Instituto Tecnológico de Costa Rica — Tiempo: 2 horas
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas
Escuela de Matemática — Puntaje total: 25 Puntos

Probabilidades
Tercer examen parcial
II semestre - 2024

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable y las tablas dispuestas por la Cátedra. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. En cierto cantón, se ha determinado que solo el 20 % de los conductores utiliza el cinturón de seguridad. Si en un operativo de tránsito se revisaron a 200 conductores, y se quiere determinar la probabilidad de que al menos 31 pero menos de 49 usen cinturón de seguridad:

   a) **[3 puntos]** determine una cota inferior para dicha probabilidad, utilizando el teorema de Chebyshev.

   b) **[3 puntos]** estime la probabilidad utilizando la aproximación de la binomial mediante la distribución normal.

   Solución.

   a) Suponiendo que X es la cantidad de conductores que usan cinturón de seguridad en ese cantón, se tiene que $X \sim Bin\,(200, 0.2)$, con $E\,(X) = 40$ y $Var\,(X) = 32$.

   Se solicita una cota para $P\,[31 \leq X < 49]$.

   $$P\,[31 \leq X < 49] = P\,[-9 \leq X - 40 < 9]$$
   $$\Rightarrow P\,[31 \leq X < 49] \geq P\,[|X - 40| < 9]$$
   $$\Rightarrow P\,[31 \leq X < 49] \geq 1 - \frac{32}{9^2}$$
   $$\Rightarrow P\,[31 \leq X < 49] \geq \frac{49}{81} \approx 0.604938$$

   b) Se tiene que:

   $$P\,[31 \leq X < 49] = \sum_{i=31}^{48} \binom{200}{i} (0.2)^i\,(1 - 0.2)^{200-i}$$
   $$\Rightarrow P\,[31 \leq X < 49] = \Phi\left(\frac{48 - 40 + \frac{1}{2}}{\sqrt{32}}\right) - \Phi\left(\frac{31 - 40 - \frac{1}{2}}{\sqrt{32}}\right)$$
   $$\Rightarrow P\,[31 \leq X < 49] = [1 - \Phi\,(-1.50)] - \Phi\,(-1.68) = 1 - 0.0668 - 0.0465 = 0.8867$$

2. **[3 puntos]** Se ha determinado que el tiempo X, en horas, que semanalmente requiere un sitio web para actualizarse sigue una distribución gamma, con media de 12 horas y varianza de 48 horas^2. Determine la probabilidad de que, en una semana escogida al azar, el tiempo semanal de actualización del sitio sea inferior a 14 horas.

   Solución.

   Se sabe que $X \sim Gamma\,(\alpha, \beta)$, con $E\,(X) = \alpha \cdot \beta = 12$ y $Var\,(X) = \alpha \cdot \beta^2 = 48$.

   Así, $\beta = 4$ y $\alpha = 3$. Como se solicita $P\,[X < 14]$, entonces:

   $$P\,[X < 15] = F\left(\frac{14}{4}, 3\right) = F\,(3.5, 3) = 0.679$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que, en una semana escogida al azar, el tiempo semanal de actualización del sitio sea inferior a 14 horas es de, aproximadamente, 67.9 %.

3. La ganancia diaria que recibe una soda en el centro de Naranjo, en dólares, tiene una media de 300 dólares, con una desviación estándar de 21.2 dólares.

   a) **[3 puntos]** Determine, aproximadamente, la probabilidad de que la ganancia mensual (30 días) sea superior a los 9.1 miles de dólares.

   b) **[5 puntos]** Si se quiere que al menos el 95 % de la ganancia diaria promedio esté entre 299 dólares y 301 dólares, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

   Solución.

   a) Sean $X_1, \ldots, X_{30}$ las ganancias diarias de cada uno de los 30 días del mes. Suponga que $S_{30} = X_1 + \ldots + X_{30}$. Se solicita $P\,[S_{30} > 9100]$.

   $$P\,[S_{30} > 9100]$$

   $$= 1 - P\left[Z \leq \frac{9100 - 300 \cdot 30}{21.2 \cdot \sqrt{30}}\right], \text{ con } Z = \frac{S_{30} - 300 \cdot 30}{21.2 \cdot \sqrt{30}}$$

   $\approx 1 - \Phi\,(0.86)$, aplicando el Teorema del Límite Centrar para $n = 30 \geq 30$,

   $\approx \Phi\,(-0.86) = 0.1949$

   Por lo tanto, la probabilidad de que la ganancia mensual (30 días) sea superior a los 9.1 miles de dólares es de, aproximadamente, 19.49 %.

b) Sean Y_1, …, Y_n las ganancias diarias de cada uno de los n días. Además, suponga que $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$. Se solicita n, de tal manera que $P\left[299 < \overline{Y} < 301\right] \geq 0.95$.

Si se utiliza el Teorema del Límite Central, usando la simetría de la distribución normal, se tiene que:

$$P\left[\overline{Y} \leq 299\right] < \frac{1-0.95}{2}, \text{ pues } \overline{Y} \underset{\text{aprox}}{\sim} N\left(300, \frac{21.2^2}{n}\right),$$

$$\Rightarrow P\left[W \leq \frac{299-300}{\sqrt{\frac{21.2^2}{n}}}\right] < 0.025, \text{ con } W = \frac{\overline{Y}-300}{\sqrt{\frac{21.2^2}{n}}} \underset{\text{aprox}}{\sim} N\left(0,1\right),$$

$$\Rightarrow \frac{299-300}{\sqrt{\frac{21.2^2}{n}}} < -1.96$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{-1.96}{\frac{299-300}{\sqrt{21.2^2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > 41.552$$

$$\Rightarrow n > 1726.568704$$

Por lo tanto, si se quiere que al menos el 95 % de la ganancia diaria promedio esté entre 299 dólares y 301 dólares, el tamaño mínimo de la muestra es de 1727 días.

4. [**4 puntos**] Considere la variable aleatoria continua Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{, con} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Tomando μ_Z como la esperanza de Z y σ_Z^2 como la varianza de Z, calcule:

$$P\left[\mu_Z - \sigma_Z \leq Z \leq \mu_Z + \sigma_Z\right].$$

Solución.

Primero, se deben calcular los parámetros:

- $\mu_Z = \displaystyle\int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\,dx = \frac{1}{2} = 0.5$
- $\sigma_Z^2 = \displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\,dx - \mu_Z^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0.05$

Así,

$$\begin{aligned}
&P\left[\mu_Z - \sigma_Z \leq Z \leq \mu_Z + \sigma_Z\right] \\
&= P\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}} \leq Z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{20}}\right] \\
&= P\left[\frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq Z \leq \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right] \\
&= \int_{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}^{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} 6x(1-x)\,dx \\
&= \frac{7\sqrt{5}}{25} \approx 0.6260990337
\end{aligned}$$

5. **[4 puntos]** Considere las variables aleatorios continuas X_1, X_2, ..., X_{15}, mutuamente independientes, con:

$$X_i \sim N\left(10i, 2\right)\ , \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, 15\}\,.$$

Calcule $P\left[\overline{X} < 79.5\right]$, donde $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots X_{15}}{15}$.

Solución.

En este caso, se tiene que:

$$\overline{X} \sim N\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{15} 10i}{15}, \frac{2}{15}\right).$$

Calculando:

$$P\left[\overline{X} < 79.5\right]$$

$$= P\left[Z < \frac{79.5 - \dfrac{1200}{15}}{\sqrt{\dfrac{2}{15}}}\right], \text{ con } Z = \frac{\overline{X} - \dfrac{1200}{15}}{\sqrt{\dfrac{2}{15}}} \sim N\left(0, 1\right),$$

$$= P\left[Z < -1.37\right]$$

$$= \Phi\left(-1.37\right) = 0.0853$$