Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 3405 Estadística

Tiempo máximo: 2 horas 10 minutos
Puntaje máximo: 31 puntos
I semestre 2025

I Examen Parcial

Instrucciones
Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz, lapiceros de tinta borrable o que presenten algún tipo de alteración. Puede hacer uso de las fórmulas oficiales de la cátedra únicamente. No se permite el uso de calculadora programable. Se permite el uso discrecional de dispositivos electrónicos para la consulta de la aplicación *Probability Distributions* según las disposiciones comunicadas con anterioridad por la coordinación de la cátedra. Considere, de ser necesario, que las poblaciones involucradas en esta prueba siguen una **distribución normal**.

---

1. [**4 puntos**] Considere dos estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, con varianzas σ^2 y $4\sigma^2$ respectivamente, independientes e insesgados para estimar un parámetro θ. Determine el valor real de k de modo que el estimador $\phi = k\hat{\theta}_1 + (1-k)\hat{\theta}_2$ sea insesgado y de varianza mínima.

Solución

Debe suceder que $E(\phi) = kE(\hat{\theta}_1) + (1-k)E(\hat{\theta}_2) = k\theta + (1-k)\theta = \theta$.
Con esto, ϕ es insesgado para cualquier valor de k.

Por otro lado, $Var(\phi) = k^2 Var(\hat{\theta}_1) + (1-k)^2 Var(\hat{\theta}_2) = k^2\sigma^2 + 4(1-k)^2\sigma^2 = (4-8k+5k^2)\sigma^2$.
Nótese que la cuadrática $4-8k+5k^2$ tiene su valor mínimo cuando $k = \dfrac{4}{5}$.

También pueden derivar, $\dfrac{\partial Var(\phi)}{\partial k} = 0 \Rightarrow (-8+10k)\sigma^2 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{4}{5}$.

Finalmente, para cumplir ambas condiciones debe tenerse que $\phi = \dfrac{4}{5}\hat{\theta}_1 + \dfrac{1}{5}\hat{\theta}_2$. $\ltimes \wr \rtimes$

2. El proveedor del cargador para celulares marca *Light* afirma que su dispositivo tiene un tiempo promedio de carga menor a 15 minutos.

   a) **[5 puntos]** Para corroborar esta afirmación se tomó una muestra de 49 dispositivos en los que se obtuvo una desviación estándar de 5 minutos. Si el extremo inferior de un intervalo de confianza del 98 % para el tiempo medio de carga en esa muestra corresponde a 11.8383226, determine el valor del promedio muestral. ¿Con este intervalo puede respaldarse la afirmación del proveedor?

   Solución

   Se tiene que $1-\alpha = 0.98 \Rightarrow t_{0.01,48} = -2.406581$, $s = 5$ y $n = 49$

   Con la información dada se tiene que $11.8383226 = \overline{x} + -2.406581 \cdot \dfrac{5}{7} \Rightarrow \overline{x} = 13.55730929$ y con eso el intervalo es $]11.8383226, 15.27629571[$

   Si usan la normal, entonces $z_{0.01} = -2.326348$ y así $11.8383226 = \overline{x} + -2.326348 \cdot \dfrac{5}{7} \Rightarrow$ $\overline{x} = 13.49999974$ y con eso el intervalo es $]11.8383226, 15.16167689[$

   En cualquier caso los datos de la muestra no respaldan la afirmación pues $15 \in IC$ con confianza del 98 %. $\ltimes \wr \rtimes$

   b) **[5 puntos]** Si se decide hacer una prueba de hipótesis con significancia de 4 %, ¿cuál es la potencia de la prueba para muestras de tamaño 20 si el tiempo medio de carga es realmente de 13 minutos con varianza 36?

   Solución

   $H_0 : \mu = 15$ El tiempo medio de carga es de 15 minutos.
   $H_1 : \mu < 15$ El tiempo medio de carga es significativamente menor a 15 minutos

   $$z_c = z_{0.04} = -1.750686 = \frac{\overline{x}_c - 15}{6}\sqrt{20} \Rightarrow \overline{x}_c = 12.65120826$$

   Luego, $1-\beta = 1 - P\left(\overline{X} > 12.65120826 | \mu = 13\right) = 1 - P(z > -0.2599740135) = 0.397442$
   $\ltimes \wr \rtimes$

3. **[5 puntos]** Para una variable aleatoria X con distribución $f_X(x) = \binom{x+6}{x} p^7(1-p)^x$, para $x \in \{0,1,2,3,4,...\}$ se tiene la muestra aleatoria $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 7$, $x_4 = 2$, $x_5 = 8$, $x_6 = 6$ y $x_7 = 4$. Determine la estimación de máxima verosimilitud para el parámetro p en la muestra dada.

   Solución

   Si se reconoce que la distribución es una binomial negativa con $k = 7$, entonces puede utilizarse el resultado que indica que $\hat{p} = \dfrac{7}{7 + \dfrac{40}{7}} = \dfrac{49}{89} \approx 0.5505617978$

   $$L(x,p) = \prod_{i=1}^{7} \binom{x_i+6}{x_i} p^7(1-p)^{x_i} = \binom{11}{5} \cdot \binom{14}{8}^2 \cdot \binom{13}{7} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{10}{4} \cdot p^{49}(1-p)^{40}$$
   $$\Rightarrow \ln L(x,p) = \ln \prod_{i=1}^{7} \binom{x_i+6}{x_i} + 49 \ln p + 40 \ln(1-p)$$

   Derivando e igualando a cero,

   $$\frac{L'(x,p)}{L(x,p)} = \frac{49}{p} - \frac{40}{1-p} = 0 \Rightarrow 49 - 89p = 0 \Rightarrow p = \frac{49}{89} \approx 0.5505617978. \qquad \ltimes \wr \rtimes$$

4. Los siguientes datos corrresponden a una muestra aleatoria de tiempos de resistencia, en minutos, de un dispositivo electrónico sometido a calor hasta que se destruye.

12	11	9.8	7.5	15	18	15	18.5
18	12	7.9	9	17.5	21	15	14.5

   a) **[4 puntos]** La empresa proveedora del dispositivo ha establecido que el proceso de producción está bajo control si la desviación estándar de los tiempos no supera los 3 minutos. Construya un intervalo de confianza del 96 % e indique si los datos de la muestra respaldan que el proceso está bajo control.

   Solución

   Primero note que $n = 16$ y $s^2 = 17.034625$.
   Además, $\chi^2_{0.98,15} = 28.259496$ y $\chi^2_{0.02,15} = 5.984916$.

   IC para σ^2 es $\left] \dfrac{15 \cdot 17.034625}{28.259496}, \dfrac{15 \cdot 17.034625}{5.9849167} \right[=]9.041894272, 42.69388996[$.

   IC para σ es $]3.006974272, 6.534056164[$. Los datos muestran que el proceso NO está bajo control con confianza del 96 % pues el intervalo completo está por encima de 3 minutos.

b) **[4 puntos]** Si se realiza una prueba de hipótesis, calcule cual debería ser el valor de la desviación estándar en una muestra aleatoria de 16 dispositivos de modo que se pueda concluir que el proceso de producción está bajo control con significancia 4 %.

Solución

$H_0 : \sigma = 3$ ($\leq$) El proceso de producción está bajo control.
$H_1 : \sigma > 3$ Hay evidencia significativa que muestra que el proceso NO está bajo control.

$$\chi_c^2 = \chi_{0.96,15}^2 = 25.816159 = \frac{15 \cdot s_c^2}{9} \Rightarrow s_c^2 = 15.4896954 \Rightarrow s_c = 3.9356955034.$$

Luego, para que el proceso esté bajo control en muestras de tamaño 16 la desviación estándar debe ser menor a 3.9356955034. ⋉ ≀ ⋊

c) **[4 puntos]** La empresa proveedora considera también que un dispositivo es atípico si su resistencia es superior a los 20 minutos o inferior a los 9 minutos. ¿Los datos de la muestra permiten concluir, mediante una prueba de hipótesis, que más del 10 % de los dispositivos construidos son atípicos?

Solución

$H_0 : p = 0.1$ ($\leq$) La proporción de dispositivos atípicos es de 0.1.
$H_1 : p > 0.1$ La proporción de dispositivos atípicos es significativamente mayor a 0.1.

Nótese que $np_0 = 16 \cdot 0.1 = 1.6 < 5$, por lo que debe utilizarse la distribución binomial.

$$P = P\left(P \geq \frac{3}{16}|p = 0.1\right) = P(B \geq 3|p = 0.1) = 0.210751.$$

La hipótesis nula se tolera, por tanto no se respalda la afirmación de que más del 10 % de los dispositivos construídos son atípicos. ⋉ ≀ ⋊