Primer Examen Parcial Ordinario

Instrucciones:

1. El examen consta de **7** preguntas de desarrollo cuyo valor se indica en el enunciado respectivo. Resuelva en su cuaderno de examen cada una de las preguntas y recuerde, debe incluir todo el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Además trabaje en forma clara y ordenada, si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
2. Tiene dos horas y treinta minutos para contestar las preguntas del examen.
3. No se acogerán apelaciones en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración.
4. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de dispositivos con conectividad inalámbrica durante el desarrollo de la prueba.

---

1. Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $a_n = \dfrac{3^n\, n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

   a) Calcule los términos a_3 y a_4. **[1 pto]**

   b) Determine si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, decreciente o no es monótona. **[3 pts]**

2. Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-3}{3^k}$

   a) Demuestre utilizando el principio de inducción matemática, que **[3 pts]**

   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$$

   para todo natural $n \geq 2$.

   b) Determine si la serie converge, en caso de ser convergente determine el valor de convergencia. 0. **[2 pts]**

3. Considere la serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2)^{n+1}}{(3p)^{n-1}}, \text{ donde } p \text{ es constante: } p \neq 0.$$

   Determine que condición debe cumplir la constante p para garantizar la convergencia de la serie. Para estos valores determine el valor de la suma en términos de p. **[4 pts]**

Continúa en la página siguiente

4. Utilizando el criterio de la integral, determine si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ converge o diverge. **[5 pts]**

5. Para cada una de las siguientes series, analice y justifique si es convergente o divergente.

   a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$ **[4 pts]**

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+5n^2}{(1+2n)^n}$ **[4 pts]**

6. Considere la serie alternada

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$$

   a) Pruebe que esta serie es convergente. **[3 pts]**

   b) Determine el menor valor para N de manera que la suma parcial S_N aproxime el valor de la suma de la serie S con un error tal que $E_N \leqslant 10^{-1}$. **[2 pts]**

7. Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

   No analice los extremos del intervalo de convergencia. **[5 pts]**