4.1 Operaciones con matrices

1. Encuentra la inversa de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la inversa

Se obtiene definiendo la matriz identidad del lado derecho

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ultimo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de matrices

$$\det AB = detA * detB$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4+0 & 2-3-1 & 10-8+0 \\ 6+4+0 & 3+3+1 & 15+8+0 \\ 0+8+0 & 0+6-3 & 0+16+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 10 & 7 & 23 \\ 8 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$det|A * B| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 10 & 7 & 23 \\ 8 & 3 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & 7 & 23 & 10 & 7 \\ 8 & 3 & 16 & 8 & 3 \end{vmatrix} = (0 * 7 * 16) + (-2 * 23 * 8)$$

$$+(2 * 10 * 3) - (2 * 7 * 8) - (0 * 23 * 3) - (-2 * 10 * 16)$$

$$= 0 - 368 + 60 - 112 - 0 + 320 = -100$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 6 - (0 - 4 - 9) = 12 + 13 = 25$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 20 - (0 - 16 + 0) = -20 + 16 = -4$$

$$\text{detA} * \det B = 25 * -4 = -100$$

$$det|A * B| = detA * detB$$

$$-100 = -100$$

$$\therefore \textit{Por lo tanto se demuestra} \text{ que el determinante}$$

$$\text{de un producto de matrices es igual al producto de matrices}$$

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{7 - z + y}{4}, y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}, z = \frac{5 - x + y}{3}$$

Iteracion 1

$$x = y = z = 0$$

$$x = \frac{7 - 0 + 0}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$y = \frac{1 + 2(\frac{7}{4}) + 2(0)}{4} = \frac{\frac{9}{2}}{4} = \frac{9}{8} = 1.125$$

$$z = \frac{5 - \frac{7}{4} + \frac{9}{8}}{3} = \frac{35}{24} \approx 1.4583$$

Iteración 2

$$x = \frac{7 - \frac{35}{24} + \frac{9}{8}}{4} = \frac{\frac{20}{3}}{4} = \frac{5}{3} \approx 1.6667$$

$$y=\frac{1+2(\frac{5}{3})+2(\frac{35}{24})}{4}=\frac{\frac{29}{4}}{4}=\frac{29}{16}=1.8125$$

$$z=\frac{5-\frac{5}{3}+\frac{29}{16}}{3}=\frac{\frac{247}{48}}{3}=\frac{247}{144}\approx 1.7153$$

$$Ea_1x=\left|\frac{1.6667-1.75}{1.6667}\right|=0.049$$

$$Ea_1y=\left|\frac{1.8125-1.125}{1.8125}\right|=0.379$$

$$Ea_1z=\left|\frac{1.7153-1.4583}{1.7153}\right|=0.1498$$

Iteración 3

$$x=\frac{7-\frac{247}{144}+\frac{29}{16}}{4}=\frac{\frac{1025}{144}}{4}=\frac{1025}{576}\approx 1.7743$$

$$y=\frac{1+2(\frac{1025}{576})+2(\frac{247}{144})}{4}=\frac{\frac{767}{96}}{4}=\frac{767}{384}=1.997$$

$$z=\frac{5-\frac{1025}{576}+\frac{767}{384}}{3}=\frac{6011}{3456}\approx 1.74$$

$$Ea_2x=\left|\frac{1.7743-1.6667}{1.7743}\right|=0.06$$

$$Ea_2y=\left|\frac{1.997-1.8125}{1.997}\right|=0.09$$

$$Ea_2z=\left|\frac{1.74-1.7153}{1.74}\right|=0.01$$

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (-2) y se le suma a la segunda fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (-3) y se la suma a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz se puede representar de la siguiente forma

$$x + 2y + 3z = 0$$

Al ser *y z* variables libres, se pueden parametrizar:

$$y = \alpha, z = \beta$$

La representación vectorial de la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cualquier combinación lineal de estos vectores es la solución de sistema

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. Encuentra la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores {(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)}

Se define de forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (-2) y se le suma a la segunda fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (-3) y se la suma a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se obtuvo ceros en las filas 2 y 3, se puede decir que los vectores eran linealmente dependientes del primer vector

$$(1,2,3)$$

Lo cual se puede reescribir de la siguiente manera

$$x + 2y + 3z = 0$$

Al despejar x se tienen las variables libres *y y z, la cuales se pueden parametrizar de la siguiente forma*

$$x = -2y - 3z \rightarrow x = -2\alpha - 3\beta$$

$$y = \alpha$$

$$z = \beta$$

La representación vectorial de la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ La\ base\ del\ sistema\ se\ define\ como, el\ cual\ tiene\ una\ dimensión\ de\ 2$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Determine los autovalores y auto vectores de la matriz

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para obtener los autovalores de la matriz G se tiene que multiplicar los elementos de la diagonal principal por λ y obtener el determinante de la nueva matriz

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(5-\lambda) - (-2 * -2) = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4$$

Se obtiene el polinomio característico

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

Factorizando nos queda

$$P(\lambda) = (\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$$

Una vez obtenidos los autovalores de λ se sustituyen en la matriz para obtener los auto vectores

Para $\lambda_1 = 7$

$$(A - \lambda I) * x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

El sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Las ecuaciones que se obtienen son

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Se simplifica a

$$x_1 + x_2 = 0$$

El autovector es

$$x_2 = -x_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

El sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Las ecuaciones que se obtienen son

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Se simplifica a

$$x_1 - x_2 = 0$$

El autovector es

$$x_1 = x_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Los autovectores de la matriz son } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza álgebra lineal para reducir dimensiones

PCA resume el contenido de información de grandes conjuntos de datos en un conjunto más pequeño de variables no correlacionadas conocidas como componentes principales. Estos componentes principales son combinaciones lineales de las variables originales que tienen la varianza máxima en comparación con otras combinaciones lineales. Estos componentes capturan tanta información del conjunto de datos original como sea posible.

Esta técnica estadística involucra operaciones de álgebra lineal y matricial, y transforma el conjunto de datos original en un nuevo sistema de coordenadas que está estructurado por los componentes principales. Los vectores propios y los valores propios de la matriz de covarianza que sustentan los componentes principales permiten el análisis de estas transformaciones lineales.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la mátriz:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La descomposición en valores singulares consiste en obtener $U \sum V^t$

Primero se calcula la transpuesta de H

$$H^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular $H^T H$

$$H^T H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Se calculan los autovalores de $H^T H$

$$\begin{bmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (13-\lambda)(5-\lambda) - 49 = \lambda^2 - 18\lambda + 65 - 49$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Aplicando la fórmula general

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{18 \pm 16.12}{2(1)}$$

$$\lambda_1 = 17.06,\ \lambda_2 = 0.94$$

Una vez obtenidos los autovalores de λ se sustituyen en la matriz para obtener los auto vectores

Para $\lambda_1 = 17.06$

$$\begin{bmatrix} 13 - 17.06 & 7 \\ 7 & 5 - 17.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.06 & 7 \\ 7 & -12.06 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente ecuación

$$-4.06v_1 + 7v_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{7v_2}{4.06} \approx 1.73$$

El autovector es:

$$\begin{pmatrix} 1.73 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 0.94$

$$\begin{bmatrix} 13 - 0.94 & 7 \\ 7 & 5 - 0.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.06 & 7 \\ 7 & 4.06 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente ecuación

$$12.06v_1 + 7v_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{-7v_2}{12.06} \approx -0.58$$

El autovector es:

$$\begin{pmatrix} -0.58 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se pueden construir V y V^T

$$V = \begin{bmatrix} 1.73 & -0.58 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 1.73 & 1 \\ -0.58 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular U se multiplica H por su transpuesta, como lo habíamos hecho anteriormente

$$HH^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Se calculan los autovalores de HH^T

$$\begin{bmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (10-\lambda)(8-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

Anteriormente ya habíamos encontrado los autovalores de esta ecuación, por lo que sabemos que son:

$$\lambda_1 = 17.06,\ \lambda_2 = 0.94$$

Para $\lambda_1 = 17.06$

$$\begin{bmatrix} 10-17.06 & 8 \\ 8 & 10-17.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.06 & 8 \\ 8 & -9.06 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema

$$-7.06u_1 + 8u_2 = 0$$

$$u_1 = \frac{8u_2}{7.06} \approx 1.13$$

El autovector es:

$$\begin{pmatrix} 1.13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 0.94$

$$\begin{bmatrix} 10-0.94 & 8 \\ 8 & 10-0.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.06 & 8 \\ 8 & -7.06 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema

$$-9.06u_1 + 8u_2 = 0$$

$$u_1 = \frac{-8u_2}{9.06} \approx -0.88$$

El autovector es:

$$\begin{pmatrix} -0.88 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se puede obtener U

$$U = \begin{bmatrix} 1.13 & -0.88 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $\sum$ se calculan los valores singulares de $\lambda_1 \ y \ \lambda_2$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{17.06}, \sigma_2 = \sqrt{0.94}$$

$$\sigma_1 = 4.14, \sigma_2 = 0.97$$

$$\therefore La\ descomposición\ de\ la\ matriz\ es$$

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1.13 & -0.88 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.14 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 1.73 & 1 \\ -0.58 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Analice el uso de algebra lineal en el aprendizaje profundo de redes neuronales

El álgebra lineal es esencial en el aprendizaje profundo porque las redes neuronales utilizan vectores, matrices y tensores para representar y procesar datos. Las operaciones clave incluyen la multiplicación de matrices (para calcular las salidas de cada capa), el producto punto (para medir similitudes) y las transformaciones lineales (combinaciones de entradas con pesos y sesgos). Además, las funciones de activación introducen no linealidades para que las redes aprendan patrones complejos. Técnicas como la descomposición matricial optimizan el entrenamiento y reducen la complejidad computacional.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de los datos de IA

Los espacios vectoriales en IA permiten representar datos complejos (como imágenes o texto) en vectores numéricos, facilitando su procesamiento. Ayudan a medir similitudes entre datos, clasificar información y encontrar patrones. Además, técnicas como PCA reducen la dimensionalidad, optimizando el rendimiento y la eficiencia de los modelos.