Escuela de Matemáticas

Vectores y espacios vectoriales

M. Sc. Luis Alejandro Acuña P.

2014

Contenido

Nota

Este folleto es parte de una serie de folletos desarrollados para el curso “Cálculo y álgebra lineal”. Cada uno contiene, además de los capítulos indicados abajo, un apéndice con sugerencias para los ejercicios más difíciles y otro apéndice con las soluciones de casi todos los ejercicios.

Los folletos son:

Los números complejos

Cap. 1: El álgebra de los números complejos

Cap. 2: La geometría de los números complejos

Cap. 3: Funciones de números complejos

Matrices y sus aplicaciones

Cap. 4: Matrices

Cap. 5: Sistemas de ecuaciones lineales

Cap. 6: Inversa de una matriz

Cap. 7: Determinantes

Vectores y espacios vectoriales

Cap. 8: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Cap. 9: Producto escalar y producto vectorial

Cap. 10: Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

Cap. 11: Espacios vectoriales

Cap. 12: Independencia lineal y bases

Cap. 13: Vectores propios y valores propios

Capítulo 8
Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En este capítulo y los dos siguientes hablaremos acerca de la geometría y el álgebra del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$. El primero es bien conocido: $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de pares ordenados (x, y) con $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$, y cada par puede representarse como un punto en el plano. El segundo, el espacio $\mathbb{R}^3$, no lo habíamos mencionado hasta ahora pero, como veremos pronto, este es el conjunto de triples ordenados (x, y, z) donde cada triple puede representarse como un punto en el espacio tridimensional.

Pero además de ser considerados como conjuntos de puntos, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ pueden considerarse como conjuntos de vectores, lo cual tiene muchas aplicaciones, particularmente en la Física. En este capítulo hablaremos de las propiedades y operaciones fundamentales de los vectores en el plano y en el espacio.

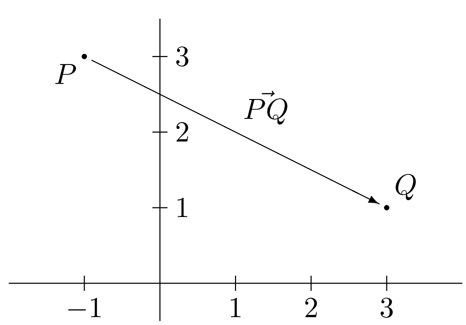
8.1 Vectores en $\mathbb{R}^2$

Hay muchas formas de pensar en un vector. En general, se acostumbra distinguir entre las cantidades escalares, las que se describen con un número y probablemente una unidad de medida (como temperatura, masa o precio), y por otro lado las cantidades vectoriales, las que se caracterizan por una magnitud y una dirección (como desplazamiento, velocidad o fuerza).

Podríamos decir que un vector es una cantidad con magnitud y dirección, como se hace en Física, o podríamos decir también que un vector es un desplazamiento entre dos puntos. Todavía una tercera forma de describir un vector, que es la que adoptaremos aquí por el momento, es decir que un vector es un segmento dirigido. Esto significa que un vector es el segmento de recta desde un punto inicial hasta un punto terminal.

Ejemplo 1: vector entre dos puntos

Si tomamos los puntos $P = (-1, 3)$ y $Q = (3, 1)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, entonces el vector de P a Q, denotado $\vec{PQ}$, es el que muestra la figura.



Si llamamos v al vector $\vec{PQ}$, entonces v tiene punto inicial P y punto terminal Q. El desplazamiento de v consiste en 4 unidades horizontales (hacia la derecha, de -1 a 3) y -2 unidades verticales (hacia abajo, de 3 a 1).

La longitud o magnitud de v puede calcularse usando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4.47214$ unidades lineales.

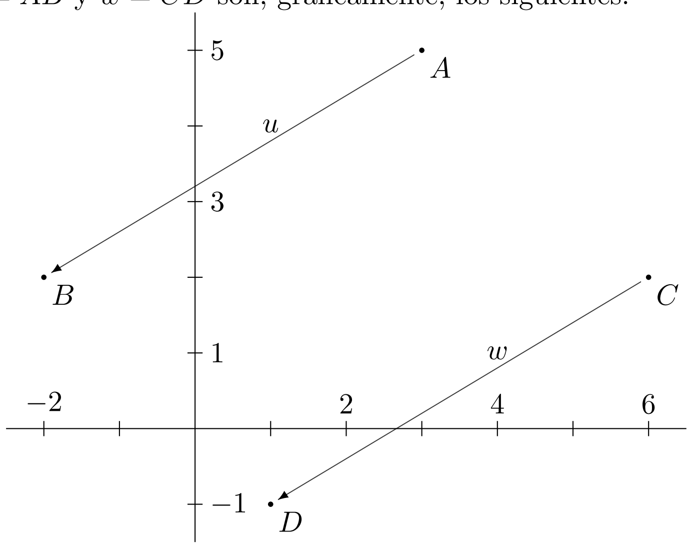
Repaso

Calcule la longitud del vector desde $A = (2, -2)$ hasta $B = (3, 1)$.

Solución: $\sqrt{10}$

Ejemplo 2: dos vectores con igual magnitud e igual dirección

Dados los puntos $A = (3, 5)$, $B = (-2, 2)$, $C = (6, 2)$ y $D = (1, -1)$, los vectores $u = \vec{AB}$ y $w = \vec{CD}$ son, gráficamente, los siguientes:



En la figura vemos que u y w parecen tener la misma magnitud y la misma dirección. En efecto, cada uno de ellos tiene un desplazamiento de -5 unidades horizontales y -3 verticales, y sus magnitudes son ambas $\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \approx 5.83095$.

En el ejemplo anterior, aunque los vectores u y w tienen distintos puntos iniciales y terminales, podemos considerarlos equivalentes por tener la misma longitud y dirección. De hecho, dos vectores con la misma longitud y dirección se consideran *iguales* aunque sus puntos iniciales sean distintos. En vista de eso, vamos a revisar nuestra forma de describir un vector en $\mathbb{R}^2$. Ya no necesitamos hablar de un punto inicial y un punto terminal, sino solamente de los desplazamientos horizontal y vertical.

Definición (vector en $\mathbb{R}^2$)

Un *vector* en el plano está determinado por su desplazamiento horizontal y su desplazamiento vertical. Se denota $v = \langle a, b\rangle$ al vector que se desplaza a unidades horizontales (hacia la derecha si a es positivo o hacia la izquierda si es negativo) y b unidades verticales (hacia arriba si $b > 0$ o hacia abajo si $b < 0$).

La *magnitud*, *longitud* o *norma* de $v = \langle a, b\rangle$ es el número $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El vector v está en *posición estándar* si su punto inicial es $(0, 0)$.

El *vector cero* es $\vec{0} = \langle 0, 0\rangle$.

En general, si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, entonces el vector $v = \vec{PQ}$ tiene un desplazamiento de $x_2 - x_1$ unidades horizontales y $y_2 - y_1$ verticales, y entonces $v = \langle x_2 - x_1,\, y_2 - y_1\rangle$. Si aceptamos restar los puntos P y Q como si fueran matrices de tamaño 1×2, entonces podemos escribir $\vec{PQ} = Q - P$. En el primer ejemplo, $v = (3, 1) - (-1, 3) = \langle 4, -2\rangle$, y en el segundo, $u = w = \langle -5, -3\rangle$.

Note que si un vector $v = \langle a, b\rangle$ está en posición estándar, entonces su punto terminal es (a, b). Note también la diferencia entre (a, b) y $\langle a, b\rangle$: el primero es solamente un punto; el segundo es el vector desde el origen hasta el punto (a, b).

Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^2$

Los vectores, a diferencia de los puntos, no solo "están ahí" sino que pueden interactuar entre ellos. Las dos operaciones fundamentales entre vectores son la suma de dos vectores y el producto de un escalar por un vector[1]. En el capítulo siguiente veremos dos tipos de producto entre vectores.

Definición (operaciones con vectores en $\mathbb{R}^2$)

Si $v = \langle v_1, v_2\rangle$ y $w = \langle w_1, w_2\rangle$ son dos vectores en $\mathbb{R}^2$, y si $c \in \mathbb{R}$, entonces

- La *suma* de v y w es $v + w = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle$.
- El *producto* de c y v es $cv = \langle cv_1, cv_2\rangle$.

Ejemplo 3: operaciones con vectores en $\mathbb{R}^2$

Sean $v = \langle 1, 3\rangle$ y $w = \langle -2, 1\rangle$, con longitudes $\|v\| = \sqrt{10} \approx 3.16228$ y $\|w\| = \sqrt{5} \approx 2.23607$.

- $v + w = \langle 1, 3\rangle + \langle -2, 1\rangle = \langle 1 - 2, 3 + 1\rangle = \langle -1, 4\rangle$
- $-3w = -3\langle -2, 1\rangle = \langle -3(-2), -3(1)\rangle = \langle 6, -3\rangle$

[1]En el contexto de matrices habíamos definido "escalar" como un número real o complejo. En el contexto de vectores la definición es la misma, aunque por ahora nos restringiremos a los reales.

- $\|v+w\| = \|\langle -1,4\rangle\| = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{17} \approx 4.12311$
- $\|-3w\| = \|\langle 6,-3\rangle\| = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Repaso

Para los mismos vectores del ejemplo, calcule $v-2w$ y su norma.

Solución: $v-2w = \langle 5,1\rangle$ y $\|v-2w\| = \sqrt{26}$

Algunas calculadoras científicas tienen un modo para trabajar con vectores. Si usted tiene una, puede resolver así el ejercicio del repaso anterior.

En el modo de vectores, digite los vectores de manera similar a como se describe en la página 73 (allá para matrices), indicando que son de tamaño 2. Si los llamó `VctA` y `VctB` entonces escriba

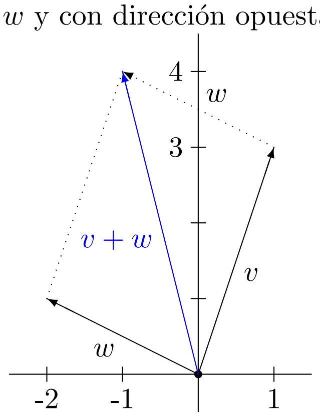
```
[VECTOR] VctA - 2 [VECTOR] VctB =
```

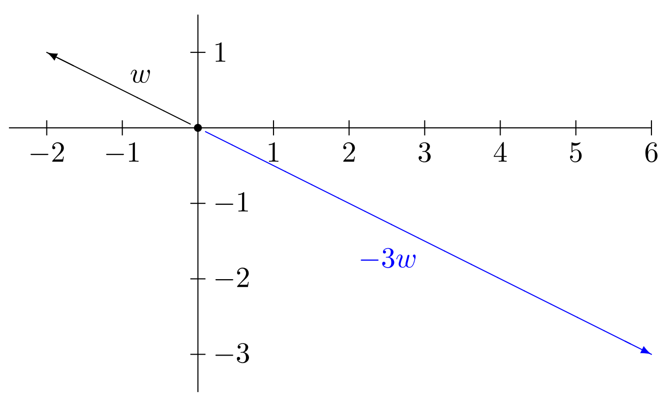
y, para la norma del resultado,

```
[Abs(] [VECTOR] VctAns ) =
```

En el ejemplo anterior podemos interpretar v y w en términos de sus desplazamientos: 1 a la derecha y 3 hacia arriba, y 2 a la izquierda y 1 hacia arriba, respectivamente. Entonces $v+w = \langle -1,4\rangle$ es el desplazamiento que resulta de conectar los desplazamientos de v y w en secuencia: 1 a la derecha seguido por 2 a la izquierda resulta en 1 a la izquierda, y 3 hacia arriba seguido por 1 hacia arriba resulta en 4 hacia arriba: $\langle -1,4\rangle$.

En la siguiente figura a la izquierda tenemos la representación gráfica de $v+w$ según esta idea: al dibujar v en posición estándar y luego una copia de w iniciando en el punto terminal de v, el nuevo punto terminal de w será el resultado de la suma. La figura a la derecha muestra la interpretación gráfica de $-3w$: es un vector con el triple de la longitud de w y con dirección opuesta.





Note en el ejemplo anterior que $\|w\| = \sqrt{5}$ y que $\|-3w\| = 3\sqrt{5}$. Esto confirma lo que dijimos en el párrafo anterior, que $-3w$ es un vector con el triple de la longitud de w.

Note también, en el gráfico de $v+w$, que los vectores v, w y $v+w$ forman un triángulo. En realidad v y w forman un paralelogramo, del cual $v+w$ es una diagonal. Y como en todo triángulo, la longitud de cualquiera de los lados es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos. En efecto, $\|v+w\| \approx 4.12311 \leq \|v\| + \|w\| \approx 5.39835$.

El siguiente teorema generaliza las dos observaciones anteriores.

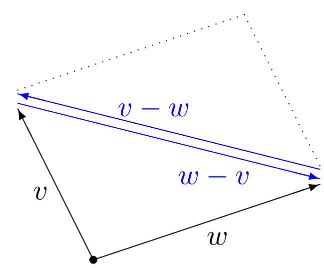
Teorema

Si v y w son dos vectores y c es un escalar, entonces

- $\|cv\| = |c|\,\|v\|$
- $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Para las demostraciones vea los Ejercicios 14 y 15.

Vimos que al sumar dos vectores v y w, la suma $v+w$ es una de las diagonales del paralelogramo formado por ellos. ¿Y qué hay de la otra diagonal? Resulta que esa otra diagonal es, precisamente, uno de los vectores $v-w$ o $w-v$, dependiendo de la dirección. Vea el siguiente gráfico.



Podemos confirmar que la diagonal de izquierda a derecha es $w-v$ notando que al sumar el vector izquierdo, v, con esta diagonal, el resultado es $v+(w-v) = w$, como muestra el diagrama. Igualmente, en el diagrama se observa que $w+(v-w) = v$, como debe ser.

Otras definiciones

Veamos algunas definiciones más para vectores en $\mathbb{R}^2$.

Definición (vectores paralelos)

Dos vectores v y w son *paralelos* si uno de ellos es múltiplo escalar del otro. En ese caso se escribe $v \parallel w$.

Dos vectores paralelos tienen la *misma dirección* si el escalar es positivo, o *direcciones opuestas* si el escalar es negativo.

Definición (combinación lineal)

Si v y w son vectores, una combinación lineal de ellos es un vector de la forma $av + bw$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Más en general, si $v_1, \ldots, v_n$ son vectores, una combinación lineal de ellos es un vector de la forma $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, los vectores w y $-3w$ del ejemplo anterior son paralelos, con direcciones opuestas porque el escalar es -3, negativo. Los vectores $v + w$, $-3w$ y $v - 2w$ son combinaciones lineales de v y w.

Definición (vectores unitarios)

Un *vector unitario* es uno con norma igual a 1.

Los *vectores unitarios estándar* en $\mathbb{R}^2$ son $\vec{\mathrm{i}} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\vec{\mathrm{j}} = \langle 0, 1 \rangle$.

Cualquier vector $\langle a, b \rangle$ puede escribirse fácilmente como combinación lineal de los vectores unitarios estándar, de la manera

$$\langle a, b \rangle = a\vec{\mathrm{i}} + b\vec{\mathrm{j}}$$

Por ejemplo, $\langle 5, -2 \rangle = 5\vec{\mathrm{i}} - 2\vec{\mathrm{j}}$.

Si v es un vector distinto de cero, entonces el vector $v' = \frac{1}{\|v\|} v$ es un vector unitario con la misma dirección que v, porque su norma es

$$\|v'\| = \|\tfrac{1}{\|v\|} v\| = |\tfrac{1}{\|v\|}| \, \|v\| = 1$$

y además el escalar que los relaciona es $1/\|v\|$, positivo.

Ejemplo 4: combinación lineal

Escribir $w = \langle 3, 21 \rangle$ como combinación lineal de $x = \langle 3, -4 \rangle$, $y = \langle 6, 2 \rangle$.

Necesitamos encontrar dos escalares a y b tales que $ax + by = w$, es decir

$$a\langle 3, -4 \rangle + b\langle 6, 2 \rangle = \langle 3, 21 \rangle$$

Como $a\langle 3, -4 \rangle + b\langle 6, 2 \rangle = \langle 3a + 6b, -4a + 2b \rangle$, podemos plantear el sistema

$$\begin{cases} 3a + 6b = 3 \\ -4a + 2b = 21 \end{cases}$$

cuya solución es $a = -4$, $b = 2.5$. En conclusión,

$$\langle 3, 21 \rangle = -4\langle 3, -4 \rangle + 2.5\langle 6, 2 \rangle$$

Repaso

Escriba $w = \langle 3, 21\rangle$ como combinación lineal de $u = \langle -2, 1\rangle$ y $v = \langle 1, 4\rangle$.

Solución: $w = u + 5v$

Ejemplo 5: vector unitario

Para obtener un vector unitario con la misma dirección que $u = \langle -4, 3\rangle$ basta tomar

$$u' = \frac{1}{\|\langle -4, 3\rangle\|}\langle -4, 3\rangle = \frac{1}{\sqrt{16+9}}\langle -4, 3\rangle = \frac{1}{5}\langle -4, 3\rangle = \langle -0.8, 0.6\rangle$$

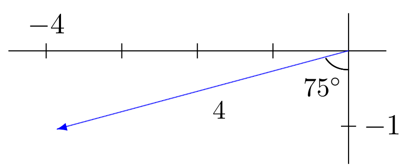
Repaso

Encuentre un vector unitario con la dirección de $w = \langle 4, -2\rangle$.

Solución: $\langle 2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}\rangle$

Ejemplo 6: encontrar un vector con longitud y dirección dadas

Encontrar un vector en el tercer cuadrante, con longitud 4, que forme un ángulo de $75°$ con el eje Y. Vea el gráfico.



Si denotamos el vector $v = \langle a, b\rangle$, entonces

$$a = -4\,\mathrm{sen}(75°) \approx -3.86370 \quad \text{y} \quad b = -4\cos(75°) \approx -1.03528$$

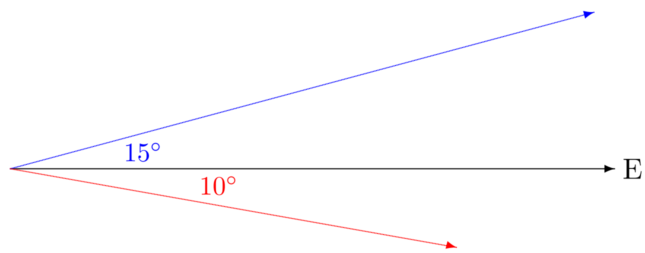
Entonces $v = \langle -3.86370, -1.03528\rangle$.

Repaso

Encuentre un vector en el segundo cuadrante, con longitud 2, que forme un ángulo de $20°$ con el eje X. Solución: $\langle -1.87939, 0.684040\rangle$

Ejemplo 7: aplicación de la suma de vectores

Dos tractores están jalando un camión que está atascado. El primero ejerce una fuerza de 10 000 N en dirección 15° al Norte de la dirección Este, y el segundo 7 500 N en dirección 10° al Sur del Este, como en el siguiente diagrama.



Si denotamos con f_1 y f_2 los vectores de fuerza correspondientes a cada tractor, entonces la fuerza total resultante es la suma $F = f_1 + f_2$. Para calcularla encontramos primero las coordenadas de cada vector:

$$f_1 = \langle (f_1)_x,\, (f_1)_y \rangle \quad \text{y} \quad f_2 = \langle (f_2)_x,\, (f_2)_y \rangle$$

donde

$$\begin{aligned} (f_1)_x &= 10\,000 \cos 15^\circ \approx 9659.26 & (f_2)_x &= 7500 \cos(-10^\circ) \approx 7386.06 \\ (f_1)_y &= 10\,000 \operatorname{sen} 15^\circ \approx 2588.19 & (f_2)_y &= 7500 \operatorname{sen}(-10^\circ) \approx -1302.36 \end{aligned}$$

Entonces el vector resultante es $F = f_1 + f_2 \approx \langle 17045.3, 1285.83 \rangle$, cuya magnitud es

$$\|F\| = \sqrt{17045.3^2 + 1285.83^2} \approx 17093.7\,\text{N}$$

y su ángulo es

$$\alpha = \arctan \frac{1285.83}{17045.3} \approx 4.3140^\circ$$

hacia el Norte desde la dirección Este (la magnitud y la dirección de F pueden obtenerse en una calculadora convirtiendo a coordenadas polares).

En la Sección 9.2 veremos cómo calcular el ángulo entre dos vectores arbitrarios.

Ejercicios

Dados los vectores $u = \langle 2, 2 \rangle$, $v = \langle 4, -2 \rangle$ y $w = \langle 0, -3 \rangle$, encuentre:

1. $2u - v + w$

2. $-3u + 5w$

3. $6(u - 2v) + 2(v - 3w)$

4. $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$

5. Tres escalares a, b y c tales que $au + bv + cw = \langle 18, -3 \rangle$ y $a + b + c = 1$.

6. Encuentre un vector en el segundo cuadrante, con norma 4, que sea paralelo a $\langle 2, -3 \rangle$.

7. Encuentre un vector con longitud 6 y dirección opuesta a $\langle -2, 7\rangle$.

8. Encuentre dos vectores unitarios paralelos a $\langle -5, 12\rangle$.

9. Si $x = \langle 3, -1\rangle$ y $y = \langle 2, 3\rangle$, encuentre dos escalares a y b tales que $ax + by = \langle 5, 5\rangle$.

10. Encuentre todos los pares de vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$ tales que

- $x \parallel \langle 1, 2\rangle$
- $x + y = \langle 2, 2\rangle$
- $\|y\| = 1$

11. Encuentre un vector v en el segundo cuadrante, con longitud 2, que forme un ángulo de $\pi/6$ con el eje Y.

12. Un avión se dirige en dirección 32° Norte del Oeste y su velocidad relativa al aire es de 800 km/h. El viento sopla hacia el Sur con una velocidad de 40 km/h. ¿Cuál es la velocidad resultante del avión (magnitud y dirección)?

13. Demuestre que los puntos $P = (-3, 9)$, $Q = (-1, 10)$ y $R = (1, 6)$, forman un triángulo rectángulo.

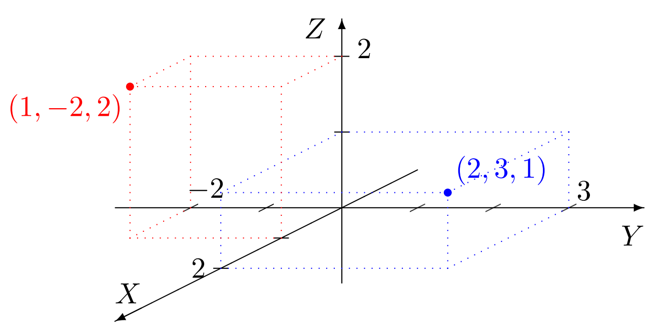
14. Demuestre que si $u \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\|cu\| = |c|\,\|u\|$.

15. Demuestre que si $u, v \in \mathbb{R}^2$ entonces $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

8.2 Vectores en $\mathbb{R}^3$

Así como $\mathbb{R}^2$ puede identificarse con el plano cartesiano asignando a cada par (x, y) el punto con coordenada horizontal x y coordenada vertical y, así el conjunto $\mathbb{R}^3 = \{\, (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \,\}$ puede identificarse con el espacio tridimensional. Ahora no solo tenemos un eje horizontal y un eje vertical, como en $\mathbb{R}^2$. La representación usual de puntos en $\mathbb{R}^3$ se basa en un eje X horizontal que apunta hacia uno (el lector), un eje Y también horizontal que apunta hacia la derecha, y un eje Z vertical que apunta hacia arriba[2].

El siguiente gráfico muestra las posiciones de los puntos $(2, 3, 1)$ y $(1, -2, 2)$ en el sistema de coordenadas XYZ.



[2]En realidad cada eje apunta en dos direcciones opuestas; aquí mencionamos las direcciones positivas.

La distancia entre dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

y el punto medio del segmento que los une es $m = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right)$.

En forma casi idéntica a como definimos vectores en $\mathbb{R}^2$, ahora tenemos las siguientes definiciones y propiedades para vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definición (vector en $\mathbb{R}^3$)

Un *vector* en el espacio está determinado por su desplazamiento en la dirección de cada uno de los tres ejes. Se denota $v = \langle a, b, c\rangle$ al vector que se desplaza a unidades en la dirección del eje X (hacia el frente si $a > 0$ o hacia atrás si $a < 0$), b unidades en la dirección del eje Y (hacia la derecha si $b > 0$ o hacia la izquierda si $b < 0$) y c unidades en la dirección del eje Z (hacia arriba si $c > 0$ o hacia abajo si $c < 0$).

La *magnitud*, *longitud* o *norma* de $v = \langle a, b, c\rangle$ es el número $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

El vector v está en *posición estándar* si su punto inicial es $(0, 0, 0)$.

El *vector cero*[3] es $\vec{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$.

Definición (operaciones con vectores en $\mathbb{R}^3$)

Si $v = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ y $w = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$, y si $c \in \mathbb{R}$, entonces

- La *suma* de v y w es $v + w = \langle v_1 + w_1,\ v_2 + w_2,\ v_3 + w_3\rangle$.
- El *producto* de c y v es $cv = \langle cv_1,\ cv_2,\ cv_3\rangle$.

El siguiente teorema es una copia textual del correspondiente en la sección anterior, pero ahora el contexto es $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Si v y w son dos vectores y c es un escalar, entonces

- $\|cv\| = |c|\,\|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

[3] Se usa el mismo símbolo, $\vec{0}$, para denotar al vector cero en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. En general, por el contexto será claro si $\vec{0} = \langle 0, 0\rangle$ o si $\vec{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$.

De la misma manera, las definiciones de vectores paralelos, combinaciones lineales y vectores unitarios se mantienen idénticas aquí a como eran en $\mathbb{R}^2$. La única otra definición que necesitamos adaptar es la de los vectores unitarios estándar: en $\mathbb{R}^3$ ellos son

$$\vec{\mathrm{i}} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \vec{\mathrm{j}} = \langle 0, 1, 0\rangle \quad \text{y} \quad \vec{\mathrm{k}} = \langle 0, 0, 1\rangle.$$

Por supuesto, cualquier vector $v = \langle a, b, c\rangle$ en $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como

$$v = a\vec{\mathrm{i}} + b\vec{\mathrm{j}} + c\vec{\mathrm{k}}$$

Así como en el plano $\mathbb{R}^2$ el eje X tiene ecuación $y = 0$ y el eje Y tiene ecuación $x = 0$, en el espacio $\mathbb{R}^3$ tenemos las ecuaciones siguientes.

Eje X: $y = z = 0$	Plano YZ: $x = 0$
Eje Y: $x = z = 0$	Plano XZ: $y = 0$
Eje Z: $x = y = 0$	Plano XY: $z = 0$

Las siguientes propiedades de la suma de vectores y del producto de escalar por vector se cumplen en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, y su demostración es bastante sencilla.

Teorema

Si u, v y w son tres vectores en $\mathbb{R}^2$ o tres vectores en $\mathbb{R}^3$, y si $c, d \in \mathbb{R}$, entonces

- $u + v = v + u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $u + \vec{0} = u$
- $u + (-u) = \vec{0}$
- $c(u + v) = cu + cv$
- $(c + d)u = cu + du$
- $c(du) = (cd)u$
- $1u = u$

Ejemplo 8: vector entre dos puntos

Sea $v = \vec{PQ}$, donde $P = (-1, 3, 1)$ y $Q = (2, 1, 4)$. Entonces

$$v = Q - P = \langle 3, -2, 3\rangle = 3\vec{\mathrm{i}} - 2\vec{\mathrm{j}} + 3\vec{\mathrm{k}}$$

con longitud $\|v\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22}$.

Repaso

Encuentre el vector desde $A = (-1, 4, 0)$ hasta $B = (0, -3, 4)$, y su norma.

Solución: $\vec{AB} = \langle 1, -7, 4\rangle$ y $\|\vec{AB}\| = \sqrt{66}$

Ejemplo 9: encontrar un vector con longitud y dirección dadas

Dado el vector $x = \langle 2, -2, 4\rangle$, vamos a encontrar un segundo vector $y \in \mathbb{R}^3$ que tenga magnitud 3 y que sea paralelo a x.

Para que sea $x \parallel y$, la definición dice que $y = cx$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Y para que la magnitud de y sea 3, escribimos

$$3 = \|y\| = \|cx\| = |c|\,\|x\| = |c|\sqrt{4+4+16} = |c|\sqrt{24}$$

De aquí despejamos

$$|c| = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{1}{4}\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad c = \pm\frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Entonces hay dos soluciones,

$$y_1 = \frac{1}{4}\sqrt{6}u = \langle \sqrt{6}/2, -\sqrt{6}/2, \sqrt{6}\rangle$$

y

$$y_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{6}u = \langle -\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2, -\sqrt{6}\rangle$$

Repaso

Para el vector x del ejemplo anterior, encuentre un vector z con su misma dirección y con longitud 10. Solución: $\langle 4.08248, -4.08248, 8.16497\rangle$

Ejemplo 10: puntos colineales

¿Son colineales los puntos $P = (4, -5, 1)$, $Q = (1, 7, 7)$ y $R = (2, 3, 5)$? Una forma de determinarlo es investigar si los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ son paralelos.

Veamos: $\vec{PQ} = \langle -3, 12, 6\rangle$ y $\vec{QR} = \langle 1, -4, -2\rangle$. En efecto, $\vec{PQ} = -3\vec{QR}$, así que los vectores son paralelos. En conclusión, los puntos sí son colineales.

Repaso

Determine si los puntos $A = (4, -3, -5)$, $B = (-2, 1, 2)$ y $C = (-2, 4, -3)$ son colineales. Solución: No

Ejercicios

Dados los puntos $P = (6, 1, -12)$, $Q = (10, -9, 2)$ y $R = (-1, 9, -4)$, determine…

16. … los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$ y $\vec{RP}$.

17. … el punto medio y la distancia entre P y R.

18. … si P, Q y R son colineales.

19. … el perímetro del triángulo $\triangle PQR$.

20. Encuentre dos vectores en $\mathbb{R}^3$ con longitud 4, paralelos a $\langle 6, 2, 1\rangle$.

21. Sean $u = \langle 5, -2, 0\rangle$, $v = \langle -4, -1, 0\rangle$, $w = \langle 0, -3, 5\rangle$.

(a) Escriba $\langle -8, 5, 10\rangle$ como combinación lineal de u, v y w.

(b) Demuestre que cualquier vector $\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse como combinación lineal de u, v y w.

22. Encuentre todos los pares de vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ tales que

- $x \parallel \langle -2, 0, -2\rangle$
- $y - x = \langle -2, 1, -1\rangle$
- $\|y\| = \sqrt{2}$

En resumen. . .

- Un vector es una cantidad con magnitud y dirección, o bien un desplazamiento entre un punto inicial y un punto terminal. Dos vectores se consideran el mismo si sus desplazamientos son iguales.

- Un escalar es un número real.

- La magnitud, longitud o norma de un vector $v = \langle a, b\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ es $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. La magnitud de $w = \langle a, b, c\rangle$ en $\mathbb{R}^3$ es $\|w\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

- Un vector es unitario si su norma es 1.

- Un vector está representado en posición estándar si su punto inicial es el origen: $(0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ o $(0, 0, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

- El vector con punto inicial P y punto terminal Q es $\vec{PQ} = Q - P$.

- Si $u = \langle a, b\rangle$ y $v = \langle c, d\rangle$ en $\mathbb{R}^2$, su suma es $u + v = \langle a + c,\ b + d\rangle$. Si t es un escalar, el producto de t y u es $tu = \langle ta, tb\rangle$. En $\mathbb{R}^3$, las definiciones simplemente incluyen un componente más.

- Si t es un escalar, y v, w son vectores, entonces $\|tv\| = |t|\,\|v\|$ y $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$.

- Dos vectores son paralelos si uno de ellos es múltiplo del otro.

- Si $v_1, \ldots, v_n$ son vectores, una combinación lineal de ellos es una suma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Los vectores unitarios estándar en $\mathbb{R}^2$ son $\vec{\mathrm{i}} = \langle 1, 0\rangle$ y $\vec{\mathrm{j}} = \langle 0, 1\rangle$. En $\mathbb{R}^3$ son $\vec{\mathrm{i}} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\vec{\mathrm{j}} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\vec{\mathrm{k}} = \langle 0, 0, 1\rangle$.

Capítulo 9
Producto escalar y producto vectorial

En el capítulo anterior hablamos de dos operaciones con vectores: la suma de dos vectores y el producto de un escalar por un vector. En este capítulo vamos a presentar dos tipos de producto entre vectores: el producto escalar y el producto vectorial. Veremos que estos productos, aunque definidos algebraicamente, tienen propiedades geométricas importantes.

9.1 Producto escalar

El producto escalar entre dos vectores es muy parecido al producto de matrices. Las siguientes son las definiciones para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Definición (producto escalar)

Dados dos vectores $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ y $w = \langle w_1, w_2 \rangle$ en $\mathbb{R}^2$, su *producto escalar* es

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Para dos vectores $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $w = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ en $\mathbb{R}^3$, el producto escalar es

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Este producto es llamado *escalar* porque el resultado es un número, no un vector. También se le llama *producto punto* porque el símbolo con que se denota es un punto.

Ejemplo 1: producto escalar en $\mathbb{R}^2$

Dados los vectores $u = \langle -3, 6 \rangle$, $v = \langle 3, -4 \rangle$ y $w = \langle 1, 7 \rangle$, tenemos:

- $u \cdot v = (-3)(3) + (6)(-4) = -33$, y también
  $v \cdot u = (3)(-3) + (-4)(6) = -33$
- $u \cdot w = (-3)(1) + (6)(7) = 39$
- $(2v) \cdot w = \langle 6, -8 \rangle \cdot \langle 1, 7 \rangle = (6)(1) + (-8)(7) = -50$, y también
  $2(v \cdot w) = 2[(3)(1) + (-4)(7)] = 2[-25] = -50$
- $(u + v) \cdot w = \langle 0, 2 \rangle \cdot \langle 1, 7 \rangle = (0)(1) + (2)(7) = 14$, y también
  $u \cdot w + v \cdot w = 39 - 25 = 14$

Repaso

Dados $a = \langle 2, -5 \rangle$ y $b = \langle -3, 4 \rangle$, calcule $a \cdot b$. Solución: -26

Ejemplo 2: producto escalar en $\mathbb{R}^3$

El producto escalar, o producto punto, de $y = \langle 4, -3, -2 \rangle$ con $z = \langle 0, -5, 2 \rangle$ es

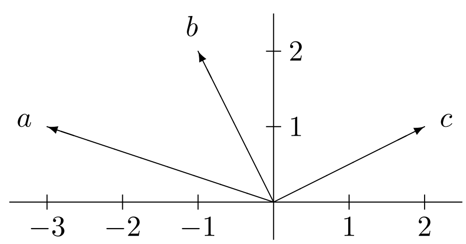
$$y \cdot z = (4)(0) + (-3)(-5) + (-2)(2) = 11$$

Repaso

Calcule $\langle -2, -3, 4 \rangle \cdot \langle -5, 1, 3 \rangle$. Solución: 19

Ejemplo 3: signo del producto escalar

Compare las direcciones en las que apuntan los vectores $a = \langle -3, 1 \rangle$, $b = \langle -1, 2 \rangle$ y $c = \langle 2, 1 \rangle$, con los signos de sus productos escalares:



- $a \cdot b = (-3)(-1) + (1)(2) = 5$, positivo, y los vectores a y b apuntan en direcciones “semejantes”, en el sentido de que el ángulo entre ellos es agudo.
- $a \cdot c = (-3)(2) + (1)(1) = -5$, negativo, y los vectores a y c apuntan en direcciones “divergentes”, en el sentido de que el ángulo entre ellos es obtuso.
- $b \cdot c = (-1)(2) + (2)(1) = 0$, y los vectores b y c son exactamente perpendiculares.

El primer ejemplo ilustra algunas propiedades del producto punto que formalizamos en el siguiente teorema. El tercer ejemplo ilustra una relación geométrica entre el signo del producto escalar y las direcciones de los vectores, que por ahora podemos describir diciendo que el producto escalar es positivo si el ángulo entre los vectores es agudo; el producto es negativo si el ángulo es obtuso, y el producto es cero si los vectores son ortogonales. A esto regresaremos en la siguiente sección.

Si su calculadora tiene un modo para trabajar con vectores, es probable que incluya la función de producto escalar.

Habiendo definido dos vectores A y B, su producto punto se calcula escribiendo

`[VECTOR] VctA [VECTOR] Dot [VECTOR] VctB =`

Teorema

El producto escalar en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ satisface las siguientes identidades, para cualesquiera vectores u, v y w, y cualquier escalar $c \in \mathbb{R}$.

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $c(u \cdot v) = (cu) \cdot v = u \cdot (cv)$
- $\vec{0} \cdot v = 0$
- $v \cdot v = \|v\|^2$

También es cierto que $u \cdot u \geq 0$ para cualquier u, y que $u \cdot u = 0$ solamente si $u = \vec{0}$.

Ejercicios

Dados los vectores $u = \langle -3, 7, 8 \rangle$, $v = \langle 4, -1, 1 \rangle$ y $w = \langle 5, 6, 8 \rangle$, calcule:

1. $u \cdot v + v \cdot w$

2. $(u \cdot w)v$

3. $w \cdot w$ y $\|w\|^2$

4. $(2v - 5w) \cdot u$ y $2(v \cdot u) - 5(w \cdot u)$

5. Sean $u = \langle 2, 0, 5 \rangle$ y $v = \langle 1, 1, -3 \rangle$. Encuentre los vectores $x \in \mathbb{R}^3$ que cumplen estas tres condiciones:

- x es combinación lineal de u y v
- $x \cdot v = 0$
- $\|x\|^2 = 150\|v\|^2$

6. Use vectores para demostrar que las diagonales de un rombo (paralelogramo con cuatro lados congruentes) son perpendiculares.

7. La desigualdad de Cauchy-Schwarz dice que $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ para cualesquiera vectores u y v en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. Demuéstrela en $\mathbb{R}^2$.

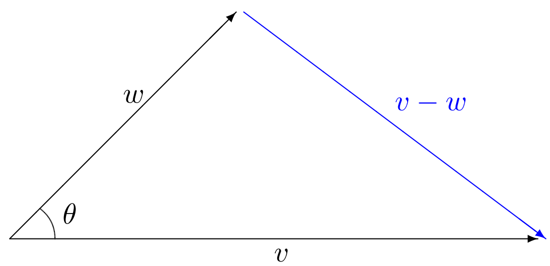
8. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ejercicio anterior) para demostrar que, para cualesquiera u y v en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, se cumple la desigualdad triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

9.2 Ángulo entre vectores

Como vimos en el último ejemplo de la sección anterior, el signo del producto escalar indica si los vectores tienen direcciones compatibles o divergentes. Por ejemplo, suponga que usted se mueve con velocidad dada por el vector u, y que el viento sopla con una velocidad dada por el vector v. Si el producto $u \cdot v$ es positivo, significa que los dos vectores "colaboran": el viento le está ayudando a usted a avanzar. Si el producto es negativo, usted tiene el viento en contra. Y si el producto es cero, el viento es perpendicular a su movimiento, y ni lo impulsa ni lo retrasa.

Veamos más exactamente cuál es la relación entre el producto escalar de dos vectores distintos de cero y el ángulo entre ellos. Consideremos el triángulo formado por dos vectores v y w, y su diferencia $v - w$, y denotemos con θ el ángulo entre los dos primeros.



Aplicando la ley de cosenos obtenemos

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\cos\theta\,\|v\|\,\|w\|$$

Por otro lado, las propiedades algebraicas del producto escalar que mencionamos en la sección anterior nos llevan a

$$\|v - w\|^2 = (v - w) \cdot (v - w) = v \cdot w - v \cdot w - w \cdot v + w \cdot w = \|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2$$

Restando las dos ecuaciones llegamos a que

$$0 = 2v \cdot w - 2\cos\theta\,\|v\|\,\|w\|$$

de donde despejamos el coseno de θ para obtener la fórmula siguiente.

Teorema

Si v y w son dos vectores distintos de cero en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, y θ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

En consecuencia, $\theta = \arccos\left(\dfrac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}\right)$.

Ejemplo 4: ángulo entre vectores en $\mathbb{R}^2$

El ángulo α entre los vectores $p = \langle 4, 3\rangle$ y $q = \langle 1, -2\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ tiene coseno

$$\cos\alpha = \frac{\langle 4,3\rangle \cdot \langle 1,-2\rangle}{\|\langle 4,3\rangle\|\,\|\langle 1,-2\rangle\|} = \frac{4-6}{\sqrt{25}\,\sqrt{5}} \approx -0.178885$$

así que el ángulo es

$$\alpha \approx \arccos(-0.178885) \approx 1.75065\,\mathrm{rad} \approx 100.305°$$

Repaso

Encuentre el ángulo entre $\langle 2, -5\rangle$ y $\langle -3, -2\rangle$. Solución: 78.1113°

Ejemplo 5: ángulo entre vectores en $\mathbb{R}^3$

Para los vectores $x = \langle 4, -2, 1\rangle$ y $y = \langle 2, 3, -2\rangle$, el coseno es

$$\cos\beta = \frac{\langle 4,-2,1\rangle \cdot \langle 2,3,-2\rangle}{\|\langle 4,-2,1\rangle\|\,\|\langle 2,3,-2\rangle\|} = \frac{8-6-2}{\sqrt{21}\,\sqrt{17}} = 0$$

Entonces el ángulo es $\arccos 0 = 90°$.

Repaso

Encuentre el ángulo entre $\langle -4, -5, 0\rangle$ y $\langle 4, 3, -2\rangle$. Solución: 154.030°

En el ejemplo anterior vemos que no era necesario calcular las magnitudes de los vectores porque con solo que el producto escalar fuera igual a cero la fracción entera sería cero. Como ya habíamos dicho, cuando el producto escalar entre dos vectores es cero, los vectores son perpendiculares.

Teorema

Dos vectores v y w en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ son perpendiculares (ortogonales, normales), lo cual se denota $v \perp w$, si y solo si su producto escalar es igual a cero:

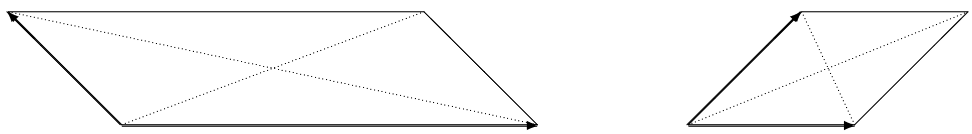
$$v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad v \cdot w = 0$$

Cuando v y w son vectores perpendiculares, el triángulo formado por v, w y $v + w$, así como el triángulo formado por v, w y $v - w$, son ambos triángulos rectángulos con catetos v y w. Por el Teorema de Pitágoras tenemos en ese caso que

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \qquad \text{si } v \perp w.$$

Bisecar el ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores no paralelos x y y, ¿cómo puede encontrarse un tercer vector z que biseque el ángulo formado por los dos primeros? Recuerde que la suma $x + y$ es la diagonal del paralelogramo formado por x y y. ¿La diagonal biseca el ángulo entre los dos lados? No necesariamente; piense simplemente en la diagonal de un rectángulo con dos lados largos y dos lados cortos: la diagonal forma un ángulo menor con el lado largo que con el lado corto. Pero en un cuadrado cada diagonal sí biseca el ángulo. De hecho, como se sabe por Geometría, en cualquier *rombo* (paralelogramo con cuatro lados congruentes) las diagonales bisecan los ángulos. Esto implica que si $\|x\| = \|y\|$ entonces $x + y$ biseca el ángulo entre x y y. En la figura a la izquierda, las diagonales no bisecan los ángulos; a la derecha, donde los cuatro lados miden lo mismo, sí lo hacen.



En general, aunque x y y tengan distintas magnitudes, podemos tomar dos nuevos vectores x' y y', con las mismas direcciones respectivas de x y y pero con iguales magnitudes entre ellos. Así, el vector $x' + y'$ bisecará el ángulo entre x' y y', que es el mismo entre x y y. En concreto, x' y y' podrían ser vectores unitarios, como en el siguiente ejemplo (recuerde que en la página 148 vimos cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección de otro vector dado).

Ejemplo 6: bisecar un ángulo

Encontrar un vector en $\mathbb{R}^2$ que biseque el ángulo entre los vectores $p = \langle 4, -2\rangle$ y $q = \langle 7, 1\rangle$.

Tomemos

$$p' = \frac{1}{\|p\|}p = \frac{1}{\sqrt{20}}\langle 4, -2\rangle \qquad \text{y} \qquad q' = \frac{1}{\|q\|}q = \frac{1}{\sqrt{50}}\langle 7, 1\rangle$$

Entonces un vector que biseca el ángulo es

$$\begin{aligned} r = p' + q' &= \frac{1}{\sqrt{20}}\langle 4, -2\rangle + \frac{1}{\sqrt{50}}\langle 7, 1\rangle = \frac{\sqrt{5}}{10}\langle 4, -2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{10}\langle 7, 1\rangle \\ &\approx \langle 1.88438, -0.305792\rangle \end{aligned}$$

En efecto, es fácil comprobar que, mientras que el ángulo entre p y q mide 34.6952°, el ángulo entre p y r y el ángulo entre q y r miden cada uno la mitad: 17.3476°.

Repaso

Encuentre un vector que biseque el ángulo entre $\langle 4, 1\rangle$ y $\langle 2, -1\rangle$.

Solución: puede ser $\langle 1.86457, -0.204678\rangle$

Ejercicios

Calcule el ángulo entre...

9. $\langle 0,6\rangle$ y $\langle 3,-4\rangle$

10. $\langle 9,3,1\rangle$ y $\langle -4,-3,4\rangle$

11. $\langle 8,3,-4\rangle$ y $\langle -2,2,-1\rangle$

12. $4\vec{\imath}+9\vec{\jmath}$ y $8\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$

13. $3\vec{\jmath}-5\vec{\imath}-\vec{k}$ y $\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-4\vec{k}$

14. $3\vec{\imath}+2\vec{k}-8\vec{\jmath}$ y $8\vec{\jmath}-2\vec{k}-3\vec{\imath}$

15. Sean $u=\langle 12,5\rangle$ y $v=\langle -4,3\rangle$ en $\mathbb{R}^2$. Calcule $x=\|u\|v+\|v\|u$ y $y=\|u\|v-\|v\|u$, y demuestre que x y y son ortogonales.

16. Dados $P=(3,1,8)$, $Q=(3,9,-4)$ y $R=(4,0,9)$, calcule las medidas de los ángulos del triángulo $\triangle PQR$.

Encuentre un vector que biseque el ángulo entre...

17. $\langle 8,-4\rangle$ y $\langle 0,3\rangle$

18. $\langle -1,7\rangle$ y $\langle -3,2\rangle$

19. $\langle 2,9,-3\rangle$ y $\langle 6,0,5\rangle$

20. $\langle 3,-3,5\rangle$ y $\langle 1,1,4\rangle$

21. Encuentre $x\cdot y$ sabiendo que $\|x\|=4$, $\|y\|=7$ y el ángulo entre x y y es $\pi/3$.

22. Encuentre todos los vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ que sean normales al eje Y y que formen un ángulo de $\pi/4$ con el eje Z (el eje Y está formado por los puntos de la forma $(0,y,0)$, y el eje Z por aquellos de la forma $(0,0,z)$).

23. Encuentre todos los vectores unitarios $u\in\mathbb{R}^3$ que sean perpendiculares a $\langle 1,0,-1\rangle$ y que formen un ángulo de $\pi/3$ con $\langle 1,0,1\rangle$.

24. Dados los vectores $v=\langle -2,-2,1\rangle$ y $w=\langle -1,2,1\rangle$, encuentre los vectores $x,y\in\mathbb{R}^3$ que cumplen estas tres condiciones:

- $y \parallel w$
- $x+2v=y$
- $x\perp v$

25. Encuentre los valores de $x,y\in\mathbb{R}$ para los cuales el vector $w=\langle x,y,x\rangle$ tiene magnitud $2\sqrt{2}$ y forma un ángulo de $\pi/4$ con la parte positiva del eje Y.

26. Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que los vectores

$$x=\|u\|v+\|v\|u \qquad \text{y} \qquad y=\|u\|v-\|v\|u$$

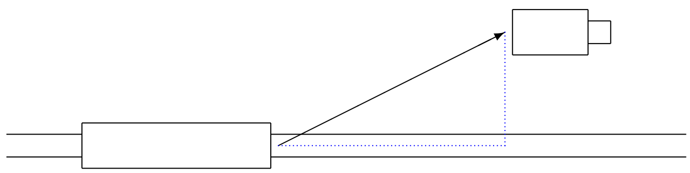
son ortogonales (compare con el Ejercicio 15).

27. Demuestre que si $a,b\in\mathbb{R}^3$ son vectores normales, entonces $\|a+b\|=\|a-b\|$ (geométricamente, que las dos diagonales de un rectángulo son congruentes).

9.3 Proyección ortogonal

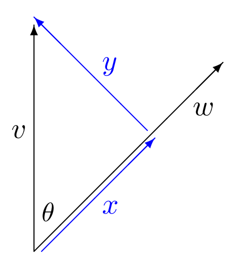
Un concepto importante relacionado con suma, resta y ortogonalidad de vectores es el de proyección ortogonal de un vector sobre otro. Podemos pensar en un problema inverso al de calcular la suma de dos vectores: dado un vector v, ahora queremos encontrar dos vectores cuya suma sea v, o en otras palabras, descomponer v como suma de otros dos vectores.

Imagine, por ejemplo, un camión tirando de un vagón de tren desde un costado de la vía, como en la siguiente figura.



El camión ejerce una fuerza (representada en la figura por una flecha) que no es paralela al movimiento del vagón (representado en la figura por una línea de puntos). Si pensamos en esa fuerza como la suma de dos vectores, uno paralelo y otro perpendicular al movimiento, entonces el componente perpendicular se desaprovecha y solamente el componente paralelo tiene efecto en el movimiento del vagón. ¿Cómo se calcula la fuerza efectiva, ese componente paralelo?

En general, si tenemos un vector v (en el ejemplo, la fuerza) y tenemos una dirección dada por otro vector $w \neq \vec{0}$ (en el ejemplo, la dirección de la vía del tren), queremos encontrar el componente de v en la dirección de w. Este componente se llama proyección ortogonal de v sobre w, porque es como la sombra que proyectaría v sobre w si se les iluminara con un rayo de luz perpendicular a w.



En la figura vemos los vectores v y w, y otros dos vectores x y y tales que $x \parallel w$, $y \perp w$ y $x + y = v$. Esta fórmula, $v = x + y$, es la descomposición de v en sus componentes paralelo y perpendicular a w.

Definición (proyección ortogonal)

Dados los vectores v y w en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, con w distinto de cero, si los vectores x y y cumplen $v = x + y$, $x \parallel w$ y $y \perp w$, entonces x es la *proyección ortogonal* de v sobre w, y se denota $x = \operatorname{proy}_w v$.

¿Cómo calculamos los componentes x y y?

Empecemos por notar que, como $x \parallel w$, existe algún $c \in \mathbb{R}$ tal que $x = cw$. Cuando sepamos cuánto es c tendremos el problema prácticamente resuelto, porque entonces podremos calcular $x = cw$ y $y = v - x$. Llamemos θ al ángulo entre v y w, y notemos que $\|x\| = \|cw\| = |c|\,\|w\|$.

Consideremos primero el caso de que θ sea agudo, como en la figura anterior.

Veamos el triángulo formado por v, x y y, que es un triángulo rectángulo. El ángulo entre los lados v y x es el mismo θ, y ya sabemos que $\cos\theta = (v \cdot w)/(\|v\|\,\|w\|)$. Pero también resulta por trigonometría que $\cos\theta$ es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa del triángulo. Entonces

$$\frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \cos\theta = \frac{\|x\|}{\|v\|} = \frac{|c|\,\|w\|}{\|v\|}$$

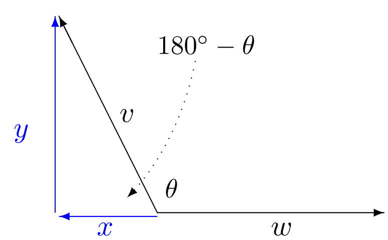
de donde despejamos

$$|c| = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}$$

Dado que en este primer caso x y w tienen la misma dirección, c es positivo, así que $|c| = c$ y la fórmula para c es

$$c = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}$$

Como segundo caso, si θ fuera obtuso, vemos en la siguiente figura que entonces el triángulo formado por v, x y y sigue siendo rectángulo, por supuesto ($x \perp y$ siempre), pero ahora el ángulo entre v y x es $180° - \theta$, y además el escalar c en la relación $x = cw$ es negativo.



Por la definición de coseno,

$$\cos(180° - \theta) = \frac{\|x\|}{\|v\|} = \frac{|c|\,\|w\|}{\|v\|} = \frac{-c\,\|w\|}{\|v\|}$$

pero también

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta = \frac{-v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

así que ahora se despeja

$$c = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}$$

exactamente igual que en el caso anterior.

No olvidemos el tercer caso: si θ no es agudo ni obtuso sino recto, entonces es obvio que $x = 0$ y $y = v$. En este caso $c = 0$ y también $v \cdot w = 0$, así que la misma fórmula para c sigue siendo válida.

Hemos visto entonces que siempre $c = (v \cdot w)/\|w\|^2$, que por cierto puede escribirse también como $(v \cdot w)/(w \cdot w)$. Entonces tenemos resuelto el problema de descomponer v en sus componentes x y y.

Teorema

Dados los vectores v y w en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, con w distinto de cero, la proyección ortogonal de v sobre w está dada por

$$\operatorname{proy}_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}\, w$$

Los componentes x y y en la descomposición $v = x + y$, que cumplen $x \parallel w$ y $y \perp w$, son

$$x = \operatorname{proy}_w v \quad \text{y} \quad y = v - x.$$

La demostración que acabamos de ver de este teorema nos tomó cierto tiempo (y toda una página), pero es geométricamente muy clara. Por otra parte, si preferimos ser más concisos y no ver lo que está pasando, podríamos usar como alternativa la siguiente demostración algebraica de tres renglones:

Si $v = x + y$ con $x \parallel w$ y $y \perp w$, entonces

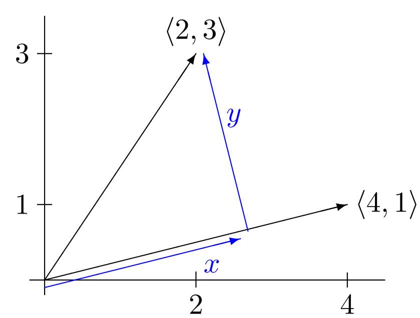
$$v \cdot w = (x + y) \cdot w = x \cdot w + y \cdot w = (cw) \cdot w + y \cdot w = c\|w\|^2 + 0 = c\|w\|^2$$

de donde se despeja $c = (v \cdot w)/\|w\|^2$. El resto es inmediato.

Ejemplo 7: proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$

La proyección de $\langle 2, 3\rangle$ sobre $\langle 4, 1\rangle$, como vemos en la figura, es

$$\operatorname{proy}_{\langle 4,1\rangle}\langle 2, 3\rangle = \frac{\langle 2, 3\rangle \cdot \langle 4, 1\rangle}{\|\langle 4, 1\rangle\|^2}\,\langle 4, 1\rangle = \frac{11}{17}\,\langle 4, 1\rangle \approx \langle 2.58824, 0.647059\rangle$$



Para descomponer $\langle 2, 3\rangle$ como suma de un componente paralelo y otro perpendicular a $\langle 4, 1\rangle$, tomamos

$$x = \operatorname{proy}_{\langle 4,1\rangle}\langle 2, 3\rangle \approx \langle 2.58824, 0.647059\rangle$$

y

$$y = \langle 2, 3\rangle - x \approx \langle -0.58824, 2.35294\rangle$$

con lo que $\langle 2.58824, 0.64706\rangle \parallel \langle 4, 1\rangle$ y $\langle -0.58824, 2.35294\rangle \perp \langle 4, 1\rangle$, y también

$$\langle 2, 3\rangle = \langle 2.58824, 0.64706\rangle + \langle -0.58824, 2.35294\rangle$$

Ejemplo 8: proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$, la proyección de $\langle -5, 1, -1\rangle$ sobre $\langle 3, 2, -4\rangle$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{proy}_{\langle 3,2,-4\rangle}\langle -5,1,-1\rangle &= \frac{\langle -5,1,-1\rangle \cdot \langle 3,2,-4\rangle}{\|\langle 3,2,-4\rangle\|^2}\langle 3,2,-4\rangle = \frac{-15+2+4}{9+4+16}\langle 3,2,-4\rangle \\ &= \frac{-9}{29}\langle 3,2,-4\rangle \approx \langle -0.931034, -0.620690, 1.24138\rangle\end{aligned}$$

El componente perpendicular a $\langle 3, 2, -4\rangle$ es

$$\begin{aligned}y &= \langle -5,1,-1\rangle - \langle -0.931034, -0.620690, 1.24138\rangle \\ &= \langle -4.06897, 1.62069, -2.24138\rangle\end{aligned}$$

y la descomposición es entonces

$$\langle -5,1,-1\rangle = \langle -0.931034, -0.620690, 1.24138\rangle + \langle -4.06897, 1.62069, -2.24138\rangle$$

Repaso

Encuentre la proyección ortogonal de $\langle -2, 2, -4\rangle$ sobre $\langle -1, 3, 0\rangle$, y el componente perpendicular al segundo. Solución: $\langle -0.8, 2.4, 0\rangle$ y $\langle -1.2, -0.4, -4\rangle$

Ejercicios

Calcule la proyección de...

28. $\langle -5, 0\rangle$ sobre $\langle 2, 7\rangle$

29. $\langle 2, -1, -2\rangle$ sobre $\langle -1, -2, -5\rangle$

30. $\langle 1, 7, 0\rangle$ sobre $\langle 3, -3, 8\rangle$

31. $\langle 5, -4, 5\rangle$ sobre $\langle -2, 6, 1\rangle$

32. Un camión jala un vagón on una cadena desde un lado de la vía, como en la figura de la página 164. Si el ángulo entre la vía y la cadena es de 20° y la fuerza del camión es de 25 000 N, calcule la magnitud del componente de la fuerza a lo largo de la vía.

33. En el ejercicio anterior, si el ángulo se reduce a 15°, ¿qué fuerza debe ejercer el camión para que la fuerza efectiva a lo largo de la vía sea de 20 000 N?

34. Sean $x = \langle 3, 1, 0\rangle$ y $y = \langle 2, 2, 0\rangle$ en $\mathbb{R}^3$. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $z = \langle a, b, a\rangle$ sea perpendicular a y y que $\operatorname{proy}_x z = -2x$.

35. Dados los vectores $p = \langle 1, -1, -1\rangle$ y $q = \langle 1, 0, -1\rangle$, encuentre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ que cumplan estas tres condiciones:

- $x \parallel p$
- $q + y = x$
- $\operatorname{proy}_q y = 2q$

36. Dados los vectores $u = \langle -1, 5, -4 \rangle$ y $v = \langle 2, -7, 2 \rangle$, encuentre todos los vectores $x \in \mathbb{R}^3$, con magnitud $\sqrt{371}$ y perpendiculares a u, tales que $\operatorname{proy}_v x = -v$.

37. Dado $a = \langle 2, 1, 2 \rangle$, encuentre un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $a \cdot x = 2\|a\|$ y $\operatorname{proy}_x a = \langle -3, 2, -3 \rangle$.

9.4 Producto vectorial

En algunas aplicaciones se necesita encontrar, dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$, un tercer vector que sea ortogonal a los dos primeros. Una forma de conseguir ese resultado es a través del producto vectorial. Veamos ahora la definición y luego algunas aplicaciones.

Definición (producto vectorial)

Dados los vectores $v = \langle a, b, c \rangle$ y $w = \langle x, y, z \rangle$ en $\mathbb{R}^3$, su *producto vectorial* es

$$v \times w = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

En esta definición estamos abusando de la notación de matrices y de determinantes. Tenemos una matriz donde la primera fila contiene vectores y las otras dos contienen números reales. Formalmente, podría criticarse la notación, y las críticas serían válidas porque nunca dijimos que una matriz pudiera contener vectores y números mezclados. Pero la notación es conveniente; nada más veamos qué significa.

Ejemplo 9: producto vectorial

El producto vectorial de $a = \langle 2, 0, -1 \rangle$ y $b = \langle 5, -3, 2 \rangle$ es, desarrollando el determinante por la primera fila,

$$\begin{aligned} \langle 2, 0, -1 \rangle \times \langle 5, -3, 2 \rangle = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} &= \vec{\mathrm{i}}(0-3) - \vec{\mathrm{j}}(4+5) + \vec{\mathrm{k}}(-6-0) \\ &= -3\vec{\mathrm{i}} - 9\vec{\mathrm{j}} - 6\vec{\mathrm{k}} = \langle -3, -9, -6 \rangle \end{aligned}$$

Repaso

Calcule $\langle -2, 1, 4 \rangle \times \langle -1, -3, 3 \rangle$. Solución: $\langle 15, 2, 7 \rangle$

El producto vectorial se llama así porque su resultado es un vector, en contraste con el producto escalar cuyo resultado es un número. El producto vectorial se conoce también como *producto cruz*, porque se denota con una cruz.

Es importante tener claro que el producto cruz, a diferencia del producto punto, está definido solamente para vectores en $\mathbb{R}^3$ y no en $\mathbb{R}^2$.

Algunas calculadoras con modo de vectores permiten calcular productos vectoriales con la tecla usual de multiplicación.

Habiendo definido dos vectores A y B, su producto vectorial se calcula escribiendo

$$\boxed{\texttt{VECTOR}}\ \texttt{VctA}\ \times\ \boxed{\texttt{VECTOR}}\ \texttt{VctB =}$$

El producto vectorial tiene las propiedades algebraicas que menciona el teorema que sigue.

Teorema

Para cualesquiera vectores u, v y w en $\mathbb{R}^3$, y para cualquier $c \in \mathbb{R}$,

- $u \times v = -v \times u$
- $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
- $c(u \times v) = (cu) \times v = u \times (cv)$
- $u \times \vec{0} = \vec{0}$
- $u \times u = \vec{0}$
- $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$

La primera propiedad es inmediata por lo que ya sabemos de los determinantes: cambiar el orden de los factores en un producto vectorial equivale a cambiar el orden de dos filas en la matriz, lo que invierte el signo del determinante. La cuarta también es inmediata: si una fila de una matriz está llena de ceros, el determinante de la matriz es cero. Las demás propiedades, excepto la ultima, también se deducen fácilmente de las propiedades de determinantes.

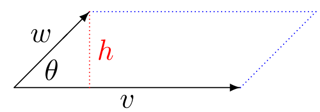
El siguiente teorema, que se refiere a algunas propiedades geométricas del producto cruz, resulta más interesante para lo que nos ocupa.

Teorema

Para cualesquiera vectores v y w en $\mathbb{R}^3$, con un ángulo θ entre ellos:

- $v \times w$ es perpendicular a v y a w (es decir, $(v \times w) \perp v$ y $(v \times w) \perp w$)
- $v \times w = \vec{0}$ si y solo si $v \parallel w$
- $\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \operatorname{sen} \theta$
- $\|v \times w\|$ es el área del paralelogramo formado por los vectores v y w

Veamos la relación entre las dos últimas propiedades en el teorema.



Si en el paralelogramo formado por v y w tomamos v como base, entonces la altura h forma un triángulo rectángulo junto con el vector w y parte del vector v (más precisamente, esta parte es $\operatorname{proy}_v w$). En este triángulo, $\operatorname{sen}\theta = h/\|w\|$, de modo que $h = \|w\| \operatorname{sen}\theta$. Entonces el área del paralelogramo, base por altura, resulta ser

$$A = \|v\|\,\|w\| \operatorname{sen}\theta$$

como se deduce del teorema.

Al menos esa igualdad fue fácil de demostrar. Probar que ambas cantidades son iguales a $\|v \times w\|$ involucra una gran cantidad de cálculos que no son tan complicados como tediosos, en términos de los componentes de v y de w. Vamos a omitir esa demostración, pero para hacerse una idea, vea en las siguientes páginas la demostración de la fórmula correspondiente para el área del paralelogramo formado por dos vectores en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 10: el producto vectorial es normal a los dos factores

Con los datos del ejemplo anterior, donde calculamos $a \times b = \langle 2, 0, -1\rangle \times \langle 5, -3, 2\rangle = \langle -3, -9, -6\rangle$, vemos en efecto que

$$(a \times b) \cdot a = \langle -3, -9, -6\rangle \cdot \langle 2, 0, -1\rangle = -6 + 0 + 6 = 0$$

y que

$$(a \times b) \cdot b = \langle -3, -9, -6\rangle \cdot \langle 5, -3, 2\rangle = -15 + 27 - 12 = 0$$

así que el producto es perpendicular a cada uno de los factores: $a \times b \perp a$ y $a \times b \perp b$.

Repaso

Compruebe que el producto de $\langle -2, 1, 4\rangle$ y $\langle -1, -3, 3\rangle$ es perpendicular a cada factor.

Ejemplo 11: área de un paralelogramo

Calcular el área del paralelogramo $PQRS$, donde $P = (-3, -5, 1)$, $Q = (0, 2, -2)$, $R = (-4, 0, 1)$ y $S = (-7, -7, 4)$.

En primer lugar, comprobemos que los cuatro puntos forman un paralelogramo.

$$u = \vec{PQ} = \vec{SR} = \langle 3, 7, -3\rangle \quad \text{y} \quad v = \vec{PS} = \vec{QR} = \langle -4, -2, 3\rangle$$

de modo que los lados opuestos sí son paralelos y congruentes, como debe ser.

El área del paralelogramo es entonces

$$\|u \times v\| = \cdots = \|\langle 15, 3, 22\rangle\| = \sqrt{718} \approx 26.7955$$

Repaso

Calcule el área del paralelogramo con vértices $(4, 2, 1)$, $(5, 1, 2)$, $(9, -2, -2)$ y $(8, -1, -3)$. Solución: $\sqrt{114} \approx 10.6771$

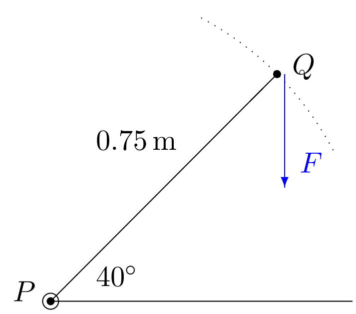
Ejemplo 12: torque

Cuando una palanca tiene un primer extremo P fijo y un segundo extremo Q que puede rotar alrededor de P, y se ejerce una fuerza F sobre el extremo Q, entonces el *torque* de la fuerza F alrededor de P se define como

$$M = \vec{PQ} \times F$$

y mide la tendencia del vector $\vec{PQ}$ de rotar, en el sentido contrario a las agujas del reloj (el sentido positivo de los ángulos), alrededor del eje P.

Si una fuerza vertical de 120 N se aplica a una palanca de 75 cm de longitud, calculemos el torque alrededor del punto fijo cuando la palanca forma un ángulo de $40°$ con el plano horizontal.



Suponiendo que toda la "acción" se desarrolla en el plano YZ, podemos representar la fuerza con el vector $F = \langle 0, 0, -120 \rangle$, y la palanca con el vector $\vec{PQ} = \langle 0, 0.75 \cos 40°, 0.75 \operatorname{sen} 40° \rangle \approx \langle 0, 0.574533, 0.482091 \rangle$ (convertimos 75 cm a 0.75 m para mantenernos dentro del mismo sistema de unidades métricas). Entonces el torque es

$$M = \vec{PQ} \times F = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 0 & 0.574533 & 0.482091 \\ 0 & 0 & -120 \end{vmatrix} = \langle -68.9440, 0, 0 \rangle$$

que representa una fuerza de magnitud 68.9440 N, en la dirección de las agujas del reloj.

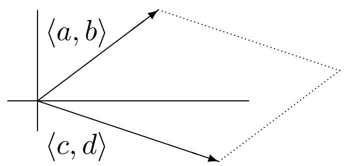
Repaso

¿Cuánto es el torque de la fuerza anterior cuando el ángulo entre la palanca y el eje horizontal es $15°$? Solución: 86.9333 N en la dirección del reloj

Determinantes como áreas o volúmenes

Ya que acabamos de mencionar el área del paralelogramo formado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$, interrumpimos esta historia para presentar un tema relacionado con las figuras geométricas formadas por dos vectores en $\mathbb{R}^2$ o por tres vectores en $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^2$, dos vectores $\langle a, b\rangle$ y $\langle c, d\rangle$ en posición estándar forman un paralelogramo cuya área resulta ser igual al valor absoluto del determinante de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$.



$$A = \left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|$$

La demostración de esta fórmula resulta ser más algebraica que geométrica. Si denotamos $v = \langle a, b\rangle$ y $w = \langle c, d\rangle$, y θ el ángulo entre ellos, entonces el mismo argumento que acabamos de usar para demostrar que el área del paralelogramo es $A = \|v\|\,\|w\| \operatorname{sen}\theta$ (lo hicimos en $\mathbb{R}^3$) se aplica sin modificaciones ahora que estamos en $\mathbb{R}^2$. Elevando ambos lados de la igualdad al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned} A^2 &= \|v\|^2\,\|w\|^2 \operatorname{sen}^2\theta = \|v\|^2\,\|w\|^2\,(1-\cos^2\theta) \\ &= \|v\|^2\,\|w\|^2 \left[1 - \left(\frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|}\right)^2\right] \\ &= \|v\|^2\,\|w\|^2 - (v\cdot w)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2acbd - b^2d^2 \\ &= a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 = (ad-bc)^2 \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada llegamos finalmente a que $A = |ad - bc|$, como queríamos.

Ejemplo 13: área de un paralelogramo

Si el diagrama en la figura anterior representa el paralelogramo formado por los vectores $\langle 4, 3\rangle$ y $\langle 6, -2\rangle$, entonces el área de la figura es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -26$$

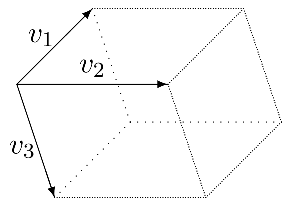
es decir, 26 unidades cuadradas.

Repaso

Calcule el área del paralelogramo formado por los vectores $\langle -3, 2\rangle$ y $\langle 1, -6\rangle$.

Solución: 16

También en $\mathbb{R}^3$ se cumple una propiedad semejante. Ahora tres vectores v_1, v_2 y v_3 generan un paralelepípedo en el espacio, cuyo volumen es



$$V = |\det(v_1\ v_2\ v_3)|$$

donde la notación $(v_1\ v_2\ v_3)$ representa la matriz 3×3 cuyas columnas son v_1, v_2 y v_3.

Ejemplo 14: volumen de un paralelepípedo

El paralelepípedo formado por los vectores $v_1 = \langle -1, 1, 1\rangle$, $v_2 = \langle 0, 2, 0\rangle$ y $v_3 = \langle 1, 1, -2\rangle$ tiene volumen

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \text{ unidades cúbicas}$$

Repaso

Calcule el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\langle 4, 4, -5\rangle$, $\langle 2, -1, -3\rangle$ y $\langle 0, -1, -2\rangle$. Solución: 22

Ejercicios

Dados los vectores $u = \langle 1, -5, 7\rangle$, $v = \langle -5, 4, 6\rangle$ y $w = \langle -5, 2, 8\rangle$, calcule:

38. $u \times v$

39. $(2u \times w) \cdot v$

40. $(2u - v) \times w$ y $2u \times w - v \times w$

41. $u \cdot (v \times w)$ y $(u \times v) \cdot w$

42. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular a $\langle -3, 1, -1\rangle$ y a $\langle 4, 7, -2\rangle$.

Calcule el área del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ generado por...

43. $\langle 6, -2\rangle$ y $\langle 1, 8\rangle$

44. $\langle -4, 7\rangle$ y $\langle 3, -1\rangle$

45. Dados $P = (3, 1, 8)$, $Q = (3, 9, -4)$ y $R = (4, 0, 9)$, calcule el área del triángulo $\triangle PQR$.

Calcule el volumen del paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ generado por...

46. $\langle 2, 5, 5\rangle$, $\langle 8, -5, 9\rangle$ y $\langle 6, -4, 4\rangle$

47. $\langle 4, 2, 9\rangle$, $\langle 1, 8, 4\rangle$ y $\langle 8, -5, 3\rangle$

48. Compruebe que los puntos $(2, -1, 1)$, $(5, 1, 4)$, $(0, 1, 1)$ y $(3, 3, 4)$, en algún orden, forman un paralelogramo, y calcule su área.

49. Sean $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (3, 0, -1)$. Encuentre los puntos $R \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{OP} \parallel \vec{OR}$ y que el área del paralelogramo generado por $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ sea 12.

50. Encuentre los vectores $w \in \mathbb{R}^3$, paralelos a $\langle 1, 1, -2\rangle$, tales que $\|w \times \langle 2, -3, 1\rangle\| = \sqrt{12}$.

51. Si dos vectores v y w en $\mathbb{R}^3$ forman un ángulo de $\pi/3$ entre ellos, y determinan un triángulo con área 14, calcule $v \cdot w$.

52. Encuentre un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle 1, 0, -2\rangle \cdot v = 1$ y $\langle 1, 0, -2\rangle \times v = \langle 3, -2, 3/2\rangle$.

53. Para dos vectores v y w en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $v + w \perp v \times w$.

En resumen...

- El producto escalar (o producto punto) de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ es $\langle a,b\rangle\cdot\langle x,y\rangle = ax+by$. En $\mathbb{R}^3$, $\langle a,b,c\rangle\cdot\langle x,y,z\rangle = ax+by+cz$.

- Si u y v forman un ángulo agudo, su producto escalar es positivo; si forman un ángulo obtuso, su producto es negativo, y si forman un ángulo recto, su producto es cero.

- Más exactamente, si θ es el ángulo entre los vectores v y w, distintos de cero, entonces
$$\cos\theta = \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

- Dos vectores v y w se dicen ortogonales, normales o perpendiculares, y se escribe $v\perp w$, si $v\cdot w=0$.

- Si v y w son vectores y $w\neq\vec{0}$, entonces la proyección ortogonal de v sobre w es
$$\operatorname{proy}_w v = \frac{v\cdot w}{\|w\|^2}\,w$$

- Si $v=\langle a,b,c\rangle$ y $w=\langle x,y,z\rangle$ en $\mathbb{R}^3$, su producto vectorial es $v\times w = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

- Si v y w son vectores en $\mathbb{R}^3$, y θ es el ángulo entre ellos, entonces:
  a. $v\times w = -w\times v$
  b. $v\times w\perp v$ y $v\times w\perp w$
  c. $\|v\times w\| = \|v\|\,\|w\|\operatorname{sen}\theta$
  d. $\|v\times w\|$ es el área del paralelogramo formado por los vectores v y w

- En $\mathbb{R}^2$, el área del paralelogramo formado por los vectores $\langle a,b\rangle$ y $\langle c,d\rangle$ es $|\det\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d\end{smallmatrix}\right)|$.

- En $\mathbb{R}^3$, el volumen del paralelepípedo formado por los vectores v_1, v_2 y v_3 es $|\det(v_1,v_2,v_3)|$.

Capítulo 10

Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

El estudio de las rectas en $\mathbb{R}^2$ en esencia puede resumirse en lo que ya sabemos, como que hay rectas horizontales, con ecuación $y =$ constante; rectas verticales, con ecuación $x =$ constante, y rectas oblicuas, con ecuación $y = mx + b$; que cualquier recta puede describirse con una ecuación $ax + by = c$ donde a, b y c son constantes; que la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene pendiente $m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$; que las pendientes de rectas paralelas son iguales, y que las de rectas perpendiculares tienen producto -1. Y eso es prácticamente todo.

¿Pero las rectas en $\mathbb{R}^3$? Ahora hay tres variables, x, y y z, de modo que una ecuación como $y = mx + b$ no podría ser suficiente porque no involucra a z. Y si en $\mathbb{R}^2$ las ecuaciones $x =$ constante y $y =$ constante representan rectas paralelas a alguno de los ejes, ¿qué representa en $\mathbb{R}^3$ una ecuación $z =$ constante?

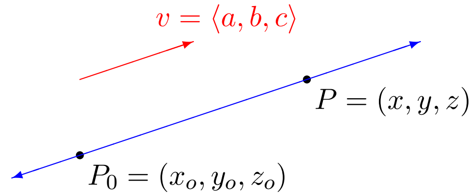
En este capítulo veremos que hay grandes diferencias entre las ecuaciones de rectas en $\mathbb{R}^2$ y las de rectas en $\mathbb{R}^3$. Veremos también que hay un concepto que aparece por primera vez en $\mathbb{R}^3$, el de planos en el espacio (en $\mathbb{R}^2$ hay un solo plano: el plano XY). Veremos cómo encontrar una recta dados dos puntos, o un plano dados tres puntos; cómo encontrar el punto de intersección entre una recta y un plano, o la recta de intersección entre dos planos; cómo calcular la distancia entre un punto y una recta o entre un punto y un plano. La teoría es poca, pero las aplicaciones serán muy variadas.

10.1 Rectas en $\mathbb{R}^3$

Recuerde que en el plano cartesiano una recta está determinada por un punto y una pendiente. Por ejemplo, la recta que pasa por el punto $(2, 5)$ con pendiente 8 tiene ecuación $y - 5 = 8(x - 2)$, de donde opcionalmente puede despejarse $y = 8x - 11$. En el espacio, sin embargo, no basta con una pendiente. Por ejemplo, ¿cómo es la recta que pasa por el punto $(3, -1, 4)$ y tiene pendiente cero? La pregunta está mal planteada: existen infinitas rectas horizontales que pasan por ese punto; una de ellas es paralela al eje X, otra es paralela al eje Y, y hay muchas otras más.

Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de una recta

En el espacio $\mathbb{R}^3$, para determinar una recta se necesitan un punto y un vector de dirección. Así se puede hablar, sin ambigüedad, de la recta L que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección del vector $v = \langle a, b, c \rangle$. Decir que L pasa por P_0 es lo mismo que decir que L contiene a P_0, o que P_0 pertenece a L. Y que L tiene la dirección de v es equivalente a que L es paralela a v.



Que un punto $P = (x, y, z)$ pertenezca a la recta L, o que L pase por P, significa que el vector $\vec{P_0P_1}$ es paralelo a v; esto es, $P - P_0 = tv$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Equivalentemente (despejando P), el punto P es de la forma $P_0 + tv$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Esto nos lleva a la ecuación vectorial de la recta.

Definición (ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$)

La *ecuación vectorial* de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector v es

$$P = P_0 + tv \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}.$$

Un punto P pertenece a la recta solamente si satisface la ecuación vectorial.

Pensándolo bien, también en $\mathbb{R}^2$ las rectas pueden caracterizarse por un punto y un vector de dirección. Es una posibilidad perfectamente válida; simplemente no es frecuente hacerlo.

Volviendo a nuestro contexto de rectas en $\mathbb{R}^3$, podemos desmenuzar la ecuación vectorial $P = P_0 + tv$ en sus tres componentes y escribir

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c\rangle$$

o bien

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Este es el sistema de ecuaciones paramétricas de la recta, así llamado porque las ecuaciones dependen del parámetro t.

Definición (ecuaciones paramétricas de una recta en $\mathbb{R}^3$)

Las *ecuaciones parámetricas* de la recta en $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección del vector $v = \langle a, b, c\rangle$ son

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}.$$

Un punto (x, y, z) pertenece a la recta si y solo si existe un $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga las tres ecuaciones.

Ejemplo 1: recta dados un punto y un vector de dirección

La recta que pasa por $P_0 = (-2, 5, 4)$ con la dirección de $v = \langle -4, -1, 2\rangle$ tiene ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (-2, 5, 4) + t\langle -4, -1, 2\rangle$$

y ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 5 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

en cada caso con $t \in \mathbb{R}$.

Repaso

¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-5, 2, 7)$ y tiene la dirección del vector $\langle 8, -1, -2\rangle$?

Solución: $\{\, x = -5 + 8t,\; y = 2 - t,\; z = 7 - 2t \,\}$

Ejemplo 2: recta dados dos puntos

Para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P = (4, 4, 1)$ y por $Q = (-2, 0, 3)$, podemos tomar como punto base a $P_0 = (4, 4, 1)$ y como vector de dirección a $v = \vec{PQ} = \langle -6, -4, 2\rangle$. Entonces las ecuaciones son

$$\begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = 4 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Pero también podríamos tomar como punto base a $P_1 = (-2, 0, 3)$, y entonces las ecuaciones serán

$$\begin{cases} x = -2 - 6t \\ y = -4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Repaso

Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(6, -8, 3)$ y $(7, -1, 9)$. Solución: $\{\, x = 6 + t,\; y = -8 + 7t,\; z = 3 + 6t \,\}$

En el ejemplo anterior vemos que los sistemas de ecuaciones paramétricas de una recta no son únicos: existen distintos sistemas para describir una misma recta. Esto es natural, porque el sistema de ecuaciones paramétricas depende del punto P_0, que podría ser cualquier punto en la recta; para cada P_0 habrá un sistema distinto. De hecho, también el vector de dirección puede ser distinto: en el ejemplo, si en vez de $v = \vec{PQ}$ hubiéramos tomado $v_1 = \vec{QP}$, o incluso $v_2 = -5\vec{PQ}$, las ecuaciones serían todavía otras.

Veamos en el siguiente ejemplo cómo se investiga si un punto pertenece a una recta, y también cómo la respuesta no depende de cuál sistema de ecuaciones parámetricas usemos, mientras los distintos sistemas representen la misma recta.

Ejemplo 3: determinar si un punto pertenece a una recta

En el Ejemplo 2, investigar si los puntos $R = (-8, -4, 7)$ y $S = (-11, -6, 6)$ pertenecen a la recta en cuestión.

Para investigar $R = (-8, -4, 7)$ tomemos el primer sistema de ecuaciones paramétricas. Queremos averiguar si R satisface el sistema, esto es, si existe algún $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} x = -8 = 4 - 6t \\ y = -4 = 4 - 4t \\ \quad z = 7 = 1 + 2t \end{cases}$$

En la primera ecuación es necesario que $t = 2$; en la segunda, $t = 2$, pero en la tercera, $t = 3$. Vemos entonces que no existe un t que cumpla las tres ecuaciones, y concluimos que el punto R no pertenece a la recta.

Si investigamos el mismo punto R con el segundo sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} -8 = -2 - 6t \\ -4 = -4t \\ \quad 7 = 3 + 2t \end{cases}$$

vemos que debe ser $t = 1$ en la primera y en la segunda, pero $t = 2$ en la tercera. Al no haber solución, vemos de otra manera que R no está en la recta.

Ahora investiguemos el punto $S = (-11, -6, 6)$. En el primer sistema,

$$\{ -11 = 4 - 6t, \quad -6 = 4 - 4t, \quad 6 = 1 + 2t \}$$

las tres ecuaciones se cumplen con el mismo $t = 2.5$, por lo que S sí pertenece a la recta. Lo confirmamos usando el segundo sistema de ecuaciones,

$$-11 = -2 - 6t, \quad -6 = -4t, \quad 6 = 3 + 2t$$

donde todas son ciertas con $t = 1.5$. Entonces S satisface también el segundo sistema.

Repaso

¿La recta $(x, y, z) = (2, 1, 9) + t\langle 6, 3, -8\rangle$ pasa por el punto $(-1, 2, 13)$?

Solución: no

Ecuaciones simétricas de una recta

En el último ejemplo de la sección anterior vimos que un punto (x, y, z) pertenece a una recta L solamente si al despejar t en cada una de las ecuaciones parámetricas se obtiene el mismo valor tres veces. Como los valores de t en las tres ecuaciones son

$$t = \frac{x - x_0}{a}, \qquad t = \frac{y - y_0}{b} \qquad \text{y} \qquad t = \frac{z - z_0}{c}$$

respectivamente, entonces podemos caracterizar los puntos de la recta como aquellos para los cuales estas tres cantidades son iguales. De esta idea se derivan las ecuaciones simétricas.

Definición (ecuaciones simétricas de una recta)

Las *ecuaciones simétricas* de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $v = \langle a, b, c\rangle$ son

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Un punto (x, y, z) pertenece a la recta si y solo si satisface estas ecuaciones.

Es importante notar que no todas las rectas tienen un sistema de ecuaciones simétricas, ya que es necesario que los tres componentes a, b y c del vector v sean distintos de cero. Si alguno de ellos es cero, las ecuaciones simétricas no existen. Esto recuerda el caso de las rectas verticales en $\mathbb{R}^2$, paralelas al eje Y, para las cuales no existe una ecuación de la forma $y = mx + b$ porque la pendiente m sería infinita. En $\mathbb{R}^3$ las rectas que no tienen ecuaciones simétricas son las rectas paralelas a alguno de los planos coordenados: si $a = 0$ la recta es paralela al plano YZ, si $b = 0$ es paralela al plano XZ, y si $c = 0$ es paralela al plano XY.

Ejemplo 4: ecuaciones simétricas

En el Ejemplo 2, las ecuaciones simétricas de la recta son

$$\frac{x - 4}{-6} = \frac{y - 4}{-4} = \frac{z - 1}{2}$$

usando el punto $P = (4, 4, 1)$ como base, o bien

$$\frac{x + 2}{-6} = \frac{y}{-4} = \frac{z - 3}{2}$$

tomando como base el punto $Q = (-2, 0, 3)$.

Repaso

¿Cuáles son las ecuaciones simétricas de la recta $(x, y, z) = (1, -4, -1) + t\langle 3, -5, 1\rangle$? Solución: $(x - 1)/3 = (y + 4)/(-5) = z + 1$

Ejemplo 5: ecuaciones paramétricos y simétricas

Encontrar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por $P_0 = (-4, 0, 5)$ y es paralela a la recta M con ecuaciones $\frac{1}{2}(3-x) = 2y+9 = z$.

En $\mathbb{R}^2$, para encontrar la ecuación de una recta se necesitan como datos fundamentales un punto y una pendiente. En $\mathbb{R}^3$ los datos necesarios son el punto y el vector de dirección. En nuestro caso, el punto ya es dado, $P_0 = (-4, 0, 5)$. Y como las rectas L y M son paralelas, también son paralelos sus vectores de dirección. Lo más sencillo que podemos hacer es encontrar un vector de dirección de M y usarlo para L. Pero no podemos decir que los componentes del vector de dirección sean simplemente los denominadores en las ecuaciones simétricas[1]. Los componentes son los denominadores solamente si las ecuaciones están en la forma $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$, lo cual no es el caso en este ejemplo.

Empezamos entonces por convertir las fracciones a la forma estándar de las ecuaciones simétricas (con un coeficiente igual a 1 para cada variable):

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+9/2}{1/2} = \frac{z-0}{1}$$

Ahora sí podemos decir que un vector de dirección de M es $v = \langle -2, 1/2, 1\rangle$ (y también, aunque no lo necesitamos, que M contiene al punto $(3, -9/2, 0)$).

Finalmente, la recta L que buscamos pasa por $(-4, 0, 5)$ y tiene dirección $\langle -2, 1/2, 1\rangle$, así que las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

y las simétricas,

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{1/2} = z - 5$$

Como los vectores de dirección de L y de M no son necesariamente iguales sino paralelos, entonces tenemos la opción, si quisiéramos evitar las fracciones, de tomar como vector de dirección de L a $2v = \langle -4, 1, 2\rangle$, con lo que las ecuaciones parámetricas se escriben

$$\begin{cases} x = -4 - 4t \\ y = t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

y las simétricas,

$$\frac{x+4}{-4} = y = \frac{z-5}{2}$$

[1] Sería como decir que en $\mathbb{R}^2$ la pendiente de una recta es el coeficiente de x en la ecuación. Eso es cierto si la ecuación está en la forma $y = mx + b$, pero no siempre. Por ejemplo, la pendiente de $2x + 3y = 5$ no es 2 aunque ese sea el coeficiente de x.

Repaso

Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(-3, 6, -4)$ y es paralela a la recta $(4x - 6)/3 = 1 - 2y = 3z/5$.

Solución: $\{\, x = -3 + \frac{3}{4}t,\ y = 6 - \frac{1}{2}t,\ z = -4 + \frac{5}{3}t \,\}$

Ejercicios

1. Sea L la recta que pasa por $(7, -4, 8)$ y por $(4, 9, 2)$.

(a) Encuentre un vector de dirección de L.

(b) Encuentre las ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de L.

(c) Determine si los puntos $P = (-2, 35, -10)$ y $Q = (4, 19, -5)$ pertenecen a L.

(d) Encuentre otros tres puntos que pertenezcan a L.

2. Determine si la recta que pasa por $(5, 2, 1)$ y $(9, 10, 1)$ es paralela a la que pasa por $(-6, 4, 3)$ y $(-16, -16, 3)$.

Escriba la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que…

3. … pasa por $(-2, 1, 5)$ y es paralela a $\langle -4, 3, 8\rangle$.

4. … contiene a $(-3, 1, 6)$ y tiene la dirección de $\langle -3, 4, 10\rangle$.

5. … contiene a $(-3, -1, 7)$ y a $(2, 10, 4)$.

6. … pasa por el origen y por $(0, 1, 8)$.

7. … pasa por $(4, 6, 1)$ y es perpendicular a $\langle 7, -2, 3\rangle$ y a $\langle 4, 7, -3\rangle$.

8. … interseca el eje X en $x = 5$ y es paralela al eje Z.

Intersección entre dos rectas

Cuando dos rectas se intersecan es porque algún punto (x, y, z) satisface las ecuaciones de cada una de ellas. Para encontrar el punto de intersección entre dos rectas, entonces, debemos tomar las ecuaciones de una y las ecuaciones de la otra, y con ellas formar un sistema de ecuaciones. Si ese sistema tiene solución, ahí tendremos el punto de intersección; si el sistema no tiene solución, las rectas no se intersecan.

Ejemplo 6: intersección entre dos rectas

Encontrar el punto de intersección, si existe, entre las rectas L y M cuyos sistemas de ecuaciones paramétricas son

$$L\colon \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad M\colon \begin{cases} x = 11 - 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

En primer lugar debemos reconocer que, aunque los valores de x, y y z deben ser los mismos en ambos sistemas (de eso se trata que las rectas se intersequen), los valores de t podrían ser distintos. Ya vimos en el Ejemplo 3 que dos sistemas distintos de ecuaciones pueden dar distintos valores del parámetro, incluso para un mismo punto en una misma recta.

Por lo anterior vamos a cambiar el nombre del parámetro en uno de los sistemas y escribir

$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x = 11 - 4s \\ y = 2 - 3s \\ z = 4s \end{cases}$$

Al unir los dos sistemas obtenemos nada menos que un sistema de seis ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 \\ x = 11 - 4s \\ y = 2 - 3s \\ z = 4s \end{cases}$$

En el Capítulo 5 habíamos visto que cuando un sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, lo más probable es que no tenga solución. Para el sistema actual, eso es simplemente un reflejo del hecho de que para dos rectas cualesquiera en el espacio, lo más probable es que ellas no se intersequen.

Como sea, tenemos la suerte de que en este caso una de las variables ya está despejada: $z = 4$ en la tercera ecuación. Con ese dato podemos encontrar en la última ecuación (la que dice que $z = 4s$) que $s = 1$, y de ahí que $x = 7$ y $y = -1$.

Solo falta confirmar que las dos primeras ecuaciones son coherentes con lo anterior. En efecto, las dos primeras ecuaciones coinciden en implicar que $t = -2$. Entonces sí tenemos una solución,

$$x = 7, \quad y = -1, \quad z = 4, \quad t = -2, \quad s = 1$$

como fácilmente puede comprobarse sustituyendo en el sistema.

El punto de intersección es, por lo tanto, $(7, -1, 4)$.

Repaso

Encuentre el punto de intersección entre las rectas $(x, y, z) = (6, 0, -5) + t\langle -2, 6, 4\rangle$ y $(x, y, z) = (7, 5, 3) + s\langle 2, -2, 1\rangle$. Solución: $(3, 9, 1)$

Ejemplo 7: dos rectas que no se intersecan

Encontrar el punto de intersección, si existe, entre las rectas con sistemas respectivos

$$\begin{cases} x = -2 + 10t \\ y = 11 - 3t \\ z = 7 + 11t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \frac{x-12}{-7} = \frac{y+9}{4} = 3 - z$$

Para una de las rectas tenemos un sistema de ecuaciones paramétricas y para la otra un sistema de ecuaciones simétricas[2]. Esto da un total de cinco ecuaciones con cuatro incógnitas. Resulta que esa combinación de ecuaciones paramétricas y simétricas es la más favorable para encontrar el punto de intersección, porque se puede reducir el sistema a solamente dos ecuaciones con una incógnita al sustituir las expresiones paramétricas de x, y y z en el sistema simétrico:

$$\frac{(-2+10t)-12}{-7} = \frac{(11-3t)+9}{4} = 3 - (7+11t)$$

o bien

$$\frac{10t-14}{-7} = \frac{20-3t}{4} = -4 - 11t$$

Las dos ecuaciones son entonces

$$\begin{cases} \dfrac{10t-14}{-7} = \dfrac{20-3t}{4} \\ \dfrac{20-3t}{4} = -4 - 11t \end{cases}$$

cuyas soluciones son $t = -84/19$ en la primera y $t = -36/41$ en la segunda, distintas.

Concluimos que el sistema no tiene solución, de modo que las dos rectas no se intersecan.

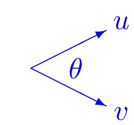
Repaso

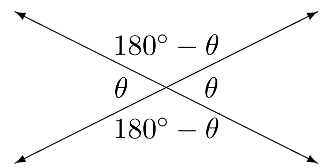
Compruebe que las rectas $(x-1)/3 = 2 - y = 2z$ y $x = y + 4 = (z+1)/2$ no se intersecan.

[2] *Casi* simétricas: la expresión $3 - z$ debería ser $\dfrac{z-3}{-1}$ para calificar formalmente como tal (porque la forma exacta es $\dfrac{z-z_0}{c}$), pero por ahora eso no importa.

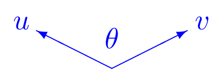
Ángulo entre rectas

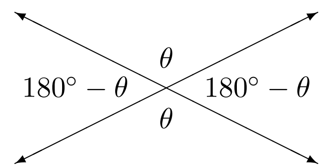
Cuando dos rectas en $\mathbb{R}^3$ se intersecan, es claro que el ángulo que forman es el mismo ángulo que forman sus vectores de dirección. No; eso no es exactamente cierto. La verdad es que cuando dos rectas se intersecan forman *cuatro* ángulos, congruentes en parejas. Dos de los ángulos son congruentes al ángulo entre los vectores de dirección, y los otros dos son suplementarios:





o bien





Ya sea que el ángulo θ entre los vectores de dirección sea agudo u obtuso, vamos a convenir en que el ángulo α entre las rectas es agudo o a lo sumo recto. Entonces α, el "ángulo entre las rectas", será igual a θ si θ es agudo, como en los dos primeros gráficos arriba, o igual a $180° - \theta$ si θ es obtuso, como en los dos últimos gráficos. En general, entonces, α es el menor entre θ y $180° - \theta$.

Recordando que el coseno de un ángulo agudo es positivo y que el de un ángulo obtuso es negativo, podemos plantear lo anterior de esta forma:

$$\alpha = \begin{cases} \theta & \text{si } 0° \leq \theta \leq 90° \;\; \Leftrightarrow \;\cos\theta \geq 0 \\ 180° - \theta & \text{si } 90° \leq \theta \leq 180° \;\Leftrightarrow\; \cos\theta \leq 0 \end{cases}$$

Pero entonces, aplicando coseno,

$$\cos\alpha = \begin{cases} \cos\theta & \text{si } \cos\theta \geq 0 \\ \cos(180° - \theta) = -\cos\theta & \text{si } \cos\theta \leq 0 \end{cases}$$

En resumen, $\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\dfrac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}\right|$, de donde despejamos

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|u \cdot v|}{\|u\|\,\|v\|}\right)$$

Por supuesto, las rectas son perpendiculares (normales, ortogonales) si se intersecan y $u \perp v$, y son paralelas si $u \parallel v$.

Ejemplo 8: ángulo entre rectas

El ángulo entre las rectas L y M del Ejemplo 6, cuyos vectores de dirección son $u = \langle -1, 2, 0\rangle$ y $v = \langle -4, -3, 4\rangle$, es

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\,\|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{|-2|}{\sqrt{5}\,\sqrt{41}}\right) \approx \arccos 0.139686 \approx 81.9703°$$

(y el ángulo entre los vectores de dirección es su suplemento, $\theta \approx 98.0297°$).

Repaso

Calcule el ángulo entre las rectas $\{\, x = 2 - 3t,\ y = t,\ z = 4 + t\,\}$ y $\{\, x = 2t - 5,\ y = 2 - t,\ z = 3\,\}$. Solución: 19.2863°

Ejemplo 9: recta dados un punto y dos rectas perpendiculares

Encontrar las ecuaciones de la recta N que pasa por el punto de intersección entre

$$L\colon \frac{x-6}{-4} = \frac{y+3}{2}, \quad z = 5 \qquad \text{y} \qquad M\colon \frac{x-19}{-3} = \frac{3-y}{11} = \frac{5z-9}{16}$$

y es perpendicular a ambas.

Ya vimos que para encontrar las ecuaciones de una recta en el espacio siempre necesitamos un punto y un vector de dirección. Para este problema, el punto será la intersección entre las rectas L y M, y el vector de dirección... luego nos ocuparemos de él. Por ahora concentrémonos en encontrar el punto.

La combinación que tenemos aquí, de ecuaciones casi simétricas[3] para las dos rectas, nos da un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Como hemos visto, para encontrar el punto de intersección entre dos rectas es mejor combinar ecuaciones paramétricas con ecuaciones simétricas. Entonces vamos a convertir las ecuaciones de alguna de las rectas a la forma paramétrica.

Tomemos las ecuaciones de M. Para convertirlas a forma paramétrica introducimos una nueva variable, el parámetro t, para igualar cada expresión a t y despejar x, y y z:

$$M\colon \begin{cases} x = 19 - 3t \\ y = 3 - 11t \\ z = \frac{1}{5}(9 + 16t) \end{cases}$$

[3] No exactamente simétricas. La asimetría en la expresión para z en las ecuaciones de L se debe a que el vector de dirección tiene tercer componente igual a cero. Eso se confirma al convertir las ecuaciones de L a forma paramétrica. Vea la siguiente nota al pie.

Sigamos trabajando con las ecuaciones de L como se plantearon[4], para combinarlas con las de M que acabamos de transformar:

$$L\colon \frac{(19-3t)-6}{-4} = \frac{(3-11t)+3}{2}, \quad \tfrac{1}{5}(9+16t) = 5$$

La solución de las dos ecuaciones es la misma, $t = 1$, lo que implica que las rectas sí se intersecan, y el punto de intersección P_0 está dado por

$$x = 19 - 3(1) = 16, \quad y = 3 - 11(1) = -8, \quad z = \tfrac{1}{5}(9 + 16(1)) = 5$$

es decir, $P_0 = (16, -8, 5)$.

Ahora que tenemos el punto, recordemos que estábamos buscando la ecuación de una recta, para lo cual, además del punto, necesitamos el vector de dirección. Esto será fácil: si u es un vector de dirección de L y v un vector de dirección de M entonces como N, la recta buscada, es perpendicular a L y a M, el vector de dirección de N deberá ser ortogonal a u y a v. Para eso basta con tomar $w = u \times v$.

Podemos usar $u = \langle -4, 2, 0\rangle$ y $v = \langle -3, -11, 16/5\rangle$, o, para evitar las fracciones, también podemos usar $v = \langle -15, -55, 16\rangle$ (cualquier vector paralelo a este funciona). Entonces

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ -4 & 2 & 0 \\ -15 & -55 & 16 \end{vmatrix} = 32\vec{\mathrm{i}} + 64\vec{\mathrm{j}} + 250\vec{\mathrm{k}}$$

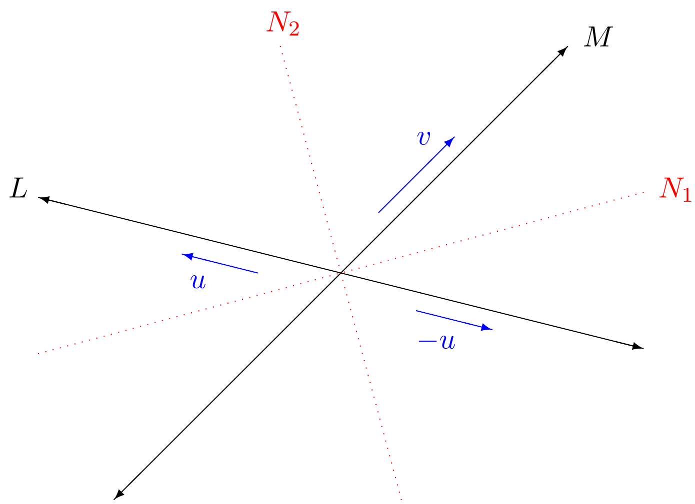
por lo que, finalmente, las ecuaciones de N son

$$N\colon \frac{x-16}{32} = \frac{y+8}{64} = \frac{z-5}{250}$$

Ejemplo 10: recta que biseca el ángulo entre otras dos

Encontrar las ecuaciones de las rectas N_1 y N_2 que pasan por el punto de intersección entre las rectas L y M del Ejemplo 6 y que bisecan los ángulos entre ellas.

[4]Si quisiéramos transformar las ecuaciones de L, la ecuación $z = 5$ no se transforma. Queda así, y el sistema es $\{\, x = 6 - 4t,\ y = 2t - 3,\ z = 5 \,\}$.



Como en la figura, denotaremos con N_1 a la recta que biseca el ángulo agudo y con N_2 a la que biseca el ángulo obtuso.

En el Ejemplo 6 habíamos obtenido el punto de intersección, $P_0 = (7, -1, 4)$, y en el Ejemplo 8 obtuvimos los vectores de dirección $u = \langle -1, 2, 0\rangle$ para L y $v = \langle -4, -3, 4\rangle$ para M, así como el ángulo $\theta \approx 98.0297°$ entre ellos.

Como θ es obtuso, el vector que biseca el ángulo entre u y v dará la dirección de N_2. Para encontrarlo, empezamos por tomar dos vectores unitarios con las direcciones de u y v (recuerde que en las páginas 162 y siguientes vimos cómo encontrar un vector que biseca otros dos).

$$u' = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -1, 2, 0\rangle \approx \langle -0.447214, 0.894427, 0\rangle$$

y

$$v' = \frac{1}{\|v\|}v = \frac{1}{\sqrt{41}}\langle -4, -3, 4\rangle \approx \langle -0.624695, -0.468521, 0.624695\rangle$$

Ahora su suma, $x = u' + v' \approx \langle -1.07191, 0.425906, 0.624695\rangle$, es un vector de dirección de N_2, que entonces describimos con las ecuaciones aproximadas

$$N_2\colon \frac{x-7}{-1.07191} = \frac{y+1}{0.425906} = \frac{z-4}{0.624695}$$

Para la recta N_1, la que biseca el ángulo agudo entre L y M, no necesitamos más que cambiar el signo de uno de los vectores de dirección. Si u y v forman un ángulo obtuso, entonces el ángulo suplementario es el formado por los vectores $-u$ y v, o bien por u y $-v$. Usando el primer par obtenemos

$$-u' \approx \langle 0.447214, -0.894427, 0\rangle \qquad \text{y} \qquad v' \approx \langle -0.624695, -0.468521, 0.624695\rangle$$

Entonces su suma, $y = -u' + v' \approx \langle -0.177481, -1.36295, 0.624695\rangle$, da la dirección de N_1, cuyas ecuaciones simétricas resultan ser

$$N_1\colon \frac{x-7}{-0.177481} = \frac{y+1}{-1.36295} = \frac{z-4}{0.624695}$$

Comprobemos.

Ya habíamos calculado el ángulo obtuso entre L y M, $\theta \approx 98.0297°$. No es difícil confirmar que los ángulos entre L y N_2 y entre N_2 y M miden cada uno precisamente $49.0148°$, es decir $\frac{1}{2}\theta$.

Por otra parte, el ángulo agudo entre L y M es $180° - \theta \approx 81.9703°$, y los ángulos agudos entre M y N_1 y entre N_1 y L miden justamente la mitad, $40.9852°$.

Como una última comprobación, vemos también que los vectores de dirección de N_1 y de N_2 son perpendiculares:

$$\langle -1.07191, 0.425906, 0.624695\rangle \cdot \langle -0.177481, -1.36295, 0.624695\rangle \approx 0$$

Ejercicios

Encuentre el punto de intersección, si existe, entre las rectas dadas.

9. $6x - 3 = -5y + 7 = z - 5$ y $(x, y, z) = (-1, 4, -3) + t\langle -1, 2, -5\rangle$

10. $(x, y, z) = (5, 32, 3) + r\langle -2, 7, 8\rangle$ y $4x - 3 = y - 2 = 9 - z$

11. $(x, y, z) = (8, -5, 7) + t\langle -5, 6, -2\rangle$ y $(x, y, z) = (12, -9, 3) + s\langle -4, 4, 4\rangle$

12. $3x - 9 = 6y + 3 = 2z - 3$ y $x = -2,\ 3y + 8 = 2z + 11$

13. Encuentre los ángulos entre los pares de rectas de los Ejercicios 9, 11 y 12.

14. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto de intersección entre cada par de rectas en los Ejercicios 9, 11 y 12, y que bisecan los ángulos entre ellas.

15. Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ con ecuación vectorial $(x, y, z) = (-3, 1, -4) + t\langle 3, -1, 1\rangle$.

(a) Encuentre el punto P de intersección entre L y el eje Z (el eje Z está formado por los puntos de la forma $(0, 0, z)$).

(b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular tanto a la recta L como al eje Z.

16. Dadas las rectas $\frac{1}{3}(x-2) = 1 - y = z - 2$ y $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t\langle 2, 1, -1\rangle$, encuentre una ecuación de la recta que pasa por su intersección y es ortogonal a ambas.

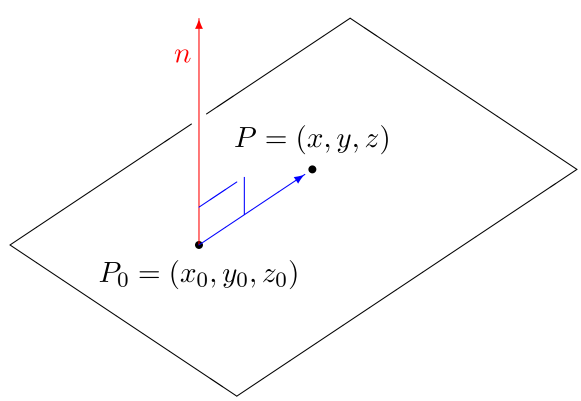
10.2 Planos en $\mathbb{R}^3$

Algo que no se estudia en $\mathbb{R}^2$ es el concepto de plano, y eso, claro, es porque $\mathbb{R}^2$ es todo un solo plano. Pero en $\mathbb{R}^3$, el espacio tridimensional, existe una infinidad de ellos. Vamos a estudiar cómo representarlos algebraicamente, e investigar cómo se encuentran las intersecciones y los ángulos entre dos de ellos o entre un plano y una recta.

La ecuación estándar de un plano

Recuerde que en $\mathbb{R}^2$ la forma más general de describir una recta es con su ecuación estándar, $ax + by = c$ con a, b y c constantes. Aunque esta forma no es muy usual, sí permite describir cualquier recta incluyendo una vertical. Resulta que si al pasar de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ extendemos la ecuación para incluir las tres coordenadas y escribimos $ax+by+cz = d$, con a, b, c y d constantes, entonces el conjunto de puntos que satisfacen esa ecuación es un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^2$ una recta puede determinarse a partir de un punto y un vector de dirección, y vimos que de la misma manera se identifica una recta en $\mathbb{R}^3$. Para describir un plano en $\mathbb{R}^3$, en cambio, se necesitan un punto y un vector normal. En efecto, dado un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector $n = \langle a, b, c\rangle$, existe un único plano que contiene a P_0 y que es normal (perpendicular, ortogonal) a n. Este plano está compuesto por todos los puntos $P = (x, y, z)$ tales que $\vec{P_0P} \perp n$.



Es decir, un punto $P = (x, y, z)$ pertenece al plano si y solo si

$$\langle x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\rangle \cdot \langle a, b, c\rangle = 0$$

Esto lleva a lo siguiente.

Definición (ecuaciones estándar y general de un plano en $\mathbb{R}^3$)

La *ecuación estándar* del plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es normal al vector $n = \langle a, b, c\rangle$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

La forma *general* de la ecuación es

$$ax + by + cz = d$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Un punto (x, y, z) pertenece al plano si y solo si satisface alguna de sus ecuaciones (y entonces satisfará ambas).

Recuerde que para encontrar las ecuaciones de una recta siempre necesitamos partir de un punto y un vector de dirección. De manera análoga, en cualquier problema en que necesitemos encontrar la ecuación de un plano necesitaremos dos datos básicos: un punto y un vector normal.

Ejemplo 11: plano dados un punto y un vector normal

El plano que contiene al punto $P_0 = (-1, 6, -6)$ y es perpendicular al vector $n = \langle -5, 4, 3\rangle$ tiene ecuación estándar

$$-5(x + 1) + 4(y - 6) + 3(z + 6) = 0$$

Para encontrar su ecuación general podemos desarrollar los productos en el lado izquierdo y despejar:

$$-5x - 5 + 4y - 24 + 3z + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad -5x + 4y + 3z = 11$$

(esa es la forma $ax+by+cz = d$, donde $d = ax_0+by_0+cz_0 = -5(-1)+4(6)+3(-6) = 11$).

Repaso

Dé las ecuaciones estándar y general del plano que contiene a $(9, -4, 6)$ y que es perpendicular a $\langle -3, 2, 7\rangle$.

Solución: $-3(x - 9) + 2(y + 4) + 7(z - 6) = 0$, $-3x + 2y + 7z = 7$

Ejemplo 12: encontrar algún punto en un plano

Escribir una ecuación estándar del plano con ecuación general $8x+7y+6z = 2$.

Para la ecuación estándar necesitamos un vector normal y un punto P_0. El primero es inmediato (los coeficientes de las variables en la ecuación): $n = \langle 8, 7, 6\rangle$. El punto P_0 puede ser cualquier punto que satisfaga la ecuación, para lo cual tenemos muchas opciones. Entre las más sencillas está fijar dos de las coordenadas iguales a cero y despejar la tercera. Por ejemplo, si $x = y = 0$ entonces $z = 1/3$, así que tenemos $P_0 = (0, 0, 1/3)$, y la ecuación estándar es

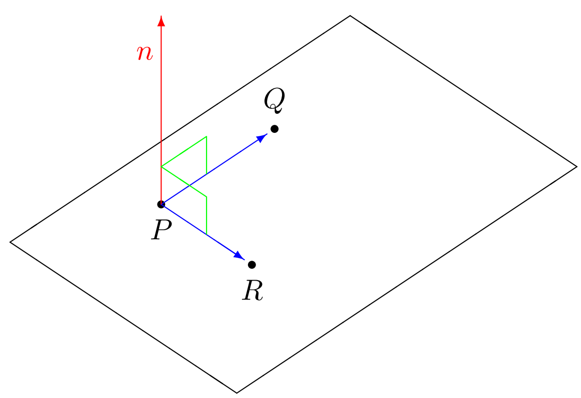
$$8(x - 0) + 7(y - 0) + 6(z - 1/3) = 0$$

Por supuesto, pudimos haber tomado, por ejemplo, $y = z = 0$ y calculado $x = 1/4$, así que la ecuación estándar también puede ser

$$8(x - 1/4) + 7(y - 0) + 6(z - 0) = 0$$

Ejemplo 13: plano dados tres puntos

Encontrar una ecuación del plano que contiene a los puntos $P = (7, -1, 4)$, $Q = (8, 5, 0)$ y $R = (-3, -1, 2)$.



Como recién dijimos, necesitamos un punto y un vector normal para escribir la ecuación del plano. El punto puede ser cualquiera entre P, Q y R. Veamos cómo encontrar el vector normal.

Como vemos en la figura, los vectores $u = \vec{PQ}$ y $v = \vec{PR}$ son paralelos al plano. El vector n, normal al plano, necesariamente será perpendicular también a u y a v. Entonces podemos tomar $n = u \times v$, que sabemos que tiene esa propiedad[5].

$$\begin{aligned} n &= \vec{PQ} \times \vec{PR} = \langle 1, 6, -4\rangle \times \langle -10, 0, -2\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 1 & 6 & -4 \\ -10 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{\mathrm{i}} + 42\vec{\mathrm{j}} + 60\vec{\mathrm{k}} \end{aligned}$$

[5]Esa es una entre muchas posibilidades. También pudo ser $n = v \times u$, y los vectores u y v pudieron ser otros entre $\vec{QP}$, $\vec{QR}$, $\vec{RP}$, etc.

Notando que todos los componentes de n son múltiplos de 6, y recordando que cualquier vector paralelo a $u \times v$ es normal a u y a v, podemos tomar más simplemente $n = \langle -2, 7, 10\rangle$. Entonces una ecuación es

$$-2(x-7) + 7(y+1) + 10(z-4) = 0$$

usando como base el punto $P = (7, -1, 4)$. O bien, usando Q, la ecuación es $-2(x-8)+7(y-5)+10z = 0$, y usando R podemos escribir $-2(x+3)+7(y+1)+10(z-2) = 0$.

Todas esas ecuaciones en forma estándar llevan a la misma ecuación general,

$$-2x + 7y + 10z = 19$$

Podemos confirmar su correctitud sustituyendo cada uno de los tres puntos dados en la ecuación, y verificando que los tres la satisfacen.

Repaso

Dé una ecuación del plano que contiene a $(3, 4, -4)$, $(2, 3, -3)$ y $(-5, 1, 2)$.

Solución: $3x + 2y + 5z = -3$

Ejemplo 14: plano dados un punto y un plano paralelo

Encontrar una ecuación del plano que contiene a $S = (-3, 0, 1)$ y que es paralelo al plano del ejemplo anterior.

Si dos planos son paralelos, sus vectores normales también son paralelos, así que podemos usar el mismo $n = \langle -2, 7, 10\rangle$. Combinándolo con el punto $(-3, 0, 1)$ obtenemos la ecuación

$$-2(x+3) + 7y + 10(z-1) = 0$$

o, en forma general,

$$-2x + 7y + 10z = 16$$

Repaso

Dé una ecuación del plano que contiene al punto $(4, 1, -8)$ y que es paralelo al plano $8x + 5y + 5z = 0$. Solución: $8x + 5y + 5z = -3$

En el Ejemplo 12 vemos que no existe *una* ecuación estándar para un plano dado, sino infinitas porque P_0 puede ser cualquier punto del plano. Tampoco la ecuación general es única, porque los vectores normales son muchos. En el mismo ejemplo, la ecuación dada, $8x+7y+6z = 2$, es equivalente a $16x + 14y + 12z = 4$, a $-\frac{4}{3}x - \frac{7}{6}y - z = -\frac{1}{3}$ y a muchas otras ecuaciones generales que describen al mismo plano (los distintos vectores normales en cuestión, $\langle 8, 7, 6\rangle$, $\langle 16, 14, 12\rangle$ y $\langle -\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}, -1\rangle$, son paralelos entre ellos).

Ejercicios

Encuentre una ecuación del plano que…

17. … contiene al punto $(7,7,-2)$ y es normal a la recta con ecuación $(x,y,z) = (-3,0,-4) + t\langle 5,-1,1\rangle$.

18. … pasa por $(5,9,7)$ y es paralelo al plano $x + y + 9z = 0$.

19. … pasa por $(3,-2,5)$ y no interseca al plano $x - 4y + 2z = 1$.

20. … contiene a los puntos $(3,-3,4)$, $(0,0,7)$ y $(5,9,4)$.

21. … pasa por $(-4,0,3)$ y es normal a los planos $5x - 7y + 3z = 8$ y $2x - 3y = 6$.

22. … contiene a los puntos $(-1,3,2)$ y $(1,6,1)$, y es perpendicular al plano $3x - y + 3z - 7 = 0$.

23. … es perpendicular al segmento de recta que une a $(4,0,6)$ y $(0,-8,2)$, y pasa por el punto medio de ese segmento.

24. … pasa por $(8,6,1)$ y es paralelo a $\langle -3,-1,4\rangle$ y a $\langle 5,-4,1\rangle$.

25. … pasa por $(10,4,1)$ y por $(-2,1,3)$, y es paralelo al eje X.

26. … contiene al punto $P = (2,1,2)$ y a la recta con ecuación $-\frac{1}{2}(x+2) = \frac{1}{3}(y+1) = \frac{1}{3}(z+1)$.

27. … contiene a las rectas $(x,y,z) = (3,0,-4) + t\langle 2,-1,9\rangle$ y $(x,y,z) = (5,-1,5) + r\langle 1,-3,6\rangle$.

28. … contiene al eje Z y a la recta $(x,y,z) = (4,-2,1) + t\langle 2,-1,3\rangle$.

Intersección y ángulo entre planos

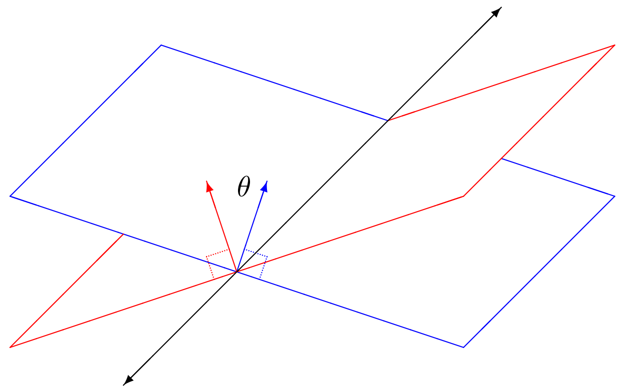
Dados dos planos en el espacio tridimensional, lo más probable es que ellos se intersequen (a diferencia del caso de dos rectas en el espacio). Y si se intersecan, lo más probable es que su intersección sea una recta (si la intersección no fuera una recta sería porque los dos planos son el mismo y su intersección es el mismo plano). En definitiva, existen estas tres posibilidades para dos planos en el espacio:

- Los planos son paralelos y no se intersecan.
- Los planos no son paralelos, en cuyo caso su intersección necesariamente es una recta.
- Los planos son iguales, por lo que su intersección es el mismo plano.

Para encontrar la intersección entre dos planos se toman juntas sus ecuaciones respectivas, formando un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Si el sistema tiene solución (y eso es lo más probable, dado que son más incógnitas que ecuaciones), el conjunto de soluciones será la intersección entre los planos.

Por otra parte, con respecto al ángulo que forman dos planos, es claro que si n_1 y n_2 son los vectores normales de dos planos respectivos, entonces los planos son paralelos si

$n_1 \parallel n_2$, y los planos son perpendiculares si $n_1 \perp n_2$. En cualquiera otro caso, la situación con "el" ángulo entre los planos es semejante a la del ángulo entre dos rectas: dos planos no paralelos se intersecan formando cuatro ángulos, dos agudos y dos obtusos (a menos que los cuatro sean rectos), congruentes en parejas. Específicamente, si θ es el ángulo entre los vectores n_1 y n_2, entonces dos de los ángulos entre los planos miden θ y los otros dos miden $180° - \theta$.



En forma análoga al ángulo entre dos rectas, el ángulo agudo (o a lo sumo recto) entre dos planos con vectores normales n_1 y n_2 es

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\|\,\|n_2\|}\right)$$

Ejemplo 15: intersección entre dos planos

Encontrar la recta de intersección y el ángulo entre los planos con ecuaciones $4x - 6y - 10z = 5$ y $3x - 4y + z = 3$.

Empecemos notando que como los vectores normales son $n_1 = \langle 4, -6, -10\rangle$ y $n_2 = \langle 3, -4, 1\rangle$ respectivamente, entonces los planos no son paralelos porque n_1 y n_2 no lo son. Deducimos que los dos planos sí se intersecan en una recta, y para encontrarla unimos las dos ecuaciones de los planos en un sistema:

$$\begin{cases} 4x - 6y - 10z = 5 \\ 3x - 4y + z = 3 \end{cases}$$

Por el método de Gauss-Jordan transformamos

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 & 5 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \dots \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 & -1 \\ 0 & 1 & 17 & -3/2 \end{pmatrix}$$

así que

$$\begin{cases} x + 23z = -1 \\ y + 17z = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

En este punto tenemos dos opciones para continuar.

Opción 1: Al despejar x y y obtenemos $x = -1 - 23z$ y $y = -\frac{3}{2} - 17z$, y si además escribimos $z = t$ para $t \in \mathbb{R}$ (queriendo decir que z, como no está especificado en la solución, es cualquier número; z es igual a cualquier t real), entonces llegamos a

$$\begin{cases} x = -1 - 23t \\ y = -\dfrac{3}{2} - 17t \\ z = t \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección.

Opción 2: Si despejamos más bien z en cada ecuación obtenemos

$$\frac{x+1}{-23} = \frac{y+3/2}{-17} = z$$

que son las ecuaciones simétricas de la recta.

Para las ecuaciones paramétricas, es fácil comprobar que ellas realmente describen una recta contenida en ambos planos, ya que al sustituirlas en las ecuaciones de los planos vemos que ambas se cumplen:

$$4(-1-23t) - 6(-\tfrac{3}{2} - 17t) - 10(t) = -4 + 9 - 92t + 102t - 10t = 5$$

para el primer plano, y

$$3(-1-23t) - 4(-\frac{3}{2} - 17t) + (t) = -3 + 6 - 69t + 68t + t = 3$$

para el segundo, como debía ser.

Otra forma de comprobación consiste en ver que, por una parte, el punto base en las ecuaciones de la recta, $P_0 = (-1, -3/2, 0)$ satisface las ecuaciones de ambos planos y por lo tanto pertenece a su intersección, y por otra parte, el vector de dirección, $v = \langle -23, -17, 1\rangle$ es perpendicular a ambos n_1 y n_2, por lo que es paralelo a los dos planos.

Para contestar la segunda pregunta, calculemos el ángulo entre los planos.

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\|\,\|n_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{|\langle 4, -6, -10\rangle \cdot \langle 3, -4, 1\rangle|}{\|\langle 4, -6, -10\rangle\|\,\|\langle 3, -4, 1\rangle\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{|26|}{\sqrt{152}\,\sqrt{26}}\right) \approx \arccos 0.413585 \approx 65.5698^\circ \end{aligned}$$

Repaso

Encuentre la recta de intersección y el ángulo entre $2x+y+2z = 4$ y $x-2z = 1$.

Solución: $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t\langle 2, -6, 1\rangle$, 72.6539°

Si usáramos el método del ejemplo anterior para buscar la recta de intersección entre dos planos paralelos, ¿qué saldría mal (porque dos planos paralelos no tienen una recta de intersección)? Como los planos son paralelos, sus vectores normales son paralelos, y al plantear el sistema con las dos ecuaciones, cada fila de la matriz de coeficientes será un múltiplo de la otra. Entonces la operación entre filas que consigue el cero en la posición $2,1$ provocará ceros también en las posiciones $2,2$ y $2,3$. Eso hará que la matriz aumentada en ese momento sea de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Dependiendo de d_2, entonces, habrá infinitas soluciones si $d_2 = 0$, correspondiendo a dos planos iguales, o no habrá soluciones si $d_2 \neq 0$, en el caso de planos paralelos y distintos.

Ejercicios

Encuentre la recta de intersección y el ángulo entre los planos dados.

29. $3x + 4y = 3$ y $8x - 6y + 5z = 9$

30. $10(x-2) + 2(y-1) - 8z = 0$ y $9x + 3(y+2) = 2z + 5$

31. $2x - y - 3z = 8$ y $2y - 6z = 5$

32. $5(x-3) + 7y - 2(z+1) = 0$ y $4x + 7y - 4z + 6 = 0$

33. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta de intersección entre los planos $2x - y - z = 2$ y $4x + 2y - 4z = 1$.

34. Encuentre una ecuación del plano que contiene al punto $(0, 2, 1)$ y a la recta de intersección entre los planos $x - 2y - z = -3$ y $x - 3y + z = -2$.

35. Encuentre una ecuación del plano que cumple estas tres condiciones:

- Pasa por $(0, 1, 2)$.
- Es perpendicular al plano $2x + z = 1 + y$.
- Es paralelo a la recta $(x-1)/2 = (y-2)/3 = z - 3$.

36. Encuentre una ecuación del plano que cumple estas tres condiciones:

- Es paralelo a la recta $(2-x)/3 = (y-2)/2 = -z/3$.
- Es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 2$.
- Contiene al punto de intersección entre las rectas $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t\langle 0, -1, 1\rangle$ y $(x, y, z) = (0, -1, 0) + r\langle -1, -1, 2\rangle$.

37. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $P = (10, 4, -4)$ y es perpendicular al plano $7x - y + 3z = 12$.

38. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(0, -1, 6)$ y no interseca a los planos $x - 7y + z = 5$ ni $3x + 5z + 2 = 0$.

39. Sea L la recta de intersección entre los planos $x + z = 2y$ y $2x - 2z = 3$. Encuentre una ecuación del plano que es paralelo a L y contiene a $(3, 0, 2)$ y a $(4, 1, -1)$.

10.3 Rectas y planos

Cuando hay una recta y un plano en el espacio, lo más probable, geométricamente, es que se intersequen. La única forma de evitarlo es que la recta y el plano sean paralelos; en ese caso puede ser que no se intersequen o que la recta esté contenida en el plano. Pero si no son paralelos, con seguridad se intersecan en un punto.

Intersección y ángulo entre recta y plano

Algebraicamente, la situación es así. Una recta está descrita por tres ecuaciones con cuatro incógnitas en su forma paramétrica, o por dos ecuaciones con tres incógnitas en la forma simétrica (con la salvedad de que no siempre existe la forma simétrica). Y un plano tiene una ecuación con tres incógnitas. Al unir todas esas ecuaciones resulta un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (forma paramétrica) o de tres ecuaciones con tres incógnitas (forma simétrica), que lo más probable es que tenga solución única. Esa solución, si existe, es el punto de intersección entre la recta y el plano.

Ejemplo 16: intersección entre recta y plano

Encontrar la intersección entre la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x+6}{4} = \frac{2y}{5} = \frac{z-7}{3}$$

y el plano con ecuación general

$$-3x + 4y + 3z = 4$$

Podemos reunir las tres ecuaciones con tres incógnitas y buscar su solución, pero una mejor alternativa es convertir las ecuaciones de la recta a la forma paramétrica, aunque eso resulte en un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} x = -6 + 4t \\ y = \frac{5}{2}t \\ z = 7 + 3t \\ -3x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

La ventaja de esta transformación es que ahora las tres primeras ecuaciones pueden sustituirse en la cuarta para conseguir una sola ecuación con una sola incógnita.

$$
\begin{aligned}
-3(-6+4t)+4(\tfrac{5}{2}t)+3(7+3t) &= 4 \\
39+7t &= 4 \\
t &= -5
\end{aligned}
$$

Luego, $x = -6 + 4(-5) = -26$, $y = \frac{5}{2}(-5) = -12.5$ y $z = 7 + 3(-5) = -8$. El punto de intersección es entonces $(-26, -12.5, -8)$.

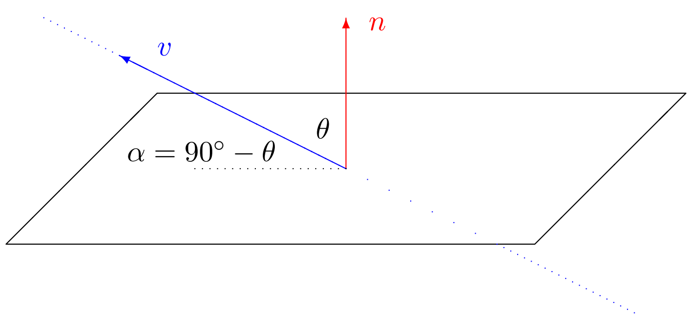
Repaso

¿En qué punto se intersecan la recta $(x, y, z) = (8, -1, 3) + t\langle 1, -6, -1\rangle$ y el plano $4x - y - 5z = 3$? Solución: $(7, 5, 4)$

¿Cómo podíamos haber sabido, antes de resolver el sistema del ejemplo anterior, si la recta y el plano se intersecaban o eran paralelos? No es difícil de ver, luego de pensarlo un momento: para que una recta y un plano sean paralelos, el vector de dirección de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares. Y si los vectores (dirección de la recta y normal del plano) son paralelos, entonces la recta es perpendicular al plano.

En el ejemplo, $v = \langle 4, \frac{5}{2}, 3\rangle$ era el vector de dirección de la recta, y $n = \langle -3, 4, 3\rangle$ el normal del plano, y ellos no eran perpendiculares.

En general, para encontrar el ángulo α entre una recta con vector de dirección v y un plano con vector normal n, notemos que el ángulo θ entre v y n es complementario con α, como muestra la figura.



O bien los vectores v y n podrían apuntar en direcciones opuestas del plano (con producto escalar negativo, como si uno de ellos, pero no ambos, apuntara hacia abajo en la figura anterior), y entonces α sería el complemento del suplemento de θ. En cualquier caso,

$$\alpha = 90^\circ - \arccos\left(\frac{|v \cdot n|}{\|v\|\,\|n\|}\right)$$

Ejemplo 17: ángulo entre recta y plano

En el ejemplo anterior teníamos $v = \langle 4, \frac{5}{2}, 3\rangle$ y $n = \langle -3, 4, 3\rangle$. Su producto escalar es $v \cdot n = 7$, positivo, por lo que la situación es como la de la figura (ambos vectores apuntan hacia el mismo lado del plano). El ángulo entre los vectores es

$$\theta = \arccos\left(\frac{|v \cdot n|}{\|v\|\,\|n\|}\right) = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{31.25}\,\sqrt{34}}\right) \approx 77.5991^\circ$$

de modo que el ángulo entre la recta y el plano es su complemento,

$$\alpha = 90^\circ - \theta \approx 12.4009^\circ$$

Repaso

Calcule el ángulo entre la recta $(x, y, z) = (8, -1, 3) + t\langle 1, -6, -1\rangle$ y el plano $4x - y - 5z = 3$. Solución: 22.0533°

Ejercicios

Encuentre el punto de intersección y el ángulo entre la recta y el plano dados.

40. $(x, y, z) = (-2, 0, 4) + t\langle -4, 5, 3\rangle$ y $x + z = 3$

41. $x - 5 = (5 - y)/3 = z + 1$ y $10x = 0$

42. $-\frac{1}{3}(x - 2) = \frac{1}{3}(y - 2) = z$ y $2x - y + 5z = 0$

43. $\{\, x = -4 + 4t,\ y = 1 + 3t,\ z = 4 - t \,\}$ y $3x - 4y = 1$

44. $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + t\langle -3, 4, 4\rangle$ y $4x + 5y - 2z = 6$

45. $(x, y, z) = (-1, 2, 0) + t\langle -3, 4, 4\rangle$ y $5x + 5y - 2z = -1$

46. Sea P el punto de intersección entre el plano $2x - y + z = 5$ y la recta $(x - 2)/4 = y + 1 = z/3$. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano $3 + z - y = 0$.

47. Encuentre una ecuación de la recta que cumple estas dos condiciones:

- Es perpendicular al plano que contiene a $(3, 4, 2)$, $(-1, 5, 3)$ y $(2, 1, 4)$.
- Pasa por el punto de intersección entre el plano $2x - y - z = 1$ y la recta $-x/2 = 1 - y = z + 1$.

48. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(2, 1, -4)$, está contenida en el plano $x + 3y = 5$ y es paralela al plano $4y + z = 6$.

49. Encuentre la ecuación de una recta que cumpla estas tres condiciones:

- Es perpendicular a la recta R: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z}{4}$.
- Es paralela al plano Π: $2x - y + 3z = 5$.

- Pasa por el punto de intersección entre el plano $\Sigma\colon x - 3y + z = 15$ y la recta $M\colon (x, y, z) = (2, 0, 5) + t\langle -2, -3, 1\rangle$.

50. Sea L la recta con ecuaciones $4 - 2x = y = 2z - 6$, y sea M la recta de intersección entre los planos $x - 2y + z = 1$ y $2x + 3z = 4$. Encuentre una ecuación del plano que contiene a L y es perpendicular a M.

51. Encuentre la ecuación de un plano que cumpla estas tres condiciones:

- Es perpendicular al plano $\Sigma\colon 2x + y + 2z = 3$.
- Contiene al punto de intersección entre las dos rectas $L\colon (x, y, z) = (3, 2, 10) + t\langle -2, 2, 3\rangle$ y $M\colon \{\, x = 3 + t,\ y = 2 - t,\ z = -3 + 5t \,\}$.
- Contiene al punto $(-1, 3, 4)$.

52. Encuentre una ecuación del plano que contiene a la recta $(x - 1)/2 = (y + 1)/3 = z - 2$ y pasa por el punto de intersección entre el plano $x - 2y + z = 1$ y la recta $3x = 8 - 2y = 12 - 6z$.

53. Sea Π el plano que contiene a $(2, -1, 1)$, $(3, 2, -1)$ y $(5, 3, 2)$, y sea L la recta con ecuación $(x, y, z) = (-1, 13, 1) + t\langle 1, 0, 2\rangle$.

(a) Encuentre una ecuación de Π.

(b) Encuentre el punto P de intersección entre Π y L.

(c) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por P y es normal a Π.

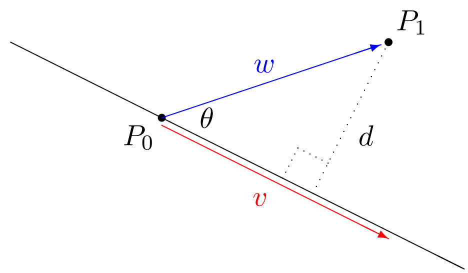
54. Encuentre una ecuación de la recta que cumple estas tres condiciones:

- Pasa por $(3, 2, 4)$.
- Es paralela al plano $3x - 2y - 3z = 7$.
- Interseca a la recta $x - 2 = -y - 4 = z - 1$.

10.4 Distancia de un punto a una recta o a un plano

Cuando un punto no pertenece a una recta o a un plano, no es difícil calcular la distancia entre ellos por medios algebraicos. Por supuesto, al hablar de la distancia entre un punto y una recta, o entre un punto y un plano, nos referimos a la distancia perpendicular, a la distancia desde el punto dado hasta el punto más cercano en la recta o el plano.

Empecemos por considerar el caso de una recta L que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección del vector v, y un punto P_1 que no está en la recta. Tomemos $w = \overrightarrow{P_0P_1}$, θ el ángulo entre v y w, y d la distancia de P_1 a L, como en la siguiente figura.

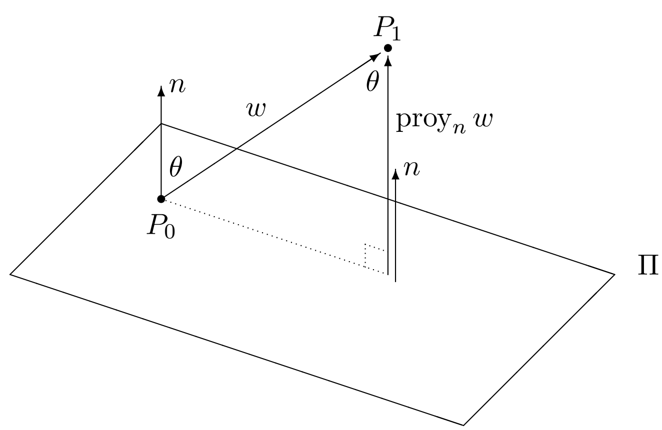


Podemos usar trigonometría para despejar d, que resulta ser la longitud del cateto opuesto a θ en el triángulo rectángulo que se forma, cuya hipotenusa mide $\|w\|$.

$$\frac{d}{\|w\|} = \operatorname{sen}\theta = \frac{\|w \times v\|}{\|w\|\,\|v\|}$$
$$d = \frac{\|w \times v\|}{\|v\|}$$

En la figura supusimos que θ era agudo. Si no, el ángulo del triángulo será $180^\circ - \theta$, cuyo seno es igual al de θ, así que la fórmula anterior se mantiene.

Para la distancia de un punto a un plano, consideremos un plano Π que pasa por el punto P_0 y es perpendicular al vector n, y por otro lado un punto P_1 que no pertenece al plano. Tomemos el vector $w = \vec{P_0P_1}$ como antes, y θ el ángulo entre n y w, como en la figura siguiente, y denotemos con d la distancia de P_1 a Π.



En realidad la figura ilustra el caso en que θ es agudo; si fuera obtuso (cuando w y n apuntan hacia lados opuestos del plano), el ángulo que nos interesa sería su suplemento $180^\circ - \theta$. Así, en el triángulo rectángulo de la figura, el cociente $d/\|w\|$ será $\cos\theta$ o $\cos(180^\circ - \theta)$ dependiendo de si θ es agudo u obtuso respectivamente, pero ese cociente en cualquier caso es igual a $|\cos\theta|$. Entonces

$$\frac{d}{\|w\|} = |\cos\theta| = \frac{|w \cdot n|}{\|w\|\,\|n\|}$$
$$d = \frac{|w \cdot n|}{\|n\|}$$

Otra derivación más concisa, que no depende de si θ es agudo u obtuso, es la siguiente: la distancia de P_1 a Π es la longitud de la proyección de w sobre n,

$$d = \|\operatorname{proy}_n w\| = \left\| \frac{w \cdot n}{\|n\|^2}\, n \right\| = \left| \frac{w \cdot n}{\|n\|^2} \right| \|n\| = \frac{|w \cdot n|}{\|n\|}$$

Con eso el siguiente teorema ya está demostrado.

Teorema

Si P_1 es un punto, L es una recta y Π es un plano, todos en $\mathbb{R}^3$, entonces:

- La distancia de P_1 a la recta L es

$$d = \frac{\|\vec{P_0 P_1} \times v\|}{\|v\|}$$

  donde P_0 es un punto en L y v es un vector de dirección de L.

- La distancia de P_1 al plano Π es

$$d = \frac{|\vec{P_0 P_1} \cdot n|}{\|n\|}$$

  donde P_0 es un punto en Π y n es un vector normal a Π.

Ejemplo 18: distancia de un punto a una recta

Calcular la distancia del punto $(-6, 1, -1)$ a la recta con ecuaciones

$$\frac{x}{3} = \frac{y+4}{-2}, \quad z = 2$$

Aquí tenemos $P_1 = (-6, 1, -1)$, $P_0 = (0, -4, 2)$, $v = \langle 3, -2, 0\rangle$ y $w = \vec{P_0 P_1} = \langle -6, 5, -3\rangle$. Entonces

$$d = \frac{\|\langle -6, 5, -3\rangle \times \langle 3, -2, 0\rangle\|}{\|\langle 3, -2, 0\rangle\|} = \frac{\|\langle -6, -9, -3\rangle\|}{\|\langle 3, -2, 0\rangle\|} = \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{13}} \approx 3.11325$$

Repaso

Calcule la distancia de $(3, 3, 2)$ a $(x, y, z) = (4, 5, 2) + t\langle 4, 1, -3\rangle$.

Solución: 1.90142

Ejemplo 19: distancia de un punto a un plano

Calcular la distancia de $(2, 9, -1)$ al plano con ecuación $6x - 4y + 3z + 9 = 0$.

Denotemos $P_1 = (2, 9, -1)$, $P_0 = (0, 0, -3)$ (en el Ejemplo 12, página 192, vimos cómo encontrar un punto dada la ecuación de un plano), $n = \langle 6, -4, 3\rangle$ y $w = \vec{P_0P_1} = \langle 2, 9, 2\rangle$. Entonces

$$d = \frac{|\langle 2, 9, 2\rangle \cdot \langle 6, -4, 3\rangle|}{\|\langle 6, -4, 3\rangle\|} = \frac{|-18|}{\sqrt{61}} \approx 2.30466$$

Repaso

Calcule la distancia de $(6, -3, 4)$ a $2x + 9y + 6z = 8$. Solución: $0.\overline{09}$

Como observación final, notemos que si P_1 estuviera en la recta L entonces el vector $\vec{P_0P_1}$ sería paralelo a v y el producto vectorial entre ambos sería $\vec{0}$. La fórmula de distancia entonces daría el resultado 0, que es correcto.

Y por otro lado, si P_1 estuviera contenido en el plano Π, entonces el vector $\vec{P_0P_1}$ sería normal a n, lo que haría que su producto escalar sea cero y la distancia resulte también correctamente ser 0.

En resumen, no era necesario suponer que P_1 era un punto *fuera* de la recta o el plano; las fórmulas respectivas son correctas aunque P_1 pertenezca a la recta o al plano en cuestión.

Ejercicios

Encuentre la distancia del punto a la recta.

55. De $(5, 1, -1)$ a $(x, y, z) = (0, 1, 3) + t\langle -3, -2, 4\rangle$

56. De $(-3, 5, 7)$ a $(x, y, z) = (9, -1, 6) + t\langle 7, 2, -1\rangle$

57. Del origen a $(x, y, z) = (0, 1, 1) + t\langle 1, 1, 4\rangle$

58. De $(2, 1, 3)$ a $(x, y, z) = (6, 1, 3) + t\langle 4, 0, 0\rangle$

En $\mathbb{R}^2$, encuentre la distancia del punto a la recta.

59. De $(-1, 0)$ a $(x, y) = (1, -3) + t\langle 6, 0\rangle$

60. De $(5, 2)$ a $(x, y) = (2, 7) + t\langle 3, -2\rangle$

Encuentre la distancia del punto al plano.

61. De $(-1, -1, 7)$ a $x + 9z + 1 = 0$

62. Del origen a $5x + 10y = 6$

63. De $(-1, 5, 1)$ a $2x + 3y = 8 + z$

64. De $(6, 9, -1)$ al plano XY

65. ¿Cuál es el punto de la recta $(x, y, z) = (6, -2, 5) + t\langle 5, 0, 4\rangle$ más cercano al punto $(7, 9, -3)$?

66. ¿Cuál es el punto del plano $2x + y - z = 1$ más cercano al origen?

67. ¿Cuál es el punto del plano $8x + 4y + 7z = 3$ más cercano al punto $(6, -4, 2)$?

68. Las rectas $(x, y, z) = (3, 2, -1) + t\langle 10, 6, 5\rangle$ y $(x, y, z) = (1, 8, 6) + t\langle 10, 6, 5\rangle$ son paralelas y no se intersecan. ¿Cuál es la distancia entre ellas?

69. La recta $(x, y, z) = (1, 5, -2) + t\langle 0, 2, 5\rangle$ no interseca al plano $3x - 5y + 2z = 12$. ¿Cuál es la distancia entre ellos?

70. Los planos $6x + 9y - 3z = 2$ y $z - 3y - 2x = 5$ son paralelos. ¿Cuál es la distancia entre ellos?

71. Las rectas $(x, y, z) = (-2, -3, -1) + r\langle 1, 9, 6\rangle$ y $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + s\langle -1, 8, 10\rangle$ no son paralelas pero tampoco se intersecan. ¿Cuál es la distancia entre ellas?

72. Encuentre las ecuaciones de todos los planos que sean paralelos al plano con ecuación $x - 2y + z + 5 = 0$ y que estén a una distancia de 9 unidades del origen.

73. Demuestre que la distancia entre los planos paralelos con ecuaciones $ax + by + cz = d_1$ y $ax + by + cz = d_2$ es $|d_1 - d_2|/\|\langle a, b, c\rangle\|$.

En resumen. . .

- La recta que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección del vector $v = \langle a, b, c\rangle$ tiene ecuaciones. . .

  . . . vectorial: $P = P_0 + tv$, o bien $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c\rangle$, para $t \in \mathbb{R}$

  . . . paramétricas: $\{\, x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct \,\}$, para $t \in \mathbb{R}$

  . . . simétricas: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$

- Si dos rectas con vectores de dirección respectivos u y v se intersecan:

  a. Su intersección es la solución del sistema que reúne las ecuaciones de una con las ecuaciones de la otra (más fácil de resolver con las ecuaciones paramétricas de una y las simétricas de la otra).

  b. El ángulo entre ellas es $\arccos\big[\, |u \cdot v|/(\|u\|\,\|v\|)\big]$.

- El plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y es perpendicular al vector $n = \langle a, b, c\rangle$ tiene ecuación. . .

  . . . estándar: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

  . . . general: $ax + by + cz = d$, donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$

- Si dos planos con vectores normales respectivos n_1 y n_2 se intersecan:

  a. Su intersección es la solución del sistema que reúne las ecuaciones respectivas.

  b. El ángulo entre ellos es $\arccos\big[\, |n_1 \cdot n_2|/(\|n_1\|\,\|n_2\|)\big]$.

- Si una recta con vector de dirección v y un plano con vector normal n se intersecan:

  a. Su intersección es la solución del sistema que reúne las ecuaciones de la recta con la ecuación del plano (más fácil de resolver con las ecuaciones paramétricas de la recta).

  b. El ángulo entre ellos es $90° - \arccos\big[\, |v \cdot n|/(\|v\|\,\|n\|)\big]$.

- La distancia del punto P_1 a la recta por P_0 con dirección v es $\|\vec{P_0P_1} \times v\| \,/\, \|v\|$.

- La distancia del punto P_1 al plano por Π con normal n es $|\vec{P_0P_1} \cdot n| \,/\, \|n\|$.

Capítulo 11
Espacios vectoriales

Acabamos de estudiar a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como conjuntos no solo de puntos sino de vectores. Vimos que en estos espacios los vectores tienen propiedades algebraicas, referidas a las operaciones de suma y producto, y propiedades referentes a la geometría del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$.

En este capítulo y los siguientes vamos a abstraer las principales propiedades algebraicas de los vectores y a estudiar otros posibles tipos (no geométricos) de vectores.

11.1 Definiciones y ejemplos

Tomemos como punto de partida el teorema de la página 153, que enuncia algunas de las principales propiedades algebraicas de la suma de vectores y del producto de escalar por vector, en el contexto de vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, recuerde, para cualesquiera vectores u y v, y cualquier escalar $c \in \mathbb{R}$, se tiene $\vec{0}+u = u$, $u+v = v+u$, $c(u+v) = cu+cv$, entre otras propiedades.

Podemos notar que todas esas propiedades no solo las cumplen los vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, sino que también son ciertas si u, v y w son, por ejemplo, matrices del mismo tamaño (y $\vec{0}$ es la matriz cero de ese tamaño). Como otro ejemplo, se cumplen también si u, v y w son polinomios. O sucesiones, o funciones. En fin, existen muchos conjuntos cuyos elementos comparten todas esas propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Con base en esa idea, vamos a definir un espacio vectorial como un conjunto en el que los elementos pueden sumarse entre ellos y multiplicarse por escalares, cumpliendo las propiedades del teorema citado. Más exactamente, así definimos un espacio vectorial:

Definición (espacio vectorial)

Un *espacio vectorial* es un conjunto V, cuyos elementos se llaman *vectores*, en el que se han definido la suma de dos vectores y el producto de un escalar por un vector, operaciones que cumplen las siguientes propiedades para cualesquiera u, v y w en V y cualesquiera c y d en $\mathbb{R}$.

1. $u + v \in V, \;\; \forall\, u, v \in V$ (la suma es cerrada)
2. $u + v = v + u, \;\; \forall\, u, v \in V$ (la suma es conmutativa)
3. $(u + v) + w = u + (v + w), \;\; \forall\, u, v, w \in V$ (la suma es asociativa)

(continúa)

Definición (espacio vectorial, continuación)

4. Existe un $\vec{0} \in V$, llamado *vector cero* o *vector nulo*, tal que $u + \vec{0} = u \quad \forall\, u \in V$ (existe un elemento neutro para la suma)

5. Para cada $u \in V$ existe un *opuesto*, $-u \in V$, tal que $u+(-u) = \vec{0}$ (existen opuestos para la suma)

6. $cu \in V, \ \ \forall\, c \in \mathbb{R}$ y $\forall\, u \in V$ (el producto por escalar es cerrado)

7. $c(u+v) = cu + cv, \ \ \forall\, c \in \mathbb{R}$ y $\forall\, u, v \in V$ (el producto por escalar es distributivo con respecto a la suma de vectores)

8. $(c+d)u = cu + du, \ \ \forall\, c, d \in \mathbb{R}$ y $\forall\, u \in V$ (el producto por escalar es distributivo con respecto a la suma de escalares)

9. $c(du) = (cd)u, \ \ \forall\, c, d \in \mathbb{R}$ y $\forall\, u \in V$

10. $1u = u, \ \ \forall\, u \in V$

Cuando hablamos de escalares, nos hemos referido a números reales. Pero en algunos espacios vectoriales también los números complejos pueden considerarse escalares. La definición anterior se refiere, en realidad, a un *espacio vectorial real.* Si en las propiedades 6–9 cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ entonces estaremos definiendo un *espacio vectorial complejo.*

Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales.

Ejemplo 1: el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Habiendo conocido $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, la primera generalización que podríamos pensar consiste en aumentar el número de coordenadas. Denotemos entonces con $\mathbb{R}^n$ al conjunto de n-tuplos ordenados con componentes en $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 1, \ldots, n \,\}$$

Definiendo la suma como

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ \ldots,\ x_n + y_n)$$

y el producto por escalar como

$$c\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1,\ cx_2,\ \ \ldots,\ cx_n)$$

es fácil comprobar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real.

Por ejemplo, si $n = 5$ y tomamos $x = (0, 1, -2, 4, -2)$, $y = (2, 0, -2, 5, -3)$, entonces resultan

$$\begin{aligned} x + y &= (2, 1, -4, 9, -5) \\ 7y &= (14, 0, -14, 35, -21) \\ 2x - 3y &= (0, 2, -4, 8, -4) - (6, 0, -6, 15, -9) = (-6, 2, 2, -7, 5) \end{aligned}$$

Note que $\mathbb{R}^n$ no es un espacio vectorial complejo, porque si se permitieran escalares $c \in \mathbb{C}$ fallaría la propiedad 6 de la definición. Por ejemplo, con $c = \mathrm{i}$ y con $n = 5$, $c(1, 0, 0, 0, 0) = (\mathrm{i}, 0, 0, 0, 0)$, que no pertenece a $\mathbb{R}^5$.

Por supuesto, $\mathbb{C}^n$, el conjunto de n-tuplos ordenados con componentes en $\mathbb{C}$, sí es un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 2: espacio vectorial de matrices

El ejemplo anterior puede extenderse en dos direcciones (vea este ejemplo y el siguiente). Notando que la suma de vectores y el producto por escalar en $\mathbb{R}^n$ son prácticamente idénticos a las operaciones respectivas entre matrices, tomemos V como el conjunto de todas las matrices complejas de tamaño 2×3. Este resulta ser un espacio vectorial complejo, como es fácil de comprobar (y además es análogo a $\mathbb{C}^6$, porque cada matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right) \in V$ puede identificarse con el vector $\langle a, b, c, d, e, f \rangle \in \mathbb{C}^6$).

Por supuesto, lo mismo podríamos decir sobre las matrices de cualquier dimensión $m \times n$. Pero es necesario fijar un tamaño; no es cierto que el conjunto de todas las matrices (de cualquier tamaño) sea un espacio vectorial, porque la suma de matrices se define solo entre matrices de tamaños iguales.

Ejemplo 3: el espacio vectorial $\mathbb{R}^\infty$

Veamos otra dirección en la que puede extenderse el primer ejemplo. En vez de tomar los n-tuplos de números reales, con n finito, definamos $\mathbb{R}^\infty$ como el conjunto de los ∞-tuplos (¿“infinítuplos”?) con componentes reales:

$$\mathbb{R}^\infty = \{\, (x_1, x_2, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}\ \forall\, j = 1, 2, \dots \}$$

Así, $\mathbb{R}^\infty$ resulta ser el conjunto de todas las sucesiones reales. La suma de sucesiones y el producto de un escalar por una sucesión son simplemente extensiones de las mismas operaciones en $\mathbb{R}^n$, y con ellas $\mathbb{R}^\infty$ resulta ser un espacio vectorial real.

Ejemplo 4: el conjunto de polinomios de grado 3

Si tomamos W como el conjunto de polinomios cúbicos con coeficientes complejos, casi tenemos un espacio vectorial complejo. Definir la suma de dos polinomios y el producto de un escalar (complejo) por un polinomio no es problema. Es claro que si $p = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ y $q = b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0$, y si $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$p + q = (a_3 + b_3)z^3 + (a_2 + b_2)z^2 + (a_1 + b_1)z + (a_0 + b_0)$$

y

$$cp = (ca_3)z^3 + (ca_2)z^2 + (ca_1)z + (ca_0)$$

Las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad se cumplen evidentemente. ¡Pero falla la propiedad 1! La suma no es cerrada en W, ya que es posible sumar dos polinomios cúbicos cuyo resultado no sea un polinomio cúbico. ¿Cómo? Obviamente no va a resultar un polinomio de grado 4 o mayor, pero sí podrían cancelarse los términos cúbicos, como en este ejemplo en el que la suma de dos polinomios cúbicos resulta ser un cuadrático:

$$(2z^3 - 5z^2 + 1) + (-2z^3 + 6z^2 + 3z) = z^2 + 3z + 1$$

El ejemplo más sencillo, sin embargo, es $(z^3) + (-z^3) = 0$. Y entonces nos damos cuenta de que también falla la propiedad 4 de la definición: el elemento neutro para la suma, el polinomio constante 0, no pertenece a W. Y falla también la propiedad 6: cp no siempre será un polinomio cúbico para cualesquiera $c \in \mathbb{C}$, $p \in W$. Específicamente, si $c = 0$, $cp = 0 \notin W$.

En resumen, el conjunto de todos los polinomios cúbicos no es un espacio vectorial. Pero vea el ejemplo que sigue.

Ejemplo 5: el espacio vectorial de polinomios con grado ≤ 3

Sea P_3 el conjunto de polinomios complejos de grado menor o igual que 3:

$$P_3 = \{\, a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C} \,\}$$

Ahora sí tenemos un espacio vectorial complejo. ¿Cómo se corrigieron los problemas del ejemplo anterior? Con solo permitir que los coeficientes sean números complejos cualesquiera, incluyendo cero, ya estamos abarcando todos los polinomios cúbicos, cuadráticos, lineales y constantes. Y este conjunto P_3 sí cumple con las diez condiciones de la definición de espacio vectorial.

Ejemplo 6: espacio vectorial de funciones continuas

Sea $F = \{\, f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \,\}$. Veamos que se cumplen las diez propiedades.

1. La suma de dos funciones reales continuas en $[0,1]$ es una función real continua en $[0,1]$.
2. La suma de funciones es conmutativa.
3. La suma de funciones es asociativa.
4. El elemento neutro para la suma es la función $\vec{0}$, constante en cero, que es continua.

5. Para cada función f continua, su opuesto es la función $-f$ definida por $(-f)(t) = -f(t)$, también continua.
6. El producto de un escalar real por una función real continua es una función real continua.

Las propiedades 7–10 también son fáciles de comprobar. Entonces F es un espacio vectorial real.

Ejemplo 7: un plano en $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial

Sea $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 5z = 0 \}$. Este es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (geométricamente, es un plano que pasa por $(0, 0, 0)$), por lo que ya sabemos que la suma y el producto por escalar cumplen las propiedades 2, 3, 7, 8, 9 y 10. Comprobemos las otras cuatro.

1. Sean $u = (x, y, z)$ y $v = (a, b, c)$ en S. Debemos comprobar que $u + v \in S$. Como $u \in S$, $2x - y + 5z = 0$, y como $v \in S$, también $2a - b + 5c = 0$. Ahora, ¿los componentes de $u+v = (x+a, y+b, z+c)$ satisfacen la misma ecuación? Veamos.
$$\begin{aligned} 2(x + a) - (y + b) + 5(z + c) &= 2x + 2a - y - b + 5z + 5c \\ &= (2x - y + 5z) + (2a - b + 5c) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$
Entonces sí, $u + v \in S$.
4. ¿El vector $\vec{0} = (0, 0, 0)$ pertenece a S? Sí, ya que sus componentes satisfacen
$$2(0) - (0) + 5(0) = 0$$
5. Sea $u = (x, y, z) \in S$. Para confirmar que también $-u = (-x, -y, -z)$ está en S, lo sustituimos en la ecuación:
$$2(-x) - (-y) + 5(-z) = -2x + y - 5z = -(2x - y + 5z) = -0 = 0$$
6. Para $u = (x, y, z) \in S$ y $c \in \mathbb{R}$, comprobemos que $cu = (cx, cy, cz) \in S$:
$$2(cx) - (cy) + 5(cz) = 2cx - cy + 5cz = c(2x - y + 5z) = c \cdot 0 = 0$$

Concluimos entonces que S sí es un espacio vectorial real.

El siguiente teorema menciona algunas propiedades adicionales de las operaciones entre vectores y escalares.

Teorema

Si V es un espacio vectorial, $u \in V$ y c es un escalar, entonces:

1. $0u = \vec{0}$
2. $c\vec{0} = \vec{0}$
3. $(-1)u = -u$

Estas tres nuevas propiedades son evidentes en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, pero no es inmediato que cualquier espacio vectorial las satisfaga. Veamos la demostración.

1. Llamemos $w = 0u$, para demostrar que $w = \vec{0}$. Por distributividad,

$$w + w = 0u + 0u = (0 + 0)u = 0u = w$$

así que $w+w = w$. Sumando el opuesto $-w$ en ambos lados de la ecuación tendremos

$$\begin{aligned} [w + w] + (-w) &= w + (-w) \\ w + [w + (-w)] &= \vec{0} && \text{por las propiedades 3 (izquierda) y 5 (derecha)} \\ w + \vec{0} &= \vec{0} && \text{por la propiedad 5} \\ w &= \vec{0} && \text{por la propiedad 4} \end{aligned}$$

2. Tomemos ahora $w = c\,\vec{0}$. Como en el punto anterior, notemos que

$$w + w = c\,\vec{0} + c\,\vec{0} = c(\vec{0} + \vec{0}) = c(\vec{0}) = w$$

Y a partir de $w + w = w$ ya vimos cómo se demuestra que $w = \vec{0}$.

3. Sea $w = (-1)u$. Como $w + u = (-1)u + u = (-1)u + 1u = (-1 + 1)u = 0u = \vec{0}$, se deduce que w es el opuesto de u, $w = -u$.

Ejercicios

1. El conjunto de polinomios complejos de segundo grado no es un espacio vectorial. ¿Cuáles de las propiedades de la definición fallan?

2. El conjunto $S = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,\}$, con las mismas operaciones de vectores en $\mathbb{R}^2$, no es un espacio vectorial. ¿Cuáles de las propiedades de la definición fallan?

3. El conjunto $T = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\,\}$, con las mismas operaciones de vectores en $\mathbb{R}^2$, no es un espacio vectorial. ¿Cuáles de las propiedades de la definición fallan?

4. Determine si el conjunto $V = \{\,(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\,\}$, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar, es un espacio vectorial complejo. Si no, ¿cuáles propiedades de la definición fallan?

5. Demuestre que $P_2 = \{\,ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\,\}$, el conjunto de todos los polinomios complejos de grado menor o igual que 2, es un espacio vectorial complejo.

6. Demuestre que $U = \{\,\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}\,\}$, el conjunto de todas las series reales absolutamente convergentes, es un espacio vectorial real.

7. Demuestre que $L = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\,\}$, la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen y tiene pendiente 2, es un espacio vectorial real.

8. Sean v un vector en algún espacio vectorial, y c un escalar, tales que $cv = \vec{0}$. Demuestre que necesariamente $c = 0$ o $v = \vec{0}$.

11.2 Combinaciones lineales

Aunque muchas de las características de los vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ no se generalizan fácilmente a espacios vectoriales generales, al menos un concepto importante sí se conserva, el de combinación lineal de vectores.

Definición (combinación lineal)

Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores en un espacio vectorial V, una *combinación lineal* de ellos es un vector de la forma

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_nv_n = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares.
La combinación lineal *trivial* se da cuando $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ (y su resultado es $\vec{0}$ en cualquier caso).

Note que el número n de vectores puede ser tan pequeño como $n = 1$. Así, dado un solo vector v, podemos decir que cualquier múltiplo cv es una combinación lineal de v. En particular, el mismo $v = 1v$ y el vector nulo $\vec{0} = 0v$ son combinaciones lineales de v.

Ejemplo 8: combinaciones lineales de polinomios

En el Ejemplo 5 vimos que P_3, el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 3, es un espacio vectorial complejo. Sean ahora $p = 2z^3 - 2z^2 - 3$, $q = -3z + 5$ y $r = -z^3 - 4z^2 + z$ en P_3.

- Algunas combinaciones lineales de p, q y r son

$$\begin{aligned}
5p + 4r &= (10z^3 - 10z^2 - 15) + (-4z^3 - 16z^2 + 4z) \\
&= 6z^3 - 26z^2 + 4z - 15 \\
-2p + q - 3r &= (-4z^3 + 4z^2 + 6) + (-3z + 5) - (-3z^3 - 12z^2 + 3z) \\
&= -z^3 + 16z^2 - 6z + 11
\end{aligned}$$

- Dado el vector $v = 5z^3 + 8z - 21$, es posible escribirlo como combinación lineal de p, q y r encontrando tres escalares α, β y γ tales que $v = \alpha p + \beta q + \gamma r$, así:

$$\begin{aligned}
v &= \alpha p + \beta q + \gamma r \\
5z^3 + 8z - 21 &= (2\alpha z^3 - 2\alpha z^2 - 3\alpha) + (-3\beta z + 5\beta) + (-\gamma z^3 - 4\gamma z^2 + \gamma z) \\
5z^3 + 8z - 21 &= (2\alpha - \gamma)z^3 + (-2\alpha - 4\gamma)z^2 + (-3\beta + \gamma)z + (-3\alpha + 5\beta)
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes[1] obtenemos $2\alpha-\gamma=5$, $-2\alpha-4\gamma=0$, $-3\beta+\gamma=8$ y $-3\alpha+5\beta=-21$. Este sistema tiene como única solución $\alpha=2$, $\beta=-3$ y $\gamma=-1$. Concluimos entonces que

$$v = 2p - 3q - r$$

- No cualquier polinomio en P_3 puede escribirse como combinación lineal de p, q y r. Por ejemplo, para encontrar la combinación que resulte en $w = 5z^3 + 8z - 20$ haríamos el mismo procedimiento del paso anterior, empezando por plantear

$$w = \alpha p + \beta q + \gamma r$$
$$5z^3 + 8z - 20 = (2\alpha-\gamma)z^3 + (-2\alpha-4\gamma)z^2 + (-3\beta+\gamma)z + (-3\alpha+5\beta)$$

y llegaríamos a las ecuaciones $2\alpha-\gamma=5$, $-2\alpha-4\gamma=0$, $-3\beta+\gamma=8$ y $-3\alpha+5\beta=-20$, que no tienen solución.

Repaso

Escriba el polinomio $w = z^3 - z - 5$ como combinación lineal de $p = 2z^3 - z + 5$, $q = 5z^2 - 2z$ y $r = z^3 - z^2 + 4$. Solución: $w = 3p - q - 5r$

Ejercicios

9. Sea P_2 el conjunto de todos los polinomios complejos de grado menor o igual que 2. Sean $p = 2x^2 - 5\mathrm{i}x$ y $q = 3x - 1 + \mathrm{i}$ dos vectores en P_2.

(a) Escriba el vector $v = 2x^2 - (9+5\mathrm{i})x + 3 - 3\mathrm{i}$ como combinación lineal de p y q.

(b) Escriba el vector $w = 10x^2 + (12-25\mathrm{i})x - 4 + 4\mathrm{i}$ como combinación lineal de p y q.

(c) Encuentre algún vector en P_2 que no pueda escribirse como combinación lineal de p y q.

10. Sea W el conjunto de todas las matrices reales 2×3 de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0\end{smallmatrix}\right)$, y sean $P = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Escriba $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & 0\end{smallmatrix}\right)$ como combinación lineal de P, Q y R.

(b) Demuestre que cualquier matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0\end{smallmatrix}\right) \in W$ se puede escribir como combinación lineal de P, Q y R.

[1] Es un hecho, aunque la demostración no es relevante aquí, que si dos polinomios son iguales entonces sus coeficientes deben ser iguales. Específicamente, si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ para todo x, entonces $a_k = b_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. La implicación es cierta incluso para series de potencias: si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$ en algún intervalo de convergencia mayor que un punto, entonces $a_k = b_k$ para todo k. Para la demostración en el caso de $n = 2$, vea el Ejemplo 1 del Capítulo 12, en la página 224.

11.3 Subespacios

En el Ejemplo 7 teníamos un espacio vectorial, $S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 5z = 0 \,\}$, que está contenido en otro mayor, $\mathbb{R}^3$. Cuando un subconjunto de un espacio vectorial es en sí mismo un espacio vectorial, el subconjunto se llama subespacio del espacio mayor.

Definición (subespacio vectorial)

Si V es un espacio vectorial y el subconjunto $W \subset V$ es también un espacio vectorial con las mismas operaciones, entonces W es un *subespacio vectorial* de V.

Entonces S en el Ejemplo 7 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. En general, todo espacio vectorial V contiene al menos dos subespacios: el mismo V, en un extremo, y el conjunto $\{\, 0 \,\}$ en el extremo opuesto (aunque estos dos extremos podrían ser iguales si V consta solamente del vector nulo).

Para probar que un conjunto es un subespacio vectorial no es necesario verificar las diez propiedades de la definición, gracias al siguiente teorema.

Teorema

Si V es un espacio vectorial y W es un subconjunto no vacío de V tal que cualquier combinación lineal de dos vectores en W está a su vez en W, es decir, si

$$u, v \in W \quad \Rightarrow \quad \alpha u + \beta v \in W \qquad \text{para cualesquiera escalares } \alpha,\ \beta,$$

entonces W es un subespacio vectorial de V.

Para demostrarlo vamos a suponer que W cumple la hipótesis, que para cualesquiera $u, v \in W$ y cualesquiera escalares α, β, se tiene $\alpha u + \beta v \in W$, y entonces vamos a ver que W satisface las diez propiedades en la definición de espacio vectorial. De las diez, como en el Ejemplo 7, las propiedades 2, 3, 7, 8, 9 y 10 son inmediatas porque ya se cumplen en V. Veamos las otras.

1. Sean u y v en W. Como $u + v$ es una combinación lineal de ellos, entonces $u + v \in W$, por la hipótesis del teorema.

4. Como W no es vacío, tomemos algún $w \in W$. Por el teorema en la página 213, el vector $\vec{0}$ es igual a la combinación lineal[2] $0w$, que pertenece a W.

5. Dado $u \in W$, su opuesto es, de nuevo por el teorema mencionado, la combinación lineal $(-1)u$, que también pertenece a W.

6. Dado $u \in W$ y dado el escalar c, el vector cu es una combinación lineal de u, así que pertenece a W.

[2]Formalmente, la hipótesis del teorema habla de una combinación lineal de *dos* vectores en W, aunque no pide que ellos sean distintos. Pues bien, $0w + 0w = \vec{0}$.

Ejemplo 9: subespacio de un espacio de funciones

Tomemos el conjunto

$$V = \{\, f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable dos veces y } f''(x) + f(x) = 0\ \forall x \in [0,1] \,\}$$

Este es un subconjunto del espacio $F = \{\, f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \,\}$ del Ejemplo 6. Veamos que es un subespacio.

Sean $g, h \in V$. Esto es, g y h son funciones reales derivables dos veces en $[0,1]$ y cumplen $g''(x) + g(x) = 0$ y $h''(x) + h(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Sean también $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y sea $f = \alpha g + \beta h$. Tenemos que probar que $f \in V$.

Es claro que la combinación lineal f es una función derivable dos veces en $[0,1]$, porque sabemos del Cálculo diferencial que la suma y el producto de funciones derivables son derivables. Además, para cualquier $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f''(x) + f(x) &= (\alpha g + \beta h)''(x) + (\alpha g + \beta h)(x) \\ &= \alpha g''(x) + \beta h''(x) + \alpha g(x) + \beta h(x) \\ &= \alpha(g''(x) + g(x)) + \beta(h''(x) + h(x)) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Es así que $f = \alpha g + \beta h \in V$, como debíamos probar.

Repaso

Demuestre que el conjunto

$$W = \{\, f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable y } f'(x) - 2f(x) = 0\ \forall x \in [0,1] \,\}$$

es un subespacio del mismo F del ejemplo anterior.

Ejemplo 10: subconjunto de un espacio de matrices

Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial formado por las matrices complejas de tamaño 2×2, y sea $U = \{\, A \in M_{2\times 2} \mid \det(A) = 0 \,\}$. Determinar si U es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Un criterio prácticamente inmediato para descartar que un conjunto sea subespacio es que no contenga al vector cero (recuerde el Ejemplo 4, donde W era el espacio de polinomios cúbicos). En este caso, $\vec{0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sí pertenece a U porque su determinante es cero. Entonces no descartamos aún la posibilidad de que U sea un subespacio.

Dados dos vectores $A, B \in U$ (es decir, dos matrices 2×2 con determinante cero) y dos escalares α y β, debemos determinar si la combinación lineal

$$N = \alpha A + \beta B$$

pertenece a U. Es claro que N es 2×2, pero ¿será $|N| = 0$?. Para eso debemos contestar la pregunta: ¿si $\det(A) = \det(B) = 0$, necesariamente será $\det(\alpha A + \beta B) = 0$?

Nunca habíamos hablado de que el determinante de una suma fuera igual a la suma de los determinantes, por lo que no podríamos asegurar que $\det(\alpha A + \beta B) = \det(\alpha A) + \det(\beta B)$. Por eso no sabemos que $\det(N)$ sea igual a cero.

Busquemos, al contrario, un ejemplo que confirme que $\alpha A + \beta B$ podría no estar en U aunque $A, B \in U$. La búsqueda no toma mucho tiempo: podemos tomar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ambas con determinante cero, y tomar $\alpha = \beta = 1$. Entonces

$$N = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 1, no 0. Entonces $A \in U$ y $B \in U$, pero $A + B \notin U$.

Confirmamos así que no cualquier combinación lineal de dos elementos de U será a su vez un elemento de U. Por eso, U no es un subespacio vectorial.

Repaso

Dado $M_{2\times 2}$ como en el ejemplo anterior, pruebe que $R = \{\, A \in M_{2\times 2} \mid \det(A) = 1 \,\}$ no es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Ejemplo 11: subespacio de matrices simétricas

En el mismo espacio $M_{2\times 2}$ de matrices 2×2, determinar si el conjunto V de matrices 2×2 simétricas (iguales a su transpuesta) es un subespacio.

Sean $A, B \in V$, y sean α, β escalares. ¿Podemos probar que $aA + bB \in V$?

Por simetría, A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & \alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha c + \beta z \end{pmatrix}$$

que también es una matriz 2×2 simétrica, por lo que pertenece a V.

En conclusión, V sí es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Repaso

En el mismo espacio $M_{2\times 2}$, pruebe que $S = \{\, A \in M_{2\times 2} \mid A \text{ es diagonal} \,\}$[3] es un subespacio.

Cuando se tiene un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial, el conjunto de sus combinaciones lineales forma un subespacio vectorial, como veremos.

Definición (subespacio generado)

Si $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ son vectores en el espacio vectorial V, el *subespacio generado* por los w_i, denotado $\operatorname{gen}(w_1, \ldots, w_n)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los w_i:

$$\operatorname{gen}(w_1, \ldots, w_n) = \left\{\, \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i w_i \mid c_i \text{ es un escalar para cada } i = 1, \ldots, n \,\right\}$$

De momento es un abuso hablar del *subespacio* generado sin haber justificado que el conjunto de combinaciones lineales de los w_i es en efecto un subespacio. Pero podemos justificarlo con el teorema anterior, demostrando que cualquier combinación de dos vectores en $W = \operatorname{gen}(w_1, \ldots, w_n)$ está a su vez en W.

Para eso tomemos $u, v \in W$, y probemos que $\alpha u + \beta v \in W$ para cualesquiera escalares α y β. Por estar u y w en W, podemos escribir $u = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} d_i w_i$ para algunos escalares $c_1,\ \ldots,\ c_n$ y $d_1,\ \ldots,\ d_n$. Entonces

$$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i w_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i w_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha c_i + \beta d_i) w_i$$

resulta ser una combinación lineal de los w_i, por lo que sí pertenece a W.

Ejemplo 12: espacio generado por tres matrices

En el subespacio V del Ejemplo 11 (matrices 2×2 simétricas), tomemos los vectores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y veamos que $\operatorname{gen}(A, B, C) = V$.

En primer lugar, como A, B y C pertenecen al espacio V, se cumple que $\operatorname{gen}(A, B, C)$ es un subespacio de V. Falta ver que, recíprocamente, cualquier vector en V es combinación lineal de A, B y C.

[3] Una matriz cuadrada es *diagonal* si todos sus elementos fuera de la diagonal son cero. Para el tamaño 2×2, las matrices diagonales son las de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$.

Para eso tomemos una matriz $M \in V$: $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Resulta obvio que

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de manera que, en efecto, M es combinación lineal de A, B y C.

Vimos entonces no solo que cualquier combinación lineal de A, B y C está en V, sino también que cualquier elemento de V está en $\mathrm{gen}(A, B, C)$. Con eso hemos demostrado que $\mathrm{gen}(A, B, C) = V$.

Repaso

Para el subespacio S del repaso anterior (matrices diagonales), compruebe que $S = \mathrm{gen}(A, C)$, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ejercicios

Determine si cada conjunto W es un subespacio del espacio vectorial V.

11. $W = \{\, (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

12. $W = \{\, (x, y, x - y) \in \mathbb{R}^3 \,\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

13. $W = \{\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & 2a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{C} \,\}$, V el conjunto de todas las matrices 2×2 complejas

14. $W = \{\, p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}$ y $p(1) = 0 \,\}$, V el conjunto de polinomios complejos de grado menor o igual que 2

15. $W = \{\, f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R} \,\}, \quad V = \{\, f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\}$

16. $W = \{$ sucesiones convergentes $\}$, $V = \mathbb{R}^\infty$

17. Sea A una matriz compleja de tamaño $n \times n$, y sea $c \in \mathbb{C}$. Demuestre que $W = \{\, w \in \mathbb{C}^n \mid A \cdot w = cw \,\}$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$.

18. En $P_3 = \{\, a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C} \,\}$, determine si el vector $q = 4z^3 + 15z$ pertenece al subespacio generado por $u = 2z^3 - 3\mathrm{i}z^2$ y $v = 5\mathrm{i}z - 2z^2$.

19. En el espacio $M_{2\times 2}$ de matrices tamaño 2×2, determine si $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ o $y = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ están en el subespacio generado por $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

20. Determine si los vectores $u = \langle 10, -15 \rangle$, $v = \langle -2, 3 \rangle$ y $w = \langle -6, 9 \rangle$ generan $\mathbb{R}^2$.

21. Determine si los vectores $u = \langle 3, 0, -1 \rangle$, $v = \langle 2, 2, 1 \rangle$ y $w = \langle 6, -1, 1 \rangle$ generan $\mathbb{R}^3$.

22. Determine si los vectores $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ generan el espacio $M_{2\times 2}$ de matrices 2×2.

En resumen...

- Un espacio vectorial es un conjunto en el que sus elementos, llamados vectores, pueden sumarse entre ellos y multiplicarse por escalares, con las propiedades enumeradas en las páginas 209 y siguiente.

- Si $u_1, \ldots, u_n$ son vectores, una combinación lineal de ellos es una suma de la forma $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Si V es un espacio vectorial y el subconjunto $W \subset V$, con las mismas operaciones, también lo es, entonces W es un subespacio vectorial de V.

- Para probar que un subconjunto W es un subespacio vectorial del espacio V, basta mostrar que para cualesquiera $u, v \in W$ y cualesquiera escalares α y β, la combinación lineal $\alpha u + \beta v$ está en W.

- Si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son vectores en el espacio vectorial V, el subespacio generado por ellos, denotado $\text{gen}(w_1, \ldots, w_n)$, es el conjunto de todas sus combinaciones lineales.

Capítulo 12

Independencia lineal y bases

En el capítulo anterior revisamos la idea de combinación lineal de vectores y vimos un concepto relacionado con ella, el del subespacio generado por un conjunto de vectores. En este capítulo estudiaremos un segundo concepto relacionado con las combinaciones lineales: el de independencia lineal. Luego combinaremos el concepto de espacio generado con el de independencia lineal para definir lo que es una base de un espacio vectorial y, a partir de ahí definir la dimensión del espacio.

12.1 Dependencia e independencia lineal

A grandes rasgos, podemos decir que un conjunto de vectores son independientes si ninguno de ellos pertenece al subespacio generado por los otros. Pero empecemos por definir lo contrario: que un grupo de vectores sean linealmente dependientes.

Definición (dependencia lineal)

Si V es un espacio vectorial, entonces los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ son *linealmente dependientes* (abreviado *ld*) si el vector nulo $\vec{0}$ puede escribirse como una combinación lineal no trivial de ellos; es decir, si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todos cero, tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = \vec{0}$$

Una formulación equivalente es que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si alguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás. Veamos por qué es equivalente.

- Suponiendo que v_1, v_2, $\ldots$, v_n son linealmente dependientes, según la definición existen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = \vec{0}$ pero no todos los c_i son cero. Entonces al menos uno de ellos, denotémoslo c_j, es distinto de cero. De aquí que se pueda despejar

  $$v_j = \frac{-c_1}{c_j}v_1 + \frac{-c_2}{c_j}v_2 + \cdots + \frac{-c_n}{c_j}v_n$$

  de manera que alguno de los vectores, v_j, puede escribirse como combinación lineal de los demás.

- Recíprocamente, si uno de los vectores, digamos v_k, es combinación lineal de los otros,
$$v_k = c_1v_1 + \cdots + c_{k-1}v_{k-1} + c_{k+1}v_{k+1} + \cdots + c_nv_n$$
entonces tenemos una combinación lineal de todos ellos que resulta en el vector nulo:
$$c_1v_1 + \cdots + c_{k-1}v_{k-1} + (-1)v_k + c_{k+1}v_{k+1} + \cdots + c_nv_n = \vec{0}$$
donde no todos los coeficientes son cero (al menos, con toda seguridad, el coeficiente de v_k es distinto de cero).

Si un conjunto de vectores no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente independientes* (abreviado *li*). Inmediatamente de la definición vemos que esto significa que no exista una combinación lineal no trivial que dé por resultado el vector $\vec{0}$; en otras palabras, que la única combinación lineal que da $\vec{0}$ sea la trivial. En símbolos, v_1, v_2, ..., v_n son linealmente independientes si

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Equivalentemente, los vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos es combinación lineal de los otros, o, como dijimos al inicio de la sección, si ninguno de ellos pertenece al subespacio generado por los demás.

Probablemente el ejemplo más sencillo de vectores li sea el de $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Si tenemos una combinación lineal de ellos igual a cero, $au + bv = \vec{0}$, entonces

$$a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle = \langle a, b\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

implica que $a = b = 0$. En otras palabras, solo la combinación lineal trivial resulta en cero.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 1: tres polinomios linealmente independientes

En el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2, tomemos $u = x^2$, $v = x^1$ y $w = x^0$, y demostremos que ellos son linealmente independientes entre sí.

Para eso, supongamos que $p = au + bv + cw$ es una combinación lineal de ellos que resulta en cero. Esto es, $p(x) = ax^2 + bx^1 + cx^0 = ax^2 + bx + c = 0$ para todo x. Veamos que los tres escalares a, b y c deben ser cero.

Esto se puede resolver usando cálculo diferencial. Primero, si $p(x) = 0$ para todo x, entonces $c = p(0) = 0$. Por lo mismo, p es constante así que su derivada es cero: $p'(x) = 2ax + b = 0$ para todo x, y en particular $b = p'(0) = 0$. Por último, $p''(x) = 2a = 0$, así que $a = 0$.

Como alternativa, el asunto se podría resolver también usando álgebra. Como $p(x) = 0$ para todo x, entonces en particular

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 + 0 + c = 0 \\ p(1) &= a + b + c = 0 \\ p(-1) &= a - b + c = 0 \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene como solución única a $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$.

Vimos entonces, por dos métodos muy distintos, que

$$au + bv + cw = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0$$

lo cual demuestra que los vectores $u = x^2$, $v = x^1$ y $w = x^0$ son linealmente independientes.

Ejemplo 2: tres polinomios linealmente dependientes

En P_3, el espacio de polinomios complejos de grado menor o igual que 3, los vectores

$$p = 5\mathrm{i}z^3 - 2z + 3 + \mathrm{i}, \quad q = 2z^2 + (4 - \mathrm{i})z - 2 \quad \text{y} \quad r = 5z^3 + 4z^2 + 8z - 3 - 3\mathrm{i}$$

son linealmente dependientes, dado que existe al menos una combinación lineal no trivial que resulta en cero:

$$\begin{aligned} -2\mathrm{i}p + 4q - 2r &= (10z^3 + 4\mathrm{i}z + 2 - 6\mathrm{i}) + (8z^2 + (16 - 4\mathrm{i})z - 8) \\ &\quad - (10z^3 + 8z^2 + 16z - 6 - 6\mathrm{i}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Si existe una combinación lineal, existen infinitas, porque podemos multiplicar ambos lados de la igualdad $-2\mathrm{i}p + 4q - 2r = \vec{0}$ por cualquier escalar y la igualdad se mantiene. Por ejemplo, multiplicando por $5\mathrm{i}$,

$$10p + 20\mathrm{i}q - 10\mathrm{i}r = \vec{0}$$

lo que muestra otra combinación lineal de p, q y r que es igual a 0.

Equivalentemente, como vimos, alguno de los vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros. Por ejemplo, al despejar r resulta

$$r = -\mathrm{i}p + 2q$$

Ejemplo 3: investigar la independencia de un grupo de vectores

Determinar si los vectores $u = \langle -4, 4, 4\rangle$, $v = \langle 1, 6, 13\rangle$ y $w = \langle -3, 5, 7\rangle$ en $\mathbb{R}^3$ son ld o li.

Para esto debemos averiguar si existe alguna combinación lineal no trivial de u, v y w que dé $\vec{0}$ (ld) o si, por el contrario, la única forma de escribir $\vec{0}$ como combinación lineal de u, v y w es multiplicar cada uno por 0 (li). Dicho de otra forma, hay que determinar si, dada una combinación lineal $au + bv + cw = \vec{0}$, necesariamente deben ser $a = b = c = 0$ (li) o si es posible que alguno de los escalares sea distinto de cero (ld).

Planteemos entonces la ecuación $au + bv + cw = \vec{0}$, con incógnitas a, b y c:

$$\begin{gathered} a\langle -4,4,4\rangle + b\langle 1,6,13\rangle + c\langle -3,5,7\rangle = \vec{0} \\ \langle -4a+b-3c,\;\; 4a+6b+5c,\;\; 4a+13b+7c\rangle = \langle 0,0,0\rangle \end{gathered}$$

Lo anterior es equivalente al sistema de ecuaciones (una ecuación para cada componente)

$$\begin{cases} -4a+b-3c=0 \\ 4a+6b+5c=0 \\ 4a+13b+7c=0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son de la forma $a = -23c/28$ y $b = -2c/7$, con $c \in \mathbb{R}$.

Entonces hay infinitas soluciones, lo que implica que son muchas las combinaciones lineales de u, v y w que resultan en cero, ya que cada solución da lugar a una combinación lineal. Por ejemplo, tomando (para evitar fracciones) $c = 28$, $a = -23$, $b = -8$, tendremos

$$\begin{aligned} -23u - 8v + 28w &= -23\langle -4,4,4\rangle - 8\langle 1,6,13\rangle + 28\langle -3,5,7\rangle \\ &= \langle 92,-92,-92\rangle - \langle 8,48,104\rangle + \langle -84,140,196\rangle \\ &= \langle 0,0,0\rangle \end{aligned}$$

Así concluimos que los vectores u, v y w son ld.

Repaso

Determine si los vectores $\langle 3,5,3\rangle$, $\langle 2,2,-4\rangle$ y $\langle -2,0,13\rangle$ son ld o li. Solución: ld

En el ejemplo anterior, si el sistema hubiera tenido solución única, esta habría sido necesariamente $a = b = c = 0$ (esta *siempre* es una solución, ya que la combinación lineal trivial siempre resulta en $\vec{0}$; la pregunta era si habría otras). En ese caso habríamos concluido que los vectores eran li.

Repetimos: la combinación lineal trivial siempre da $\vec{0}$. Si es la única, los vectores son li; si hay otras, los vectores son ld.

Por otra parte, note que la matriz de coeficientes del sistema en el ejemplo anterior es

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

cuyas columnas son precisamente los vectores en cuestión. Que el sistema tuviera o no solución única podía averiguarse también por el determinante de la matriz de coeficientes (recuerde el teorema en la página 134, que dice que para sistemas de ecuaciones con matriz de coeficientes cuadrada, el sistema tiene solución única si y solo si el determinante es distinto de cero). Aquí,

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 13 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

lo que confirma que el sistema tiene infinitas soluciones.

El siguiente teorema enuncia la propiedad general.

Teorema

Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$, entonces

$$v_1, \ldots, v_n \text{ son li} \quad \text{si y solo si} \quad \det(v_1 \ \cdots \ v_n) \neq 0$$

donde $(v_1 \ \cdots \ v_n)$ es la matriz cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$.

En el ejemplo anterior, que el determinante sea 0 implica que los vectores son ld, como vimos.

Debemos enfatizar que este teorema tiene una gran restricción: se aplica solamente al caso de n vectores en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$ (lo que corresponde a la condición de que la matriz de coeficientes sea cuadrada). En el ejemplo anterior teníamos tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Bien. Pero no podríamos haber usado el mismo teorema para investigar la dependencia o independencia de cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, o de tres vectores en $\mathbb{C}^5$. El número de vectores debe ser igual a la dimensión del espacio.

¿La dimensión? Nos estamos adelantando, pero ya estamos a punto de llegar al concepto de *dimensión* de un espacio vectorial[1]. Vea la siguiente sección.

Ejemplo 4: investigar la independencia de un grupo de vectores

Suponiendo que v y w son li en algún espacio vectorial V, determinar si los vectores $p = 4v - 2w$ y $q = w - 3v$ son li o ld.

No podemos usar el teorema anterior porque no sabemos si p y q son vectores en algún $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. El espacio V podría ser cualquiera. Usemos en cambio la definición: si tenemos una combinación lineal $\alpha p + \beta q = \vec{0}$, ¿necesariamente serán $\alpha = 0$ y $\beta = 0$? Veamos.

$$\begin{aligned} \vec{0} = \alpha p + \beta q &= \alpha(4v - 2w) + \beta(w - 3v) \\ &= 4\alpha v - 2\alpha w + \beta w - 3\beta v \\ &= (4\alpha - 3\beta)v + (\beta - 2\alpha)w \end{aligned}$$

Pero v y w eran li. ¿Cómo es que aquí tenemos una combinación de ellos que da $\vec{0}$? Solamente la combinación trivial de v y w puede resultar en $\vec{0}$, así que

[1] Si acaso la palabra "dimensión" suena natural, probablemente sea porque los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tienen dimensiones geométricas iguales a 1, 2 y 3 respectivamente (recta, plano y espacio). De aquí que el instinto sugiera que $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n. Así es, en efecto. Vea el Ejercicio 26

necesariamente sus coeficientes $4\alpha - 3\beta$ y $\beta - 2\alpha$ deben ser iguales a cero. Y como el sistema

$$\begin{cases} 4\alpha - 3\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

tiene como solución única a $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, vemos que si se plantea $\alpha p + \beta q = \vec{0}$ resulta necesariamente que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Concluimos entonces que p y q sí son li.

Ejercicios

Determine si cada grupo de vectores son li o ld. Si son ld, escriba uno de ellos como combinación lineal de los otros.

1. $u = \langle -3, 6, 4\rangle,\ \ v = \langle 5, -2, 2\rangle,\ \ w = \langle -2, -1, 2\rangle$

2. $x = \langle 2, 0, 2\rangle,\ \ y = \langle 5, 6, 3\rangle,\ \ z = \langle 0, -3, 1\rangle$

3. $w = \langle 1, 1, 4, 2\rangle,\ \ x = \langle 6, -1, 2, 5\rangle,\ \ y = \langle 4, 6, 2, 4\rangle,\ \ z = \langle -3, -2, 0, 1\rangle$

4. $u = \langle 2 - \mathrm{i}, 4\rangle,\ \ v = \langle 3, -5\mathrm{i}\rangle,\ \ w = \langle 5 - 3\mathrm{i}, 3 + 4\mathrm{i}\rangle$.

5. $u = 2z^3 - 3z,\ \ v = -z^3 + 2z^2,\ \ w = 5z^2 - z + 2$

6. $p = x^2 + 4x + 3,\ \ q = 2x - 1,\ \ r = x^2 + x + 2,\ \ s = 6x^2 + x - 3$

7. $a = 3t^2 - 5t + 2,\ \ b = 2t^3 - 8t,\ \ c = t^3 - t^2 + 1$

8. $u = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix},\ \ v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix},\ \ w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. Determine los valores de c para que los vectores $\langle 1, 0, c\rangle$, $\langle -1, c, 1\rangle$ y $\langle 1, 1, 2c + 1\rangle$ sean li.

11. Demuestre que las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ son li.

12. Demuestre que las funciones e^t y e^{-t} son li.

Suponiendo que los vectores u, v y w son li en algún espacio vectorial, determine si los siguientes grupos de vectores son li o ld.

13. $x = u + v$ y $y = u - v$

14. $p = 2u - v$ y $q = u + 3v$

15. $a = 2u - v,\ \ b = u + 3v$ y $c = v - u$

16. $p = u - v + 2w$ y $q = u + v - 3w$

17. $x = u + v - 2w,\ \ y = u - v - w$ y $z = u + w$

18. $a = u + v - 3w,\ \ b = u + 3v - w$ y $c = v + w$

19. $p = (1 + 2\mathrm{i})u - 5v$ y $q = -2u + \mathrm{i}(v - w)$

12.2 Bases y dimensión de un espacio

Supongamos que v_1, v_2, ..., v_n son vectores linealmente independientes en el espacio V y que además generan todo el espacio[2] (es decir, $\mathrm{gen}(v_1, \ldots, v_n) = V$). Que sean li significa que ninguno de ellos pertenece al subespacio generado por los demás. Entonces no existe ningún subconjunto propio de ellos que genere al espacio V (porque al suprimir uno cualquiera de ellos, al menos este mismo ya no pertenece al espacio generado por los demás, por ser li). Esto significa que v_1, v_2, ..., v_n generan a V sin ninguna holgura; ninguno de ellos sobra. Cuando esto sucede, se dice que los vectores forman una base del espacio vectorial.

Definición (base de un espacio vectorial)

Si V es un espacio vectorial, una *base* de V es un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$ que son linealmente independientes y que generan al espacio V.

Ejemplo 5: una posible base del espacio de matrices $M_{2\times 2}$

En el espacio $M_{2\times 2}$ de todas las matrices complejas de tamaño 2×2, veamos si los vectores $u = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $w = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ forman una base.

- Para ver si son linealmente independientes, planteamos una combinación lineal $\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4\alpha + 3\gamma & -\beta - \gamma \\ \beta & 3\alpha + 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Comparando las entradas en la posición 2,1, izquierda vs derecha, vemos que $\beta = 0$; luego la posición 1,2 implica que también $\gamma = 0$, y por último vemos en 1,1 o en 2,2 que $\alpha = 0$. Entonces la única solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$, de modo que los vectores sí son li.

- Veamos si u, v y w generan $M_{2\times 2}$. Para eso tomemos un elemento cualquiera del espacio, una matriz $z = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, y veamos si z se puede expresar como combinación lineal de u, v y w. Planteemos entonces la ecuación $z = \alpha u + \beta v + \gamma w$ (con incógnitas α, β y γ), e investiguemos si existe una solución.

$$\alpha \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4\alpha + 3\gamma & -\beta - \gamma \\ \beta & 3\alpha + 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[2] En la página 220 habíamos definido el subespacio generado por un conjunto de vectores, y en la página 224 definimos lo que son vectores li.

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\gamma = a \\ -\beta - \gamma = b \\ \beta = c \\ 3\alpha + 2\gamma = d \end{cases}$$

La matriz aumentada de este sistema se reduce así:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & a \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 3 & 0 & 2 & d \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+b+c-d \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & -b-c \\ 0 & 0 & 0 & -3a-b-c+4d \end{pmatrix}$$

En la última fila vemos que el sistema tiene solución solamente si $-3a - b - c + 4d = 0$. Pero esto no siempre se cumple. Por ejemplo, para una matriz como $z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, en la que $-3a - b - c + 4d = -3 \neq 0$, el sistema no tiene solución; es decir, esta matriz no es combinación lineal de u, v y w. Por eso, estos tres vectores no generan todo el espacio $M_{2\times 2}$.

Finalmente, concluimos que u, v y w no son base de $M_{2\times 2}$, ya que no lo generan.

Repaso

¿Los vectores $\langle 0, 1, 4\rangle$ y $\langle 3, -1, -1\rangle$ forman una base de $\mathbb{R}^3$?

Solución: no, porque no lo generan

Ejemplo 6: una posible base del espacio $\mathbb{R}^2$

Determinar si los vectores $x = \langle 3, 5\rangle$, $y = \langle -2, 1\rangle$, $z = \langle 4, -1\rangle$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

- Veamos que x, y y z sí generan $\mathbb{R}^2$. Si $\langle a, b\rangle$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^2$, debemos encontrar tres escalares α, β, y γ tales que

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= \langle a, b\rangle \\ \alpha\langle 3, 5\rangle + \beta\langle -2, 1\rangle + \gamma\langle 4, -1\rangle &= \langle a, b\rangle \\ \langle 3\alpha - 2\beta + 4\gamma, 5\alpha + \beta - \gamma\rangle &= \langle a, b\rangle \end{aligned}$$

Esto nos lleva al sistema

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta + 4\gamma = a \\ 5\alpha + \beta - \gamma = b \end{cases}$$

con incógnitas α, β y γ (a y b no son incógnitas; se supone que sus valores son dados). La matriz aumentada se reduce así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & a \\ 5 & 1 & -1 & b \end{pmatrix} \quad \to \quad \cdots \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/13 & (a+2b)/13 \\ 0 & 1 & -23/13 & (3b-5a)/13 \end{pmatrix}$$

de modo que las soluciones son de la forma

$$\alpha = \tfrac{1}{13}(a + 2b - 2\gamma), \quad \beta = \tfrac{1}{13}(-5a + 3b + 23\gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

El punto es que para cualquier $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2$ sí existen escalares α, β y γ (una cantidad infinita, de hecho) tales que $\langle a, b\rangle = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Por lo tanto, x, y y z generan al espacio $\mathbb{R}^2$.

- Sin embargo, x, y y z no son linealmente independientes. Para verlo, supongamos que tenemos una combinación lineal de ellos que da $\vec{0}$, es decir, escalares α, β y γ tales que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \langle 0, 0\rangle$$

Por lo que acabamos de ver, tomando $\langle a, b\rangle = \langle 0, 0\rangle$, sabemos que las soluciones son de la forma

$$\alpha = -\frac{2\gamma}{13}, \quad \beta = \frac{23\gamma}{13}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, $\alpha = -2$, $\beta = 23$, $\gamma = 13$ es una solución, de modo que $-2x + 23y + 13z$ es una combinación lineal no trivial que resulta en $\vec{0}$. Los vectores son, entonces, linealmente dependientes.

En conclusión, x, y y z no forman una base de $\mathbb{R}^2$, porque no son li.

Repaso

¿Los vectores $\langle 9, -2\rangle$, $\langle 5, -8\rangle$ y $\langle -1, 4\rangle$ forman una base de $\mathbb{R}^2$?

Solución: no, porque no son li

Ejemplo 7: una base del espacio de polinomios P_2

Sea P_2 el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2, y sean $p_0 = 1$, $p_1 = z$ y $p_2 = z^2$. Veamos que $\{ p_0, p_1, p_2 \}$ es una base de P_2.

- Ya en el Ejemplo 1 (página 224) habíamos visto que p_0, p_1 y p_2 son li.
- Para ver que generan P_2, sea $q = az^2 + bz + c$ cualquier vector en P_2. Es claro que $q = cp_0 + bp_1 + ap_2$, combinación lineal de p_0, p_1 y p_2.

Así queda demostrado que $\{ p_0, p_1, p_2 \}$ es una base de P_2.

Repaso

Demuestre que $p_0 = 1$ y $p_1 = x$ forman una base de P_1, el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 1.

Ejemplo 8: una base del espacio de matrices $M_{2\times 2}$

Probar que $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3+\mathrm{i} & 4 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$ y $u_4 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ forman una base de $M_{2\times 2}$, el espacio de todas las matrices complejas de tamaño 2×2.

- Para probar que son li, tomemos una combinación lineal que dé cero.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha + (3+\mathrm{i})\beta + 2\gamma + 2\delta & -\mathrm{i}\alpha + 4\beta + 2\gamma - \delta \\ -\beta + \gamma + 2\delta & 2\alpha + 3\beta + 4\mathrm{i}\gamma + 3\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Como ya es usual, pasamos a un sistema de ecuaciones, en el que sabemos que una solución posible es $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, correspondiente a la combinación lineal trivial, y nos preguntamos si existirán otras soluciones no triviales.

$$\begin{cases} \alpha + (3+\mathrm{i})\beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ -\mathrm{i}\alpha + 4\beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ -\beta + \gamma + 2\delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\mathrm{i}\gamma + 3\delta = 0 \end{cases}$$

  La matriz de coeficientes del sistema tiene determinante $36 - 9\mathrm{i}$, diferente de cero. Esto significa que el sistema tiene una solución única, específicamente, la solución trivial, por lo que u_1, u_2, u_3 y u_4 son li.

- Para ver que u_1, u_2, u_3 y u_4 generan $M_{2\times 2}$, sea $x = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matriz cualquiera en $M_{2\times 2}$. ¿Existen escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4 = x$? Esta última igualdad significa que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha + (3+\mathrm{i})\beta + 2\gamma + 2\delta & -\mathrm{i}\alpha + 4\beta + 2\gamma - \delta \\ -\beta + \gamma + 2\delta & 2\alpha + 3\beta + 4\mathrm{i}\gamma + 3\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

  El sistema es

$$\begin{cases} \alpha + (3+\mathrm{i})\beta + 2\gamma + 2\delta = a \\ -\mathrm{i}\alpha + 4\beta + 2\gamma - \delta = b \\ -\beta + \gamma + 2\delta = c \\ 2\alpha + 3\beta + 4\mathrm{i}\gamma + 3\delta = d \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es idéntica a la del punto anterior, y su determinante tampoco ha cambiado: todavía es $36 - 9i$. Entonces el sistema tiene solución única. Bueno; tiene solución, que es lo que nos interesaba averiguar. De aquí que u_1, u_2, u_3 y u_4 sí generan $M_{2\times 2}$.

En conclusión, el conjunto $\{ u_1, u_2, u_3, u_4 \}$ es una base de $M_{2\times 2}$.

Repaso

Demuestre que $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -9 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ forman una base de $M_{2\times 2}$.

Un espacio vectorial puede tener muchas bases distintas, pero una propiedad fundamental de ellas es que todas tienen el mismo número de elementos.

Teorema

Si $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ es una base del espacio V, entonces cualquiera otra base de V también tiene n elementos.

Como muestra: ya que en el Ejemplo 7 encontramos una base de P_2 con tres elementos, se sigue que todas las bases de P_2 tienen tres elementos.

Definición (dimensión)

Si el espacio V tiene una base con n elementos, entonces la dimensión de V, denotada $\dim V$, es el número n.

Según la definición anterior y los Ejemplos 7 y 8, la dimensión de P_2 es $\dim P_2 = 3$, y la de $M_{2\times 2}$ es $\dim M_{2\times 2} = 4$.

Teorema

Si $\dim V = n$, entonces:

(a) Cualquier conjunto de n vectores li en V es una base de V.

(b) Cualquier conjunto de n vectores que generen V es una base de V.

Este teorema implica que para probar que un conjunto de n vectores es base de un espacio de dimensión n, será suficiente comprobar que se cumple alguna de las dos condiciones en la definición de base: que los vectores son li o que los vectores generan el espacio. Hay libertad para escoger cuál de las dos condiciones se quiere verificar. Pero sí es necesario saber que el número de vectores es igual a la dimensión del espacio.

Ejemplo 9: otra base del espacio de polinomios P_2

Probar que $q_1 = z + 3\mathrm{i}$, $q_2 = 2z^2 - 2\mathrm{i}z + 1$ y $q_3 = \mathrm{i}z^2 - 2$ forman una base de P_2, el espacio de polinomios con grado menor o igual a 2.

Acabamos de ver que $\dim P_2 = 3$, y como estamos investigando tres vectores (un número de vectores igual a la dimensión del espacio) basta con verificar una de las condiciones en la definición de base. Escojamos la segunda.

Para probar que q_1, q_2 y q_3 generan P_2, tomemos un vector cualquiera $v = az^2 + bz + c$ en V, e intentemos escribirlo como combinación lineal de q_1, q_2 y q_3; es decir, busquemos tres escalares α, β y γ tales que $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = v$:

$$\begin{aligned} \alpha(z + 3\mathrm{i}) + \beta(2z^2 - 2\mathrm{i}z + 1) + \gamma(\mathrm{i}z^2 - 2) &= az^2 + bz + c \\ (2\beta + \mathrm{i}\gamma)z^2 + (\alpha - 2\mathrm{i}\beta)z + (3\mathrm{i}\alpha + \beta - 2\gamma) &= az^2 + bz + c \end{aligned}$$

Esto lleva al sistema

$$\begin{cases} 2\beta + \mathrm{i}\gamma = a \\ \alpha - 2\mathrm{i}\beta = b \\ 3\mathrm{i}\alpha + \beta - 2\gamma = c \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -2\mathrm{i} & 0 \\ 3\mathrm{i} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante igual a $4 - 5\mathrm{i}$. Por ser distinto de cero, este determinante indica que el sistema tiene solución única. En particular, el sistema sí tiene solución, y eso era todo lo que queríamos saber.

Con lo anterior concluimos que, en efecto, q_1, q_2 y q_3 generan P_2 y que, por lo tanto, forman una base.

Repaso

Demuestre que $2x - x^2$, $x^2 - 3x + 4$ y $2x^2 - 6x + 9$ forman otra base de P_2.

Cuando un espacio tiene dimensión n, este resulta ser el número "justo" de vectores li y el número justo de vectores que generan el espacio. Menos que n vectores no bastan para generarlo, y más que n no pueden ser li, como dice el siguiente teorema.

Teorema

Si $\dim V = n$, entonces cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_{n+1}$ en V no pueden ser li, y cualesquiera $v_1, \ldots, v_{n-1}$ no pueden generar V.

Dicho de otra forma, si $v_1, \ldots, v_k$ son li entonces $k \leq n$, y, por otro lado, si $\mathrm{gen}(v_1, \ldots, v_k) = V$ entonces $k \geq n$.

Ejercicios

Determine si los vectores forman una base del espacio dado.

20. $v_1 = \langle 6, 5, -3\rangle$, $v_2 = \langle 2, 2, 7\rangle$, $v_3 = \langle 3, -1, -2\rangle$ en $\mathbb{R}^3$

21. $p_1 = 5x^2 - 3x + 4$, $p_2 = -2x^2 + 3x - 7$, $p_3 = 3 - x$ en el espacio P_2 de todos los polinomios de grado menor o igual a 2

22. $v_1 = \langle 0, 6, -5, -3\rangle$, $v_2 = \langle -1, 5, 6, 7\rangle$, $v_3 = \langle 5, -3, 3, -2\rangle$ en $\mathbb{R}^4$

23. $w_1 = \langle 1, 7, 6\rangle$, $w_2 = \langle -1, 3, 0\rangle$, $w_3 = \langle 6, -4, -5\rangle$, $w_4 = \langle 5, 0, 1\rangle$ en $\mathbb{R}^3$

24. $q_1 = 2z^3 - 3z^2 + 4z$, $q_2 = 4z^3 + 4z^2 - 5z$, $q_3 = -z^3 + 3z^2 + 4z$ en el espacio Q de todos los polinomios complejos $p(z)$ de grado menor o igual a 3 tales que $p(0) = 0$

25. $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en el espacio V de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2 (esto es, $V = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{C} \}$)

26. Demuestre que $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ y $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

27. Los vectores $v_1 = \langle 3, -4, 2\rangle$ y $v_2 = \langle -2, 1, 5\rangle$ son li pero no son base de $\mathbb{R}^3$. Encuentre un vector v_3 tal que $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

28. Encuentre una base del espacio W de todas las matrices complejas 2×3 de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

En resumen...

- Un grupo de vectores son linealmente dependientes (ld) si alguna combinación lineal no trivial de ellos es igual a $\vec{0}$, o equivalentemente si alguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás.

  Los vectores son linealmente independientes (li) si no son ld; es decir, si la única combinación lineal que da $\vec{0}$ es la trivial, o equivalentemente si ninguno de ellos es combinación lineal de los otros.

- En $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$, los vectores v_1, v_2, ..., v_n son li si y solo si $\det(v_1 \ \cdots \ v_n) \neq 0$.

- Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial si ellos generan el espacio y además son li.

- Para cualquier espacio vectorial, todas sus bases tienen el mismo número de vectores.

- La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores en cualquiera de sus bases.

- Si V es un espacio con dimensión n, entonces cualquier conjunto de n vectores li en V es una base de V, y cualquier conjunto de n vectores que generen V es una base de V.

Capítulo 13

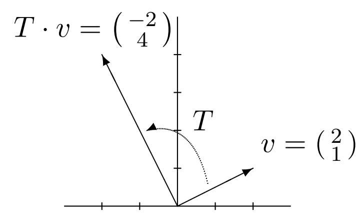
Valores propios y vectores propios

En algunas aplicaciones geométricas de las matrices se acostumbra representar los vectores en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$ como matrices columna (y en este capítulo usaremos "vector" y "matriz columna" como sinónimos). En $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, usaremos a veces la notación $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ para denotar el vector $\langle x, y\rangle$.

En ese contexto, algunas transformaciones geométricas de vectores, como por ejemplo rotar un vector 90° a la izquierda y duplicar su longitud, pueden representarse como el producto de una matriz de transformación, T, por el vector. En otras palabras, al aplicar la transformación al vector v el resultado es $T \cdot v$.

Como ejemplo, la matriz $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tiene justo ese efecto: dado cualquier vector $v = \langle x, y\rangle$ en $\mathbb{R}^2$, el producto $T \cdot v$ es el resultado de rotar el vector 90° a la izquierda y duplicar su longitud. El vector $v = \langle 2, 1\rangle$, por ejemplo, se transforma en $\langle -2, 4\rangle$:

$$T \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}:$$



Más en general (y menos en serio) podríamos decir que para cualquier $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

13.1 Definiciones y propiedades básicas

Pero ya nos desviamos del tema. El punto es que es común multiplicar una matriz cuadrada por una matriz columna (de hecho, ya vimos en la sección 6.3, página 115, que esa es una forma de representar el lado izquierdo de un sistema de ecuaciones). A veces sucede que el producto de una matriz T por un vector v es un múltiplo escalar de v; dicho de otra forma, multiplicar el vector por T es equivalente a multiplicarlo por un número, lo cual geométricamente significa cambiar solo su longitud pero mantenerlo paralelo al vector original. En esos casos el vector se llama vector propio de la matriz.

Definición (vector propio, valor propio)

Si A es una matriz $n \times n$, v es un vector $n \times 1$ distinto de cero, λ es un escalar, y si los tres satisfacen la igualdad

$$A \cdot v = \lambda v$$

entonces v es un *vector propio* de A, y λ es un *valor propio* de A.

En ese caso se dice que λ es el valor propio *asociado* al vector propio v.

A los vectores y valores propios también se les llama vectores y valores *característicos*.

Cuando hablamos de matrices y vectores complejos, la interpretación geométrica no es tan fácil de visualizar, pero el concepto es el mismo. En general, trabajaremos con valores complejos.

Ejemplo 1: vector propio asociado a un valor propio

La matriz $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ tiene el vector propio $v = \langle 5, 10 \rangle$ asociado al valor propio $\lambda = 2$, porque

$$M \cdot v = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \lambda v$$

Repaso

Muestre que $\langle -2, 3 \rangle$ también es un vector propio de la misma matriz M del ejemplo, asociado al valor propio -5.

Ejemplo 2: matriz sin vectores propios reales

La matriz $T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, que vimos en la introducción del capítulo, no tiene vectores propios reales, porque al multiplicarla por cualquier vector en $\mathbb{R}^2$, el vector resultante siempre sufre un cambio de dirección[1].

Si una matriz tiene vectores propios, ellos nunca están solos. Suponga que A es una matriz cuadrada y que v es un vector propio con valor propio asociado λ. Si además $w \neq \vec{0}$ es un vector paralelo a v, es decir, $w = cv$ para algún escalar $c \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$, entonces

$$A \cdot w = A \cdot (cv) = c(A \cdot v) = c(\lambda v) = \lambda(cv) = \lambda w$$

lo cual demuestra que w también es un vector propio de A asociado al mismo valor propio λ.

Teorema

Si v es un vector propio de A con valor propio λ, entonces cualquier múltiplo escalar de v, distinto de cero, también es vector propio de A con el mismo valor propio λ.

[1] En la página anterior dijimos que cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ cambia de dirección al ser multiplicado por esta matriz T, pero no hablamos de vectores en $\mathbb{C}^2$ (vectores complejos). Vea el Ejercicio 7.

En el Ejemplo 1, cualquier múltiplo de $v = \langle 5, 10\rangle$ excepto $\vec{0}$ también es un vector propio de M asociado a $\lambda = 2$. Por ejemplo, si $w = -\frac{2\mathrm{i}}{5}v = \langle -2\mathrm{i}, -4\mathrm{i}\rangle$, entonces

$$M \cdot w = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\mathrm{i} \\ -8\mathrm{i} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} \end{pmatrix} = \lambda w$$

De hecho, dada la matriz $A_{n\times n}$ y dado su valor propio λ, el conjunto

$$W = \{\, w \in \mathbb{C}^n \mid A \cdot w = \lambda w \,\}$$

formado por los vectores propios de A con valor propio λ, junto con el vector $\vec{0}$ (que nunca es vector propio), es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ (vea el Ejercicio 9).

Ejemplo 3: vector propio asociado a un valor propio dado

Encontrar un vector propio de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda = 5$.

Debemos encontrar algún vector $v = \langle x, y\rangle$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplicando en cada lado llegamos al sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5x \\ -4x + y = 5y \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} (2-5)x - 3y = 0 \\ -4x + (1-5)y = 0 \end{cases}$$

Note que la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 2-5 & -3 \\ -4 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - 5I_{2\times 2}$$

(en la página 240 retomaremos este asunto de $A-\lambda I$), y la matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{que se reduce a} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $x + y = 0$, y una solución particular es $x = -1$, $y = 1$. Por lo tanto, un vector propio es $v = \langle -1, 1\rangle$.

Repaso

Encuentre un vector propio de la matriz A del ejemplo, asociado al valor propio $\alpha = -2$. Solución: puede ser $\langle 3, 4\rangle$

Ejercicios

1. Con referencia al Ejemplo 1, compruebe que $u = \langle -2, 3\rangle$ también es un vector propio de la matriz M. ¿Cuál es el valor propio asociado?

2. Compruebe que $v = \langle 3, -1, 1\rangle$ es un vector propio de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es el valor propio asociado? ¿Cuál es otro vector propio asociado al mismo valor propio?

3. Compruebe que $w = \langle 4 - \mathrm{i}, 2\mathrm{i} - 8\rangle$ es un vector propio de $B = \begin{pmatrix} 3+3\mathrm{i} & 1 \\ -4-2\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$. ¿Cuál es el valor propio asociado? ¿Cuál es otro vector propio asociado al mismo valor propio?

4. La matriz $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ tiene valores propios $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 7$. Encuentre un vector propio asociado a cada uno.

5. La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$. Encuentre un vector propio asociado a cada uno.

6. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y sean $v = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $w = \langle 0, 1, 3\rangle$.

(a) Compruebe que v y w, sin ser paralelos, son ambos vectores propios de B asociados al mismo valor propio. ¿Cuál es ese valor propio?

(b) Compruebe que cualquier combinación lineal $av + bw \neq \vec{0}$, con $a, b \in \mathbb{C}$, también es un vector propio de B asociado al mismo valor propio.

7. En el Ejemplo 2 dijimos que la matriz $T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene valores propios ni vectores propios *reales* (vea el Ejercicio 21). Pero compruebe que $v_1 = \langle \mathrm{i}, 1\rangle$ y $v_2 = \langle -\mathrm{i}, 1\rangle$ son vectores propios complejos. ¿Cuáles son los valores propios respectivos?

8. Suponga que A es una matriz, que λ es uno de sus valores propios y que $v_1, \ldots, v_n$ son vectores propios de A asociados a λ. Demuestre que cualquier combinación lineal $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \neq \vec{0}$ es también un vector propio de A asociado a λ.

9. Demuestre que si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces el conjunto $W = \{\, w \in \mathbb{C}^n \mid A \cdot w = \lambda w \,\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. (Note que si λ no es un valor propio, entonces $W = \{\, 0 \,\}$, que también es un subespacio.)

13.2 Cálculo de valores y vectores propios

Veamos ahora cómo se encuentran los vectores y los valores propios de una matriz dada.

Empecemos por suponer que A es una matriz cuadrada y que de alguna forma hemos encontrado un valor propio λ. Consideremos la ecuación $A \cdot v = \lambda v$, con incógnita v. Según el teorema en la sección anterior, hay infinitos vectores propios, de modo que la ecuación tiene infinitas soluciones. Denotando con I la matriz identidad del mismo tamaño de A, y recordando que $I \cdot v = v$, la ecuación $A \cdot v = \lambda v$ puede reescribirse como

$$A \cdot v = \lambda(I \cdot v) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \cdot v - \lambda I \cdot v = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda I) \cdot v = \vec{0}$$

Recuerde que un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como $M \cdot X = B$, donde M es la matriz de coeficientes, X es la columna de incógnitas y B es la columna de lados derechos (vea la Sección 6.3). Por eso nuestra ecuación $(A - \lambda I) \cdot v = \vec{0}$ representa un sistema de ecuaciones donde la matriz de coeficientes es $A - \lambda I$, la incógnita es v y los lados derechos son todos cero. Y ese sistema, acabamos de decir, tiene infinitas soluciones. De todo lo anterior resulta que la matriz $A - \lambda I$ tiene determinante igual a cero (por el teorema en la página 134, el que dice que un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes cuadrada tiene solución única si y solo si el determinante de la matriz es distinto de cero).

El siguiente teorema resume lo que acabamos de ver.

Teorema

Si A es una matriz cuadrada, entonces:

- Los valores propios de A son las soluciones de $\det(A - \lambda I) = 0$, con incógnita λ.
- Si λ es un valor propio de A, sus vectores propios son las soluciones del sistema $(A - \lambda I) \cdot v = \vec{0}$, con incógnita $v \neq \vec{0}$.

La expresión $\det(A - \lambda I)$, con variable λ, resulta ser un polinomio de grado n, que se conoce como el *polinomio característico* de la matriz A. Según el teorema, los valores propios (o característicos) de A son los ceros del polinomio característico.

Como un polinomio de grado n tiene en total n ceros complejos, posiblemente repetidos (recuerde el Teorema fundamental del Álgebra, Sección 1.3), resulta que cualquier matriz $n \times n$ tiene n valores propios complejos, también posiblemente repetidos.

El teorema anterior sugiere el método para encontrar los valores y los vectores propios de una matriz A:

1. Resolver la ecuación $|A - \lambda I| = 0$. Cada solución λ será un valor propio.

2. Para cada valor propio λ, resolver el sistema $(A - \lambda I) \cdot v = \vec{0}$. Las soluciones distintas de cero serán los vectores propios asociados a λ.

Ejemplo 4: encontrar valores y vectorios propios de una matriz

Encontrar los valores propios y los vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Para los valores propios resolvemos la ecuación $|A - \lambda I| = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 6 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & -1-\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)((-1-\lambda)(4-\lambda)+6) + 6(-3+1+\lambda) \\
&= \cdots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 = -(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}
$$

Así, los valores propios son tres: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$.

Para encontrar los vectores propios asociados a cada λ_i resolvemos el sistema $(A - \lambda_i I)v_i = \vec{0}$, con $i = 1, 2, 3$ respectivamente.

a. Para $\lambda_1 = 4$ tenemos $A - 4I = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Al aumentarla con la columna de ceros y resolver por Gauss-Jordan obtenemos

$$
\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
F_1 \leftrightarrow F_3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \to \\ F_3 + 2F_1 \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
F_2 \div (-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} F_1 - 3F_2 \to \\ \\ F_3 - 6F_2 \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones, pero eso ya lo sabíamos: ¡de eso se tratan los valores propios! Las soluciones están dadas por

$$
\begin{cases} x = 3z \\ y = -z \end{cases}
$$

Cada solución distinta de cero corresponde a un vector propio. Por ejemplo, $z = 1$ da $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$, así que un vector propio es

$$
v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Efectivamente,

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

Pero ya sabemos que cualquier múltiplo de v_1 excepto $\vec{0}$ también es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 4$. De hecho, la solución general del sistema también podía darse en la forma

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -t \qquad \text{con } t \in \mathbb{C} \\ z = t \end{cases}$$

como vimos en la página 93. Por eso la solución general es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } t \in \mathbb{C}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 4$ son entonces los múltiplos, excepto cero, de $\langle 3, -1, 1 \rangle$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$$

Por eso podemos decir que $v_1^b = \langle 3, -1, 1 \rangle$ es un vector propio básico asociado a $\lambda_1 = 4$. Todos los demás son múltiplos de este[2].

b. Para $\lambda_2 = 2$ la matriz de coeficientes es

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada[3] ahora es $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{smallmatrix} \right)$, que por Gauss-Jordan se reduce a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$.

Despejando las incógnitas tenemos $x = -3y$, $z = 0$, o bien

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = t \qquad \text{con } t \in \mathbb{C} \\ z = 0 \end{cases}$$

[2] Lo llamamos vector propio *básico* porque forma una base del subespacio $W = \{ w \in \mathbb{C}^3 \mid A \cdot w = 4w \}$ (que W es un subespacio de $\mathbb{C}^3$ se deduce del Ejercicio 9, página 240).

[3] En realidad aquí no es necesario aumentar la matriz con una columna de ceros. Durante todo el proceso de GJ esa columna será siempre igual a cero, por lo que no aporta ninguna información. Puede omitirse, recordando al final que cada fila de la matriz debe igualarse a cero para despejar.

así que los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$ son los vectores de la forma

$$v_2 = \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$$

que son los múltiplos del vector básico $v_2^b = \langle -3, 1, 0 \rangle$.

c. Para $\lambda_3 = -1$ la matriz es

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego de aplicar GJ (omitiendo la columna de ceros) llegamos a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, de donde despejamos $x = -2t$, $y = -t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{C}$. De ahí que los vectores propios para $\lambda_3 = -1$ son los de la forma

$$v_3 = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$$

En resumen, los vectores y valores propios son:

- $v_1^b = \langle 3, -1, 1 \rangle$ y sus múltiplos distintos de $\vec{0}$, asociados a $\lambda_1 = 4$.
- $v_2^b = \langle -3, 1, 0 \rangle$ y sus múltiplos distintos de $\vec{0}$, asociados a $\lambda_2 = 2$.
- $v_3^b = \langle -2, -1, 1 \rangle$ y sus múltiplos distintos de $\vec{0}$, asociados a $\lambda_3 = -1$.

Repaso

Encuentre los valores propios y los vectores propios de $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Solución: $\lambda_1 = 1$, $v_1 = t\langle 1, 1 \rangle$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = t\langle \frac{4}{3}, 1 \rangle$ $(t \neq 0)$

Ejemplo 5: valores y vectores propios complejos

Sea $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Al plantear la ecuación $|B - \lambda I| = 0$ obtenemos

$$0 = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 5 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(2 - \lambda) - (-4)(5) = \lambda^2 + 16$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 4\mathrm{i}$ y $\lambda_2 = -4\mathrm{i}$.

a. Para $\lambda_1 = 4\mathrm{i}$, reducimos la matriz $B - 4\mathrm{i}I$,

$$\begin{pmatrix} -2 - 4\mathrm{i} & 5 \\ -4 & 2 - 4\mathrm{i} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que el vector propio $v_1 = \langle x, y \rangle$ cumple $x = -(\mathrm{i} - \frac{1}{2})y$, y tomando $y = 2t$ (para evitar fracciones) llegamos a

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 - 2\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$$

b. Para $\lambda_2 = -4\mathrm{i}$, corresponde reducir la matriz $B + 4\mathrm{i}I$.

$$\begin{pmatrix} -2 + 4\mathrm{i} & 5 \\ -4 & 2 + 4\mathrm{i} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así que $v_2 = \langle x, y \rangle$ cumple $x = (\mathrm{i} + \frac{1}{2})y$:

$$v_2 = t \begin{pmatrix} 1 + 2\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$$

Repaso

Encuentre los valores propios y los vectores propios de $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 10 \end{smallmatrix}\right)$.

Solución: $\lambda_1 = 6 + 2\mathrm{i}$, $v_1 = t\langle 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}, 1 \rangle$; $\lambda_2 = 6 - 2\mathrm{i}$, $v_2 = t\langle 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}, 1 \rangle$ $(t \neq 0)$

En el Ejemplo 5 vemos que los valores propios son $\pm 4\mathrm{i}$, conjugados entre sí, y que los vectores propios son $t\langle 1 \pm 2\mathrm{i}, 2 \rangle$, también conjugados. En general, los valores propios y los vectores propios de cualquier matriz cuadrada *real* se dan en pares conjugados, como garantiza el siguiente teorema (compare con el Teorema de los ceros conjugados, página 14).

Teorema

Si A es una matriz real y v es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces su conjugado $\bar{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\bar{\lambda}$.

La demostración es sencilla. Como A es real, $A = \bar{A}$, así que si $A \cdot v = \lambda v$ entonces

$$A \cdot \bar{v} = \bar{A} \cdot \bar{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Es decir $A \cdot \bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$, que es lo que dice el teorema.

Este podría llamarse el “Teorema de los v propios conjugados” (donde v puede significar valor o vector), ya que implica que los valores propios y los vectores propios de una matriz real vienen en pares conjugados: si λ es un valor propio, también $\bar{\lambda}$ lo es, y si v es un vector propio, también $\bar{v}$ lo es.

Y si A no es real, al menos se cumple que $\bar{v}$ es un vector propio de $\bar{A}$ asociado al valor propio $\bar{\lambda}$.

Ejemplo 6: valores y vectores propios conjugados

Vamos a encontrar los valores y vectores propios de $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Para eso resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \cdots \ = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 16\lambda^2 - 42\lambda + 23 = (\lambda^2 + 4\lambda + 23)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Hay una solución real, $\lambda = 1$ con multiplicidad 2, y dos complejas simples, $\lambda = -2 \pm \mathrm{i}\sqrt{19}$. Empecemos por los valores propios complejos.

a. Para $\lambda_1 = -2 + \mathrm{i}\sqrt{19}$, la matriz por reducir es

$$\begin{aligned} C - (-2 + \mathrm{i}\sqrt{19})I &= \begin{pmatrix} 3-\mathrm{i}\sqrt{19} & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7-\mathrm{i}\sqrt{19} & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -3-\mathrm{i}\sqrt{19} & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -1-\mathrm{i}\sqrt{19} \end{pmatrix} \\ &\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16}(-3+\mathrm{i}\sqrt{19}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos escribir entonces (tomando $x_4 = 16t$ para evitar fracciones)

$$v_1 = t \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 3-\mathrm{i}\sqrt{19} \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{0\}$$

b. Para $\lambda_2 = -2 - \mathrm{i}\sqrt{19}$ no necesitamos más que invocar el teorema anterior. Como C es una matriz real, los vectores propios para $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ son los conjugados de los de λ_1:

$$v_2 = t \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 3+\mathrm{i}\sqrt{19} \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{C} - \{0\}$$

c. Para encontrar los vectores propios asociados a $\lambda_3 = 1$, reducimos por GJ la matriz

$$C - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, llamando las incógnitas $x_1, \ldots x_4$, tenemos la solución

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -2s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t \end{cases} \quad \text{con } s, t \in \mathbb{C}$$

Finalmente, los vectores propios son de la forma

$$v = \begin{pmatrix} 3t \\ -2s - t \\ s \\ 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } s, t \in \mathbb{C}, \text{ no ambos iguales a cero.}$$

Existen entonces dos vectores propios básicos asociados al mismo valor propio real $\lambda_3 = 1$:

$$v_3^b = \langle 0, -2, 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad v_4^b = \langle 3, -1, 0, 2 \rangle$$

Como antes, los llamamos *básicos* porque $\{ v_3^b, v_4^b \}$ es una base del subespacio $\{ w \in \mathbb{C}^4 \mid C \cdot w = \lambda_3 w \}$. Entonces todos los demás vectores propios para $\lambda_3 = 1$ son combinaciones lineales de v_3^b y v_4^b.

En el último ejemplo, el hecho de que $\lambda = 1$ sea un cero doble del polinomio característico $(\lambda^2 + 4\lambda + 23)(\lambda - 1)^2$ se expresa diciendo que él es un valor propio doble. En general, un *valor propio múltiple* es una raíz múltiple del polinomio característico. Los valores propios con multiplicidad k pueden tener hasta k vectores propios básicos linealmente independientes[4]. Otra forma de decir esto es que si λ es un valor propio de $A_{n\times n}$ con multiplicidad k, entonces el subespacio $W = \{ w \in \mathbb{C}^n \mid A \cdot w = \lambda w \}$ tendrá dimensión $\dim W \leq k$.

Una última observación. Que $\lambda = 0$ sea un valor propio de la matriz A es equivalente a que $|A - 0I| = |A| = 0$, lo cual a su vez es equivalente a que A no sea invertible. De aquí resulta el teorema siguiente.

Teorema

Una matriz cuadrada A es invertible si, y solamente si, $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

[4] En el Ejemplo 6 vimos que el valor propio doble ($k = 2$), $\lambda = 1$, tenía dos vectores propios básicos linealmente independientes: $\langle 0, -2, 1, 0 \rangle$ y $\langle 3, -1, 0, 2 \rangle$.

Combinando este teorema con los de las páginas 117, 134 y 140, tenemos que las siguientes cuatro condiciones son equivalentes para una matriz cuadrada A:

- Cualquier sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A tiene solución única.
- A es invertible.
- El determinante de A no es cero.
- Cero no es un valor propio de A.

Ejercicios

10. Con respecto al Ejemplo 6, compruebe que $\lambda_2 = -2 - \mathrm{i}\sqrt{19}$ tiene asociados los vectores propios $v_2 = t\langle -4, -8, 3 + \mathrm{i}\sqrt{19}, 16\rangle$ con $t \neq 0$.

Calcule los valores característicos y los vectores característicos para cada matriz.

11. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 3+3\mathrm{i} & 1 \\ -4-2\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

21. Confirme que la matriz $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ del Ejemplo 2 no tiene valores propios reales pero sí dos complejos: $\pm 2\mathrm{i}$.

22. Encuentre dos vectores propios linealmente independientes de $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, sabiendo que $\alpha = 0$ es un valor propio doble.

23. Encuentre dos vectores propios linealmente independientes de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, sabiendo que $\alpha = 1 + \mathrm{i}$ es un valor propio.

13.3 Resultados adicionales

Veamos algunas propiedades adicionales de los valores propios y de los vectores propios.

Valores propios de matrices triangulares

Recuerde que en la página 130 dijimos que una matriz cuadrada es triangular si todos sus elementos sobre la diagonal, o todos bajo la diagonal, son iguales a cero. Vimos también que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de su diagonal.

Ejemplo 7: valores propios de una matriz triangular

Para encontrar los valores propios de $N = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ planteamos la ecuación

$$0 = \det(N - \alpha I) = \begin{vmatrix} -3-\alpha & 5 & 7 \\ 0 & 2-\alpha & 7 \\ 0 & 0 & 9-\alpha \end{vmatrix} = (-3-\alpha)(2-\alpha)(9-\alpha)$$

cuyas soluciones son, de inmediato, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = 9$, justo los elementos en la diagonal. Estos son los tres valores propios de N.

Repaso

Encuentre el polinomio característico y los valores propios de $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución: $(\alpha - 7)(\alpha + 11)(\alpha - 3)$; 7, -11 y 3

Teorema

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

Valores propios y vectores propios de potencias de matrices

Si λ es un valor propio de una matriz A, y v es un vector propio asociado, entonces la igualdad $A \cdot v = \lambda v$ implica que

$$A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot (\lambda v) = \lambda(A \cdot v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

lo cual muestra que v es un vector propio de A^2, asociado al valor propio λ^2.

Ahora bien,

$$A^3 \cdot v = A \cdot (A^2 \cdot v) = A \cdot (\lambda^2 v) = \lambda^2(A \cdot v) = \lambda^2(\lambda v) = \lambda^3 v$$

por lo que v es también un vector propio de A^3, asociado al valor propio λ^3.

Continuando de la misma manera nos convencemos fácilmente de que v es un vector propio de A^n con valor propio λ^n, para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$ (vea el Ejercicio 41).

Para $n = 0$, la afirmación es que v es un vector propio de $A^0 = I$, con valor propio $\lambda^0 = 1$ (pero solo si $\lambda \neq 0$, porque 0^0 no existe), lo cual también es cierto: $I \cdot v = 1v$.

¿Y para exponentes negativos? Se entiende que $A^{-n} = (A^{-1})^n$, la cual existe solo si A es invertible. En tal caso, sabemos que 0 no es un valor propio de A, así que si λ es uno de ellos, necesariamente es $\lambda \neq 0$ y entonces, también a partir de la igualdad $A \cdot v = \lambda v$, obtenemos

$$v = 1v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}(A \cdot v) = A \cdot (\lambda^{-1} v)$$

Multiplicando por A^{-1} ambos lados de la igualdad $v = A \cdot (\lambda^{-1} v)$ llegamos a

$$A^{-1} \cdot v = \lambda^{-1} v$$

donde vemos que v es también un vector propio de A^{-1}, asociado al valor propio λ^{-1}.

El siguiente teorema resume estas observaciones.

Teorema

Si v es un vector propio de A, asociado al valor propio λ, entonces v es también un vector propio de A^n asociado al valor propio λ^n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Si además A es invertible, la afirmación anterior se extiende a cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 8: valores y vectores propios de potencias de una matriz

Dada la matriz $R = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar los valores y los vectores propios de R^{-1} y de R^4.

No es necesario calcular R^{-1} ni R^4. Empecemos por encontrar los valores y vectores propios de R resolviendo la ecuación

$$0 = \det(R - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Las soluciones son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$, con vectores propios básicos $v_1 = \langle 1, 1 \rangle$ y $v_2 = \langle -3, 2 \rangle$, respectivamente.

Entonces:

- Para R^{-1} los valores propios son $\lambda_1^{-1} = -1$ y $\lambda_2^{-1} = 1/4$, con los mismos vectores propios básicos, $v_1 = \langle 1, 1 \rangle$ y $v_2 = \langle -3, 2 \rangle$ respectivamente.
- Para R^4 los valores propios son $\lambda_1^4 = 1$ y $\lambda_2^4 = 256$, con los mismos vectores propios básicos.

Repaso

Encuentre los valores propios y los vectores propios de $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-2}$.

Solución: $1/49$ y $1/16$; $\langle 3, 1 \rangle$ y $\langle -2, 3 \rangle$

Ejemplo 9: multiplicar una potencia de una matriz

Sabiendo que $w = \langle 1, -2, 2\rangle$ es un vector propio de $Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcular $Q^8 \cdot w$.

Si w es un vector propio de Q asociado al valor propio β, entonces el mismo w es un vector propio de Q^8, asociado al valor propio β^8. Para encontrar β planteamos

$$Q \cdot w = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \beta w$$

de donde es claro que $\beta = 3$.

Entonces $Q^8 \cdot w = \beta^8 w = 3^8\langle 1, -2, -2\rangle = \langle 6561, -13122, -13122\rangle$.

Repaso

Sabiendo que $v = \langle 1, 4\rangle$ es un vector propio de $C = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, calcule $C^5 \cdot v$.

Solución: $\langle 32, 128\rangle$

Independencia lineal entre vectores propios

En el Ejercicio 8 vimos que cualquier combinación lineal (excepto $\vec{0}$) de vectores propios de una matriz, asociados a un mismo valor propio λ, es también un vector propio asociado al mismo λ.

Por otro lado, los vectores propios asociados a distintos valores propios son más bien linealmente independientes entre sí.

Teorema

Si λ_1, λ_2, ..., λ_n son valores propios de A, distintos entre ellos, y si v_1, v_2, ..., v_n son vectores propios asociados a ellos respectivamente (cada v_i asociado a λ_i), entonces v_1, ..., v_n son linealmente independientes.

Veamos la demostración para el caso de $n = 2$. Supongamos que λ_1 y λ_2 son valores propios de A, distintos. Tomemos v_1 un vector propio de A asociado a λ_1, y v_2 uno asociado a λ_2 (recordando que todos los vectores propios son distintos de $\vec{0}$). Para probar que v_1 y v_2 son li, tomemos una combinación lineal de ellos que dé cero: $c_1v_1 + c_2v_2 = \vec{0}$, y veamos que c_1 y c_2 deben ser 0.

De $c_1v_1 + c_2v_2 = \vec{0}$ obtenemos $c_1v_1 = -c_2v_2$, y de aquí

$$A \cdot (c_1v_1) = A \cdot (-c_2v_2) = -c_2(A \cdot v_2) = -c_2\lambda_2 v_2$$

mientras que también

$$A \cdot (c_1 v_1) = \lambda_1 (c_1 v_1) = \lambda_1(-c_2 v_2) = -c_2 \lambda_1 v_2$$

Restando las dos igualdades vemos que $\vec{0} = c_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2$, y como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ y $v_2 \neq \vec{0}$, debe ser $c_2 = 0$. Pero entonces $c_1 v_1 = 0 v_2 = \vec{0}$, y como también $v_1 \neq \vec{0}$, se deduce que $c_1 = 0$.

Vemos así que si $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \vec{0}$, deben ser $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Ejercicios

Encuentre los valores propios de cada matriz

24. $\begin{pmatrix} \mathrm{i} - 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 9 - \mathrm{i} & 6 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 2\mathrm{i} & 0 \\ 1 - \mathrm{i} & 8 & 0 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

29. I_4

30. Encuentre una matriz 2×2 cuyos valores propios sean 2 y 5.

31. Encuentre una matriz 3×3 cuyos valores propios sean 4 (doble) y -1 (simple).

Encuentre los valores propios de cada matriz

32. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^6$

33. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-3}$

34. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}^{-2}$

35. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}^5$

36. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}^8$

37. Sabiendo que $v = \langle -2, 1 \rangle$ es un vector propio de $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $A^5 \cdot v$.

38. Sabiendo que $w = \langle 1, 0, -\mathrm{i} \rangle$ es un vector propio de $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 3\mathrm{i} & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $B^{-3} \cdot w$.

39. Se dice que una matriz A es nilpotente si alguna potencia de A es igual a la matriz cero; es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = \mathbf{0}$. Demuestre que si A es nilpotente entonces su único valor propio es 0.

40. Demuestre que si A es idempotente (es decir, si $A^2 = A$) entonces solamente 0 y 1 pueden ser valores propios de A (aunque no necesariamente lo son).

41. Demuestre que si v es un vector propio de A, asociado al valor propio λ, entonces v es también un vector propio de A^n asociado al valor propio λ^n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

En resumen...

- Si A es una matriz cuadrada, λ un escalar y $v \neq \vec{0}$ un vector, y si $A \cdot v = \lambda v$, entonces λ es un valor propio de A y v es un vector propio de A (asociado a λ). También se les puede llamar valor característico y vector característico.

- Cualquier combinación lineal (excepto $\vec{0}$) de vectores propios asociados a un mismo valor propio, es también un vector propio de la misma matriz, asociado al mismo valor propio.

- Los valores propios de A son las soluciones λ de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$.

- Dado λ un valor propio de A, los vectores propios asociados son las soluciones $v \neq \vec{0}$ del sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot v = \vec{0}$.

- Si A es una matriz real y v es un vector propio de A asociado a λ, entonces también $\bar{v}$ es un vector propio de A, asociado a $\bar{\lambda}$.

- Una matriz cuadrada A es invertible si y solo si 0 no es uno de sus valores propios.

- Si A es triangular, sus valores propios son los elementos en su diagonal.

- Si v es un vector propio de A asociado a λ, entonces v es un vector propio de A^n asociado a λ^n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si A es invertible, lo anterior es cierto para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

- Los vectores propios de una matriz, asociados a distintos valores propios de la misma matriz, son linealmente independientes entre sí.

Apéndice A
Sugerencias

Capítulo 8

10 Si $x \parallel \langle 1,2\rangle$, existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = \langle t, 2t\rangle$. Luego, $y = \langle 2,2\rangle - x$, y la condición $\|y\| = 1$ se escribe como una ecuación con incógnita t.

12 La velocidad del avión puede representarse con el vector $v = \langle -678.438, 423.935\rangle$, y la del viento con $w = \langle 0, -40\rangle$.

13 Demuestre que las longitudes de los lados cumplen la igualdad de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$.

14 Escriba $u = \langle x, y\rangle$ y use las definiciones. Recuerde que $\sqrt{c^2} = |c|$.

15 Escriba $u = \langle a, b\rangle$ y $v = \langle x, y\rangle$ y plantee la desigualdad $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Eleve al cuadrado, despeje la raíz, vuelva a elevar al cuadrado. Cuando llegue a $8abxy \leq 4a^2y^2 + 4b^2x^2$, recuerde que $(2ay - 2bx)^2 \geq 0$ siempre que a, b, x, y sean números reales.

21 (b) Escriba la ecuación $\langle x, y, z\rangle = au + bv + cw$ como un sistema de ecuaciones con incógnitas a, b y c.

22 Si $x \parallel \langle -2, 0, -2\rangle$, existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = \langle -2t, 0, -2t\rangle$. Luego, $y = \langle -2, 1, -1\rangle + x$, y la condición $\|y\| = \sqrt{2}$ se escribe como una ecuación con incógnita t.

Capítulo 9

5 Escriba $x = \alpha u + \beta v$ y plantee las otras condiciones en términos de las incógnitas α y β.

6 Sean P, Q, R y S los vértices consecutivos de un rombo. Los lados $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$, $\vec{RS}$ y $\vec{SP}$ tienen todos la misma magnitud, y de hecho $\vec{PQ} = \vec{SR}$ y $\vec{QR} = \vec{PS}$. Escriba las diagonales como $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$ y $\vec{QS} = \vec{QR} + \vec{RS}$, notando que $\vec{RS} = -\vec{PQ}$. Desarrolle el producto $\vec{PR} \cdot \vec{QS}$.

7 Tome $u = \langle a, b\rangle$ y $v = \langle c, d\rangle$, y demuestre que $\|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 = (ad - bc)^2$. De ahí deduzca que $\|u\|^2 \|v\|^2 \geq (u \cdot v)^2$ y concluya.

8 Escriba $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v)$ y desarróllelo según el teorema anterior. Demuestre que es menor o igual que $(\|u\| + \|v\|)^2$ y concluya.

21 $\cos(\pi/3) = (x \cdot y)/(\|x\|\,\|y\|)$

24 Escriba $y = cw$ y plantee las otras dos condiciones en términos de la incógnita c.

27 Recuerde que $u \cdot u = \|u\|^2$.

32 Esto se resuelve más fácilmente con trigonometría.

33 Esto se resuelve más fácilmente con trigonometría.

35 Escriba $x = \alpha p$ y plantee las otras condiciones en términos de la incógnita α.

51 Despeje $\|u\|\,\|v\|$ en la ecuación $\frac{1}{2}\|u\|\,\|v\|\,\text{sen}(\pi/3) = 14$, y luego despeje $u \cdot v$ en la ecuación $\cos(\pi/3) = u \cdot v/\|u\|\,\|v\|$.

53 Recuerde que v y w son perpendiculares a $v \times w$.

Capítulo 10

19 Si no interseca el plano, es paralelo a él.

24 Si un plano es paralelo a los vectores u y v, su vector normal es paralelo a $u \times v$.

25 Si contiene a P_0 y a P_1, el plano es paralelo a $\vec{P_0P_1}$. Si también es paralelo al eje X (que tiene la dirección del vector $\vec{\mathrm{i}}$), su vector normal es paralelo a $\vec{P_0P_1} \times \vec{\mathrm{i}}$.

26 Si Q es un punto en la recta, el plano buscado es paralelo a $\vec{PQ}$ y al vector de dirección de la recta. Vea las dos sugerencias anteriores.

27 Si un plano contiene a dos rectas entonces contiene a cualquier punto de cualquiera de ellas, y su vector normal es perpendicular a los dos vectores de dirección de las rectas.

28 El eje Z pasa por el origen y tiene la dirección del vector $\vec{\mathrm{k}}$. Vea la sugerencia anterior.

34 Si la recta de intersección pasa por P_1 y tiene dirección v, entonces tanto v como el vector de $(0, 2, 1)$ a P_1 son perpendiculares al vector normal del plano.

35 Su vector normal debe ser perpendicular al vector normal del plano dado y también al director de la recta dada.

36 Su vector normal debe ser perpendicular al vector normal del plano dado y también al director de la recta dada.

38 Si no interseca a los dos planos, es paralela a ambos.

48 Si una recta está contenida en un plano o es paralela a un plano, entonces su vector de dirección es perpendicular al vector normal del plano.

51 La tercera condición da el punto. Para el vector normal, use el normal de la primera condición y el vector entre los puntos de las otras dos condiciones.

54 Sea $v = \langle a, b, c\rangle$ un vector de dirección de la recta. Entonces $v \perp \langle 3, -2, -3\rangle$, y existe algún t tal que el punto $(x, y, z) = (3, 2, 4) + tv$ satisface $x - 2 = -y - 4 = z - 1$. Esto significa que $(3 + ta) - 2 = -(2 + tb) - 4 = (4 + tc) - 1$. Plantee un sistema de ecuaciones con incógnitas ta, tb y tc.

65 Calcule la distancia d de la recta al punto, y plantee la ecuación

$$\operatorname{dist}\big((6, -2, 5) + t\langle 5, 0, 4\rangle, (7, 9, -3)\big) = d$$

con incógnita t. O considere la función $f(t) = \|(6, -2, 5)+t\langle 5, 0, 4\rangle-(7, 9, -3)\|$ y encuentre dónde alcanza su mínimo. O use el hecho de que el punto P_1 más cercano a P_0 cumple la ecuación de la recta y también cumple $\vec{P_0P_1} \perp v$.

66 El punto más cercano forma, junto con $(0, 0, 0)$, un vector paralelo al vector normal del plano. Ese punto es entonces de la forma $(0, 0, 0) + t\langle 2, 1, -1\rangle$, y además satisface la ecuación del plano.

67 El punto más cercano forma, junto con $(6, -4, 2)$, un vector paralelo al vector normal del plano. Ese punto es entonces de la forma $(6, -4, 2) + t\langle 8, 4, 7\rangle$, y además satisface la ecuación del plano.

68 Tome cualquier punto de la primera y calcule su distancia a la segunda.

69 Tome cualquier punto de la recta y calcule su distancia al plano.

70 Tome cualquier punto del primero y calcule su distancia al segundo.

71 Calcule la distancia de un punto $(x, y, z) = (-2, -3, -1) + r\langle 1, 9, 6\rangle$ a la segunda recta, como función de r; luego encuentre el mínimo de esa función. O use el hecho de que el punto P_1 en la primera recta más cercano a la segunda recta cumple la ecuación de la primera recta y también cumple $\vec{P_0P_1} \parallel v_0 \times v_1$.

Capítulo 11

8 Basta mostrar que si $c \neq 0$ entonces debe ser $v = \vec{0}$. Para eso, suponga que $c \neq 0$ y note que $v = \frac{1}{c}(cv)$.

Capítulo 12

11 Plantee la ecuación $\alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t = 0$. Si la expresión a la izquierda es cero para todo t, su derivada también lo es, con lo cual se obtienen dos ecuaciones con las incógnitas α y β. Opcionalmente, puede obtener dos ecuaciones sustituyendo t por dos valores reales.

12 Vea la sugerencia del ejercicio anterior.

13 Si $\alpha x + \beta y = 0$, entonces $(\alpha+\beta)u + (\alpha-\beta)v = 0$, así que estos escalares ($\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$) deben ser ambos cero.

24 Demuestre que $Q = \{\, az^3 + bz^2 + cz \mid a,b,c \in \mathbb{C} \,\}$.

26 Pruebe que una base de $\mathbb{R}$ es $\{\,1\,\}$, que una base de $\mathbb{R}^2$ es $\{\,\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}}\,\}$ y que una base de $\mathbb{R}^3$ es $\{\,\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}}\,\}$.

Capítulo 13

9 Si $v, w \in W$, hay que demostrar que cualquier combinación lineal de ellos también está en W; esto es, que $A\cdot(\alpha v + \beta w) = \lambda(\alpha v + \beta w)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Use las propiedades enunciadas en el teorema de la página 72.

23 Encuentre un vector propio v asociado a α. Entonces $\bar{v}$ será un vector propio asociado a $\bar{\alpha}$.

39 Si λ es valor propio de A, entonces λ^n es valor propio de $A^n = \mathbf{0}$.

40 Si λ es valor propio de A, entonces λ^2 es valor propio de $A^2 = A$. Y si λ^2 es valor propio de A, también lo son λ^4, λ^8, etc. Pero A solo puede tener un número finito de valores propios.

41 Use inducción. Para el paso inductivo, suponga que la afirmación es cierta para algún $n \in \mathbb{N}$. Para demostrarla para $n+1$, note que $A^{n+1}v = A(A^n v) = A(\lambda^n v)$ por hipótesis de inducción. Continúe.

Apéndice B

Soluciones

Capítulo 8

1 $\langle 0,3\rangle$

2 $\langle -6,-21\rangle$

3 $\langle -28,50\rangle$

4 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 3

5 $a=-1$, $b=5$, $c=-3$

6 $\langle -8/\sqrt{13}, 12/\sqrt{13}\rangle$

7 $\langle 12/\sqrt{53}, -42/\sqrt{53}\rangle$

8 $\langle -5/13, 12/13\rangle$ y $\langle 5/13, -12/13\rangle$

9 $a=5/11$, $b=20/11$

10 $x=\langle 1,2\rangle$, $y=\langle 1,0\rangle$, o $x=\langle 1.4, 2.8\rangle$, $y=\langle 0.6,-0.8\rangle$

11 $v=\langle -1,\sqrt{3}\rangle$

12 779.542 km/h en dirección 29.5060° Norte del Oeste

13 Los lados miden $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ y 5.

16 $\vec{PQ}=\langle 4,-10,14\rangle$, $\vec{QR}=\langle -11,18,-6\rangle$, $\vec{RP}=\langle 7,-8,-8\rangle$

17 $(2.5,5,-8)$ y $\sqrt{177}$

18 No (por ejemplo, $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ no son paralelos)

19 52.8994

20 $\langle 24/\sqrt{41}, 8/\sqrt{41}, 4/\sqrt{41}\rangle$ y $\langle -24/\sqrt{41}, -8/\sqrt{41}, -4/\sqrt{41}\rangle$

21 (a) $-4u-3v+2w$.
(b) $\langle x,y,z\rangle = au+bv+cw$ donde
$a=x/13-4y/13-12z/65$,
$b=-2x/13-5y/13-3z/13$, $c=z/5$.

22 $x=\langle 2,0,2\rangle$, $y=\langle 0,1,1\rangle$, o $x=\langle 1,0,1\rangle$, $y=\langle -1,1,0\rangle$

Capítulo 9

1 11

2 $\langle 364,-91,91\rangle$

3 125 y 125

4 -477 y -477

5 $\langle 35,13,16\rangle$ y $\langle -35,-13,-16\rangle$

9 143.130°

10 132.162°

11 102.240°

12 80.0738°

13 71.1150°

14 180°

15 $x=\langle 8,64\rangle$, $y=\langle -112,14\rangle$; $x\cdot y=0$

16 $\angle P = 143.191°$, $\angle Q = 3.75568°$, $\angle R = 33.0530°$

17 $\langle 0.894427, 0.552786\rangle$

18 $\langle -0.973472, 1.54465\rangle$

19 $\langle 0.974506, 0.928279, 0.330758\rangle$

20 $\langle 0.693198, -0.221793, 1.70530\rangle$

21 14

22 $\langle 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\rangle$ y $\langle -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\rangle$

23 $\langle \sqrt{2}/4, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/4\rangle$ y $\langle \sqrt{2}/4, -\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/4\rangle$

24 $x = \langle 22, -32, -20\rangle$, $y = \langle 18, -36, -18\rangle$

25 $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 2$

28 $\langle -20/53, -70/53\rangle$

29 $\langle -1/3, -2/3, -5/3\rangle$

30 $\langle -27/41, 27/41, -72/41\rangle$

31 $\langle 58/41, -174/41, -29/41\rangle$

32 23 492.3 N

33 20 705.5 N

34 $a = -10$, $b = 10$

35 $x = \langle 3, -3, -3\rangle$, $y = \langle 2, -3, -2\rangle$

36 $\langle -5, 11, 15\rangle$ y $\langle -289/41, 423/41, 601/41\rangle$

37 $\langle 1.8, -1.2, 1.8\rangle$

38 $\langle -58, -41, -21\rangle$

39 -80

40 $\langle -128, -96, -56\rangle$ y $\langle -128, -96, -56\rangle$

41 40 y 40

42 $\langle \sqrt{30}/30, -\sqrt{30}/15, -\sqrt{30}/6\rangle$

43 50

44 17

45 $2\sqrt{14}$

46 132

47 387

48 $2\sqrt{43}$

49 $(-2, 0, -2)$ y $(4, 0, 4)$

50 $\langle 0.4, 0.4, -0.8\rangle$ y $\langle -0.4, -0.4, 0.8\rangle$

51 $28/\sqrt{3}$

52 $\langle 1, 3/2, 0\rangle$

Capítulo 10

1 (a) Puede ser $v = \langle 3, -13, 6\rangle$ o cualquier vector paralelo a este. (b) Vectorial: $(x, y, z) = (7, -4, 8) + t\langle 3, -13, 6\rangle$; paramétricas: $\{\, x = 7 + 3t,\ y = -4 - 13t,\ z = 8 + 6t \,\}$; simétricas: $(x - 7)/3 = (y + 4)/(-13) = (z - 8)/6$. (c) P sí, Q no. (d) Algunos son $(10, -17, 14)$, $(13, -30, 20)$, $(16, -43, 26)$, $(1, 22, -4)$, $(-2, 35, 10)$.

2 Sí: los vectores de dirección son paralelos.

3 $(x, y, z) = (-2, 1, 5) + t\langle -4, 3, 8\rangle$; $\{\, x = -2 - 4t,\ y = 1 + 3t,\ z = 5 + 8t \,\}$; $(x + 2)/(-4) = (y - 1)/3 = (z - 5)/8$

4 $(x, y, z) = (-3, 1, 6) + t\langle -3, 4, 10\rangle$; $\{\, x = -3 - 3t,\ y = 1 + 4t,\ z = 6 + 10t \,\}$; $(x + 3)/(-3) = (y - 1)/4 = (z - 6)/10$.

5 $(x, y, z) = (-3, -1, 7) + t\langle 5, 11, -3\rangle$; $\{\, x = -3 + 5t,\ y = -1 + 11t,\ z = 7 - 3t \,\}$; $(x + 3)/5 = (y + 1)/11 = (z - 7)/(-3)$

6 $(x, y, z) = t\langle 0, 1, 8\rangle$; $\{\, x = 0,\ y = t,\ z = 8t \,\}$; no hay simétricas

7 $(x, y, z) = (4, 6, 1) + t\langle -15, 33, 57\rangle$;
$\{\, x = 4 - 15t,\ y = 6 + 33t,\ z = 1 + 57t \,\}$;
$(x - 4)/(-15) = (y - 6)/33 = (z - 1)/57$

8 $(x, y, z) = (5, 0, 0) + t\langle 0, 0, 1\rangle$;
$\{\, x = 5,\ y = 0,\ z = t \,\}$; no hay simétricas

9 $(0, 2, 2)$

10 No existe

11 $(8, -5, 7)$

12 $(-2, -3, -6)$

13 (9) $10.4085°$, (11) $84.4588°$, (12) $35.3756°$

14 (9) $(x, y, z) = (0, 2, 2) + t\langle -2.12839, 17.1600, 5.48710\rangle$ y $(x, y, z) = (0, 2, 2) + t\langle 3.43865, -5.58697, 18.8061\rangle$.
(11) $(x, y, z) = (8, -5, 7) + t\langle -11.9752, 13.2156, 3.29281\rangle$ y $(x, y, z) = (8, -5, 7) + t\langle -4.28234, 16.6858, -82.5420\rangle$.
(12) $(x, y, z) = (-2, -3, -6) + t\langle 5.34522, 8.21961, 16.3383\rangle$ y $(x, y, z) = (-2, -3, -6) + t\langle 53.4522, -28.7439, -3.02666\rangle$

15 (a) $(0, 0, -3)$.
(b) $(x, y, z) = (0, 0, -3) + t\langle 1, 3, 0\rangle$

16 $(x, y, z) = (7/5, 6/5, 9/5) + t\langle 0, 5, 5\rangle$

17 $5x - y + z = 26$

18 $x + y + 9z = 77$

19 $x - 4y + 2z = 21$

20 $6x - y + 7z = 49$

21 $9x + 6y - z = -39$

22 $-8x + 9y + 11z = 57$

23 $x + 2y + z = -2$

24 $15x + 23y + 17z = 275$

25 $2y + 3z = 11$

26 $3x + 18y - 16z = -8$

27 $21x - 3y - 5z = 83$

28 $x + 2y = 0$

29
$\{\, x = 1.08 - 0.4t,\ y = -0.06 + 0.3t,\ z = t \,\}$, $90°$

30 $\{\, x = 17/3 + 5t/3,\ y = -52/3 - 13t/3,\ z = t \,\}$, $26.9693°$

31 $\{\, x = 5.25 + 3t,\ y = 2.5 + 3t,\ z = t \,\}$, $47.4586°$

32 $\{\, x = 23 - 2t,\ y = -14 + 12t/7,\ z = t \,\}$, $14.3671°$

33 $(x, y, z) = (3t, 2t, 4t)$

34 $x - 5z = -5$

35 $x - 2z = -4$

36 $7x + 3y - 5z = -43$

37 $(x, y, z) = (10, 4, -4) + t\langle 7, -1, 3\rangle$

38 $(x, y, z) = (0, -1, 6) + t\langle -35, -2, 21\rangle$

39 $x - y = 3$

40 $(2, -5, 1)$, $5.73917°$

41 $(0, 20, -6)$, $17.5484°$

42 $(0.5, 3.5, 0.5)$, $9.64491°$

43 No se intersecan

44 La recta está contenida en el plano

45 $(-7, 10, 8)$, $3.65553°$

46 $(x, y, z) = (2, -1, 0) + t\langle 0, -1, 1\rangle$

47 $(x, y, z) = (1/2, 5/4, -5/4) + t\langle 5, 7, 13\rangle$

48 $(x, y, z) = (2, 1, -4) + t\langle 3, -1, 4\rangle$

49 $(x, y, z) = (0, -3, 6) + t\langle -5, 2, 4\rangle$

50 $6x + y - 4z = 0$

51 $3x + 2y - 4z = -13$

52 $5x - 3y - z = 6$

53 (a) $11x - 7y - 5z = 24$.
(b) $(130, 13, 263)$.
(c) $(x, y, z) = (130, 13, 263) + t\langle 11, -7, -5\rangle$.

54 $(x, y, z) = (3, 2, 4) + t\langle 10, -3, 12\rangle$

55 2.80394

56 9.07275

57 0.781736

58 0

59 3

60 2.49615

61 6.95719

62 0.536656

63 1.06904

64 1

65 $(111/41, -2, 97/41)$

66 $(1/3, 1/6, -1/6)$

67 $(10/3, -16/3, -1/3)$

68 8.53491

69 6.16441

70 1.51448

71 0.291351

72 $x - 2y + z = 9\sqrt{6}$ ó $x - 2y + z = -9\sqrt{6}$

Capítulo 11

1 1, 4 y 6

2 5 y 6

3 1

4 No; falla al menos la propiedad 6. Por ejemplo, $(1, 1) \in V$ pero $\mathrm{i}(1, 1) = (\mathrm{i}, \mathrm{i}) \notin V$.

9 (a) $v = p - 3q$. (b) $w = 5p + 4q$.
(c) Hay infinitas soluciones; algunas son: x^2, x, 1.

10 (a) $v = -177P - 87Q + 61R$.
(b) $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{smallmatrix}\right) = xP + yQ + zR$, con
$x = -3a - 20b + 6c$, $y = -a - 10b + 3c$,
$z = a + 7b - 2c$.

11 Sí

12 Sí

13 Sí

14 Sí

15 Sí

16 Sí

18 Sí, $q = 2u - 3\mathrm{i}v$

19 x no; $y = -v + 4w$ sí

20 No (por ejemplo, $\langle 1, 0\rangle \notin \mathrm{gen}(u, v, w)$)

21 Sí

22 No (por ejemplo, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin \mathrm{gen}(A, B, C)$)

Capítulo 12

1 Independientes

2 Dependientes: $x = 0.4y + 0.8z$

3 Independientes

4 Dependientes: $w = (2 + \mathrm{i})u - \mathrm{i}v$

5 Independientes

6 Dependientes: $s = -7p + 8q + 13r$

7 Independientes

8 Dependientes: $u = -2v + 3w$

9 Independientes

10 Cualquier $c \neq \pm 1$

13 Independientes

14 Independientes

15 Dependientes

16 Independientes

17 Independientes

18 Dependientes

19 Independientes

20 Sí son base

21 No son base

22 No son base

23 No son base

24 Sí son base

25 Sí son base

27 Puede ser $v_3 = \langle 1, 0, 0 \rangle$, o cualquier v_3 que no sea combinación lineal de v_1 y v_2

28 Puede ser $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right). \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}$

Capítulo 13

1 $M \cdot u = -5u$: el valor propio es -5.

2 $A \cdot v = 4v$: el valor propio es 4. Cualquier múltiplo de v también es vector propio asociado a 4; por ejemplo, $2v = \langle 6, -2, 2 \rangle$.

3 $B \cdot w = (1 + 3\mathrm{i})w$: el valor propio es $1 + 3\mathrm{i}$. Cualquier múltiplo de w también es vector propio asociado a $(1 + 3\mathrm{i})$; por ejemplo, $w_1 = \langle 1, -2 \rangle$.

4 Hay muchas soluciones; pueden ser $v_1 = \langle 3, 1 \rangle$ y $v_2 = \langle 1, 0 \rangle$

5 Hay muchas soluciones; pueden ser $v_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y $v_2 = \langle 12, -2, 1 \rangle$

6 (a) $B \cdot v = 2v$ y $B \cdot w = 2w$: el valor propio es 2. (b) $av + bw = \langle a, b, 3b \rangle$, y $B \cdot (av + bw) = \langle 2a, 2b, 6b \rangle = 2(av + bw)$.

7 $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$ y $\lambda_2 = -2\mathrm{i}$ respectivamente

11 $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$, $v_1 = t\langle \mathrm{i}, 1 \rangle$;
$\lambda_2 = -2\mathrm{i}$, $v_2 = t\langle -\mathrm{i}, 1 \rangle$

12 $\lambda_1 = 2 + 2\mathrm{i}$, $v_1 = t\langle -1 - 2\mathrm{i}, 1 \rangle$;
$\lambda_2 = 2 - 2\mathrm{i}$, $v_2 = t\langle -1 + 2\mathrm{i}, 1 \rangle$

13 $\lambda_1 = 0$, $v_1 = t\langle -2, 1, 2 \rangle$;
$\lambda_2 = 3$, $v_2 = t\langle 1, -2, 2 \rangle$;
$\lambda_3 = 6$, $v_3 = t\langle 2, 2, 1 \rangle$

14 $\lambda_1 = -3$, $v_1 = t\langle 1, -2, 6 \rangle$;
$\lambda_2 = -1$, $v_2 = t\langle 1, -4, 4 \rangle$

15 $\lambda_1 = 0$, $v_1 = t\langle -1, 7, 5 \rangle$;
$\lambda_2 = -2$, $v_2 = t\langle 1, 1, 1 \rangle$;
$\lambda_3 = 3$, $v_3 = t\langle 1, -4, 1 \rangle$

16 $\lambda_1 = -1$, $v_1 = t\langle 2, -1, 0 \rangle$;
$\lambda_2 = 2$, $v_{2a} = t\langle 1, 0, 0 \rangle$ y $v_{2b} = t\langle 0, 1, 3 \rangle$

17 $\lambda_1 = 1$, $v_{1a} = t\langle 1, -1, 0\rangle$ y $v_{1b} = t\langle -1, 0, 1\rangle$; $\lambda_2 = 4$, $v_2 = t\langle 1, 1, 1\rangle$

18 $\lambda_1 = 0$, $v_1 = t\langle -2, 3, 1\rangle$; $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$, $v_2 = t\langle 0, 2 - \mathrm{i}, 1\rangle$; $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$, $v_3 = t\langle 0, 2 + \mathrm{i}, 1\rangle$

19 $\lambda_1 = -1$, $v_1 = t\langle -2, -1, 1\rangle$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = t\langle 3, -1, 0\rangle$; $\lambda_3 = 4$, $v_3 = t\langle 3, -1, 1\rangle$

20 $\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $v_1 = t\langle -2 + \mathrm{i}, 5\rangle$; $\lambda_2 = 1 + 3\mathrm{i}$, $v_2 = t\langle 1, -2\rangle$

22 Pueden ser $\langle -3, 1, 0\rangle$ y $\langle 2, 0, 1\rangle$, pero hay muchas soluciones.

23 Pueden ser $\langle 0, 2 - \mathrm{i}, 1\rangle$ y $\langle 0, 2 + \mathrm{i}, 1\rangle$ (siguiendo la sugerencia), pero hay muchas soluciones.

24 $\mathrm{i} - 8$, -1

25 $2\sqrt{3}$, 6

26 -7, 5

27 -6, $2\mathrm{i}$, 0

28 0, -5

29 1

30 Puede ser $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

31 Puede ser $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

32 4096, 1

33 $1/64$, -1

34 $(4\mathrm{i} - 3)/25$, $(-4\mathrm{i} - 3)/25$

35 32 , $1/32$, 0

36 0, 16

37 $\langle 64, -32\rangle$

38 $\langle \mathrm{i}, 0, 1\rangle$