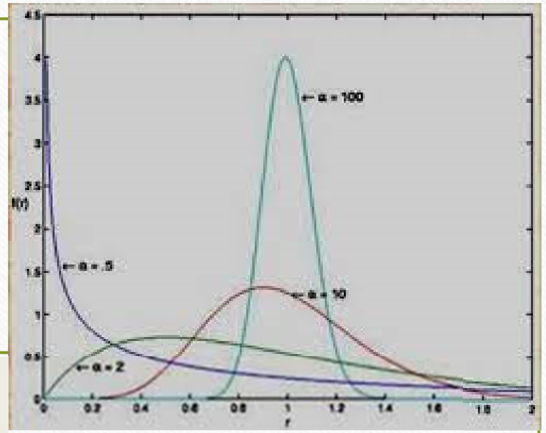
Probabilidades-II 2024

Distribución Gamma y Distribución Beta.

2 Timoteo 3:16-17

Distribución Gamma



Si X es una variable aleatoria continua entonces diremos que X sigue una distribución Gamma con parámetros α y β ambos mayores que cero si

$$f_X(x) = f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & \text{Para } x \geq 0 \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}.$$

Se escribe

$$X \sim Gamma(\alpha,\beta).$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

$$\Gamma(\alpha+1) = (\alpha)\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$E(X) = \alpha\beta$$

$$Var(X) = \alpha\beta^2$$

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-\beta\cdot t)^{\alpha}} \quad \text{si} \quad t < \frac{1}{\beta}$$

$$P([X \leq x]) = F\left(\frac{x}{\beta};\alpha\right)$$

Distribución Gamma Incompleta

$$
\begin{aligned}
P([X \le x]) &= \int_0^x \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} dy \\
&= \int_0^{x/\beta} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du \\
&= F\left(\frac{x}{\beta}; \alpha\right)
\end{aligned}
$$

Importantísimo!!!!

Suponga que un evento A ocurre siguiendo una distribución de Poisson de parámetro λ, si T denota el tiempo que transcurre hasta que se den k ocurrencias del evento A, se tiene

$$T \sim Gamma(k, \frac{1}{\lambda}).$$

Ejercicios

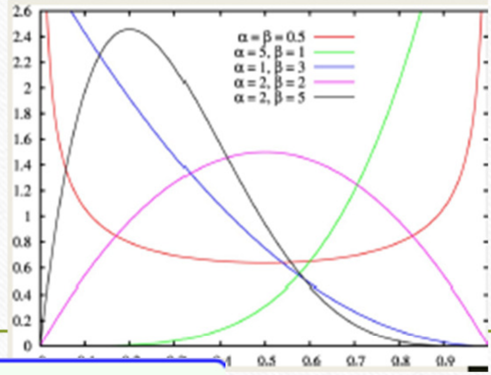
I. [4 puntos] El consumo diario de energía (millones de kilowatt) de una ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución gamma con media 6 y varianza 12 . Si la planta de energía tiene una capacidad diaria de generar un máximo de $12 \cdot 10^6$ kW, cuál es la probabilidad que haya un día en el que no se pueda satisfacer la demanda de energía?

0.061969

[4 puntos] A una central de teléfonos llegan 12 llamadas por minuto, siguiendo una distribución de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que en menos de 1 minuto lleguen 8 llamadas?

: 0.9104955032

Distribución Beta



Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, entonces se define $B(\alpha,\beta)$ por:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad B(n,k) = \frac{(n-1)!(k-1)!}{(n+k-1)!}$$

$X \sim Beta(\alpha, \beta)$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces diremos que X sigue una distribución beta con parámetros α y β ambos mayores que cero si

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & \text{, para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

Propiedades

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

$$m_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(\alpha+k,\beta)t^k}{B(\alpha,\beta)k!},t\in IR$$

Si $\alpha=\beta$ la función de densidad es simétrica, siendo el eje de simetría la recta $x=1/2$.

Si $\alpha=\beta=1$, se convierte en la uniforme.

Si $\alpha<\beta$ es asimétrica a la derecha.

Si $\alpha>\beta$ asimétrica a la izquierda.

$$F_X(x;\alpha,\beta)=\begin{cases} 0 & ,\text{ si } x\leq 0 \\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du & ,\text{ si } 0<x<1 \\ 1 & ,\text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$

Ejercicios

Muestre que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$

Verifique que si $X \sim Beta(\alpha, \beta) \Rightarrow (1 - X) \sim Beta(\beta, \alpha)$

La proporción de pólizas de hogar que tienen algún siniestro durante el año sigue una distribución beta con parámetros $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.5$.

- Hallar la media y varianza de la proporción de siniestros 0.375. 0.13
- ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de hogares con algún siniestro sea como máximo del 45 %? 0.61
- Con una probabilidad de 0.8 ¿qué porcentaje como máximo de hogares tendrán algún siniestro? 0.81143

Ejercicios

Muestre que si $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ y $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$ entonces $\alpha = \frac{\mu^2-\mu^3}{\sigma^2} - \mu$ y $\beta = \frac{\mu(1-\mu)^2}{\sigma^2} + \mu - 1$

Una barra de acero, sujeta firmemente en sus extremos, es sometida a una prueba de resistencia. Al aplicar presión sobre la barra, la distancia desde el extremo izquierdo hasta el punto de quiebre se considera una variable aleatoria con distribución beta con media 0.5 metros y desviación estándar de $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ metros. Determine la probabilidad de que la barra se rompa en un punto a mas de 10 cm de donde se esperaba.

0.31744

Gracias por su amable atención!!