Resumen de fórmulas y propiedades para el primer Parcial

Matrices:

- Tienen un orden: $m \times n$ (m → filas, n → columnas)
- Elementos de la matriz A: a_{ij} (i → f, j → c)

Tipos de matrices:

- Matriz fila: $m=1$ $n \geq 1$
- Matriz columna: $n=1$ $m \geq 1$
- Matriz Nula: Todos sus elementos son ceros
- Matriz transpuesta: $A_{m \times n}$ $A^T_{n \times m}$
- Matriz cuadrada: $m=n$
- Matriz triangular superior: los elementos abajo de la \ son ceros
- Matriz triangular inferior: los elementos arriba de la \ son ceros.
- Matriz diagonal: los elementos por arriba y por debajo de la \ son ceros.
- Matriz identidad (I_n) = es cuadrada y los elementos de la diagonal principal son 1 y el resto 0
- Matriz simétrica: $A = A^T$
- Matriz escalonada: condiciones: Si hay filas nulas aparecen debajo de las no nulas
El primer elemento nulo de cada fila (pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior.
- Matriz escalonada reducida: condiciones: es escalonada, en cada fila el pivote es cero y todos los elementos de esa columna son ceros

Operaciones con matrices

- Suma de matrices (conmutativa): $(A+B)_{m \times n} = (A)_{m \times n} + (B)_{m \times n}$
- Resta de matrices: $(A-B)_{m \times n} \neq (B-A)_{m \times n}$
- Multiplicación de una matriz por un número: $(kA)_{ij} = k \cdot (A)_{ij}$ → Todos los elementos por k
- Multiplicación de matrices: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$ De be coincidir Será el tamaño de la nueva matriz

Propiedades de las matrices

- $A+B=B+A$ (conmutativa)
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ (asociativa de la suma)
- $A+0=0+A=A$ (neutro de la suma)
- $A+-A=-A+A$ (Inverso de la suma)
- $-1A=-A$
- $(AB)C=A(BC)$ (asociativa del producto)
- $(A+B)C=AC+BC$
- $(k+l)A=kA+lA$
- $A\cdot I_n=A$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(kA)^T=k\cdot A^T$
- $(A^T)^T=A$

Sistemas de ecuaciones lineales:

m ecuaciones n incógnita = tamaño $m\times n$

Notación matricial de un sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz asociada}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Maneras de darse cuenta cuando hay infinitas soluciones:

1. Una fila es igual a otra
2. Una fila es múltiplo escalar de otra
3. Una fila llena de ceros.

Matriz aumentada $(A:C)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_n \end{array}\right)$$

Sistema inconsistente: no tiene soluciones

Sistema consistente: tiene solución única o infinitas soluciones

↳ Cuando es un sistema homogéneo (=0, todas las m)

Método de eliminación de Gauss Jordan

Pasos:

① Escribir la notación Matricial

② Escribir la matriz aumentada y empezar operaciones para llegar a la reducida

③ Dar el conjunto solución.

Las operaciones fundamentales que se pueden hacer son:

① Cambiar filas: F_{ij}

② Multiplicar la fila por una constante: KF_i

③ A la fila i sumarle K veces la fila j: $F_i + KF_j$

Inversa de una matriz

$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad A^{-1} \cdot A = I_n$

Para obtener A^{-1}:

$(A \vdots I_n)$ y luego realizar operaciones elementales hasta $(I_n \vdots B)$, y B, será la inversa de A

Propiedades de las matrices inversas

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $A^{-m} = (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
- $(A^T)^T = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A+B)^T = A^T + B$ y $(A-B)^T = A^T - B^T$
- Si $K \neq 0$ $\quad (KA)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{K}$

$(A \pm B)^{-1} =$ NO

Determinantes

- Solo para matrices cuadradas.
- Notación: $\text{Det } A = \text{Det}(A) = |A|$

Una matriz no es invertible cuando $\det A = 0$

- Determinante en matrices cuadradas 2×2

$|A|$ = producto de la diagonal principal − la secundaria

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

- **Menor de una matriz** (M_{ij}): se obtiene a partir de la matriz A, eliminando la fila i y columna j

- **Cofactor de una matriz**: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

- **Determinante en matrices 3x3 y 4x4**

3x3 (método largo)

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

se puede calcular con cualquier fila o columna.

3x3 (Método Abreviado)

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$-$ $-$ $-$

$+$ $+$ $+$

4x4

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Propiedades de los determinantes

- $|A| = |A^T|$

- $|I_n| = 1$
- Determinante de una matriz con una fila/columna de ceros $= 0$
- Determinante de una matriz con 2 filas/columnas iguales $= 0$
- Determinante al aplicar operación 1 (kf_1 o kc_1) : $|B| = k|A|$
- Determinante al aplicar operación 2 (intercambio de filas) $= |B| = |-A|$
- Determinante al aplicar operación 3 (+ k veces otra) $= |B| = |A|$
- Determinante al multiplicar por una constante $= |B| = k^n |A|$ → orden de la matriz
- Determinante de un producto de matrices $= |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- Determinante de una matriz triangular = el producto de la diagonal

El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Número $i = \sqrt{-1}$

Forma rectangular de un número complejo

$z = a + bi$

$Re(z) = a$ → real

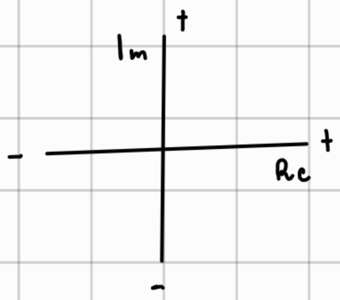
$Im(z) = b$ → Imaginario

número complejo puro: $Re(z) = 0$

ejemplo: $z = 5i$

Para representarlo en un plano

$z(a, b) = a + bi$



Solución de ecuacioned cuadráticas

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Operaciones con números complejos

Sea $z = a+bi$ y $w = x+yi$

- Suma: $z+w = (a+bi)+(x+yi) = (a+x)+(b+y)i$
- Resta: $z-w = (a+bi)-(x+yi) = (a-x)+(b-y)i$
- Multiplicación: $z \cdot w = (a+bi)(x+yi) = ax + ayi + xbi - by$

$$(ax-by)+(ay+xb)i$$

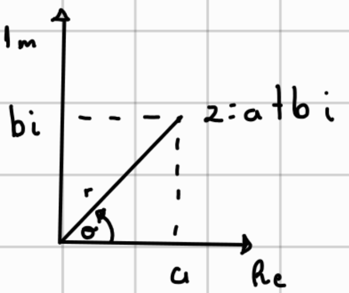
Conjudado de un número complejo:

$z = a+bi$ $\quad \bar{z} = a-bi$ (solo cambia la parte imaginaria)

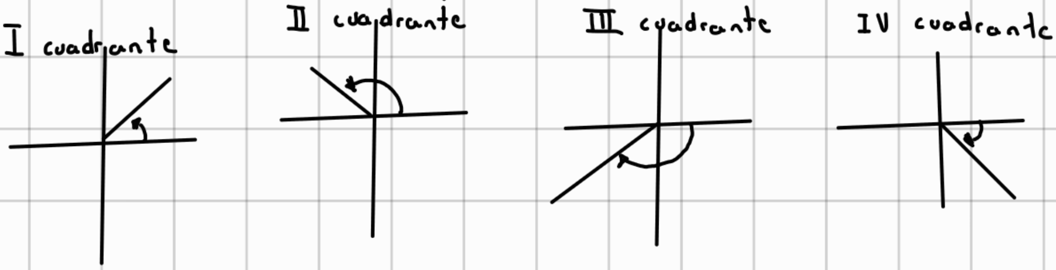
- División: Se debe multiplicar arriba y abajo por el conjudado.

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} = \frac{ax-ayi+bxi+by}{x^2+y^2} = \frac{(ax+by)+(-ay+bx)i}{x^2+y^2}$$

Forma polar de un número complejo



$(r, \theta) \rightarrow$ Coordenadas polares de un número complejo.



Forma polar

$z = r\cos(\theta) + i r \operatorname{sen}(\theta)$

$z = r \operatorname{cis}(\theta)$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow$ I y IV cuadrante

porque $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \rightarrow$ III cuadrante

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \rightarrow$ II cuadrante

Pasar de radianes a grados: $\frac{180 \cdot x}{\pi}$

De ° a radianes: $\frac{\pi \cdot x}{180}$

Teorema fundamental del Álgebra

Teorema fundamental del Álgebra

Dado una ecuación de la forma $P(x)=0$ donde "$P(x)$" es un polinomio de grado "n", entonces tiene exactamente "n" soluciones

Teorema de ceros conjugados

Si $P(x)$ es un polinomio con todos sus coeficientes reales tal que $z=a+bi$ es un cero $P(x)$ $(P(z)=0)$, entonces $\bar{z}=a-bi$ también es un cero del polinomio

Multiplicación y división de forma polar

$$z\cdot w = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)\cdot r_2 \operatorname{cis}(\theta_2) = r_1\cdot r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)}{r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$$

Teorema de De Moivre

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

Raíz n-ésima de un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{r}\ \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) \quad k=0,1,2,\ldots n-1$$

Representación gráfica:

Las raíces n-ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen de coordenadas

Exponencial con argumento complejo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

Logaritmo natural complejo

$-]\pi,\pi]$

$$\operatorname{Ln}(\operatorname{cis}\theta) = \operatorname{Ln}(e^{\theta i}) = \theta i$$

$$\ln(z) = \ln(|z| \operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z)) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$