Instituto Tecnológico de Costa Rica
MA1403: Matemática Discreta
Escuela de Matemática
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas

II Semestre, 2022
Tiempo: 2 horas y 30 minutos
Puntaje Total: 25 pts

Segundo examen parcial

Formulario 1

Instrucciones:

Nombre del estudiante: ______________________ Pts

Carné: ____________ Nº grupo: ________ Nota:

Nombre del docente: ______________________

1. Al inicio de la prueba debe completar la portada de su cuaderno de examen con su información personal (nombre completo, número de carné, profesor y número de grupo). Durante la prueba solo podrá tener: lápiz, tajador, borrador, lapicero, calculadora no programable y el cuadernillo o folleto de examen.

2. La prueba consta de tres secciones: selección única, respuesta corta y desarrollo; para un total de 13 preguntas numeradas de 1 a 13. Los procedimientos que requiera realizar para obtener la respuesta de cada una de las preguntas de selección única o de respuesta corta NO serán tomados en cuenta a la hora de calificar la prueba. Para estas preguntas, al final de esta página se incluye la **tablas de respuestas**.

3. Cada estudiante deberá reportar las opciones marcadas para las preguntas de selección única y el resultado de las preguntas de respuesta corta en la tabla de respuestas. La información registrada en esta es la **única** que utilizará el docente para calificarle estas preguntas. De la pregunta 10 a la pregunta 13 se calificarán lo escrito en el espacio correspondiente asignado a cada pregunta dentro del cuadernillo de examen. En caso de que requiera más espacio, puede usar los espacios en blanco que posee el cuadernillo del examen, en estos casos debe indicar el lugar en donde continúa el procedimiento de la pregunta, si aun así no es suficiente, levente la mano e indíquelo a la persona a cargo.

4. No debe desengrapar este enunciado. No se permiten dispositivos electrónicos con conectividad a internet. El examen debe ser resuelto con lapicero azul o negro. En caso de que en alguna pregunta utilice lápiz o que realice alteraciones con corrector o similar, pierde el derecho de realizar reclamos posteriores sobre la evaluación de dicha pregunta.

5. Al finalizar la prueba debe entregar el cuadernillo del examen, con la tabla de respuesta y los datos personales llenos, así como todos los procedimientos realizados desde la pregunta 10 a la 13.

Tablas de respuestas:

Selección única

1. A B C D	**4.** A B C D
2. A B C D	**5.** A B C D
3. A B C D	**6.** A B C D

Formas válidas de marcar E ⊗

Respuesta corta:

7.	________
8.	**a.** ________
	b. ________
9.	________

Se recomienda marcar con lápiz las opciones y la respueta corta, y pasar a lapicero antes de entregar la prueba. En caso que cambie de opinión en alguna pregunta, borre bien y agregue su nueva respuesta.

I. Selección única. (total de la sección: 6 puntos)

A continuación, se presentan 6 ítems de selección única, para cada uno de ellos seleccione, entre las 4 opciones, aquella que a su juicio responda correctamente a la pregunta o situación planteada. Debe reportar las opciones marcada en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

1. [**1 punto**] Sean $A = \{x, y, 7, 9\}$ y $B = \{1, 3, a, b, c\}$. Considere la relación $\mathcal{R}$ de A en B definida por:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El dominio y el ámbito de $\overline{\mathcal{R}}$ está dado por:

A) $D_{\overline{\mathcal{R}}} = \{x, y, 7, 9\}$ y $\overline{\mathcal{R}}[A] = \{1, 3, a, c\}$

B) $D_{\overline{\mathcal{R}}} = \{x, y, 9\}$ y $\overline{\mathcal{R}}[A] = \{1, 3, a, c\}$

C) $D_{\overline{\mathcal{R}}} = \{x, y, 7, 9\}$ y $\overline{\mathcal{R}}[A] = \{1, 3, a, b, c\}$

D) $D_{\overline{\mathcal{R}}} = \{x, y, 9\}$ y $\overline{\mathcal{R}}[A] = \{1, 3, a, b, c\}$

2. [**1 punto**] Sean $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 5, 7\}$ y considere la relación $\mathcal{S}$ de A en B que su matriz asociada cumple con:

$$M_{\mathcal{S}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i + j \text{ es impar } \ \vee j = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces, con certeza se cumple que:

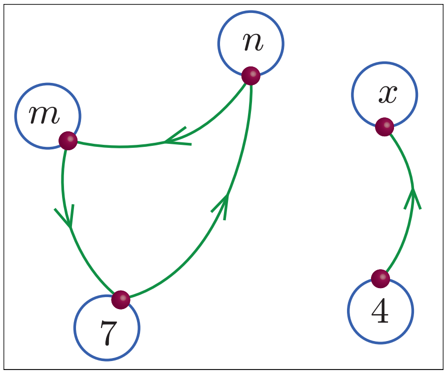
A) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. [**1 punto**] Sobre el conjunto $M = \{m, n, 7, 4, x\}$ se define la relación $\mathcal{T}$ tal que su grafo está dado por:



Sobre la relación $\mathcal{T}$ considere las siguientes afirmaciones:

I. $\mathcal{T}$ es transitiva y es antisimétrica.

II. $\mathcal{T}$ es reflexiva, no es simétrica y no es total.

¿Cuál o cuáles de las afirmaciones anteriores son con certeza verdaderas?

A) Ninguna.

B) Ambas.

C) Solo la II.

D) Solo la I.

4. [**1 punto**] Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Considere las relaciones $\mathcal{R}$ de A en B y $\mathcal{S}$ de B en A tales que: $M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La fila 2 de la matriz asociada a la relación $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ corresponde a:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. [**1 punto**] Sobre el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$a\mathcal{R}b \iff (\exists k \in \mathbb{Z})[b = a + 3k]$$

Si se sabe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, entonces la clase de equivalencia del 4 corresponde a:

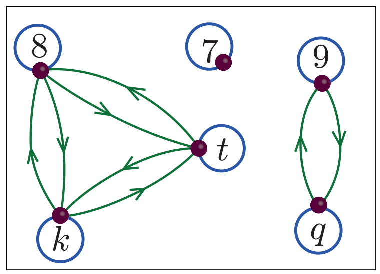
A) $\{0, 3, 6, 9\}$

B) $\{1, 4, 7\}$

C) $\{1, 7\}$

D) $\{0, 4, 8\}$

6. [**1 punto**] Sobre el conjunto $D = \{7, 8, 9, k, q, t\}$ se define la relación $\mathcal{S}$ por medio del siguiente grafo:



Si se sabe que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia sobre D, el conjunto cociente asociado a $\mathcal{S}$ corresponde a:

A) $\{\{8, k, t\}, \{9, q\}\}$

B) $\{\{k, t, 8\}, \varnothing, \{7\}, \{q, 9\}\}$

C) $\{\{7\}, \{9, q\}, \{8, k, t\}\}$

D) $\{\{7, 9, q\}, \{8, k, t\}\}$

II. Respuesta corta. (total de la sección: 4 puntos)

A continuación, se presentan 3 ítems de respuesta corta. Resuelva cada uno de ellos y anote el resultado en la línea indicada. Debe reportar su respueta en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

7. [**1 punto**] Sean $A = \{-4, -3, -2, 1\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ y $C = \{2, 6, 8, 9\}$. Considere las relaciones $\mathcal{S}$ de A en B y $\mathcal{R}$ de B en C tales que:

- $G_{\mathcal{S}} = \{(-4, 2), (-2, 2), (1, 3), (1, 6)\}$
- $G_{\mathcal{R}} = \{(2, 2), (3, 2), (3, 9), (6, 9)\}$

El gráfico de la relación $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ está dada por: ________________

8. [**2 puntos**] Sea $E = \{-7, -4, -1\}$ y $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere la función h definida de $P(E)$ en M por:

$$h(X) = |X \cup \{-4\}| + 1$$

a) La imagen directa del conjunto $\{\varnothing, \{-1\}, \{-7, -4\}\}$ por h se expresa por extensión como: ________________

b) La imagen inversa del conjunto $\{2, 4, 5\}$ por h se expresa por extensión como: ________________

9. [**1 punto**] Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{11k + 7x}{2}$, donde k es una constante real. Si se sabe que una preimagen de 8 es el 3, entonces el valor de k corresponde a: ________________

III. Desarrollo. (total de la sección: 15 puntos)

A continuación, se presentan 4 preguntas. Para cada una de ellas resuelva en el espacio en blanco lo solicitado. Justifique cada uno de los pasos que lo llevaron a obtener su respuesta.

---

10. [**3 puntos**] Sean $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{-2, 1, 5\}$. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones de A en B definidas por:

- $G_{\mathcal{R}} = \{(2, -2), (2, 5), (6, -2), (6, 5), (8, 1)\}$
- $M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Determine la matriz asociada de la relación $(\mathcal{R} \cap \overline{\mathcal{S}})^{-1}$.

11. [**3 puntos**] Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que se sabe que:

- $f(x) = 5x - 3$
- $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

Determine el criterio de $(g \circ f)$. **Sug.** Busque primero el criterio de g.

12. [**4 puntos**] Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$a\mathcal{R}b \iff a^2 - b^2 = 0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

13. [**5 puntos**] Considere la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{6\}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + 5$.

a) (3 pts de 5pts) Demuestre que f es una función inyectiva .

b) (2 pts de 5pts) Suponga que f es sobreyectiva. Determine el criterio de la función inversa de f.