Cálculo Diferencial e Integral: Resolución de Límites

Compilador: Reiman Acuña Chacón

Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Semana 3

Contenido

Límites por sustitución

Algunos límites que tienen de la forma $\dfrac{0}{0}$ se pueden resolver mediante una sustitución. Los casos más comunes contienen raíces como se muestra a continuación.

Límites por sustitución

1 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{1-x}$.

Considere la sustitución $u^5 = 3 - 2x$.

Como $x \to 1$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{u \to 1} \frac{\sqrt[5]{u^5}-1}{1-\left(\dfrac{3-u^5}{2}\right)} = \lim_{u \to 1} \frac{2u-2}{u^5-1} = \frac{2}{5}$$

Límites por sustitución

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{1-x}$.

Considere la sustitución $u^5 = 3-2x$.

Como $x \to 1$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{u\to 1} \frac{\sqrt[5]{u^5}-1}{1-\left(\dfrac{3-u^5}{2}\right)} = \lim_{u\to 1} \frac{2u-2}{u^5-1} = \frac{2}{5}$$

Límites por sustitución

2 $\lim_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1+\sqrt[3]{1-x}}$.

Considere la sustitución $u = \sqrt[12]{x-1}$

Note que $m.c.m(3,4) = 12$.

Como $x \to 2$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}} == \lim_{u\to 1} \frac{1-u^3}{1-u^4} = \frac{2}{5}$$

Límites por sustitución

2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt[4]{x-1}}{1 + \sqrt[3]{1-x}}$.

Considere la sustitución $u = \sqrt[12]{x-1}$

Note que $m.c.m(3,4) = 12$.

Como $x \to 2$ entonces $u \to 1$ (¿Porque?)

Con base en lo anterior se debe resolver el nuevo límite

$$\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt[4]{x-1}}{1 - \sqrt[3]{x-1}} == \lim_{u \to 1} \frac{1 - u^3}{1 - u^4} = \frac{2}{5}$$

Límites que involucran valor Absoluto

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|1-x|}{2x^2-5x+3}$.

Note que la tendencia $x \to 1$ coincide con uno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe estudiar los límites laterales. Así, tendremos que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{2x^2-5x+3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = -1$$

y $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{2x^2-5x+3} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = 1$

Como los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe.

Límites que involucran valor Absoluto

1 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|1-x|}{2x^2-5x+3}$.

Note que la tendencia $x \to 1$ coincide con uno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe estudiar los límites laterales. Así, tendremos que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-(1-x)}{2x^2-5x+3} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = -1$$

y $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{2x^2-5x+3} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(2x-3)} = 1$

Como los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe.

Límites que involucran valor Absoluto

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-1|-|x+1|}{x}$.

Note que la tendencia $x \to 0$ **no** coincide con alguno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe escoger uno de los casos respectivos para cada valor absoluto presente, en relación con la tendencia. Así, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(3x-1)-(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = \lim_{x\to 0} -4 = -4$$

.

Límites que involucran valor Absoluto

2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|3x-1|-|x+1|}{x}$.

Note que la tendencia $x \to 0$ **no** coincide con alguno de los valores absolutos. Cuando esto sucede se debe escoger uno de los casos respectivos para cada valor absoluto presente, en relación con la tendencia. Así, obtenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{-(3x-1)-(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-4x}{x} = \lim_{x \to 0} -4 = -4$$

.

Límites Trigonométricos

Al resolver límites trigonométricos deben tenerse en cuenta dos límites especiales. Estos son

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Límites Trigonométricos

Al resolver límites trigonométricos deben tenerse en cuenta dos límites especiales. Estos son

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Lo cuales también pueden aparecer como

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$

Límites Trigonométricos

Al resolver límites trigonométricos deben tenerse en cuenta dos límites especiales. Estos son

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Lo cuales también pueden aparecer como

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1} \text{ y } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$

Límites Trigonométricos

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{3x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3}$$

.

Límites Trigonométricos

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{3x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{5}{3}$$

.

Límites Trigonométricos

2 En general $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$ siempre que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

3 Por ejemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

Límites Trigonométricos

2 En general $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$ siempre que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

3 Por ejemplo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

ya que

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0$$

Límites Trigonométricos

2 En general $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$ siempre que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

3 Por ejemplo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

ya que

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0$$

Límites Trigonométricos

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \operatorname{sen} x\cdot(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \operatorname{sen} x\cdot(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot(1+\cos x) = 2$$

.

Límites Trigonométricos

4 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot (1+\cos x) = 2$$

.

Límites Trigonométricos

5 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

Respuesta Aplicar identidad. Racionalizar. Nuevamente otra identidad. Factorizar y cancelar. Al final

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Límites Trigonométricos

5 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$

Respuesta Aplicar identidad. Racionalizar. Nuevamente otra identidad. Factorizar y cancelar. Al final

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{x \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Límites infinitos

El símbolo ∞ se lee infinito, es de carácter posicional, no representa ningún número real.
Si una variable independiente x está creciendo indefinidamente a través de valores positivos, se escribe $x \to +\infty$ (que se lee: x tiende a más infinito), y si decrece a través de valores negativos, se denota como $x \to -\infty$(que se lee: x tiende a menos infinito).
Similarmente, cuando $f(x)$ crece indefinidamente y toma valores positivos cada vez mayores, se escribe $f(x) \to +\infty$, y si decrece tomando valores negativos escribimos $f(x) \to -\infty$.

Reglas algebraicas de $+\infty$ y $-\infty$

Si $l \in \mathbb{R}$ entonces

$$a)\left\{\begin{array}{c} l+(+\infty)=+\infty \\ l-(+\infty)=-\infty \\ l+(-\infty)=-\infty \\ l-(-\infty)=+\infty \\ \dfrac{l}{\pm\infty}=0 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} l\cdot+\infty=+\infty,\ l>0 \\ l\cdot+\infty=-\infty,\ l<0 \\ l\cdot-\infty=-\infty,\ l>0 \\ l\cdot-\infty=-\infty,\ l<0 \end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{c} +\infty+(+\infty)=+\infty \\ -\infty+(-\infty)=-\infty \\ +\infty\cdot+\infty=+\infty \\ -\infty\cdot-\infty=+\infty \\ +\infty\cdot-\infty=-\infty \end{array}\right.$$

Reglas algebraicas de $+\infty$ y $-\infty$

Nota: Son formas indeterminadas las expresiones:

$$(\pm\infty) - (\pm\infty)$$

$$\pm\infty \cdot 0$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

También son formas indeterminadas

$$0^0, 1^\infty \text{ y } \infty^0$$

Reglas algebraicas a considerar

Si $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$a^+ - a = 0^+ \text{ y } a - a^+ = 0^-$$

$$a^- - a = 0^- \text{ y } a - a^- = 0^+$$

También si $a > 0$ entonces

$$\frac{a}{+\infty} \to 0^+, \frac{a}{-\infty} \to 0^-$$

También si $a < 0$ entonces

$$\frac{a}{+\infty} \to 0^-, \frac{a}{-\infty} \to 0^+$$

Límites Infinitos

1 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

Límites Infinitos

2 $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{y-7}{|y-5|}$

Límites Infinitos

3 $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4}{(2-x)^3}$

Límites Infinitos

4 $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4}{(2-x)^2}$

Límites al Infinito

Considere el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a dibujarse en la pizarra

A partir de ello se puede generalizar las siguientes propiedades

a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^r} = 0^+$ siempre que $c > 0$ y $r > 0$

b $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } c > 0 \text{ y } r \text{ es par } \vee c < 0 \text{ y } r \text{ es impar} \\ 0^- & \text{si } c > 0 \text{ y } r \text{ es impar } \vee c < 0 \text{ y } r \text{ es par} \end{cases}$

Límites al Infinito

Considere el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a dibujarse en la pizarra

A partir de ello se puede generalizar las siguientes propiedades

a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0^+$ siempre que $c > 0$ y $r > 0$

b $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } c > 0 \text{ y } r \text{ es par } \vee c < 0 \text{ y } r \text{ es impar} \\ 0^- & \text{si } c > 0 \text{ y } r \text{ es impar } \vee c < 0 \text{ y } r \text{ es par} \end{cases}$

Límites al Infinito

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{x^3}$

Límites al Infinito

Suponga que $p(x)$ y $q(x)$ representan polinomios de grado n.

Suponga que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$ representa una forma indeterminada.

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \operatorname{grado}(p(x)) > \operatorname{grado}(q(x)) \\ L & \text{si } \operatorname{grado}(p(x)) = \operatorname{grado}(q(x)) \\ 0 & \text{si } \operatorname{grado}(p(x)) < \operatorname{grado}(q(x)) \end{cases}$$

Límites al Infinito

4 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x+1}{(2x+1)^5}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2}{x+3}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-3x}$

Límites al Infinito

Hay casos en donde se puede obtener resultados diferentes si el límite se evalúa en ∞ o en $-\infty$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

Hay casos en donde obtenemos la forma indeterminada $\infty - \infty$. Si esto sucede muchas veces se puede racionalizar. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

Límites al Infinito

Hay casos en donde se puede obtener resultados diferentes si el límite se evalúa en ∞ o en $-\infty$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

Hay casos en donde obtenemos la forma indeterminada $\infty - \infty$. Si esto sucede muchas veces se puede racionalizar. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

Límites al Infinito

Hay límites al infinito en los que se puede utilizar las funciones exponenciales. Para tales casos debe seguir la siguiente regla

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Y bien

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Límites al Infinito

7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$

9 $\lim\limits_{x\to-\infty} \pi^x$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi^x$

Límites al Infinito

Hay límites al infinito en los que se puede utilizar las funciones logarítmicas. Para tales casos debe seguir la siguiente regla

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Y bien

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Límites al Infinito

11 $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 x$

12 $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_3 x$

13 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$

14 $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

15 $\lim\limits_{x \to 0+} \log_{\frac{1}{2}} x$

Ejemplos Variados

16 $\lim_{x \to 0} (e^{\frac{2}{x}} + 1)$

17 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{7}\right)^{\cot |x|}$

18 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\dfrac{2}{\ln(x+1)}}$

Referencias

Hernández, E.(1984)
Límites y Continuidad de Funciones
Editorial Tecnológico de Costa Rica

Muchas Gracias