4.1 Repaso de sistema de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando eliminación de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ -2x + 4y + z = -3 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 7/3 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 10/3 & 7/3 & 5/3 \\ 0 & 11/3 & -19/3 & -5/3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 7/10 & 1/2 \\ 0 & 11/3 & -19/3 & -5/3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/10 & 5/2 \\ 0 & 1 & 7/10 & 1/2 \\ 0 & 0 & -89/10 & -7/2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/10 & 5/2 \\ 0 & 1 & 7/10 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 35/89 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 191/89 \\ 0 & 1 & 0 & 20/89 \\ 0 & 0 & 1 & 35/89 \end{array}\right]$$

Soluciones

$$x = \frac{191}{89} \approx 2.15, y = \frac{20}{89} \approx 0.22, z = \frac{35}{89} \approx 0.39$$

2. Determine todas las soluciones del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 28/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ *Como el rango de la matriz es igual al número de incógnitas, solo tiene solución trivial*

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

4.2 Matrices, determinantes y rango

3. Encuentre la inversa de la matriz si existe

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Primero se establece la matriz identidad del lado derecho y multiplicamos por 1/2 la primera fila

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Después multiplicamos por (-1) la primera fila y se la sumamos a la segunda y por (-3) la primera fila y se lo sumamos a la tercera.

Después multiplicamos por (2) la segunda fila

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 11/2 & -7/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 11/2 & -7/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se multiplica por (1/2) la segunda fila se le suma a la primera y por (-11/2) la segunda fila y se le suma a la tercera para obtener 0 en esa columna.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 4 & -11 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -11/24 & 1/24 \end{array}\right]$$

Se aplica el mismo razonamiento y la final obtenemos la siguiente matriz, donde el lado derecho será nuestra inversa

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 13/24 & 1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -11/6 & 7/24 & 5/24 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -11/24 & 1/24 \end{array}\right]$$

Por tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 13/24 & 1/24 \\ -11/6 & 7/24 & 5/24 \\ 1/6 & -11/24 & 1/24 \end{bmatrix}$$

4. Determine si la matriz es ortogonal

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para verificar que una matriz sea ortogonal se debe cumplir que el producto de esa matriz por la transpuesta sea igual a la identidad

$$B * B^T = I$$

Obteniendo la transpuesta nos queda:

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ahora se hace la multiplicación

$$B * B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathit{Por\ lo\ que\ se\ puede\ concluir\ que\ la\ matriz\ B\ si\ es\ ortogonal,}$$

$$\mathit{ya\ que\ se\ cumple\ al\ condición}$$

4.3 Propiedades de matrices relevantes para programación lineal

5. Explique la importancia de las matrices en la optimización lineal y resuelva un problema de transportes con matrices.

Las matrices permiten expresar y resolver problemas complejos de optimización de manera organizada y eficiente. En optimización lineal, facilitan la representación de restricciones, el cálculo de funciones objetivo y la aplicación de métodos como el simplex o el método de transporte. Estas herramientas ayudan a encontrar la mejor solución con el menor costo o el máximo beneficio, especialmente en problemas con múltiples variables e interacciones.

Ejemplo:

Se tiene una empresa que tiene 2 fábricas A y B con 2 destinos X y Y, el objetivo es minimizar el costo del transporte

La oferta de las fabricas es:

A: 20 unidades

B: 30 unidades

La demanda de los destino es:

X: 25 unidades

Y: 25 unidades

El costo de transporte (en $ por unidad):

	Destino X	Destino Y
A	8	6
B	10	7

Se organiza el problema en una tabla, donde cada celda representa el costo por unidad de transporte:

	Destino X	Destino Y	Oferta
A	8	6	20
B	10	7	30
Demanda	25	25	

Se aplica el método de la esquina noroeste para resolver el problema

Se empieza desde la esquina superior izquierda y se asigna el máximo posible según la oferta y la demanda.

	Destino X	Destino Y	Oferta
A	8(20)	6	0
B	10	7	30

	Destino X	Destino Y	Oferta
A	8(20)	6	0
B	10(5)	7	25

	Destino X	Destino Y	Oferta
A	8(20)	6	0
B	10(5)	7(25)	0

Sumamos el producto de las cantidades enviadas por sus respectivos costos:

$$Costo\ total = (20 * 8) + (10 * 5) + (7 * 25)$$

$$= 160 + 50 + 175 = 385$$

$$\therefore El\ costo\ mínimo\ de\ transporte\ es\ de\ \$385$$

6. Determine el rango de la siguiente matriz y explique su significado en un contexto de programación lineal

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

El rango de una matriz es el número de filas o columnas que son linealmente independientes

Para determinar el rango primero se aplica el método de eliminación por filas

Se multiplica por (-2) la primera fila y se le suma a la segunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Se multiplica por (-3) la primera fila y se le suma a la tercera

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede identificar que nos quedo una sola fila que no es nula

(1,2,3,4)

$$\therefore Por\ lo\ que\ se\ puede\ concluir\ que\ el\ rango\ de\ la\ matriz\ C\ es\ 1, porque$$

$$solamente\ hay\ una\ fila\ que\ es\ linealmente\ independiente, ya\ que\ las\ otras$$

$$filas\ eran\ combinaciones\ lineales\ de\ la\ primera$$

4.4 Problemas adicionales

7. Encuentre la factorización LU de la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

La factorización LU consiste en descomponer una matriz A en el producto de dos matrices

$$A = L * U$$

Donde

- $L\ es\ una\ matriz\ triangular\ inferior (con\ 1\ en\ la\ diagonal\ principal)$
- $U\ es\ una\ matriz\ triangular\ superior$

Para obtener U

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 - 6/4 & 3 - (3)(6/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Para obtener L, la matriz L siempre tiene 1 en la diagonal principal y en la fila 2 se coloca el multiplicador m, que en este caso m=3/2

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidos L y U se hace la multiplicación

$$L * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

8. Resuelva el siguiente sistema mediante factorización LU

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x + 3y + 3z = 14 \\ y + 4z = 8 \end{cases}$$

Pasando a forma matricial la matriz de los coeficientes y a un vector los términos independientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para obtener U

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2-2 & 3-2(2) & 3-2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Para obtener L se tiene hacer una matriz triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primera columna de U_{21} el multiplicador es 2

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la segunda columna de U_{32} el multiplicador es -1 por lo que en esta posición ira el -1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema $L * y = b$ donde L es la matriz triangular inferior y b el vector de términos independientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x = 6$$

$$2x + y = 14 \rightarrow y = 14 - 2x \rightarrow y = 2$$

$$-y + z = 8 \rightarrow z = 8 + y \rightarrow z = 10$$

Ahora se resuelve el sistema $U * x = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$z = 2$$

$$-y + z = 2 \rightarrow y = -2 + z \rightarrow y = 0$$

$$x + 2y + z = 6 \rightarrow x = 6 - 2y - z \rightarrow x = 4$$

$$\therefore \mathit{Las\ soluciones\ del\ problemas\ son}\ x = 4, y = 0, z = 2$$

9. Determine si la matriz es diagonalizable y justifique su respuesta:

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Una matriz es diagonalizable si:

- Todos los autovalores son distintos, la matriz SIEMPRE es diagonalizable.
- Hay autovalores repetidos, debes verificar que la multiplicidad geométrica = multiplicidad algebraica para cada uno.

$$\det(E - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 6 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 18$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 6$$

Resolviendo por formula general

$$\lambda^2 - 7\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2\, 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$\lambda_1 = 7.77 \quad \lambda_2 = -0.77$$

Para $\lambda_1 = 7.77$

$$(A - 7.77I)v = 0 \rightarrow 1\ autovector$$

Para $\lambda_2 = -0.77$

$$(A + 0.77I)v = 0 \rightarrow 1\ autovector$$

$$\therefore Como\ los\ autovalores\ son\ diferentes\ la\ matriz\ es\ diagonalizable$$

10. Explique y aplique el método de Jacobi para resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 10x + 2y - z = 27 \\ -3x - 6y + 2z = -61 \\ x + y + 5z = -21 \end{cases}$$

El método de Jacobi es un procedimiento iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma A x=b. La idea principal es despejar cada incógnita en función de las demás y calcular su valor en cada iteración utilizando únicamente los resultados de la iteración anterior.

Para aplicar el método, primero se reorganiza el sistema para que cada ecuación tenga una incógnita aislada.

El proceso inicia con una estimación inicial para las incógnitas (normalmente ceros o valores cercanos a la solución esperada). En cada iteración, se calculan los nuevos valores de todas las incógnitas utilizando los resultados de la iteración anterior. Este procedimiento se repite hasta que las diferencias entre los valores sucesivos sean suficientemente pequeñas, es decir, hasta que el error esté por debajo de una tolerancia definida.

Para resolver el sistema se despeja una incógnita de cada ecuación:

$$x = \frac{27 - 2y + z}{10}$$

$$y = \frac{61 - 3x + 2z}{6}$$

$$z = \frac{-21 - x - y}{5}$$

Se comienza con la primera iteración $x = y = z = 0$

Iteración 1

$$x = \frac{27 - 2(0) + 0}{10} = 2.7$$

$$y = \frac{61 - 3(0) + 2(0)}{6} = 10.17$$

$$z = \frac{-21 - (0) - (0)}{5} = -4.2$$

Iteración 2

$$x = \frac{27 - 2(10.17) - 4.2}{10} = 0.246$$

$$y = \frac{61 - 3(2.7) + 2(-4.2)}{6} = 7.42$$

$$z = \frac{-21 - (2.7) - (10.17)}{5} = -6.77$$

$$Ea_1 x = \left|\frac{0.246 - 2.7}{0.246}\right| = 9.97$$

$$Ea_1 y = \left|\frac{7.42 - 10.17}{7.42}\right| = 1.48$$

$$Ea_1 z = \left|\frac{6.67 + 4.2}{6.67}\right| = 1.63$$

Iteración 3

$$x = \frac{27 - 2(7.42) - 6.77}{10} = 0.539$$

$$y = \frac{61 - 3(0.246) + 2(-6.77)}{6} = 7.78$$

$$z = \frac{-21 - (0.246) - (7.42)}{5} = -5.73$$

$$Ea_2 x = \left|\frac{0.539 - 0.246}{0.539}\right| = 0.54$$

$$Ea_2 y = \left|\frac{7.78 - 7.42}{7.78}\right| = 0.046$$

$$Ea_2 z = \left|\frac{-5.73 + 6.67}{-5.73}\right| = 0.16$$

Las iteraciones se siguen haciendo hasta obtener el porcentaje de error deseado

$$\therefore Los\ valores\ aproximados\ de\ las\ incógnitas\ son:$$

$$x = 0.539, y = 7.78, z = -5.73$$