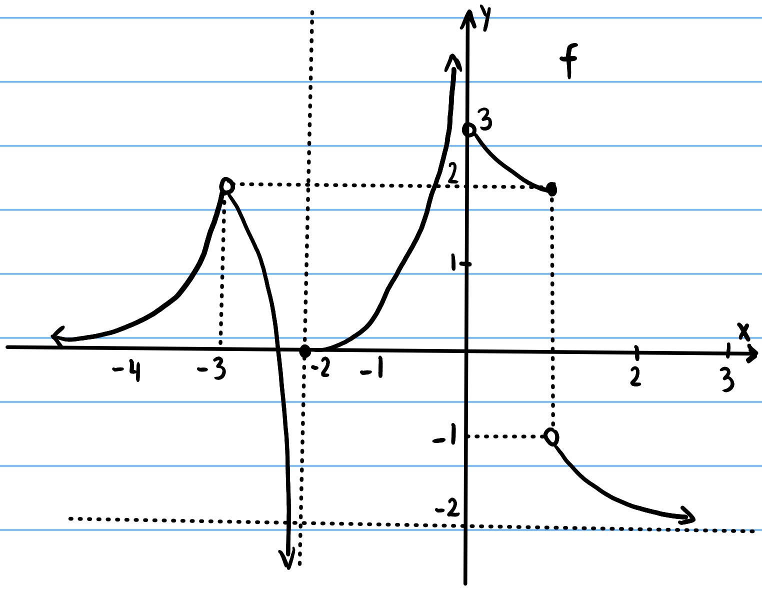
Solución I Examen II Semestre 2023 CDI

Pregunta #1: Considere la gráfica de la función f:



Determine en cada caso la información que se le solicita: (3 puntos)

ⓐ El valor de K para el cual $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = K$ $\quad K = -2$

ⓑ El valor de a para el cual $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\quad a = -2$

ⓒ ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? Justifique.

No, pues $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$

ⓓ ¿Existe $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3}$? Justifique.

No, pues $f(-3)$ no existe.

Pregunta #2: Calcule, si existe, el siguiente límite (No utilice la regla de L'Hôpital) (4 puntos)

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 2\sqrt[4]{y-1} - 3}$$

Sugerencia: Haga la sustitución $u = \sqrt[4]{y-1}$

Sea $u = \sqrt[4]{y-1}$

$\Rightarrow u^2 = \sqrt{y-1}$

$\Rightarrow u^4 = y-1$

Como $y \to 2$, entonces $u \to \sqrt[4]{2-1} \Rightarrow u \to 1$

FI 0/0

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 2\sqrt[4]{y-1} - 3} = \lim_{y \to 2} \frac{y-1-1}{\sqrt{y-1} + 2\sqrt[4]{y-1} - 3}$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{u^4 - 1}{u^2 + 2u - 3}$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}{(u+3)\cancel{(u-1)}}$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{(u+1)(u^2+1)}{(u+3)}$$

$$= 1$$

Pregunta #3: Calcule, si existen, los siguientes límites (sin utilizar la regla de L'Hôpital)

FI $0/0$

ⓐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{x\,\text{Sen}(x)}$ Sugerencia: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{Sen}^2(x)$ (4 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{x \cdot \underset{x}{\underline{x}} \cdot \cancel{\text{Sen}(x)}^{\,1}} \cdot \frac{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) - \cos(2x)}{x^2\left[\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) - \left[\cos^2(x) - \text{Sen}^2(x)\right]}{x^2\left[\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos^2(x)} - \cancel{\cos^2(x)} + \text{Sen}^2(x)}{x^2\left[\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\text{Sen}^2(x)}^{\,1}}{\cancel{x^2}\left[\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{u \to 3} \frac{2 - |4 - 2u|}{u^3 - 27}$ ↗ FI $0/0$ (4 puntos)

$$|2-u| \begin{cases} 2-u & \text{si } u \leq 2 \\ -(2-u) & \text{si } u > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{u \to 3} \frac{2 - |2(2-u)|}{(u-3)(u^2+3u+9)} = \lim_{u \to 3} \frac{2 - 2|2-u|}{(u-3)(u^2+3u+9)}$$

$$= \lim_{u \to 3} \frac{2 - 2[-(2-u)]}{(u-3)(u^2+3u+9)}$$

$$= \lim_{u \to 3} \frac{2 + 4 - 2u}{(u-3)(u^2+3u+9)}$$

$$= \lim_{u \to 3} \frac{-2u + 6}{(u-3)(u^2+3u+9)}$$

$$= \lim_{u \to 3} \frac{-2\cancel{(u-3)}}{\cancel{(u-3)}(u^2+3u+9)}$$

$$= \lim_{u \to 3} \frac{-2}{u^2 + 3u + 9}$$

$$= \frac{-2}{9 + 9 + 9}$$

$$= \frac{-2}{27}$$

ⓒ $\lim_{x \to 3^-} 4^{\frac{1}{\ln(7-2x)}}$ (3 puntos)

$$4^{\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{\ln(7-2x)}} \quad (*)$$

Aparte:

Tomando $x = 2,9999$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{\ln(7-2x)} = \frac{1}{\ln(7-2\cdot 2,9999)}$$

$$= \frac{1}{\ln(1,0002)}$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

Retomando $(*)$ se tiene que:

$$4^{\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{\ln(7-2x)}} = 4^{+\infty}$$

$$= +\infty$$ por ser exponencial creciente

$\textcircled{d}$ $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{2y + \sqrt{y^2+1}}{y^2+1}$ $\nearrow$ FI $+\infty / +\infty$ (3 puntos)

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{2y + \sqrt{y^2\left(\frac{y^2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right)}}{y^2+1} = \lim_{y \to -\infty} \frac{2y + \sqrt{y^2\left(1 + \cancel{\frac{1}{y^2}}^{\to 0}\right)}}{y^2+1}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{2y + |y|}{y^2+1}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{2y - y}{y^2+1} \qquad \text{pues } y \to -\infty$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{y^2+1}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{y^2\left(\frac{y^2}{y^2} + \cancel{\frac{1}{y^2}}^{\to 0}\right)}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{y^2}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y}$$

$$= 0$$

Pregunta #4: Determine todos los valores de a, b, c, de tal modo que la función definida por: **(4 puntos)**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x<0 \\ 3b-1 & \text{si } x=0 \\ 2x+c & \text{si } x>0 \end{cases}$$

sea continua en $x=0$

⊛ $\lim_{x\to 0} ax^2+b = 3b-1 \Rightarrow b = 3b-1$

$\Rightarrow 1 = 2b$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$

⊛ $\lim_{x\to 0} 2x+c = 3b-1 \Rightarrow c = 3\cdot\frac{1}{2}-1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

Ahora, $a \in \mathbb{R}$, pues este valor no se necesita en $f(x)$, es decir, no hay forma de despejar a, por lo cual, a puede tomar cualquier valor real.

Pregunta #5: Calcule (no simplifique), la primera derivada de la función f definida por: (5 puntos)

$$f(x) = \frac{5^{\operatorname{Sec}(1-2x)} - 4\operatorname{Tan}^2(x+2)}{\ln(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\left[5^{\operatorname{Sec}(1-2x)} - 4\operatorname{Tan}^2(x+2)\right]' \cdot \ln(x) - \left[5^{\operatorname{Sec}(1-2x)} - 4\operatorname{Tan}^2(x+2)\right] \cdot \left[\ln(x)\right]'}{\ln^2(x)}$$

$$= \frac{\left[5^{\operatorname{Sec}(1-2x)} \cdot \ln(5) \cdot \operatorname{Sec}(1-2x) \cdot \operatorname{Tan}(1-2x) \cdot -2 - 8\operatorname{Tan}(x+2) \cdot \operatorname{Sec}^2(x+2)\right] \cdot \ln(x) - \left[5^{\operatorname{Sec}(1-2x)} - 4\operatorname{Tan}^2(x+2)\right] \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)}$$

Pregunta #6: Si F y g son funciones derivables en $\mathbb{R}$ y c una constante, use la definición de derivada para verificar que si $F(x) = g(x) + c$, entonces $F'(x) = g'(x)$ (2 puntos)

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \Rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + c - [g(x) + c]}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cancel{+c} - g(x) \cancel{-c}}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = g'(x)$$