I. Selección única. (total de la sección: 5 puntos)

A continuación se presentan 5 ítems de selección única con cuatro opciones de respuesta cada uno. Marque una equis (X) sobre la letra que antecede a la opción que usted considere como correcta en cada uno. Traslade la respuesta seleccionada a tabla de respuesta que se encuentra en la primera página.

1. **[1 punto]** Considere la sucesión recursiva $\{a_n\}_{n\geq 0}$ la cual es lineal, homogénea, de orden 3 y de coeficientes constantes definida por:

$$a_n = 5a_{n-1} - 7a_{n-2} + 3a_{n-3} \text{ donde, } a_0 = 1,\ a_1 = 2 \text{ y } a_2 = 1$$

Considere además una ecuación característica asociada a la sucesión recursiva anterior. Al determinar las soluciones de esta ecuación y sus multiplicidades se obtiene que:

$a_n - 5a_{n-1} + 7a_{n-2} - 3a_{n-3} = 0$

A) $s = 3$ es solución simple y $s = 1$ es solución con multiplicidad 2.

B) $s = -3$ es solución simple y $s = -1$ es solución con multiplicidad 2. ×

C) $s = 3$ y $s = 1$ son ambas soluciones simples. ×

D) $s = 1$ es solución simple y $s = 3$ es solución con multiplicidad 2. ×

$a_n = x^3$ $\quad x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

$a_{n-1} = x^2$

$a_{n-2} = x$ $\quad x_1 = 3 \ \wedge\ x_2 = 1$

$a_{n-3} = k$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ & 1 & -4 & 3 & \\ \hline 1 & -4 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)^2(x-3)$

2. **[1 punto]** Considere las siguientes afirmaciones:

I. Sobre $\mathbb{Z} - \{0\}$, la definición de $\circledast$ por $a \circledast b = \dfrac{a+b}{a}$ corresponde a una Ley de Composición Interna. ×

II. Sea $\mathcal{U} = \{1,2\}$. Sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, la definición de $*$ por: $A * B = \overline{A \cup B}$ corresponde a una Ley de Composición Interna. ✓

¿Cuál o cuáles son con certeza verdaderas?

A) Ninguna.

B) Solo la I.

C) Ambas.

D) Solo la II.

$P(u) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ $\qquad \dfrac{2+-2}{2} = \boxed{0}$ ×

$\overline{(1,2) \cup (1,2)} = \emptyset$

3. **[1 punto]** Sea $(G, \perp)$ un grupo de orden 21, tal que e corresponde a su elemento neutro. Considere la siguientes proposiciones.

I. Si $(W_1, \perp)$ es un subgrupo de $(G, \perp)$, entonces el orden de este **NO** puede ser 14. ✓

II. Si W_2 es un subconjunto de G tal que $e \in W_2$, entonces W_2 con $\perp$ es un subgrupo de $(G, \perp)$.

Para ser subgrupo debe de estar el neutro y todos los inversos de los elementos que lo componen.

¿Cuál o cuáles son con certeza verdaderas?

A) Ninguna.

B) Solo la II.

C) Ambas.

D) Solo la I.

4. **[1 punto]** Sobre $\mathbb{Q}-\{2\}$ se define la ley de composición interna $\circledast$ por: $a \circledast b = \dfrac{2a+2b-ab}{2}$, de manera que se sabe que $(\mathbb{Q}-\{2\}, \circledast)$ corresponde a un grupo abeliano, con neutro $e = 0$ y tal que el inverso de un elemento a esta dado por $a^{-1} = \dfrac{2a}{a-2}$, para todo $a \in \mathbb{Q}-\{2\}$.

El resultado que se obtiene al efectuar la operación $\left(\overset{a}{-3} \circledast \overset{b}{\dfrac{3}{2}}\right)^{-1}$, corresponde a:

A) $\dfrac{4}{3}$

B) $\dfrac{4}{5}$

C) $-\dfrac{6}{5}$ ✗

D) $-\dfrac{4}{7}$

$a=-3$
$b=3/2$

$$\left(\frac{2\cdot -3+2\cdot 3/2 - -3\cdot 3/2}{2}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \qquad a^{-1} = \frac{2\cdot 3/4}{3/4-2} = \boxed{\frac{-6}{5}}$$

5. **[1 punto]** Sobre el conjunto $A = \{4, 5, 6, c, i, x\}$ se define la operación $*$ de acuerdo con la siguiente tabla de operaciones:

$*$	4	5	6	c	i	x
4	4	5	6	c	i	x
5	5	6	4	x	c	i
6	6	4	5	i	x	c
c	c	i	x	4	5	6
i	i	x	c	6	4	5
x	x	c	i	5	6	4

Neutro=4

$5^{-1}=6$ $\quad x^{-1}=x$
$6^{-1}=5$ $\quad 4^{-1}=4$
$c^{-1}=c$
$i^{-1}=i$

Se sabe que $*$ es asociativa en A. Considere las siguientes afirmaciones:

I. $(A, *)$ es una estructura conmutativa. ✗

II. $(A, *)$ cumple que todo elemento de A tiene inverso en A. ✓

¿Cuál o cuáles de las afirmaciones anteriores son con certeza verdaderas?

A) Solo la II. ✗

B) Ambas.

C) Ninguna.

D) Solo la I.

II. Respuesta corta. (total de la sección: 5 puntos)

A continuación, se presentan 4 ítems de respuesta corta. Resuelva cada uno de ellos y anote el resultado en la línea indicada. Debe reportar su respueta en la **tabla de respuesta** de la primera página del examen.

6. **[1 punto]** Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida en forma recursiva por:

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-2} + 8a_{n-3}, & \forall n \geq 3 \\ a_0 = -3, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = -1 \end{cases}$$

$a_3 = 5 \cdot 4 + 8 \cdot -3 = -4$
$a_4 = 5 \cdot -1 + 8 \cdot 4 = 27$
$a_5 = 5 \cdot -4 + 8 \cdot -1 = -28$

El valor de a_5 corresponde a: -28

7. **[1 punto]** En una estructura algebraica $(G, *)$ con neutro e, se dice que x en G es involutivo, si y solo si, $x * x = e$. Sobre el conjunto $A = \{4, 5, 6, 9, m, p\}$ se define la operación $\perp$ de acuerdo con la siguiente tabla de operaciones:

$\perp$	4	5	6	9	m	p
4	4	5	6	9	m	p
5	5	6	4	p	9	m
6	6	4	5	m	p	9
9	9	m	p	4	5	6
m	m	p	9	6	4	5
p	p	9	m	5	6	4

elemento neutro = 4

Si se sabe que $(A, \perp)$ es un grupo, escriba todos sus elementos involutivos: $\{4, 9, m, p\}$

8. **[2 puntos]** Sobre el conjunto $A = \{6, c, m, p, w\}$ se define la operación $\downarrow$ por la siguiente tabla de operaciones:

$\downarrow$	6	c	m	p	w
6	c	6	p	w	m
c	6	c	c	p	w
m	w	m	6	p	c
p	p	p	m	6	w
w	6	w	c	m	p

$w \downarrow p = m$

$m \downarrow m = 6$?

Con base en la estructura algebraica $(A, \downarrow)$:

a) ¿Cuál es el resultado de la operación $(w \downarrow p)^2$? 6

b) ¿Cuáles son los valores de x en A tal que se cumpla que $x^2 \downarrow m = p$? $m \downarrow m \equiv m^2$

$(w \downarrow p) \downarrow (w \downarrow p)$

$m \downarrow m = 6$

$(x \downarrow x) \downarrow m = p$

$(m \downarrow m) \downarrow m$

$6 \downarrow m = p$

9. [**1 punto**] Sobre el conjunto $\mathcal{G} = \{3, 5, 7, a, b, m\}$ considere el grupo $(\mathcal{G}, *)$, donde $*$ está definido por:

$*$	3	5	7	a	b	m
3	3	5	7	a	b	m
5	5	a	m	3	7	b
7	7	m	5	b	3	a
a	a	3	b	5	m	7
b	b	7	3	m	a	5
m	m	b	a	7	5	3

Neutro=3

De manera que el inverso de cada elemento está dado a continuación: $3^{-1} = 3$, $\boxed{5^{-1} = a}$, $7^{-1} = b$, $\boxed{a^{-1} = 5}$, $b^{-1} = 7$ y $m^{-1} = m$. Un subgrupo de orden 3 de $(\mathcal{G}, *)$ corresponde a: $\{3, 5, a\}$

III. Desarrollo. (total de la sección: 17 puntos)

A continuación, se presentan 4 preguntas. Para cada una de ellas resuelva en el espacio en blanco lo solicitado. Justifique cada uno de los pasos que lo llevaron a obtener su respuesta.

10. [**3 puntos**] Considere la sucesión $\{b_n\}$ definida en forma recursiva por:

$$\begin{cases} b_n = -\frac{4}{3}b_{n-1} + \frac{4}{3}b_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \\ \\ b_0 = -3, \quad b_1 = 5 \end{cases}$$

Use la teoría estudiada sobre el polinomio característico para determinar una fórmula explícita para $\{b_n\}$.

$$b_n + \frac{4}{3} b_{n-1} - \frac{4}{3} b_{n-2} = 0$$

$b_n = x^2$

$b_{n-1} = x$

$b_{n-2} = k$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{\cancel{3}}x - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2/3 \quad \wedge \quad x_2 = -2$$

$$\Rightarrow A\left(2/3\right)^n + C(-2)^n$$

Cuando $n=0$

$A + C = -3$

Cuando $n = 1$

$A(2/3) + C(-2) = 5$

Según la calculadora:

$A = -3/8$ $\qquad$ $C = -21/8$

R/ $b_n = \frac{-3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{-21}{8}(-2)^n$ //

3

11. **[4 puntos]** Use el método de inducción matemática para demostrar que:

$$5+7+9+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2-4, \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

I) Se verifica para n=2.

$(2\cdot 2)+1=5 \quad | \quad (2+1)^2-4=5$ ✓

II) Se toma como verdadero para todo n.

$$\underbrace{5+7+9+\ldots+(2n+1)}_{H.I}=(n+1)^2-4$$

$2(n+1)+1$
$=2n+2+1$
$=2n+3$

Se prueba con n+1:

$$\underbrace{5+7+9+\ldots+(2n+1)}_{H.I}+(2n+3)=\boxed{(n+2)^2-4}=(n+2)(n+2)-4$$

$$=n^2+2n+2n\cancel{+4-4}$$
$$=\boxed{n^2+4n}$$

$5+7+9+\ldots+(2n+1)+(2n+3) = (n+1)^2-4+(2n+3)$ (por H.I)

$\Rightarrow (n+1)(n+1)-4+2n+3$

$\Rightarrow n^2+n+n+1-4+2n+3$

$\Rightarrow n^2+2n+1-4+2n+3$

$\Rightarrow n^2+4n+\cancel{4-4} = (n+2)^2-4$

$\Rightarrow n^2+4n$ //

R/ Se demuestra que $\sum_{k=1}^{n} 2k+1=(n+1)^2-4 \quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$

3.5

12. **[5 puntos]** Use el método de inducción matemática para demostrar que $10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. **Sugerencia:** Durante el proceso de solución, se sugiere usar como Hipótesis de Inducción el despeje $10^{n+1} = 9k - 12 \cdot 4^{n+2} - 5$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} + 5$ divisible por 9

I) Se verifica con n=0.

$10^{0+1} + 12 \cdot 4^{0+2} + 5 = 207 \quad \exists m \in \mathbb{N}$ tq $m \cdot 9 = 207$, $m = 23$ ✓

II) Se toma como verdadero para todo n.

$\underbrace{10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9 \cdot k}_{H.I} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad 10^{n+1} = 9 \cdot k - 12 \cdot 4^{n+2} - 5 \; (*)$

Se prueba con n+1

$10^{n+2} + 12 \cdot 4^{n+3} + 5 = 9 \cdot u \quad \forall u \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underbrace{10^{n+1}} \cdot 10 + 12 \cdot 4^{n+2} \cdot 4 + 5$

$\Rightarrow 10(9 \cdot k - 12 \cdot 4^{n+2} - 5) + 12 \cdot 4^{n+2} \cdot 4 + 5$ por (*)

$\Rightarrow 90k \underbrace{- 120 \cdot 4^{n+2}} - 50 + \underbrace{12 \cdot 4^{n+2}} \cdot 4 + 5$

$\Rightarrow 90k + (-120 \cdot 4^{n+2} + 4\cancel{12} \cdot 4^{n+2}) \cdot 4 - 45$

$\Rightarrow 90k + (\cancel{-108}^{-72} \cdot 4^{n+2}) \cdot 4 - 45$

$\Rightarrow 90k - \cancel{432}^{72} \cdot 4^{n+2} - 45$

$\Rightarrow 9(10k - 48 \cdot 4^{n+2} - 5)$ tomando $u = (10k - 48 \cdot 4^{n+2} - 5) \in \mathbb{Z}$ como k

$\Rightarrow 9 \cdot k$ //

$\therefore 10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9. $\forall n \geq 0$

4.5

13. **[5 puntos]** Sobre el conjunto $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$ se define la ley de composición interna $\perp$ por:

Cerrado ✓ Asociativo ✓ Inverso

$$(a,b)\perp(c,d)=(a+c,2bd)$$

CANIC Conmutativo

Si se sabe que $\perp$ es asociativa en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$. Demuestre que $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*,\perp)$ es un grupo abeliano. Neutro

1- Conmutativo:

$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$.

Hqd $\Rightarrow (a,b)\perp(c,d)=(c,d)\perp(a,b)$

$\Rightarrow (a,b)\perp(c,d)=(a+c,2bd)$ (Δ)

$\Rightarrow (c,d)\perp(a,b)=(c+a,2db)$

$\Rightarrow (a+c,2bd)$ (por conmutividad de suma y multiplicación). $(\Delta\Delta)$

$\therefore$ De (Δ) y $(\Delta\Delta)$ se concluye que es conmutativa.

2- Neutro: $\exists$

$\forall (a,b),(e_1,e_2)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$

Hqd $\Rightarrow (a,b)\perp(e_1,e_2)=(a,b)$

$\Rightarrow (a,b)\perp(e_1,e_2)=(a+e_1,2b\cdot e_2)$

$\Rightarrow a+e_1=a$

$\therefore e_1=0$ $(\star)$

$\Rightarrow 2\cdot b\cdot e_2=b$

$\therefore e_2=1/2$ $(\star\star)$

$\therefore$ De $(\star)$ y $(\star\star)$ se concluye que el neutro es $(0,1/2)$.

5

3- Inverso: $\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$ $\exists$ $\in\mathbb{Q}$

$\forall (a,b),(c,d))\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$

Hqd $\Rightarrow (a,b)\perp(c,d)=(e_1,e_2)$ (Neutro)

$\Rightarrow (a,b)\perp(c,d)=(a+c,2bd)$

$\Rightarrow a+c=0$

$c=-a$ (ᵕ̈)

$\Rightarrow 2bd=1/2$ $\qquad 2bd=\frac{1/2}{2b}$

$d=\frac{1/2}{2\cdot b}=\frac{1}{4}$ (ᵕ̈ ᵕ̈)

$\therefore$ De (ᵕ̈) y (ᵕ̈ ᵕ̈) se concluye que el inverso es $\left(-a,\frac{1/2}{2\cdot b}\right)$.

R/ Como ya se sabe que es cerrado y asociativo, no hace falta demostrarlo, por lo que de 1-, 2- y 3- se concluye que se trata de un grupo abeliano.

Scanned with CamScanner