**4.1 Operaciones con matrices**

1. Encuentra la inversa de la siguiente matriz

Para obtener la inversa

Se obtiene definiendo la matriz identidad del lado derecho

*=*  =

Por ultimo

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de matrices

**4.2 Sistemas de ecuaciones lineales**

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

*Iteracion 1*

*Iteración 2*

*Iteración 3*

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

Se multiplica la primera fila por (-2) y se le suma a la segunda fila

Se multiplica la primera fila por (-3) y se la suma a la tercera fila

La matriz se puede representar de la siguiente forma

Al ser *y z* variables libres, se pueden parametrizar:

La representación vectorial de la solución general es:

Cualquier combinación lineal de estos vectores es la solución de sistema

**4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores**

5. Encuentra la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores {(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)}

Se define de forma matricial

Se multiplica la primera fila por (-2) y se le suma a la segunda fila

Se multiplica la primera fila por (-3) y se la suma a la tercera fila

Como se obtuvo ceros en las filas 2 y 3, se puede decir que los vectores eran linealmente dependientes del primer vector

Lo cual se puede reescribir de la siguiente manera

Al despejar x se tienen las variables libres *y y z, la cuales se pueden parametrizar de la siguiente forma*

La representación vectorial de la solución general es:

6. Determine los autovalores y auto vectores de la matriz

Para obtener los autovalores de la matriz G se tiene que multiplicar los elementos de la diagonal principal por y obtener el determinante de la nueva matriz

Se obtiene el polinomio característico

Factorizando nos queda

Una vez obtenidos los autovalores de se sustituyen en la matriz para obtener los auto vectores

Para

El sistema queda como:

Las ecuaciones que se obtienen son

Se simplifica a

El autovector es

Para

El sistema queda como:

Las ecuaciones que se obtienen son

Se simplifica a

El autovector es

**4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad**

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza álgebra lineal para reducir dimensiones

PCA resume el contenido de información de grandes conjuntos de datos en un conjunto más pequeño de variables no correlacionadas conocidas como componentes principales. Estos componentes principales son combinaciones lineales de las variables originales que tienen la varianza máxima en comparación con otras combinaciones lineales. Estos componentes capturan tanta información del conjunto de datos original como sea posible.

Esta técnica estadística involucra operaciones de álgebra lineal y matricial, y transforma el conjunto de datos original en un nuevo sistema de coordenadas que está estructurado por los componentes principales. Los vectores propios y los valores propios de la matriz de covarianza que sustentan los componentes principales permiten el análisis de estas transformaciones lineales.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la mátriz:

La descomposición en valores singulares consiste en obtener

Primero se calcula la transpuesta de H

Calcular

Se calculan los autovalores de

Aplicando la fórmula general

Una vez obtenidos los autovalores de se sustituyen en la matriz para obtener los auto vectores

Para

Se obtiene la siguiente ecuación

El autovector es:

Para

Se obtiene la siguiente ecuación

El autovector es:

Ahora se pueden construir V y VT

Para calcular U se multiplica H por su transpuesta, como lo habíamos hecho anteriormente

Se calculan los autovalores de

Anteriormente ya habíamos encontrado los autovalores de esta ecuación, por lo que sabemos que son:

Para

Se resuelve el sistema

El autovector es:

Para

Se resuelve el sistema

El autovector es:

Ahora se puede obtener U

Para ∑ se calculan los valores singulares de

9. Analice el uso de algebra lineal en el aprendizaje profundo de redes neuronales

El álgebra lineal es esencial en el aprendizaje profundo porque las redes neuronales utilizan vectores, matrices y tensores para representar y procesar datos. Las operaciones clave incluyen la multiplicación de matrices (para calcular las salidas de cada capa), el producto punto (para medir similitudes) y las transformaciones lineales (combinaciones de entradas con pesos y sesgos). Además, las funciones de activación introducen no linealidades para que las redes aprendan patrones complejos. Técnicas como la descomposición matricial optimizan el entrenamiento y reducen la complejidad computacional.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de los datos de IA

Los espacios vectoriales en IA permiten representar datos complejos (como imágenes o texto) en vectores numéricos, facilitando su procesamiento. Ayudan a medir similitudes entre datos, clasificar información y encontrar patrones. Además, técnicas como PCA reducen la dimensionalidad, optimizando el rendimiento y la eficiencia de los modelos.