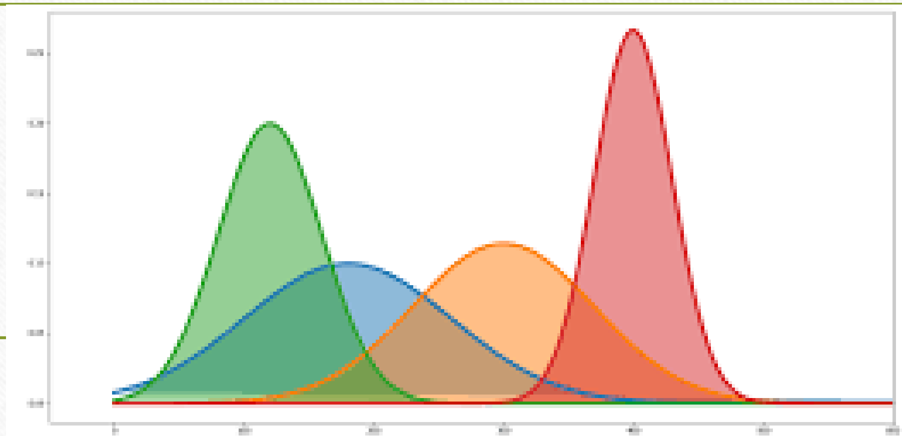
Probabilidades-II 2024

Distribución Normal

Proverbios 14:12

Distribución Normal



Una variable aleatoria X sigue una distribución normal con parámetros μ y σ, lo que denotamos por $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, si la función de densidad de probabilidad tiene la forma.

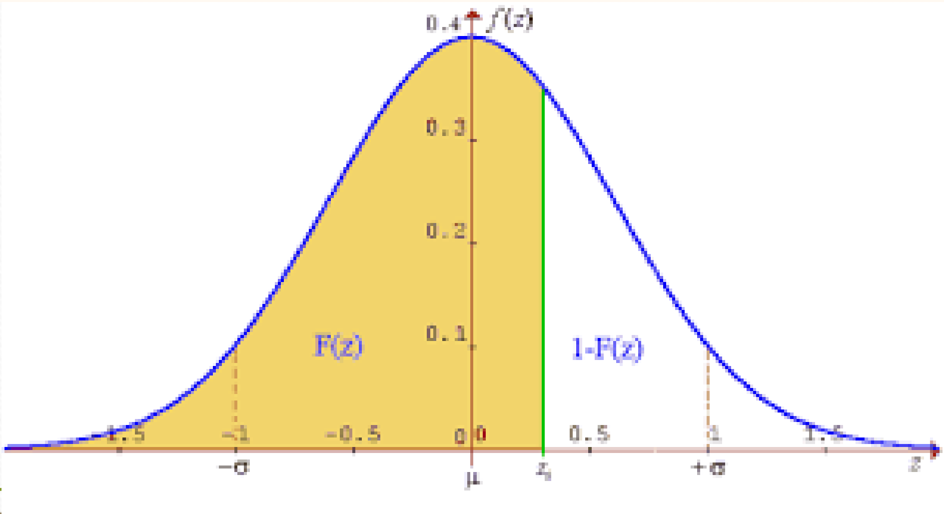
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Para } x \in \mathbb{R}$$

Se puede demostrar que la media de esta distribución es μ y la desviación es σ.

Distribución Normal Acumulada

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces la función de distribución de probabilidad acumulada es

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



Distribución Normal Estándar

Una variable aleatoria Z sigue una distribución normal estándar si la función de densidad de probabilidad tiene la forma.

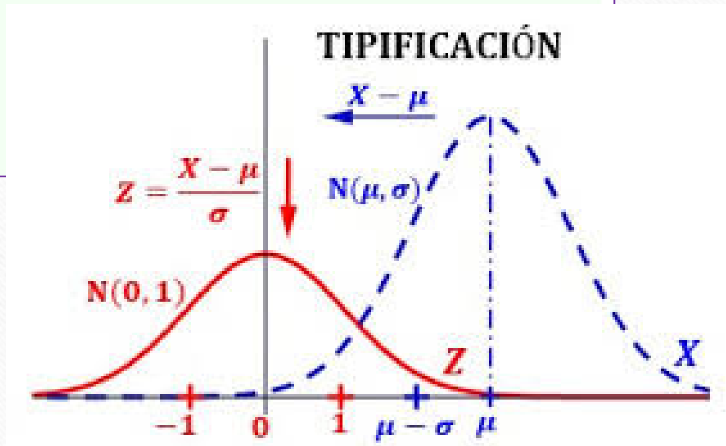
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad \text{Para } -\infty \leq x \leq \infty.$$

Es decir

$$Z \sim N(0,1)$$

En este caso la distribución de probabilidad acumulada es,

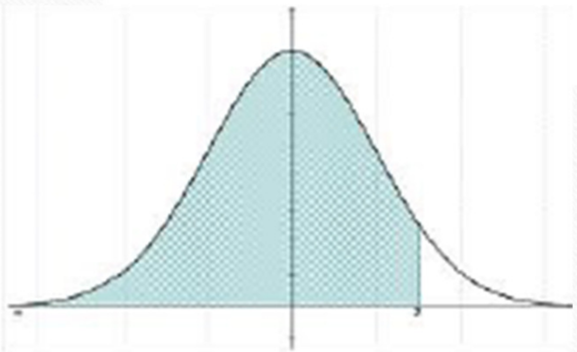
$$\Phi(x) = P[Z \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$



Algunas propiedades

Si X sigue una distribución de probabilidad normal con media μ y desviación estándar σ entonces

$$P[X \leq x] = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$$

z_{α}: valor en el eje que acumula a la izquierda un área de α

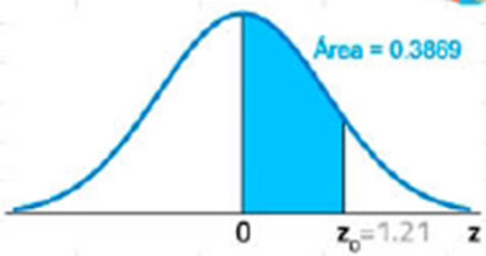
Cálculo de probabilidades

Tabla de Distribución Normal Estandarizada

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$\mu = media$

$\sigma = desviación\ estándar$

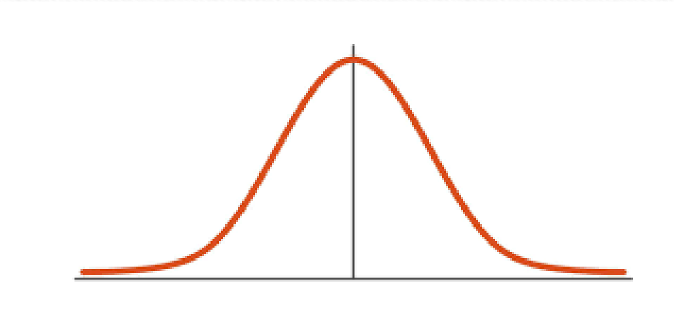


z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

Ejemplos

Las notas finales de un curso se distribuyen en forma normal con una media de 75 y una desviación estándar de 10. Si la nota de aprobación es de 70 que porcentaje de los estudiantes aprobarán el curso.

Ilustre este cálculo de 5 formas diferentes



Ejercicio

La altura de los jugadores en una liga profesional de baloncesto sigue una distribución normal con media $\mu = 187$ cm. y desviación $\sigma = 7$ cm. Indique cuál es el porcentaje de jugadores de esa liga que se espera que tengan estatura:

a) **[1 punto]** menor a 1,87 m.

b) **[2 punto]** menor a 1,80 m.

c) **[3 puntos]** entre 1,80 m. y 2,01 m.

Si X es una variable aleatoria normal con parámetros μ_X desconocido y $\sigma_X^2 = 400$, que cumple además que $P(X > 80) = 0.2$.

- Determine la media de X. 63.1676
- Determine un valor c tal que $P[\mu_X - c < X < \mu_X + c] = 0.1$. 2.5132.

Ejercicio

Se sabe que la distribución de notas en un curso sigue una distribución normal. El 10 % de los exámenes tienen una nota por encima de los 80 puntos, y el 5 % tiene una nota por debajo de los 40 puntos. ¿Cuáles son el valor de la media y de la desviación estándar para esta distribución?

$\mu = 62.48104297 \ldots\ldots \sigma = 13.67011017$

Suma y promedio de normales

Sean $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes. Suponga que cada variable X_i sigue una distribución normal con media μ_i y variancia σ_i^2 , o sea $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Se cumple que:

1. La suma de distribuciones normales (S_n) es normal, o sea:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

2. El promedio de distribuciones normales ($\bar{X}$) es normal, o sea:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{n}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2}\right)$$

Suma y promedio de normales (distribuciones idénticas)

Sean $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen la misma distribución normal, es decir tiene la misma media (μ) y la misma variancia (σ^2), o sea $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Se cumple que:

1. La suma de distribuciones normales (S_n) es normal, o sea:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

2. El promedio de distribuciones normales ($\bar{X}$) es normal, o sea:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Ejemplos

Por experiencia se sabe que el tiempo que le toma a una persona llenar un formulario se distribuye normalmente con una media de 10 minutos y una desviación estándar de 2 minutos.

1. Si cinco personas llenan el formulario, ¿cuál es la probabilidad de que en promedio tarden menos de 11 minutos? 0.868224

2. Si cinco personas deben llenar el formulario, ¿cuál es la probabilidad de que todas ellas tarden menos de 48 minutos? 0.32736

Ejercicios

Un técnico de la empresa ECI señala que en cierta localidad las llamadas telefónicas tienen una distribución normal con media de 180 segundos y desviación estándar de 300 segundos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada en la localidad dure más de 7 minutos?
Respuesta: 0.2119.

b) De las llamadas que se encuentran en el 5 % de las más largas, ¿cuál es la duración de la más breve?
Respuesta: 673.5 segundos.

Los valores del coeficiente intelectual (CI) de los seres humanos están distribuidos de manera normal con una media igual a 100 y una desviación estándar de 10. Si una persona se elige al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su CI esté entre 100 y 115?. 0.4322.

Ejercicios

El rendimiento de cierto cilindro de gas está normalmente distribuido con una media de 6 horas y una desviación estándar de 0.5 horas. Este gas se vende en paquetes de 5 cilindros y en cada paquete se utilizan los cinco cilindros en forma secuencial, es decir se empieza uno solamente si se ha terminado el anterior.

Determinar el tiempo máximo de duración de cada paquete de manera que éste sea excedido sólo por el 3% de los paquetes.

R/ t =32.102791

Gracias por su amable atención!!