Escuela de Matemáticas

Matrices
y sus aplicaciones

M. Sc. Luis Alejandro Acuña P.

2014

Contenido

Nota

Este folleto es parte de una serie de folletos desarrollados para el curso "Cálculo y álgebra lineal". Cada uno contiene, además de los capítulos indicados abajo, un apéndice con sugerencias para los ejercicios más difíciles y otro apéndice con las soluciones de casi todos los ejercicios.

Los folletos son:

Los números complejos

Cap. 1: El álgebra de los números complejos

Cap. 2: La geometría de los números complejos

Cap. 3: Funciones de números complejos

Matrices y sus aplicaciones

Cap. 4: Matrices

Cap. 5: Sistemas de ecuaciones lineales

Cap. 6: Inversa de una matriz

Cap. 7: Determinantes

Vectores y espacios vectoriales

Cap. 8: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Cap. 9: Producto escalar y producto vectorial

Cap. 10: Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

Cap. 11: Espacios vectoriales

Cap. 12: Independencia lineal y bases

Cap. 13: Vectores propios y valores propios

Capítulo 4

Matrices

Las matrices son una forma de notación matemática que permite representar de manera compacta conjuntos de valores que por su naturaleza pueden organizarse tabularmente. Por ejemplo, la información en el cuadro

Región	Ventas en \$1000's			
	2002	2003	2004	2005
Central	9	12	13	13
Pacífica	8	9	9	10
Atlántica	4	5	5	7

puede resumirse, si los encabezados se sobreentienden, con la notación

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

4.1 Definiciones y notación

Definición (matriz)

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números[1]. Los elementos de una matriz se organizan en *filas* (horizontales) y *columnas* (verticales).

Las matrices se denotan con un par de paréntesis alrededor de sus elementos, como en el ejemplo que acabamos de ver. Al darle nombre a una matriz se acostumbra usar una letra mayúscula. Por ejemplo, como la matriz que acabamos de ver representa ventas, podemos llamarla V:

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

También se acostumbra denotar con la letra m al número de filas de una matriz, y con la letra n al número de columnas. En el ejemplo, $m = 3$ y $n = 4$.

Definición (dimensión de una matriz)

La *dimensión* o tamaño de una matriz con m filas y n columnas es la expresión $m \times n$.

[1] En realidad esto define una *matriz de números*. También hay matrices de funciones, matrices de polinomios y otros tipos de matrices. Para nuestros efectos, todas las matrices serán de números.

La matriz V del ejemplo tiene tamaño 3×4. Note que ese tamaño no es igual a 12 (por ejemplo, una matriz de tamaño 4×3 y una 2×6 serían muy distintas de una 3×4). A veces se escribe el tamaño de una matriz como un subíndice de su nombre, como $V_{3\times 4}$.

Los elementos de una matriz se denotan con el nombre de la matriz pero en minúscula y con dos subíndices; el primero indica el número de fila y el segundo el número de columna, numerando las filas de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha. En nuestra matriz de ventas, $v_{2,4}$, por ejemplo, es el número 10: el elemento que se encuentra en la fila 2, columna 4.

Definición (la notación $a_{i,j}$)

Si A es una matriz tamaño $m \times n$ entonces $a_{i,j}$ es el elemento de A que se encuentra en la fila i, columna j (para cada $i = 1, \ldots, m$ y cada $j = 1, \ldots, n$).

Si no hay peligro de confusión, se acostumbra omitir la coma entre los subíndices y escribir a_{ij} en vez de $a_{i,j}$. En nuestro ejemplo, podemos escribir $v_{31} = 4$ y así los demás. Pero si una matriz B tuviera más de diez filas o columnas, puede hacerse necesaria la coma. ¿Qué significaría, por ejemplo, b_{112}? ¿Es $b_{1,12}$ o es $b_{11,2}$?

Veamos otros ejemplos de matrices.

Ejemplo 1: dimensión y elementos de una matriz

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. La dimensión de A es 2×3. Algunos de sus elementos son $a_{11} = 2$, $a_{13} = 0$ y $a_{22} = -3$. El elemento a_{32} no existe. ¿Por qué no existe?

Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. Su tamaño es 4×4. Algunos de sus elementos son $b_{13} = 9$, $b_{32} = 7$ y $b_{44} = 16$.

Repaso

¿Cuál es la dimensión de $B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 7 \end{smallmatrix}\right)$? ¿Cuáles son sus cuatro elementos?

Solución: 2×2; $b_{11} = 5$, $b_{12} = 1$, $b_{21} = 9$ y $b_{22} = 7$

Ejemplo 2: una matriz definida por fórmula

Sea C la matriz de tamaño 10×10 definida por $c_{ij} = 5i - j$. Esta es una forma concisa de describir la matriz C sin necesidad de enumerar sus cien elementos. De la fórmula calculamos, por ejemplo, que el elemento en la fila 2, columna 4, es $c_{24} = 5(2) - (4) = 6$, que el elemento en la posición 10,1 es $c_{10,1} = 5(10) - (1) = 49$ y que el elemento en 3,8 es $c_{38} = 5(3) - (8) = 7$.

Algunos de los elementos de C son los siguientes:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & -5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 49 & 48 & 47 & 46 & \cdots & 40 \end{pmatrix}_{10\times 10}$$

Repaso

Escriba la matriz $D_{2\times 3}$ definida por $d_{ij} = 2(i-1)j + (j-2)^2$.

Solución: $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{smallmatrix}\right)$

Ejemplo 3: una matriz que resume una tabla

Suponga que una fábrica de ropa produce maletines y pantalones, para lo cual usa como materia prima tela, broches y cremalleras. La siguiente tabla indica los materiales requeridos para cada producto.

	Tela (m)	Broches (unid)	Cremalleras (unid)
Maletín	1.5	8	3
Pantalón	2	2	1

Esa información puede representarse en una matriz de materiales

$$M = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de tamaño 2×3, donde cada fila representa un producto y cada columna un material.

Si en la tabla anterior usáramos una fila para cada material y una columna para cada producto, la matriz resultante sería

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{mlt} & \text{pnt} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tela} \\ \text{brch} \\ \text{crem} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta matriz es la *transpuesta* de la matriz original, y se denota M^{T}. Vea la siguiente definición.

Otras definiciones

Definición (transpuesta de una matriz)

Si A es una matriz $m \times n$, su *transpuesta*, denotada $A^\intercal$, es la matriz de tamaño $n \times m$ que resulta de convertir las filas de A en columnas, y las columnas de A en filas.

Como vimos en el ejemplo anterior, la transpuesta de $M = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es

$$M^\intercal = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición (algunos tipos de matrices)

- Una matriz *cuadrada* es una que tiene igual número de filas y columnas: $m = n$.
- Una matriz *columna* es una que tiene una sola columna: $n = 1$.
- Una matriz *fila* es una que solo tiene una sola fila: $m = 1$.
- Una matriz cuadrada es *simétrica* si es igual a su transpuesta.

La *diagonal*[2] de una matriz cuadrada A es la sucesión finita $(a_{ii})_{i=1,\ldots,n}$. Por ejemplo, la diagonal de $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ es la sucesión $2, 7$.

Para que dos matrices sean iguales es necesario, en primer lugar, que tengan igual dimensión. Pero además de eso, los elementos en posiciones correspondientes deben ser también iguales. Esto es, dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{p\times q}$ son iguales solo si $m = p$, $n = q$ y también $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots m$ y todo $j = 1, \ldots n$.

Ejemplo 4: matrices de tamaños especiales

Un ejemplo de cada uno de los tipos de matriz recién definidos:

- $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada, con $m = n = 2$. No es simétrica.
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una matriz columna, de tamaño 3×1.

[2] Esta es la diagonal decreciente, desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha. También existe otra diagonal, creciente, que prácticamente no tiene ninguna importancia. A la diagonal decreciente a veces se le llama *diagonal principal*, pero aquí la llamaremos simplemente *diagonal*.

- $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 5i & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz fila, de tamaño 1×4.
- $\begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -6 & 25 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

Ejemplo 5: igualdad de matrices

Si las matrices $\begin{pmatrix} 3x & x-y \\ y-2z & x+z \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ son iguales, entonces debe ser $3x = 0$, $x - y = 1$, $y - 2z = -5$, y $x + z = 2$. De esas ecuaciones pueden despejarse los valores $x = 0$, $y = -1$ y $z = 2$.

Repaso

Determine p, q y r si $\begin{pmatrix} 2p-q & q-r \\ 1-q & p+3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2q \\ 2 & 2p+r \end{pmatrix}$.

Solución: $p = 2$, $q = -1$, $r = 1$

Ejercicios

1. Para cuatro niños se registran sus edades en años: 10.4, 5, 6.8 y 9.9; sus estaturas en cm: 147, 110, 120 y 140; las estaturas de sus padres, en cm: 176, 172, 167 y 170; y las estaturas de sus madres, en cm: 170, 159, 166 y 161.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada niño en el orden presentado.

(b) ¿Cuál es el tamaño de la matriz en la parte a?

2. En una encuesta hecha entre estudiantes del Tec se encontró que había 172 mujeres y 172 hombres de la provincia de Cartago, 169 mujeres y 277 hombres de San José, y 133 mujeres y 208 hombres de otras provincias.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada provincia y una columna para cada sexo, en el orden presentado.

(b) Represente la misma información usando columnas para las provincias y filas para los sexos, en el orden presentado.

(c) ¿Cuáles son los tamaños de las matrices en las partes (a) y (b)?

3. Un banco tiene 2820 cuentas corrientes y 1470 cuentas de ahorro en su oficina central. En su sucursal del Pacífico tienen 1240 cuentas corrientes y 980 cuentas de ahorro, y en su sucursal del Atlántico tienen 830 cuentas corrientes y 560 cuentas de ahorro.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada oficina y una columna para cada tipo de cuenta.

(b) Represente la misma información en una matriz, usando filas para los tipos de cuenta y columnas para las oficinas.

(c) ¿Cuáles son los valores en las posiciones $1, 2$ y $3, 1$ de la matriz en la parte (a)?

(d) ¿Cuál es la posición, en la matriz de la parte (b), del número de cuentas de ahorro en el Atlántico?

4. Un modelo de automóviles tiene una masa de 1564 kg, una potencia de 175 HP y un rendimiento de 7.9 km/l. Las características de un segundo modelo son 834 kg, 65 HP y 14.4 km/l. Un tercer modelo tiene 1000 kg, 66 HP y 13.7 km/l, y un cuarto modelo tiene 2430 kg, 230 HP y 6.2 km/l.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una columna para cada modelo.

(b) ¿Cuál es el tamaño de la matriz en la parte (a)?

(c) ¿Cuáles son los valores en las posiciones $2, 4$ y $3, 1$ de la matriz en la parte (a)?

(d) ¿Cuál es la posición en la matriz del rendimiento del primer modelo?

5. Construya la matriz A de tamaño 3×5 dada por la fórmula $a_{ij} = 3j - i^2$.

6. Escriba la transpuesta de la matriz en el Ejercicio 4.

7. Con respecto a la matriz del Ejercicio 1:

(a) Escriba la transpuesta.

(b) ¿Cuáles son los elementos de la diagonal?

8. Escriba los números 6, −2, 4, 0. . .

(a) . . . en una matriz fila.

(b) . . . en una matriz columna.

4.2 Operaciones con matrices

Recuerde el ejemplo de las ventas en el capítulo anterior, en el que una matriz V representaba las ventas de tres regiones durante cuatro años, en miles de dólares. Suponga que esas son las ventas del producto principal de cierta compañía, que también distribuye otro producto secundario cuyas ventas están dadas en la tabla siguiente.

	Ventas en \$1000's			
Región	2002	2003	2004	2005
Central	6	7	8	9
Pacífica	5	7	6	7
Atlántica	2	3	3	4

Este nuevo cuadro puede representarse con la matriz

$$W = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces las matrices V, con las ventas del primer producto, y W, con las ventas del segundo, para las mismas regiones y los mismos períodos. Suponiendo que estos dos son los únicos productos que la compañía distribuye, las ventas totales pueden calcularse sumando cada elemento de V con el elemento correspondiente (en la misma posición) de W. Eso es precisamente la suma de las matrices V y W.

$$V + W = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \text{C} \\ \text{P} \\ \text{A} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} '02 & '03 & '04 & '05 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 19 & 21 & 22 \\ 13 & 16 & 15 & 17 \\ 6 & 8 & 8 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por otra parte, si quisiéramos convertir las ventas del segundo producto a miles de colones, y suponiendo que el tipo de cambio es $\$1 \equiv$ ₡500,todo lo que hay que hacer es multiplicar cada monto por 500 (recuerde que la tabla arriba da las ventas en miles de dólares). Eso es lo mismo que multiplicar la matriz W por 500.

$$500\,W = 500 \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 & 3500 & 4000 & 4500 \\ 2500 & 3500 & 3000 & 3500 \\ 1000 & 1500 & 1500 & 2000 \end{pmatrix}$$

Suma y producto por escalar

Formalmente, tenemos las siguientes definiciones.

Definición (suma de matrices, producto de escalar por matriz)

Si A y B son dos matrices de igual tamaño, y c es un escalar[3], entonces

- cA es la matriz que resulta de multiplicar cada a_{ij} por c.
- $A + B$ es la matriz que resulta de sumar cada $a_{ij} + b_{ij}$.

En el contexto de números complejos, el conjugado de una matriz, A, que se denota $\bar{A}$, se obtiene al tomar el conjugado de cada uno de sus elementos[4]. Los conjugados satisfacen las siguientes propiedades.

[3]No lo habíamos mencionado antes, pero en el contexto de matrices a los números (reales o complejos) se les llama *escalares*.

[4]El conjugado de un número complejo z, que se denota $\bar{z}$, es el resultado de cambiar el signo de su parte imaginaria; es decir, si $z = a + b\text{i}$ (con a y b reales), su conjugado es $\bar{z} = a - b\text{i}$.

Teorema

Si A y B son matrices complejas, y $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$$

y

$$\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$$

Ejemplo 6: operaciones con matrices

Veamos algunos ejemplos de operaciones básicas entre matrices.

- $7 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -7 & -14 \\ 21 & 0 & 28 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & \mathrm{i}-3 & 4 \\ -5\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 4+\mathrm{i} & \mathrm{i} & -5 \\ -2 & \mathrm{i}-1 & -3 \end{pmatrix}$, calcular $4P - 3\mathrm{i}Q$.

$$\begin{aligned} 4P - 3\mathrm{i}Q &= 4\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & \mathrm{i}-3 & 4 \\ -5\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\mathrm{i}\begin{pmatrix} 4+\mathrm{i} & \mathrm{i} & -5 \\ -2 & \mathrm{i}-1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8\mathrm{i} & 4\mathrm{i}-12 & 16 \\ -20\mathrm{i} & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12\mathrm{i}-3 & -3 & -15\mathrm{i} \\ -6\mathrm{i} & -3-3\mathrm{i} & -9\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aunque no hemos definido la resta de matrices, es claro que el resultado es

$$4P - 3\mathrm{i}Q = \begin{pmatrix} 3-20\mathrm{i} & 4\mathrm{i}-9 & 16+15\mathrm{i} \\ -14\mathrm{i} & 3+3\mathrm{i} & 4+9\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

- La suma $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ está indefinida. ¿Por qué está indefinida?

Repaso

Calcule $2\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Solución: $\begin{pmatrix} -24 & 31 & 8 \\ -16 & -11 & 10 \end{pmatrix}$

Como vemos en el Ejemplo 6, los elementos de una matriz, así como los escalares, pueden ser números complejos. Se acostumbra usar el símbolo i para denotar un número de fila, y el símbolo i para denotar la unidad imaginaria. Aunque la letra es la misma, la tipografía es levemente distinta y ayuda a distinguir los significados. El símbolo i denota una *variable*, el número de fila, mientras que el símbolo i representa la *constante* $\sqrt{-1}$.

Una matriz cuyos elementos son todos cero se llama *matriz cero*. Hay muchas matrices cero, una para cada dimensión posible. En general, la matriz cero de tamaño $m \times n$ es

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, $\mathbf{0}_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicios

9. Con respecto al Ejercicio 3 de la página 57, un segundo banco tiene cuentas según la siguiente tabla.

	Oficina		
Tipo de cuenta	Central	Pacífica	Atlántica
Corriente	240	120	90
De ahorros	190	90	60

Suponga que los dos bancos se unen. Sume dos matrices para encontrar el total de cuentas de cada tipo en cada oficina.

10. Una familia resume sus gastos semestrales durante los años 2004 y 2005 de la siguiente manera, en miles de colones.

	2004		2005	
Categoría	1er semestre	2do semestre	1er semestre	2do semestre
Comida	507	525	555	595
Vivienda	480	510	540	570
Otros	477	462	545	520

Denote con G_1 y G_2 las matrices 3×2 de gastos para 2004 y 2005 respectivamente.

(a) Efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los gastos promedio entre ambos años (por ejemplo, el gasto promedio en comida durante los dos primeros semestres fue $(507 + 555)/2 = 531$ mil colones).

(b) Efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los incrementos en gastos de 2004 a 2005 (por ejemplo, el incremento en comida en los primeros semestres fue $555 - 507 = 48$ mil colones).

(c) Suponiendo que los tipos de cambio promedio fueron ₡480/\$ durante 2004 y ₡500/\$ durante 2005, efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los gastos totales, en dólares al dólar más cercano (por ejemplo, el gasto total en comida para los primeros semestres fue $(507000/480+555000/500 \approx 2166$ dólares).

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 2 & -3 \\ -1 & 4\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i}-3 \\ 5 & -1 \\ \mathrm{i}-1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

11. $A - 3B$

12. $2A + \mathrm{i}B$

13. M tal que $2A + B + \mathrm{i}M = 0$

14. $A^{\intercal} - 3\mathrm{i}C$

15. $5B - 2C^{\intercal}$

16. $((A-B)^{\intercal} - C)^{\intercal}$

Producto de matrices

La multiplicación de matrices no es tan simple como las dos operaciones que acabamos de ver. La forma de definirla puede parecer poco natural, pero en realidad tiene muchas aplicaciones. Para justificar la manera en que se multiplican matrices, empecemos por recordar la fábrica de ropa.

Ejemplo 7: justificación del producto de matrices

En el Ejemplo 3 hablamos de una fábrica de ropa que produce maletines y pantalones. Su materia prima es tela, broches y cremalleras. Teníamos la siguiente matriz que describía los materiales requeridos para cada producto.

$$M = \begin{array}{c} \\ \text{mlt} \\ \text{pntl} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{tela} & \text{brch} & \text{crem} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora supongamos que cada metro de tela cuesta \$4, cada broche \$1 y cada cremallera \$2 (esos costos no son muy realistas, pero no vamos a permitir que eso nos detenga). ¿Cuánto cuesta, solo en materiales, hacer un pantalón?

Los requisitos de materiales de un pantalón están dados por la matriz fila $M_p = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (donde el nombre M_p denota la fila de pantalones en la matriz M), y los costos unitarios de los materiales por la matriz columna

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es claro que el costo en materiales de un pantalón es (2)(4) dólares para los dos metros de tela a \$4 el metro, más (2)(1) para los dos broches a \$1 cada uno, más (1)(2) para la cremallera. En total, el costo es

$$(2)(4) + (2)(1) + (1)(2) = 8 + 2 + 2 = \$12$$

Repaso

¿Cuál es el costo en materiales de un maletín? Solución: \$20

Acabamos de multiplicar una matriz fila por una matriz columna, y el resultado fue un número real. En general tenemos:

Definición (producto de una fila por una columna)

Si A es una matriz fila de tamaño $1 \times n$ y B es una matriz columna de tamaño $n \times 1$, entonces su producto es

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1}$$

En otra notación, el producto de una fila y una columna puede definirse así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

Ejemplo 8: producto de fila por columna

El producto $\begin{pmatrix} -6 & \mathrm{i} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ se calcula como la suma

$$(-6)(5) + (\mathrm{i})(-3) + (0)(1) + (2)(-2\mathrm{i}) = -30 + -3\mathrm{i} + 0 + -4\mathrm{i} = -30 - 7\mathrm{i}$$

En el Ejemplo 7 calculamos el costo de los materiales de un pantalón con el producto

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)(4) + (2)(1) + (1)(2) = 8 + 2 + 2 = \$12$$

Por su parte, el costo en materiales de cada maletín es el resultado de multiplicar la fila de materiales para un maletín, $M_m = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, por la misma matriz de costos C.

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1.5)(4) + (8)(1) + (3)(2) = 6 + 8 + 6 = \$20$$

Repaso

Calcule $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Solución: 4

Los costos que acabamos de calcular, \$20 para los maletines y \$12 para los pantalones, pueden representarse en una pequeña matriz columna, $\left(\begin{smallmatrix}20\\12\end{smallmatrix}\right)$. Podemos convenir que para multiplicar una matriz A con varias filas por una matriz columna B, el proceso será multiplicar cada fila de A por B, y luego colocar los resultados en una columna. Entonces los costos de los maletines y de los pantalones se calculan así:

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Una manera de visualizar el proceso, en términos del producto de una matriz fila por una matriz columna, es la siguiente:

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ \cdots \\ 12 \end{pmatrix}$$

Con esta idea ya podemos multiplicar una matriz de cualquier tamaño $m \times n$ por una matriz columna de tamaño $n \times 1$, y vemos que el resultado será una columna de tamaño $m \times 1$.

$$(m \times n) \cdot (n \times 1) = (m \times 1)$$

(en el ejemplo de la fábrica, $m = 2$ es el número de productos y $n = 3$ es el número de materiales). Note que es imprescindible que el número de columnas en la primera matriz sea igual al número de filas en la segunda.

La siguiente pregunta es: ¿y si la segunda matriz tuviera varias columnas?

Ejemplo 9: aplicación del producto de matrices

Continuando con el ejemplo de la fábrica, supongamos ahora que ellos reciben un pedido por 20 maletines y 10 pantalones. ¿Cuántos metros de tela necesitarán para cubrir ese pedido?

El pedido puede representarse con la matriz fila

$$P = \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix}$$

y los requisitos de tela con la matriz columna

$$M_t = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(donde M_t denota la columna de tela de la matriz M). El número de metros de tela necesarios resulta ser

$$P \cdot M_t = \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} = 30 + 20 = 50$$

¿Y qué hay de los broches y de las cremalleras? Si usamos las matrices

$$M_b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para representar los requisitos de broches y de cremalleras, respectivamente, entonces los totales para este pedido pueden calcularse así:

$$P \cdot M_b = \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 180 \text{ broches}$$

y

$$P \cdot M_c = \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 70 \text{ cremalleras}$$

En total, este pedido necesitará 50 m de tela, 180 broches y 70 cremalleras, y estos números pueden representarse en la matriz $\begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \end{pmatrix}$. En general, para multiplicar una matriz fila A por una matriz B con varias columnas, el método será multiplicar A por cada columna de B y luego colocar los resultados en una fila. En el ejemplo, los totales de materiales se calculan multiplicando

$$P \cdot M = \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \end{pmatrix}$$

El producto anterior también puede visualizarse separándolo en términos de "fila por columna".

$$\begin{aligned} P \cdot M &= \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & \vdots & 8 & \vdots & 3 \\ 2 & \vdots & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 50 & \vdots & 180 & \vdots & 70 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con eso ya tenemos la forma de multiplicar una matriz fila de tamaño $1 \times n$ por una matriz de tamaño $n \times p$, obteniendo como resultado una matriz $1 \times p$:

$$(1 \times n) \cdot (n \times p) = (1 \times p)$$

Ahora la definición general del producto de matrices debería ser natural.

Definición (producto de matrices)

Si A tiene tamaño $m \times n$ y B tiene tamaño $n \times p$, entonces el producto $A \cdot B$ es la matriz de tamaño $m \times p$ formada por los productos de cada fila de A por cada columna de B. Más específicamente, el elemento i, j del producto es el resultado de multiplicar la fila i de A por la columna j de B.

En notación formal, la definición puede escribirse así:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}\quad\text{donde}\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Para poder multiplicar dos matrices A y B, el número de columnas de A debe ser igual al de filas de B. El resultado tiene el mismo número de filas de A y el de columnas de B. Por ejemplo, al multiplicar una matriz 3×5 por una 5×2, el resultado tiene tamaño 3×2. El producto de una 8×4 por una 4×7 tiene tamaño 8×7. Dos matrices con tamaños 3×4 y 3×2 no pueden multiplicarse. En general,

$$(m\times n)\cdot(n\times p)=(m\times p)$$

Ejemplo 10: producto de matrices

Sean $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

Los tamaños son 2×2 y 2×3, de modo que su producto está definido y tiene tamaño 2×3. Los cálculos son así:

$$\begin{aligned}A\cdot B&=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 7 & -1\end{pmatrix}\\
&=\left(\begin{array}{c:c:c}\begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\\ \hdashline \begin{pmatrix}-5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\end{array}\right)\\
&=\begin{pmatrix}-10 & -2 & -1\\ -2 & -29 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Repaso

Calcule $\begin{pmatrix}3 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Solución: $\begin{pmatrix}-9 & 3 & 9\\ 27 & 13 & -9\end{pmatrix}$

Ejemplo 11: producto de matrices

Las matrices $\begin{pmatrix}-2 & 5 & \mathrm{i}-4\\ 2-3\mathrm{i} & 8 & -3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ tienen tamaños respectivos 2×3 y 3×3, así que su producto tiene tamaño 2×3.

$$\begin{pmatrix}-2 & 5 & \mathrm{i}-4\\ 2-3\mathrm{i} & 8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & \mathrm{i}-4\\ 2-3\mathrm{i} & 8 & -3\end{pmatrix}$$

¡El resultado es igual a la primera matriz! En realidad esto sucederá siempre que se multiplique cualquier matriz $m \times 3$ por $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Repaso

Calcule $\begin{pmatrix}-4 & 1-7\mathrm{i} & \mathrm{i}-2\\ 1-5\mathrm{i} & -2 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Solución: $\begin{pmatrix}-4 & 1-7\mathrm{i} & \mathrm{i}-2\\ 1-5\mathrm{i} & -2 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$

Esta matriz $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ tiene la propiedad de que al multiplicar cualquiera otra matriz $m \times 3$ a su izquierda, o cualquier matriz $3 \times n$ a su derecha[5], el resultado es igual a la otra matriz, como al multiplicar el número 1 por cualquier otro número. Vea la siguiente definición.

Definición (matriz identidad)

La *matriz identidad* de orden n (o tamaño $n \times n$) es la matriz $n \times n$ con 1s en su diagonal y 0s en las demás posiciones. Dicho de otra forma, el elemento i, j de la identidad es igual a 1 si $i = j$, o a 0 si $i \neq j$:

$$I_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

La segunda matriz del Ejemplo 11 es la identidad de orden 3, denotada I_3.
Veamos algunas aplicaciones y propiedades del producto de matrices.

Ejemplo 12: aplicación del producto de matrices

Nuestra fábrica de ropa recibe pedidos de tres clientes distintos, según esta tabla:

	Maletines	Pantalones
Cliente 1	20	10
Cliente 2	10	15
Cliente 3	50	30

En el Ejemplo 9 usamos una matriz fila para representar el pedido de un cliente. Definamos ahora una matriz para cada pedido.

$$P_1 = \begin{pmatrix}20 & 10\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}10 & 15\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_3 = \begin{pmatrix}50 & 30\end{pmatrix}$$

[5] No hemos dicho que el producto de matrices sea conmutativo. Si A y B son dos matrices, $A \cdot B$ en general es distinto de $B \cdot A$. Vea el comentario al final de este capítulo.

Entonces los productos

$$P_1 \cdot M = \begin{pmatrix} 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \end{pmatrix}$$

(que ya habíamos calculado),

$$P_2 \cdot M = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 110 & 45 \end{pmatrix}$$

y

$$P_3 \cdot M = \begin{pmatrix} 50 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 & 460 & 180 \end{pmatrix}$$

dan los totales de materiales para cada pedido.

Su suma

$$\begin{aligned} P_1 \cdot M + P_2 \cdot M + P_3 \cdot M &= \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 110 & 45 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 135 & 460 & 180 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 230 & 750 & 295 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da el gran total de materiales para los tres pedidos: 230 m de tela, 750 broches y 295 cremalleras.

Por otra parte, también podíamos sumar primero los pedidos,

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \begin{pmatrix} 80 & 55 \end{pmatrix}$$

(80 maletines y 55 pantalones) y luego multiplicar esta matriz por la de materiales,

$$P \cdot M = \begin{pmatrix} 80 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 & 750 & 295 \end{pmatrix}$$

y no debería sorprendernos que el resultado sea el mismo.

Eso se debe a que $P_1 \cdot M + P_2 \cdot M + P_3 \cdot M = (P_1 + P_2 + P_3) \cdot M$, como establece en general el teorema que sigue a estos ejemplos.

Repaso

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, calcule $A \cdot (B + C)$ y $A \cdot B + A \cdot C$.

Solución: $\begin{pmatrix} 4 & -18 \\ 32 & -11 \end{pmatrix}$

Ejemplo 13: aplicación del producto de matrices

En vez de sumar las matrices con los tres pedidos en el ejemplo anterior, podemos también formar una matriz que representa cada pedido (p_1, p_2 y p_3) en una fila y cada producto en una columna,

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{mlt} & \text{pnt} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 15 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora el producto $P \cdot M$ da las cantidades de materiales necesarias para cubrir cada pedido (no solo los grandes totales).

$$P \cdot M = \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{m} & \mathrm{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 15 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{p} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{t} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{t} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \\ 45 & 110 & 45 \\ 135 & 460 & 180 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eso representa, como ya vimos en el ejemplo anterior, 50 metros de tela, 180 broches y 70 cremalleras para el primer cliente; 45 m, 110 b y 45 c para el segundo, y 135 m, 460 b y 180 c para el tercero.

Ejemplo 14: aplicación del producto de matrices

Recuerde que los materiales tenían costos dados por la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

¿Cuál será el costo de los materiales de cada pedido? Para el primer cliente, el costo en dólares será (50)(4) para la tela, más (180)(1) para los broches y (70)(2) para las cremalleras. El total será entonces el producto de la primera fila de $P \cdot M$ por C.

$$\begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (50)(4) + (180)(1) + (70)(2) = 520$$

Para los otros clientes el proceso es similar, y nos lleva a que

$$(P \cdot M) \cdot C = \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{t} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \\ 45 & 110 & 45 \\ 135 & 460 & 180 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{t} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{array} \begin{array}{c} \$ \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \begin{array}{c} \$ \\ \begin{pmatrix} 520 \\ 380 \\ 1360 \end{pmatrix} \end{array}$$

da el costo total de los materiales para cada pedido: \$520 para el primero, \$380 para el segundo y \$1360 para el tercero.

Por otra parte, antes habíamos calculado el producto

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

que daba el costo de los materiales de cada maletín y de cada pantalón. Como ahora tenemos una matriz de pedidos

$$P = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 15 \\ 50 & 30 \end{pmatrix}$$

que dice cuántos maletines y cuántos pantalones quiere cada cliente, podemos combinar P con $M \cdot C$ para calcular de otra manera el costo de cada pedido. El pedido del primer cliente costará (20)(20) los veinte maletines, más (10)(12) los diez pantalones; esto es el producto de la primera fila de P por $M \cdot C$. Combinando los tres clientes encontramos que

$$P \cdot (M \cdot C) \;=\; \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{m} & \mathrm{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 15 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{p} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \$ \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array} \;=\; \begin{array}{c} \\ \mathrm{p}_1 \\ \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \$ \\ \begin{pmatrix} 520 \\ 380 \\ 1360 \end{pmatrix} \end{array}$$

también da el costo total en materiales de cada pedido.

Así es que el producto $(P \cdot M) \cdot C$ calcula el total sumando los costos de cada material, y $P \cdot (M \cdot C)$ lo calcula sumando los costos de cada producto. Pero por supuesto que los dos métodos resultan en los mismos montos; es decir, $(P \cdot M) \cdot C = P \cdot (M \cdot C)$. El teorema más abajo establece esta igualdad en general.

Repaso

Dadas $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $(A \cdot B) \cdot C$ y $A \cdot (B \cdot C)$.

Solución: $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 15: aplicación del producto de matrices

Los materiales requeridos también podrían representarse en la tabla

	Maletín	Pantalón
Tela (m)	1.5	2
Broches	8	2
Cremalleras	3	1

para la cual la matriz es la transpuesta de la que hemos usado hasta ahora.

$$M^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

También, los pedidos pueden representarse con los maletines en la primera fila y los pantalones en la segunda, con una columna para cada cliente:

$$P^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 50 \\ 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Para encontrar otra vez el total de materiales de cada pedido, el producto que debe calcularse ahora es $M^{\mathsf{T}} \cdot P^{\mathsf{T}}$. Recuerde que $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = (3 \times 3)$.

$$M^{\mathsf{T}} \cdot P^{\mathsf{T}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{t} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{m} & \mathrm{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{p} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 10 & 50 \\ 10 & 15 & 30 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{t} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 45 & 135 \\ 180 & 110 & 460 \\ 70 & 45 & 180 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los números son los mismos que habíamos obtenido al calcular $P \cdot M$ en el Ejemplo 14, por supuesto, pero ahora están organizados en otra forma: una fila para cada material y una columna para cada cliente. Dicho de otra manera, este resultado es la matriz transpuesta a la que teníamos en el Ejemplo 14. En símbolos, $M^{\mathsf{T}} \cdot P^{\mathsf{T}} = (P \cdot M)^{\mathsf{T}}$. Esta propiedad también es generalizada por el siguiente teorema.

Repaso

Dadas $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, calcule $(A \cdot B)^{\mathsf{T}}$ y $B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$.

Solución: $\left(\begin{smallmatrix} -14 & -13 \\ 12 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

Teorema

Sean A, B, C y D matrices de tamaños $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ y $n \times p$, respectivamente.

- Las matrices identidad dejan igual a cualquier matriz que multipliquen:

$$A \cdot I_n = A = I_m \cdot A$$

- El producto de matrices es asociativo:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- El producto de matrices es distributivo con respecto a la suma de matrices:

$$A \cdot (B + D) = A \cdot B + A \cdot D \quad \text{y} \quad (B + D) \cdot C = B \cdot C + D \cdot C$$

- La transpuesta de un producto es el producto de las transpuestas en el orden opuesto:

$$(A \cdot B)^{\intercal} = B^{\intercal} \cdot A^{\intercal}$$

- El conjugado de un producto es el producto de los conjugados:

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Sin embargo, no se puede garantizar que $A \cdot B$ sea igual a $B \cdot A$. La igualdad puede fallar por varias razones. Tal vez $A \cdot B$ esté definido y $B \cdot A$ no lo esté; tal vez ambos productos estén definidos pero tengan distintos tamaños; o tal vez ambos tengan el mismo tamaño pero sean distintos. Veamos esas posibilidades ilustradas en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 16: el producto de matrices no es conmutativo

Si A es de tamaño 3×5 y B es 5×2, entonces $A \cdot B$ existe y tiene tamaño 3×2, pero $B \cdot A$ no existe.

Si A es de tamaño 3×5 y B es 5×3, entonces $A \cdot B$ y $B \cdot A$ existen ambas, pero sus tamaños son distintos, respectivamente 3×3 y 5×5.

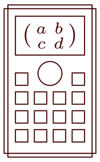
Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son ambas 2×2, pero

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Repaso

Dadas $P = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ y $Q = \left(\begin{smallmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, calcule $P \cdot Q$ y $Q \cdot P$.

Solución: $\left(\begin{smallmatrix} -17 & -9 \\ 19 & 29 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 17 \\ 21 & 7 \end{smallmatrix}\right)$



Algunas calculadoras científicas tienen un modo para trabajar con matrices. Para hacer las operaciones del ejemplo anterior, ponga su calculadora en el modo de matrices. La calculadora primero pregunta con cuál matriz quiere trabajar, ofreciendo tres opciones. Escoja la matriz A y luego indique su tamaño: 2×2. Ahora escriba la matriz en la pantalla, y al terminar salga de esa pantalla con [`AC`].

Para definir otra matriz, abra el menú de matrices con la tecla [`MATRIX`] (probablemente en [`SHIFT`] `4`). Escoja la función `Data` y luego la matriz B. Indique su tamaño y digítela como hizo con A.

De vuelta en la pantalla "normal", escriba

[`MATRIX`] `MatA` × [`MATRIX`] `MatB =`

y la calculadora mostrará el resultado.

También es posible evaluar otras expresiones como $4B - 2A$:

`4` [`MATRIX`] `MatB - 2` [`MATRIX`] `MatA =`

Ejercicios

17. La siguiente tabla muestra parte de la lista de ingredientes necesarios para tres tipos de postres que vende una pastelería.

	Azúcar (tazas)	Huevos (unid)	Leche (litros)
Pastel	1	2	1
Queque	2	5	2
Rosquete	2	3	3

La siguiente representa las cantidades de postres para dos encargos recibidos por la pastelería (la letra P representa pasteles, etc).

	P	Q	R
Encargo 1	4	6	3
Encargo 2	8	2	0

La tercera tabla representa los costos unitarios de cada ingrediente.

Azúcar	₡100
Huevos	₡70
Leche	₡350

Denote con A, B y C las matrices de ingredientes, encargos y costos.

(a) Multiplique dos de las matrices para calcular las cantidades de ingredientes necesarias para cada encargo.

(b) Multiplique dos de las matrices para calcular el costo en ingredientes de cada postre.

(c) Calcule $B \cdot A \cdot C$. ¿Qué representa esta matriz?

18. La siguiente tabla da los precios en colones de ciertos materiales en dos ferreterías.

	Clavos (por kg)	Lija (por hoja)	Pegamento (por bote)
El Sol	1200	630	1850
La Bodega	1050	675	1900

Para cierto proyecto se necesita comprar 2 kg de clavos, cuatro hojas de lija y un bote de pegamento. Se desea saber en cuál de las dos ferreterías será menor el costo total.

(a) Escriba una matriz $P_{3\times 2}$ con los precios de cada material en cada ferretería.

(b) Escriba una matriz $C_{1\times 3}$ con la lista de cantidades requeridas de materiales.

(c) Multiplique dos matrices para calcular el costo total de los materiales en cada ferretería.

(d) ¿En cuál ferretería es menor el costo total de los materiales para este proyecto?

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & \mathrm{i}-1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcule:

19. $A \cdot C$

20. $B \cdot D$

21. $(3A - 2B) \cdot C$

22. $A^{\mathsf{T}} \cdot B$

23. $A \cdot B^{\mathsf{T}}$

24. $B^{\mathsf{T}} \cdot A$

25. $D^{\mathsf{T}} \cdot D$

26. $D^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$

27. $\left(D \cdot D^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}$

Se dice que una matriz A es idempotente si $A \cdot A = A$ (esto es $A^2 = A$). Demuestre que la matriz dada es idempotente.

28. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

30. Calcule $\begin{pmatrix} -2 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$.

31. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, demuestre que $A^3 = 5I_3$.

Dada $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{C}$, determine los valores de a que cumplen la condición dada.

32. $A^2 = 2A$

33. $A^2 = I_2$

34. $A^2 = A$

35. $A^2 = 0$

36. $A^3 = A$

37. $A^3 = 4\mathrm{i}I_2 - 2A$

38. Encuentre los valores de α y β tales que $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

39. Determine la matriz X tal que $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

40. Determine la matriz Y tal que $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y + 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

41. Sea M una matriz tal que $M \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determine el tamaño de M.

(b) Encuentre la matriz M.

42. Sea N una matriz tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot N + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determine el tamaño de N.

(b) Encuentre la matriz N.

43. Encuentre las matrices $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ tales que $C \cdot C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

44. Encuentre las raíces cuadradas de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (es decir, las matrices B tales que $B^2 = M$).

Si A es una matriz $n \times n$, su traza, denotada $\mathrm{Tr}(A)$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal: $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Calcule la traza de cada matriz.

45. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2\mathrm{i} & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 8-\mathrm{i} & 0 & -3 \\ -5 & 4\mathrm{i} & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

47. Sean A y B matrices cuadradas de igual tamaño.

(a) Calcule $(A+B)^2$ en términos de A y B.

(b) ¿Se podría concluir que $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ siempre? Justifique.

En resumen...

- Una matriz es un arreglo rectangular de números. Si una matriz A tiene m filas (horizontales) y n columnas (verticales), entonces su dimensión es $m \times n$, y la matriz puede denotarse $A_{m\times n}$. El elemento en la fila i, columna j, se denota a_{ij}, para cada $i = 1, \ldots, m$ y cada $j = 1, \ldots, n$.

- La transpuesta de una matriz A de tamaño $m \times n$ es la matriz A^{T}, de tamaño $n \times m$, que resulta de convertir las filas de A en columnas, y las columnas de A en filas.

- Una matriz cuadrada tiene $n = m$. Una matriz columna tiene $n = 1$. Una matriz fila tiene $m = 1$. Una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta.

- Si A y B son matrices $m \times n$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces cA es la matriz $m \times n$ que resulta de multiplicar cada a_{ij} por c, y $A + B$ es la matriz $m \times n$ que resulta de sumar cada $a_{ij} + b_{ij}$.

- Dadas $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$, su producto es la matriz C cuyo elemento en la fila i, columna j es el producto de la fila i de A por la columna j de B. En símbolos: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

- El producto de matrices cumple: $(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$ y $A\cdot(B+C) = A\cdot B+A\cdot C$; también $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ y $(A \cdot B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$.

- La matriz identidad de orden n es la matriz I_n de tamaño $n\times n$ con 1s en su diagonal y 0s en las demás posiciones. Para cualquier $A_{n\times m}$ se cumple $I_n\cdot A = A$ y $A\cdot I_m = A$.

Capítulo 5
Sistemas de ecuaciones lineales

Las matrices también pueden usarse para representar sistemas de ecuaciones. Recuerde la división sintética: la idea principal es efectuar una división de polinomios sin escribir las variables sino solo los coeficientes; por ejemplo, el polinomio $5x^3 - 2x^2 + 3$ se representa con la sucesión $(5 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 3)$.

De manera similar, ahora una ecuación lineal como $x - 3y + z = 6$ puede representarse con la fila $(1 \;\; -3 \;\; 1 \;\; 6)$, y un sistema de ecuaciones puede representarse con una matriz en la que cada fila representa una ecuación.

5.1 Matrices y sistemas de ecuaciones

Definición (matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones)

La *matriz de coeficientes* de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas en el sistema, con una fila para cada ecuación y una columna para cada incógnita.

Ejemplo 1: matriz de coeficientes de un sistema

La matriz de coeficientes del sistema $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

También podría tomarse $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ como matriz de coeficientes, si se prefiere escribir y antes que x.

Repaso

Escriba la matriz de coeficientes de $\begin{cases} 2a + b - c = 3 \\ a + 3b - 2c = 7. \end{cases}$ Solución: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Pero la matriz de coeficientes no representa el sistema completo: falta la información al lado derecho del signo de igualdad de cada ecuación.

Definición (matriz aumentada de un sistema)

La *matriz aumentada* de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz que contiene a la matriz de coeficientes del sistema, aumentada con una columna adicional que contiene las constantes al lado derecho del signo de igualdad en cada ecuación. Debe entenderse que las ecuaciones están escritas de modo que todas las incógnitas están a la izquierda y que las constantes sin incógnita están a la derecha del signo.

Ejemplo 2: matriz aumentada de un sistema

a. La matriz aumentada del sistema $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b. La matriz aumentada del sistema $\begin{cases} a - 3b + c = -1 \\ c - 2a - 6 = 0 \end{cases}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

En la segunda fila de la matriz aumentada, note que:

- La primera columna pertenece a a y la tercera a c, sea que la ecuación diga $c - 2a$ o diga $-2a + c$.
- El coeficiente de b en la segunda ecuación es 0, el cual debe incluirse en la segunda columna.
- El 6 es positivo porque la fila representa la ecuación $-2a + c = 6$.

c. La matriz $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ representa un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas (porque de las cuatro columnas, la última es el lado derecho y las primeras tres son los coeficientes). No se indican los nombres de las incógnitas, de manera que el sistema podría ser

$$\begin{cases} -2x + 5y + z = -1 \\ 3x + 8z = 12 \end{cases}$$

o posiblemente

$$\begin{cases} -2p + 5q + r = -1 \\ 3p + 8r = 12 \end{cases}$$

Repaso

Escriba la matriz aumentada de $\begin{cases} 3p + q = 5 \\ r - q + 1 = 0. \end{cases}$ Solución: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3: matriz aumentada de un sistema resuelto

Suponiendo que las incógnitas son x, y, z, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ representa el sistema $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \\ z = 3 \end{cases}$, que ya está resuelto.

En general, cuando la matriz de coeficientes es la matriz identidad, el sistema está resuelto y las soluciones están en la última columna de la matriz.

Repaso

Resuelva el sistema representado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ con incógnitas v, w.

Solución: $v = 2$, $w = -5$

Ejercicios

Escriba la matriz de coeficientes y la matriz aumentada del sistema.

1. $\begin{cases} 3p + 6q = 5 \\ 8p + 15q = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3a + c = 0 \\ 4a - 6\mathrm{i}b = c + 22 - 24\mathrm{i} \\ a - 2 = 5b \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3r + (1+\mathrm{i})s + 4\mathrm{i} = 3 + 2t \\ 4r - s + t = 3 \\ 6r - 2s + 3t + 1 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + z = 1 - 3\mathrm{i} \\ 3x + 1 + 2z = 0 \\ 4x + y + 2z = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ 3a - 2c + 2b = 1 + 7\mathrm{i} \\ a - 2 + c = 3b \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2p + q - 3r = 5 \\ 3p - 5 + 2q = 2r \\ 5p - r = 3q + 16 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3t - u + 3v + w = 2 \\ 2t + 3u + 2v + w = 2 \\ -3t - u - 4v + w = 1 \\ -4t + 14u - 4v = -5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 - \mathrm{i} \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - 3y + z + 5w = 10\mathrm{i} - 1 \\ 4 + x + 2w = y + z \\ -3x + 2z - 3w = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - 6 = z - \mathrm{i} \\ 2x - 5y + 3z = 4 - 8\mathrm{i} \\ x + 4y - 2\mathrm{i}z = 4\mathrm{i} \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2a + b - 3c + d = -5 \\ 3a - b + 11c = 18d - 8 \\ a + 3c - 4d = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ 4x + y + 2z = -1 \\ 10x + 2y + 5z = -7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x + 6z + 2w = 3 + 3y \\ y - 4z + v = 1 \\ v - w = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y + 2z + w = 5 \\ 2x + 3y - 2 = z + 2w \\ 4x + 5y + 3z = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y - 2z + w + 3v = 1 \\ 2x - y + 2z + 2w + 6v = 2 \\ 3x + 2y - 4z - 3w - 9v = 3 \end{cases}$

5.2 Métodos matriciales para resolver sistemas

Para resolver sistemas de ecuaciones pequeños hay varios métodos, como el de eliminación (multiplicar dos ecuaciones por distintos números para que al sumarlas se cancele alguna incógnita) y el de sustitución (despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en las demás). Pero para sistemas grandes esos métodos no son prácticos. Por ejemplo, en un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas, usar el método de despejar y sustituir una vez reduce el sistema a nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Aplicar el método otra vez reduce a ocho con ocho, y así sucesivamente. (Y aún hay que considerar que diez con diez no es un sistema “grande”: en algunas aplicaciones de ingeniería o estadística aparecen frecuentemente sistemas con muchas más ecuaciones e incógnitas.)

Existen métodos más directos, como el de eliminación Gaussiana y el de Gauss-Jordan. Estos dos trabajan con la matriz aumentada del sistema y la reducen a una forma en que la parte de coeficientes es la identidad, de modo que la solución del sistema sea evidente (como en el Ejemplo 3). Veamos las ideas principales en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: un método de solución de ecuaciones

Considere el sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

Para empezar a resolverlo, una posibilidad es multiplicar la primera ecuación por -2 y sumársela a la segunda para cancelar la incógnita x:

$$\begin{array}{rl} x - 3y = 9 & \times(-2) \\ 2x + 4y = -2 & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{r} -2x + 6y = -18 \\ 2x + 4y = -2 \\ \hline 10y = -20 \end{array}$$

Esta última ecuación, $10y = -20$, no es equivalente al sistema original porque no tiene ninguna información sobre x. Pero si conservamos la primera ecuación y sustituimos la segunda por $10y = -20$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ \quad 10y = -20 \end{cases}$$

que sí es equivalente.

El paso del sistema original al nuevo puede explicarse diciendo que a la segunda ecuación se le restó 2 por la primera. Denotando con E_i la ecuación i-ésima, podemos decir que E_2 fue sustituida por el resultado de $E_2 - 2E_1$.

En términos de las matrices aumentadas, el paso

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$

se explica con la operación $F_2 - 2F_1 \to F_2$: el resultado de $F_2 - 2F_1$ se escribe en el lugar de la antigua F_2 (aquí tomamos las filas F_1 y F_2 como matrices fila, y $F_2 - 2F_1$ es simplemente una operación entre matrices de tamaño 1×3).

Ahora que tenemos el sistema $\{\, x - 3y = 9,\ 10y = -20 \,\}$ podemos despejar y dividiendo la segunda ecuación por 10. Como antes, conservamos la primera ecuación porque es la única que se refiere a x. El sistema ahora es:

$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ \qquad y = -2 \end{cases}$$

Con respecto a las matrices aumentadas, la operación

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

puede denotarse $F_2 \div 10 \to F_2$: en la fila 2 se coloca el resultado de dividir F_2 por 10.

Al resolver el sistema "a mano", el siguiente paso podría ser sustituir $y = -2$ en la primera ecuación y despejar x. Pero otra opción es eliminar la incógnita y en la misma manera en que hace poco eliminamos x: multiplicar ahora la segunda ecuación por 3 y sumársela a la primera:

$$\begin{array}{rl} x - 3y = 9 & \\ y = -2 & \times 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} x - 3y = 9 \\ 3y = -6 \\ \hline x = 3 \end{array}$$

Sustituyendo esta ecuación por la primera del sistema anterior y conservando la segunda, el sistema de ecuaciones, ya resuelto, es

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Este último paso fue sumarle a la primera ecuación 3 veces la segunda. En matrices,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

se justifica con la operación $F_1 + 3F_2 \to F_1$.

Como ya observamos en el Ejemplo 3, ahora que la matriz de coeficientes es la identidad, el sistema está resuelto.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 0. \end{cases}$ Solución: $x = 2$, $y = -1$

Está bien: todo eso fue más complicado que lo que realmente se necesita para resolver un sistema tan sencillo. Pero recuerde que la importancia de usar matrices para resolver sistemas se aprecia con sistemas más grandes. De hecho, ya para tres ecuaciones y tres incógnitas puede ser más eficiente usar un método matricial.

Como mencionamos antes, dos métodos son el de eliminación Gaussiana y el de Gauss-Jordan. Los dos son casi equivalentes en el esfuerzo requerido para resolver un sistema, pero el segundo es un poco más fácil de aprender, además de que puede usarse luego para encontrar inversas de matrices (vea el Capítulo 6). Por eso nos concentraremos en el método de Gauss-Jordan, que en adelante denotaremos GJ.

Repasemos el ejemplo anterior. Si nos olvidamos de las incógnitas y trabajamos solamente con las matrices aumentadas, el procedimiento fue el siguiente (note que cada flecha apunta a la fila donde se coloca el resultado de la operación):

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
F_2 - 2F_1 \to &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix} \\
F_2 \div 10 \to &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
F_1 + 3F_2 \to &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dimos el procedimiento por concluido cuando la matriz de coeficientes fue igual a I_2, la identidad de orden 2, y las soluciones estuvieron dadas por la última columna: $x = 3$, $y = -2$.

5.3 El método de Gauss-Jordan

Lo que hicimos en el ejemplo anterior fue tomar la matriz aumentada del sistema y reducir su parte de coeficientes (las dos primeras columnas) a la identidad. Esa es la idea central en el método de Gauss-Jordan: se empieza con la matriz aumentada de un sistema y se construye, columna por columna, la matriz identidad en la parte de coeficientes.

Gráficamente, el método puede describirse de la siguiente forma (donde los asteriscos representan números cualesquiera):

$$
\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}
$$

$$
\to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{pmatrix}
$$

La primera etapa es convertir la columna 1 en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; la segunda etapa, convertir la columna 2 en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, y así sucesivamente, columna por columna. En el Ejemplo 4, el primer paso convirtió la primera columna en $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ y los otros dos pasos convirtieron la segunda columna en $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Pero una cosa es saber qué hay que hacer (convertir la matriz de coeficientes en la identidad) y otra cosa es saber cómo se logra. Hay tres operaciones válidas entre las filas de la matriz aumentada. Que sean "válidas" significa que convierten el sistema de ecuaciones en otro sistema equivalente. La primera operación que usamos en el ejemplo fue restar a una fila (o ecuación) un múltiplo de otra, cuando cancelamos x. La segunda operación fue dividir una fila (o ecuación) por un escalar, al despejar y.

En el método de GJ, esas operaciones se usan para conseguir los unos y los ceros. Dividiendo una fila por el coeficiente de una incógnita en esa fila (como cuando dividimos F_2 por 10 porque el coeficiente de y en F_2 era 10) se obtiene un nuevo coeficiente de 1. Y sumando o restando a una fila un múltiplo de otra (como cuando restamos $2F_1$ de F_2 porque el coeficiente de x en F_2 era 2) se puede obtener un nuevo coeficiente de 0 (equivalentemente, eliminar una incógnita).

La tercera operación no se usa mucho, pero a veces saca de apuros y evidentemente es válida: se trata de intercambiar filas en la matriz (cambiar el orden de las ecuaciones no afecta la solución del sistema). En resumen, las tres operaciones válidas son las siguientes.

Operaciones válidas entre filas de la matriz aumentada

Para reducir la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, son válidas las tres operaciones siguientes entre filas de la matriz aumentada.

1. Multiplicar o dividir una fila por un escalar distinto de cero.
2. Sumar o restar un múltiplo de una fila a otra fila.
3. Intercambiar dos filas.

Método de Gauss-Jordan

En un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas[1], la matriz de coeficientes del sistema se reduce a la identidad en n etapas, en las que cada etapa j-ésima (para $j = 1, 2, \dots, n$) consiste en los dos siguientes pasos:

a. Convertir el elemento de la posición j, j en 1.

b. Convertir el resto de la columna j en ceros.

Normalmente se realiza la primera operación (multiplicar o dividir por un escalar) para el primer paso. Si F_j (la fila j-ésima) se divide entre el elemento en j, j entonces el nuevo elemento en esa posición será un 1. En el ejemplo anterior, cuando la segunda columna ($j = 2$) era $\begin{pmatrix} -3 \\ \mathbf{10} \end{pmatrix}$, dividimos F_2 por 10 porque ese era el valor en la posición $2, 2$; con eso la columna 2 se convirtió en $\begin{pmatrix} -3 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y así conseguimos el 1 en la posición $2, 2$.

Y para el segundo paso normalmente se realiza la segunda operación. Si a F_k (para $k \neq j$) se le resta F_j multiplicada por el elemento en k, j, entonces el nuevo valor en

[1] Luego veremos qué hacer si el número de ecuaciones es distinto al de incógnitas. Por ahora concentrémonos en el caso básico.

esa posición será 0. En el ejemplo, cuando la segunda columna ($j = 2$) era $\begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ 1 \end{pmatrix}$, conseguimos el 0 en F_1 ($k = 1$) sumando a F_1 la fila F_2 multiplicada por 3 (o lo que es lo mismo, restando F_2 multiplicada por -3). Y con eso la segunda columna se convirtió en $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$, como queríamos.

Parece abrumador al principio, pero luego de algunos ejemplos las ideas serán claras.

Algunos ejemplos

Ejemplo 5: el método de Gauss-Jordan

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 4z = 5 \\ z - 4x - 7y = 11 \\ 3y + z = -7 \end{cases}$. Lo primero es escribir la matriz aumentada, para lo cual hay que tener el cuidado de notar que en la primera ecuación falta y, en la segunda las incógnitas no están en orden, y en la tercera falta x. Habiendo notado eso, fácilmente escribimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 5 \\ -4 & -7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Como $n = 3$ (tres ecuaciones y tres incógnitas), el proceso consistirá en tres etapas, una para cada columna.

Etapa 1. Convertir la primera columna en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Los dos pasos en esta etapa son (a) obtener el uno en la posición $1,1$ y (b) obtener los ceros en el resto de la columna.

Paso a: convertir el valor 2 de la posición $1,1$ en un 1. Como dijimos, lo usual para el paso 1 es usar la primera operación, multiplicar o dividir la fila por un escalar. Como tenemos un 2 y queremos convertirlo en 1, lo natural es dividir su fila por 2:

$$F_1 \div 2 \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 5/2 \\ -4 & -7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso b: convertir el resto de la primera columna en ceros. Para esto se usa la segunda operación, sumar o restar a una fila un múltiplo de otra. F_3 ya tiene un cero en la columna 1; lo que falta es convertir el valor -4 de F_2 en un 0. Bastará con sumar 4, pero no la constante 4 sino el producto de 4 por F_1 (se puede sumar a una fila un múltiplo de otra, no un escalar solo):

$$F_2 + 4F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ \mathbf{0} & -7 & -7 & 21 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Lista la primera columna, terminamos con la Etapa 1.

Etapa 2. Convertir la segunda columna en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Paso a: convertir el -7 de la posición $2,2$ en un 1. Para eso se divide F_2 entre -7:

$$F_2 \div (-7) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso b: convertir el resto de la segunda columna en ceros. Ya hay un 0 en $1,2$; falta convertir en cero el valor 3 en $3,2$. Para convertir un 3 en 0 se le debe restar 3; más formalmente, a F_3 se le resta 3 por F_2:

$$F_3 - 3F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Etapa 3. Convertir la tercera columna en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Paso a: convertir el -2 de $3,3$ en un 1, dividiendo F_3 entre -2:

$$F_3 \div (-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

Paso b: convertir el resto de la tercera columna en ceros. Para cancelar el -2 de la posición $1,3$ debe sumársele 2; esto es, a F_1 debe sumársele $2F_3$. Y para cancelar el 1 de $2,3$, a F_2 debe restársele F_3:

$$\begin{matrix} F_1 + 2F_3 \to \\ F_2 - F_3 \to \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 1/2 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y con eso terminamos. La matriz de coeficientes ya es la identidad, y de inmediato podemos leer la solución: $x = 1/2$, $y = -2$ y $z = -1$.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x - 4z = 5 \\ z - 4x - 7y = 4 \\ 3y + z = -2. \end{cases}$ Solución: $x = -3/2$, $y = 0$, $z = -2$

En el paso b de la Etapa 3, para conseguir el 0 en $1,3$, parece que también podría hacerse F_1+2F_2. Pero esa operación echaría a perder la segunda columna, específicamente la posición $1,2$.

En general, para conseguir los ceros en la columna j, lo que se debe sumar a las filas correspondientes es múltiplos *de la fila* j, donde se acaba de poner el 1.

En todo el proceso del ejemplo anterior bastó con las dos primeras operaciones válidas: multiplicar o dividir una fila para conseguir los unos, y sumar o restar un múltiplo de otra fila para conseguir los ceros. ¿Y entonces para qué sirve la tercera operación, intercambiar filas?

Esa tercera operación está disponible como "de repuesto", para emergencias en las que no se puede dividir la fila j entre el elemento en j,j porque este es cero. Técnicamente, ese es el único caso en que la tercera operación es necesaria. Pero a veces resulta práctica para evitar fracciones u otras complicaciones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6: el método de Gauss-Jordan

Resolver el sistema $\begin{cases} b+1=0 \\ 3b+2c-2=0 \\ 3a+2c+9=0 \end{cases}$.

Note que las ecuaciones no están escritas en la forma necesaria para pasar a la matriz aumentada: el $+1$ en la primera ecuación, el -2 en la segunda y el $+9$ en la tercera no deberían estar a la izquierda de los respectivos signos de igual. Primero escribimos el sistema en la forma estándar:

$$\begin{cases} b=-1 \\ 3b+2c=2 \\ 3a+2c=-9 \end{cases}$$

y ahora escribimos la matriz aumentada,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Etapa 1. Para convertir en 1 el 0 que está en $1,1$ empezamos con problemas, porque habría que dividir $F_1 \div 0$. En casos como este se hace necesaria la tercera operación: otra forma de poner un 1 en $1,1$ es empezar por intercambiar las filas 1 y 3:

$$F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(también podría haber sido $F_1 + \frac{1}{3}F_3 \to F_1$, pero es más sencillo intercambiar filas, además de que así habrá ya un 0 en $3,3$), y luego dividir $F_1 \div 3$:

$$F_1 \div 3 \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2/3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los ceros en el resto de la columna 1 salen gratis.

Etapa 2. Para convertir en 1 el 3 que está en $2,2$, lo más ortodoxo sería dividir $F_2 \div 3$. Funciona, pero obtendríamos aún más fracciones. Es más fácil intercambiar F_2 y F_3:

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Y para convertir el resto de la columna 2 en ceros solo falta cancelar el 3 de $3,2$:

$$F_3 - 3F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Etapa 3. Primero convertir la posición $3,3$ en 1,

$$F_3 \div 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5/2 \end{pmatrix}$$

y después convertir $1,3$ en 0:

$$F_1 - \tfrac{2}{3}F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & -14/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución es $a = -14/3$, $b = -1$ y $c = 5/2$.

En la segunda etapa se pudo haber dividido $F_2 \div 3$, pero esta operación habría introducido varias fracciones en la matriz. Ya usted habrá notado que en las operaciones con filas es fácil cometer errores aritméticos con solo un pequeño descuido. Por eso, mientras se pueda, es preferible evitar las fracciones. Esto es especialmente recomendable cuando se trabaja con números complejos, como veremos en uno de los ejemplos siguientes.

Ejemplo 7: un sistema de ecuaciones con números complejos

En el Ejemplo 9 del Capítulo 1 (página 8) planteamos el sistema

$$\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w = 1 - 9\mathrm{i} \\ (2-\mathrm{i})\bar{z} + \bar{w} = 5 + 3\mathrm{i} \end{cases}$$

con incógnitas $z, w \in \mathbb{C}$, y lo convertimos en $\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w = 1 - 9\mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})z + w = 5 - 3\mathrm{i}. \end{cases}$

La matriz aumentada de este último es $\begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} & 1-9\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 1 & 5-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$, de modo que el método GJ procede así:

$$
\begin{aligned}
F_1 \div 3 &\to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathrm{i}/3 & 1/3 - 3\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 1 & 5-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
F_2 - (2+\mathrm{i})F_1 &\to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}/3 & 1/3 - 3\mathrm{i} \\ \mathbf{0} & (2+2\mathrm{i})/3 & (4+8\mathrm{i})/3 \end{pmatrix} \\
F_2 \div \big[(2+2\mathrm{i})/3\big] &\to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}/3 & 1/3 - 3\mathrm{i} \\ 0 & \mathbf{1} & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
F_1 + (\mathrm{i}/3)F_2 &\to \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & -2\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Resulta entonces, como ya vimos en la página 8, que $z = -2\mathrm{i}$ y $w = 3 + \mathrm{i}$.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} 3z + (\mathrm{i}-1)w = 5 - 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}z - w = 2\mathrm{i}. \end{cases}$ Solución: $z = 2 - \mathrm{i}$, $w = 1$

Ejemplo 8: otra opción para el sistema del ejemplo anterior

El sistema del ejercicio anterior puede resolverse también escribiendo $z = a + b\mathrm{i}$ y $w = c + d\mathrm{i}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La primera ecuación entonces dice

$$
\begin{aligned}
3(a + b\mathrm{i}) - \mathrm{i}(c + d\mathrm{i}) &= 1 - 9\mathrm{i} \\
3a + 3b\mathrm{i} - c\mathrm{i} - d\mathrm{i}^2 &= 1 - 9\mathrm{i} \\
(3a + d) + (3b - c)\mathrm{i} &= 1 - 9\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Y la segunda ecuación,

$$
\begin{aligned}
(2 - \mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) + c - d\mathrm{i} &= 5 + 3\mathrm{i} \\
2a - 2b\mathrm{i} - a\mathrm{i} + b\mathrm{i}^2 + c - d\mathrm{i} &= 5 + 3\mathrm{i} \\
(2a - b + c) - (a + 2b + d)\mathrm{i} &= 5 + 3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Igualando las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro, para cada ecuación por separado, tenemos

$$
\begin{cases}
3a + d = 1 \\
3b - c = -9 \\
2a - b + c = 5 \\
a + 2b + d = -3
\end{cases}
$$

La matriz aumentada de ese sistema es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Después de las operaciones $F_1 \leftrightarrow F_4$, $F_3 - 2F_1$ y $F_4 - 3F_1$ llegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Para la segunda columna hacemos $F_2 \div 3$, $F_1 - 2F_2$, $F_3 + 5F_2$ y $F_4 + 6F_2$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

En este momento podemos dividir $F_3 \div (-2/3)$, o aprovechando que todos los elementos en F_4 son pares, podemos también intercambiar las filas 3 y 4 para luego hacer $F_3 \div (-2)$, $F_1 - \frac{2}{3}F_3$, $F_2 + \frac{1}{3}F_3$ y $F_4 + \frac{2}{3}F_3$, y llegar a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Por último, las operaciones $F_4 \times (-\frac{3}{4})$, $F_1 - \frac{1}{3}F_4$, $F_2 - \frac{1}{3}F_4$ y $F_3 - F_4$ llevan al sistema resuelto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $a = 0$, $b = -2$, $c = 3$ y $d = 1$, por lo que las soluciones del sistema original son $z = a + b\mathrm{i} = -2\mathrm{i}$ y $w = c + d\mathrm{i} = 3 + \mathrm{i}$.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} 3z + (\mathrm{i} - 1)w = 5 - 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}z - w = 2\mathrm{i} \end{cases}$ escribiendo $z = a+b\mathrm{i}$ y $w = c+d\mathrm{i}$.

Solución: $z = 2 - \mathrm{i}$, $w = 1$

El último ejemplo ilustra lo laborioso que es resolver a mano un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. En el Ejemplo 18 (página 102) veremos un método alterno, usando una calculadora.

Casos especiales

Ya tenemos claro cómo funciona el método de GJ para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, en caso de que exista una única solución. Pero algunos sistemas tienen infinitas soluciones, otros no tienen ninguna, y también algunos sistemas tienen distintos números de ecuaciones y de incógnitas. En estos casos el método de GJ puede usarse solamente hasta cierto punto, como veremos en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 9: un sistema con infinitas soluciones

Al resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ empezamos por notar que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. En esos casos lo más común es que el sistema tenga infinitas soluciones. El método de GJ va así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ \mathbf{0} & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_1 + 2F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hasta aquí terminamos con las dos primeras columnas. ¿Y la tercera? ¡No hay dónde poner el 1 para luego conseguir los ceros! GJ llega hasta aquí, y ahora tenemos que "bajarnos y seguir a pie".

La última matriz que obtuvimos representa el sistema $\begin{cases} x + 5z = 7 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$ del cual podemos fácilmente despejar x en la primera ecuación y y en la segunda:

$$\begin{cases} x = 7 - 5z \\ y = 2 - 3z \end{cases}$$

Pero no hay una tercera fila de la cual pueda despejarse z. Esto es normal: de dos ecuaciones podemos esperar despejar a lo sumo dos incógnitas. Y la tercera, z en este caso, queda indeterminada. Eso no significa que no exista, sino solamente que no se sabe cuánto es. En realidad z podría ser cualquier número, y cada valor de z da una solución distinta para x y y según las ecuaciones de arriba, $x = 7 - 5z$ y $y = 2 - 3z$.

Por ejemplo, si $z = 0$ deben ser $x = 7$ y $y = 2$. En efecto, $x = 7$, $y = 2$ y $z = 0$ es una solución del sistema original, como puede comprobarse fácilmente sustituyendo.

Y si fuera $z = -8$, los valores de x y y serían $x = 7 - 5(-8) = 47$ y $y = 2 - 3(-8) = 26$. La solución completa es $x = 47$, $y = 26$, $z = -8$.

Los valores que usamos para z son solo dos posibilidades. Pero como vemos, hay infinitas soluciones: una para cada valor de z (una solución es un valor para cada incógnita; por ejemplo, $x = 47$, $y = 26$ y $z = -8$ es *una* solución, no tres). La solución general se expresa como ya hicimos, dando x y y en términos de z:

$$\begin{cases} x = 7 - 5z \\ y = 2 - 3z \end{cases}$$

Ejemplo 10: un sistema con infinitas soluciones

Para resolver $\begin{cases} a + 3b - 2c = 3 \\ 2a + 6b = 2 \end{cases}$, Gauss-Jordan procede así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - 2F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ \mathbf{0} & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

La primera columna está lista, pero no hay forma de completar la segunda etapa: convertir la columna 2 en $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, porque es imposible poner un 1 en la posición $2, 2$ sin estropear la primera columna.

Cuando eso sucede, simplemente nos damos por vencidos con la columna imposible y pasamos a la siguiente[2]. Aquí, abandonamos la columna 2 y nos dedicamos a convertir la columna 3 en $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

En este ejemplo, la segunda etapa consistirá en poner un 1 en $2, 3$ y un 0 en $1, 3$:

$$F_2 \div 4 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 + 2F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema es $\begin{cases} a + 3b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$ y de él despejamos no a y b sino a y c:

$$\begin{cases} a = 1 - 3b \\ c = -1 \end{cases}$$

Esa es la solución general. Algunas soluciones particulares son (asignando un valor cualquiera a b, calculando $a = 1 - 3b$, y manteniendo siempre $c = -1$): $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, o bien $a = -2$, $b = 1$, $c = -1$, o también $a = 1 + 3\mathrm{i}$, $b = -\mathrm{i}$, $c = -1$.

[2] Si la columna j no se puede convertir y pasamos a la siguiente, entonces la columna $j + 1$ debe convertirse en lo que la columna j habría sido.

Repaso

Encuentre la solución general de $\begin{cases} a+3b-2c=-1 \\ 2a+6b=6. \end{cases}$

Solución: $a=-3b+3$, $c=2$

En los dos ejemplos anteriores el método de GJ no pudo completarse hasta conseguir una única solución porque no había suficientes filas en la matriz. Eso significará, en general, que no se podrán convertir (en uno y ceros) todas las columnas de la matriz de coeficientes. Las que sí puedan convertirse corresponden a las incógnitas que se podrán despejar (la primera y la segunda en el Ejemplo 9; la primera y la tercera en el Ejemplo 10), y las que no se puedan convertir corresponden a incógnitas "libres", cuyo valor es indeterminado.

Otra razón por la que GJ podría no llegar a buen término es que, independientemente de que haya suficientes ecuaciones o no, sea imposible conseguir el 1 en el lugar apropiado al inicio de una etapa. Esto puede tener distintos significados, como veremos.

Ejemplo 11: un sistema sin solución

Resolver $\begin{cases} 12y-3x=1 \\ x-4y=5. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -4 & 5 \\ -3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2+3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Ahora es imposible poner el 1 en la posición $2,2$, y tampoco hay más columnas para seguir hacia la derecha (la última columna no cuenta porque no es parte de la matriz de coeficientes). Hasta aquí llega GJ, así que "seguimos a pie".

La última matriz representa el sistema

$$\begin{cases} x-4y=5 \\ 0=16 \end{cases}$$

pero note la segunda ecuación, $0=16$. Esta es una igualdad falsa, independientemente de los valores de x y y. No es posible encontrar valores de las incógnitas que hagan ciertas todas las ecuaciones en el sistema (siempre fallará la segunda). La conclusión es que el sistema no tiene solución.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} 6p-9q=1 \\ 15q-10p=5. \end{cases}$

Solución: No tiene solución

Ejemplo 12: un sistema con infinitas soluciones

Resolver $\begin{cases} 12y - 3x = -15 \\ x - 4y = 5. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -15 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -4 & 5 \\ -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$F_2 + 3F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema ahora es $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$ y la última ecuación no causa ningún problema: $0 = 0$ siempre, independientemente de los valores de x y y. Eso significa que esta ecuación no aporta ninguna información sobre las incógnitas, y podemos descartarla y quedarnos con el resto del sistema (una ecuación con dos incógnitas): $x - 4y = 5$. Como hemos visto, de aquí puede despejarse $x = 5 + 4y$, y y es una incógnita "libre". Hay entonces infinitas soluciones, una para cada valor de y. La solución general es

$$x = 5 + 4y$$

Algunas soluciones particulares son $x = 5$, $y = 0$, o bien $x = 1$, $y = -1$, o también $x = 1 + 8\mathrm{i}$, $y = 2\mathrm{i} - 1$, etc.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} 6p - 9q = -3 \\ 15q - 10p = 5. \end{cases}$ Solución: $p = (3q - 1)/2$

En los sistemas con infinitas soluciones también es común usar otra notación para las soluciones, asignando a cada incógnita libre (es decir, que no está determinada en la solución) el valor de una nueva variable, para lo cual se acostumbra usar las letras t, s, etc, representando cualquier número real o complejo. En el Ejemplo 9 la incógnita z quedó sin determinar, así que se le puede asignar el valor de otra variable t y la solución puede escribirse como

$$\begin{cases} x = 7 - 5t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{C}.$$

En el Ejemplo 10, puede denotarse

$$\begin{cases} a = 1 - 3t \\ b = t \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{C}.$$

Y en el Ejemplo 12,

$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios

16. Use el método de Gauss-Jordan para resolver los sistemas planteados en los Ejercicios 1–7 (página 79).

17. Use el método de Gauss-Jordan para resolver los sistemas planteados en los Ejercicios 25–28 del Capítulo 1 (página 9).

18. Use el método de Gauss-Jordan para resolver los sistemas planteados en los Ejercicios 8–15 (página 79). Si hay infinitas soluciones, dé al menos dos particulares.

19. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Demuestre que si $ad - bc \neq 0$ entonces el sistema lineal $A \cdot X = 0$ tiene solo la solución nula o trivial ($x = y = 0$).

5.4 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

Muchos problemas aplicados pueden resolverse con sistemas de ecuaciones. Para plantear un sistema de ecuaciones que permita resolver un problema, empiece por definir las incógnitas, incluyendo las unidades de medida si las hay (metros, gramos, horas, etc). Luego escriba las ecuaciones, una para cada restricción, requisito u objetivo.

Ejemplo 13: una aplicación de sistemas de ecuaciones

Volviendo a la fábrica de ropa, supongamos que tienen un sobrante de 150 broches y 70 cremalleras que desean gastar. ¿Cuántos maletines y cuántos pantalones pueden hacer con ellos, y cuántos metros de tela necesitarán?

Las incógnitas son el número de maletines y el número de pantalones; las denotaremos m y p respectivamente, en unidades.

El objetivo es consumir los 150 broches y las 70 cremalleras. Habrá entonces una ecuación para los broches, que diga que el total de broches necesarios para m maletines y p pantalones sea igual a 150. Y habrá otra ecuación que diga que el total de cremalleras necesarias sea igual a 70.

Recordando la matriz de materiales,

$$M = \begin{array}{c} \\ \text{mlt} \\ \text{pnt} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{tela} & \text{brch} & \text{crem} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

vemos que el número de broches necesarios para m maletines y p pantalones es $8m + 2p$, y que el número de cremalleras necesarias es $3m + p$. Para gastar las existencias, el primer número debe ser 150 y el segundo 70; ese es nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8m + 2p = 150 \\ 3m + p = 70 \end{cases}$$

La matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 150 \\ 3 & 1 & 70 \end{pmatrix}$, y la solución procede así:

$$\begin{aligned}
F_1 \div 8 &\to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1/4 & 75/4 \\ 3 & 1 & 70 \end{pmatrix} \\
F_2 - 3F_1 &\to \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 75/4 \\ \mathbf{0} & 1/4 & 55/4 \end{pmatrix} \\
F_2 \times 4 &\to \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 75/4 \\ 0 & \mathbf{1} & 55 \end{pmatrix} \\
F_1 - \tfrac{1}{4}F_2 &\to \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & 1 & 55 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solución es entonces $m = 5$ maletines y $p = 55$ pantalones. La cantidad de tela necesaria será $1.5m + 2p = 1.5(5) + 2(55) = 117.5$ metros.

Repaso

¿Cuántos maletines y cuántos pantalones se pueden hacer con 100 broches y 40 cremalleras? Solución: diez de cada uno

Ejemplo 14: encontrar la ecuación de una parábola

La función dada por $g(t) = at^2 + bt + c$ toma los valores $g(-1) = 7$, $g(1) = 1$ y $g(2) = 4$. Encontrar los valores de a, b y c.

Las incógnitas ya están definidas: son los coeficientes a, b y c.

Los requisitos son tres, uno por cada valor especificado de g. Entonces habrá una ecuación por cada punto: si $g(-1) = 7$ entonces $a(-1)^2 + b(-1) + c = 7$ (por la definición de $g(t) = at^2 + bt + c$). Similarmente, $a(1)^2 + b(1) + c = 1$ y $a(2)^2 + b(2) + c = 4$.

Entonces el sistema es

$$\begin{cases} a - b + c = 7 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 2$, $b = -3$ y $c = 2$.

Repaso

Encuentre los valores de a, b y c en $h(t) = at^2+bt+c$, sabiendo que $h(-1) = -4$, $h(1) = 2$ y $h(2) = 2$. Solución: $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$.

Problemas sobre mezclas

En los problemas acerca de mezclas hay usualmente varias sustancias, cada una con cierta concentración de uno o algunos ingredientes. Las sustancias se mezclan para obtener un total de mezcla con alguna concentración dada del ingrediente.

Es común que una de las ecuaciones se refiera a la cantidad total de mezcla y que las otras ecuaciones describan la cantidad total de los ingredientes.

Una variación de esto son los problemas sobre intereses financieros, donde cada "sustancia" es una inversión de dinero y el "ingrediente" es el interés que la inversión gana.

Ejemplo 15: un problema de mezclas

Cierto medicamento viene en dos presentaciones líquidas. En la marca B el ingrediente activo tiene una concentración de 2%, y en la marca T la concentración es de 5%. Se desea mezclar las dos presentaciones para obtener 25 ml del medicamento con una concentración de 3%. ¿Cuántos mililitros de cada marca se deben mezclar?

Por la pregunta deducimos cuáles son las incógnitas: b y t los números de mililitros de las marcas B y T respectivamente.

La primera ecuación es sencilla y se refiere a la cantidad total de medicamento: para obtener 25 ml se necesita que $b + t = 25$.

Para la segunda ecuación consideremos la cantidad total del ingrediente activo. En los b mililitros de la marca B hay un 2% del ingrediente: 2% de b, y en los t de la marca T hay un 5% del ingrediente: 5% de t. Esas cantidades sumadas deben dar en total un 3% de 25:

$$0.02b + 0.05t = 0.03(25)$$

El sistema de ecuaciones es entonces

$$\begin{cases} b + t = 25 \\ 0.02b + 0.05t = 0.03(25) \end{cases}$$

y la solución es $b = 16.\bar{6}$ y $t = 8.\bar{3}$.

Por lo tanto se necesita mezclar $16.\bar{6}$ ml de B con $8.\bar{3}$ ml de T.

Repaso

En el ejemplo anterior, ¿cuántos mililitros de cada marca hay que mezclar para obtener 12 ml con una concentración de 4%?

Solución: 4 ml de B y 8 ml de T

Problemas acerca de velocidades

Para resolver problemas que combinan distintos viajes a distintas velocidades, recordemos que en movimiento uniforme, la velocidad promedio es

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

de donde se despeja

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}.$$

Esta última forma es a veces más conveniente porque no involucra divisiones.

Ejemplo 16: un problema de velocidades

Un avión puede volar a 400 km/h si no hay viento. En cierto viaje de ida, con viento de frente, el avión tardó 54 minutos. De regreso, con viento a la misma velocidad pero en la cola, el vuelo tardó 49 minutos. ¿Cuál es la velocidad del viento, y cuál fue la distancia de cada viaje?

Las incógnitas están indicadas por la pregunta: v la velocidad del viento en km/h y d la distancia de cada viaje, en kilómetros.

Las ecuaciones vienen una de cada viaje. En el viaje de ida la velocidad neta del avión es $(400 - v)$ km/h (porque el viento le resta velocidad al avión), y el tiempo en horas es 54/60. Entonces la fórmula de distancia da la primera ecuación,

$$d = (400 - v) \cdot \frac{54}{60}$$

En el viaje de regreso, con el viento a favor, obtenemos la segunda ecuación,

$$d = (400 + v) \cdot \frac{49}{60}$$

Podemos organizar las dos ecuaciones de esta forma (empezando por multiplicar por 60):

$$\begin{cases} 60d = 54(400 - v) \\ 60d = 49(400 + v) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 60d + 54v = 21600 \\ 60d - 49v = 19600 \end{cases}$$

La solución es $d = 342.524$ y $v = 19.4175$. Entonces la velocidad del viento es de 19.4175 km/h, y la distancia de cada viaje es 342.524 km.

Repaso

Si el mismo avión del ejemplo anterior hace un viaje de ida con viento a favor en dos horas y de regreso con viento en contra en dos horas y media, ¿cuál es la velocidad del viento y cuál es la distancia de cada viaje?

Solución: $44.\bar{4}$ km/h, $888.\bar{8}$ km

Problemas acerca de trabajo compartido

Los problemas de trabajo compartido son problemas en los que hay varios agentes que pueden compartir un trabajo y generalmente trabajan con distinta rapidez. Estos problemas se parecen mucho a los de velocidades. De hecho, son acerca de la velocidad a la que cada agente trabaja. En el ejemplo siguiente, la velocidad del pintor es de $1/x$ y la de cada ayudante es de $1/y$, ambas en unidades de "techos por hora".

Ejemplo 17: un problema de trabajo compartido

Un pintor tiene dos ayudantes. Los dos ayudantes son igual de eficientes, pero el pintor trabaja más rápido que cualquiera de ellos.

El pintor y uno de sus ayudantes pueden pintar un techo en cuatro horas. Si trabajan el pintor y los dos ayudantes, pueden completar el trabajo en tres horas. ¿Cuánto tardaría en pintar el techo el pintor solo, y cuánto tardaría cada uno de los ayudantes solo?

Como de costumbre, la pregunta implica las incógnitas. Sean x el número de horas que tardaría el pintor solo, y y el número de horas que tardaría uno cualquiera de los ayudantes.

Note que en una hora el pintor pinta una fracción $1/x$ del techo, y cada ayudante pinta $1/y$ del techo.

Cuando trabajan el pintor y uno de sus ayudantes, suceden dos cosas. En primer lugar, juntos pintan $1/x + 1/y$ del techo en una hora. Y en segundo, como tardan cuatro horas para pintar todo el techo, en una hora pintan $1/4$ del techo. Eso significa que la cantidad de trabajo que hacen en una hora, como fracción del trabajo total, es

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

Por otro lado, cuando trabajan los tres juntos logran pintar $1/x + 1/y + 1/y$ del techo, lo cual equivale a $1/3$ porque tardarán tres horas en completar el trabajo. Entonces

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$$

Este sistema no es lineal, pero si cambiamos las incógnitas a $x_1 = 1/x$ y $y_1 = 1/y$, las velocidades de trabajo, entonces tendremos

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 1/4 \\ x_1 + 2y_1 = 1/3 \end{cases}$$

que sí es lineal, y tiene por solución $x_1 = 1/6$ y $y_1 = 1/12$.

De aquí obtenemos que $x = 6$ y $y = 12$. Es decir, el pintor tardaría seis horas trabajando solo, y cada uno de sus ayudantes tardaría doce horas trabajando solo.

Repaso

Otro pintor tiene tres ayudantes que trabajan a la misma velocidad entre los tres, pero no más rápido que el pintor. El pintor con dos ayudantes tarda cuatro horas en pintar un techo, y los tres ayudantes juntos, pero sin el pintor, tardan cinco horas. ¿Cuánto tarda el pintor solo, y cuánto tarda cada ayudante?

Solución: 8.57 horas, 15 horas

Ejercicios

20. Un teléfono público recibe monedas de ₡10 y ₡20. Si contiene 43 monedas que valen ₡570 en total, ¿cuántas monedas de cada valor hay en el teléfono?

21. Un grupo de siete personas paga un total de ₡5400 para entrar en un parque. Un tiquete de adulto cuesta ₡1000, y uno de niño cuesta ₡600. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el grupo?

22. En una granja hay dieciocho animales, entre gallinas y cerdos. En total hay 46 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos hay en la granja?

23. Una fábrica de muebles produce sillas y mesas. Construir una silla toma dos horas y cuesta ₡20 000, mientras que cada mesa se construye en cinco horas y cuesta ₡48 000. La fábrica dispone de 345 horas de trabajo y puede pagar ₡3 344 000 por semana. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas pueden producir semanalmente?

24. El administrador de un parque hizo dos pedidos a un vivero. El primero fue por doce arbustos y cinco árboles, por un total de ₡269 000. El segundo fue por siete arbustos y seis árboles, y costó ₡234 000. ¿Cuánto cuestan cada arbusto y cada árbol?

25. Un administrador se dispone a realizar un estudio de mercadeo. Planea hacer una encuesta con 600 llamadas telefónicas y 400 visitas a domicilio. La compañía encuestadora A tiene personal para llevar a cabo 30 llamadas y 10 visitas por hora. La compañía B puede encargarse de 20 llamadas y 20 visitas por hora. ¿Cuántas horas debe contratarse a cada compañía para producir exactamente el número de llamadas y visitas planeadas?

26. La litografía EPC tiene dos tipos de imprentas: las imprentas modelo A pueden imprimir 70 libros por día, y las modelo B pueden imprimir 55 libros por día. Si la litografía tiene catorce imprentas y puede imprimir 905 libros por día, ¿cuántas imprentas de cada tipo tiene?

27. Una fábrica de automóviles produce los modelos P y S. El modelo P requiere una hora de pintura y treinta minutos de pulido. El modelo S, una hora de pintura y una de pulido. Si se dispone de cien horas de pintura y ochenta horas de pulido por semana, ¿cuántos automóviles de cada modelo se pueden producir cada semana?

28. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡2400 el kilo, con pasas, que cuestan ₡5600 el kilo. Desea obtener 25 kilos de una mezcla con un costo de ₡3232 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces y cuántos kilos de pasas debe mezclar?

29. Un millonario invirtió \$ 60 000 en dos fondos que pagan tasas de interés anual simple de 9% y 10.5%, respectivamente. Si cada año recibe \$ 5745 en intereses, ¿cuánto invirtió en cada fondo?

30. Un grupo de animales en un experimento se somete a una dieta estricta. Entre otras cosas, cada animal debe recibir 20 gramos de proteína y 6 gramos de grasa. El administrador del laboratorio puede conseguir dos tipos de alimento con las siguientes composiciones: el tipo A tiene 10% proteína y 6% grasa, y el tipo B tiene 20% proteína y 2% grasa. ¿Cuántos gramos de cada tipo de alimento deben usarse para obtener la dieta correcta de un animal?

31. Una tienda se dedica a preparar mezclas de café para turistas. El dueño prepara bolsas de medio kilo usando café de Colombia, Costa Rica y Java. El costo por kilo de estos cafés es ₡4800, ₡3600 y ₡3000, respectivamente. Cada paquete tiene un costo total de ₡1884. Si se incluyen 100 gramos de café de Java en cada bolsa, ¿cuántos gramos de café de Colombia y cuántos de Costa Rica se necesitan para completar el paquete?

32. Se dispone de dos soluciones de alcohol, una al 20% y la otra al 50%. Se desea mezclarlas para obtener nueve litros de una solución de alcohol al 30%. ¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar?

33. Los puntos A y B se encuentran a 500 km de distancia entre ellos. Un avión vuela de A a B, con viento a favor, en 1.6 horas. El regreso de B a A, con viento en contra, le toma 1.8 horas. ¿Cuál sería la velocidad del avión sin viento, y cuál es la velocidad del viento?

34. Un bote navegó desde un punto P hasta otro punto Q, río abajo, y de regreso. El tiempo total de viaje fue de 4 horas. La velocidad del bote en aguas tranquilas es de 25 km/h, y la velocidad de la corriente río abajo es 4 km/h. ¿Cuál es la distancia de P a Q?

35. Una fábrica de productos lácteos produce helado regular y helado especial en dos plantas. La planta en Alajuela produce dos barriles de helado regular y un barril de helado especial por cada hora de operación. La planta en Curridabat produce tres barriles de regular y dos barriles de especial por hora de operación. Cuesta ₡20 000 por hora operar la planta en Alajuela, y ₡24 000 por hora operar la planta en Curridabat.

La compañía necesita producir 46 barriles de regular y 27 barriles de especial por día, y dispone de un máximo de ₡420 000 diarios para la operación de sus plantas. ¿Cuántas horas al día debe operar cada planta para satisfacer los requisitos de producción sin exceder el presupuesto disponible?

36. La suma de tres números es 15. El mayor es igual a cuatro veces el menor, y el del medio es igual al promedio de los otros dos. ¿Cuáles son los números?

37. Encuentre la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(-1,-5)$, $(2,1)$ y $(3,-9)$.

38. Encuentre la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por $(-2,-9)$ y $(2,7)$, y que alcanza su vértice en $x = 1$.

39. Un inversionista tiene un total de ₡1 600 000 invertidos en tres cuentas que pagan 5%, 7% y 8% de interés anual respectivamente. El monto invertido al 8% es el triple del monto al 5%. El total de interés que recibe en un año es ₡115 000. ¿Cuánto dinero tiene en cada cuenta?

40. Parte de la lista de ingredientes requeridos para tres recetas de postre se da en la tabla siguiente.

	Azúcar (tazas)	Huevos (unidades)	Leche (litros)	Número de porciones
Pastel de manzana	3	2	1	6
Queque de banano	2	5	2	8
Rosquete borracho	2	4	2	10

Hay quince tazas de azúcar, dos docenas de huevos y once litros de leche disponibles. Suponiendo que no hay problema para conseguir los demás ingredientes (manzanas, bananos, ron, etc.), ¿cuántas porciones de cada tipo de postre pueden hacerse para usar todo el azúcar, todos los huevos y toda la leche?

41. Un proveedor de productos para el campo tiene tres tipos de fertilizantes, A, B y C, que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. Se planea mezclarlos para obtener 300 kg de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 25%. La mezcla debe contener 50 kg más del tipo C que del tipo B. ¿Cuántos kilos de cada tipo deben usarse?

42. Si Carlos, Gabriela y Martín hacen juntos un trabajo, lo terminarán en 85 minutos. Si lo hacen Carlos y Gabriela solos, les tomará 120 minutos. Y si lo hacen Gabriela y Martín solos, les tomará 140 minutos. ¿Cuánto tardaría cada uno de ellos, trabajando solo, en hacer todo el trabajo?

43. Pueden usarse tres tuberías para llenar una piscina. La tubería A tarda ocho horas en llenar la piscina. Las tuberías A y C, trabajando simultáneamente, la llenan en seis horas. Si se usan B y C juntas, el tiempo de llenado es diez horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la piscina si se usan las tres tuberías?

44. Una población de 35 000 aves vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla Geranio vuela a la isla Gladiola; 20% de la población de Gladiola vuela a la isla Girasol, y 5% de la población de Girasol vuela a Geranio. A pesar de esas migraciones, la población de cada isla es estable de un año a otro. ¿Cuántas aves viven en cada isla?

45. En un triángulo, el ángulo mayor mide el doble de la suma de los otros dos. ¿Cuánto mide el ángulo mayor? ¿Cuánto miden los otros dos?

46. Una persona debe consumir diariamente 24 unidades de vitamina B y 18 de vitamina C. Las pastillas marca X cuestan ₡600 y contienen 8 unidades de vitamina B y 6 de C. Las pastillas Y cuestan ₡400 y contienen 4 unidades de B y 3 de C. ¿Cuántas pastillas de cada marca pueden comprarse con ₡2000 al día, que satisfagan los requisitos de vitaminas?

47. Una persona debe consumir diariamente 24 unidades de vitamina B y 18 de vitamina C. Las pastillas marca X cuestan ₡600 y contienen 8 unidades de vitamina B y 5 de C. Las pastillas Y cuestan ₡400 y contienen 4 unidades de B y 3 de C. ¿Cuántas pastillas de cada marca pueden comprarse con ₡2000 al día, que satisfagan los requisitos de vitaminas?

48. Los puntos A y B se encuentran a 300 km de distancia. Un helicóptero tiene una velocidad de 200 km/h cuando no hay viento. Un día en que el viento soplaba en dirección de B a A, el helicóptero hizo el viaje de A a B y de regreso en un total de 3.01 horas. ¿Cuál era la velocidad del viento, y cuánto tardó cada parte del viaje?

5.5 Solución de sistemas con calculadora

Es muy probable que su calculadora pueda resolver sistemas de hasta tres ecuaciones con tres incógnitas. No vamos a cubrir el uso de la calculadora para resolver sistemas de ese tamaño; más bien vamos a ver cómo pueden resolverse sistemas más grandes con ayuda de la calculadora.

La idea general consiste en usar el método GJ para reducir el sistema a uno más pequeño, que la calculadora sí pueda resolver. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

Ejemplo 18: solución de un sistema con ayuda de la calculadora

Recuerde el sistema del Ejemplo 8, página 88:

$$\begin{cases} 3a + d = 1 \\ 3b - c = -9 \\ 2a - b + c = 5 \\ a + 2b + d = -3 \end{cases}$$

Después de trabajar la primera columna habíamos obtenido la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

En este momento note que las filas 2, 3 y 4 dan el subsistema

$$\begin{cases} 3b - c = -9 \\ -5b + c - 2d = 11 \\ -6b - 2d = 10 \end{cases}$$

que, gracias a los ceros en la primera columna, contiene solamente tres incógnitas. ¡Un sistema de solo tres ecuaciones con tres incógnitas! Este fácilmente se resuelve en una calculadora, y su solución es $b = -2$, $c = 3$ y $d = 1$. Con esto ya tenemos tres de las cuatro incógnitas.

La que falta, a, la averiguamos de la primera fila de la matriz. Esa primera fila de la matriz dice que $a + 2b + d = -3$, de donde podemos despejar

$$a = -3 - 2b - d = -3 - 2(-2) - (1) = 0$$

Con eso el sistema está completamente resuelto[3].

Repaso

Resuelva el sistema $\{\, 3a + d = 4,\ 3b - c = 1,\ 2a - b + c = -1,\ a + 2b + d = 0 \,\}$.

Solución: $a = 1$, $b = -1$, $c = -4$, $d = 1$

Ejemplo 19: solución de un sistema con ayuda de la calculadora

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} t_1 - t_2 - t_4 + 2t_5 = 2 \\ -5t_3 + 2t_5 = -8 \\ 2t_2 - 4t_3 + t_4 - 2t_5 = -11 \\ -t_1 + 3t_2 - t_3 - t_5 = -6 \\ -2t_1 + 2t_3 + t_5 = 5 \end{cases}$$

procedemos como en el ejemplo anterior, pero necesitamos reducir dos columnas antes de pasar a la calculadora:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & -11 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Antes de reducir la *segunda* columna, repasemos el objetivo. Estamos reduciendo un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas a uno de tres ecuaciones con tres incógnitas. Tenemos libertad para escoger las ecuaciones y las incógnitas, lo cual se traduce en libertad para escoger cuáles dos columnas

[3] Otra opción era despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones. También así se consigue un nuevo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, para cedérselo a la calculadora.

reducir. En este momento se ve más fácil reducir la cuarta columna, alrededor del 1 en la fila 3:

$$\begin{array}{r} \\ F_1+F_3\to \\ \\ F_4+F_3\to \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & -1 & -15 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Todo lo anterior fue equivalente a despejar t_1 de la primera ecuación y t_4 de la tercera, y sustituirlos en las ecuaciones restantes. Esas ecuaciones restantes, que corresponden a las filas 2, 4 y 5, son

$$\begin{cases} -5t_3+2t_5=-8 \\ 4t_2-5t_3-t_5=-15 \\ -2t_2+2t_3+5t_5=11 \end{cases}$$

Con una calculadora resolvemos este sistema y obtenemos $t_2=-1$, $t_3=2$ y $t_5=1$.

Para terminar, despejamos t_1 en la primera ecuación y t_4 en la tercera:

$$\begin{aligned} t_1+t_2-4t_3=-9 \quad &\Rightarrow \quad t_1=-9-t_2+4t_3=0 \\ 2t_2-4t_3+t_4-2t_5=-11 \quad &\Rightarrow \quad t_4=-11-2t_2+4t_3+2t_5=1 \end{aligned}$$

La solución completa es entonces $t_1=0$, $t_2=-1$, $t_3=2$, $t_4=1$ y $t_5=1$.

Ejercicios

Use una calculadora para ayudarse en la resolución de cada sistema.

49. $\begin{cases} -a-3b+5c-3d=-14 \\ a+3b+5c-4d=6 \\ 4a-b+3c-5d=-31 \\ 5a+2b-4c+3d=-1 \end{cases}$

50. $\begin{cases} -3w-3x-y-5z=-7 \\ -2w-2x-4y+z=12 \\ w+3x-4y=30 \\ 4w-x+2y+4z=-9 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2p-2q-4r+s+3t=23 \\ -2p+2q-r+5t=7 \\ -2p+5q+2r+s+2t=3 \\ -4p+2q-5r-s+2t=10 \\ -2p+5q+4r+s+5t=-2 \end{cases}$

52. $\begin{cases} -r-4s+u+3v=-16 \\ -3r+4s-t-u+v=-3 \\ -2r+3s-u-5v=22 \\ -5r+s+2t-3u-5v=16 \\ 4r-2s+5t-3u+v=-5 \end{cases}$

53. Resuelva los sistemas planteados en los Ejercicios 25–28 del Capítulo 1 (página 9), esta vez convirtiendo cada incógnita compleja en dos incógnitas reales y ayudándose con una calculadora.

En resumen. . .

- La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales tiene una fila por cada ecuación y una columna por cada incógnita, y contiene los coeficientes de cada incógnita en cada ecuación.

- La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales contiene a la matriz de coeficientes, aumentada con una columna adicional con las constantes al lado derecho de cada signo de igualdad (entendiendo que las incógnitas están a la izquierda y las constantes a la derecha).

- El método de Gauss-Jordan toma una matriz aumentada y convierte la parte de coeficientes en la matriz identidad, avanzando por columnas de izquierda a derecha. Las operaciones válidas son: multiplicar una fila por un número distinto de cero, sumar a una fila un múltiplo de otra fila, e intercambiar dos filas. Al terminar, la solución se encontrará en la última columna.

- Si el método de Gauss-Jordan no puede llegar a su objetivo, es posible que el sistema tenga infinitas soluciones o que no tenga ninguna solución.

- Si un sistema de ecuaciones lineales contiene más de tres ecuaciones y tres incógnitas, y tiene solución única, entonces es posible adaptar el método de Gauss-Jordan para reducir el sistema a tres ecuaciones con tres incógnitas para resolverlo con calculadora.

Capítulo 6

Inversa de una matriz

6.1 Matrices inversas

Recuerde que la matriz identidad, I_n, tiene la propiedad de que $I_n \cdot A = A$ y $B \cdot I_n = B$ para cualquier matriz $A_{n\times p}$ y cualquier $B_{m\times n}$. Esto es análogo al número 1, que cumple $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por eso se dice que la matriz identidad es el elemento neutro para el producto de matrices.

Por otra parte, así como muchos números $a \in \mathbb{R}$ tienen un recíproco a^{-1} que cumple $a \cdot a^{-1} = 1$ y $a^{-1} \cdot a = 1$, también muchas matrices A tienen una inversa A^{-1} que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Definición (matriz inversa)

Si A y B son matrices tales que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (para algún n) entonces A y B son *inversas* una de la otra, y se escribe $B = A^{-1}$ o $A = B^{-1}$.

Si una matriz tiene inversa, se dice que es *invertible*.

Ejemplo 1: dos matrices inversas

Las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ son inversas, porque

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

y también

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Entonces escribimos $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Repaso

Determine si las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3.5 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 1.75 & -0.5 \\ -2.5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ son inversas. Solución: Sí

No todos los números reales tienen un recíproco: el número 0 es una excepción (la única). Pero sí hay muchas matrices que no tienen inversa. En primer lugar, *solo las matrices cuadradas pueden ser invertibles*, porque si A es una matriz invertible de tamaño $m \times n$ entonces para que $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$ estén definidas y sean iguales entre sí, es necesario que $m = n$.

Además, si una matriz tiene inversa, esa inversa es única; en otras palabras, una matriz no puede tener dos inversas distintas. Para comprobar eso, supongamos que B_1 y B_2 son ambas inversas de A. Entonces $A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = I$, de donde deducimos que

$$B_1 = B_1 \cdot I = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = I \cdot B_2 = B_2$$

En resumen, $B_1 = B_2$, así que dos inversas cualesquiera no son distintas sino siempre la misma.

Consecuencia de lo anterior es que, si A es invertible y $A \cdot B = I$, entonces debe ser $B = A^{-1}$. Eso es porque

$$B = I \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$$

Por eso no es necesario comprobar que *ambos* productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ sean iguales a I: con uno de ellos basta.

Ejercicios

Compruebe que las matrices de cada par son inversas entre sí.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 1 & -2/c \end{pmatrix}$ si $c \neq 0$

3. $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} & -1 \\ 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -8 & -4 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.2 Cálculo de la matriz inversa

Como acabamos de ver, dadas dos matrices es fácil comprobar si son o no inversas: su producto, en cualquier orden, debe ser igual a la identidad. Lo que no es tan fácil es encontrar la inversa de una matriz dada. Antes de ver el método general, considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: encontrar una inversa usando la definición

Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Suponiendo que B es invertible, denotemos su inversa

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x & p \\ y & q \end{pmatrix}$$

donde x, y, p y q son números por determinar.

La condición $B \cdot B^{-1} = I_2$ significa que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & p \\ y & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 2p+q \\ 5x+3y & 5p+3q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $2x + y = 1$, $2p + q = 0$, $5x + 3y = 0$ y $5p + 3q = 1$. Este es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pero puede separarse en dos sistemas más sencillos:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2p + q = 0 \\ 5p + 3q = 1 \end{cases}$$

Las matrices aumentadas respectivas son $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Pero note que ambos sistemas tienen igual matriz de coeficientes, la misma matriz B, y como las operaciones en el método de Gauss-Jordan se determinan a partir de la matriz de coeficientes (porque la columna del lado derecho no afecta la escogencia de operaciones), resulta que los dos sistemas se resolverán con la misma secuencia de operaciones. Así es que podríamos resolver los dos sistemas en una misma aplicación de GJ con solo aumentar la matriz de coeficientes dos veces: una vez con la columna de lados derechos del primer sistema, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, y luego con la columna derecha del segundo sistema, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Eso da la matriz "doble-aumentada"

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que representa los dos sistemas de ecuaciones a la vez.

El método GJ procede así:

$$F_1 \div 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - 5F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \times 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_1 - \tfrac{1}{2}F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora ambos sistemas están resueltos, y recordando que la tercera columna da las soluciones del primer sistema y la cuarta da las soluciones del segundo, tenemos que

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} p = -1 \\ q = 2 \end{cases}$$

de donde obtenemos

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Repaso

Encuentre la inversa de $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. Solución: $\left(\begin{smallmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$

Parece haber una relación casi inmediata entre una matriz y su inversa. ¿No basta con cambiar de posición algunos números y cambiar el signo de otros? Pues no siempre es así. Resulta que para matrices de tamaño 2×2 el siguiente teorema sí da una fórmula sencilla para calcular la inversa. Pero para matrices más grandes no hay tal fórmula sencilla (vea, sin embargo, el teorema en la página 138).

Inversa de una matriz 2×2

Teorema

Para matrices de tamaño 2×2, la inversa puede calcularse con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, la matriz no tiene inversa.

Resulta que la expresión $ad - bc$ era igual a 1 en cada uno de los Ejemplos 1 y 2, pero comúnmente la inversa tendrá fracciones (vea el Ejemplo 3 en la página 111).

Ejercicios

6. Compruebe que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ siempre que $ad - bc \neq 0$.

Calcule la inversa, si existe.

7. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1-\mathrm{i} & -1+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & -5 \\ -1 & -2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2\mathrm{i}-1 & 1+8\mathrm{i} \\ 1 & 3-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Inversa de una matriz $n \times n$

El método que usamos para calcular la inversa en el Ejemplo 2 fue una variación de GJ, empezando con una matriz "doble aumentada" que contenía a la matriz B en su mitad izquierda y a la identidad I_2 en su mitad derecha, como $(B \vdots I_2)$. El método de GJ redujo la mitad izquierda de esta matriz a I_2, como de costumbre. Y al terminar, la mitad derecha de la matriz final resultó ser B^{-1}, de modo que la matriz terminó en $(I_2 \vdots B^{-1})$.

Para calcular la inversa de cualquier matriz cuadrada se usa una generalización de ese método: aumentar la matriz colocando la identidad de tamaño apropiado a su derecha, y aplicar Gauss-Jordan.

Método de Gauss-Jordan para encontrar la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si el método de Gauss-Jordan se aplica a la matriz $(A \vdots I_n)$ (la matriz de tamaño $n \times (2n)$ que resulta de colocar las n columnas de A seguidas por las n columnas de I_n), entonces al final del proceso la mitad derecha de la matriz será igual a A^{-1}.

En símbolos, el método de Gauss-Jordan transforma $(A \vdots I_n)$ en $(I_n \vdots A^{-1})$.

Ejemplo 3: calcular una inversa con Gauss-Jordan

Calcular la inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

La matriz inicial ("triple-aumentada" en este caso) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos GJ:

$$F_2 - 2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 - 6F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \div (-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$F_1 + 3F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17 & 9 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Así concluimos que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Efectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Repaso

Encuentre la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Solución: $\begin{pmatrix} -8 & 9 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$

Si su calculadora tiene un modo para matrices, así puede encontrar la inversa de la matriz del ejemplo anterior.

Digite la matriz como vimos en la página 73, digamos como matriz C. Ahora escriba

$$\boxed{\texttt{MATRIX}}\ \texttt{MatC}\ \boxed{x^{-1}}\ \texttt{=}$$

Ejemplo 4: una matriz sin inversa

Dada la matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \mathrm{i}-1 \\ 2\mathrm{i} & 0 & 5 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$, calcular N^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \mathrm{i}-1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \mathrm{i}-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \div (2\mathrm{i}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\mathrm{i}/2 & 0 & -\mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 2 & \mathrm{i}-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \div 2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\mathrm{i}/2 & 0 & -\mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 1 & (\mathrm{i}-1)/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 - (1+\mathrm{i})F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\mathrm{i}/2 & 0 & -\mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 1 & (\mathrm{i}-1)/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\mathrm{i})/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya no podemos convertir la posición $3,3$ en 1, por lo que GJ llega hasta aquí. Como la última fila tiene solo ceros en la parte de coeficientes (mitad izquierda) y números distintos de cero en la mitad derecha, concluimos que no hay solución. Es decir, la matriz N no tiene inversa.

Repaso

Compruebe que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

En general, si el método de Gauss-Jordan no puede llegar hasta el final en el cálculo de una inversa, eso significa que la inversa no existe.

Dos propiedades de las inversas que a veces resultan útiles son las siguientes.

Teorema

Si A y B son matrices invertibles del mismo tamaño entonces $A^\intercal$ y $A \cdot B$ también son invertibles, con

$$(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal \qquad \text{y} \qquad (A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Para matrices complejas se cumple también lo siguiente.

Teorema

Si A es invertible entonces $\bar{A}$ también lo es, con

$$\left(\bar{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$$

Ejercicios

Calcule la inversa, si existe.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

17. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

18. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4-\mathrm{i} \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

19. $D = \begin{pmatrix} 8 & -\mathrm{i} & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2+4\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4-\mathrm{i} \\ 0 & 2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \mathrm{i} & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Para las matrices A, B, C y D de los ejercicios 16–19, calcule:

25. $A^{\intercal}$, $(A^{\intercal})^{-1}$ y $(A^{-1})^{\intercal}$

26. $C^{\intercal}$, $(C^{\intercal})^{-1}$ y $(C^{-1})^{\intercal}$

27. $A \cdot B$, $(A \cdot B)^{-1}$ y $(B^{-1}) \cdot (A^{-1})$

28. $D \cdot C$, $(D \cdot C)^{-1}$ y $(C^{-1}) \cdot (D^{-1})$

29. $\bar{D}$, $\left(\bar{D}\right)^{-1}$ y $\overline{D^{-1}}$

30. Para la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

(a) M^{-1}

(b) M^2

(c) M^{-2} de dos maneras: como $\left(M^{-1}\right)^2$ y como $\left(M^2\right)^{-1}$

31. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz B tal que $A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & -9 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz B tal que $(A \cdot B^{\mathsf{T}})^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6.3 Uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones

Cualquier sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en la forma $A \cdot X = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X es la columna de incógnitas y B es la columna de lados derechos. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$$

puede escribirse en forma equivalente como

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

con $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$. Eso se debe a que el producto a la izquierda es igual a $\left(\begin{smallmatrix} 3x+7y \\ 2x+5y \end{smallmatrix}\right)$, y para que sea igual al lado derecho, $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, deben cumplirse las dos ecuaciones en el sistema original.

Si $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones, y si la matriz de coeficientes A es cuadrada e invertible, entonces es posible multiplicar los dos lados de la igualdad $A \cdot X = B$ por A^{-1} para obtener

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

(donde I es la matriz identidad, resultado de multiplicar $A^{-1} \cdot A$).

Con eso tenemos una forma explícita de la solución del sistema:

Teorema

Si $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones, y la matriz de coeficientes A es invertible, entonces el sistema tiene una solución única, dada por $X = A^{-1} \cdot B$.

Ejemplo 5: resolver un sistema usando la matriz inversa

Acabamos de mencionar el sistema $\begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$, cuya matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Como ya vimos en el Ejemplo 1, la inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ -24 \end{pmatrix}$$

lo cual significa que $x = 58$ y $y = -24$.

Repaso

Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x + 7y = -5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ usando la inversa de la matriz de coeficientes.

Solución: $x = -74$, $y = 31$

Este método para resolver el sistema de ecuaciones parece más sencillo que el de Gauss-Jordan. Pero eso no es más que una ilusión, porque en realidad para usarlo debe conocerse la inversa de la matriz de coeficientes, y *eso* generalmente toma más trabajo que simplemente resolver el sistema.

La utilidad de este nuevo método se aprecia cuando hay que resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. Así, el trabajo de calcular su inversa se hace una sola vez, y ahora para cada sistema basta con usar la fórmula $X = A^{-1} \cdot B$ para encontrar la solución.

Ejemplo 6: resolver varios sistemas usando la matriz inversa

Nuestra fábrica de ropa tiene un proveedor que suple los broches y las cremalleras en cantidades limitadas. Esta semana pueden suplir 200 broches y 85 cremalleras; la siguiente semana, 220 b y 90 c; luego 240 b y 100 c; y la cuarta semana 250 b y 105 c. Suponiendo que la tela no tiene problemas de disponibilidad, ¿cuántos maletines y cuántos pantalones pueden producirse cada una de esas semanas?

Este problema es similar al del Ejemplo 13 del Capítulo 5 (página 94), excepto que ahora deben resolverse cuatro sistemas:

$$\begin{cases} 8m + 2p = 200 \\ 3m + p = 85 \end{cases}$$

para la primera semana, y luego

$$\begin{cases} 8m + 2p = 220 \\ 3m + p = 90 \end{cases}, \quad \begin{cases} 8m + 2p = 240 \\ 3m + p = 100 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 8m + 2p = 250 \\ 3m + p = 105 \end{cases}$$

para las semanas siguientes.

Como los cuatro sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, lo mejor es calcular A^{-1} una sola vez y multiplicarla por cada uno de los lados derechos, en vez de aplicar GJ cuatro veces. La inversa puede calcularse con la fórmula en la página 110:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8-6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix}$$

De ahí que la solución para la primera semana es

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \end{pmatrix}$$

esto es, 15 maletines y 40 pantalones.

Para la segunda semana,

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 220 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

para la tercera,

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

y para la cuarta semana,

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Note que los cuatro sistemas del ejemplo anterior también pudieron resolverse aumentando la matriz de coeficientes con los cuatro lados derechos de las ecuaciones, de modo que al reducirla:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 200 & 220 & 240 & 250 \\ 3 & 1 & 85 & 90 & 100 & 105 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 20 & 20 & 20 \\ 0 & 1 & 40 & 30 & 40 & 45 \end{pmatrix}$$

las cuatro soluciones pueden leerse en las cuatro columnas a la derecha en la matriz final.

Una última observación: para sistemas con igual número de ecuaciones y de incógnitas, si la matriz de coeficientes es invertible entonces el sistema tiene una solución única (dada por la fórmula $X = A^{-1}B$). En caso contrario, puede haber infinitas soluciones o ninguna solución.

Teorema

Si $A_{n\times n}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, entonces el sistema tiene solución única si, y solamente si, A es invertible.

Compare este teorema con los de las páginas 134, 140 y 247.

Ejercicios

Use las inversas de las matrices apropiadas en los Ejercicios 16–24 para resolver.

33. $\begin{cases} a + 2b + 3c = -3 \\ a + 3b + 5c = 1 \\ a + 2b + 4c = 4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 13 \\ 2x - y - (\mathrm{i} - 4)z = -2 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

35. $\begin{cases} p + 2r = 5 \\ 2p - q + 3r = 0 \\ 4p + q + 8r = 6 \end{cases}$

36. $\begin{cases} v - w = 4 \\ 4u - 3v + 4w = 2 \\ 3u - 3v + 4w = 1 \end{cases}$

37. $\begin{cases} p + 2q + 3r = 2 + 6\mathrm{i} \\ p + 3q + 5r = 1 + 10\mathrm{i} \\ p + 2q + 4r = 2 + 8\mathrm{i} \end{cases}$

38. $\begin{cases} 8x - \mathrm{i}y - 3z = 5 \\ -5x + y + 2z = 3 \\ 10x - y - 4z = -1 \end{cases}$

6.4 Cálculo de inversas con calculadora

Como dijimos en la Sección 5.5, son comunes las calculadoras que resuelven sistemas de hasta tres ecuaciones con tres incógnitas. Aunque muchas de estas calculadoras no invierten matrices directamente, podemos usar el concepto fundamental de matriz inversa para aprovechar la calculadora en el cálculo de una inversa.

Recuerde que al calcular la inversa de una matriz $A_{n\times n}$ estamos resolviendo varios sistemas de ecuaciones, cada uno con matriz de coeficientes A y con lado derecho igual a una de las columnas de I_n.

En el Ejemplo 3, para calcular la inversa de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

al aumentar M con la matriz identidad, $(A \vdots I_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, estábamos resolviendo simultáneamente tres sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cada uno de ellos puede resolverse en una calculadora, lo cual no es mucho trabajo porque la matriz de coeficientes se digita solo una vez. Las soluciones respectivas son

$$\begin{pmatrix} -17 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

Esas tres columnas, juntas, forman la inversa de A,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 9 & -1.5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -0.5 \end{pmatrix}$$

como habíamos visto en el Ejemplo 3.

Para inversas de matrices más grandes, puede combinar las ideas en esta sección con las de la Sección 5.5. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7: calcular una inversa con ayuda de la calculadora

Vamos a calcular la inversa de la matriz $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Para eso empezamos por aumentarla con I_4 a su derecha:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una columna de E muy fácil de reducir es la cuarta, usando el 1 en la primera fila para anular el 2 en la cuarta fila:

$$E' = \begin{array}{r} \\ \\ \\ F_4 - 2F_1 \to \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dejemos la fila 1 y la columna 4 para después, y por ahora concentrémonos en el sistema restante:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En realidad esta matriz representa cuatro sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, cada uno con matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y con lados derechos respectivos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esos cuatro sistemas pueden resolverse con calculadora uno tras otro, de lo que se obtienen las siguientes cuatro soluciones:

$$\begin{pmatrix} -0.4 \\ -1.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.6 \\ -1.4 \\ -1.2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1.2 \\ -2.8 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior significa que si hubiéramos reducido la matriz G por el método de Gauss-Jordan habríamos obtenido

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.4 & -0.6 & -1.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -1.6 & -1.4 & -2.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -0.8 & -1.2 & -1.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Los elementos de esta matriz G' ahora sustituyen a sus antecesores en la matriz E', mientras la fila 1 y la columna 4 de E' se conservan como estaban:

$$E'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.6 & -1.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1.6 & -1.4 & -2.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.8 & -1.2 & -1.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Para terminar de construir I_4 en la mitad izquierda de E''), solo falta pasar la fila 1 al fondo de la matriz, a la posición de la fila 4, y anular el 2 y el -1 en las columnas 1 y 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.6 & -1.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1.6 & -1.4 & -2.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.8 & -1.2 & -1.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos el resultado: $E^{-1} = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.6 & -1.2 & 0.2 \\ -1.6 & -1.4 & -2.8 & 0.8 \\ -0.8 & -1.2 & -1.4 & 0.4 \\ 0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$.

Note que todo el procedimiento tomó solamente cuatro operaciones de filas: una para obtener E' y tres más para terminar de reducir E''. Del grueso del trabajo, resolver los cuatro sistemas contenidos en la matriz G, se encargó la calculadora.

Ejercicios

39. Use la calculadora para encontrar las inversas de las matrices en los Ejercicios 16–24 (si la matriz contiene números imaginarios y su calculadora no resuelve sistemas con números imaginarios, omita el ejercicio).

En resumen. . .

- Dos matrices A y B de tamaño $n \times n$ son inversas si $A \cdot B = B \cdot A = I$. Se escribe $A = B^{-1}$ y $B = A^{-1}$.

- La inversa de una matriz 2×2 es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Para calcular la inversa de una matriz cuadrada A de tamaño mayor que 2×2, puede aplicarse Gauss-Jordan al resultado de aumentar A con la matriz identidad a la derecha. Si Gauss-Jordan llega al final, la mitad derecha de la matriz aumentada será A^{-1}. Si no, A no tiene inversa.

- Si A es invertible entonces $(A^{\intercal})^{-1} = (A^{-1})^{\intercal}$ y $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$. Si también B es invertible y del mismo tamaño, entonces $A \cdot B$ es invertible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

- Si $A \cdot X = B$ es un sistema de ecuaciones con incógnita X, y si A es invertible, entonces la solución única es $X = A^{-1} \cdot B$. Si A es cuadrada pero no invertible, el sistema no tiene solución única.

Capítulo 7
Determinantes

En este capítulo estudiaremos los determinantes. El determinante de cada matriz cuadrada (solamente las matrices cuadradas lo tienen) es un número, de manera que existe una función, denotada det, del conjunto de todas las matrices cuadradas al conjunto de los números complejos. Más tarde en el capítulo veremos cómo esta función puede aplicarse a la solución de sistemas de ecuaciones y al cálculo de inversas.

7.1 Notación y definiciones básicas

El determinante de una matriz A puede denotarse $\det(A)$ o $|A|$. Como caso más básico, el determinante de una matriz 1×1 es el valor de su único elemento: si $A = (a_{11})$ entonces $\det(A) = a_{11}$. Para matrices de tamaño 2×2 la definición es la siguiente.

Definición (determinante de una matriz 2×2)

El *determinante* de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si en vez de dar el nombre de la matriz se enumeran sus elementos, el determinante se denota rodeando los elementos por barras verticales en vez de paréntesis, como vimos en la definición.

Ejemplo 1: determinantes de matrices 2×2

El determinante de $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ es

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-3)(4) - (7)(6) = -54$$

El determinante de $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$ es $\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -15 & 10 \end{vmatrix} = (-6)(10) - (4)(-15) = 0.$

La matriz compleja $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 3+\mathrm{i} & 4-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a

$$(1)(4-3\mathrm{i}) - (-\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 4 - 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 3$$

Repaso

Calcule $\det\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Solución: 42

En el capítulo anterior habíamos visto que la inversa de una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Como $ad - bc$ es el determinante de la matriz, resulta que una matriz $A_{2\times 2}$ es invertible solamente si $|A| \neq 0$. Al final del capítulo regresaremos a esta idea.

Ejercicios

Dadas $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 - \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 9 & 3 + 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$, calcule:

1. $\det(A)$ y $|B|$

2. $A \cdot B$, $|A \cdot B|$ y $|A| \cdot |B|$

3. A^{-1}, $|A^{-1}|$ y $|A|^{-1}$

4. $\det(C)$, $\det(C^{\mathsf{T}})$ y $\det(\bar{C})$

Compare los resultados de estos ejercicios con el teorema en la página 127.

7.2 Determinantes de matrices más grandes

Para matrices cuadradas de tamaño mayor que 2×2, la definición es como sigue.

Definición (determinante de una matriz $n \times n$)

El *determinante* de una matriz $A_{n\times n}$ (con $n \geq 2$) es

$$|A| = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} & \text{para cualquier } i \text{ fijo entre 1 y } n\text{, o bien} \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} & \text{para cualquier } j \text{ fijo entre 1 y } n \end{cases}$$

donde M_{ij}, llamado el *menor* de a_{ij}, es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de A.

Como ya ha sucedido otras veces en el contexto de matrices, los cálculos resultan menos complicados que lo que la definición aparenta. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 2: un determinante 3×3

Para calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

una opción es desarrollar a lo largo de la fila 1 (usando $i = 1$ en la primera línea de la definición).

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\ &= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}\end{aligned}$$

Aquí, el menor M_{11} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila 1 y la columna 1 de A:

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 0 = -6$$

Similarmente,

$$M_{12} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 16 = 6$$

y

$$M_{13} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12$$

Entonces $\det(A) = (-2)(-6) - (1)(6) + (3)(-12) = -30$.

También era posible desarrollar el determinante a lo largo de cualquiera otra fila o columna. Por ejemplo, por la columna 2 (usando $j = 2$ en la segunda línea de la definición),

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} \\ &= (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} M_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} M_{32} \\ &= -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} - a_{32} M_{32}\end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$M_{12} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 16 = 6$$

$$M_{22} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

y

$$M_{32} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{-2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7$$

Entonces $\det(A) = -(1)(6) + (3)(-8) + (0)(-7) = -30.$

El determinante de A es siempre -30, sin importar cómo se calcule.

Repaso

Calcule $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Solución: -39

Note que en el ejemplo anterior, al desarrollar el determinante por la segunda columna, en realidad desperdiciamos nuestro tiempo calculando M_{32} porque este iba a ser multiplicado por $a_{32} = 0$. Con un poco de chispa pudimos haber previsto esto y calculado solamente M_{21} y M_{22}.

Como regla general, cada cero en la matriz significa un menor que se puede omitir. Por eso es ventajoso desarrollar los determinantes por la fila o columna que contenga más ceros.

Por otra parte, la suma que define al determinante tiene signos alternados, según el factor $(-1)^{i+j}$. Este factor será $+1$ si $i+j$ es par, ó -1 si $i+j$ es impar. Una forma fácil de identificar el factor correspondiente a cada posición i,j es notar que la posición $1,1$ siempre tiene factor $+1$, y a partir de allí los signos se alternan como en un tablero:

$$(-1)^{i+j} \equiv \begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: un determinante 3×3 complejo

El determinante de $\begin{pmatrix} 2 & -5\mathrm{i} & -7 \\ 0 & -3 & 0 \\ \mathrm{i}-2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ se desarrolla más económicamente a lo largo de la fila 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5\mathrm{i} & -7 \\ 0 & -3 & 0 \\ \mathrm{i}-2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -(0)M_{21} + (-3)M_{22} - (0)M_{23} = 0 - 3\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ \mathrm{i}-2 & 7 \end{vmatrix} + 0$$

$$= -3\big[14 + 7(\mathrm{i}-2)\big] = -21\mathrm{i}$$

Si su calculadora tiene modo de matrices, tal vez ya usted notó que entre las funciones de matrices se encuentra **det**. Esta función, en efecto, calcula el determinante de una matriz. Para usarla, defina la matriz como vimos en la página 73 y luego escriba (suponiendo que la definió como A)

[MATRIX] det [MATRIX] MatA =

Ejemplo 4: un determinante 4×4

Al desarrollar el determinante de $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo más eficiente es usar la columna 3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(0)M_{13} - (-2)M_{23} + (0)M_{33} - (0)M_{43} = 2M_{23}$$

donde M_{23} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila 2 y la columna 3 de B:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

¿Y cómo se calcula el determinante de una matriz 3×3? Como en los dos ejemplos que acabamos de ver: se escoge una fila o columna con ceros, si es posible, y se desarrolla el determinante en términos de menores de orden 2×2. Aquí escogemos la columna 2.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -4(3) = -12$$

Finalmente, $|B| = 2M_{23} = 2(-12) = -24$.

Repaso

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Solución: 48

El siguiente teorema enuncia algunas propiedades importantes.

Teorema

Si A y B son matrices cuadradas de igual tamaño entonces:

- $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ si A es invertible
- $\det(A^{\intercal}) = \det(A)$
- $\det\left(\bar{A}\right) = \overline{\det(A)}$

Note que en general no es cierto que $|cA| = c|A|$ para $c \in \mathbb{C}$. ¿Por qué no? Calcule y compare, por ejemplo, $|I_3|$ y $|2I_3|$. ¿Cuál sería una fórmula general para $|cA|$?

Ejercicios

Calcule.

5. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -5+2\mathrm{i} & 3 \\ 2 & 0 & -1-4\mathrm{i} \\ 0 & 3\mathrm{i} & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 3 & 2 & \mathrm{i} & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Encuentre los valores de la incógnita para los cuales...

11. $\begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 1 \\ -2 & \alpha+2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 0$

12. $\det\begin{pmatrix} 3 & \beta & 2\beta \\ 0 & \beta & 99 \\ 0 & 0 & 2-\beta \end{pmatrix} = 6$

13. $\begin{vmatrix} \mathrm{i}-t & \mathrm{i}-t & t-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}-t & -\mathrm{i} \\ 3t & 3t-3\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{vmatrix} = 0$

14. $\begin{vmatrix} 3 & b-3 & 2 \\ 5-5b & 0 & b-\mathrm{i} \\ 10 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 50\mathrm{i}$

15. Demuestre que cualquier matriz cuadrada idempotente tiene determinante igual a 0 o a 1 (recuerde que A es idempotente si $A^2 = A$).

7.3 Operaciones en filas y columnas

Después del último ejemplo usted sospechará que el determinante de una matriz 5×5 se calcula en términos de menores de tamaño 4×4, y cada uno de ellos en términos de menores 3×3, y por último cada uno en términos de menores 2×2, que son inmediatos[1]. La sospecha es correcta, y pronto lleva a la conclusión de que no es práctico calcular a mano determinantes de matrices grandes.

Por suerte es posible hacer operaciones con filas, como en el método de Gauss-Jordan, para ganar ceros en la matriz. Pronto veremos las reglas, pero adelantemos que hay dos diferencias con respecto a GJ: primero, las operaciones pueden efectuarse no solo sobre filas sino también sobre columnas, y segundo, no todas las operaciones dan una matriz equivalente (en el sentido de tener el mismo determinante).

Antes de estudiar el efecto que tienen en el determinante las distintas operaciones entre filas o columnas, veamos un ejemplo más para motivar la importancia de simplificar una matriz antes de calcular su determinante.

Ejemplo 5: determinante de una matriz triangular

Para calcular el determinante de $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -5\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ podemos desarrollar por la primera columna:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -5\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9+\mathrm{i} \end{vmatrix} &= 5 \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & 7 \\ 0 & 0 & 9+\mathrm{i} \end{vmatrix} - 0M_{12} + 0M_{13} - 0M_{14} \\
&= 5 \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & 7 \\ 0 & 0 & 9+\mathrm{i} \end{vmatrix} \\
&= 5 \left(4 \begin{vmatrix} 2\mathrm{i} & 7 \\ 0 & 9+\mathrm{i} \end{vmatrix} - 0 + 0 \right) \qquad \text{(primera columna de nuevo} \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 2\mathrm{i} \cdot (9+\mathrm{i})
\end{aligned}$$

El determinante es el producto de la diagonal: $5 \cdot 4 \cdot 2\mathrm{i} \cdot (9+\mathrm{i}) = 360\mathrm{i} - 40$.

Repaso

Calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$. Solución: -16

[1]No tan inmediatos. La fórmula $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$ es el resultado de desarrollar el determinante por cualquier fila o columna. Por ejemplo, a lo largo de la primera fila, $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = a\det(d) - b\det(c)$, y recordando que el determinante de una matriz 1×1 es el valor de su elemento, llegamos al resultado $ad - bc$.

La matriz de este ejemplo es una matriz triangular, en el sentido de que todos sus elementos distintos de cero forman un triángulo sobre la diagonal. El determinante de una matriz triangular resulta ser simplemente el producto de su diagonal.

Definición (matriz triangular)

Una matriz cuadrada A es *triangular superior* si todos sus elementos bajo la diagonal son cero ($a_{ij} = 0$ para todo $i > j$), o *triangular inferior* si todos sus elementos sobre la diagonal son cero ($a_{ij} = 0$ para todo $i < j$).

Teorema

Si A es una matriz triangular (superior o inferior) entonces su determinante es el producto de su diagonal:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Vemos así que los ceros en una matriz ayudan no solo cuando hay una fila o columna con muchos de ellos, sino también cuando todos los elementos al mismo lado de la diagonal son ceros. De ahí la importancia del siguiente teorema.

Teorema

Si A es una matriz cuadrada entonces:

- Al intercambiar dos filas o dos columnas de A, el determinante de A cambia de signo.
- Al multiplicar una fila o columna de A por un escalar c, el determinante de A se multiplica por c.
- Al sumar a una fila o columna de A un múltiplo de otra, el determinante de A se mantiene igual.

Ejemplo 6: efecto de operaciones en el determinante

Sea $C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \\ 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|C| = 9$. Sean también

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 5 & -7 & 1 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 1 & -70 & 5 \\ 2 & 90 & -5 \end{pmatrix}$$

y

$$M_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \\ -98 & 709 & -505 \end{pmatrix}$$

Entonces:

- M_1 es el resultado de intercambiar las columnas 1 y 3 de C, y $\det(M_1) = -9 = |C|$, como garantiza la primera parte del teorema.
- M_2 es el resultado de multiplicar la columna 2 de C por 10, y $\det(M_2) = 90 = 10|C|$, como garantiza la segunda parte.
- M_3 es el resultado de restar $100F_2$ de F_3 ($F_3 - 100F_2 \to F_3$), y $\det(M_3) = 9 = |C|$, de acuerdo con la tercera parte.

En la segunda parte del ejemplo tenemos la igualdad

$$\begin{vmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 1 & -70 & 5 \\ 2 & 90 & -5 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \\ 2 & 9 & -5 \end{vmatrix}$$

que puede interpretarse diciendo que el factor común 10, que se saca de la segunda columna, queda multiplicando el determinante de la matriz resultante. De hecho, la segunda parte del teorema puede formularse de esta manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 7: simplificar el cálculo del determinante

Sea $D = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Para calcular su determinante deberíamos primero buscar qué operaciones entre filas o columnas consiguen más ceros en la matriz o la llevan a alguna forma triangular. Notando que las filas 1 y 4 se parecen, decidimos restar $F_1 - F_4$. El determinante se mantiene.

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_1 - F_4 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Ahora vemos que la primera fila y la cuarta columna tienen tres ceros, pero todavía antes de desarrollar notemos que la primera columna también tiene dos ceros y la segunda tiene uno. Con solo intercambiar las columnas 1 y 3 la matriz será triangular inferior.

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}}$$

El signo cambia por el intercambio de columnas. El nuevo determinante se calcula ahora simplemente multiplicando la diagonal:

$$\det(D) = -(7)(-8)(9)(3) = 1512$$

Repaso

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, haciendo las operaciones $F_3 + 2F_1 \to F_3$ y $F_3 \leftrightarrow F_4$.

Solución: -48

Las siguientes propiedades acerca del determinante de una matriz A son fáciles de deducir:

- Si una fila o columna de A es igual a cero entonces $|A| = 0$.
- Si una fila o columna de A es un múltiplo de otra (o igual a otra) entonces $|A| = 0$.
- Si A es una matriz triangular con un cero en su diagonal entonces $|A| = 0$.

Ejercicios

Calcule, transformando la matriz en una triangular.

16. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -9 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 8 & -9 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 9\mathrm{i} & 5 \\ 0 & -8\mathrm{i} & -5 & 0 \\ 4\mathrm{i} & 0 & -9 & 5\mathrm{i} \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -8\mathrm{i} \\ -8 & 0 & 4 & -4 \\ 2\mathrm{i} & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

20. Encuentre los valores de α tales que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 2 & 2 & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2\mathrm{i} - 4.$

Suponiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$, calcule…

21. $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{i}a_{13} + \mathrm{i}a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{i}a_{23} + \mathrm{i}a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathrm{i}a_{33} + \mathrm{i}a_{32} \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

7.4 La regla de Cramer

Pasemos a otra aplicación de los determinantes. Ellos resultan estar relacionados con los sistemas de ecuaciones y con las inversas, de manera que se pueden resolver algunos sistemas (mientras el número de ecuaciones y el número de incógnitas sean iguales) y se pueden calcular algunas inversas (mientras existan) usando determinantes.

En esta sección nos referimos a la regla de Cramer, una fórmula para resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales usando determinantes. En la sección siguiente hablaremos de los cofactores, que permiten calcular con determinantes la inversa de una matriz.

Teorema (regla de Cramer)

Sea $A_{n\times n}$ la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, y sea A_j el resultado de sustituir la columna j de A por el lado derecho del sistema.

1. Si $\det(A) \neq 0$, entonces $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.
2. Si $\det(A) = 0$, el sistema no tiene solución única. Si además existe algún $|A_j| \neq 0$, el sistema no tiene ninguna solución.

Si todos los determinantes son iguales a cero, $|A| = |A_1| = \cdots = |A_n| = 0$, el teorema solamente dice que no hay solución única. En este caso el sistema podría no tener solución o podría tener infinitas soluciones.

Cuando $|A| \neq 0$, el primer caso del teorema, la regla da una fórmula en la que cada incógnita x_j se calcula explícitamente como el cociente de determinantes $|A_j|/|A|$. Para hacernos una idea de por qué la fórmula es correcta, consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Veamos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} x\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & 4 \end{vmatrix} && \text{(luego de hacer } xC_1 \to C_1) \\ &= \begin{vmatrix} x-3y & -3 \\ 2x+4y & 4 \end{vmatrix} && \text{(luego de hacer } C_1 + yC_2 \to C_1) \\ &= \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} && \text{(por las igualdades del sistema)} \end{aligned}$$

Ahora x puede despejarse como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|}$$

lo cual concuerda con la regla.

De la misma manera,

$$y\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3y \\ 2 & 4y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x-3y \\ 2 & 2x+4y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

En realidad es más trabajo, en general, resolver un sistema completo con la regla de Cramer que con el método de Gauss-Jordan, porque el cálculo de los determinantes en Cramer puede requerir mucho esfuerzo. Pero si no interesa la solución completa sino solo los valores de una o unas pocas incógnitas, esta nueva regla puede resultar útil.

En el teorema anterior vimos que si $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema tiene una solución única, pero si $\det(A) = 0$ puede haber infinitas soluciones o ninguna solución. En consecuencia (compare este teorema con los de las páginas 117, 140 y 247):

Teorema

Si $A_{n\times n}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones, entonces el sistema tiene solución única si, y solamente si, $\det(A) \neq 0$.

Ejemplo 8: despejar una incógnita con Cramer

Suponga que queremos encontrar el valor de y en la solución del sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = 10 \\ 5x + 4y - z = -6 \\ 5x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

En primer lugar, identifiquemos las incógnitas x, y y z con x_1, x_2 y x_3, según la notación de Cramer.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Las matrices mencionadas en el teorema son

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 5 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(mostramos las tres para ilustrar, pero solo usaremos A_2 para encontrar y).

Para determinar el valor de $y = x_2$, calculamos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -33$$

y

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = 132$$

Así encontramos, por la regla de Cramer, que $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{132}{-33} = -4.$

Repaso

Encuentre el valor de z en el sistema del Ejemplo 8. Solución: $z = 0$

Ejemplo 9: resolver un sistema complejo con Cramer

En el Ejemplo 9 del Capítulo 1 (página 8) habíamos visto el sistema

$$\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w = 1 - 9\mathrm{i} \\ (2 + \mathrm{i})z + w = 5 - 3\mathrm{i} \end{cases}$$

con incógnitas complejas z y w, y allí vimos un método para resolverlo (despejando una incógnita de una ecuación y sustituyéndola en la otra ecuación).

Luego en los Ejemplos 7 y siguiente del Capítulo 5 (página 87) vimos otras dos maneras de resolverlo usando Gauss-Jordan. Veamos ahora todavía otro método de solución, usando la regla de Cramer.

La matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} & 1-9\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 1 & 5-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$, así que las tres matrices involucradas son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1-9\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 5-3\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1-9\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 5-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

con determinantes

$$\begin{aligned} |A| &= 3 + \mathrm{i}(2+\mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i} \\ |A_1| &= 1 - 9\mathrm{i} + \mathrm{i}(5-3\mathrm{i}) = 4 - 4\mathrm{i} \\ |A_2| &= 3(5-3\mathrm{i}) - (1-9\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 4 + 8\mathrm{i} \end{aligned}$$

Entonces las soluciones son

$$z = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4-4\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = -2\mathrm{i} \qquad \text{y} \qquad w = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4+8\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = 3 + \mathrm{i}$$

Repaso

Use la regla de Cramer para resolver $\begin{cases} 3z - \mathrm{i}w = 3\mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})z + w = 4\mathrm{i} - 3. \end{cases}$

Solución: $z = \mathrm{i} - 1$, $w = 3\mathrm{i}$

Al comparar los métodos de Gauss-Jordan y Cramer, debemos notar que en GJ es probable que haya que efectuar varias divisiones durante el proceso, lo cual puede introducir fracciones. Esto es especialmente complicado cuando el sistema involucra números complejos, como vimos en el Ejemplo 7 del Capítulo 5 (página 87). En Cramer, en cambio, todo el proceso se basa en multiplicaciones (al calcular determinantes) excepto al final cuando se dividen los determinantes. Esto hizo que el método de Cramer resultara más sencillo en el ejemplo anterior, con números complejos. En general, para sistemas complejos, donde las divisiones son tediosas, puede resultar mejor usar Cramer.

Otra circunstancia en la que se recomienda el método de Cramer es el caso en que se necesita determinar solo una o unas pocas de las incógnitas, como en el Ejemplo 8 en esta sección.

Ejercicios

25. Use la regla de Cramer para determinar q si $\begin{cases} \mathrm{i}p - 2q + r = 1 \\ q - r = 5\mathrm{i} \\ p + 2q = 4 \end{cases}$.

26. Use la regla de Cramer para determinar c si $\begin{cases} b-(1-\mathrm{i})c=2 \\ 3a-\mathrm{i}b+18\mathrm{i}=0 \\ 3\mathrm{i}a-b+c=5 \end{cases}$.

27. Use la regla de Cramer para resolver los sistemas planteados en los Ejercicios 1–6 del Capítulo 5 (página 79).

28. Use la regla de Cramer para encontrar el valor de w en el sistema planteado en el Ejercicio 7 del Capítulo 5 (página 79).

29. Use la regla de Cramer para resolver los sistemas de ecuaciones planteados los Ejercicios 25–28 del Capítulo 1 (página 9).

30. En el Ejercicio 40 del Capítulo 5 (página 101), si ahora hay once tazas de azúcar, quince huevos y siete litros de leche disponibles, ¿cuántas porciones de pastel de manzana pueden hacerse?

Determine los valores de $k \in \mathbb{C}$ tales que cada sistema tenga: (a) solución única, (b) ninguna solución o (c) más de una solución.

31. $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x+y+kz=0 \\ x+ky+z=1 \\ kx+y+z=\sqrt{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} x-3z=1 \\ 2x+ky-z=2 \\ 2x-9y+kz=2 \end{cases}$

34. $\begin{cases} kx+y=1 \\ -x+ky+z=1 \\ kx+y+kz=1 \end{cases}$

7.5 Cofactores y matriz adjunta

Ahora vamos a ver cómo los determinantes pueden usarse para calcular matrices inversas. Primero necesitamos conocer los conceptos de cofactores y de matriz adjunta.

Definición (cofactor, matriz adjunta)

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Entonces:

- El *cofactor* i, j de A es $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor[2] de a_{ij}.
- La *matriz adjunta* de A es $\mathrm{adj}(A) = C^{\mathsf{T}}$, donde C es la matriz de cofactores.

Ya habíamos encontrado antes el concepto de cofactor, en la definición del determinante; nada más no habíamos mencionado su nombre.

[2] El menor de una matriz cuadrada se definió en la página 124.

Ahora podemos dar una fórmula concisa para la inversa de una matriz cuadrada.

Teorema

Si A es una matriz cuadrada con $\det(A) \neq 0$ entonces su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Ejemplo 10: calcular una inversa usando cofactores

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Estos son algunos de sus nueve cofactores:

$$c_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 34, \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

y

$$c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

La matriz de cofactores, incluyendo los tres anteriores y los seis restantes, es

$$C = \begin{pmatrix} 34 & 4 & 12 \\ -18 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz adjunta es la transpuesta de la anterior:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 34 & 4 & 12 \\ -18 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 34 & -18 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 12 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -2$, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 34 & -18 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 12 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Este resultado coincide con el que obtuvimos en el Ejemplo 3 del Capítulo 6 (página 111).

Repaso

Use cofactores para encontrar $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. Solución: $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.15 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 11: calcular una inversa usando cofactores

Sea $B = \begin{pmatrix} -5\mathrm{i} & 5 & \mathrm{i}-4 \\ 3 & -3 & 2-3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Para calcular B^{-1} podríamos empezar por encontrar los nueve cofactores. ¿Pero si luego resulta que el determinante de la matriz es cero? En ese caso no habría inversa, y habremos desperdiciado el esfuerzo.

Empecemos mejor por calcular el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} -5\mathrm{i} & 5 & \mathrm{i}-4 \\ 3 & -3 & 2-3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\downarrow C_1+(1-\mathrm{i})C_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 5 & \mathrm{i}-4 \\ 2-5\mathrm{i} & -3 & 2-3\mathrm{i} \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\downarrow C_2+2C_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 2\mathrm{i}-3 & \mathrm{i}-4 \\ 2-5\mathrm{i} & 1-6\mathrm{i} & 2-3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -3 & 2\mathrm{i}-3 \\ 2-5\mathrm{i} & 1-6\mathrm{i} \end{vmatrix} = -\big[-3(1-6\mathrm{i}) - (2\mathrm{i}-3)(2-5\mathrm{i})\big] = 7+\mathrm{i}$$

No es cero, así que tenemos seguridad de que B^{-1} sí existe. Encontremos entonces los cofactores:

$$\begin{aligned} c_{11} &= +[3-2(2-3\mathrm{i})] = -1+6\mathrm{i} \\ c_{12} &= -[-3-(1-\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})] \\ &= 2-5\mathrm{i} \\ c_{13} &= +[6+3(1-\mathrm{i})] = 9-3\mathrm{i} \\ c_{21} &= -[-5-2(\mathrm{i}-4)] = -3+2\mathrm{i} \\ c_{22} &= +[5\mathrm{i}-(1-\mathrm{i})(\mathrm{i}-4)] = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{23} &= -[-10\mathrm{i}-5(1-\mathrm{i})] = 5+5\mathrm{i} \\ c_{31} &= +[5(2-3\mathrm{i})+3(\mathrm{i}-4)] \\ &= -2-12\mathrm{i} \\ c_{32} &= -[-5\mathrm{i}(2-3\mathrm{i})-3(\mathrm{i}-4)] \\ &= 3+13\mathrm{i} \\ c_{33} &= +[15\mathrm{i}-15] = -15+15\mathrm{i} \end{aligned}$$

La matriz adjunta es entonces

$$\operatorname{adj}(B) = C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1+6\mathrm{i} & -3+2\mathrm{i} & -2-12\mathrm{i} \\ 2-5\mathrm{i} & 3 & 3+13\mathrm{i} \\ 9-3\mathrm{i} & 5+5\mathrm{i} & -15+15\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Ahora $B^{-1} = \dfrac{1}{7+\mathrm{i}} C^{\mathsf{T}}$, pero en vez de hacer nueve divisiones complejas preferimos hacer una división y nueve multiplicaciones:

$$\frac{1}{7+\mathrm{i}} = \frac{1}{7+\mathrm{i}} \cdot \frac{7-\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}} = \frac{7-\mathrm{i}}{49+1} = 0.14 - 0.02\mathrm{i}$$

así que

$$B^{-1} = (0.14 - 0.02\mathrm{i}) \begin{pmatrix} -1+6\mathrm{i} & -3+2\mathrm{i} & -2-12\mathrm{i} \\ 2-5\mathrm{i} & 3 & 3+13\mathrm{i} \\ 9-3\mathrm{i} & 5+5\mathrm{i} & -15+15\mathrm{i} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -0.02+0.86\mathrm{i} & -0.38+0.34\mathrm{i} & -0.52-1.64\mathrm{i} \\ 0.18-0.74\mathrm{i} & 0.42-0.06\mathrm{i} & 0.68+1.76\mathrm{i} \\ 1.2-0.6\mathrm{i} & 0.8+0.6\mathrm{i} & -1.8+2.4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Repaso

Use cofactores para calcular $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$. Solución: No existe

Recuerde que la inversa de una matriz 2×2 está dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Resulta que los cofactores de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, determinantes de matrices 1×1, son precisamente d, $-c$, $-b$ y a, de modo que esta vieja fórmula no es más que un caso particular del teorema recién enunciado.

Así como notamos acerca de inversas 2×2, también ahora es importante notar lo siguiente: si $|A| \neq 0$ entonces A tiene una inversa dada por el teorema anterior, pero si $|A| = 0$, la inversa de A no existe. Compare el siguiente teorema con los teoremas en las páginas 117, 134 y 247.

Teorema

Si A es una matriz cuadrada, entonces A es invertible si, y solamente si, $\det(A) \neq 0$.

Combinando este teorema con los dos anteriores, tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes para una matriz cuadrada A (esto es, las tres son ciertas o las tres son falsas):

- Cualquier sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A tiene solución única.
- A es invertible.
- El determinante de A no es cero.

Ejercicios

Determine los valores de α para que la matriz no sea invertible.

35. $\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1-\alpha \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$

37. Encuentre la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1+3\mathrm{i} & 0 & -5\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

38. Use el método de cofactores para encontrar la inversa de cada una de las matrices invertibles en los Ejercicios 16–24 del Capítulo 6 (página 114).

En resumen...

- Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, su determinante es $\det(A) = |A| = ad - bc$.

- Si A es una matriz $n \times n$, su menor i, j es M_{ij}, el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de A.

- Si A es una matriz $n \times n$ con $n \geq 2$, su determinante es $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ para cualquier i fijo, o bien $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ para cualquier j fijo.

- Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $|A \cdot B| = |A||B|$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ si A es invertible, $|A^\intercal| = |A|$ y $\left|\bar{A}\right| = \overline{|A|}$.

- Si A es una matriz triangular, su determinante es igual al producto de su diagonal.

- Si A es una matriz cuadrada, (a) intercambiar dos filas o dos columnas de A cambia el signo del determinante; (b) multiplicar una fila o una columna de A por un escalar multiplica el determinante por ese escalar; (c) sumar a una fila de A un múltiplo de otra, o sumar a una columna un múltiplo de otra, no cambia el determinante.

- (Regla de Cramer) Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, y para cada $j = 1, \ldots, n$ sea A_j el resultado de sustituir la columna j de A por el lado derecho del sistema.

  Si $|A| \neq 0$ entonces $x_j = |A_j|/|A|$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

  Si $|A| = 0$ entonces no hay solución única. Y si algún $|A_j| \neq 0$, no hay solución.

- Si $A_{n \times n}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones, entonces el sistema tiene solución única si y solo si $|A| \neq 0$.

- Si A es una matriz $n \times n$, su cofactor i, j es $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, y su matriz adjunta es $\operatorname{adj}(A) = C^\intercal$, donde C es la matriz de cofactores.

- Si $|A| \neq 0$ entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$. Si $|A| = 0$, A no es invertible.

Apéndice A
Sugerencias

Capítulo 4

31 $A^3 = A \cdot A \cdot A$

39 Primero note que X debe ser 2×2. Plantee entonces $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, desarrolle el producto a la izquierda y averigüe los valores de a, b, c y d.

40 Primero note que Y debe ser 2×2. Plantee entonces $Y = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, desarrolle el producto a la izquierda y averigüe los valores de a, b, c y d.

41 (a) Si M es $p \times q$ y al multiplicarla por una matriz 2×3 el resultado tiene tamaño 2×3, ¿cuánto deben ser p y q? (b) Escriba $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y plantee un sistema de ecuaciones con incógnitas a, b, c y d.

42 Vea la sugerencia del ejercicio anterior. Note que el sistema de ecuaciones tiene cuatro incógnitas y *seis* ecuaciones.

44 Escriba $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcule $B^2 = B \cdot B$ y despeje las incógnitas a, b, c y d.

Capítulo 5

20 $x_{10} + x_{20} = 43, \;\; 10x_{10} + 20x_{20} = 570$

21 $a + n = 7, \;\; 1000a + 600n = 5400$

22 $g + c = 18, \;\; 2g + 4c = 46$

23 $2s + 5m = 345, \;\; 20s + 48m = 3344$

24 $12x + 5y = 269, \;\; 7x + 6y = 234$

25 $30a + 20b = 600, \;\; 10a + 20b = 400$

26 $a + b = 14, \;\; 70a + 55b = 905$

27 $p + s = 100, \;\; 0.5p + s = 80$

28 $n + p = 25, \;\; 2400n + 5600p = (3232)(25)$

29 $x_{090} + x_{105} = 60000, \;\; 0.09x_{090} + 0.105x_{105} = 5745$

30 $0.10a + 0.20b = 20, \;\; 0.06a + 0.02b = 6$

31 $x + y + 100 = 500, \;\; 4.8x + 3.6y + 3(100) = 1884$

32 $x + y = 9, \;\; 0.2x + 0.5y = 0.3(9)$

33 $1.6(a + v) = 500, \;\; 1.8(a - v) = 500$

34 Sean t_1 y t_2 los tiempos de ida y vuelta, en horas. Entonces $t_1 + t_2 = 4$, y la distancia recorrida es $21t_1 = 29t_2$.

35 $2b + 3c = 46, \;\; b + 2c = 27, \;\; 20b + 24c \leq 420$

36 $a + b + c = 15, \;\; c = 4a, \;\; b = \frac{1}{2}(a + c)$

37 $a(-1)^2 + b(-1) + c = -5, \;\; a(2)^2 + b(2) + c = 1, \;\; a(3)^2 + b(3) + c = -9$

38 $a(-2)^2 + b(-2) + c = -9$ y $a(2)^2 + b(2) + c = 7$. Para la tercera ecuación, recuerde que $y' = 0$ en el vértice ($y'(1) = 0$ donde $y' = 2ax + b$), o bien recuerde que $x = -b/(2a)$ en el vértice ($1 = -b/(2a)$).

39 $x_5 + x_7 + x_8 = 1600, \;\; x_8 = 3x_5, \;\; 0.05x_5 + 0.07x_7 + 0.08x_8 = 115$

40 Si p es el número de horneadas de pastel de manzana, y así q y r, entonces
$3p + 2q + 2r = 15, \;\; 2p + 5q + 4r = 24$ y $p + 2q + 2r = 11$.

O bien, si p es el número de porciones de pastel, y así q y r, entonces
$(3/6)p + (2/8)q + (2/10)r = 15$, etc.

41 $a + b + c = 300, \;\; 0.30a + 0.20b + 0.15c = 0.25(300), \;\; c = b + 50$.

42 Sean c el número de minutos que tarda Carlos solo, y así g y m. Entonces
$1/c + 1/g + 1/m = 1/85, \;\; 1/c + 1/g = 1/120$ y $1/g + 1/m = 1/140$.

43 Sean a el número de horas que tarda A sola, y así b y c. Entonces $a = 8$,
$1/a + 1/c = 1/6$ y $1/b + 1/c = 1/10$.

44 Sean x, y, z las poblaciones en Geranio, Gladiola y Girasol. La población en Geranio el año entrante será la actual menos un 10% (que vuela a Gladiola), más un 5% de la población de Girasol (que viene a Geranio): $x - 0.10x + 0.05z$, y es igual a x porque la población es estable.

45 $x = 2(y + z)$ y $x + y + z = 180$. El sistema tiene infinitas soluciones, pero x es el mismo en todas.

46 $8x + 4y = 24, \;\; 6x + 3y = 18, \;\; 600x + 400y = 2000$.

47 $8x + 4y = 24, \;\; 5x + 3y = 18, \;\; 600x + 400y = 2000$.

48 Sean t_1 y t_2 los tiempos de ida y vuelta, y v la velocidad del viento. Entonces
$(200 - v)t_1 = 300, \;\; (200 + v)t_2 = 300$ y $t_1 + t_2 = 3.01$. La dos primeras no son lineales, pero despeje t_1 de la primera y t_2 de la segunda, para sustituirlos en la tercera.

Capítulo 6

6 Basta con multiplicar las dos matrices.

31 Puede despejar la incógnita B multiplicando cada lado de la ecuación por A^{-1} a la izquierda y luego elevando cada lado a la -1.

32 Puede despejar la incógnita B elevando cada lado de la ecuación a la -1, multiplicando cada lado por A^{-1} a la izquierda y transponiendo cada lado. O bien puede intuir que B es 2×2, escribir $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y convertir la igualdad en un sistema de cuatro ecuaciones con incógnitas a, b, c y d.

Capítulo 7

15 Si A es idempotente, denote $d = |A|$ y explique por qué $d^2 = d$. Luego resuelva esa ecuación, con $d \in \mathbb{C}$.

17 $F_4 + 3F_2$

18 $F_2 + \mathrm{i}F_4$, $F_1 - F_2$

19 $C_1 + 2C_3$, $C_2 \leftrightarrow C_4$

31 Calcule el determinante de cada matriz de coeficientes. Para que haya solución única, este debe ser distinto de cero. Para los valores en que el determinante es cero, puede que haya infinitas o cero soluciones; revise la Regla de Cramer o intente el método de Gauss-Jordan.

32 Vea la sugerencia del ejercicio anterior.

33 Vea la sugerencia del ejercicio anterior.

34 Vea la sugerencia del ejercicio anterior.

Apéndice B

Soluciones

Capítulo 4

1 (a) $\begin{pmatrix} 10.4 & 147 & 176 & 170 \\ 5 & 110 & 172 & 159 \\ 6.8 & 120 & 167 & 166 \\ 9.9 & 140 & 170 & 161 \end{pmatrix}$. (b) 4×4.

2 (a) $\begin{pmatrix} 172 & 172 \\ 169 & 277 \\ 133 & 208 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 172 & 169 & 133 \\ 172 & 277 & 208 \end{pmatrix}$.
(c) 3×2 y 2×3.

3 (a) $\begin{pmatrix} 2820 & 1470 \\ 1240 & 980 \\ 830 & 560 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 2820 & 1240 & 830 \\ 1470 & 980 & 560 \end{pmatrix}$.
(c) 1470 y 830. (d) $2, 3$.

4 (a) $\begin{pmatrix} 1564 & 834 & 1000 & 2430 \\ 175 & 65 & 66 & 230 \\ 7.9 & 14.4 & 13.7 & 6.2 \end{pmatrix}$. (b) 3×4.
(c) 230 y 7.9. (d) $3, 1$.

5 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ -6 & -3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 1564 & 175 & 7.9 \\ 834 & 65 & 14.4 \\ 1000 & 66 & 13.7 \\ 2430 & 230 & 6.2 \end{pmatrix}$

7 (a) $\begin{pmatrix} 10.4 & 5 & 6.8 & 9.9 \\ 147 & 110 & 120 & 140 \\ 176 & 172 & 167 & 170 \\ 170 & 159 & 166 & 161 \end{pmatrix}$. (b) 10.4, 110, 167, 161.

8 (a) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9
$\begin{pmatrix} 2820 & 1240 & 830 \\ 1470 & 980 & 560 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 240 & 120 & 90 \\ 190 & 90 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3060 & 1360 & 920 \\ 1660 & 1070 & 620 \end{pmatrix}$
(también pueden sumarse las transpuestas)

10 a. $\frac{1}{2}(G_1 + G_2) = \begin{pmatrix} 531 & 560 \\ 510 & 540 \\ 511 & 491 \end{pmatrix}$.
b. $G_2 - G_1 = \begin{pmatrix} 48 & 70 \\ 60 & 60 \\ 68 & 58 \end{pmatrix}$.
c. $\frac{1000}{480} G_1 + \frac{1000}{500} G_2 \approx \begin{pmatrix} 2166 & 2284 \\ 2080 & 2203 \\ 2084 & 2003 \end{pmatrix}$.

11 $\begin{pmatrix} -8+5i & -7 & 11 \\ 3 & 1-12i & -9-5i \end{pmatrix}$

12 $\begin{pmatrix} 3+7i & -2+2i & 4-3i \\ -i & -2 & -7i \end{pmatrix}$

13 $\begin{pmatrix} -3+5i & 0 & i \\ -i & -4+2i & 10+3i \end{pmatrix}$

14 $\begin{pmatrix} 1-4i & 3+9i \\ -1-15i & 1+3i \\ 5+3i & -5i \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix} 11-5i & 0 & -13-2i \\ 1-2i & 2+20i & 15 \end{pmatrix}$

16 $\begin{pmatrix} -4+3i & -8 & 6-i \\ 4-i & 2-4i & -3-5i \end{pmatrix}$

17 (a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 47 & 25 \\ 12 & 26 & 12 \end{pmatrix}$, donde la posición i, j da el número de unidades del ingrediente j necesarias para el encargo i. También puede ser $A^{\mathsf{T}} \cdot B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 22 & 12 \\ 47 & 26 \\ 25 & 12 \end{pmatrix}$, donde la posición i, j da el número de unidades del ingrediente i necesarias para el encargo j. (b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 590 \\ 1250 \\ 1460 \end{pmatrix}$, o bien $C^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 590 & 1250 & 1460 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 14240 \\ 7220 \end{pmatrix}$: el costo en ingredientes para cada encargo.

18 (a) $P = \begin{pmatrix} 1200 & 1050 \\ 630 & 675 \\ 1850 & 1900 \end{pmatrix}$. (b) $C = (2 \;\; 4 \;\; 1)$.
(c) Puede ser $C \cdot P = (6770 \;\; 6700)$ o $P^{\mathsf{T}} \cdot C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 6770 \\ 6700 \end{pmatrix}$. (d) En La Bodega.

19 $\begin{pmatrix} -5 & -2-i & 4 & 5 \\ 5i & -1-i & 2i & 2i \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} -53 & 16-7i & 22 & 19 \\ 10+13i & -9-3i & -18+12i & -16+12i \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3-i & -2 & 4+3i \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} -5 & 5-2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$

24 $\begin{pmatrix} 3 & -3-i & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 4+3i & -6 \end{pmatrix}$

25 (2)

26 $\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$

27 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

30 $\begin{pmatrix} 4 & -\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 1 & -\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

32 $a = 1$

33 $a = 0$

34 No hay solución

35 No hay solución

36 $a = 0$

37 $a = \mathrm{i}$

38 $\alpha = 2$, $\beta = -3$

39 $X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

40 $Y = \begin{pmatrix} 50 & 19 \\ 37 & 12 \end{pmatrix}$

41 (a) 2×2. (b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

42 (a) 2×2. (b) No hay solución.

43 $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

44 $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

45 $2\mathrm{i} - 2$

46 $4 + 3\mathrm{i}$

47 (a) $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$.
(b) En general, $AB \neq BA$, por lo que $AB + BA \neq 2AB$ y $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Capítulo 5

1 $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 8 & 15 & 6 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & -6\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6\mathrm{i} & -1 & 22-24\mathrm{i} \\ 1 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} -3 & 1+\mathrm{i} & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 1+\mathrm{i} & -2 & 3-4\mathrm{i} \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1-3\mathrm{i} \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1+7\mathrm{i} \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix}$

7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & 14 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 14 & -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

8 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2-\mathrm{i} \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

9 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 10\mathrm{i}-1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 6-\mathrm{i} \\ 2 & -5 & 3 & 4-8\mathrm{i} \\ 1 & 4 & -2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \end{pmatrix}$

11 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 11 & -18 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 11 & -18 & -8 \\ 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

12 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 10 & 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

13
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
para x, y, z, v, w

14 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
para x, y, z, w

15
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$
para x, y, z, w, v

16 (1) $p = -13$, $q = 22/3$.
(2) $a = 22$, $b = 4$, $c = 66$.
(3) $r = 1$, $s = -4$, $t = -5$.
(4) $x = 3 - 2\mathrm{i}$, $y = 2\mathrm{i}$, $z = -5 + 3\mathrm{i}$.
(5) $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = -0.5\mathrm{i}$, $c = 1 - 2.5\mathrm{i}$.
(6) $p = 37/17$, $q = -25/17$, $r = -12/17$.
(7) $t = 69$, $u = 5/2$, $v = -59$, $w = -51/2$.

17 Vea las soluciones de los Ejercicios 25–28 del Capítulo 1.

18 (8) No hay solución.
(9) $x = 1 + 2\mathrm{i} - w$, $y = 2 - \mathrm{i} + w$, $z = 3 + 3\mathrm{i}$.
(10) $x = 2$, $y = \mathrm{i}$, $z = -\mathrm{i}$.
(11) $a = \frac{19}{7}d - 9$, $b = 25 - \frac{36}{7}d$, $c = 4 + \frac{3}{7}d$.
(12) No hay solución.
(13) $x = -\frac{4}{3}w$, $y = \frac{5}{9}w - 1$, $z = \frac{7}{18}w$, $v = w + 2$.
(14) No hay solución.
(15) $x = 1$, $y = 2z$, $w = -3v$.

20 29 de ₡10 y 14 de ₡20.

21 Tres adultos y cuatro niños.

22 Trece gallinas y cinco cerdos.

23 40 sillas y 53 mesas.

24 ₡12 000 cada arbusto y ₡25 000 cada árbol.

25 Diez horas A y quince horas B.

26 Nueve modelo A y cinco modelo B.

27 Cuarenta modelo P y sesenta modelo S.

28 18.5 kg de nueces y 6.5 kg de pasas.

29 \$ 37 000 al 9% y \$ 23 000 al 10.5%.

30 80 g de A y 60 g de B.

31 120 g de Colombia y 280 g de Costa Rica.

32 6 L al 20% y 3 L al 50%.

33 Avión 295.139 km/h y viento 17.361 km/h.

34 48.72 km

35 Once horas en Barrio Luján y ocho en Curridabat.

36 2, 5 y 8.

37 $y = -3x^2 + 5x + 3$

38 $y = -2x^2 + 4x + 7$

39 ₡300 000 al 5%, ₡400 000 al 7% y ₡900 000 al 8%.

40 Doce porciones de pastel, dieciséis de queque y veinticinco de rosquete.

41 190 kg de A, 30 kg de B y 80 kg de C.

42 Carlos 216.36 min, Gabriela 269.43 min y Martín 291.43 min.

43 $4.\bar{4}$ horas

44 10 000 en Geranio, 5000 en Gladiola y 20 000 en Girasol.

45 El mayor mide 120°. No se puede saber cuánto miden los otros (hay infinitas soluciones).

46 Dos pastillas de cada marca.

47 No hay solución.

48 11.528 km/h, 1.592 horas de ida y 1.418 horas de regreso.

49 $a = -3$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 4$

50 $w = 1$, $x = 3$, $y = -5$, $z = 0$

51 $p = 4$, $q = 3$, $r = -4$, $s = 2$, $t = 1$

52 $r = 0$, $s = 2$, $t = 3$, $u = 4$, $v = -4$

53 Vea las soluciones de los Ejercicios 25–28 del Capítulo 1.

Capítulo 6

7 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

8 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

9 $\begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/7 & 9/35 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} -1/2 & 7/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

11 $\begin{pmatrix} -1/5 & 8/15 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

12 No existe

13 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-4\mathrm{i} & 4 \\ 1-\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$

14 $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & -5 \\ -1 & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$

15 No existe

16 $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

17 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} 3+14\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2-10\mathrm{i} \\ -1 & 0 & 1 \\ -7\mathrm{i} & \mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$

19 $\begin{pmatrix} 2 & 4\mathrm{i}-3 & 2\mathrm{i}-3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 10\mathrm{i}-8 & 5\mathrm{i}-8 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} 1/2-\mathrm{i}/2 & 0 & 0 \\ -1-2\mathrm{i} & 1/2+\mathrm{i}/2 & 0 \\ 1+5\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

22 No existe

23 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/2 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

25 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

26 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+14\mathrm{i} & -1 & -7\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ -2-10\mathrm{i} & 1 & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3+14\mathrm{i} & -1 & -7\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ -2-10\mathrm{i} & 1 & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$

27 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 4 & 7 & 13 \\ 13 & 27 & 49 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ -27 & 4 & 5 \\ 17 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ -27 & 4 & 5 \\ 17 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

28 $\begin{pmatrix} 5-2\mathrm{i} & 7+\mathrm{i} & 9-4\mathrm{i} \\ -1 & -5 & -2-\mathrm{i} \\ 4 & 9 & 8+\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4-22\mathrm{i} & 51+26\mathrm{i} & 29+32\mathrm{i} \\ 3 & 6\mathrm{i}-5 & 3\mathrm{i}-5 \\ 11\mathrm{i} & -22-17\mathrm{i} & -11-18\mathrm{i} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4-22\mathrm{i} & 51+26\mathrm{i} & 29+32\mathrm{i} \\ 3 & 6\mathrm{i}-5 & 3\mathrm{i}-5 \\ 11\mathrm{i} & -22-17\mathrm{i} & -11-18\mathrm{i} \end{pmatrix}$

29 $\begin{pmatrix} 8 & \mathrm{i} & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3-4\mathrm{i} & -3-2\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -8-10\mathrm{i} & -8-5\mathrm{i} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -3-4\mathrm{i} & -3-2\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -8-10\mathrm{i} & -8-5\mathrm{i} \end{pmatrix}$

30 (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 58 & -8 & -1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 0 \\ -56 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 1 & 0 \\ 56 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

31 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & -5 \\ 1 & -36/5 & -5 \end{pmatrix}$

32 $\begin{pmatrix} -1/12 & -1/4 \\ 3/4 & 13/4 \end{pmatrix}$

33 $a=-4$, $b=-10$, $c=7$

34 $x=-49/3$, $y=-8$, $z=68/3$

35 $p=-43$, $q=-14$, $r=24$

36 $u=1$, $v=14$, $w=10$

37 $p=4$, $q=-1$, $r=2\mathrm{i}$

38 $x=4+10\mathrm{i}$, $y=5$, $z=9+25\mathrm{i}$

Capítulo 7

1 $-20, \;\; 4$

2 $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}, \;\; -80, \;\; -80$

3 $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 \\ -1/4 & -2/5 \end{pmatrix}, \;\; -1/20, \;\; -1/20$

4 $14+14\mathrm{i}, \;\; 14+14\mathrm{i}, \;\; 14-14\mathrm{i}$

5 74

6 $-36+27\mathrm{i}$

7 156

8 -72

9 $-1-11\mathrm{i}$

10 -286

11 $1, \;\; -2, \;\; -1$

12 $1+\mathrm{i}, \;\; 1-\mathrm{i}$

13 $0, \;\; \mathrm{i}, \;\; -\mathrm{i}$

14 $1+\mathrm{i}, \;\; 4-2\mathrm{i}$

16 -405

17 -1600

18 $-1700\mathrm{i}$

19 $340+440\mathrm{i}$

20 $2+2\mathrm{i}, \;\; 1-2\mathrm{i}$

21 -8

22 $8\mathrm{i}$

23 8

24 -240

25 $q=(\mathrm{i}-3)/5$

26 $c=(9+18\mathrm{i})/5$

27 Vea la solución del Ejercicio 16 del Capítulo 5.

28 $w=-51/2$

29 Vea las soluciones de los Ejercicios 25–28 del Capítulo 1.

30 12

31 (a) $k \neq 3$; (b) nunca; (c) $k=3$

32 (a) $k \notin \{-2,1\}$; (b) $k=-2$; (c) $k=1$

33 (a) $k \notin \{-3 \pm 6\mathrm{i}\}$; (b) nunca; (c) $k \in \{-3 \pm 6\mathrm{i}\}$.

34 (a) $k \notin \{0, \pm\mathrm{i}\}$; (b) $k=\pm\mathrm{i}$; (c) $k=0$

35 $-3, \;\; 4$

36 Cualquier α

37 $\begin{pmatrix} 0 & 20\mathrm{i} & 0 \\ -10\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 4+12\mathrm{i} & 8 \end{pmatrix}$

38 Vea las soluciones de los Ejercicios 16–24 del Capítulo 6.