Tarea #1

1. Considere la sucesión definida por:

$$x_{n+1} = x_n + 1 - \cos(n)$$

donde $x_0 = 1$. Determine si la sucesión es creciente, decreciente o no monótona.

Prueba:

$f(x_1) = x_0 + 1 - \cos(0) = 1$

$f(x_2) = x_1 + 1 - \cos(1) = 1,459$

$f(x_3) = x_2 + 1 - \cos(2) = 2,875$

$f(x_4) = x_3 + 1 - \cos(3) = 4,865$

$f(x_5) = x_4 + 1 - \cos(4) = 6,519$

Como se puede observar la sucesión parece ser creciente. Dado que x_0 es positivo y $\cos(x)$ posee un ámbito de $[-1, 1]$, la expresión "$1 - \cos(n)$" siempre será positivo en el dominio de esta sucesión. Por lo que si le sumamos a algo positivo otra expresión positiva, eso va siempre a crecer.

2. Calcule el valor de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \left(\frac{-2}{3}\right)^n \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}}_{\text{SERIE TELESCÓPICA}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n}_{\text{SERIE GEOMÉTRICA}} \qquad \left|\frac{-2}{3}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^1}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} + {}^{-2}/_{5} \Rightarrow \star$$

$$= \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{(n+1)} + \frac{B}{(n+2)} + \frac{C}{(n+3)} + \star$$

$$= \frac{n}{\cancel{(n+1)(n+2)(n+3)}} = \frac{A(n+2)(n+3) + B(n+1)(n+3) + C(n+1)(n+2)}{\cancel{(n+1)(n+2)(n+3)}} + \star$$

$n = -1$

$-1 = A(-1+2)(-1+3) \Rightarrow A = -1/2$

$n = -2$

$-2 = B(-2+1)(-2+3) \Rightarrow B = 2$

$n = -3$

$-3 = C(-3+1)(-3+2) \Rightarrow C = -3/2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/2}{(n+1)} + \frac{2}{(n+2)} + \frac{-3/2}{(n+3)} + \bigstar$$

Si tomamos $b_n = \dfrac{-1/2}{(n+1)}$ entonces $b_{n+1} = \dfrac{-1/2}{(n+2)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/2}{(n+1)} + \underbrace{\frac{1/2}{(n+2)} \overbrace{- \frac{1/2}{(n+2)}}_{\text{CERO A CONVENIENCIA}} + \frac{2}{(n+2)}}^{\text{SUMAR}} - \frac{3/2}{(n+3)} + \bigstar$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1/2}{(n+2)}}_{b_{n+1}} - \underbrace{\frac{1/2}{(n+1)}}_{b_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3/2}{(n+2)}}_{x_n} - \underbrace{\frac{3/2}{(n+3)}}_{x_{n+1}} + \bigstar$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cancelto{0}{\frac{1/2}{n+2}} - 1/4 + 1/2 - \lim_{n\to\infty} \cancelto{0}{\frac{3/2}{n+3}} + \bigstar$$

$$= \frac{1}{4} - \bigstar = \frac{-3}{20} \text{ , con } \bigstar = -2/5$$

3. Considere la serie $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+sen(n))^n}{4^{n+1}}$$

$$-1 \leq sen(n) \leq 1$$ > Criterio de comparación directa.

$$= 2-1 \leq 2+sen(n) \leq 1+2$$

$$= (1)^n \leq (2+sen(n))^n \leq (3)^n$$

$$= \frac{n \cdot 1^n}{4^{n+1}} \leq \frac{n(2+sen(n))^n}{4^{n+1}} \leq \frac{n \cdot 3^n}{4^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

SERIE GEOMÉTRICA.

De este modo, se compara con la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ que corresponde a una serie geométrica convergente, pues $|r| = 3/4 < 1$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n \cdot 3^n}{4^{n+1}}}{\frac{3^n}{4^n}} = 0$$

Como el límite es finito positivo la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+sen(n))^n}{4^{n+1}}$ converge por criterio de comparación al límite.

4. Considere la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right)$$ > SERIE ALTERNADA

a) Determine si la serie converge o diverge.

Se debe demostrar que:

1. $b_n = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$ es decreciente.
2. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

1.
$$b_{n+1} \leq b_n$$

$$= \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2} \leq \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$$

$$= \cancel{n}+4 - \cancel{n}-2 \leq \cancel{n}+3 - \cancel{n}-1$$

$$= 2 \leq 2$$

∴ Es decreciente.

2. $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \qquad k/\infty = 0$$

$$= 0$$

$\therefore$ La serie converge por el criterio de Leibniz.

b) ¿Cuántos terminos debe de considerar la suma parcial de la serie, para garantizar que el error de aproximación sea menor a 0.001?

$$b_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$$

$$b_{n+1} \leq 0,001$$

$$= \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2} \leq \frac{1}{1000}$$

$$= 1000 \leq \frac{1}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}$$

Se prueba con n hasta que esto se cumpla. Para este caso es cuando n= 1000 000.

5. Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)!\,(2x+3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(n-1)!\,(2x+3)^{n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+5)}}{\dfrac{(n-2)!\,(2x+3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+3)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n-1)\cancel{(n-2)!}\cancel{(2x+3)^n}(2x+3)\cdot[3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+3)]}{[3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+5)]\ \cancel{(n-2)!}\ \cancel{(2x+3)^n}} \right|$$

$$= |2x+3| \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)[\cancel{3\cdot 5\cdot 7}\cdot \ldots \cdot \cancel{(2n+3)}]}{[\cancel{3\cdot 5\cdot 7}\cdot \ldots \cdot (2n+5)]}$$

$$= |2x+3| \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)}{(2n+5)}$$

$$= \left|\frac{2x+3}{2}\right| < 1$$

$$= |2x+3| < 2$$

$$= -2 < |2x+3| < 2$$

$$= -5 < 2x < -1$$

$$= \frac{-5}{2} < x < \frac{-1}{2}$$

$\therefore\ ]-5/2\ ,\ -1/2[$ es el intervalo de convergencia.