Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Folleto de prácticas
Cálculo Diferencial e Integral

Profesores:

M.Sc. Evelyn Agüero Calvo
Lic. Jeffry Chavarría Molina
Lic. Juan José Fallas Monge

2011

Índice general

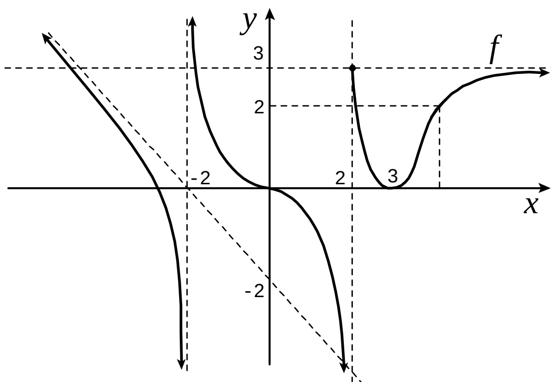
Parte 1

Límites y Continuidad

1. Análisis y construcción de gráficas

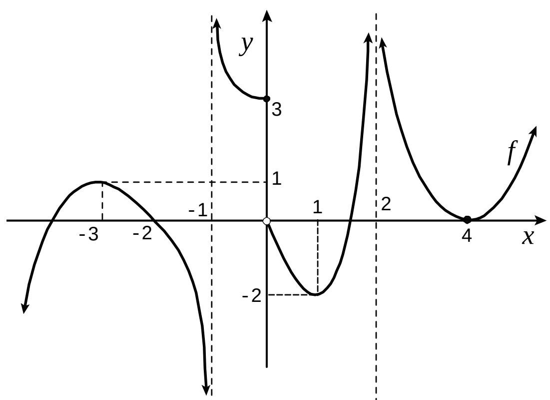
1. Para cada una de las siguientes gráficas, responda lo que se le solicita.

(a)



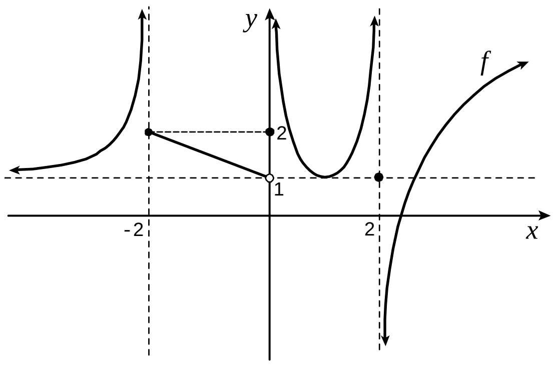
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to 3} f(x)$
- $\lim_{x\to-2^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
- $\lim_{x\to -2} f(x)$

(b)



- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to-1^-} f(x)$
- $\lim_{x\to-1^+} f(x)$
- $\lim_{x\to -2} f(x)$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$

(c)



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
- $f(2)$
- $f(0)$

2. Para cada uno de los siguientes casos, construya la gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las condiciones dadas

(a)

- $D_f = I\!R - \{-2, 3\}$
- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$
- $f(0) = 0$

(b)

- $D_f = I\!R -]0, 1]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$
- $f(-1) = f(3) = 0$
- $f(0) < 0$

(c)

- $D_f = [-3, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 1$
- $f(x) \neq 0,\ \forall x \in\,]0, +\infty[$
- $f(x) = 2,\ \forall x \in [-1, 1]$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$
- $f(-3) = f(3) = -1$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ no existe
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe $\forall x_0 \in [0, +\infty[$

(d)

- $D_f = I\!R$
- $f(x) > 0, \ \forall x \in]1,3[$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$
- $-3 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x \in]-\infty, -3]$
- f es continua a la derecha de 3
- f es discontinua a la izquierda de 3
- $f(3) = 2$, $f(-3) = -3$, $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ no existe
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

2. Conceptos teóricos

1. ¿Bajo qué condición se satisface que $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \dfrac{x-2}{x+3}$?

   ¿Por qué es correcto afirmar que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+3}$?

2. ¿Es posible que exista una función f tal que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$? Justifique su respuesta.

3. Sea f una función tal que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 7$, ¿es posible que $f(3) = 5$? Justifique su respuesta.

4. Considere la función $g : I\!R - \{-2,-3\} \to I\!R$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{(x+2)(x+3)} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   determine para cuáles valores reales, el límite existe.

5. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existan.

6. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{(x-1)}{|x-1|}$ y $g(x) = \dfrac{|x-1|}{(x-1)}$

   a) Verifique (analizando límites laterales) que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existen.

   b) Verifique que $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)\cdot g(x)] = 1$.

   Nota: Este ejercicio muestra que $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$ puede existir aunque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existan.

7. Determine el o los valores de a de modo que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista.

8. Considere la función h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{|-2x-4|} & \text{si } x < -2 \\ \\ \dfrac{x-2ax+ax^2-2}{3x-6} & \text{si } -2 \leq x < 5 \end{cases}$$

   a) determine el o los valores de a tal que $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ exista.
   b) determine el o los valores de a tal que $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ exista.

9. Determine el valor de k de modo que $\lim\limits_{x\to k^-} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2k+1}{4x^2-1}} = 0.$

10. Encuentre los números reales a y b tales que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1.$

11. Sean f y g funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = 2$ y $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)] = 1$. Suponga que $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]$ y $\lim\limits_{x\to a} [g(x)]$ existen. Determine el valor de $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$.

12. Determine $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si se sabe que $3x \leq f(x) \leq x^3+2$ para $0 \leq x \leq 2$.

13. Sea f una función tal que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{2x^2-4x} = 4$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(2x-x^2)}$.

14. Asuma que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$. Utilice propiedades de límites para verificar que:
   a) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$, $a \in \mathbb{R}$
   b) $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$, $a \in \mathbb{R}$

   Nota: En este ejercicio se está demostrando que las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$.

15. A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.
   a) Sea f una función tal que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, entonces necesariamente f debe estar definida en $x = 1$.

b) Sean f y g funciones, si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces necesariamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

c) El límite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(a+1)(x-3)}{|3-x|}$ existe únicamente si $a = -1$.

d) Sea g una función continua en $\mathbb{R}$, si $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$ entonces puede darse que $g(2) \neq 5$.

e) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+4)}{2x+8} & \text{si } x < -4 \\ \dfrac{\sqrt{x+8}}{4} & \text{si } x > -4 \end{cases}$

i. El límite $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ existe.

ii. f es continua en $x = -4$.

16. Construya la gráfica de una función g tal que: g sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$ y que g sea continua a la izquierda de 5, pero discontinua a la derecha de 5.

17. Sea $f : [0, +\infty[- \{4\} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. ¿Por qué f no es continua en $x = 4$? Construya una función a trozos, utilizando la anterior, que sí sea continua en $x = 4$.

18. Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x \neq \pm 1 \\ m & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

¿Es f continua en $x = -1$? ¿Cuánto debe valer m para que f sea continua en $x = 1$?

19. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5 & \text{si } x \leq k \\ x^2 + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$$

Determine el o los valores de k, de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

20. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{si } t \leq 0 \\ b + t^2 & \text{si } 0 < t \leq k \\ 7 + t & \text{si } t > k \end{cases}$$

Determine el o los valores de k y b, de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

21. Para cada una de las siguientes funciones, halle el valor de a y b para que la función correspondiente sea continua en el valor de x que se indica.

$$a)\ \ g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{ax} & \text{si } x<0\\[2ex] b & \text{si } x=0\\[2ex] \dfrac{e^{ax}}{b} & \text{si } x>0\end{cases}\qquad \text{en } x=0.$$

$$b)\ \ h(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{a} & \text{si } x<1\\[2ex] b & \text{si } x=1\\[2ex] \dfrac{a^2x-1}{1+a} & \text{si } x>1\end{cases}\qquad \text{en } x=1.$$

22. Considere las siguientes funciones:

$$g(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si } x<2\\ 6 & \text{si } x=2\\ 2ax+3b & \text{si } x>2\end{cases}\qquad\qquad f(x)=\begin{cases}cx^2+4 & \text{si } x<6\\ cx+b & \text{si } x\geq 6\end{cases}$$

determine condiciones suficientes para a, b y c para que la función $f\circ g$ sea continua en $x=2$.

23. Sea $g(x)=\begin{cases}3x+7 & \text{si } x<4\\ kx-1 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$. Determine los valores de k para que $e^{g(x)}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

24. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6 \quad \text{y} \quad f(x)=0 \text{ si y sólo si } x=2$$

Considere la función:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot f(x)}{x^2-5x+6}+4x & \text{si } x<2\\[3ex] 2 & \text{si } x=2\\[3ex] \dfrac{b\cdot\operatorname{sen}(x-2)}{f(x)}+a & \text{si } x>2\end{cases}$$

Determine el valor de a y b para que g sea continua en $\mathbb{R}$.

25. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demuestre que $f(0) = 0$.

b) Demuestre que si f es continua en $x = 0$, entonces f es continua en a, $\forall a \in I\!R$. **Sugerencia:** Aplique la definición de continuidad y realice en el límite el cambio de variable $u = x - a$.

3. Cálculo de límites

Calcule cada uno de los siguientes límites (en caso que alguno no exista justifique).

1. $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{2 - \sqrt[6]{3a+64}}{5a}$

2. $\displaystyle\lim_{w\to a} \frac{2w^3 - 4aw^2 + 2a^2w}{w^4 + aw^3 - 2a^2w^2}$

3. $\displaystyle\lim_{a\to 5} \frac{a^2 - 25}{2 - \sqrt{a-1}}$

4. $\displaystyle\lim_{y\to 32} \frac{\sqrt[5]{y^2} - 3\cdot\sqrt[5]{y} + 2}{y - 4\cdot\sqrt[5]{y^3}}$

5. $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\sec y - 1}{y^3 \csc y}$

6. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+ct} - 1}{t}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[4]{(x+2)^4}}{\left|(x+1)^2 - 1\right|}$

8. $\displaystyle\lim_{y\to 3} \frac{5y - 15}{1 - \sqrt[9]{2y-5}}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

10. $\displaystyle\lim_{y\to 4^+} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2^y - 1}{-4\ln(5-y)}}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{3x-a} - \sqrt{x+a}}{x-a}$, $a > 0$.

12. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{1 + \sqrt[5]{x-2}}$

13. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\tan(3z)}{8z\cos z}$

14. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{4h}{\sqrt[5]{3h-1} + 1}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x + x^2\cos x}{x\tan x}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14} + x}{\sqrt{x^2-2} + x}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3 - x^2}{3\sqrt[3]{x^3+1}}$

18. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z - \tan z}{z^2\cdot\operatorname{sen}(2z)}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to \pi^+} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{-\pi}{\pi - x}} + 2007}{\frac{1}{\ln(\pi+1-x)}}$

20. $\displaystyle\lim_{b\to -1} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{|b|-1}{b+1}}$

21. $\displaystyle\lim_{y\to 5} \frac{2 - \sqrt[4]{4y-4}}{\sqrt{y-1} - 2}$

22. $\displaystyle\lim_{y\to 4} \frac{\sqrt{y} - |y-2|}{y-4}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^3 x}{x^2}$

24. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t - \operatorname{sen}(2t)}{t + \operatorname{sen}(3t)}$

25. $\lim_{x\to\frac{4}{3}} \dfrac{|2-5x|+\frac{14}{3}}{|4-3x|}$

26. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-\sqrt{x}}$

27. $\lim_{r\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{r^4-r}+r^2}{r^3-r}$

28. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z+\operatorname{sen} z}$

29. $\lim_{z\to\frac{2}{3}} \dfrac{|3z-2|}{|6z-2|-2}$

30. $\lim_{n\to 0} \dfrac{1-\cos^3 n}{\operatorname{sen}^2 n}$

31. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\frac{7}{\tan(x)}} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(2x-3\pi)}{2x-\pi}\right]$

32. $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

33. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sec(2z)\cdot\tan(3z)}{4z}$

34. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-3x^2+4}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\cos x}$

36. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}+x\right)$

37. $\lim_{t\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+t}}{1-\sqrt{5-t}}$

38. $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2t^2+3}-t}{\sqrt{4t+5}-1}$

39. $\lim_{t\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{2\cos(2t)-2}$

40. $\lim_{z\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+z^2}-\sqrt{5-2z+16z^2}}{2z+3}$

41. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x\operatorname{sen} x}{\cos x-1}$

42. $\lim_{k\to-\infty} \dfrac{\sqrt{k^2-k}-\sqrt{-k}}{2k+1}$

43. $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

44. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{7}\right)^{\cot|x|}$

45. $\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{4}{\operatorname{sen}(3x-3)}\right)$

46. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

47. $\lim_{x\to 0} \left(e^{\frac{2}{x}}+1\right)$

48. $\lim_{x\to-3} \dfrac{|x-2|-5}{6-2\cdot|x|}$

49. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{2x^{\frac{4}{3}}+2x-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^5}}$

50. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-6}-\sqrt{4x^2-x}\right)$

51. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

52. $\lim_{x\to-3} \left[\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{5}{|x+3|}\right]$

53. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x\pi)$ con $x\in\mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(n\pi)$ con $n\in\mathbb{N}$

54. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

55. $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2^x+4^x}{3^x-5^x}+\dfrac{|x+1|-1}{x}\right]$

56. $\lim_{r\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos r}}{r^2}$

Parte 2

Derivadas

4. Definición de derivada

1. Utilice la definición para determinar la derivada de cada una de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$
   b) $g(x) = cx^2 + bx + 1$
   c) $h(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}$
   d) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$
2. Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = xf(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = f(x) + xf'(x)$.
3. Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = 3f^2(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = 6f(x)\,f'(x)$.
4. Demuestre, utilizando la definición, los siguientes resultados relativos a derivadas:
   a) Si f es la función definida por $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, demuestre que $f'(x) = 0$.
   b) Si f es la función definida por $f(x) = k \cdot g(x)$, $k \in \mathbb{R}$ y g una función derivable, demuestre que $f'(x) = k \cdot g'(x)$.
   c) Si g es una función derivable y k una constante real, demuestre que $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{k}{g(x)}\right] = \dfrac{-kg'(x)}{g^2(x)}$.
5. Encuentre una función f y un número real a tales que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$.
6. Suponga que f es una función que satisface la ecuación:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

   Suponga también que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Encuentre $f(0)$, $f'(0)$ y $f'(x)$.

5. Reglas de derivación y regla de la cadena

1. Sean f, g y h funciones derivables:
   a) Utilice la regla del producto para demostrar que:

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

   b) A partir de (a) demuestre que $\dfrac{d}{dx}\left[f^3(x)\right] = 3f^2(x)\,f'(x)$.

2. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $p(u) = \cos^4\left[\operatorname{sen}\left(ku^3\right)\right]$

(b) $h(x) = e^{\cos x}\tan(\ln x)$

(c) $f(x) = \dfrac{e^{5^x} - \tan^2\left(x^2+1\right)}{\operatorname{sen}^5(2x) + \cos(-x)}$

(d) $g(u) = \ln\left[\sec\left(u^3\right) + \tan\left(u^3\right)\right]$

(e) $g(w) = \tan\left(\dfrac{w^2}{2w+3}\right)$

(f) $f(w) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{w-1}}{w^3\cos\left(w^2\right)}\right)$

(g) $h(z) = \operatorname{arc}\cos^2\left(\dfrac{e^{-z}}{z}\right)$

(h) $f(x) = \cos^3(\arctan(3x)) \cdot \sqrt{\ln\left(x^3+2^x\right)}$

(i) $w(x) = \dfrac{\tan^6\left(g\left(x^2+6x\right)\right)}{\ln\left(7^x+1\right)} - \operatorname{arcsen}^2(3x+5)$ con g una función derivable.

(j) $h(x) = \ln\left(\tan^4\left(3^{g\left(x^3+4\right)}\right)+1\right)$ con g una función derivable.

3. Halle lo que se le pide en cada caso:

a) Sean f y g funciones tales que $f(5)=4$, $g(5)=2$, $f'(5)=-6$ y $g'(5)=5$. Determine $(f\cdot g)'(5)$ y $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5)$.

b) Sea f una función derivable tal que $h(x) = x^2 f(x) + \dfrac{f(x)}{x}$. Si se sabe que $f(1)=2$ y $h'(1)=5$, encuentre $f'(1)$.

c) Sea g una función derivable tal que $g(1)=3$ y $g'(1)=2$. Determine $h'(0)$ si $h(x) = \left[g\left(2^x\right)\right]^2 \cdot 2^{-x}$.

d) Sea f una función derivable tal que $x\left[f(x)\right]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3)=1$. Halle $f'(3)$.

4. Si $y = (5u+6)^3$ y $u = \left(x^2+1\right)^4$, determine $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

5. Si f es una función tal que $f'(x) = e^{-2x}$ y $u = \ln\left(x^2\right)$, utilice la regla de la cadena para demostrar que $\dfrac{d}{dx}\left[f(u)\right] = \dfrac{2}{x^5}$.

6. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que $\dfrac{d}{dx}\left[f(2x)\right] = x^2$.

7. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

8. Use la regla de la cadena y la regla del producto para demostrar la regla del cociente. Sugerencia: escriba $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot [g(x)]^{-1}$.

6. Derivadas de orden superior

1. Para cada caso, determine la derivada que se indica.
   a) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad y'''$
   b) $y = e^{-3x} + 2x^3$, $\quad y^{(4)}$
2. Una ecuación diferencial es aquella en que interviene una función desconocida y sus derivadas. Resuelva los siguientes problemas relativos a ecuaciones diferenciales.
   a) Considere la ecuación $f''(x) + 4 \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x) = 0$. Pruebe que $f(x) = (3x-5)\,e^{-2x}$ satisface la ecuación anterior.
   b) Halle las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2+Bx+C$ satisfaga la ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$.
3. Sea $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes.
   a) Demuestre que $F''(x) = f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x)\,g'(x) + f(x)\,g''(x)$.
   b) Encuentre fórmulas similares para $F'''(x)$ y $F^{(4)}(x)$.

7. Derivación implícita

1. Suponga que las ecuaciones siguientes definen a y como función implícita de la variable x. Obtenga y'.
   a) $\operatorname{sen}(xy) + y - x^2 = 4$
   b) $x^3 - \operatorname{sen} y + x \ln^2 y = ye^{2x}$
   c) $\dfrac{y}{x-y} = x^2 + 1$
2. Verifique que $y'' = \dfrac{-1}{4y^3}$ si se tiene que $x^2 + 4y^2 = 4$.
3. Determine y'', si la ecuación $y^3 + 3x + 7 = 6y$ define a y como función en x.
4. Suponga que la ecuación $e^y = y^2 \cdot e^x$ define a y como función en x. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. En ambos casos exprese su respuesta sólo en términos de y.
5. Demuestre, utilizando derivación implícita, que la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto arbitrario (m, n) es $\dfrac{m}{a^2} \cdot x + \dfrac{n}{b^2} \cdot y = 1$.
   Nota: A la curva de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se le conoce como elipse.

8. Problemas

Resuelva los siguientes problemas:

1. Halle los puntos de la curva $f(x) = x^3 - 3x + 5$ en los que la recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{x}{9}$. ¿En cuáles puntos la gráfica de f posee rectas tangentes horizontales?

2. Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $f(x) = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$. ¿En cuál punto la gráfica de f posee una recta tangente horizontal?

3. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tiene una recta tangente horizontal?

4. Encuentre la ecuación de una parábola de la forma $y = ax^2 + bx$ y cuya tangente en $(1, 1)$ tenga la ecuación $y = 3x - 2$.

5. ¿Para qué valores de a y b es la recta $2x + y = b$ tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

6. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

7. Encuentre la pendiente de la curva de ecuación $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 16y^2$ en el punto $(0, 2)$.

8. Determine la ecuación de las rectas normales a la curva de ecuación $y^2 + xy - x^2 = 5$ en los puntos donde $x = 4$.

9. Determine la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = (2x + 1)\left(x^2 + 3x + 1\right)^{1/(x+1)}$ en el punto donde $x = 0$.

10. Sea $f(x) = \left(x^3 - 4x^2\right) g(x)$. Se sabe que la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = g(x)$ en el punto de tangencia $(-2, 5)$ es $y = \dfrac{x}{4} + 5$. Determine $f'(-2)$.

11. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

12. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = x^3 - 2x + 2$ que pasan por el punto $(-2, -2)$.

Parte 3

Aplicaciones de las derivadas

9. Problemas de tasas relacionadas

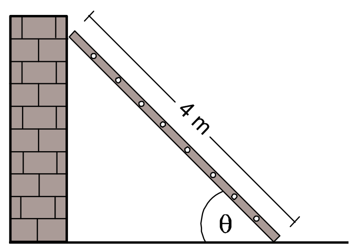
1. Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de $0,01$ cm/min. ¿Cuál es la razón de cambio del área cuando el radio mide 50 cm?

2. Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 cm/s. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando una arista tiene 10 cm de longitud?

3. De un tubo sale arena a razón de 16 dm^3/s. Si la arena forma una pirámide cónica en el suelo cuya altura es siempre $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la altura de la pirámide cuando tiene 4 dm de altura?

4. Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito en forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) a razón de 3π m^3/h. Si el depósito tiene un radio de $2,5$ m en su parte superior y una profundidad de 10 m, entonces:
   a) ¿Qué tan rápido cambia dicha profundidad cuando tiene 8 m?
   b) ¿A qué razón varía el área de la superficie del nivel del aceite en ese mismo instante?

5. Una escalera de 4 m se apoya contra un muro y su base se comienza a resbalar. Cuando la base está a $3,7$ m del muro, la base se aleja a razón de $1,5$ m/s.



   a) ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante?
   b) ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado por la escalera, el muro y el suelo en ese instante?
   c) ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante?

6. Una mujer, en un muelle, tira de un bote a razón de 15 m/min sirviéndose de una soga amarrada al bote a nivel del agua. Si las manos de la mujer se hallan a $4,8$ m por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidez el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6 m?

7. Un automóvil que se desplaza a razón de 9 m/s, se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 36 m de la intersección un camión que viaja a razón de 12 m/s cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2 s después de que el camión pasa dicho cruce?

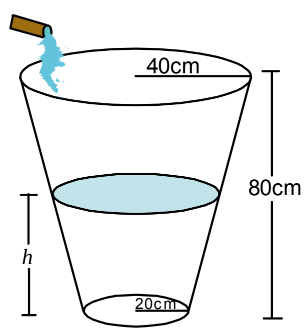
8. Un avión vuela con velocidad constante, a una altura de 3000 m, en una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador advierte que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{\pi}{3}$ radianes y aumenta a razón de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la velocidad del avión.

9. Una partícula se está moviendo sobre una curva cuya ecuación es $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$. Suponga que la coordenada x se está incrementando a razón de 6 unid/s cuando la partícula está en el punto $(1, 2)$.

   a) ¿Con qué rapidez está cambiando la coordenada y del punto en ese instante?

   b) ¿La partícula está ascendiendo o descendiendo en ese instante?

10. Se bombea agua a un tanque que tiene forma de cono truncado circular recto a una razón uniforme de 2 l/min (1 litro equivale a 1000 cm^3). El tanque tiene una altura de 80 cm y radios inferior y superior de 20 cm y 40 cm, respectivamente. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 30 cm?



Nota: El volumen V de un cono truncado circular recto de altura h y radios inferior y superior a y b, respectivamente, viene dado por: $V = \frac{\pi}{3} h \left(a^2 + ab + b^2\right)$.

11. Una ardilla en la base de un árbol comienza a subirlo a razón de $2,5$ m/s. Dos segundos después, un gato, situado a 36 m de la base del árbol, ve la ardilla y comienza a correr hacia el árbol con una rapidez de 3 m/s. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el gato y la ardilla 4 s después de iniciada la persecución?

12. Una granja tiene un tanque de agua de forma cónica (invertido), de radio 6 m y 15 m de altura. El tanque se encuentra vacío, por lo que el administrador de la granja enciende una bomba que vierte agua en el tanque a razón de 10 m^3/min, sin embargo no se percata de la existencia de un agujero en el fondo del tanque por donde se escapa el agua a razón de $0,5$ m^3/min. Determine a qué razón varía el nivel del agua cuando la profundidad es de $8,28$ m.

13. Un triángulo tiene área constante de 80 cm^2. La longitud de uno de los lados disminuye a razón de $0,1$ cm/s. Determine la razón a la cual varía la altura del triángulo sobre dicho lado, en el momento en que la altura mide 10 cm.

14. Un controlador aéreo sitúa dos aviones (A y B) a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en ángulo recto. El controlador detecta que el avión A viaja a 450 km/h y el avión B a 600 km/h.
    a) ¿A qué ritmo varía la distancia entre los dos aviones, cuando A y B están a 150 km y 200 km, respectivamente, del punto de convergencia?
    b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?

15. Un hombre se aleja de un edificio de 18 m de altura a una velocidad de $1,8$ m/s. Una persona ubicada en la azotea del edificio observa al hombre alejarse. ¿A qué velocidad varía el ángulo de depresión de la persona en la azotea hacia el hombre cuando éste dista 24 m de la base del edificio?

16. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y su vértice opuesto al origen está sobre la curva $y = 2^x$. En este vértice, la coordenada y aumenta a razón de 1 unid/s. ¿A qué velocidad aumenta el área del rectángulo cuando $x = 2$?

10. Conceptos teóricos: Máximos y mínimos, trazo de curvas.

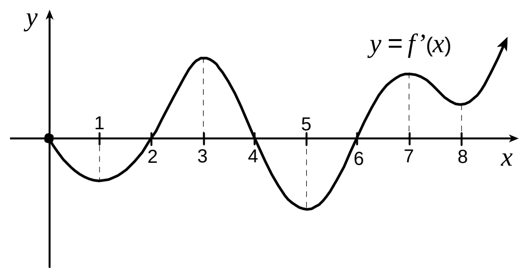
1. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Encuentre los valores de a y b tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0,2]$. ¿Este valor es máximo o mínimo?
2. Determine los valores de a y b de modo que la función $f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.
3. Halle una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que alcance extremos relativos en los puntos $(-2,3)$ y $(1,0)$. Verifique que en $(-2,3)$ se alcanza un máximo relativo y en $(1,0)$ un mínimo relativo.

4. A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.
   a) Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, entonces necesariamente f tiene un máximo o un mínimo relativo en $x = c$.
   b) Si f es una función continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.
   c) Si f es una función derivable en $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.
   d) Si f es una función tal que $f''(2) = 0$ entonces necesariamente $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f.
   e) Si (a, b) es punto de inflexión de la gráfica de f entonces necesariamente (a, b) no puede ser extremo relativo de la gráfica de f.
   f) Se puede encontrar una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda $x \in D_f$.
   g) No se puede encontrar una función f, continua en $I\!R$, tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in I\!R$.
5. Suponga que f y g son funciones derivables y que las segundas derivadas nunca se anulan en un intervalo I, verifique que:
   a) Si f y g son cónvacas hacia arriba en I, entonces la función $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.
   b) Si f y g son positivas, crecientes y cóncavas hacia arriba en I, entonces la función $f \cdot g$ es cóncava hacia arriba en I.
6. Muestre que una función cúbica (criterio de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$) siempre tiene un punto de inflexión. Además, si su gráfica interseca al eje x en tres puntos, sean estos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ y $(x_3, 0)$, muestre que la coordenada x de ese punto de inflexión es $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.
7. ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + \frac{1}{24}x^2$ tiene:
   a) dos puntos de inflexión?
   b) un punto de inflexión?
   c) ningún punto de inflexión?
8. Determine los valores del número a para los cuales la función f no tiene valores críticos.

$$f(x) = \left(a^2 + a - 6\right)\cos(2x) + (a - 2)x + 5$$

11. Graficación

1. Considere la gráfica de la primera derivada de una función $f : [0, +\infty[\longrightarrow I\!R$:



   Con base en la gráfica anterior:

   a) ¿En qué intervalos f crece? Explique.

   b) ¿En qué valores de x, f alcanza un máximo local? Explique.

   c) ¿En qué valores de x, f alcanza un mínimo local? Explique.

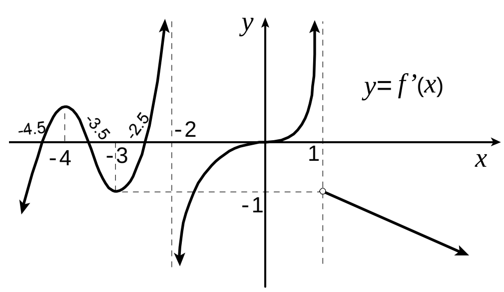
   d) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? Explique.

   e) ¿En qué valores de x, f posee puntos de inflexión?

   f) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f''.

   g) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f.

2. Considere la gráfica de la primera derivada de una función $f : I\!R \longrightarrow I\!R$, tal que f sea continua en todo su dominio.



   Con base en la gráfica anterior:

   a) ¿En qué intervalos f decrece? Explique.

   b) ¿En qué valores de x, f alcanza un máximo local? Explique.

   c) ¿En qué valores de x, f alcanza un mínimo local? Explique.

   d) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia abajo? Explique.

   e) ¿En qué valores de x, f posee puntos de inflexión?

   f) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f''.

   g) Realice un bosquejo de una posible gráfica para f.

3. Para cada uno de los siguientes casos, construya la gráfica de la función f que cumpla simultáneamente todas las condiciones dadas.

(a)

- $D_f = I\!R - \{-3, 1\}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$
- $f(0) = -1$
- $f(-1) = 1$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x > 3$
- $f'(x) = -1 \quad \forall x \in \left]-3, -1\right[$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ existe.

(b)

- $D_f = I\!R - \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$
- $\lim\limits_{x\to(-1/2)^-} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to(1/2)^+} f(x) = 1$
- $f'(x) > 0$ $\forall x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 2\right[$
- $f'(-2) = 0$
- $f'(-3) = 0$
- $f'(-1)$ no existe.

(c)

- $D_f = I\!R$
- f es derivable únicamente en $I\!R - \{-1, 2\}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$
- $f''(x) > 0, \forall x > 3$
- $f''(x) < 0, \forall x \in \left]-\infty, 2\right[- \{-1\}$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$
- f es continua a la izquierda de 2.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$
- $f(2) = 2$

4. Determine las ecuaciones de todas las asíntotas de la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{x+2}{e^x - 1}$.

5. Halle el criterio de una función cuya gráfica tenga como asíntotas las rectas de ecuación: $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$.

6. Determine las ecuaciones de las asíntotas verticales a la gráfica de la función g definida por:

$$g(x) = \arctan\left(\frac{4x^2+1}{5x-1}\right) \cdot \frac{x^3+2}{e^x - 1}$$

7. Determine las ecuaciones de todas las asíntotas a la gráfica de la función h definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^3+2x}{x^2+1} & \text{si } x\leq -5\\[2ex] \dfrac{3x^2+6x}{x^2-9} & \text{si } -5<x\leq 0\\[2ex] \arctan\left(\dfrac{3x-2}{1-3x}\right) & \text{si } x>0\end{cases}$$

8. Para cada una de las siguientes funciones:

- Verifique las derivadas dadas.
- Realice el análisis completo y trace la gráfica respectiva.

a) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ $\quad f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$ $\quad f''(x)=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{(x^2-1)^3}$

b) $h(x)=\dfrac{x^3-27}{8-x^3}$ $\quad h'(x)=\dfrac{-57x^2}{(x^3-8)^2}$ $\quad h''(x)=\dfrac{228x\left(x^3+4\right)}{(x^3-8)^3}$

c) $g(x)=x\ln^2 x$ $\quad g'(x)=\ln^2 x+2\ln x$ $\quad g''(x)=\dfrac{2(\ln x+1)}{x}$

d) $p(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\quad p'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$ $\quad p''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

e) $m(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $\quad m'(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$ $\quad m''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$

f) $r(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\quad r'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ $\quad r''(x)=\dfrac{e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)}{(e^{-x}+1)^3}$

g) $w(x)=x-4\sqrt[3]{x}$ $\quad w'(x)=-\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}+1$ $\quad w''(x)=\dfrac{8}{9\sqrt[3]{x^5}}$

9. Construya la gráfica de la función $f(x)=2\cos x+\operatorname{sen}(2x)$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

Nota: Para poder realizar una factorización de las derivadas utilice, según corresponda, las identidades trigonométricas: $\cos(2x)=1-2\operatorname{sen}^2(x)$ y $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

12. La regla de L'Hôpital

12.1. Conceptos teóricos.

1. Halle el error en los procedimientos siguientes:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x}{2}=0.$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$

2. Sean a, b y c constantes tales que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+\operatorname{sen}(bx)+\operatorname{sen}(cx)+\operatorname{sen}(dx)}{3x^2+5x^4+7x^6}=8$. Encuentre el valor de $a+b+c+d$.

3. Sea f una función tal que f y f' son continuas, $f(2)=0$ y $f'(2)=7$.
   Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$.

4. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^3}+a+\frac{b}{x^2}\right)=0$$

5. ¿Para qué valor de a es verdadera la ecuación siguiente?
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=e$$

6. Sea $f(x)=\begin{cases}|x|^x & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$. Verifique que f es continua en $x=0$.

7. Sean f y g funciones tales que $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0^+$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, $a\in I\!R$. Verifique que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=+\infty$.

8. Sea f una función cuya gráfica tiene asíntota oblicua de ecuación $y=mx+b$ cuando $x\to+\infty$. Verifique que $m=\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$.

12.2. Cálculo de límites. Calcule cada uno de los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x-\operatorname{sen} x}$

3. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2\theta}{\csc\theta-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(kx)+\tan(nx)}{\arctan(nx)}, \quad n\neq 0.$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\pi-2x)^{\frac{1}{\tan x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{\ln(x-1)}-\dfrac{2}{x-2}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1-x}{\ln(1-x)}\right)$

8. $\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{\sqrt[4]{5-2y}-1}{1+\sqrt[3]{2y-5}}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-5e^{4x}\right)$

10. $\lim\limits_{y\to 0}\left(e^{2y}-y\right)^{y^{-1}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+3x}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x}\right)}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-x}{\operatorname{sen}^2(2x)}$

15. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\sqrt{x-1}\cdot\left(x^2-4\right)^{-1}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos(3x)-e^{-x}}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2\sec x}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{x-1}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{1/x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^n}, \quad n=1,2,3,...$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

13. Problemas de optimización

1. Se desea fabricar una caja sin tapa, de base cuadrada, cuyos materiales para los lados cuestan \$3 el dm^2 y, para el fondo, \$4 el dm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo que se puede construir con un valor de \$48?

2. Halle el punto sobre la recta $6x+y=9$, más cercano al punto $(-3,1)$.

3. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base sobre el eje de las abscisas y sus otros dos vértices por encima de ese eje, en la parábola $y=8-2x^2$?

4. Se inscribe un cilindro circular recto en un cono de altura H y radio de la base R. ¿Cuál es el máximo volumen posible de ese cilindro?

5. En un cartel rectangular, los márgenes superior e inferior miden 6 cm cada uno y los laterales, 4 cm. Si el área del material impreso se fija en 384 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones del cartel de área mínima?

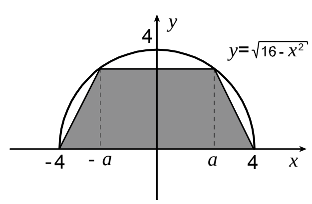
6. Un trozo de alambre, de 10 m de largo, se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada en las figuras sea: (a) máxima? (b) mínima?

7. Un bote sale de un muelle a las 2:00 p.m. y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro bote ha estado enfilando hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3:00 p.m. ¿En qué momento estuvieron los dos botes más próximos?

8. Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y corta un área mínima en el primer cuadrante.

9. Determine el área del rectángulo de mayor tamaño que se puede inscribir en un triángulo cuyos vértices están en los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

10. Hallar las dimensiones del trapecio isósceles de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 4.



11. Un rectángulo tiene un vértice en $(0, 0)$, un lado sobre el eje x positivo y otro sobre el eje y positivo. El vértice opuesto a $(0, 0)$ está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$, definida para $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para este rectángulo?

12. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa.

13. De una pieza cuadrada de cartón se va a formar una caja abierta, cortando un cuadrado en cada una de las esquinas y doblando los bordes. Si el cartón mide 40 cm de lado, encuentre las dimensiones de la caja que darán lugar al volumen máximo. ¿Cuál es el valor de este volumen?

14. Una persona está en un punto X en la orilla de un río recto de 50 m de ancho, y quiere llegar a otro punto Y en la otra orilla del río, ubicado 75 m río abajo. Puede correr a 250 m/min por su lado del río para luego nadar a 30 m/min en línea recta hasta llegar a Y. Desestimando la corriente del río, ¿qué distancia debe correr antes de entrar al agua, y qué distancia nadar, de modo que minimice el tiempo total? ¿Cuánto es el tiempo mínimo?

15. Una pista de atletismo consta de una zona rectangular y un semicírculo en cada uno de sus extremos. Si el perímetro de la pista ha de ser 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular. ¿Cuál es el área total de la pista?

16. Un triángulo rectángulo de hipotenusa B, gira alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. ¿Cuál es el volumen máximo de este cono?

Parte 4

Integral indefinida

14. Concepto de antiderivada

1. Si F y G son antiderivadas de una función f, ¿es cierto que $F(x) - G(x) = 0$? ¿Es cierto que $F'(x) - G'(x) = 0$?
2. Encuentre una función f tal que $\int f(x)\, dx = x^2 e^{2-x} + C$.
3. Calcule $\int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 5 \right] dx$.

15. Cálculo de integrales

Calcule cada una de las siguientes integrales utilizando el método indicado.

15.1. Integración por sustitución e integrales inmediatas.

1. $\int \frac{x+1}{x-1} dx$
2. $\int \left(\tan^2 y + 1\right) dy$
3. $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$
4. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x+1} dx$
5. $\int \sec(\pi x) \tan(\pi x)\, dx$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2} dx$
7. $\int x\sqrt{x-3} dx$
8. $\int \operatorname{sen}^5(2x) \cos(2x)\, dx$
9. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx$
10. $\int e^{-\cot x} \csc^2 x dx$
11. $\int \frac{\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)} d\theta$
12. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx$
13. $\int x^x (1+\ln x)\, dx$
14. $\int \sec x \tan x \sqrt{1+\sec x} dx$
15. $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$
16. $\int \tan x \ln(\cos x)\, dx$

15.2. Integración por partes.

1. $\int \ln\sqrt{x} dx$
2. $\int \cos(\ln x)\, dx$
3. $\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} dx$
4. $\int x \sec x \tan x dx$

5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. $\int x^2 e^{3x} dx$

7. $\int x \arctan x dx$

8. $\int x^3 e^{-x^2} dx$

9. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

10. $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

15.3. Integración trigonométrica.

1. $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^4 x dx$

2. $\int \cos^4 t dt$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} dx$

4. $\int \cos^2 x \tan^3 x dx$

5. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$

6. $\int \tan^5 x dx$

7. $\int \frac{\sec^2 x}{\cot x}dx$

8. $\int \frac{1-\tan^2 x}{\sec^2 x}dx$

15.4. Integración por sustitución trigonométrica.

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}dx$

2. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx$

3. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$

4. $\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}dx$

5. $\int \frac{x-3}{\left(x^2+2x+4\right)^2}dx$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x-8}}dx$

7. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}dx$

15.5. Integración por fracciones parciales.

1. $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx$

2. $\int \frac{1}{\left(x+5\right)^2\left(x-1\right)}dx$

3. $\int \frac{x^2}{\left(x+1\right)^3}dx$

4. $\int \frac{1}{x^3-1}dx$

5. $\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$

6. $\int \frac{5x^2+3x+12}{x^3+4x}dx$

15.6. Integración por sustitución para racionalizar.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+2}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(x+3)^3}}{x+7}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

15.7. Práctica combinada.

1. $\displaystyle\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{(3^x-6^x)^2}{18^x}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(7x)+\cos(7x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(7x)-\cos(7x)}}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan(2x)}}{4x^2+1}dx$

6. $\displaystyle\int y^3\cos\left(y^2\right)dy$

7. $\displaystyle\int e^t\sqrt{9-e^{2t}}dt$

8. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+4x+6}dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

10. $\displaystyle\int x^2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)dx$

11. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+16x+25}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}dx$

13. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{4x}{4x^2+4x+5}dx$

15. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x-1}{x^3-7x^2+16x-12}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dz}{z\cos(\ln(4z))}$

18. $\displaystyle\int \frac{x-4}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$

20. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

21. $\displaystyle\int \frac{-3x^3+4x^2-8x}{x^2+1}dx$

22. $\displaystyle\int \sec^4(1-u)\tan(1-u)\,du$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x+20}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}dx$

25. $\displaystyle\int \frac{dw}{(4w^2-25)^{3/2}}$

26. $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{(x-2)(x^2+3)}dx$

27. $\displaystyle\int e^x \ln(e^x+1)\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{7x+3}{x^3+3x}dx$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x-2}}$

30. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$

31. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}+\sqrt{y}}$

32. $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x^3}}dx$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{z^3}+1}dz$

34. $\displaystyle\int \frac{5x-\sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

15.8. Otros ejercicios.

1. Calcule las siguientes integrales.

   a) $\displaystyle\int \frac{\arctan e^{-x}}{e^{-x}}dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\operatorname{sen} x)}{\sec x}dx$

   c) $\displaystyle\int \ln\left(x^2+2x+5\right)dx$

2. Verifique, utilizando integración por partes, las siguientes fórmulas de reducción:

   a) $\displaystyle\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left[-1+(n+1)\ln x\right]+C\ ;\quad n\neq -1$

   b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\ dx = -\frac{1}{n}\cos x\cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\ dx$

   Sugerencia: Tome $u=\operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv=\operatorname{sen} x\ dx$

   c) $\displaystyle\int \cos^n x\ dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx$

3. Aplique las fórmulas anteriores para verificar las siguientes igualdades:

   a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x-\operatorname{sen} x\cdot\cos x)+C$

   b) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x\cdot\cos x)+C$

4. Determine una función f tal que $f(-1) = -3$, $f'(-1) = -10$ y $f''(x) = 24 + 4e^{2(x+1)}$.

5. Determine una función h tal que $\dfrac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}} = x^3$ y $h(0) = 1$.

6. Sea f una función cuya gráfica contiene el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$. Encuentre $f(2)$.

Parte 5

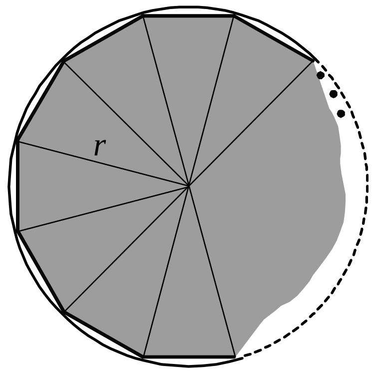
Integrales definidas e impropias

16. Sumas de Riemann: concepto intuitivo de partición

Utilizaremos un problema geométrico, para introducir el concepto intuitivo de *partición*.

Considere el siguiente problema:

Sea A_n el área de un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo de radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes (con uno de sus vértices en el punto centro del polígono, como se muestra en la figura adjunta) cada uno de los ángulos centrales generados mide $\frac{2\pi}{n}$. Además, se satisface que $A_n = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.



1. ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 4 *ul*? ¿Cuánto mide el radio del círculo circunscrito a este cuadrado? Compare con el valor de A_4.
2. ¿Cuál es el área de un hexágono regular de lado 6 *ul*? ¿Cuánto mide el radio del círculo circunscrito a este hexágono? Compare con el valor de A_6.
3. Verifique para un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r, que:
$$A_n = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
4. Dado un polígono regular de n lados, si hacemos que n tienda a ser muy grande $(n \to \infty)$, ¿A qué figura tiende el polígono?
5. Verifique que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \pi r^2$.

16.1. Los rectángulos de aproximación.

1. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   a) Estime el área bajo la curva de f, desde $x = 1$ hasta $x = 5$, utilizando cuatro rectángulos de aproximación y tomando los extremos derechos de los subintervalos.
   b) Repita el inciso a) pero con los puntos medios.
   c) Para cada caso bosqueje la gráfica de f y construya los rectángulos.
2. Utilice sumas de Riemann para encontrar una expresión de la forma $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f(x_i)\,\Delta x\right)$ que represente el área bajo la gráfica de f en el intervalo dado.
   a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad 0 \leq x \leq 8.$
   b) $f(x) = 5 + \sqrt[3]{x} \qquad 1 \leq x \leq 8.$
   c) $f(x) = x + \ln(x) \qquad 2 \leq x \leq 6.$
3. En cada uno de los siguientes casos, exprese el límite como una integral definida sobre el intervalo dado:
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i \operatorname{sen}(x_i)\,\Delta x\right), \qquad [0, \pi]$
   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_i}\Delta x\right), \qquad [1, 4]$
4. Utilice sumas de Riemann para calcular cada una de las siguientes integrales.
   a) $\displaystyle\int_0^2 \left(16 - x^2\right) dx$
   b) $\displaystyle\int_1^4 (2 - 3x)\, dx$
   c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(x - x^2\right) dx$
5. Asumiendo que la función implicada es integrable en el intervalo dado, utilice sumas de Riemann para verificar que:
   a) $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c\,(b - a)\,; \qquad c$ constante.
   b) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$
   c) $\displaystyle\int_a^b (c \cdot f(x))\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx, \quad c$ constante.
   d) $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$

17. La integral definida

17.1. Teorema fundamental del cálculo.

1. Sea g una función integrable. Encontrar c, de modo que:

$$\int_c^x g(t)\,dt = \cos(x) - \frac{1}{2}$$

2. Sea f una función integrable, si f cumple que:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C, \quad C \text{ constante}$$

   a) Determine el criterio de f.

   b) Determine el valor de C, que satisface la igualdad anterior.

3. Encuentre una función f y un número a tales que:

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$$

   para toda $x > 0$.

4. Verifique que la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$, si $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}dt$, $a \neq 0$.

5. Calcule explícitamente una función h tal que $1 + \displaystyle\int_0^x h(t)\,e^t dt = \left(1+x^2\right)e^x$.

6. Hallar la derivada con respecto a x de:

   a) $F(x) = \displaystyle\int_x^2 \cos\left(t^2\right)dt$

   b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt.$

   c) $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln(t)\,dt \qquad x > 0.$

   d) $y = \displaystyle\int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2}du$

17.2. Propiedades de la integral definida.

1. Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios:

   a) Si $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}dx = \frac{38}{3}$, evalúe $\displaystyle\int_9^4 \sqrt{t}dt + \int_1^1 x^2\cos(x)\,dx.$

b) Sea f una función integrable tal que: $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 2$, $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = -6$ y $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx = 1$, halle $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt$.

c) Sea f una función integrable tal que: $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = 6$, $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx = 4$ y $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = 1$, halle $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,dt$.

2. Utilice las propiedades de las integrales, para verificar la siguiente desigualdad:

$$\int_1^2 \sqrt{5-x}\,dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx. \quad \textbf{Sugerencia:} \text{ partir del hecho que } x \leq 2.$$

3. Verifique que $1 \leq \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \leq \frac{6}{5}$. **Sugerencia**: primero razone que $1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1+x^4$.

4. A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

a) Si f es una función continua y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Si f es una función tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$.

c) Si f es una función tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$.

d) Si f y g son funciones tales que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, entonces $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx > 0$.

e) Sean f y F funciones tales que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [0,b]$, entonces $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx = F(b)$

17.3. Cálculo de integrales definidas.

1. Encuentre el error en el siguiente razonamiento:

$$\int_{-2}^4 \frac{1}{x^3}dx = \int_{-2}^4 x^{-3}dx = \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_{-2}^4 = \frac{4^{-2}}{-2} - \frac{(-2)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$

2. Determine el o los valores de c, para los cuales:

$$\int_0^c x(x-1)\,dx = 0$$

3. Hallar todos los valores de x, tales que:

$$\int_0^x \left(t^3 - t\right) dt = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^x \left(t - t^3\right) dt$$

4. Si f es una función continua en $\mathbb{R}$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 20$. Calcule $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

5. Si f es una función continua en $\mathbb{R}$, verifique que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

17.3.1. Cálculo de integrales.

Evalúe cada una de las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{6}{1+x^2}dx$

2. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx \text{ si } f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } -4 \le x < 1 \\ x^5 & \text{si } 1 \le x \le 10 \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \text{ si } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \le \pi \end{cases}$

5. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left(|2-x| + x^2\right) dx$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^5}{t^2}dt$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sin\left(\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}dx$

8. $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{5}{4x^2+4x+5}dx$

9. $\displaystyle\int_1^{1/\ln 2} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

10. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{4u^2-1}}{u}du$

11. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

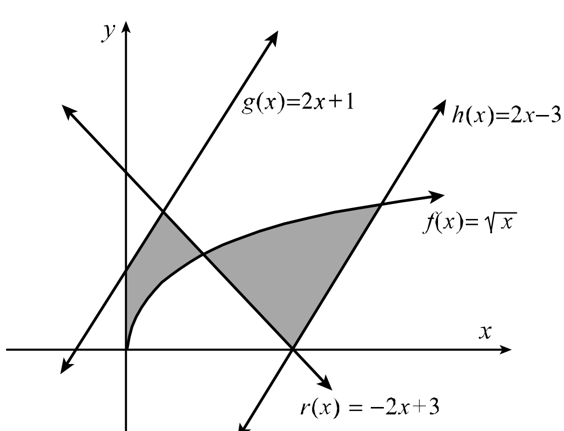
12. $\displaystyle\int_0^4 \left|x^2-4x+3\right| dx$

13. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

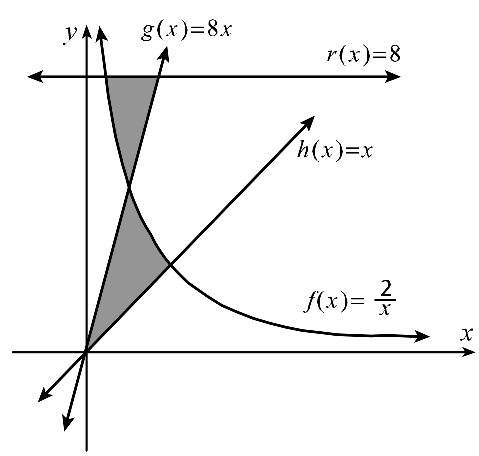
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{20}{\left(x^2-4\right)\left(x^2+1\right)}dx$

18. Áreas

1. Utilice una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva dada, el eje x y las rectas dadas. Realice primero un bosquejo de la región.
   a) $y = x^3;\ x = -2;\quad x = 4$
   b) $y = |x|\,;\ x = -2;\quad x = 2$
   c) $y = \dfrac{3}{4}x + 1;\ x = 0;\quad x = 16$
   d) $y = \sqrt{x-2};\ x = 6$
2. Considere la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 16 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$.
   Determine el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y la recta $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.
3. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar las intersecciones.
   a) $y = x^2;\quad y = 2x$
   b) $y = x^2 + 1;\quad y = x + 3$
   c) $y^2 = 2 - x;\quad y = x + 4$
   d) $y^2 = -x;\quad x - y = 4;\quad y = 0;\quad y = 2$
4. Determine un número k, de tal forma que la recta $y = k$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$, en dos regiones con áreas iguales.
5. Calcule el área de cada una de las regiones sombreadas.

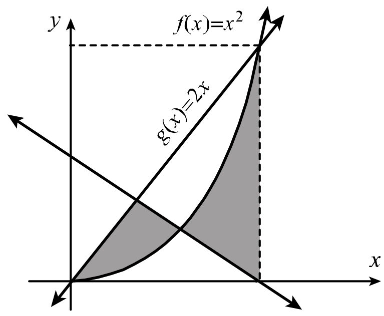


a)

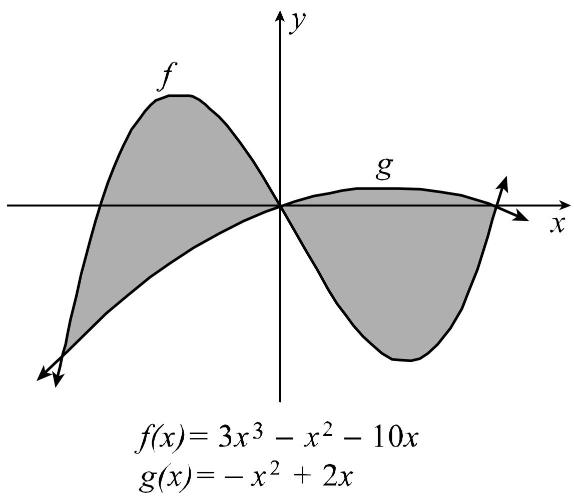


f)

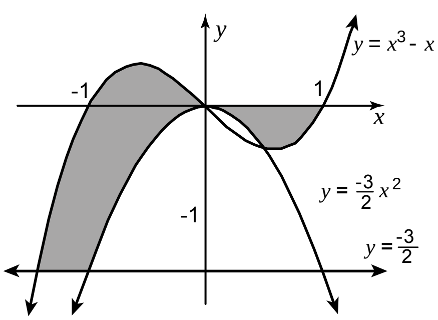
b)


y
f(x)=x2
g(x)=2x
x
h(x)=−x+2

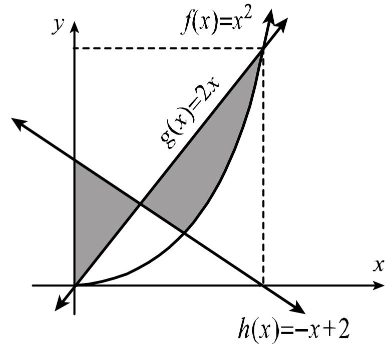
c)


y
f
g
x
f(x)= 3x3 − x2 − 10x
g(x)= − x2 + 2x

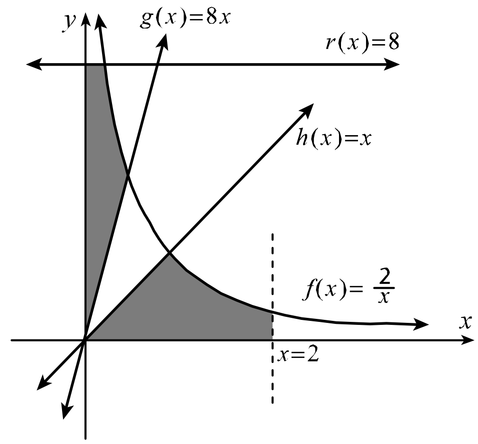
d)


y
y = x3 - x
-1
1
x
y = -3/2 x2
-1
y = -3/2

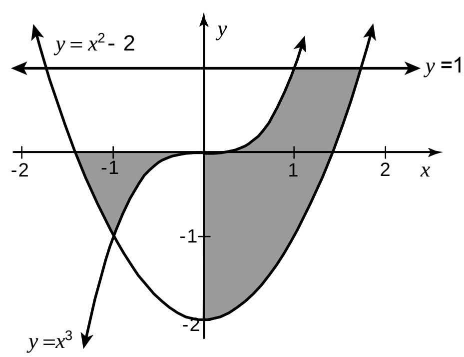
g)

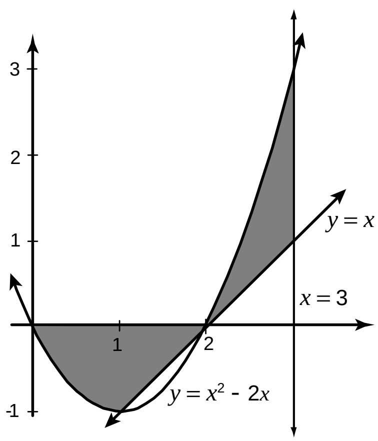

y
f(x)=x2
g(x)=2x
x
h(x)=−x+2

h)

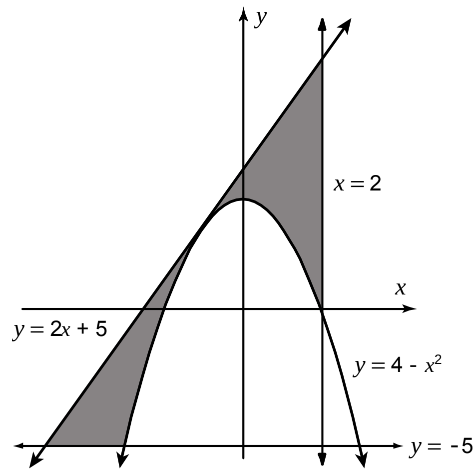

y
g(x)=8x
r(x)=8
h(x)=x
f(x)= 2/x
x
x=2

i)


y = x2 - 2
y
y =1
-2
-1
1
2
x
-1
-2
y =x3



$e)$



$j)$

19. Integrales impropias

19.1. Cálculo de integrales impropias.

Determine si convergen o divergen cada una de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$

3. $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen}(2\theta)\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx, \quad a \in I\!R.$

6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-3}{x-1}dx$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$

9. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dy}{y\ln^2 y}$

10. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2-1}dx$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx$

13. $\displaystyle\int_0^e \ln x dx$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

19.2. Otros ejercicios.

1. Determine el o los valores de k para los cuales la integral $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dy}{y\left(\ln y\right)^k}$ converge.

2. Verifique que las integrales impropias $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ y $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x+2}dx$ divergen y que $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{x+2}\right) dx$ converge.

3. Verifique que las integrales impropias $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{3}{x+2}dx$ y $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{3}{x+2}\right) dx$ son divergentes.

   Nota: Los ejercicios 2 y 3 muestran que en caso que las integrales $\displaystyle\int_a^{\infty} f\left(x\right) dx$ y $\displaystyle\int_a^{\infty} g\left(x\right) dx$ sean divergentes, la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} \left[f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right] dx$ puede ser convergente o divergente.

Parte 6

Anexo: Sumas de Riemann

20. Introducción histórica

El problema del cálculo de áreas planas y de volúmenes de sólidos se remonta a los tiempos de los griegos. Básicamente existían dos tipos de métodos: los métodos *heurísticos* o *atómicos*, y los métodos de *exhausción.*

Los métodos *heurísticos* se basaban en la teoría atomista de Demócrito, que consideraba una línea, superficie o volumen como formada de un gran (aunque finito) número de átomos. Se trataba entonces, de sumar todos sus átomos para calcular su longitud, superficie o volumen. Con este método, Demócrito calculó por primera vez los volúmenes del cono y la pirámide.

Los métodos de *exhausción* trataban de forma más rigurosa el cálculo de áreas y volúmenes, realizando demostraciones exhaustivas de los resultados, pero tenían la desventaja de la necesidad de conocer el resultado para poder demostrarlo. Estos métodos fueron típicos de la Matemática griega y renacentista.

La obra de Arquímedes fue la mayor aportación de la matemática griega al cálculo integral. Entre sus resultados se encuentran el área de un segmento de parábola, el área de la elipse, el volumen y área lateral de esferas, conos y pirámides, las relaciones entre el área de la esfera y la longitud del ecuador, entre el volumen de la esfera y el del cilindro circunscrito. Arquímedes utilizó ambos tipos de métodos.

Los problemas de cálculo de áreas resurgieron en el siglo XVII por las necesidades de la Mecánica. Johann Kepler calcula el volumen de determinadas vasijas obtenidas a partir de la revolución de segmentos de cónicas: un círculo está formado por una infinidad de triángulos con un vértice común en el centro. Era un método más heurístico y menos riguroso que el de Arquímedes.

En el siglo XVII el principio de Cavalieri establece que dos sólidos con la misma curva de altura tienen el mismo volumen si las secciones planas de igual altura tienen la misma área. Este principio permitió integrar polinomios.

En 1670 el matemático Barrow descubre un método general para calcular tangentes y formula la relación entre la tangente y el área, aunque parece que ¡no fue consciente de la importancia de su descubrimiento!

El reconocimiento del problema del cálculo de áreas como el inverso del cálculo de diferenciales, se debe a Newton y Leibniz. Newton sí se dio cuenta de la relación existente entre los dos problemas, unificándolos en el *cálculo de fluxiones*. Newton calculó áreas por antidiferenciación, dando el primer enunciado explícito del teorema fundamental del Cálculo. Independientemente, Leibniz llega a los mismos resultados, pero considerando la integración como una suma. Leibniz introdujo además la moderna notación de $\int_a^b f(x)\,dx$.

El Cálculo Integral fue asentado de forma rigurosa a partir de la noción de límite de Cauchy. Pero la integral de Cauchy sólo era válida para funciones continuas en intervalos cerrados y acotados. Esto dejaba fuera muchas funciones, así que fue Riemann quien definió la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones integrables a las funciones continuas salvo en un número numerable de discontinuidades; pero la relación entre derivación e integración deja de ser válida en los puntos de discontinuidad.

21. La notación sigma

A la notación $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} f(k)$ se le llama notación sigma, debido a que el símbolo $\sum$ corresponde a la letra sigma mayúscula del alfabeto griego.

Su importancia recae en el hecho que permite expresar desarrollos de sumas en forma compacta.

Así por ejemplo, la suma $\displaystyle\sum_{k=3}^{5}(2k+1)$, nos indica que sumaremos los números de la forma $2k+1$, con k variando de 3 a 5, es decir:

$$(2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1)+(2\cdot 5+1)=7+9+11=27$$

por lo tanto, $\displaystyle\sum_{k=3}^{5}(2k+1)=27$.

Por otra parte, considere la suma:

$$4+9+16+25+36+\ldots+625$$

Si queremos expresar la suma anterior de una forma compacta, debemos buscar un patrón en todos los sumandos. Para este caso, observe que todos los sumandos corresponden al cuadrado de un número entero:

$$2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\ldots+25^2$$

Así, podemos expresar la suma anterior empleando la notación sigma como:

$$\sum_{k=2}^{25} k^2$$

Un detalle importante es que la variable que se emplee en la suma no es significativa en el sentido que $\displaystyle\sum_{k=2}^{25} k^2$ y $\displaystyle\sum_{i=2}^{25} i^2$, representan la misma suma.

En general, una expresión de la forma $\sum\limits_{k=p}^{n} f(k)$, donde $f(k)$ es una función en términos de k, representa una suma y se cumple que:

$$\sum_{k=p}^{n} f(k) = f(p) + f(p+1) + \ldots + f(n)$$

Ejemplo: Veamos el desarrollo de algunas sumas:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} f\left(2+i\cdot\frac{1}{2}\right) = f(2)+f\left(2+\frac{1}{2}\right)+f(2+1)+f\left(2+\frac{3}{2}\right) = f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)$

Ejemplo: Veamos el uso de la notación sigma.

- $\displaystyle 2+2+2+2+2+2+2+2 = \sum_{k=1}^{8} 2$
- $\displaystyle 2+4+6+8+10+12 = \sum_{i=1}^{6} 2i$
- $\displaystyle f(1)+f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right) = \sum_{j=0}^{3} f\left(1+\frac{j}{4}\right)$

Sin embargo, ¿cómo calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{1000} i$? Obviamente no desarrollaremos esta suma. Primero veremos algunas propiedades que nos ayuden a realizar el cálculo de forma directa.

Teorema: (Propiedades de las sumas)

1. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (f(k)+g(k)) = \sum_{k=p}^{n} f(k) + \sum_{k=p}^{n} g(k)$
2. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} c\cdot f(k) = c\cdot\sum_{k=p}^{n} f(k)$ con c constante real.

Además, las siguientes son fórmulas que aplicaremos para simplificar cálculos.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = n\cdot c$ con $c \in \mathbb{R}$.

   Justificación:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{n \text{ veces}} = n\cdot c$$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Justificación:

Desarrollaremos la suma anterior en forma ascendente y en forma descendente, para luego sumar ambos miembros de las igualdades que quedan determinadas, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & \multicolumn{11}{c}{\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}}
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n\,(n+1) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

   La justificación de esta propiedad la omitiremos.

Ejemplo: Calculemos, utilizando el teorema y las propiedades anteriores, las sumas siguientes:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{30} 2i = 2\sum_{i=1}^{30} i = 2\cdot\frac{30\,(30+1)}{2} = 930$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} \left(5i^2+2i+3\right) = \sum_{i=1}^{15} 5i^2 + \sum_{i=1}^{15} 2i + \sum_{i=1}^{15} 3 = 5\sum_{i=1}^{15} i^2 + 2\sum_{i=1}^{15} i + \sum_{i=1}^{15} 3$. Luego:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} i^2 = \frac{15\,(15+1)\,(2\cdot 15+1)}{6} = 1240$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} i = \frac{15\,(15+1)}{2} = 120$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} 3 = 3\cdot 15 = 45$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{15} \left(5i^2+2i+3\right) = 5\cdot 1240 + 2\cdot 120 + 45 = 6485$$

Finalmente, ya podemos calcular $\sum_{i=1}^{1000} i$,

$$\sum_{i=1}^{1000} i = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\ 500$$

Observe que las fórmulas anteriores se aplican para cuando el índice de la suma comienza en uno, pero ¿cómo calculamos $\sum_{i=99}^{1000} (2i-3)$? Una posibilidad es:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=99}^{1000} (2i-3) &= \sum_{i=1}^{1000} (2i-3) - \sum_{i=1}^{98} (2i-3) \\
&= \sum_{i=1}^{1000} 2i - \sum_{i=1}^{1000} 3 - \left[\sum_{i=1}^{98} 2i - \sum_{i=1}^{98} 3\right] \\
&= 2\sum_{i=1}^{1000} i - \sum_{i=1}^{1000} 3 - \left[2\sum_{i=1}^{98} i - \sum_{i=1}^{98} 3\right] \\
&= 2 \cdot \frac{1000 \cdot 1001}{2} - 3 \cdot 1000 - \left(2 \cdot \frac{98 \cdot 99}{2} - 3 \cdot 98\right) \\
&= 988\,592
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sum_{i=99}^{1000} (2i-3) = 988\,592$.

Otra forma semejante de resolver el problema es manipular la variación del índice de la suma. Por ejemplo, para $\sum_{i=99}^{1000} (2i-3)$, si queremos que el índice comience en uno (para aplicar las fórmulas anteriores) debemos cambiar la variación del índice de 1 a 902 (disminuir los extremos en 98 unidades), pero para no alterar la suma debemos incrementar la variable de la función esta misma cantidad de veces. Para este caso:

$$\sum_{i=99}^{1000} (2i-3) = \sum_{i=1}^{902} (2(i+98)-3) = \sum_{i=1}^{902} (2i+193)$$

Observe que ambas expresiones generan la misma suma, en efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=99}^{1000} (2i-3) &= (2 \cdot 99 - 3) + (2 \cdot 100 - 3) + \ldots + (2 \cdot 1000 - 3) = 195 + 197 + \ldots + 1997 \\
\sum_{i=1}^{902} (2i+193) &= (2 \cdot 1 + 193) + (2 \cdot 2 + 193) + \ldots + (2 \cdot 902 + 193) = 195 + 197 + \ldots + 1997
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=99}^{1000}(2i-3) &= \sum_{i=1}^{902}(2i+193)\\ &= \sum_{i=1}^{902}2i+\sum_{i=1}^{902}193 = 2\sum_{i=1}^{902}i+\sum_{i=1}^{902}193\\ &= 2\cdot\frac{902\cdot 903}{2}+193\cdot 902 = 988\,592\end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo, relativo a la técnica explicada anteriormente.

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\sum_{i=15}^{186}\left(i^2-3\right)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=15}^{186}\left(i^2-3\right) &= \sum_{i=1}^{172}\left((i+14)^2-3\right) = \sum_{i=1}^{172}\left(i^2+28i+193\right)\\ &= \sum_{i=1}^{172}i^2+\sum_{i=1}^{172}28i+\sum_{i=1}^{172}193\\ &= \frac{172\,(172+1)\,(2\cdot 172+1)}{6}+28\frac{172\cdot(172+1)}{2}+193\cdot 172\\ &= 2160\,750\end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{i=15}^{186}\left(i^2-3\right) = 2160\,750.$

22. El origen de la integral: la primera mitad del siglo XVII

Nos situamos a comienzos del siglo XVII , justamente después de la aparición del concepto de función, cuando comienza a tomar forma el cálculo, que junto con la Geometría Analítica es "la mayor creación de todas las matemáticas".

En aquella época había cuatro tipos de problemas principalmente:

1. Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cada instante; y, al revés, dada la fórmula de la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surge directamente del estudio del movimiento.

2. Obtener la tangente a una curva, como consecuencia de las aplicaciones de la óptica y el estudio del movimiento.
3. Obtener el valor máximo o mínimo de una función para aplicarlo al problema del tiro parabólico y el estudio del movimiento de los planetas.
4. Obtener longitudes de curvas, las áreas acotadas por curvas, los volúmenes acotados por superficies, los centros de gravedad y la atracción gravitatoria entre cuerpos extensos.

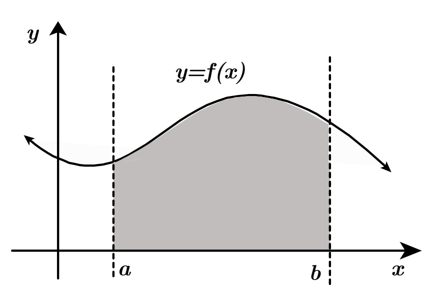
En aquel entonces aún no había constancia de la estrecha relación que hay entre los cuatro problemas anteriores: el concepto de integral.

Con respecto al último problema, los griegos ya habían aplicado métodos exhaustivos para el cálculo de áreas y volúmenes. A pesar del hecho de que lo aplicaban para áreas y volúmenes relativamente sencillos, tenían que utilizar mucha ingeniosidad, porque al método le faltaba generalidad, y no obtuvieron respuestas numéricas muy a menudo. Fue con los trabajos de Arquímedes con los que se volvió a despertar en Europa el interés por obtener longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad. El método *exhaustivo* se modificó primero gradualmente, y después radicalmente por la invención del Cálculo.

Así como los griegos utilizaban diferentes tipos de figuras aproximantes rectilíneas, en el siglo XVII adoptaron un procedimiento sistemático utilizando rectángulos.

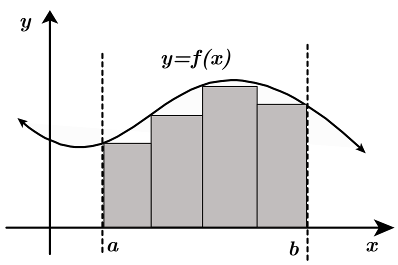
23. Integral definida

Recordemos que las derivadas nacen como consecuencia del problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva dada, en un punto. Las integrales no se escapan de un origen similar. El problema que dio origen a las integrales es el de determinar el área limitada por la gráfica de una **función no negativa** en un intervalo $[a, b]$, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x, como se muestra en la siguiente figura.

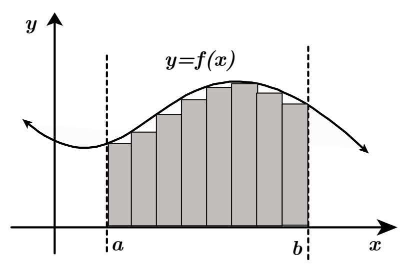


El cálculo de áreas de figuras limitadas por curvas no es un problema que se pueda resolver con matemática elemental. Su solución provocó el nacimiento de las integrales.

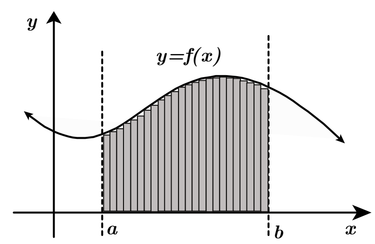
Primeramente, se comenzó realizando una serie de aproximaciones al área descrita, utilizando rectángulos. Para esto, se realizó una partición del intervalo $[a, b]$, para luego aproximar dicha área con la suma de las áreas de dicha serie de rectángulos, como se muestra en las figuras siguientes:



4 rectángulos



8 rectángulos



24 rectángulos

Notemos que conforme se trazan más rectángulos dentro del intervalo, mejor es la aproximación del área bajo la curva.

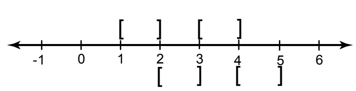
De este modo, cuando el número de rectángulos tiende a ser infinito, la suma de todas las áreas de dichos rectángulos coincide con el área total de la región.

Si iniciamos realizando una partición regular (todos los subintervalos de la misma longitud) del intervalo $[a, b]$, la longitud de cada subintervalo será $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$.

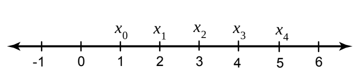
Ejemplo: Si se quiere dividir el intervalo $[1, 5]$ en 4 subintervalos de igual longitud, entonces la longitud de cada uno de ellos será $\dfrac{5-1}{4} = 1$, y estos vendrían dados por:

$$[1, 2]\,,\ [2, 3]\,,\ [3, 4]\ \text{ y }\ [4, 5]$$

gráficamente:



Observe que la partición regular realizada al intervalo $[1, 5]$, en 4 subintervalos, generó una sucesión de $(4 + 1)$ puntos igualmente espaciados: $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.



En general, la partición de un intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual tamaño, Δ_x, genera una sucesión de $n+1$ puntos igualmente espaciados:

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b \qquad (*)$$

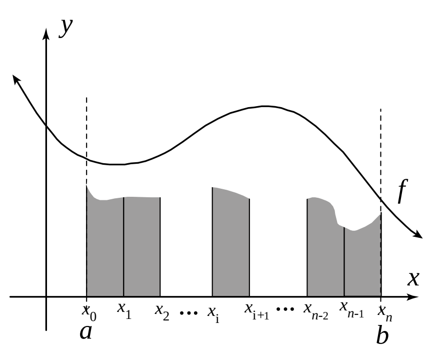
Analicemos los elementos de la sucesión generada en el ejemplo anterior. Observe que:

$$\begin{aligned} x_0 &= a = 1 \\ x_1 &= a + 1 \cdot \Delta_x = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ x_2 &= a + 2 \cdot \Delta_x = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\ x_3 &= a + 3 \cdot \Delta_x = 1 + 3 \cdot 1 = 4 \\ x_4 &= a + 4 \cdot \Delta_x = 1 + 4 \cdot 1 = 5 = b \end{aligned}$$

En general, para la sucesión dada en $(*)$, el elemento x_i quedaría determinado por:

$$x_i = a + i \cdot \Delta_x$$

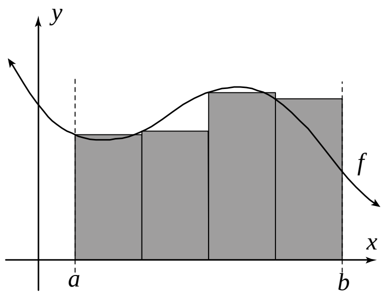
Finalmente, esta sucesión a su vez genera una sucesión de n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots,$ $[x_{n-1}, x_n]$, los cuales constituirán las bases de los rectángulos de aproximación.



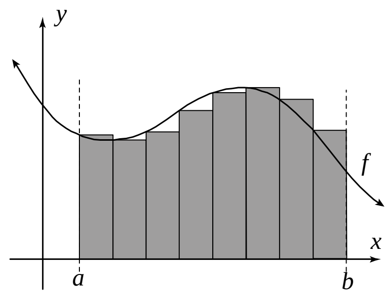
23.1. Trabajando con los extremos izquierdos.

Realizaremos una primera aproximación del área bajo la curva, trabajando con los extremos izquierdos de cada uno de los rectángulos de aproximación. Tomaremos como altura la imagen del extremo izquierdo de cada subintervalo. A continuación se presenta gráficamente esta situación para

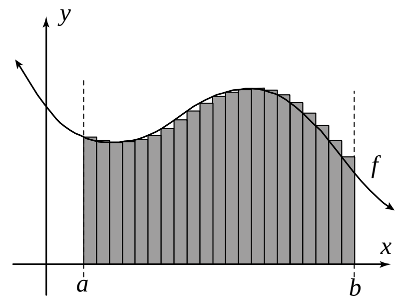
4, 8 y 21 rectángulos de aproximación.



4 rectángulos

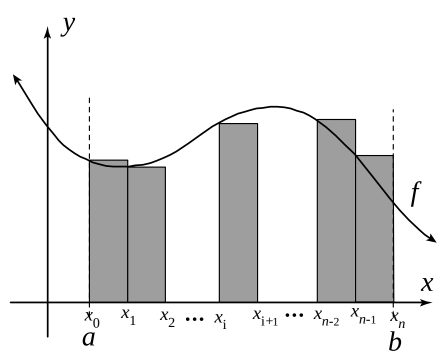


8 rectángulos



21 rectángulos

En general, tendríamos que:

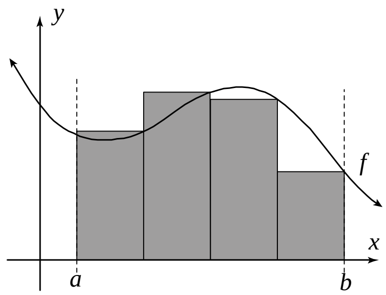


Observe que el área del primer rectángulo sería $f(x_0)\cdot\Delta_x$, el área del segundo rectángulo $f(x_1)\cdot\Delta_x$, el área del $i-ésimo$ rectángulo $f(x_i)\cdot\Delta_x$ y el área del $n-ésimo$ es $f(x_{n-1})\cdot\Delta_x$. Así, la aproximación del área bajo la curva vendría dada por:

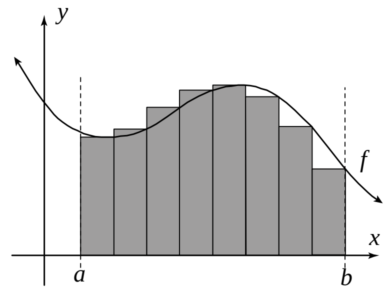
$$f(x_0)\cdot\Delta_x + f(x_1)\cdot\Delta_x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta_x = \sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)\cdot\Delta_x\right]$$

23.2. Trabajando con los extremos derechos.

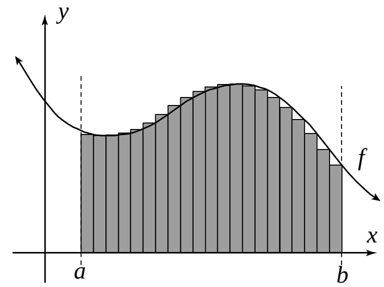
Trabajar con los extremos derechos de cada uno de los rectángulos de aproximación consiste en tomar como altura la imagen del extremo derecho de cada subintervalo. A continuación se presenta gráficamente esta situación para 4, 8 y 21 rectángulos de aproximación.



4 rectángulos

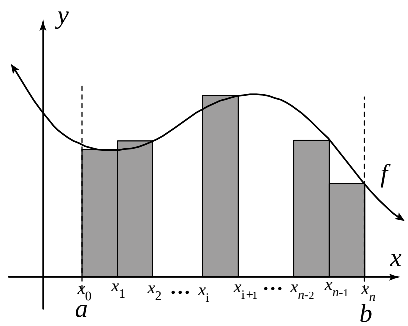


8 rectángulos



21 rectángulos

En general, tendríamos que:



Observe que el área del primer rectángulo sería $f\left(x1\right)\cdot\Delta_x$, el área del segundo rectángulo $f\left(x_2\right)\cdot\Delta_x$, el área del $i-ésimo$ rectángulo $f\left(x_{i+1}\right)\cdot\Delta_x$ y el área del $n-ésimo$ es $f\left(x_n\right)\cdot\Delta_x$. Así, la aproximación del área bajo la curva vendría dada por:

$$f\left(x_1\right)\cdot\Delta_x+f\left(x2\right)\cdot\Delta_x+\ldots+f\left(x_n\right)\cdot\Delta_x=\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i\right)\cdot\Delta_x\right]$$

Logramos determinar el área bajo la curva haciendo que la cantidad de subintervalos tienda a infinito, así definimos el área bajo una curva no negativa en un intervalo $[a,b]$ como:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i\right)\cdot\Delta_x\right]$$

o bien

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i\right)\cdot\Delta_x\right]$$

Este límite (ambos son equivalentes) se denota como $\displaystyle\int_a^b f\left(x\right)dx$, la cual se conoce como **la integral definida** de f en $[a,b]$. Los números a y b se denominan límites de integración, al intervalo $[a,b]$

intervalo de integración y a f se le denomina función integrando.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\cdot\Delta_x\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)\cdot\Delta_x\right]$$

23.3. En general.

Este proceso de aproximación se denomina Sumas de Riemann.

El abordaje de las Sumas de Riemman se puede realizar desde un punto de vista más general, en la que la partición del intervalo $[a,b]$ no sea regular. Así hablaríamos de que la longitud del $i-\textit{ésimo}$ rectángulo será Δ_{x_i}. Además la altura de cada uno de los rectángulos de aproximación se tomará con base en un punto arbitrario (denominado punto muestra) dentro de cada uno de los subintervalos. Así en el $i-\textit{ésimo}$ intervalo tomaríamos como altura $f(x_i^*)$, con x_i^* un punto arbitrario en $[i, i+1]$.

Por otra parte, denotamos con $\|P\|$ la máxima de todas las longitudes de los subintervalos. Siendo n la cantidad de subintervalos, entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

- $n \to \infty$
- $\|P\| \to 0$

Así, más en general se define la integral definida de f en $[a,b]$ como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i^*)\cdot\Delta_{x_i}\right]$$

Sin embargo, para efectos de este documento trabajaremos únicamente con los extremos izquierdos o derechos de los subintervalos.

Ejemplo: Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{1}(1-x)\,dx$.

Solución: Trabajemos con el intervalo $[-3,1]$. Partiendo el intervalo anterior en n subintervalos de igual longitud, la longitud de cada uno de ellos es $\Delta_x = \dfrac{1--3}{n} = \dfrac{4}{n}$. Luego, trabajando con los extremos derechos, se tendría que:

$$\int_{-3}^{1}(1-x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\cdot\Delta_x\right]$$

Donde $x_i = a + i \cdot \Delta_x = -3 + \dfrac{4i}{n}$.

Como $f(x_i) = 1 - x_i = 1 - \left(-3 + \dfrac{4i}{n}\right) = 4 - \dfrac{4i}{n}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \Delta_x\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(4 - \frac{4i}{n}\right)\frac{4}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[4 - \frac{4i}{n}\right]\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 4 - \sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n}\left(4n - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n}\left(4n - \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[16 - \frac{8(n+1)}{n}\right] = 8
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{-3}^{1} (1 - x)\, dx = 8$.

En el ejemplo anterior, la integral definida $\displaystyle\int_{-3}^{1} (1 - x)\, dx$, representa el área limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = -3$ y $x = 1$, pues $f(x) = 1 - x$ no es negativa en el intervalo $[-3, 1]$. En efecto, $1 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1$.

Tomando en cuenta que las fórmulas dadas para sumas comienzan en uno, es siempre cómodo trabajar con los extremos derechos de los subintervalos. Si este ejercicio lo hubiéramos resuelto utilizando los extremos izquierdos obtendríamos:

$$\int_{-3}^{1} (1 - x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_i) \cdot \Delta_x\right]$$

que se transforma en:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) \cdot \Delta_x\right]$$

Donde $x_{i-1} = a + (i - 1) \cdot \Delta_x = -3 + \dfrac{4(i - 1)}{n} = -3 + \dfrac{4i}{n} - \dfrac{1}{n}$.

Como $f\left(x_{i-1}\right)=1-x_{i-1}=1-\left(-3+\dfrac{4i}{n}-\dfrac{1}{n}\right)=4-\dfrac{4i}{n}+\dfrac{1}{n}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_{i-1}\right)\cdot\Delta_x\right] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(4-\frac{4i}{n}+\frac{1}{n}\right)\frac{4}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[4-\frac{4i}{n}+\frac{1}{n}\right]\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}4-\sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\left(4n-\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n}\cdot n\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\left(4n-\frac{4}{n}\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2}+1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[16-\frac{8\left(n+1\right)}{n}+\frac{4}{n}\right]=8
\end{aligned}$$

Así, obtenemos el mismo resultado.

Ejemplo: Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(4-x^2\right)dx$.

Solución: Trabajemos con el intervalo $[-1,1]$. Partiendo el intervalo anterior en n subintervalos de igual longitud, la longitud de cada uno de ellos es $\Delta_x=\dfrac{1--1}{n}=\dfrac{2}{n}$. Luego, trabajando con los extremos derechos, se tendría que:

$$\int_{-1}^{1}\left(4-x^2\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i\right)\cdot\Delta_x\right]$$

Donde $x_i=a+i\cdot\Delta_x=-1+\dfrac{2i}{n}$.

Como $f\left(x_i\right)=4-x_i^2=4-\left(-1+\dfrac{2i}{n}\right)^2=4-\left(1-\dfrac{4i}{n}+\dfrac{4i^2}{n^2}\right)=3+\dfrac{4i}{n}-\dfrac{4i^2}{n^2}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i\right)\cdot\Delta_x\right] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(3+\frac{4i}{n}-\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3+\frac{4i}{n}-\frac{4i^2}{n^2}\right]\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}3+\sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}\left(3n+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}\left(3n+\frac{4}{n}\cdot\frac{n\left(n+1\right)}{2}-\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[6+\frac{4\left(n+1\right)}{n}-\frac{4\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{3n^2}\right]=\frac{22}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(4-x^2\right)dx=\frac{22}{3}$.

Como $4-x^2\geq 0\iff x\in[-2,2]$, entonces el área limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x=-1$ y $x=1$, es $\dfrac{22}{3}\left(ul\right)^2$.

Nota final: El proceso anterior para el cálculo de $\int_a^b f(x)\,dx$ se generaliza para cualquier función definida y acotada en un intervalo $[a,b]$. Sin embargo, en estos casos el número obtenido no necesariamente representa un área.

23.4. Referencia de los aspectos históricos.

Autor desconocido. *La integral de Riemann, Visualización del proceso (java)*. Consultado el día 18 de mayo del 2007 en la dirección:
http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/tutoriales/integracion/

Parte 7

Soluciones

Soluciones Parte 1

Sección 1 (Análisis y construcción de gráficas)

1.(a)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ No existe.

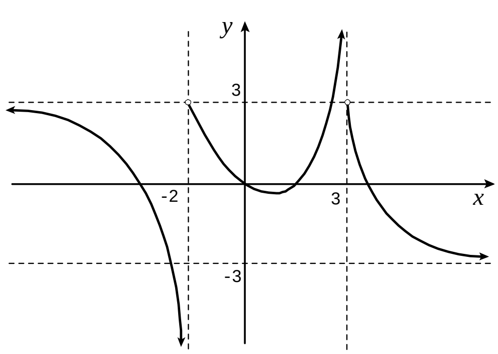
1.(b)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to2} f(x) = +\infty$

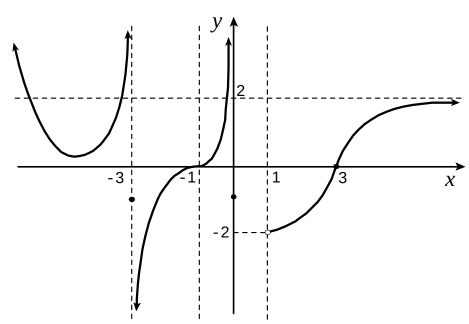
1.(c)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$
- $f(2) = 1$
- $f(0) = 2$

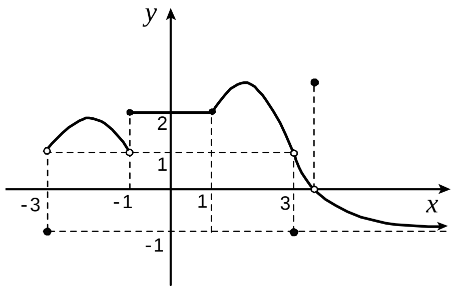
2.



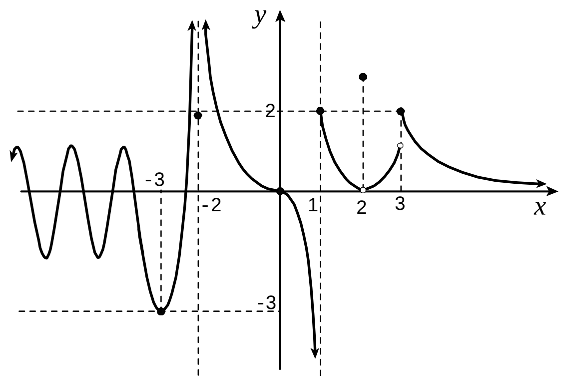
(a)



(b)



(c)



(d)

Sección 2 (Conceptos teóricos)

1. $x \neq 3$.
2. No es posible.
3. Sí.
4. $\forall a, a \in I\!R - \{-1, -3\}$
5. Se omite.
6. Se omite.
7. $a = 15$.
8. a) $\dfrac{19}{2}$ y b) $a \in I\!R$.
9. $k = \dfrac{1}{2}$
10. $a = b = 4$.
11. $\dfrac{3}{4}$
12. 3
13. -8
14. Se omite.
15.
    a) Falso.
    b) Verdadero.
    c) Verdadero.
    d) Falso.
    e) i) Verdadero. ii) Falso.
16. Se omite.
17. Se omite.
18. f no es continua en -1 y $m = \dfrac{3}{2}$.
19. $k = 2$ ó $k = -2$.
20. $b = 1$ y $k = 3$.
21.
    a) $(a = 2$ y $b = 1)$ ó $(a = -2$ y $b = -1)$
    b) $a = 2$ y $b = 1$.
22. $a = 0$, $b = 2$ y $c = \dfrac{-1}{15}$.
23. $k = 5$.
24. $a = 1$ y $b = 6$.
25. Se omite.

Sección 3 (Cálculo de límites)

1. $\frac{-1}{320}$
2. 0
3. -40
4. $\frac{1}{32}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\frac{c}{3}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $-\frac{45}{2}$
9. $\frac{5}{4}$
10. 0
11. $\frac{\sqrt{2a}}{2a}$
12. $-\frac{5}{2}$
13. $\frac{3}{8}$
14. $\frac{20}{3}$
15. 2
16. -7
17. $+\infty$
18. $\frac{-1}{4}$
19. 0
20. $\frac{4}{5}$
21. $\frac{-1}{2}$
22. $-\frac{3}{4}$
23. $-\infty$
24. $-\frac{1}{4}$
25. $+\infty$
26. -2
27. 0
28. $\frac{1}{2}$
29. No existe
30. $\frac{3}{2}$
31. 1
32. 0
33. $\frac{3}{4}$
34. No existe
35. No existe
36. 1
37. $-\frac{1}{3}$
38. $-\infty$
39. $+\infty$
40. $\frac{3}{2}$
41. -4
42. $-\frac{1}{2}$
43. $-\infty$
44. 0
45. $+\infty$
46. $\frac{1}{9}$
47. No existe
48. $-\frac{1}{2}$
49. $\frac{-9}{2}$
50. $-\frac{1}{4}$
51. $\frac{3}{2}$
52. No existe
53. No existe y 0, respectivamente.
54. $-\operatorname{sen} x$
55. 1
56. $\frac{1}{4}$

Soluciones Parte 2

Sección 4 (Definición de derivada)

1.
   a) $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$
   b) $g(x) = 2cx + b$
   c) $h(x) = \frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$
   d) $f(x) = 2\cos(2x)$
2. Se omite.
3. Se omite.
4. Se omite.
5. $a = 2$ y $f(x) = x^6$.
6. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f'(x) = x^2 + 1$.

Sección 5 (Reglas de derivación y regla de la cadena)

1. Se omite.

2.

(a) $p'(u) = -12ku^2 \cos^3\left[\operatorname{sen}\left(ku^3\right)\right] \cdot \operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}\left(ku^3\right)\right] \cdot \cos\left(ku^3\right)$

(b) $h'(x) = e^{\cos x} \cdot -\operatorname{sen}(x) \cdot \tan(\ln x) + e^{\cos x} \cdot \sec^2(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$

(c)
$$f'(x) = \frac{\left[e^{5^x} \cdot 5^x \cdot \ln(5) - 2\tan\left(x^2+1\right) \cdot \sec^2\left(x^2+1\right) \cdot 2x\right]\left[\operatorname{sen}^5(2x)+\cos(-x)\right] - \left[5\operatorname{sen}^4(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 + -\operatorname{sen}(-x) \cdot -1\right]\left[e^{5^x} - \tan^2\left(x^2+1\right)\right]}{\left[\operatorname{sen}^5(2x)+\cos(-x)\right]^2}$$

(d) $g'(u) = \frac{\sec\left(u^3\right) \cdot \tan\left(u^3\right) \cdot 3u^2 + \sec^2\left(u^3\right) \cdot 3u^2}{\sec(u^3)+\tan(u^3)}$

(e) $g'(w) = \sec^2\left(\frac{w^2}{2w+3}\right) \cdot \left[\frac{2w(2w+3)-2w^2}{(2w+3)^2}\right]$

(f) $f'(w) = \frac{1}{2(w-1)} - \frac{3}{w} + \frac{\operatorname{sen}\left(w^2\right) \cdot 2w}{\cos(w^2)}$

(g) $h'(z) = 2\arccos\left(\frac{e^{-z}}{z}\right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{e^{-z}}{z}\right)^2}} \cdot \frac{-ze^{-z}-e^{-z}}{z^2}$

(h) $f'(x) = \frac{3\cos^2(\arctan(3x)) \cdot -\operatorname{sen}(\arctan(3x)) \cdot \frac{3}{1+9x^2} \cdot \sqrt{\ln(x^3+2^x)}}{} + \frac{3x^2+2^x\ln(2)}{2\sqrt{\ln(x^3+2^x)}(x^3+2^x)} \cos^3(\arctan(3x))$

(i) $w'(x) = \frac{\left[6\tan^5\left(g\left(x^2+6x\right)\right)\sec^2\left(g\left(x^2+6x\right)\right)g'\left(x^2+6x\right)(2x+6)\right]\ln(7^x+1) - \frac{7^x\ln(7)}{7^x+1}\tan^6\left(g\left(x^2+6x\right)\right)}{\ln^2(7^x+1)} - \frac{6\arcsin(3x+5)}{\sqrt{1-(3x+5)^2}}$

(j) $h'(x) = \frac{4\tan^3\left(3^{g\left(x^3+4\right)}\right) \cdot \sec^2\left(3^{g\left(x^3+4\right)}\right) \cdot 3^{g\left(x^3+4\right)} \cdot \ln(3) \cdot g'\left(x^3+4\right) \cdot 3x^2}{\tan^4\left(3^{g(x^3+4)}\right)+1}$

3. *a*) $(f \cdot g)'(5) = 8$ y $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(5) = 8$.
   b) $f'(1) = \dfrac{3}{2}$.
   c) $h'(0) = 3\ln 2$.
   d) $f'(3) = \dfrac{-1}{6}$.

4. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 7\ 100\ 160$.

5. Se omite.

6. $f'(x) = \dfrac{x^2}{8}$.

7. Se omite.

8. Se omite.

Sección 6 (Derivadas de orden superior)

1.
   a) $y''' = \dfrac{-12}{(1+x)^4}$.
   b) $y^{(4)} = 81e^{-3x}$.

2.
   a) Se omite.
   b) $A = B = \dfrac{-1}{2}$ y $C = \dfrac{-3}{4}$.

3.
   a) Se omite.
   b) $F'''(x) = f'''(x) \cdot g(x) + 3f''(x) \cdot g'(x) + 3f'(x) \cdot g''(x) + f(x) \cdot g'''(x)$

   $F^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) \cdot g(x) + 4f'''(x) \cdot g'(x) + 6f''(x) \cdot g''(x) + 4f'(x) \cdot g'''(x) + f(x) \cdot g^4(x)$.

Sección 7 (Derivación implícta)

1.
   a) $y' = \dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) + 1}$
   b) $y' = \dfrac{3x^2y + y\ln^2(y) - 2y^2e^{2x}}{y\cos(y) - 2x\ln(y) + ye^{2x}}$
   c) $y' = \dfrac{y}{x} + 2x^2 - 4xy + 2y^2$
2. Se omite
3. $y'' = \dfrac{-2y}{(y^2-2)^3}$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-2}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2y}{(y-2)^3}$
5. Se omite

Sección 8 (Problemas)

1. La recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{x}{9}$ en $(-2,3)$ y $(2,7)$. Posee rectas tangentes horizontales en $(1,3)$ y $(-1,7)$.
2. $y = x - 3e^{-2}$ y posee recta horizontal en $\left(e^{-1}, -e^{-1}\right)$.
3. $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $y = 2x^2 - x$.
5. $a = \dfrac{-1}{2}$ y $b = 2$.
6. $y = \dfrac{x-1}{2}$ y $y = \dfrac{x+7}{2}$.
7. 0.
8. $y = -2x + 11$ y $y = \dfrac{2x-29}{3}$.
9. 5.
10. 236.
11. $y = -x - 1$ y $y = 11x - 25$.
12. $y = 10x + 18$ y $y = x$.

Soluciones Parte 3

Sección 9

(Problemas de tasas relacionadas)

1. π cm^2/min
2. 900 cm^3/s.
3. $0,0796$ dm/s, aproximadamente.
4.
   a) $0,75$ m/h
   b) $\frac{3\pi}{4}$ m^2/h.
5.
   a) $-3,65$ m/s.
   b) $-5,613$ m^2/s.
   c) $-0,9869$ rad/s.
6. 25 m/min.
7. $4,2$ m/s.
8. $-66,67$ m/s.
9.
   a) $8,57$ unid/s.
   b) Descendiendo.
10. $0,8418$ cm/s, aproximadamente.
11. Disminuye a razón de $1,22$ m/s.
12. Aumenta a razón de $0,28$ m/min.
13. Aumenta a razón de $0,0625$ cm/s.
14.
    a) Disminuye a razón de 750 km/h.
    b) 20 min.
15. Disminuye a razón de $0,036$ rad/s.
16. Aumenta a razón de $3,44$ unid^2/s.

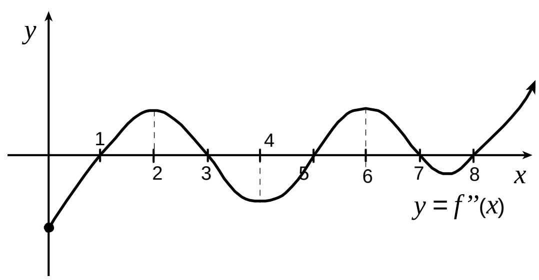
Sección 10

(Máximos y mínimos, trazo de curvas)

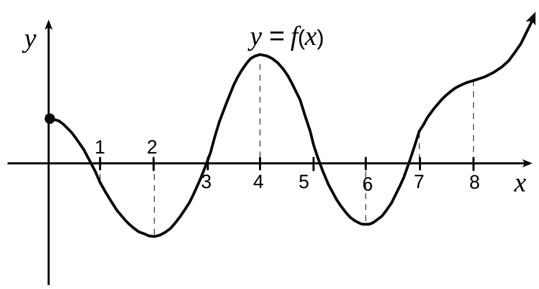
1. $a = -2$ y $b = 4$. Es un valor mínimo.
2. $a = \frac{2}{3}$ y $b = -1$.
3. $f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{-4}{3}x + \frac{7}{9}$
4.
   a) F
   b) F
   c) V
   d) F
   e) F
   f) V
   g) V
5. Se omite.
6. Se omite.
7.
   a) $c \in \left(\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[\right)$
   b) $c = \frac{1}{3}$ o $c = \frac{-1}{3}$.
   c) $c \in \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$
8. $a \in \left]\frac{-7}{2}, \frac{-5}{2}\right[$

Sección 11 (Graficación)

1. *a*) f crece en los intervalos: $]2,4[$ y $]6,+\infty[$, pues es donde $f'(x)$ es positiva.
   b) Únicamente en $x=4$, pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de este punto, hay cambio de signo de f' de positivo a negativo.
   c) En $x=2$ y $x=6$, pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hay cambio de signo de f' de negativo a positivo.
   d) f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]1,3[$, $]5,7[$ y $]8,+\infty[$, pues es donde f' es creciente.
   e) En $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=7$ y $x=8$, pues es donde f'alcanza máximos o mínimos relativos, o bien, f' no existe y hay cambio de monotonía de f'.
   f) Una posible gráfica para f''.



   g) Una posible gráfica para f.

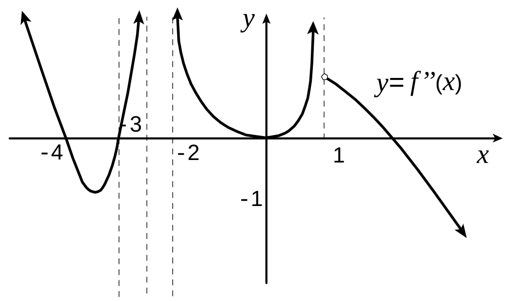


2.
   a) La gráfica de f decrece en los intervalos: $]-\infty,-4{,}5[$, $]-3{,}5,-2{,}5[$, $]-2,0[$ y $]1,+\infty[$, pues es donde $f'(x)$ es negativa.
   b) En $x=-3{,}5$, $x=-2$ y $x=1$, pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hay cambio de signo de f' de positivo a negativo.
   c) En $x=-4{,}5$, $x=-2{,}5$ y $x=0$; pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hay cambio de signo de f' de negativo a positivo.

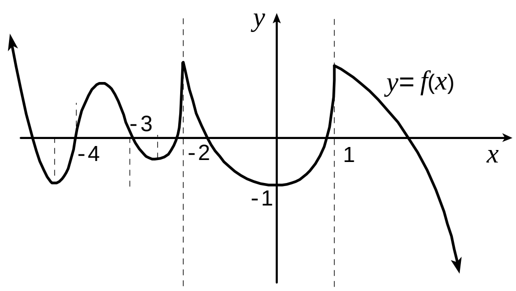
d) f es cóncava hacia abajo en los intervalos $]-4,-3[$ y $]1,+\infty[$, pues es f' es decreciente y por lo tanto $f''(x)$ es negativa.

e) En: $x=-4$, $x=-3$ y $x=1$, pues es donde f'alcanza máximos o mínimos, o bien, f' no existe y hay cambio de monotonía de f'.

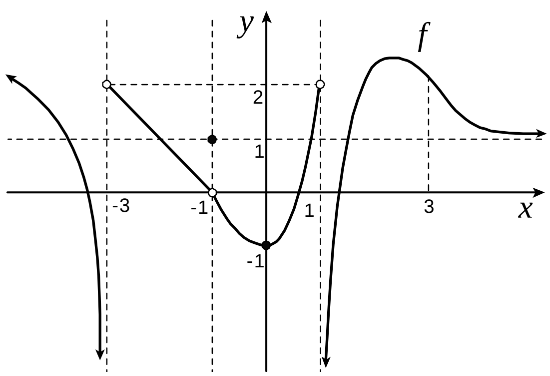
f) Una posible gráfica para f''.



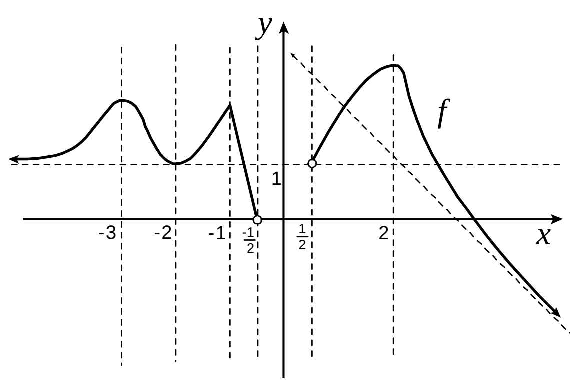
g) Una posible gráfica para f.



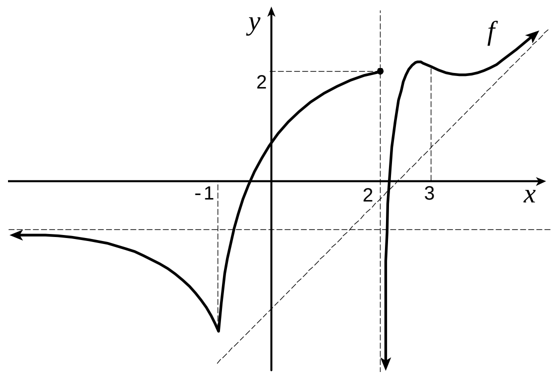
3. Gráficas:



(a)

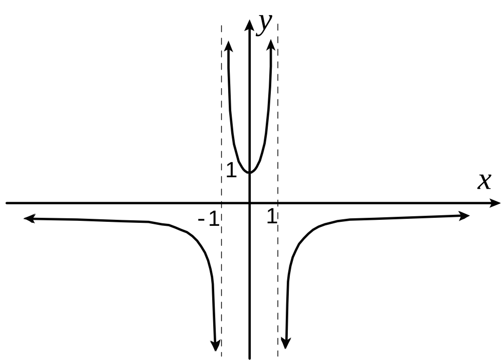


(b)

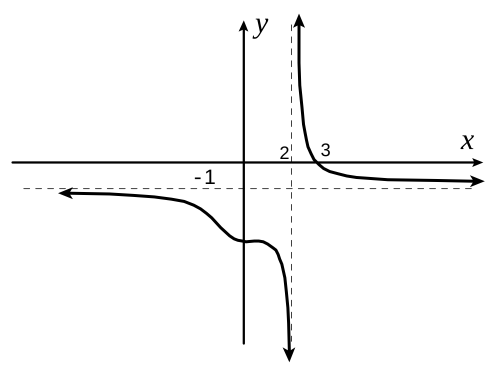


(c)

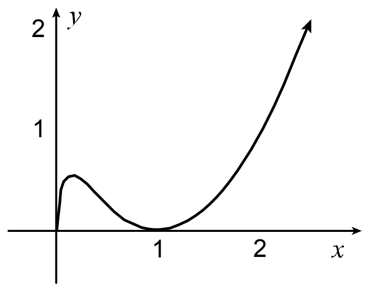
4. A.H. cuando $x \to +\infty$: $y = 0$, A.V.: $x = 0$, A.O. cuando $x \to -\infty$: $y = -x - 2$.
5. Una posible: $y = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x-2)}$.
6. Sólo $x = 0$. Justifique que la recta de ecuación $x = \dfrac{1}{5}$ no es asíntota vertical.
7. A.H. cuando $x \to +\infty$: $y = \dfrac{-\pi}{4}$, A.V.: $x = -3$, A.O. cuando $x \to -\infty$: $y = 4x$.
8.



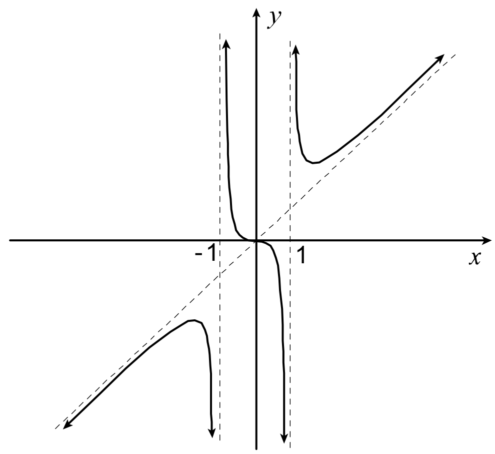
(a)



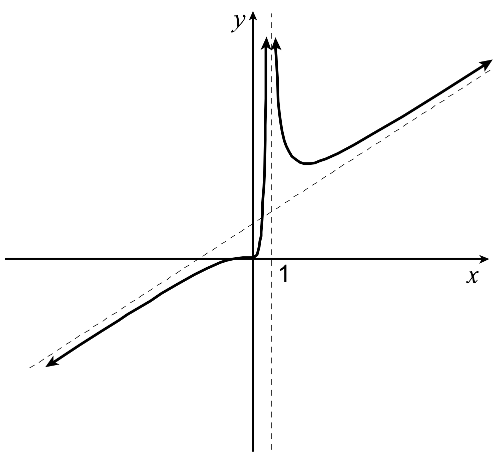
(b)



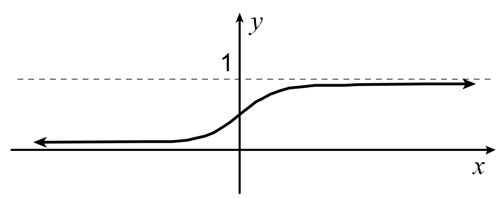
(c)



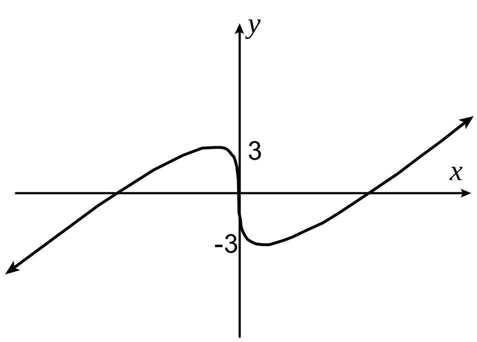
(d)



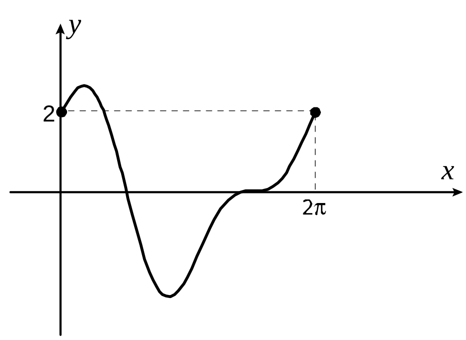
(e)



(f)



(g)



9.

Sección 12 (La regla de L'Hôpital)

Sección 12.1 (Conceptos teóricos)

1. Se omite.
2. $a+b+c+d=24$.
3. 56.
4. $a=\frac{4}{3}$ y $b=-2$.
5. $a=\frac{1}{2}$.
6. Se omite.
7. Se omite.
8. Se omite.

Sección 12.2 (Cálculo de límites)

1. $\frac{1}{3}$
2. -2
3. 2
4. $\frac{k+n}{n}$
5. 1
6. 2
7. $\frac{5}{2}$
8. $-\frac{3}{4}$
9. $-\infty$
10. e
11. 3
12. $\frac{n^2-m^2}{2}$
13. $\frac{-1}{4}$
14. $\frac{1}{4}$
15. $-\frac{1}{8}$
16. e^{-8}
17. 0
18. $\frac{1}{2}$
19. $-\pi$
20. e^3
21.
    a) Si $n=1$ entonces $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-(1+x)}{x^n}=0$
    b) Si $n=2$ entonces $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-(1+x)}{x^n}=\frac{1}{2}$
    c) Si $n\geq 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-(1+x)}{x^n}=+\infty$
22. 1

Sección 13 (Problemas de optimización)

1. 2 dm de largo, 2 dm de ancho y $\frac{4}{3}$ dm de alto.
2. $\left(\frac{45}{37},\frac{63}{37}\right)$
3. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ unid de largo por $\frac{16}{3}$ unid de alto.
4. $\frac{4\pi}{27}R^2H$.
5. 24 cm de base por 36 cm de altura.
6. (a) Todo el alambre se utiliza para formar el cuadrado. (b) El corte se hace a los $5,6504$ m, o bien, a los $4,3496$ m.
7. A las $2:21:36$ p.m.
8. $y=\frac{-5}{3}x+10$.
9. $0,5$ unid^2.
10. La base mayor 8 unid, la menor 4 unid y la altura $2\sqrt{3}$ unid.
11. 9 unid^2.
12. La base mide 6 cm y la altura $2,5$ cm.
13. $\frac{128000}{27}$ cm^3.
14. Correr $68,956$ m, nadar $50,364$ m; $1,955$ min.
15. El área de la zona rectangular es máxima cuando el largo mide 50 m y el ancho $\frac{100}{\pi}$ m. El área total es $\frac{7500}{\pi}$ m^2.
16. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}B^3$ unid^3.

Soluciones Parte 4

Sección 14 (Concepto de antiderivada)

1. Falso y verdadero, respectivamente.
2. $f(x) = 2xe^{2-x} - x^2e^{2-x}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 5x + C$

Sección 15.1

(Int. por sustitución e int. inmediatas)

1. $x - 1 + 2\ln|x-1| + C$
2. $\tan y + C$
3. $\ln(e^x + 1) + C$
4. $\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3 + 3x^2 + 9x + 1\right| + C$
5. $\dfrac{1}{\pi}\sec(\pi x) + C$
6. $-\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} + C$
7. $\dfrac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C$
8. $\dfrac{1}{12}\operatorname{sen}^6(2x) + C$
9. $-\dfrac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2} + C$
10. $e^{-\cot x} + C$
11. $\arctan(\operatorname{sen}\theta) + C$
12. $\dfrac{3}{5}(x+1)^{5/3} - \dfrac{3}{2}(x+1)^{2/3} + C$
13. $x^x + C$
14. $\dfrac{2}{3}(1+\sec x)^{3/2} + C$
15. $\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$
16. $-\dfrac{1}{2}\ln^2(\cos x) + C$

Sección 15.2 (Integración por partes)

1. $x\ln\sqrt{x} - \dfrac{x}{2} + C$
2. $\dfrac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\right] + C$
3. $-\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} + 2\arctan x + C$
4. $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$
5. $-x^2\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} + C$
6. $\dfrac{x^2e^{3x}}{3} - \dfrac{2xe^{3x}}{9} + \dfrac{2e^{3x}}{27} + C$
7. $\dfrac{x^2}{2}\arctan x + \dfrac{\arctan x}{2} - \dfrac{x}{2} + C$
8. $-\dfrac{x^2e^{-x^2}}{2} - \dfrac{e^{-x^2}}{2} + C$
9. $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$
10. $-\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$

Sección 15.3 (Integración trigonométrica)

1. $\dfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \dfrac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x + \dfrac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C$
2. $\dfrac{3}{8}t + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + \dfrac{1}{32}\operatorname{sen}(4t) + C$
3. $\dfrac{2}{7}\cos^{7/2} x - \dfrac{2}{3}\cos^{3/2} x + C$
4. $\dfrac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$
5. $\ln|1 + \operatorname{sen} x| + C$
6. $\dfrac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C$
   ó $\dfrac{1}{4}\tan^4 x - \dfrac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C$
7. $\dfrac{1}{2}\tan^2 x + C$
8. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C$

Sección 15.4

(Integración por sustitución trigonométrica)

1. $-\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{25x}+C$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x}\right|+C$
3. $\dfrac{1}{4}\operatorname{arcsen}(2x)+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C$
4. $\sqrt{9x^2-4}-2\operatorname{arcsec}(3x/2)+C$
5. $\dfrac{-1}{2(x^2+2x+4)}-\dfrac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}$
   $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$
6. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}}{3}\right|+C$
7. $\arctan(x+1)+C$
8. $\dfrac{-x}{4\sqrt{x^2-4}}+C$

Sección 15.5

(Integración por fracciones parciales)

1. $x-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$
2. $-\dfrac{1}{36}\ln|x+5|+\dfrac{1}{6(x+5)}+\dfrac{1}{36}\ln|x-1|+C$
3. $\ln|x+1|+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$
4. $\dfrac{1}{3}\ln|x-1|-\dfrac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)$
   $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$
5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$
6. $3\ln|x|+\dfrac{3}{2}\arctan\dfrac{x}{2}+\ln\left(x^2+4\right)+C$

Sección 15.6

(Integración por sustitución para racionalizar)

1. $\dfrac{4\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}{3}-4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$
2. $\dfrac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-2(x+1)+6\sqrt{x+1}$
   $-12\ln\left|\sqrt{x+1}+2\right|+C$
3. $\dfrac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3}-8\sqrt{x+3}$
   $+16\arctan\left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}\right)+C$
4. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$
5. $\dfrac{3}{10}\left(x^2+1\right)^{5/3}-\dfrac{3}{4}\left(x^2+1\right)^{2/3}+C$
6. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

Sección 15.7 (Práctica combinada)

1. $\dfrac{-\ln\left(1+x^2\right)}{x}+2\arctan(x)+C$
2. $\dfrac{1}{2}\ln^2(\ln x)+C$
3. $\dfrac{(1/2)^x}{\ln(1/2)}-2x+\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$
4. $\dfrac{2}{7}\sqrt{\operatorname{sen}(7x)-\cos(7x)}+C$
5. $\dfrac{-\sqrt{\arctan^3(2x)}}{3}+\dfrac{\ln\left(4x^2+1\right)}{8}+C$
6. $\dfrac{1}{2}\left(\cos y^2+y^2\operatorname{sen}y^2\right)+C$
7. $\dfrac{e^t}{2}\sqrt{9-e^{2t}}+\dfrac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(e^t/3\right)+C$
8. $\dfrac{\ln\left(x^2+4x+6\right)}{2}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+C$

9. $\frac{9}{16}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)-\frac{x}{8}\sqrt{9-4x^2}+C$

10. $\frac{x^3}{3}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3}\ln\left(x^2+4\right)+C$

11. $\frac{(2x+4)\sqrt{4x^2+16x+25}}{4}$ $+\frac{9}{4}\ln\left(\frac{(2x+4)+\sqrt{4x^2+16x+25}}{3}\right)+C$

12. $\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+2}\right|+C$

13. $x^2-\frac{\ln|x+2|}{2}+\frac{3\ln|x-4|}{2}+C$

14. $\frac{1}{2}\ln\left(4x^2+4x+5\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right)+C$

15. $26\ln|x-3|-22\ln|x-2|+\frac{9}{x-2}+C$

16. $\frac{2+2x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C$

17. $\ln|\sec(\ln(4z))+\tan(\ln(4z))|+C$

18. $3\operatorname{arcsen}\left(\frac{1-x}{3}\right)-\sqrt{8+2x-x^2}+C$

19. $2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$

20. $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$

21. $\frac{-3x^2}{2}+4x-\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)-4\arctan(x)+C$

22. $\frac{-\tan^4(1-u)}{4}-\frac{\tan^2(1-u)}{2}+C$

23. $\sqrt{x^2+2x}-\operatorname{arcsec}(x+1)+C$

24. $\frac{2x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}}+C$

25. $\frac{-w}{25\sqrt{4w^2-25}}+C$

26. $3\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)$ $+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

27. $e^x\ln(e^x+1)-e^x+\ln(e^x+1)+C$

28. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)$ $+\frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

29. $\ln\left|x-\sqrt{x-2}\right|$ $+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{\left(2\sqrt{x-2}-1\right)}{\sqrt{7}}\right)+C$

30. $\frac{-1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$

31. $-6\ln\left(\sqrt[6]{y}+1\right)+2\sqrt{y}-3\sqrt[3]{y}+6\sqrt[6]{y}+C$

32. $\frac{-2\ln(2x)}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}+C$

33. $\frac{4}{3}z^{3/4}-\frac{4}{3}\ln\left|z^{3/4}+1\right|+C$

34. $-5\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\operatorname{arcsen}x}\right)^3+C$

Sección 15.8 (Otros ejercicios)

1.
   a) $\frac{\arctan e^{-x}}{e^{-x}}-\ln e^{-x}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right)+C$

   b) $\operatorname{sen}x\cdot\arctan(\operatorname{sen}x)$ $-\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{sen}^2x+1\right)+C$

   c) $x\ln\left(x^2+2x+5\right)-2x+\ln\left(x^2+2x+5\right)$ $+4\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

2. Se omite.

3. Se omite.

4. $f(x)=12x^2+e^{2(x+1)}+12x-4$

5. $h(x)=\left(\frac{x^4}{8}+1\right)^2$

6. $f(2)=10$

Soluciones Parte 5

Sección 16

La solución del problema introductorio se omite.

Sección 16.1 (Los rectángulos de aproximación)

1.
   a) $A \approx 1{,}283\,3\ (ul)^2$.
   b) $A \approx 1{,}5746\ (ul)^2$.
   c) Se omite.
2.
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{16}{n\sqrt[3]{n}} \cdot \sqrt[3]{i}\right)$
   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\left(5 + \sqrt[3]{1 + \frac{7i}{n}}\right) \frac{7}{n}\right]$
   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\left(2 + \frac{4i}{n} + \ln\left(2 + \frac{4i}{n}\right)\right) \frac{4}{n}\right]$
3.
   a) $\int_0^{\pi} (x \operatorname{sen} x)\, dx$
   b) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$
4.
   a) $\frac{88}{3}$
   b) $-\frac{33}{2}$
   c) $-\frac{16}{3}$
5. Se omite.

Sección 17

Sección 17.1 (Teorema fundamental del cálculo)

1. $c \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
2.
   a) $f(x) = 2x^{15}$
   b) $C = \frac{-1}{9}$
3. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ y $a = 9$
4. Se omite.
5. $h(t) = (t+1)^2$
6.
   a) $F'(x) = -\cos\left(x^2\right)$
   b) $F'(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$
   c) $G'(x) = 3x^2 \ln x^3 - 2x \ln x^2$
   d) $y' = \frac{3(1-3x)^3}{(1-3x)^2 + 1}$

Sección 17.2 (Propiedades de la integral definida)

1.
   a) $\frac{-38}{3}$
   b) $\int_1^3 f(t)\,dt = -9$
   c) $\int_2^3 f(t)\,dt = -1$
2. Se omite.
3. Se omite.
4.
   a) Verdadero.
   b) Falso.
   c) Falso.
   d) Verdadero.
   e) Verdadero.

Sección 17.3 (Cálculo de integrales definidas)

1. Se omite.
2. $c = 0 \;\vee\; c = \frac{3}{2}$.
3. $x = 0 \;\vee\; x = \pm\sqrt{2}$
4. $\int_0^2 f(2x)\,dx = 10$.
5. Se omite.

Sección 17.3.1 (Cálculo de integrales)

1. $\frac{1}{2}\pi$
2. $\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{107}{10}$
4. $2 - \frac{\pi^2}{2}$
5. 31
6. $\frac{3367}{384}$
7. $\cos(2) - \cos\left(\sqrt{5}\right)$
8. $\frac{5}{4}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}57956$
9. $e - 2$
10. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
11. $2 - \frac{\pi}{2}$
12. 4
13. $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$
14. $-\ln(3) - \pi$

Sección 18 (Áreas)

1.
   a) $A = \int_{-2}^0 -x^3 dx + \int_0^4 x^3 dx = 68\ (ul)^2$.
   b) $A = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = 4\ (ul)^2$.

c) $A = \int_0^{16} \left(\frac{3}{4}x + 1\right) dx = 112 \ (ul)^2$.

d) $A = \int_2^6 \sqrt{x-2}dx = \frac{16}{3} \ (ul)^2$.

2. $A = \int_0^2 3x^2 dx + \int_2^3 (16 - 2x)\, dx = 19 \ (ul)^2$.

3.

a) $A = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \frac{4}{3} \ (ul)^2$.

b) $A = \int_{-1}^2 \left((x+3) - \left(x^2+1\right)\right) dx = \frac{9}{2} \ (ul)^2$.

c) Si integramos en el eje x, entonces:

$$A = \int_{-7}^{-2} \left((x+4) - -\sqrt{2-x}\right) dx + \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{2-x} - -\sqrt{2-x}\right) dx = \frac{125}{6} \ (ul)^2$$

Si integramos en el eje y, bastaría calcular $\int_{-3}^{2} \left(\left(2 - y^2\right) - (y-4)\right) dy$, que igual nos da $\frac{125}{6} \ (ul)^2$.

d) Si integramos en el eje x, entonces:

$$A = \int_{-4}^{0} \left(2 - \sqrt{-x}\right) dx + \int_0^4 2dx + \int_4^6 (2 - (x-4))\, dx = \frac{38}{3} \ (ul)^2$$

Si integramos en el eje y, bastaría calcular $\int_0^2 \left((4+y) - -y^2\right) dy$, que igual nos da $\frac{38}{3} \ (ul)^2$.

4. $k = \sqrt[3]{16}$

5.

a) $A = \int_0^{1/2} [(2x+1) - \sqrt{x}]\, dx + \int_{1/2}^{1} [(-2x+3) - \sqrt{x}]\, dx + \int_1^{3/2} [\sqrt{x} - (-2x+3)]\, dx + \int_{3/2}^{9/4} [\sqrt{x} - (2x-3)]\, dx \approx 1.6042 \ (ul)^2$.

b) $A = \int_0^{2/3} \left[2x - x^2\right] dx + \int_{2/3}^{1} \left[(-x+2) - x^2\right] dx + \int_1^2 \left[x^2 - (-x+2)\right] dx = \frac{7}{3} \ (ul)^2$.

c) $A = \int_{-2}^{0} \left[\left(3x^3 - x^2 - 10x\right) - \left(-x^2 + 2x\right)\right] dx + \int_0^2 \left[\left(-x^2 + 2x\right) - \left(3x^3 - x^2 - 10x\right)\right] dx = 24 \ (ul)^2$.

d) $A = \int_{-1{,}43}^{-1} \left[\left(x^3 - x\right) - \left(\frac{-3}{2}\right) \right] dx + \int_{-1}^{0} \left[\left(x^3 - x\right) - \left(-\frac{3x^2}{2}\right) \right] dx + \int_{0}^{1/2} -\left(-\frac{3x^2}{2}\right) dx + \int_{1/2}^{1} -\left(x^3 - x\right) dx \approx 1{,}325$

e) $A = \int_{0}^{-1} -\left(x^2 - 2x\right) dx + \int_{1}^{2} -(x-2)\, dx + \int_{2}^{3} \left[\left(x^2 - 2x\right) - (x-2)\right] dx = \frac{8}{3}\ (ul)^2$

f) $A = \int_{0}^{1/2} ((8x) - x)\, dx + \int_{1/4}^{1/2} \left(8 - \left(\frac{2}{x}\right)\right) dx + \int_{1/2}^{1} (8 - (8x))\, dx + \int_{1/2}^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{x} - x\right) dx \approx 3{,}6931\ (ul)^2$

g) $A = \int_{0}^{2/3} ((-x+2) - (2x))\, dx + \int_{2/3}^{1} ((2x) - (-x+2))\, dx + \int_{1}^{2} \left(2x - x^2\right) dx = \frac{3}{2}\ (ul)^2$

h) $A = \int_{0}^{1/4} (8 - 8x)\, dx + \int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{2}{x} - 8x\right) dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (x)\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{2}{x}\right) dx \approx 4.079\,4\ (ul)^2$

i) $A = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} -\left(x^2 - 2\right) dx + \int_{-1}^{0} -x^3 dx + \int_{0}^{1} \left[x^3 - \left(x^2 - 2\right)\right] dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} \left[1 - \left(x^2 - 2\right)\right] dx \approx 3{,}183\,1\ (ul)^2$

j) $A = \int_{-5}^{-3} [(2x+5) - (-5)]\, dx + \int_{-3}^{2} \left[(2x+5) - \left(4 - x^2\right)\right] dx = \frac{47}{3}\ (ul)^2.$

Sección 19 (Integrales impropias)

Sección 19.1 (Cálculo de integrales impropias)

1. Converge a $\frac{\pi}{2}$.
2. Diverge.
3. Converge a $e^{-\frac{1}{3}}$.
4. Diverge.
5. Converge a $\frac{1}{a}$ si $a > 0$ y diverge si $a \leq 0$.
6. Diverge.
7. Converge a $\frac{3}{32}\pi^2$.
8. Converge a $\sqrt[4]{8}$.
9. Converge a $\frac{1}{\ln 2}$.
10. Diverge.
11. Converge a $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$
12. Converge a π.
13. Converge a 0.
14. Converge a 0.

Sección 19.2 (Otros ejercicios)

1. Converge a $\dfrac{1}{k-1}$ si $k > 1$ y diverge si $k \leq 1$.
2. Se omite.
3. Se omite.