Instituto Tecnológico de Costa Rica | Tiempo: 2 horas, 20 minutos
Escuela de Matemática | Puntaje total: 30 Puntos

Probabilidades
Segundo examen parcial
I semestre - 2024

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. Utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre repuestas que no sean claras y legibles, o escritas con lápiz. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos, salvo calculadora no programable. No se permite ningún material adicional a los mencionados.

1. Para una empresa de servicio de entregas a domicilio, cada repartidor tiene un salario semanal base de 50 000 colones, más una cantidad X, en miles de colones, correspondiente a una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{kx+2}{5} & \text{, si} \quad x \in \{1,2,3,4,5\} \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   a) [**2 puntos**] Determine el valor de k.

   b) [**4 puntos**] Determine la varianza para el salario semanal esperado por un repartido de la empresa.

Solución.

a) Se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{ki+2}{5} = 1 \Rightarrow k = \frac{5 - \displaystyle\sum_{i=1}^{5} 2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i} = -\frac{1}{3}.$$

Así:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{, si} \quad x = 1 \\ 4/15 & \text{, si} \quad x = 2 \\ 1/5 & \text{, si} \quad x = 3 \\ 2/15 & \text{, si} \quad x = 4 \\ 1/15 & \text{, si} \quad x = 5 \\ 0 & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

b) Se debe calcular $Var\left(50000+1000X\right)=1000^2Var\left(X\right)$.

Se sabe que:

$E\left(X\right)=1\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{4}{15}+3\cdot\dfrac{1}{5}+4\cdot\dfrac{2}{15}+5\cdot\dfrac{1}{15}=\dfrac{7}{3}$.

$E\left(X^2\right)=1^2\cdot\dfrac{1}{3}+2^2\cdot\dfrac{4}{15}+3^2\cdot\dfrac{1}{5}+4^2\cdot\dfrac{2}{15}+5^2\cdot\dfrac{1}{15}=7$.

Así, como $1000^2Var\left(X\right)=1000^2\left(7-\left(\dfrac{7}{3}\right)\right)=1000^2\cdot\dfrac{14}{9}$, entonces la varianza para el salario semanal esperado por un repartido de la empresa es de, aproximadamente, 1 555 555.56 colones^2.

2. Una pieza de los motores producidos en una fábrica de automóviles tiene un porcentaje de fallo del 1.3 %. Para garantizar la calidad del producto, se toma un lote de 60 de esas piezas para inspeccionarlas.

   a) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 piezas estén defectuosas?

   b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 57 piezas **NO** estén defectuosas?

   Solución.

   Sea X la variable aleatoria discreta correspondiente a la cantidad de piezas defectuosas, de las 60. Se tiene que:

$$X \sim Bin\left(60, 0.013\right).$$

   a) Se solicita:

$$P\left[X \leq 2\right] = \sum_{i=0}^{2} \binom{60}{i} \left(0.013\right)^{i} \left(1 - 0.013\right)^{60-i} \approx 0.956526.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que a lo sumo 2 piezas estén defectuosas es de, aproximadamente, 95.7 %.

   b) Se solicita que a lo sumo 3 piezas estén defectuosas:

$$P\left[X \leq 3\right] = \sum_{i=0}^{3} \binom{60}{i} \left(0.013\right)^{i} \left(1 - 0.013\right)^{60-i} \approx 1.$$

   Por lo tanto, el evento: por lo menos 57 piezas **NO** estén defectuosas es casi seguro.

3. La sucursal de un banco en un centro comercial del país trabaja los siete días de la semana. El número de transacciones de más de cuatro millones de colones que se realizan, diariamente, en esa sucursal sigue una distribución de Poisson, con un promedio de 3 transacciones por día.

   a) **[2 puntos]** Calcule la probabilidad de que el fin de semana (sábado y domingo) se reciban más de 4 transacciones mayores a cuatro millones de colones.

   b) **[2 puntos]** Calcule la probabilidad de que en esta semana se reciban de 13 a 14 transacciones de más de cuatro millones de colones.

   c) **[1 punto]** Un día se considera poco rentable si se reciben menos de 2 transacciones superiores a cuatro millones de colones. Determine la probabilidad de que un día sea poco rentable.

   Solución.

   Considere la variable aleatoria discreta X correspondiente a la cantidad de transacciones de más de cuatro millones de colones, por día. Se tiene que:

$$X \sim Poisson\,(3)\,.$$

   a) Considere la variable aleatoria discreta X_1 correspondiente a la cantidad de transacciones de más de cuatro millones de colones, por dos días. Se tiene que:

$$X_1 \sim Poisson\,(6)\,.$$

   Se solicita:

$$P\,[X_1 > 4] = 1 - P\,[X_1 \leq 4] = 1 - \sum_{i=0}^{4} \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{i!} \approx 0.714943.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el fin de semana (sábado y domingo) se reciban más de 4 transacciones mayores a cuatro millones de colones es de, aproximadamente, 71.5 %.

   b) Considere la variable aleatoria discreta X_2 correspondiente a la cantidad de transacciones de más de cuatro millones de colones, por siete días. Se tiene que:

$$X_2 \sim Poisson\,(21)\,.$$

   Se solicita:

$$P\,[13 \leq X_2 \leq 14] = \sum_{i=13}^{14} \frac{21^1 \cdot e^{-21}}{i!} \approx 0.047024.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que en esta semana se reciban de 13 a 14 transacciones de más de cuatro millones de colones es de, aproximadamente, 4.7 %.

   c) Se solicita:

$$P\,[X < 2] = P\,[X \leq 1] = \sum_{i=0}^{1} \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{i!} \approx 0.199148.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el fin de semana (sábado y domingo) se reciban más de 4 transacciones mayores a cuatro millones de colones es de, aproximadamente, 19.9 %.

4. [**3 puntos**] Doña Laura juega a los tiempos con mucha frecuencia. Este sorteo paga 70 por uno, es decir, si compra el número ganador, gana 70 colones por cada colón invertido. Cada vez que hay sorteo (en un sorteo solo hay un número ganador), doña Laura apuesta 200 colones a cada uno de 15 números distintos entre 100 posibles. Si ella jugó durante 20 sorteos consecutivos, determine la esperanza para el total de ganancias de doña Laura.

   Solución.

   Suponga que la variable aleatoria discreta X es la cantidad de números que gana doña Laura al jugar un sorteo de tiempos. Es claro que $R_X = \{0, 1\}$, y además:

$$f_X(x) = \begin{cases} 85/100 & , \text{si} \quad x = 0 \\ 15/100 & , \text{si} \quad x = 1 \end{cases} .$$

   Note que, si doña Laura no pega, gana $-15 \cdot 200 = -3000$ por sorteo; mientras que si pega, gana $70 \cdot 200 - 15 \cdot 200 = 11000$ por sorteo.

   Con esto, si la variable aleatoria discreta Y corresponde a la cantidad de dinero ganado por doña Laura por cada sorteo, de manera que $Y = 14000X - 3000$.

   Por lo tanto, para calcular $E(Y)$ se pueden utilizar propiedades de la esperanza para obtener:

$$E(Y) = E(14000X - 3000) = 14000 \cdot E(X) - 3000 = 14000 \cdot \left[0 \cdot \frac{85}{100} + 1 \cdot \frac{15}{100}\right] - 3000 = -900$$

   Finalmente, como se espera que doña Laura pierda 900 por sorteo, si juega 20 seguidos se espera que pierda 18000.

5. **[6 puntos]** Una partida de un juego consiste en sacar, sin reposición, 4 bolitas de una urna que contiene: 4 bolitas negras y 6 blancas. Una partida se gana si se sacan más bolitas negras que blancas. Si una persona decide repetir la partida hasta ganar la primera vez, determine la probabilidad de que juegue menos de 4 veces.

   Solución.

   Considere la variable aleatoria discreta X correspondiente a la cantidad de bolitas negras en la extracción de 4. Con esto:

$$X \sim HG\,(4, 10, 4)\,.$$

   Note que ganar la probabilidad de ganar una partida es:

$$P\,[X > 2] = \sum_{i=3}^{4} \frac{\binom{4}{i} \cdot \binom{6}{4-i}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{42} \approx 0.119047.$$

   Suponga que Y es la cantidad de partidas jugadas hasta tener el primer gane. Se tiene que:

$$Y \sim Geo\left(\frac{5}{42}\right).$$

   Finalmente, se solicita:

$$P\,[Y < 4] = \sum_{i=1}^{3} \left(1 - \frac{5}{42}\right)^{i-1} \cdot \frac{5}{42} \approx 0.316313$$

   Con esto, la probabilidad de que juegue menos de 4 veces es de, aproximadamente, 31.6 %.

6. **[6 puntos]** Considere la variable aleatoria discreta Z, cuya distribución de probabilidad está dada por la función de criterio:

$$f_Z(x) = 216\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}, \text{ si } x \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Determine la función generadora de momentos de Z, y utilícela para calcular $E(Z)$ y $Var(Z)$.

Solución.

Note que:

$$m_Z(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{it} \cdot 216\left(\frac{1}{3}\right)^{2i+3} = 8 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{e^t}{9}\right)^i = 8 \cdot \frac{\frac{e^t}{9}}{1 - \frac{e^t}{9}} \qquad \text{, siempre que } \left|\frac{e^t}{9}\right| < 1$$

Así: $m_Z(t) = \dfrac{8e^t}{9 - e^t}$, con $t < \ln(9) \approx 2.197224$. Además, como:

$m'_Y(t) = \dfrac{72e^t}{(9 - e^t)^2}$ y $m''_Y(t) = \dfrac{72e^t(9 + e^t)}{(9 - e^t)^3}$, entonces:

$E(Y) = \dfrac{9}{8} = 1.125$, y $Var(Y) = \dfrac{45}{32} - \left(\dfrac{9}{8}\right)^2 = \dfrac{9}{64} = 0.140625.$