Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Segundo examen parcial
I semestre - 2023

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. Considere la variable aleatoria discreta Y, cuya distribución de probabilidad se muestra a continuación:
$$f_Y(x) = k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}, \text{ para } x \in \{1, 2, \ldots\} \ .$$

   a) **[3 puntos]** Determine el valor de k.

   b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la variable Y tome valores superiores a 4?

   c) **[5 puntos]** Determine la función generadora de momentos para la variable Y, y úsela para calcular $Var(Y)$.

Solución.

a) Para determinar el valor de k, se suma todas las imágenes, y se iguala a 1. Con esto:
$$\sum_{i=1}^{+\infty} k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{i}} \Rightarrow k = \frac{4}{5}.$$

b) $P[Y > 4] = 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} = \frac{1}{625} = 0.00016.$

c) Note que:
$$m_Y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{it} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} = 4 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{e^t}{5}\right)^{i} = 4 \cdot \frac{\frac{e^t}{5}}{1 - \frac{e^t}{5}} \qquad \text{, siempre que } \left|\frac{e^t}{5}\right| < 1$$

Así: $m_Y(t) = \dfrac{4e^t}{5 - e^t}$, con $t < \ln(5) \approx 1.609437$. Además, como $m'_Y(t) = \dfrac{20e^t}{(5 - e^t)^2}$ y $m''_Y(t) = \dfrac{20e^t(5 + e^t)}{(5 - e^t)^3}$, entonces:

$E(Y) = \dfrac{5}{4} = 1.25$, y $Var(Y) = \dfrac{15}{8} - \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{5}{16} = 0.3125.$

2. Para esta sede, suponga que el grupo de Probabilidades está formado por 40 estudiantes, y de estos, 22 viven actualmente fuera de la provincia. El profesor tomará una muestra aleatoria de 20 estudiantes.

   a) **[3 puntos]** Determine el rango y la distribución de probabilidad para la variable Z, correspondiente a la cantidad de estudiantes, de la muestra, que actualmente viven fuera de la provincia.

   b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que, en dicha muestra, hayan entre 3 y 10 que actualmente viven fuera de la provincia?

   Solución.

   a) Note que $R_Z = \{2, 3, \ldots, 20\}$, y además $Z \sim HG\,(20, 40, 22)$, por lo que:

$$f_Z\,(x) = \frac{\binom{22}{x} \cdot \binom{18}{20-x}}{\binom{40}{20}}.$$

   b) $$P\,[3 \leq Z \leq 10] = \sum_{i=3}^{10} \frac{\binom{22}{i} \cdot \binom{18}{20-i}}{\binom{40}{20}} = 0.375593.$$

$$P\,[3 < Z < 10] = \sum_{i=4}^{9} \frac{\binom{22}{i} \cdot \binom{18}{20-i}}{\binom{40}{20}} = 0.170321.$$

3. En un concurso, nueve participantes deben seguir una rutina de ejercicios durante un mes para participar por premios.

   a) **[3 puntos]** En cada rutina se propone cierta cantidad de ejercicios para realizar. Cada ejercicio tiene una probabilidad de 0.4 de que se efectúe satisfactoriamente. Si el participante realiza ~~más de 4 ejercicios~~ *el ejercicio satisfactorio antes del cuarto ejercicio* en su rutina, entonces logrará terminar la rutina. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante logre terminar la rutina?

   b) **[2 puntos]** Determine la probabilidad de que por lo menos 5 participantes terminen la rutina.

   Solución.

   a) Si X es la cantidad de ejercicios que debe hacer una persona hasta obtener un ejercicio satisfactorio, entonces $X \sim Geo\,(0.4)$.

   Por lo tanto, la probabilidad de que un participante termine la rutina es $P\,[X < 4] = \sum_{i=1}^{3} (0.6)^{i-1} \cdot (0.4) = \frac{98}{125} = 0.784$.

b) Si W es la cantidad de participantes que terminan la rutina, de los 9, entonces $W \sim Bin\,(9, 0.784)$.

Así, se solicita: $P\left[W \geq 5\right] = \displaystyle\sum_{i=5}^{9} \binom{9}{i} \cdot (0.784)^{i} \cdot (0.216)^{9-i} = 0.972986.$

4. Durante la explicación de un tema, la cantidad de veces que un profesor dice la expresión "¿verdad?" sigue una distribución de Poisson, con media 5 veces por minuto.

   a) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que diga menos de 15 veces la expresión mencionada en 10 minutos de explicación?

   b) **[3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que dos expresiones "¿verdad?" seguidas, durante la explicación, se den en menos de 10 segundos?

Solución.

   a) Si X es la cantidad de veces que dice la expresión en 10 minutos, entonces $X \sim Poisson\,(50)$, por lo que la probabilidad solicitada es:

   $$P\,[X < 15] = \sum_{i=0}^{14} \frac{50^i \cdot e^{-50}}{i!} = 0.000000001 \approx 1.856802 \times 10^{-9}.$$

   b) Si Y es la cantidad de veces que dice la expresión en 10 segundos, entonces $Y \sim Poisson\left(\frac{5}{6}\right)$, por lo que la probabilidad solicitada es:

   $$P\,[Y = 2] = \frac{(5/6)^2 \cdot e^{-5/6}}{2!} = 0.150902.$$

5. **[5 puntos]** Un experimento aleatorio se va a repetir hasta obtener un éxito y un fracaso consecutivos (sin importar el orden). Se sabe que la probabilidad de éxito es 0.2. Determine el rango y la distribución de probabilidad para la cantidad de repeticiones que se deben hacer hasta terminar dicho experimento.

   Solución.

   Es posible hacer algunas exploraciones para ver la dinámica del comportamiento, y descubrir que el rango va de 2 en adelante, y si X es la variable total de repeticiones entonces para que alcance el valor k debe ocurrir alguno de los eventos siguientes:

   Fracaso en los $k-1$ ensayos iniciales y un éxito en la k-ésima repetición, o bien éxito en los $k-1$ ensayos iniciales y un fracaso en la k-ésima repetición. Con esto:

   $f_X\,(k) = (0.8)^{k-1} \cdot (0.2) + (0.2)^{k-1} \cdot (0.8)$, para cualquier $k \in \{2, 3, \ldots\}$.

Todo lo que existe o surge: lo pasado, lo presente y lo futuro tiene en sí la máxima certeza.

Jakob Bernoulli.