Phép vị tự quay

Nguyễn Văn Linh

Năm 2015

1 Giới thiệu

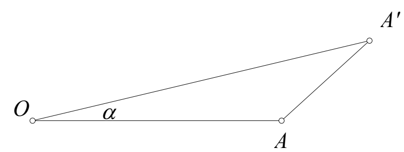
Phép vị tự và phép quay là những phép biến hình quen thuộc. Tuy nhiên phép vị tự quay còn ít được đề cập tới. Vì vậy trong bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc các tính chất và ứng dụng của phép vị tự quay.

Trước tiên chúng ta cần hiểu định nghĩa của phép vị tự quay.

Định nghĩa. Phép vị tự quay là hợp của một phép vị tự và một phép quay có chung tâm.

Nếu kí hiệu phép vị tự quay có tâm O, tỉ số k và góc quay α là $\mathcal{S}_O^{k,\alpha}$ thì

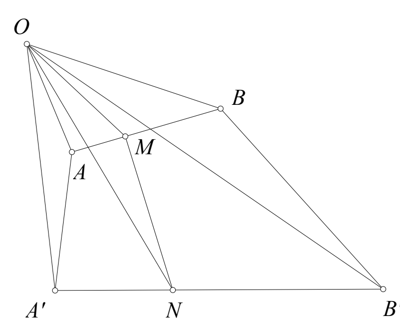
$\mathcal{S}_O^{k,\alpha}: A \mapsto B$ khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = k$ và $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$.



Ở đây ta hiểu α là góc có hướng theo chiều ngược kim đồng hồ, $-\alpha$ là góc có chiều xuôi kim đồng hồ. Tuy nhiên trong bài viết này không quan tâm tới hướng của góc α.

2 Tính chất

Tính chất 1. $\mathcal{S}_O : A \mapsto A', B \mapsto B'$ thì $(AB) \mapsto (A'B')$, $[AB] \mapsto [A'B']$.



Chứng minh. Thật vậy, gọi M là điểm bất kì trên đường thẳng AB, N là điểm trên $A'B'$ sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA'}}{\overline{NB'}}$.

Từ giả thiết suy ra $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$, từ đó $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$. Mà $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA'}}{\overline{NB'}}$ nên $\triangle OAM \sim \triangle OA'N$. Từ đó $\triangle OAA' \sim \triangle OMN$ hay $\mathcal{S}_O : M \mapsto N$. $\square$

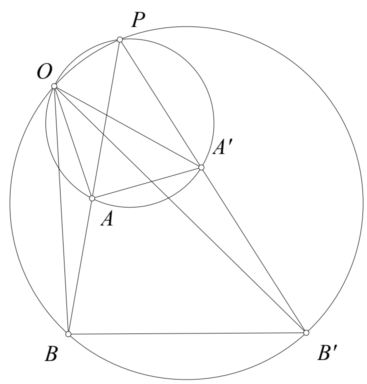
Từ lời giải tính chất 1 chúng ta có tính chất 2.

Tính chất 2. $\mathcal{S}_O : [AB] \mapsto [A'B']$, $M \in AB, N \in A'B'$ sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA'}}{\overline{NB'}}$ thì $\mathcal{S}_O : M \mapsto N$.

Tính chất 3. $\mathcal{S}_O : [AB] \mapsto [A'B']$ thì tồn tại một phép vị tự quay khác có tâm $O, \mathcal{S}'_O : [AA'] \mapsto [B'B']$.

Chứng minh. Ta có $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$ nên $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$. Do đó tồn tại một phép vị tự quay tâm O biến $[AA']$ thành $[BB']$. $\square$

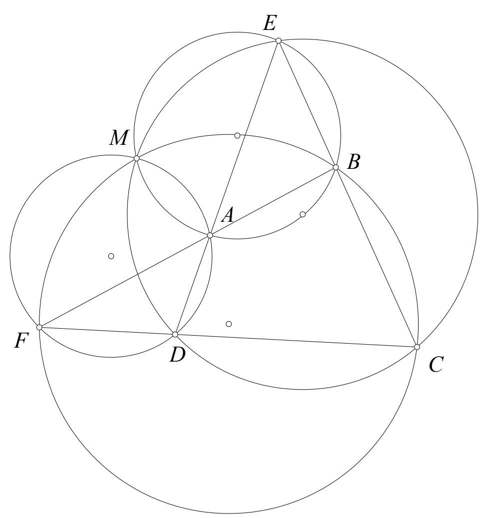
Tính chất 4. Cho hai đoạn thẳng không song song $[AB]$ và $[A'B']$. Khi đó luôn tồn tại một phép vị tự quay tâm O biến $[AB]$ thành $[A'B']$. Nếu gọi P là giao của hai đường thẳng AB và $A'B'$ thì O là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAA' và PBB'.



Chứng minh. Do O là giao điểm thứ hai của (PAA') và (PBB') nên $\angle OAP = \angle OA'P$, $\angle OBP = \angle OB'P$. Từ đó $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$. Như vậy O là tâm của phép vị tự quay biến $[AB]$ thành $[A'B']$. $\square$

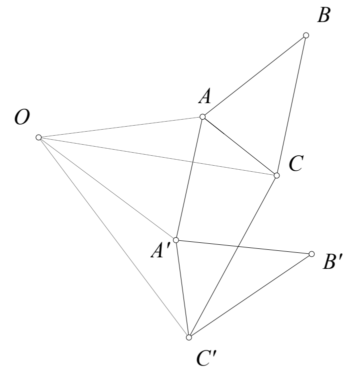
Từ tính chất 3 và 4 ta có hệ quả quen thuộc: điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

Cho tứ giác $ABCD$. AD giao BC tại E, AB giao CD tại F. Khi đó đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EAB, ECD, FBC, FAD đồng quy tại một điểm.



Như vậy điểm Miquel của tứ giác toàn phần là tâm của phép vị tự quay của các cặp cạnh đối diện của tứ giác.

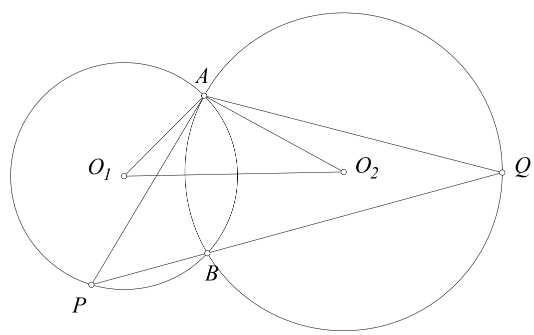
Tính chất 5. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng cùng hướng. Khi đó luôn tồn tại một phép vị tự quay biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.



Chứng minh. Xét phép vị tự quay $\mathcal{S}_O : [AB] \mapsto [A'B']$. Khi đó $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$. Mà $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ nên dễ chứng minh $\triangle OAA' \sim \triangle OCC'$.

Do đó $\mathcal{S}_O : C \mapsto C'$, suy ra $\mathcal{S}_O : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$. □

Tính chất 6. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) giao nhau tại A và B. Khi đó A và B là hai tâm vị tự quay biến (O_1) thành (O_2).

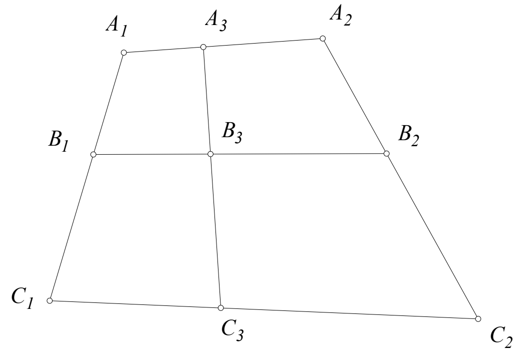


Chứng minh. Gọi P là một điểm bất kì trên (O_1). Đường thẳng PB giao (O_2) lần thứ hai tại Q. Dễ thấy $\triangle APQ \sim \triangle AO_1O_2$. Do đó xét phép vị tự tâm A biến O_1 thành O_2 :

$\mathcal{S}_A^{\frac{R_2}{R_1},(AO_1,AO_2)} : P \mapsto Q$. Như vậy ứng với mỗi điểm P, ảnh của P qua phép vị tự này luôn nằm trên (O_2). Do đó phép vị tự tâm A biến (O_1) thành (O_2). Chứng minh tương tự với tâm B. □

3 Ví dụ

Bài 1. *(Bổ đề ERIQ)* Cho hai đường thẳng d_1 và d_2. Trên d_1 lấy các điểm A_1, B_1, C_1, trên d_2 lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} = k$. Trên A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt lấy các điểm A_3, B_3, C_3 sao cho $\dfrac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \dfrac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}} = \dfrac{\overline{C_3C_1}}{\overline{C_3C_2}}$. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3C_3}} = k$.



Chứng minh. Xét phép vị tự quay tâm O, $\mathcal{S}_O : [A_1C_1] \mapsto [A_2C_2]$.

Do $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}}$ nên $\mathcal{S}_O : B_1 \mapsto B_2$. Suy ra $\mathcal{S}_O$: $[A_1B_1] \mapsto [A_2B_2]$. Theo tính chất 3, tồn tại một phép vị tự quay $\mathcal{S}'_O : [A_1A_2] \mapsto [B_1B_2]$. Lại có $\dfrac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \dfrac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}}$ nên $\mathcal{S}'_O : A_3 \mapsto B_3$.

Suy ra tồn tại một phép vị tự quay $\mathcal{S}''_O : [A_3B_3] \mapsto [A_2B_2]$.

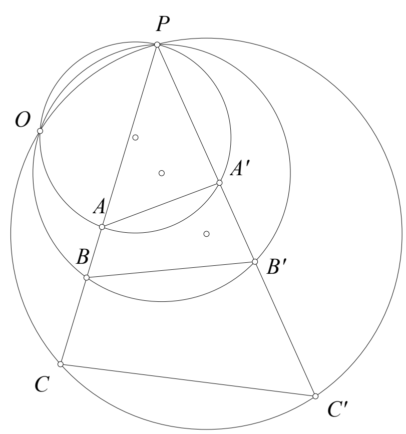
Tương tự, tồn tại phép vị tự quay $\mathcal{S}'''_O : [A_3C_3] \mapsto [A_2C_2]$.

Do $\mathcal{S}''_O$ và $\mathcal{S}'''_O$ cùng biến A_3 thành A_2 nên $\mathcal{S}''_O \equiv \mathcal{S}'''_O$.

Vậy $\mathcal{S}''_O : A_3 \mapsto A_2, B_3 \mapsto B_2, C_3 \mapsto C_2$.

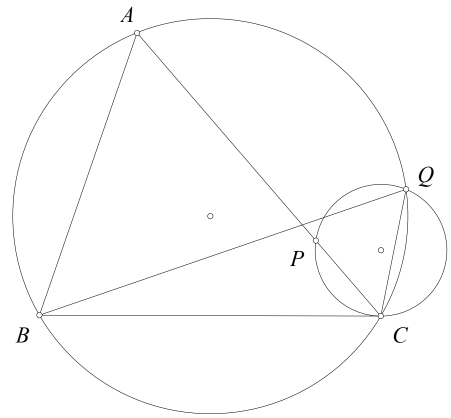
Mà A_2, B_2, C_2 thẳng hàng đồng thời $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} = k$ nên A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3C_3}} = k$. □

Bài 2. Cho hai đường thẳng d và d'. Trên d lấy ba điểm A, B, C, trên d' lấy ba điểm A', B', C' sao cho $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$. Gọi P là giao của d và d'. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAA', PBB', PCC' đồng trục.



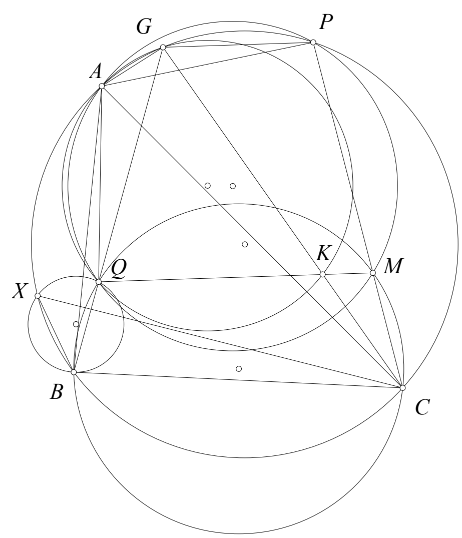
Chứng minh. Xét phép vị tự quay $\mathcal{S}_O : [AB] \mapsto [A'B']$ thì $P \in (PAA'), (PBB')$. Do $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ nên $\mathcal{S}_O : C \mapsto C'$. Suy ra $O \in (PCC')$. Vậy 3 đường tròn $(PAA'), (PBB'), (PCC')$ có chung trục đẳng phương OP. □

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), BC cố định, A chuyển động trên một trong hai cung BC. P là điểm thuộc đoạn AC sao cho $\dfrac{CP}{AB} = k$ không đổi. Chứng minh rằng P chuyển động trên một đường tròn cố định.



Chứng minh. Xét phép vị tự quay $\mathcal{S}_Q : [AB] \mapsto [PC]$. Theo tính chất 3, tồn tại $\mathcal{S}'_Q : [AP] \mapsto [BC]$. Do AP giao BC tại C nên theo tính chất 4, $Q \in (ABC)$ và $Q \in (PCC)$ (đường tròn qua P và tiếp xúc với BC tại C). Do $\mathcal{S}_Q : B \mapsto C$ nên $\dfrac{QC}{QB} = k$. Suy ra Q cố định. Do đó (QCC) cố định. Vậy P luôn chuyển động trên đường tròn qua Q và tiếp xúc với BC tại C. □

Bài 4. *(IMO Shortlist 2014)*. Cho 3 điểm A, B, C cố định trên đường tròn (O). Gọi λ là một hằng số và $\lambda \in (0, 1)$. Với mỗi điểm $P \neq A, B, C$ trên (O), gọi M là điểm trên đoạn thẳng CP sao cho $CM = \lambda \cdot CP$. Q là giao điểm thứ hai của (AMP) và (BMC). Chứng minh rằng khi P chuyển động, Q luôn nằm trên một đường tròn cố định.

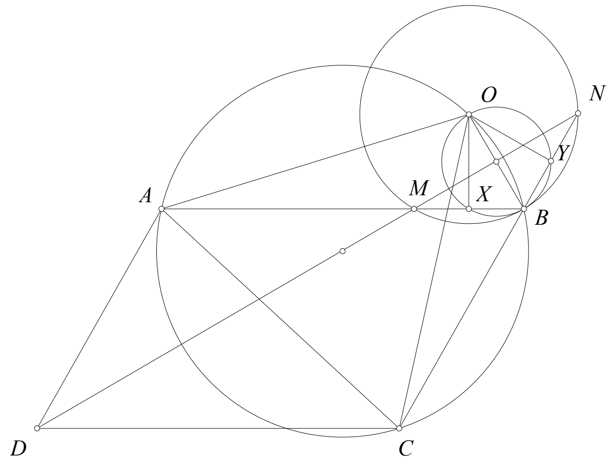


Chứng minh. Gọi G là giao của BQ với (O), K là giao của GC và QM. Do tứ giác $BQMC$ nội tiếp nên theo định lý Reim, $PG \parallel QM$. Do đó $\dfrac{KC}{GC} = \dfrac{MC}{PC} = \lambda$.

Ta có $\angle AGK = 180^\circ - \angle APM = 180^\circ - \angle AGC$ nên A, G, M, Q cùng thuộc một đường tròn.

Do (GQK) giao (GBC) tại A nên tồn tại một phép vị tự quay $\mathcal{S}_A : [BG] \mapsto [CK]$. Suy ra $\dfrac{BQ}{CK} = \dfrac{AB}{AC}$. Từ đó $\dfrac{BQ}{CG} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \lambda$. Áp dụng bài toán 3 suy ra Q chuyển động trên một đường tròn đi qua điểm X trên (O) sao cho $\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \lambda$ và tiếp xúc với BC tại B. □

Bài 5. *(IMO 2007)* Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng d đi qua D cắt AB, BC lần lượt tại M, N. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác BMN. Chứng minh rằng nếu O nằm trên (ABC) thì d là phân giác $\angle ADC$.



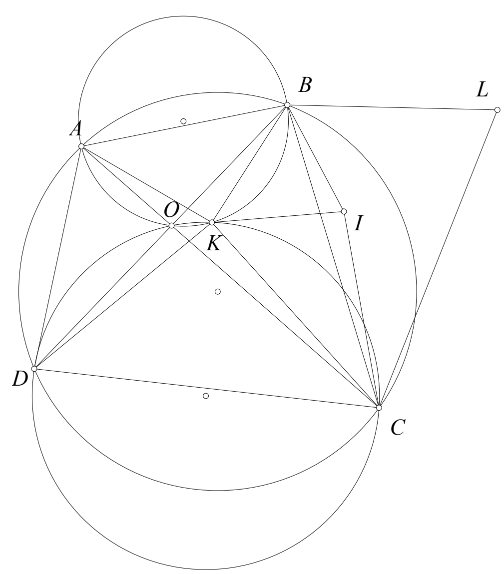
Chứng minh. Xét phép vị tự quay $\mathcal{S}_{O'} : [AB] \mapsto [CN]$. Ta có $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BN}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BN}}$ nên $\mathcal{S}_{O'} : M \mapsto B$.

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của MB, NB suy ra $\mathcal{S}_{O'} : X \mapsto Y$.

Do đó $\mathcal{S}_{O'} : [AX] \mapsto [CY]$. Mà AX giao CY tại B nên theo tính chất 4, $O' \in (BXY), (BAC)$. Suy ra $O' \equiv O$. Từ đó $\triangle OAC \sim \triangle OMB$, suy ra $OA = OC$ hay BO là phân giác ngoài của $\angle ABC$. Suy ra tam giác BMN cân tại B.

Ta thu được $\angle MDC = \angle BMN = \angle BNM = \angle ADN$. □

Bài 6. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. AC giao BD tại O. (OAB) giao (OCD) tại K nằm trong $ABCD$. Dựng điểm L thuộc nửa mặt phẳng bờ BC không chứa O sao cho tam giác BCL đồng dạng với tam giác ADK. Chứng minh rằng tứ giác $BKCL$ ngoại tiếp.



Chứng minh. Dựng điểm I sao cho hai tam giác BKD và BIC đồng dạng thuận. Suy ra $\triangle BKI \sim \triangle BDC$. Từ đó $\angle BKI = \angle BDC$.

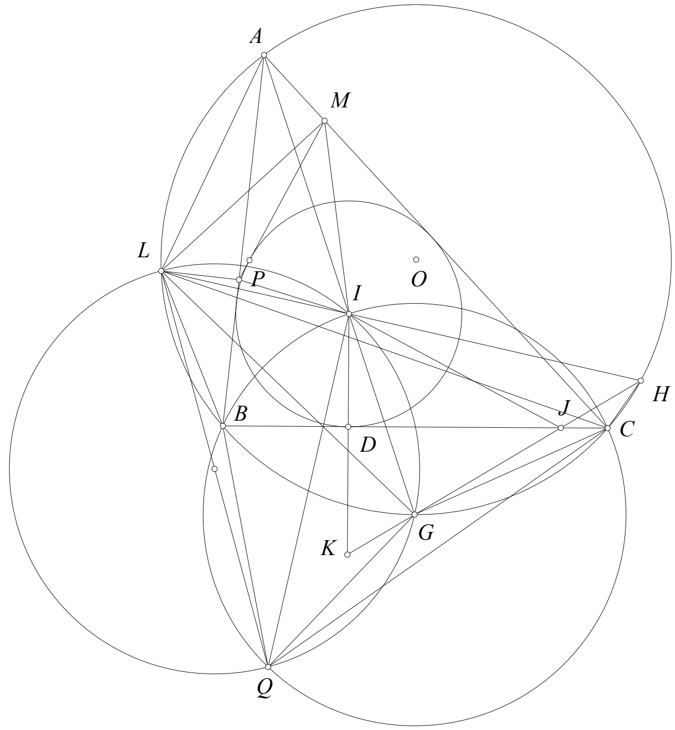
Do $\triangle KAC \sim \triangle KBD$ nên $\triangle CIB \sim \triangle CKA$, từ đó $\triangle CKI \sim \triangle CAB$.

Ta thu được $\angle CKI = \angle CAB$. Lại có $\angle BDC = \angle CAB$ nên KI là phân giác $\angle BKC$.

Mặt khác, ta có $\angle KBI = \angle DBC$, $\angle KBL = \angle KBC + \angle CBL = \angle KBC + \angle DAK = \angle DAC + \angle OAK + \angle KBC = \angle DAC + \angle OBK + \angle KBC = \angle DAC + \angle DBC = 2\angle KBI$.

Suy ra BI là phân giác $\angle KBL$. Tương tự CI là phân giác $\angle KCL$. Vậy tứ giác $BKCL$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. □

Bài 7. *(Lym)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. J là trung điểm cung BC không chứa A. E thuộc ID, F thuộc BC sao cho EF đi qua J và $IE = IF$. EF cắt (O) tại G. IG cắt (O) tại L. Chứng minh rằng đường thẳng Simson của L ứng với tam giác ABC tiếp xúc với (I).



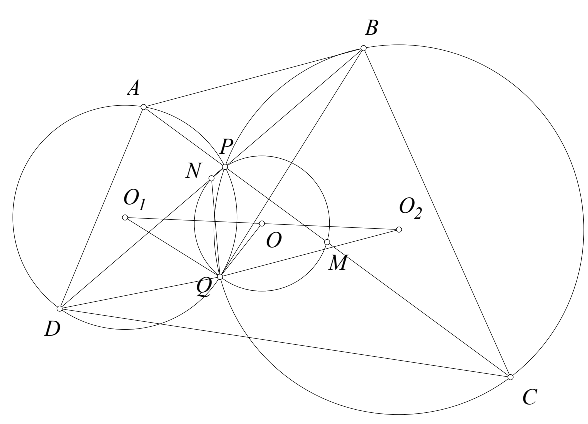
Chứng minh. Kẻ đường kính LQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác LIG.

Do $GI^2 = GJ.GH$ nên $\angle GIH = \angle IJG = \angle IKJ = 90^\circ - \angle GJB = 90^\circ - \angle GLH$.

Mà $\angle GIH + \angle GIQ = 90^\circ$ nên $\angle QIG = \angle ILG = \angle IQG$, suy ra $GI = GQ$ hay $Q \in (BIC)$.

Kẻ $LM \perp AC, LP \perp AB$. Ta có $\angle LQI = \angle LGI = \angle LBP = \angle LCM$ nên phép vị tự quay $\mathcal{S}_L^{\frac{LP}{LB},(LB,LP)} : B \mapsto P, Q \mapsto I, C \mapsto M$, suy ra $\triangle BQC \mapsto \triangle PIM$. Như vậy $\triangle BQC \sim \triangle PIM$. Suy ra $\angle PIM = \angle BQC = 180^\circ - \angle BIC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle MAP$. Vậy (I) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác APM hay PM tiếp xúc với (I). Ta có đpcm. □

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường chéo AC và BD giao nhau tại P. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm AC, BD, O_1O_2. Chứng minh rằng O là tâm ngoại tiếp tam giác MPN.



Chứng minh. Gọi Q là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Do Q là tâm vị tự quay của (O_1) và (O_2) nên $\mathcal{S}_Q : A \mapsto C, D \mapsto B$. Do đó tồn tại phép vị tự quay $\mathcal{S}'_Q : [AC] \mapsto [DB]$.

Lại có M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD nên $\mathcal{S}'_Q : M \mapsto N$.

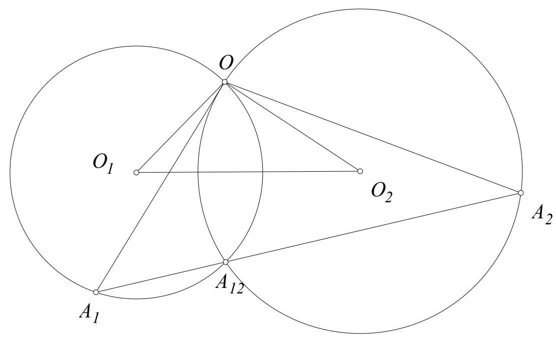
Từ đó $(PAD), (PBC), (PMN)$ cùng đi qua Q. Gọi O' là tâm của (PMN).

Ta có $\triangle O_1QO' \sim \triangle DQN$, $\triangle O_1QO_2 \sim \triangle DQB$ nên O' là trung điểm O_1O_2 hay $O' \equiv O$. Ta có đpcm. □

Nhận xét. Theo cách giải trên ta hoàn toàn có thể tổng quát bài toán bằng cách chọn các điểm M, N, O sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{ND}}{\overline{NB}} = \dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k$.

Cách giải khác cho bài toán này, xem [2].

Bài 9. Cho n đường tròn $C_1, C_2, ..., C_n$ cùng đi qua O. Gọi A_{ij} là giao điểm của C_i và C_j. B_1 là điểm bất kì trên C_1. B_1A_{12} cắt C_2 lần thứ hai tại B_2. Tương tự ta được $B_3, B_4, ..., B_n, B_{n+1}$. Chứng minh rằng $B_{n+1} \equiv B_1$.



Chứng minh. Gọi $O_1, O_2, ..., O_n$ lần lượt là tâm của $C_1, C_2, ..., C_n$.

Dễ chứng minh hai tam giác O_1OO_2 và A_1OA_2 đồng dạng cùng hướng.

Do đó $(OA_1, OA_2) \equiv (OO_1, OO_2) \pmod{\pi}$.

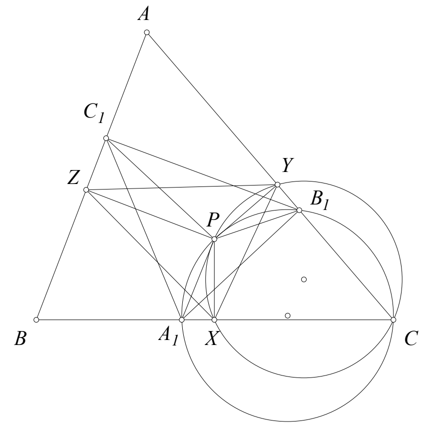
Chứng minh tương tự suy ra $(OA_1, OA_{n+1}) \equiv (OA_1, OA_2) + (OA_2, OA_3) + ... + (OA_n, OA_{n+1})$
$\equiv (OO_1, OO_2) + (OO_2, OO_3) + ... + (OO_n, OO_1) \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Vậy $A_{n+1} \equiv A_1$. □

Nhận xét. -Có thể chứng minh bài toán bằng phép quy nạp dựa trên điểm Miquel của tam giác.

-Dễ dàng chứng minh tích của n phép vị tự quay chung đỉnh là một phép vị tự quay. Kí hiệu $\mathcal{S}_{O_{xy}}$ là phép vị tự quay tâm O biến (O_x) thành (O_y). Ta có thể chứng minh bài toán bằng cách xét $\mathcal{S}_{O_{1n}} = \mathcal{S}_{O_{(n-1)n}} \circ ... \circ \mathcal{S}_{O_{34}} \circ \mathcal{S}_{O_{23}} \circ \mathcal{S}_{O_{12}}$. Suy ra B_1, A_{n1}, B_n thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác ABC. P là điểm bất kì trong mặt phẳng. Gọi XYZ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC. $A_1B_1C_1$ là tam giác nội tiếp tam giác ABC sao cho $A_1B_1C_1$ đồng dạng thuận với XYZ. Chứng minh P là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ (A_1, B_1, C_1).



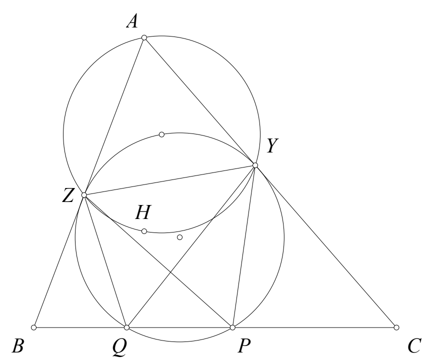
Chứng minh. Do hai tam giác $A_1B_1C_1$ và XYZ đồng dạng thuận nên tồn tại phép vị tự quay $\mathcal{S}'_P$: $\triangle A_1B_1C_1 \mapsto \triangle XYZ$.

Suy ra tồn tại $\mathcal{S}''_P : [A_1X] \mapsto [B_1Y]$. Do A_1X giao B_1Y tại C nên $P' \in (A_1B_1C), (XYC)$.

Chứng minh tương tự suy ra P' là giao của $(AYZ), (BXZ), (CXY)$ hay $P' \equiv P$. Mà P là giao của $(AB_1C_1), (BA_1C_1), (CA_1B_1)$ nên P là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ (A_1, B_1, C_1). □

Bài 11. *(USA TST 2012)* Cho tam giác ABC. P là một điểm chuyển động trên BC. Gọi Y, Z lần lượt là các điểm trên AC, AB sao cho $PY = PC, PZ = PB$. Chứng minh rằng (AYZ) luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh. Cách 1.

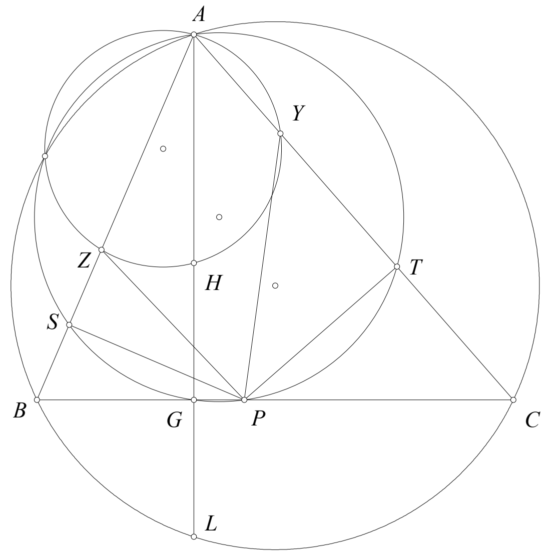


Dựa theo ý tưởng bài 8, ta sẽ tìm một điểm Q trên BC sao cho $\triangle QYZ$ đồng dạng cùng hướng với tam giác hình chiếu của trực tâm.

Gọi Q là giao điểm thứ hai của (PYZ) với BC.

Ta có $\angle YQZ = \angle YPZ = 180° - 2A$, $\angle ZYQ = \angle ZPB = 180° - 2B$, $\angle YZQ = \angle YPC = 180° - 2C$. Ta biết rằng tam giác hình chiếu DEF của trực tâm có 3 góc lần lượt bằng $180° - 2\angle A$, $180° - 2\angle B$, $180° - 2\angle C$, do đó $\triangle QYZ \sim \triangle DEF$. Suy ra trực tâm H là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ điểm (Q, Y, Z). Vậy (AYZ) luôn đi qua H.

Cách 2.



Gọi T, S lần lượt là hình chiếu của P trên AC, AB. Kẻ đường cao AG cắt (AEF) tại H, cắt (ABC) tại L.

Ta thấy S, T, G lần lượt là trung điểm của BZ, CY, HL.

Theo bài toán 2, $(AHY), (AGT), (ALC)$ đồng trục và $(AHZ), (AGS), (ALB)$ đồng trục.

Do $(ALC) \equiv (ALB), (AGT) \equiv (AGS)$ nên $(AHY) \equiv (AHZ)$. Vậy $H \in (AYZ)$. □

Nhận xét. Một số cách giải khác, xem [3].

4 Bài tập áp dụng

Bài 12. a) Cho tam giác ABC đồng dạng thuận với tam giác $A'B'C'$, X, Y, Z lần lượt thuộc AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AX}{XA'} = \dfrac{BY}{YB'} = \dfrac{CZ}{ZC'}$. Chứng minh rằng $\triangle XYZ \sim \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

b) Chứng minh bài toán với các điểm X, Y, Z thỏa mãn các tam giác AXA', BYB', CZC' đồng dạng thuận.

Bài 13. *(Vietnam TST 2013)*. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). AC giao BD tại I. phân giác góc AIB cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại X, Y, Z, T. Chứng minh rằng (AXT), (BXY), (CYZ), (DZT) cùng đi qua một điểm.

Bài 14. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Đường tròn đường kính AI cắt (O) tại X. (I) tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng XD đi qua trung điểm cung BC không chứa A.

Bài 15. Cho hình thang $ABCD$ vuông ($\angle A = \angle B = 90°$) có $AD = 2AB = 2BC$. M là một điểm chuyển động trên cạnh BC. Đường thẳng qua M và vuông góc với AM cắt CD tại N. Chứng minh rằng trung điểm của MN chuyển động trên một đường thẳng cố định. thẳng hàng.

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$. AC giao BD tại P. M, N lần lượt thuộc AD, BC sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NB}$. MN cắt AC, BD tại E, F.

a) Chứng minh (PEF) luôn đi qua điểm cố định khác P.

b) Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi Q là giao của AD và BC. Chứng minh rằng (QMN) và (PEF) tiếp xúc nhau.

Bài 17. *(Malaysia Junior Olympiad 2014)*. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). X là một điểm bất kì trên (O). Kẻ $XC_1 \perp AB, XB_1 \perp AC$. Gọi ω_C là đường tròn có tâm là trung điểm AB và đi qua C_1. Tương tự xác định ω_B. Chứng minh rằng ω_B và ω_C có chung một điểm trên OX.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Trung tuyến AM. O_1, O_2 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác AMB, AMC, O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh AO là đường đối trung của tam giác AO_1O_2.

Bài 19. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). AD giao BC tại P. AC giao BD tại I, AB giao CD tại Q. PI cắt $(PAB), (PCD)$ lần thứ hai tại M, N. Chứng minh rằng $QM = QN$.

Bài 20. *(Iran 1997)*. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P chuyển động trên cung BC không chứa A. I_1, I_2 lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác APB, APC. Chứng minh rằng (PI_1I_2) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 21. *(IMO Shortlist 2002)* Hai đường tròn S_1 và S_2 giao nhau tại P và Q. Chọn hai điểm A_1 và B_1 bất kì trên S_1. A_1P, B_1P giao S_2 lần thứ hai tại A_2, B_2, A_1B_1 giao A_2B_2 tại C. Chứng minh rằng khi A_1 và B_1 chuyển động, đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1A_2C luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 22. *(USA TST 2006)* Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Một đường tròn tâm O, đi qua A và H cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại Q, P. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác OPQ tiếp xúc với BC tại R. Chứng minh rằng $\dfrac{CR}{BR} = \dfrac{ED}{FD}$.

Bài 23. Cho tam giác ABC. P là một điểm chuyển động trên BC. Gọi Y, Z lần lượt là các điểm trên AC, AB sao cho $YP = YC, ZP = ZB$. Chứng minh rằng (AYZ) luôn đi qua qua một điểm cố định khác A.

Bài 24. Cho tam giác ABC. P là một điểm chuyển động trên BC. Gọi Y, Z lần lượt là các điểm trên AC, AB sao cho $CP = CY, BP = BZ$. Chứng minh rằng (AYZ) luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Bài 25. Cho tam giác ABC. P là một điểm chuyển động trên BC. Gọi Y, Z lần lượt là các điểm trên AC, AB sao cho $PY \parallel AB, PZ \parallel AC$. Chứng minh rằng (AYZ) luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Bài 26. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn ω có tâm nằm trên đường cao ứng với đỉnh A của tam giác ABC, cắt AB, AC lần lượt tại P, Q sao cho $BP \cdot CQ = AP \cdot AQ$. Chứng minh rằng ω tiếp xúc với (BOC).

5 Gợi ý

Bài 12. a) Gọi P là tâm của phép vị tự quay. Chứng minh $\triangle PXY \sim \triangle PAB$, $\triangle PYZ \sim \triangle PBC$.
b) Tương tự câu a.

Bài 13. Dựa vào tỉ số $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{TA}{TB} = \dfrac{TD}{TC} = \dfrac{ZD}{ZC}$ và tính chất 4.

Bài 14. Gọi E, F là tiếp điểm của (I) với AC, AB. Chú ý $\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BD}{CD}$.

Bài 15. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AMN \sim \triangle ACD$.

Bài 16. a) Gọi T là tâm của phép vị tự quay biến AC thành DB, suy ra $T \in (APD), (BPC)$. Từ giả thiết suy ra $M \mapsto N$. Sau đó áp dụng bài toán về điểm Miquel của tứ giác toàn phần suy ra $T \in (PEF)$.

b) Chứng minh $T \in (PMN)$ và $\angle TFM = \angle TEN (= \angle ADB)$. Từ đó suy ra (TEF) tiếp xúc với (TMN).

Bài 17. Gọi T là hình chiếu của A trên OX, ω_C cắt AB lần thứ 2 tại C_2. N là trung điểm AB. Suy ra $ANOT, ATXC_1$ đồng viên.

T là tâm vị tự quay của $(ANOT)$ và $(ATXC_1)$ nên $\triangle NTC_1 \sim \triangle MTX$ (M là hình chiếu của O trên AX). Suy ra $\triangle C_2TC_1 \sim \triangle ATX$, cộng góc suy ra $\triangle TC_1X \sim \triangle TC_2A$. Dễ thấy C_1X cắt ω_C tại duy nhất C_1 nên T là tâm vị tự quay của ω_C và (ATX) hay $T \in \omega_C$.

Bài 18. Sử dụng tính chất 6.

Bài 19. Gọi J là giao của QO với MN. Theo định lý Brocard ta cần chứng minh $JM = JN$. Gọi E, F là trung điểm AD, BC suy ra P, O, E, F đồng viên. Sau đó áp dụng bài toán 2.

Bài 20. Gọi J là giao của (PI_1I_2) với (O), E, F là điểm chính giữa cung AC, AB. Chứng minh tứ giác $AEJF$ điều hòa.

Bài 21. Dùng bài toán đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần.

Bài 22. Dựa theo bài 11, (OPQ) luôn cắt BC tại 2 điểm R và R' thỏa mãn $RP = RC, RQ = RB$ và $\triangle R'PQ \sim \triangle DEF$. Khi (OPQ) tiếp xúc BC, $P \equiv P'$. Suy ra $\triangle RPQ \sim \triangle DEF$ và $\dfrac{RC}{RB} = \dfrac{RP}{RQ} = \dfrac{DE}{DF}$.

Bài 23, 24. Làm giống bài 11.

Bài 25. Xét phép vị tự quay tâm T biến $[BA]$ thành $[AC]$. Chứng minh $Z \mapsto Y$. Suy ra $T \in (AYZ)$.

Bài 26. Xét phép vị tự quay tâm X biến $[BA]$ thành $[AC]$. Từ giả thiết suy ra $P \mapsto Q$. Suy ra ω đi qua X. Chứng minh $\angle BXC = \angle BOC$ và XA là phân giác $\angle BXC$, suy ra BO là phân giác $\angle BXC$. Suy ra AX đi qua T là giao hai tiếp tuyến tại B và C. Tiếp tuyến tại A của ω song song với tiếp tuyến tại T của (BOC) nên X là tâm vị tự trong của 2 đường tròn, suy ra 2 đường tròn tiếp xúc nhau tại X.

Tài liệu

[1] Lê Bá Khánh Trình, *Hình học tĩnh và động*, kỉ yếu Trại hè Toán học 2009.

[2] Nguyễn Văn Linh, *Ứng dụng của tỉ số phương tích*, Euclidean Geometry Blog..
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/12/01/ratio-of-powers/

[3] Nguyễn Văn Linh, *Chuỗi bài toán về họ đường tròn đi qua điểm cố định*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2015/04/10/circles-pass-through-fixed-point/

[4] Yufei Zhao, *Lemmas in Euclidean Geometry*, IMO Training 2007.
http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf

[5] A. Bogomolny, *Miquel's Point of a 4-line Via Spiral Similarity*, from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.
http://cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SpiralSim.shtml

[6] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer, 1967.

[7] AoPS Forum.
http://www.artofproblemsolving.com/community

Email: ***Lovemathforever@gmail.com***