{cis}(\pi)$$

En forma rectangular, este resultado es igual a $-1/4$.

Repaso

Calcule $(4-3\mathrm{i})^{-2}$. Solución: $0.0112 + 0.0384\mathrm{i}$

Otra consecuencia de las identidades vistas al inicio de esta sección, $\operatorname{cis}(\alpha)\cdot\operatorname{cis}(\beta) = \operatorname{cis}(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{cis}(\alpha)/\operatorname{cis}(\beta) = \operatorname{cis}(\alpha-\beta)$, es que la función cis parece comportarse como una función exponencial. En efecto, si una función f está definida como $f(x) = b^x$ para $b > 0$ constante, entonces $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$ y $f(x)/f(y) = f(x-y)$, justo como la función cis. En la página 40 retomaremos esta idea al hablar sobre funciones exponenciales complejas.

Ejercicios

Evalúe en forma rectangular.

25. $(\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6})^{10}$

26. $(3\operatorname{cis}25°)^3/(4\operatorname{cis}215°)^2$

27. $(1/2+\mathrm{i}/2)^{200}$

28. $(-1+\mathrm{i})^7$

29. $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^4$

30. $(1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2)^{-55}$

31. $(5+2\mathrm{i})^{-3}(4-3\mathrm{i})^4$

32. $3\mathrm{i}(5-2\mathrm{i})^6$

33. $\mathrm{i}^3(1-\mathrm{i})^{-4}$

34. $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{30}}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5}$

35. $\big[\operatorname{sen}(2\pi/3)+\mathrm{i}\cos(2\pi/3)\big]^{-3}$

36. Demuestre el teorema de DeMoivre.

2.3 Raíces de números complejos

También las raíces de números complejos se calculan en coordenadas polares mejor que en rectangulares. Dado un número complejo $z = r\operatorname{cis}\theta$, es natural tratar de generalizar la fórmula de DeMoivre para potencias no enteras, y calcular la raíz n-ésima de z como

$$z^{1/n} = r^{1/n}\operatorname{cis}\frac{\theta}{n}$$

La idea no es tan mala, pero tiene una gran limitación: solamente calcula *una* raíz, y como veremos, los números complejos tienen muchas raíces.

Ejemplo 8: raíces cuartas de 1

Las potencias 1^4, $(-1)^4$, i^4 y $(-\mathrm{i})^4$ son todas iguales a 1, de modo que el número 1 tiene al menos cuatro raíces cuartas.

Ejemplo 9: raíces quintas de 1

En forma polar, $\operatorname{cis} 0°$, $\operatorname{cis} 72°$, $\operatorname{cis} 144°$, $\operatorname{cis} 216°$ y $\operatorname{cis} 288°$, cualquiera de ellos, elevado a la 5, da 1:

- $(\operatorname{cis} 0°)^5 = \operatorname{cis}(5 \cdot 0°) = \operatorname{cis} 0° = 1$
- $(\operatorname{cis} 72°)^5 = \operatorname{cis}(5 \cdot 72°) = \operatorname{cis} 360° = 1$
- $(\operatorname{cis} 144°)^5 = \operatorname{cis}(5 \cdot 144°) = \operatorname{cis} 720° = 1$
- $(\operatorname{cis} 216°)^5 = \operatorname{cis}(5 \cdot 216°) = \operatorname{cis} 1080° = 1$
- $(\operatorname{cis} 288°)^5 = \operatorname{cis}(5 \cdot 288°) = \operatorname{cis} 1440° = 1$

Entonces el número 1 tiene al menos cinco raíces quintas complejas.

Repaso

Compruebe que $\operatorname{cis} 0$, $\operatorname{cis}(2\pi/3)$ y $\operatorname{cis}(4\pi/3)$ son raíces cúbicas de 1.

En general, resulta que cualquier número complejo tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, ..., veinte raíces veinteavas, etc. (*casi* cualquier número complejo: la única excepción es 0, cuyas raíces son todas iguales a 0). Esto se debe al teorema fundamental del Álgebra, porque las raíces n-ésimas de un número complejo a son las soluciones de la ecuación $x^n = a$. Como esta ecuación tiene grado n, de la Sección 3 sabemos que hay n soluciones (en el caso de las raíces de $a = 0$, la ecuación es $x^n = 0$, cuya única solución es 0 con multiplicidad n).

Si por “raíz cuadrada de a” entendemos cualquier número cuyo cuadrado sea a, entonces todos los reales positivos tienen dos raíces cuadradas. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas de 25 son 5 y -5 (porque tanto 5^2 como $(-5)^2$ son 25). Es fácil convenir en que *la* raíz cuadrada de un número positivo sea, de las dos, la positiva. Por eso se dice que *la* raíz cuadrada de 25 es 5, y no -5. En los complejos, en cambio, no es fácil escoger una de todas. Tal vez sería fácil decir que entre las cuatro raíces cuartas de 1, que son 1, -1, i y $-\mathrm{i}$, nos quedamos con 1 porque es real y positiva. ¿Pero cómo escogemos la “mejor” raíz cuando ninguna de ellas es positiva o ni siquiera real? No nos complicamos: sencillamente, todas las raíces son raíces, y ninguna tiene un significado especial.

Teorema

Dado $n \in \mathbb{N}$, cualquier número complejo distinto de 0 tiene n raíces n-ésimas.

Ejemplo 10: raíces cúbicas de un número real

El número 8 tiene tres raíces cúbicas ($n = 3$):

$$2^3 = 8$$

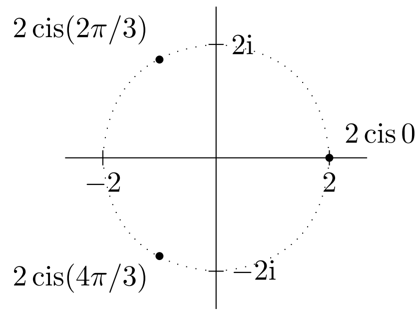
$$\left(2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis}\left(3 \frac{2\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis} 2\pi = 8$$

$$\left(2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis}\left(3 \frac{4\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis} 4\pi = 8$$

Entonces las tres raíces cúbicas de 8 son: 2, $2\operatorname{cis}(2\pi/3)$ y $2\operatorname{cis}(4\pi/3)$. De hecho, como $2 = 2\operatorname{cis}0$, las tres pueden escribirse en forma polar como

$$2\operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2.$$

La representación gráfica de las tres raíces cúbicas de 8 es la siguiente:



Repaso

Encuentre las raíces cúbicas de 125. Solución: $5\operatorname{cis}0$, $5\operatorname{cis}(2\pi/3)$, $5\operatorname{cis}(4\pi/3)$

En el Ejemplo 9, los argumentos de las cinco raíces de 1 son múltiplos de 72°: $k \cdot 72°$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. En el Ejemplo 10 vimos que los argumentos son múltiplos de $2\pi/3$: $k(2\pi/3)$ para $k = 0, 1, 2$.

El ángulo 72° del Ejemplo 9 es análogo al $2\pi/3$ del Ejemplo 10 en el siguiente sentido: en el Ejemplo 9 hablábamos de raíces n-ésimas con $n = 5$, y $72° = 360°/n$; luego en el Ejemplo 10 teníamos $n = 3$, y $2\pi/3 = 2\pi/n$.

También en el Ejemplo 8 teníamos esa situación, aunque no expresamos las raíces en forma polar. Hagámoslo ahora: las cuatro raíces cuartas ($n = 4$) de 1 son

$$1 = \operatorname{cis}0°, \quad \mathrm{i} = \operatorname{cis}(90°), \quad -1 = \operatorname{cis}(180°) \quad \text{y} \quad -\mathrm{i} = \operatorname{cis}(270°).$$

Los argumentos son $k \cdot 90° = k(360°/4)$ para $k = 0, 1, 2, 3$; es decir, de nuevo múltiplos de $360°/n$.

El siguiente ejemplo aclara lo que son las raíces de un número complejo y cómo ellas se relacionan entre sí, pero no ilustra la mejor forma de encontrarlas. Para eso vea el Ejemplo 12.

Ejemplo 11: raíces sextas de un número real

Calcular las seis raíces sextas de $z = 64\mathrm{i}$.

Primero convertimos z a forma polar: $z = 64\operatorname{cis}90°$. Ahora, si $\omega = r\operatorname{cis}\theta$ es una raíz sexta de z entonces debe cumplirse $\omega^6 = z$; es decir,

$$r^6 \operatorname{cis}6\theta = 64\operatorname{cis}90°$$

De lo anterior deducimos que $r^6 = 64$, por lo que $r = \sqrt[6]{64} = 2$. Pero no podemos estar seguros de que $6\theta = 90°$: tal vez $6\theta = 90° + 360°$, ó $6\theta = 90° + 720°$, etc. Por lo menos esas tres posibilidades dan tres valores posibles para θ:

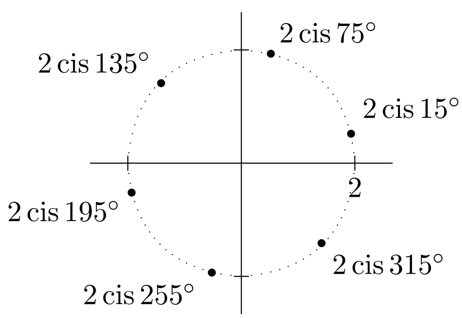
$$\theta_1 = \frac{90°}{6} = 15°, \quad \theta_2 = \frac{450°}{6} = 75° \quad \text{y} \quad \theta_3 = \frac{810°}{6} = 135°$$

Notemos que estos ángulos (15°, 75°, 135°) van aumentando en 60° cada vez, lo cual esperaríamos de la observación anterior acerca de $360°/n$, ya que ahora $n = 6$.

Probemos entonces, después de 15°, 75° y 135°, ahora con $\theta_4 = 195°$, $\theta_5 = 255°$ y $\theta_6 = 315°$:

$$\begin{aligned}
(2\,\mathrm{cis}\,15°)^6 &= 64\,\mathrm{cis}\,90° = 64\mathrm{i} \\
(2\,\mathrm{cis}\,75°)^6 &= 64\,\mathrm{cis}\,450° = 64\mathrm{i} \\
(2\,\mathrm{cis}\,135°)^6 &= 64\,\mathrm{cis}\,810° = 64\mathrm{i} \\
(2\,\mathrm{cis}\,195°)^6 &= 64\,\mathrm{cis}\,1170° = 64\mathrm{i} \\
(2\,\mathrm{cis}\,255°)^6 &= 64\,\mathrm{cis}\,1530° = 64\mathrm{i} \\
(2\,\mathrm{cis}\,315°)^6 &= 64\,\mathrm{cis}\,1890° = 64\mathrm{i}
\end{aligned}$$

En efecto, ésas son las seis raíces sextas de 64i:



Repaso

Encuentre las raíces sextas de $-\mathrm{i}$.

Solución: cis 45°, cis 105°, cis 165°, cis 225°, cis 285°, cis 345°

En el ejemplo anterior, los argumentos 15°, 75°, 135°, 195°, 255° y 315° empiezan con $15° = 90°/n$ (recuerde que 90° es el argumento de z) y aumentan en $60° = 360°/n$ cada vez, de modo que podemos expresarlos todos como

$$\theta_k = \frac{90°}{n} + k\frac{360°}{n}$$

En los tres ejemplos anteriores teníamos solamente múltiplos de $360°/n$, y ese será el caso cuando z sea real. Pero en el Ejemplo 11 vemos que en general es necesario añadir esos múltiplos a la constante $\mathrm{Arg}(z)/n$.

Recordemos la pseudo-fórmula $z^{1/n} = r^{1/n}\,\mathrm{cis}(\theta/n)$ del principio de esta sección. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, el lado derecho da una de las raíces n-ésimas de z. Las otras se consiguen, como vimos, manteniendo el módulo y añadiéndole múltiplos de $360°/n$ (o de $2\pi/n$) al ángulo θ/n, hasta completar la vuelta alrededor de la circunferencia. Esto implica que las n raíces están igualmente espaciadas sobre una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ alrededor del origen.

Teorema

Las n raíces n-ésimas de $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ son

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{para } k = 0, \dots, n-1.$$

(Por supuesto, puede usarse $360°$ en vez de 2π.)

El siguiente es un método sencillo para encontrar las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}$.

1. Si es necesario, convertir z a forma polar: $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$.
2. Calcular la primera raíz como $\omega_o = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\theta}{n}$.
3. Manteniendo el módulo $\sqrt[n]{r}$, añadir sucesivamente $\dfrac{2\pi}{n}$ ó $\dfrac{360°}{n}$ al argumento para encontrar $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$.

Ejemplo 12: raíces quintas de un número complejo

Encontrar las raíces quintas de $10 - 10\mathrm{i}$.

Sigamos el método recién dado, notando que $n = 5$ y entonces $\dfrac{360°}{n} = 72°$.

1. Convertimos a forma polar:
   $10 - 10\mathrm{i} = \sqrt{200}\,\mathrm{cis}(-45°)$
2. Encontramos la primera raíz:
   $\omega_o = \sqrt[5]{\sqrt{200}}\,\mathrm{cis}(-45°/5) = \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}(-9°) \approx 1.67773 - 0.265727\mathrm{i}$
3. Encontramos las demás raíces:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}(-9° + 72°) = \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}\,63° \approx 0.771169 + 1.51351\mathrm{i}\\
\omega_2 &= \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}(63° + 72°) = \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}\,135° \approx -1.20112 + 1.20112\mathrm{i}\\
\omega_3 &= \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}(135° + 72°) = \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}\,207° \approx -1.51351 - 0.771169\mathrm{i}\\
\omega_4 &= \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}(207° + 72°) = \sqrt[10]{200}\,\mathrm{cis}\,279° \approx 0.265727 - 1.67773\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Repaso

Encuentre las raíces quintas de -32.

Solución: $2\,\mathrm{cis}\,36°,\ 2\,\mathrm{cis}\,108°,\ 2\,\mathrm{cis}\,180°,\ 2\,\mathrm{cis}\,252°,\ 2\,\mathrm{cis}\,324°$

Ejercicios

Calcule en forma rectangular las raíces…

37. … cuadradas de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

38. … cuadradas de -1

39. … cuadradas de $2\mathrm{i}$

40. … cuadradas de $-1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$

41. … cúbicas de $-\mathrm{i}$

42. … cúbicas de -1

43. … cúbicas de $-8 + 8\mathrm{i}$

44. … cúbicas de $2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

45. … cuartas de i

46. … cuartas de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$

47. … cuartas de $-8 + 8\mathrm{i}\sqrt{3}$

48. … cuartas de -1

Encuentre todas las soluciones complejas.

49. $z^3 + 1 = \mathrm{i}\sqrt{3}$

50. $x^4 - 16 = 0$

51. $y^5 - 32 = 0$

52. $t^6 + 64 = 16t^3$

En resumen...

- Las coordenadas rectangulares de un número $z \in \mathbb{C}$ son sus partes real e imaginaria.

- Las coordenadas polares de un número $z \in \mathbb{C}$ son el valor absoluto $r = |z|$ y el argumento $\theta = \arg(z)$.

- La función cis se define como $\operatorname{cis}(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$.

- La forma polar de un número complejo es $r \operatorname{cis}\theta$, donde r es el valor absoluto y θ el argumento.

- Las coordenadas rectangulares a, b, y las coordenadas polares r, θ, cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

- El argumento principal de z es $\operatorname{Arg}(z)$, el único argumento en $]-\pi, \pi] =]-180°, 180°]$.

- $(r \operatorname{cis}\alpha)(s \operatorname{cis}\beta) = rs \operatorname{cis}(\alpha+\beta)$

- $(r \operatorname{cis}\alpha)^n = r^n \operatorname{cis}(n\alpha)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

- Las raíces n-ésimas de $r \operatorname{cis}\alpha$ son $\sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Capítulo 3
Funciones de números complejos

Si f es una función definida en un dominio complejo $D \subset \mathbb{C}$, y los valores de $f(z)$ son complejos para $z \in D$, entonces f es una función compleja de variable compleja, y se escribe $f\colon D \to \mathbb{C}$. En este capítulo hablaremos sobre tales funciones, empezando por el concepto de derivadas de funciones complejas en general, y luego concentrándonos en algunas funciones particulares, como exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

3.1 Derivadas de funciones complejas

La derivada de una función compleja se define con la misma fórmula usada en funciones reales.

Definición (derivada de una función compleja)

Si f es una función compleja de variable compleja, su *derivada* en el punto $z \in D$ se define como

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

La función f se dice *derivable* en z si $f'(z)$ existe.

Para variables reales, la expresión $h \to 0$ significa que h se acerca al número cero, sea por la izquierda o por la derecha. En el plano complejo, $h \to 0$ significa también que h se acerca a cero, pero ahora hay infinitas direcciones desde las que h puede tender a cero.

De la misma manera, $w \to z$ se refiere a que la variable compleja w tiende al punto z, desde cualquier dirección.

Para que f sea derivable en z, el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ debe existir sin importar en qué dirección se aproxime h a 0. En particular, si $h \to 0$ horizontalmente (a lo largo del eje real, como en la primera figura arriba) entonces $h = x + \mathrm{i}y$ con $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ y $x \to 0$, y podemos escribir

$$f'(z) = \lim_{x\to 0} \frac{f(z+x) - f(z)}{x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Similarmente, si $h \to 0$ verticalmente, sobre el eje imaginario (como en la segunda figura arriba), entonces $h = x + \mathrm{i}y$ con $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$ y $y \to 0$, así que

$$f'(z) = \lim_{y\to 0} \frac{f(z+\mathrm{i}y) - f(z)}{\mathrm{i}y} = -\mathrm{i}\lim_{y\to 0} \frac{f(z+\mathrm{i}y) - f(z)}{y} \quad \text{con } y \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Ahora consideremos $z = x + \mathrm{i}y$, y denotemos con f_{Re} y f_{Im} las partes real e imaginaria de f pero como funciones de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, así:

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = f_{\mathrm{Re}}(x, y) + \mathrm{i}f_{\mathrm{Im}}(x, y)$$

donde $f_{\mathrm{Re}}(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + \mathrm{i}y))$ y $f_{\mathrm{Im}}(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + \mathrm{i}y))$.

Según las ecuaciones 3.1 y 3.2, $f'(z)$ puede escribirse de dos maneras en términos de las derivadas parciales[1] de f_{Re} y f_{Im}. Según 3.1,

$$f'(z) = D_x f(z) = D_x(f_{\mathrm{Re}}(x, y) + \mathrm{i}f_{\mathrm{Im}}(x, y)) = D_x f_{\mathrm{Re}}(x, y) + \mathrm{i}D_x f_{\mathrm{Im}}(x, y)$$

y según 3.2,

$$f'(z) = -\mathrm{i}D_y f(z) = -\mathrm{i}D_y(f_{\mathrm{Re}}(x, y) + \mathrm{i}f_{\mathrm{Im}}(x, y)) = D_y f_{\mathrm{Im}}(x, y) - \mathrm{i}D_y f_{\mathrm{Re}}(x, y)$$

Combinando obtenemos, para cualquier $x + \mathrm{i}y$ donde f sea derivable,

$$D_x f_{\mathrm{Re}}(x, y) + \mathrm{i}D_x f_{\mathrm{Im}}(x, y) = D_y f_{\mathrm{Im}}(x, y) - \mathrm{i}D_y f_{\mathrm{Re}}(x, y)$$

Por último, igualando las partes reales e imaginarias llegamos a que si f es derivable entonces debe satisfacer las siguientes ecuaciones, llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*:

$$D_x f_{\mathrm{Re}} = D_y f_{\mathrm{Im}} \quad \text{y} \quad D_x f_{\mathrm{Im}} = -D_y f_{\mathrm{Re}}$$

Un gran teorema acerca de funciones complejas establece que solamente las funciones derivables cumplen esas ecuaciones. Lo presentamos aquí sin demostración.

Teorema

Una función $f(z)$ compleja de variable compleja es derivable si y solo si cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$D_x f_{\mathrm{Re}} = D_y f_{\mathrm{Im}} \qquad \text{y} \qquad D_x f_{\mathrm{Im}} = -D_y f_{\mathrm{Re}}$$

En tal caso, $f' = D_x f_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}D_x f_{\mathrm{Im}} = D_y f_{\mathrm{Im}} - \mathrm{i}D_y f_{\mathrm{Re}}$.

[1] Si $g(x, y)$ es una función de dos variables, su derivada parcial con respecto a x, denotada $D_x g$, es el resultado de derivar $g(x, y)$ considerando a x como la única variable, y a y como constante. La derivada con respecto a y, $D_y g$, resulta de derivar tomando y como variable y x como constante. Por ejemplo, si $g(x, y) = x^2 + y^3$ entonces $D_x g(x, y) = 2x$ y $D_y g(x, y) = 3y^2$.

Ejemplo 1: derivada de z^2

Sea $f(z) = z^2$. Con $z = x + \mathrm{i}y$ se tiene

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 + 2\mathrm{i}xy + \mathrm{i}^2y^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$$

de modo que $f_{\mathrm{Re}}(x, y) = x^2 - y^2$ y $f_{\mathrm{Im}}(x, y) = 2xy$.

Las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} D_x f_{\mathrm{Re}}(x, y) &= 2x, & D_x f_{\mathrm{Im}}(x, y) &= 2y, \\ D_y f_{\mathrm{Re}}(x, y) &= -2y \quad \text{y} & D_x f_{\mathrm{Im}}(x, y) &= 2x. \end{aligned}$$

que claramente cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces $f(z)$ es derivable, y su derivada es

$$f'(z) = D_x f_{\mathrm{Re}}(x, y) + \mathrm{i}D_x f_{\mathrm{Im}}(x, y) = 2x + \mathrm{i}(2y) = 2(x + \mathrm{i}y) = 2z$$

como cabía esperar.

Repaso

Derive $g(z) = 3 - 5z$. Solución: $g'(z) = -5$

El ejemplo anterior tiene por propósito ilustrar el uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann; en realidad la derivada de z^2 se calcula más fácilmente usando la definición de derivada. En la página 43 veremos otra aplicación de estas ecuaciones al calcular la derivada de e^z.

Las derivadas complejas cumplen con las mismas reglas de derivación que ya conocemos para las derivadas reales.

Teorema (reglas de derivación)

Si f y g son derivables en z, entonces

- $(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ siempre que $g(z) \neq 0$

Si g es derivable en z y f es derivable en $g(z)$ entonces

- $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Ejercicios

Derive usando la definición.

1. $(3+\mathrm{i})z-4+2\mathrm{i}$

2. i/z

3. z^2

4. $2\mathrm{i}z^2-4(z+\mathrm{i})$

Derive usando el teorema en la página 38.

5. $5-(2z-\mathrm{i})\mathrm{i}$

6. $4z^2-\mathrm{i}z+1$

7. $(2z+3\mathrm{i})^2$

8. $1/z$

9. Use la definición de derivada para demostrar que, si f y g son derivables, entonces $(af+bg)'=af'+bg'$.

3.2 La función exponencial natural compleja

Después de haber definido potencias enteras y raíces de números complejos en el capítulo anterior, el siguiente gran paso será definir potencias complejas de números complejos; es decir, expresiones de la forma w^z para $w,z\in\mathbb{C}$.

Recordando la identidad

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}\quad \text{para } a,x\in\mathbb{R},\ a>0,$$

vemos que si queremos extenderla a los complejos debemos empezar por definir dos cosas:

- Qué es el número e elevado a una potencia compleja, y
- Qué es el logaritmo de un número complejo.

En resumen, primero debemos definir las funciones exponencial y logarítmica naturales en $\mathbb{C}$. En esta sección nos encargaremos de la función exponencial, y en la siguiente de la logarítmica. Luego hablaremos de funciones trigonométricas complejas.

Habíamos mencionado en la página 29 que la función cis, siendo una función trigonométrica, tenía algunas propiedades en común con las funciones exponenciales, específicamente que $\operatorname{cis}(x)\operatorname{cis}(y)=\operatorname{cis}(x+y)$ y que $\operatorname{cis}(x)/\operatorname{cis}(y)=\operatorname{cis}(x-y)$. Profundicemos en este asunto.

Si definimos $z=\operatorname{cis}x$, entonces la derivada de z con respecto a x es

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\operatorname{cis}'x=(\cos x+\mathrm{i}\operatorname{sen}x)'=-\operatorname{sen}x+\mathrm{i}\cos x\\&=\mathrm{i}(\cos x+\mathrm{i}\operatorname{sen}x)=\mathrm{i}\operatorname{cis}x=\mathrm{i}z\end{aligned}$$

El diferencial de z es entonces $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}x$, por lo que[2]

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{i}\,\mathrm{d}x$$

[2]Si usted sabe sobre ecuaciones diferenciales, reconocerá que lo que hacemos en este párrafo y el siguiente es simplemente resolver la ecuación diferencial $z'=\mathrm{i}z$ con condición inicial $z(0)=1$.

Si suponemos que la integral de $\mathrm{d}z/z$ es, como en los reales, $\ln z + C$, entonces al integrar ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$\ln z + C = \mathrm{i}x \quad \Rightarrow \quad \ln z = \mathrm{i}x - C \quad \Rightarrow \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x - C}$$

donde C es alguna constante. Para averiguar el valor de C ponemos $x = 0$, para el cual $z = \operatorname{cis} 0 = 1$. La ecuación se convierte entonces en $1 = \mathrm{e}^{0-C}$, cuya solución es $C = 0$. Con eso llegamos finalmente a que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, o bien

$$\operatorname{cis} x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

El párrafo anterior era válido suponiendo que $\int \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \ln z$. ¡Pero ni siquiera hemos definido el logaritmo complejo, así que no podemos hablar aún sobre su derivada! Pronto definiremos el logaritmo natural complejo, pero por ahora la igualdad anterior sugiere cómo definir $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, que hasta ahora tampoco está definido: parece que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ debería ser igual a $\operatorname{cis} x$. También parece, como sospechamos, que la función cis es en efecto una función exponencial: $\operatorname{cis} x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\right)^x$ (si la exponencial compleja cumple con las propiedades usuales de potencias), y cis sería entonces la función exponencial con base e^{i}.

De todos modos, el argumento anterior tiene un gran vacío porque aún no sabemos si $\int \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \ln z$, así que aquí hay otro argumento para motivar la definición de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ que viene. Como antes, esta no es una demostración sino una motivación.

Se sabe de la teoría de series de Taylor que, para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si escribimos $\mathrm{i}x$ en el lugar de x en la primera serie obtenemos

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}$$

y suponiendo que la serie converge absolutamente podemos separar sus términos pares (cuando $n = 2k$ para algún entero k) de sus impares (cuando $n = 2k+1$), así:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}^2)^k\, x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}^2)^k\, \mathrm{i}^1\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos x + \mathrm{i} \operatorname{sen} x = \operatorname{cis} x
\end{aligned}$$

La siguiente definición no podría entonces ser otra cosa.

Definición (exponente imaginario)

Para $x \in \mathbb{R}$ se define $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \operatorname{cis} x$ (con x en radianes[3]).

Esta definición tiene al menos dos consecuencias inmediatas.

- Si $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, entonces $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{b\mathrm{i}} = \mathrm{e}^a \operatorname{cis} b$ (en forma polar).
- Cualquier $z = r \operatorname{cis}\theta$ también puede escribirse $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Esta es la *forma exponencial* de z.

Ejemplo 2: un exponente complejo

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \operatorname{cis}\pi = \cos\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi = -1 + 0\mathrm{i} = -1$.

Este resultado implica la igualdad

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0,$$

la cual tiene una elegancia curiosa: esta igualdad relaciona las cinco constantes más importantes en la Matemática (0, 1, e, π, i) a través de las tres operaciones más importantes (suma, producto y exponenciación), sin repetir ninguna. Lo más impresionante de esta ecuación es que no solo rima, ¡sino que también es cierta!

Repaso

Calcule $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$ Solución: $-\mathrm{i}$

Ejemplo 3: un exponente complejo

Así se calcula $\mathrm{e}^{2-\mathrm{i}}$:

$$\mathrm{e}^{2-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^2 \operatorname{cis}(-1) \approx \mathrm{e}^2(0.540302 - 0.841471\mathrm{i}) \approx 3.99232 - 6.21768\mathrm{i}$$

Repaso

Calcule $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}$. Solución: $1.46869 + 2.28736\mathrm{i}$

Ejemplo 4: un exponente complejo

Compare el resultado del ejemplo anterior con $\mathrm{e}^{2+(2\pi-1)\mathrm{i}}$:

$$\mathrm{e}^{2+(2\pi-1)\mathrm{i}} = \mathrm{e}^2 \operatorname{cis}(2\pi - 1) \approx \mathrm{e}^2(0.540302 - 0.841471\mathrm{i}) \approx 3.99232 - 6.21768\mathrm{i}$$

Note que en los Ejemplos 3 y 4 los resultados son iguales, porque $\operatorname{cis}(-1) = \operatorname{cis}(2\pi - 1)$. En general, $\operatorname{cis} b = \operatorname{cis}(b + 2k\pi)$ para cualquier $b \in \mathbb{R}$ y cualquier $k \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$\mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{a+(b+2k\pi)\mathrm{i}} \quad \text{para cualesquiera } a, b \in \mathbb{R} \text{ y cualquier } k \in \mathbb{Z},$$

o equivalentemente

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} \quad \text{para cualquier } z \in \mathbb{C} \text{ y cualquier } k \in \mathbb{Z}.$$

[3] La necesidad de que x esté en radianes viene de que los cálculos para llegar a esta definición involucraron derivadas de sen y cos, y para eso los ángulos deben estar en radianes.

Derivada de la exponencial natural compleja

Vamos a confirmar que, al igual que la función exponencial natural real, su versión compleja tiene derivada $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.

Si definimos $f(z) = \mathrm{e}^z$ y escribimos $z = x + \mathrm{i}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(z) = \mathrm{e}^x \operatorname{cis} y = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$$

Las derivadas parciales de $f_{\mathrm{Re}}(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$ y $f_{\mathrm{Im}}(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$ con respecto a x y a y son

$$\begin{aligned} D_x f_{\mathrm{Re}}(x, y) &= \mathrm{e}^x \cos y, & D_x f_{\mathrm{Im}}(x, y) &= \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y, \\ D_y f_{\mathrm{Re}}(x, y) &= -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \quad \text{y} & D_y f_{\mathrm{Im}}(x, y) &= \mathrm{e}^x \cos y. \end{aligned}$$

Así es que f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de lo que se deduce que f es derivable y que su derivada es

$$f'(z) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y) = \mathrm{e}^z$$

En resumen, la derivada de e^z es ella misma, como habíamos anunciado.

Teorema (derivada de la función exponencial natural compleja)

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$,

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$$

Ejercicios

Evalúe en forma rectangular.

10. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

11. $\mathrm{i} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$

12. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$

13. $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

14. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 2}$

15. $\mathrm{e}^{3-2\mathrm{i}}$

Demuestre cada identidad para z y w números complejos.

16. $\mathrm{e}^{w+z} = \mathrm{e}^w \mathrm{e}^z$

17. $\mathrm{e}^{w-z} = \mathrm{e}^w/\mathrm{e}^z$

18. $\mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z$

19. $\mathrm{e}^{wz} = (\mathrm{e}^w)^z$

Evalúe, definiendo $a^z = \mathrm{e}^{z\ln a}$ para $a \in \mathbb{R}^+$ y $z \in \mathbb{C}$.

20. $2^{1-\mathrm{i}}$

21. $5^{3+\mathrm{i}}$

22. $4^{\operatorname{cis} 1}$

23. $(1/2)^{\mathrm{i}}$

24. $(2/5)^{\mathrm{i}-2}$

25. $(a^z)'$

3.3 El logaritmo natural complejo

La identidad que vimos en la sección anterior, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}$, implica que la función exponencial natural no es inyectiva en $\mathbb{C}$, y por lo tanto no tiene una inversa. Por ejemplo, ¿cuál escogeríamos como el logaritmo natural de $3.99232 - 6.21768\mathrm{i}$? ¿Sería $2 - \mathrm{i}$ según el Ejemplo 3? ¿O más bien $2 + (2\pi - 1)\mathrm{i}$ según el Ejemplo 4?

Este problema es análogo al de definir la función inversa del seno: si tanto $\operatorname{sen}(-1)$ como $\operatorname{sen}(2\pi - 1)$ son 0.841471, ¿cómo definimos $\operatorname{arcsen} 0.841471$? Aquí la convención es escoger, entre todos los ángulos θ con $\operatorname{sen}\theta = 0.841471$, el único en el intervalo $]-\pi, \pi]$. En el ejemplo, sería $\operatorname{arcsen} 0.841471 = -1$, no $2\pi - 1$.

Podemos tomar el mismo acuerdo para los logaritmos complejos, de modo que siempre se use el argumento principal (entre $-\pi$ y π). Siendo así, el logaritmo de un número $r \operatorname{cis}\theta$ debería descomponerse como

$$\operatorname{Ln}(r \operatorname{cis}\theta) = \operatorname{Ln}(r) + \operatorname{Ln}(\operatorname{cis}\theta)$$

con $\theta \in\ ]-\pi, \pi]$ (en breve explicaremos la razón de la mayúscula en Ln). Ahora bien, como $\operatorname{cis}\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, es natural que $\operatorname{Ln}(\operatorname{cis}\theta) = \operatorname{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ sea igual a $\mathrm{i}\theta$, porque las funciones exponencial y logarítmica natural deberían ser inversas. Todo eso nos lleva a la siguiente definición.

Definición (logaritmo principal)

Si $r > 0$ y $\theta \in\ ]-\pi, \pi]$, el *logaritmo principal* de $r \operatorname{cis}\theta$ es

$$\operatorname{Ln}(r \operatorname{cis}\theta) = \ln r + \mathrm{i}\theta$$

Más en general, para cualquier $w \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\operatorname{Ln}(w) = \ln|w| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(w)$$

Todos los números complejos tienen logaritmo natural, excepto 0. La razón es que $\operatorname{Ln} w$ se define en términos de $\ln|w|$, para lo cual debe ser $|w| > 0$. Esta desigualdad se cumple para todos los números complejos excepto para 0.

La función Ln se escribe con mayúscula y se llama logaritmo *principal* para distinguirla de otros logaritmos que pueden definirse usando otro ángulo en vez de $\operatorname{Arg}(w)$. Por ejemplo, tanto $2 - \mathrm{i}$ como $2 + (2\pi - 1)\mathrm{i}$ son logaritmos de $3.99232 - 6.21768\mathrm{i}$ (según los Ejemplos 3 y 4), pero el principal es $2 - \mathrm{i}$ porque tiene $b = -1 \in\ ]-\pi, \pi]$. Eso lo confirmamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5: un logaritmo complejo

Calcular $\operatorname{Ln}(3.99232 - 6.21768\mathrm{i})$.

Denotemos $w = 3.99232 - 6.21768\mathrm{i}$. En forma polar, $w = 7.38906 \operatorname{cis}(-1)$. Entonces

$$\operatorname{Ln} w = \operatorname{Ln}(7.38906 \operatorname{cis}(-1)) = \ln(7.38906) - 1\mathrm{i} = 2 - \mathrm{i}$$

Repaso

Calcule $\mathrm{Ln}(1.46869 + 2.28736\mathrm{i})$. Solución: $1 + \mathrm{i}$

Ejemplo 6: un logaritmo complejo

Calcular[4] $\mathrm{Ln}(-1)$.

$$\mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{Ln}(1 \operatorname{cis} \pi) = \ln 1 + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi$$

(o bien, usando la segunda forma de la definición, $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-1)$ $= \ln 1 + \mathrm{i}\pi$).

Esto concuerda con el Ejemplo 2, donde vimos que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Ahora que sabemos cómo elevar el número e a una potencia compleja y cómo calcular un logaritmo complejo, podemos dar el siguiente paso: elevar cualquier base compleja, distinta de 0, a una potencia compleja. Por analogía con la fórmula $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ para números reales, tenemos:

Definición (potencias complejas)

Si w y z son dos números complejos con $w \neq 0$, se define

$$w^z = \mathrm{e}^{z \,\mathrm{Ln}\, w}$$

Ejemplo 7: una potencia compleja

Calcular $(-1)^{1/2}$.

La definición da $\mathrm{e}^{(1/2)\,\mathrm{Ln}(-1)}$. Ya habíamos calculado $\mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{i}\pi$, así que

$$(-1)^{1/2} = \mathrm{e}^{(1/2)\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}$$

¿Debería sorprendernos? ¡Por supuesto que $(-1)^{1/2} = \mathrm{i}$, si desde el principio dijimos que i era la raíz cuadrada de -1!

Ejemplo 8: una potencia compleja

Calcular $(4 + \mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$.

Según la definición, debemos calcular $\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\,\mathrm{Ln}(4+\mathrm{i})}$.

[4] El número $\mathrm{Ln}(-1)$ aparecía como un ejemplo de número complejo en el diagrama de la página 3.

(a) $4 + \mathrm{i} \approx 4.12311 \operatorname{cis} 0.244979$

(b) $\operatorname{Ln}(4 + \mathrm{i}) \approx \operatorname{Ln}(4.12311 \operatorname{cis} 0.244979) = 1.41661 + 0.244979\mathrm{i}$

(c) $(1 - \mathrm{i}) \operatorname{Ln}(4 + \mathrm{i}) \approx (1 - \mathrm{i})(1.41661 + 0.244979\mathrm{i}) \approx 1.66159 - 1.17163\mathrm{i}$

(d) $(4 + \mathrm{i})^{1-\mathrm{i}} \approx \mathrm{e}^{1.66159 - 1.17163\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{1.66159} \operatorname{cis}(-1.17163)$
$\approx 5.26766 \operatorname{cis}(-1.17163)$

En forma rectangular, $(4 + \mathrm{i})^{1-\mathrm{i}} \approx 2.04729 - 4.85354\mathrm{i}$.

Repaso

Calcule i^{i}. Solución: 0.207880

¿Son inversas las funciones exponencial y logarítmica?

Habiendo definido e^z y $\operatorname{Ln} w$ para z y w complejos, es natural preguntarse si las dos funciones son inversas. De hecho, es tentador *suponer* que lo son sin siquiera cuestionarlo. Pero es importante investigar si en efecto $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} = w$ y $\operatorname{Ln} \mathrm{e}^z = z$ para cualesquiera w y z complejos.

La respuesta, desafortunadamente, es que no. Pero eso no debe ser motivo de decepción. Ya en los reales, aunque elevar al cuadrado y tomar raíz cuadrada sean operaciones inversas, fallan las identidades $\sqrt{x^2} = x$ y $\sqrt{x}^2 = x$. Al menos falla la primera: $\sqrt{x^2}$ puede no ser igual a x (por ejemplo, $\sqrt{(-1)^2} \neq (-1)$). Similarmente, las identidades $\cos(\arccos x) = x$ y $\arccos(\cos x) = x$ no siempre se cumplen: por ejemplo, $\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(1) = 0$, no 2π. Esto se debe a que la función cuadrado y la función coseno no son inyectivas.

Con respecto a e^z y $\operatorname{Ln} w$ tenemos una situación parecida, ya que la función exponencial no es inyectiva. Repasando los Ejemplos 3, 4 y 5,

$$\operatorname{Ln}\left(\mathrm{e}^{2+(2\pi-1)\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Ln}(3.99232 - 6.21768\mathrm{i}) = 2 - \mathrm{i},$$

no $2 + (2\pi - 1)\mathrm{i}$. En otros símbolos, $\operatorname{Ln} \mathrm{e}^z \neq z$ para $z = 2 + (2\pi - 1)\mathrm{i}$.

Pero así como $\sqrt{x}^2$ y $\cos(\arccos x)$ sí son iguales a x (para x en sus dominios respectivos), la otra identidad sobre las funciones exponencial y logarítmica sí se cumple: para cualquier $w \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} = \mathrm{e}^{\ln|w| + \mathrm{i} \operatorname{Arg}(w)} = \mathrm{e}^{\ln|w|} \operatorname{cis} \operatorname{Arg}(w) = |w| \operatorname{cis} \operatorname{Arg}(w) = w$$

Con eso hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema

Para cualquier $w \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} = w$$

Derivada del logaritmo natural complejo

Ya que demostramos que $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$, ahora resultará fácil calcular la derivada de $\operatorname{Ln} w$.

Para eso usamos la regla de la cadena. Como vimos, $w = \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w}$, y derivando con respecto a w en cada lado de esa identidad obtenemos

$$\begin{aligned}(w)' &= \left(\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w}\right)' \\ 1 &= \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} \cdot (\operatorname{Ln} w)' = w(\operatorname{Ln} w)'\end{aligned}$$

de donde se despeja $(\operatorname{Ln} w)' = 1/w$.

Así demostramos entonces la siguiente fórmula.

Teorema (derivada del logaritmo natural complejo)

Para cualquier $w \in \mathbb{C} - \{\,0\,\}$,

$$(\operatorname{Ln} w)' = \frac{1}{w}$$

Ejercicios

Evalúe en forma rectangular.

26. $\operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(-\mathrm{i})$

27. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} - 3\mathrm{i})$

28. $\operatorname{Ln}(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})$

29. $\operatorname{Ln}(\mathrm{e}^{5+10\mathrm{i}})$

30. $(7 - 7\mathrm{i}\sqrt{3})^{4+\mathrm{i}}$

31. $(1 - \mathrm{i})^{2-\mathrm{i}}$

Evalúe en forma rectangular[5], para $x = \operatorname{cis}(2\pi/3)$, $y = \operatorname{cis}(\pi/2)$ y $z = \operatorname{cis}(-3\pi/4)$.

32. $\operatorname{Ln}(xy)$

33. $\operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} y$

34. $\operatorname{Ln}(y/z)$

35. $\operatorname{Ln} y - \operatorname{Ln} z$

36. $\operatorname{Ln}(x^2)$

37. $2 \operatorname{Ln} x$

38. Sea $c \in \mathbb{C}$, constante. Demuestre que $(z^c)' = c\, z^{c-1}$.

39. Sea $c \in \mathbb{C} - \{\,0\,\}$, constante. Demuestre que $(c^z)' = c^z \operatorname{Ln} c$.

40. Para $b \in \mathbb{C} - \{\,0, 1\,\}$ defina $\operatorname{Log}_b w = \operatorname{Ln} w / \operatorname{Ln} b$. Demuestre que $b^{\operatorname{Log}_b w} = w$ para cualquier $w \in \mathbb{C} - \{\,0\,\}$. (Pero $\operatorname{Log}_b(b^w)$ no siempre es igual a w; por ejemplo, $\operatorname{Log}_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) = \operatorname{Log}_{\mathrm{e}}(1) = 0$, no $2\pi\mathrm{i}$.)

[5] Note que los resultados en este ejercicio muestran que las fórmulas $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$ y $\ln x^r = r \ln x$ *no* se extienden a los logaritmos complejos.

3.4 Funciones trigonométricas inversas en $\mathbb{C}$

En la Sección 3.2 definimos $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \operatorname{cis} x$. Al combinar $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ con $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ para $x \in \mathbb{R}$, recordando que $\operatorname{cis} = \cos + \mathrm{i}\operatorname{sen}$ y que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= \cos x + \mathrm{i}\operatorname{sen} x + \cos(-x) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-x) = 2\cos x \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= \cos x + \mathrm{i}\operatorname{sen} x - \cos(-x) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(-x) = 2\mathrm{i}\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Entonces despejando $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ llegamos a lo siguiente.

Teorema (fórmulas de Euler)

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

Podemos extender las funciones cos y sen al dominio complejo escribiendo las fórmulas anteriores con un z complejo en el lugar de x. Definimos entonces cos y sen en $\mathbb{C}$ de la siguiente manera.

Definición (coseno y seno complejos)

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, su *coseno* y su *seno* complejos son, respectivamente,

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

Con el dominio así extendido, los rangos de las funciones cos y sen ya no se limitan al intervalo $[-1, 1]$. Vea los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9: seno complejo

El seno de $1 - \mathrm{i}$ es

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(1-\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-1-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{e}\operatorname{cis} 1 - \mathrm{e}^{-1}\operatorname{cis}(-1)}{2\mathrm{i}} = \cdots = \frac{(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})\cos 1 + (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})\mathrm{i}\operatorname{sen} 1}{2\mathrm{i}} \\ &= \cdots \approx 1.29846 - 0.634964\mathrm{i} \end{aligned}$$

Repaso

Calcule $\operatorname{sen}\mathrm{i}$. Solución: $1.17520\mathrm{i}$

Ejemplo 10: coseno complejo

Un coseno que resulta en 2 es

$$\begin{aligned}\cos\left(\mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3})\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-\ln(2+\sqrt{3})}+\mathrm{e}^{\ln(2+\sqrt{3})}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})^{-1}+2+\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{1+(2+\sqrt{3})^2}{2(2+\sqrt{3})} = \cdots = 2\end{aligned}$$

Así es que la función cos puede tomar el valor 2, y posiblemente cualquier valor complejo. Tiene sentido preguntarse, entonces, si se podrán definir las funciones inversas, arcsen y arccos, en un dominio más amplio que el tradicional, $[-1, 1]$. En efecto, la ecuación $\cos z = w$ ahora se puede resolver (para dar $z = \arccos w$) con cualquier $w \in \mathbb{C}$. Empecemos por plantear, con incógnita z,

$$w = \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

Con el cambio de variable $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ transformamos la ecuación en

$$\begin{aligned} w &= \frac{x+x^{-1}}{2}\cdot\frac{x}{x} = \frac{x^2+1}{2x}\\ 2wx &= x^2+1\\ 0 &= x^2-2xw+1\\ x &= \frac{2w\pm\sqrt{4w^2-4}}{2} = w\pm\mathrm{i}\sqrt{1-w^2}\end{aligned}$$

Hay dos soluciones ($\pm$), de las cuales se escoge la que tiene $+$ para definir el arccos principal[6] de esta manera (devolviendo el cambio de variable $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$):

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= w+\mathrm{i}\sqrt{1-w^2}\\ z &= \frac{\mathrm{Ln}(w+\mathrm{i}\sqrt{1-w^2})}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(w+\mathrm{i}\sqrt{1-w^2})\end{aligned}$$

Así obtenemos una fórmula para $z = \arccos w$. Aplicando las mismas ideas para despejar z en la ecuación $\operatorname{sen} z = w$ llegamos a una fórmula para $z = \operatorname{arcsen} w$. Las definiciones de arccos y arcsen son las siguientes.

Definición (arccos y arcsen complejos)

Si $w \in \mathbb{C}$, su *coseno inverso principal* y su *seno inverso principal* son, respectivamente,

$$\arccos w = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(w+\mathrm{i}\sqrt{1-w^2})$$

y

$$\operatorname{arcsen} w = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(\sqrt{1-w^2}+\mathrm{i}w)$$

[6] En este contexto, la notación $\sqrt{u}$ para $u \in \mathbb{C}$ se refiere a $u^{1/2}$ en el sentido en que se definió u^z para u y z complejos: $u^{1/2} = |u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(u)\right)$. Esta aclaración es necesaria porque la notación $\sqrt{u}$, por su ambigüedad, no es usual cuando $u \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 11: coseno inverso complejo

Hace un momento calculamos $\cos\big(\mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3})\big) = 2$. Confirmemos los cálculos ahora encontrando[7] $\arccos 2$.

$$\arccos 2 = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(2+\mathrm{i}\sqrt{1-4}) = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(2+\mathrm{i}^2\sqrt{3}) = -\mathrm{i}\ln(2-\sqrt{3})$$

que, racionalizando, resulta ser lo mismo que

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\ln\left((2-\sqrt{3})\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) &= -\mathrm{i}\ln\frac{1}{2+\sqrt{3}} = -\mathrm{i}\left(\ln 1 - \ln(2+\sqrt{3})\right) \\ &= \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ejemplo 12: seno inverso complejo

En otro ejemplo habíamos encontrado $\mathrm{sen}(1-\mathrm{i}) \approx 1.29846 - 0.634964\mathrm{i}$. Ahora

$$\begin{aligned} &\mathrm{arcsen}(1.29846 - 0.634964\mathrm{i}) \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left[\sqrt{1-(1.29846-0.634964\mathrm{i})^2} + \mathrm{i}(1.29846-0.634964\mathrm{i})\right] \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left[\sqrt{1-(1.28282-1.64895\mathrm{i})} + 1.29846\mathrm{i} + 0.634964\right] \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}[\sqrt{-0.28282+1.64895\mathrm{i}} + 1.29846\mathrm{i} + 0.634964] \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}[\sqrt{1.67303\,\mathrm{cis}\,1.74066} + 1.29846\mathrm{i} + 0.634964] \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}[1.29346\,\mathrm{cis}\,0.870329 + 1.29846\mathrm{i} + 0.634964] \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}[0.833729 + 0.988900\mathrm{i} + 1.29846\mathrm{i} + 0.634964] \\ &\quad= -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}[1.46869 + 2.28736\mathrm{i}] = -\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) \\ &\quad= 1-\mathrm{i} \end{aligned}$$

Repaso

Calcule $\mathrm{arcsen}\,1.17520\mathrm{i}$. Solución: i

Ejercicios

Evalúe en forma rectangular.

41. $\cos(\mathrm{i}\pi)$

42. $\mathrm{sen}(\mathrm{i}\pi/3)$

43. $\cos(3+2\mathrm{i})$

44. $\mathrm{sen}(\mathrm{i}-4)$

45. $\tan(\mathrm{i}\pi/2)$, donde $\tan = \mathrm{sen}\,/\cos$

46. $\arccos(-2)$

[7] El número $\arccos 2$ aparecía como un ejemplo de número complejo en el diagrama de la página 3.

47. $\operatorname{arccos}(-1)$

48. $\operatorname{arccos}(\mathrm{i})$

49. $\operatorname{arcsen}(3)$

50. $\operatorname{arcsen}(1-\mathrm{i})$

Demuestre cada identidad para z y w números complejos.

51. $\cos(-z) = \cos z$

52. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

53. $\cos(w+z) = \cos w \cos z - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$

54. $\operatorname{sen}(w+z) = \operatorname{sen} w \cos z + \cos w \operatorname{sen} z$

55. $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$

56. $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$

57. $\cos(\operatorname{arccos} z) = z$

58. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} z) = z$

59. Demuestre que los dominios de las funciones arccos y arcsen son iguales a $\mathbb{C}$.

60. Defina $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos z \neq 0$.

(a) Determine el dominio de la función tan.

(b) Demuestre que una fórmula para $\tan z$ es $\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+1)}$.

(c) Plantee la ecuación $w = \tan z$ con incógnita z y, usando la fórmula en la parte b, despeje z para demostrar que $\arctan w = \dfrac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}w}{1+\mathrm{i}w}\right)$.

(d) Compruebe que $\tan(\arctan w) = w$ (pero $\arctan(\tan z)$ no siempre es z; ya desde los reales se tiene, por ejemplo, $\arctan(\tan \pi) = \arctan(0) = 0$, no π).

(e) Verifique que $(\tan z)' = \sec^2 z$ (donde sec, por supuesto, es $1/\cos$).

(f) Verifique que $(\arctan w)' = \dfrac{1}{1+w^2}$.

En resumen...

- Una función $f(z)$ es derivable si y solo si $D_x f_{\text{Re}} = D_y f_{\text{Im}}$ y $D_x f_{\text{Im}} = -D_y f_{\text{Re}}$, y en ese caso $f' = D_x f_{\text{Re}} + \mathrm{i} D_x f_{\text{Im}} = D_y f_{\text{Im}} - \mathrm{i} D_y f_{\text{Re}}$.

- Para $x \in \mathbb{R}$ se define $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \operatorname{cis} x$ (con x en radianes).

- El logaritmo principal de $r \operatorname{cis} \theta$ (con $r > 0$) es $\operatorname{Ln}(r \operatorname{cis} \theta) = \ln r + \mathrm{i}\theta$. En general, si $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces $\operatorname{Ln} w = \ln |w| + \mathrm{i} \operatorname{Arg}(w)$.

- Si z y w son complejos y $w \neq 0$, entonces $w^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} w}$.

- Las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica complejas son

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z \qquad \text{y} \qquad (\operatorname{Ln} w)' = \frac{1}{w}$$

- El coseno y el seno complejo se definen como

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

- El arco-coseno y el arco-seno complejos se definen como

$$\arccos w = -\mathrm{i} \operatorname{Ln}(w + \mathrm{i}\sqrt{1 - w^2}) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{arcsen} w = -\mathrm{i} \operatorname{Ln}(\sqrt{1 - w^2} + \mathrm{i}w)$$

Apéndice A
Sugerencias

Capítulo 1

6 Sustituya $t = y^2$.

15 (a) Despeje x y eleve al cuadrado. Muestre que $x^2 + y^2 = 0$ y concluya que $x = y = 0$. (b) Note que $(a - c) + (b - d)\mathrm{i} = 0$ y use el resultado del ejercicio anterior.

33 z y w son conjugados si $\bar{z} = w$.

37 Para que sea real, su parte imaginaria debe ser cero.

38 Para que sea imaginario puro, su parte real debe ser cero.

49 Tome denominador común, o saque $\frac{1}{2}$ como factor común.

51 Tome denominador común, o saque $\frac{1}{2}$ como factor común.

Capítulo 2

2 (y siguientes) Escriba $z = a + b\mathrm{i}$ y $w = c + d\mathrm{i}$.

36 Primero sea $n \geq 0$. Demuestre por inducción que $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ para cualesquiera $r, \theta \in \mathbb{R}$.

Ahora sea $n < 0$. Tome $k = -n$ y escriba

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = \left[(r \operatorname{cis} \theta)^k\right]^{-1} = \frac{1 \operatorname{cis} 0}{(r \operatorname{cis} \theta)^k}$$

Como $k > 0$, se aplica la fórmula del párrafo anterior a k en el lugar de n.

52 Escriba $u = t^3$.

Capítulo 3

8 Note que $x^2 + y^2 = z\bar{z}$ y que $y^2 - x^2 + 2\mathrm{i}xy = (\mathrm{i}\bar{z})^2$.

16 En este y los tres siguientes, escriba $w = a + b\mathrm{i}$ y $z = c + d\mathrm{i}$, y use las definiciones.

36 $4\pi/3$ no es el argumento principal.

38 Use la regla de la cadena en $z^c = \mathrm{e}^{c \operatorname{Ln} z}$.

39 Use la regla de la cadena en $c^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} c}$.

40 Recuerde que $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} = w$.

57 Recuerde que $\mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z$ y que $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} = w$.

58 Recuerde que $\mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z$ y que $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} w} = w$.

59 Recuerde que el dominio de Ln es $\mathbb{C} - \{ 0 \}$. Demuestre que $w + \mathrm{i}\sqrt{1 - w^2}$ y $\sqrt{1 - w^2} + \mathrm{i}w$ nunca son iguales a cero.

60 (a) $\tan(a + b\mathrm{i})$ está indefinido si $\cos(a + b\mathrm{i}) = 0$; encuentre las partes real e imaginaria de $\cos(a + b\mathrm{i})$ y muestre que ambas son cero solo si $\cos a = 0$ y $b = 0$. e: Use la definición, $\tan = \operatorname{sen} / \cos$, en vez de la fórmula en la parte b.

Apéndice B

Soluciones

Capítulo 1

1 $t = 3 \pm \mathrm{i}$

2 $z = -1/2 \pm 3\mathrm{i}/2$

3 $x = 1/2 \pm \mathrm{i}/2$

4 $z = \pm\sqrt{3}$, $z = \pm\mathrm{i}\sqrt{3}$

5 $2/5 \pm 4\mathrm{i}/5$

6 $y = \pm 1/2$, $y = \pm 2\mathrm{i}$

7 $2(2z + 3\mathrm{i})(2z - 3\mathrm{i})$

8 $(x + \mathrm{i}\sqrt{10})(x - \mathrm{i}\sqrt{10})$

9 $(y\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{5})(y\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{5})(y\sqrt{3} + \sqrt{5})(y\sqrt{3} - \sqrt{5})$

10 $3(t + 2\mathrm{i})(t - 2\mathrm{i})$

11 $a = 3$, $b = 2$

12 $a = 0$, $b = -5$

13 $a = 1$, $b = -2$

14 $a = 1$, $b = 3$

16 $5 + 10\mathrm{i}$

17 53

18 $-1 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

19 $-1 + 2\mathrm{i}$

20 $-1/2$

21 $-7/5 + \mathrm{i}/5$

22 $2\mathrm{i}$

23 $2 + 3\mathrm{i}$

24 0

25 $z = 1 - \mathrm{i}/2$, $w = 1/2$

26 $x = -9/13 - 19\mathrm{i}/13$, $y = -15/13 + 29\mathrm{i}/13$

27 $u = 99/37 - 113\mathrm{i}/37$, $w = -32/37 - 30\mathrm{i}/37$

28 $w = 3 - \mathrm{i}$, $x = 1 + 5\mathrm{i}$

29 $x = -7/3$, $y = 25/2$

30 $x = 25/7$, $y = 2/7$

31 $x = -1$, $y = 0$

32 $x = 4$, $y = 3$

33 $x = \pm 1$, $y = -4$

34 $1/10 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}/10$

35 $1/5 - 2\mathrm{i}/5$

36 $\operatorname{Im} z = 0$

37 $y = -3x/2$

38 $x = -4 \Rightarrow w = 17\mathrm{i}$ ó $x = 1 \Rightarrow w = -8\mathrm{i}$

43 $2(x - \mathrm{i}\sqrt{3})(x + \mathrm{i}\sqrt{3})(x - 1/2)$

44 $(t - 1)(t - 1 + 3\mathrm{i})(t - 1 - 3\mathrm{i})$

45 $2(z - 1/2)(z - 2 + \mathrm{i})(z - 2 - \mathrm{i})$

46 $(y+2)(y-1)(y-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))(y-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}))$

47 $(z+i\sqrt{7})^2(z-i\sqrt{7})^2$

48 $6w(w-1/3)(w+1+i\sqrt{2}/2)(w+1-i\sqrt{2}/2)$

49 $3(r+2/3)(r-1/2)(r-1+2i)(r-1-2i)$

50 $10t(t-1/2)(t-1)(t-3+i)(t-3-i)$

51 $5(w+6/5)(w+1/2)(w-3+i)(w-3-i)$

52 $x(x+3i)(x-3i)(x-2+i)(x-2-i)$

53 $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$

54 -1, $1/4 \pm i\sqrt{7}/4$

55 $\pm\sqrt{3}$, $\pm i$

56 $3/2$, $1 \pm i$

57 $1/2 \pm \sqrt{5}/2$, $1 \pm i$

58 $-1 \pm i$, $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$

59 $3 \pm i$, $-1/2 \pm i/2$

60 2, -3, $\pm i\sqrt{2}$

61 $\pm i$, $\pm i\sqrt{3}$

Capítulo 2

1 $a \geq 0$ y $b = 0$

7 $-3\sqrt{10}/2 - 3i\sqrt{30}/2$

8 $13i$

9 $-\sqrt{2}/4 + i\sqrt{2}/4$

10 -1

11 12

12 $-i\sqrt{3}$

13 $-\sqrt{2}/2 + (5 + \sqrt{2}/2)i$

14 No hay solución

15 $2i$

16 $-1 + 3i$

17 $-4 - 2i$

18 $-2 - \sqrt{3}/3 - i$

19 $-1 \pm i\sqrt{3}$

20 $3/2 \pm i\sqrt{19}/2$

21 $3 \pm i$

22 $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$

23 $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$

24 $-k + 2ki\sqrt{3}$

25 $243/2 - 243i\sqrt{3}/2$

26 $1.68108 + 0.147075i$

27 2^{-100}

28 $-8 - 8i$

29 $-8 + 8i\sqrt{3}$

30 $1/2 - i\sqrt{3}/2$

31 $-3.36082 + 2.17286i$

32 $55380 - 47817i$

33 $i/4$

34 $-2^{24} + 2^{24}i\sqrt{3}$

35 i

37 $\pm(\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2)$

38 $\pm i$

39 $\pm(1+\mathrm{i})$

40 $\pm(1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2)$

41 i, $\pm\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2$

42 -1, $1/2\pm\mathrm{i}\sqrt{3}/2$

43 $1.58740+1.58740\mathrm{i}$, $-2.16843+0.581029\mathrm{i}$, $0.581029-2.16843\mathrm{i}$

44 $1.49167-0.542923\mathrm{i}$, $-0.275649+1.56328\mathrm{i}$, $-1.21602-1.02036\mathrm{i}$

45 $\pm(0.923880+0.382683\mathrm{i})$, $\pm(0.382683-0.923880\mathrm{i})$

46 $\pm(1.17903+0.155223\mathrm{i})$, $\pm(0.155223-1.17903\mathrm{i})$

47 $\pm(\sqrt{3}+\mathrm{i})$, $\pm(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$

48 $\pm\sqrt{2}/2\pm\mathrm{i}\sqrt{2}/2$

49 $0.965156+0.809862\mathrm{i}$, $-1.18394+0.430918\mathrm{i}$, $0.218783-1.24078\mathrm{i}$

50 ±2, $\pm2\mathrm{i}$

51 2, $0.618034\pm1.90211\mathrm{i}$, $-1.618034\pm1.17557\mathrm{i}$

52 2, $-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$

Capítulo 3

1 $3+\mathrm{i}$

2 $-\mathrm{i}/z^2$

3 $2z$

4 $4\mathrm{i}z-4$

5 $-2\mathrm{i}$

6 $8z-\mathrm{i}$

7 $8z+12\mathrm{i}$

8 $-1/z^2$

10 i

11 $1+\mathrm{i}$

12 $2\cos x$

13 -3

14 $0.769239+0.638961\mathrm{i}$

15 $-8.35853-18.2637\mathrm{i}$

20 $1.53848-1.27792\mathrm{i}$

21 $-4.82900+124.909\mathrm{i}$

22 $0.831900+1.94444\mathrm{i}$

23 $0.769239-0.638961\mathrm{i}$

24 $3.80479-4.95843\mathrm{i}$

25 $a^z\ln a$

26 $\mathrm{i}\pi/2$

27 $(\ln 12)/2-\mathrm{i}\pi/3$

28 $\ln 3+\mathrm{i}\pi$

29 $5+(10-4\pi)\mathrm{i}$

30 $2305.69-109448.0\mathrm{i}$

31 $-0.309744-0.857658\mathrm{i}$

32 $-5\mathrm{i}\pi/6$

33 $7\mathrm{i}\pi/6$

34 $-3\mathrm{i}\pi/4$

35 $5\mathrm{i}\pi/4$

36 $-2\mathrm{i}\pi/3$

37 $4\mathrm{i}\pi/3$

41 11.5920

42 $1.24937\mathrm{i}$

43 $-3.72455-0.511823\mathrm{i}$

44 $1.16781-0.768163\mathrm{i}$

45 $0.917152\mathrm{i}$

46 $\pi-\mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3})$

47 π, por supuesto

48 $\pi/2-\mathrm{i}\ln(1+\sqrt{2})$

49 $\pi/2-\mathrm{i}\ln(3+2\sqrt{2})$

50 $0.666239-1.06128\mathrm{i}$

60 a: $\mathbb{C}-\{\,z=a+b\mathrm{i}\mid\cos a=0 \text{ y } b=0\,\}$