CHUYÊN ĐỀ: DÙNG PHÉP THẾ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Việt Hà

Tổ Toán-Tin, THPT Chuyên Lào Cai.

Phương trình hàm là một trong những vấn đề thường được hỏi trong các đề thi học sinh giỏi. Trong việc tiếp cận để giải phương trình hàm, một trong những phương pháp quan trọng là phương pháp thế. Và việc lựa chọn phép thế như thế nào quyết định đến việc thành công của việc giải phương trình hàm. Trong bài viết này, chúng ta xem xét một vài ví dụ về việc lựa chọn phép thế.

I.MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bài toán 1: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^{2013}+2012y)=3f(x+y)+f(2013x+2011y)-2013\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1)$$

Giải:

Thay $y=2013x-x^{2013}$ vào (1), ta có:

$$3f(2014x-x^{2013})-2013=0$$

Hay

$$f(2014x-x^{2013})=671\quad (2)$$

Với mọi số thực t cho trước, phương trình

$$2014x-x^{2013}=t$$

luôn có nghiệm do đây là phương trình bậc lẻ của x. Do đó, tồn tại số thực x_0 để

$$2014x_0-{x_0}^{2013}=t\quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(t) = 671\ \forall t \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 671\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại, thỏa mãn.

Bình luận: Có một câu hỏi được đặt ra là tại sao chúng ta chọn $y = 2013x - x^{2013}$?

Một trong những điều mà ta mong muốn là làm đơn giản đi phương trình bàn đầu. Ta nghĩ đến việc cho

$$f(x^{2013} + 2012y) = f(x + y)$$

hoặc

$$f(x^{2013} + 2012y) = f(2013x + 2011y).$$

Rõ ràng nếu $f(x^{2013} + 2012y) = f(2013x + 2011y)$ thì phương trình còn lại đơn giản hơn. Do đó ta cần $(x^{2013} + 2012y) = (2013x + 2011y)$ hay

$$y = 2013x - x^{2013}.$$

Bài toán 2: Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \longrightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x + y) + f(xy) = x + y + xy \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \qquad (1)$$

Phân tích:

Thoạt nhìn ta thấy hàm $f(x) \equiv x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ dự đoán đó, ta chọn x, y mà $x + y = xy$, chẳng hạn $x = y = 2$. Thì ta thu được $f(4) = 4$. Làm thế nào để từ giá trị của $f(4)$ ta tìm được giá trị của f tại các điểm còn lại?

Để tận dụng được $f(4)$, có thể chọn $y = \frac{4}{x}$. Từ đó ta có thể thu được:

$$f\left(x + \frac{4}{x}\right) = x + \frac{4}{x}$$

Nhưng chú ý rằng $x + \frac{4}{x} \geq 4$ (do bất đẳng thức AM-GM). Do đó ta chỉ khẳng định được $f(t) = t \ \forall\, t \geq 4$.

Vậy $t \in (0; 4)$ thì sao?

Để tận dụng được $f(t) = t \ \forall\, t \geq 4$, ta để ý với $x > 0$ thì $x + 4 > 4$. Do đó trong đẳng thức ban đầu, ta cho $y = 4$, ta có thể thu được

$$f(4x) = 4x$$

Và chú ý rằng với mọi $t > 0$, ta có thể chọn $x = \frac{t}{4}$ thì $t = 4x$.

Và ta thu được lời giải:

Trong (1), cho $x = y = 2$ ta có

$$f(4) + f(4) = 2 + 2 + 4$$

hay

$$f(4) = 4.$$

Lại trong (1), cho $y = \frac{4}{x}$, ta có

$$f\left(x + \frac{4}{x}\right) + f(4) = x + \frac{4}{x} + 4$$

Mà $f(4) = 4$ nên

$$f\left(x + \frac{4}{x}\right) = x + \frac{4}{x}$$

Với mọi $t \geq 4$, xét phương trình ẩn $x > 0$:

$$x + \frac{4}{x} = t$$

$$\Leftrightarrow x^2 - tx + 4 = 0 \ \ (2)$$

Ta có $\Delta = t^2 - 16 \geq 0$ do $t \geq 4$. Từ đó (2) có hai nghiệm, lại có $S = t > 0, P = 4 > 0$ nên hai nghiệm đều dương. Do đó, tồn tại $x_0 > 0$ để $t = x_0 + \frac{4}{x_0}$.

Từ đó,

$$f(t) = t \quad \forall t \geq 4.$$

Trong (1), thay $y = 4$ ta có

$$f(x+4) + f(4x) = x + 4 + 4x.$$

Do $x + 4 > 4$ với mọi $x > 0$ nên $f(x+4) = x + 4$. Do đó

$$f(4x) = 4x \ \ \forall x > 0.$$

Với mọi $t > 0$, chọn $x = \frac{t}{4}$. Khi đó $f(t) = f(4x) = 4x = t$ hay

$$f(t) = t \ \ \forall t > 0.$$

Thử lại, thỏa mãn.

Bài toán 3: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x) \qquad (1)$$

Phân tích:

Nếu ta có thể chọn được một giá trị u nào đó để $f(u) = 0$ thì trong (1), khi thay x hoặc y bởi u thì ta thu được một hệ thức đơn giản hơn. Điều đó phụ thuộc vào việc f có toàn ánh hay không. Trên thực tế, bằng kiểm nghiệm ta thấy $f(x) = x$ (thậm chí là $f(x) = x + c$) thỏa mãn bài toán. Do đó ta thử đi chứng minh tính toàn ánh của f.

Muốn vậy, với mọi số thực t, ta cần $t = f("?")$

Để đơn giản, ta chọn $y = -f(x)$ để vế trái (1) đơn giản:

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x) \quad (2)$$

Ta cần phương trình này tương đương với

$$t = f("?").$$

Mà (2) tương đương

$$f(0) - 2x = f(f(-f(x)) - x)$$

Do đó ta cần $f(0) - 2x = t$, hay

$$x = \frac{f(0) - t}{2}$$

Nói cách khác, với mọi số thực t, trong (1) tat hay $x = \frac{f(0)-t}{2}, y = -f\left(\frac{f(0)-t}{2}\right)$ thì ta có

$$t = f\left(f\left(-f\left(\frac{f(0)-t}{2}\right)\right) - f\left(\frac{f(0)-t}{2}\right)\right)$$

Tức là f toàn ánh. Tức là tồn tại u để $f(u) = 0$

Và nếu thay $x = u$ vào (1) ta có

$$f(y) = 2u + f(f(y) - u)$$

Hay

$$f(f(y) - u) = -2u + f(y)$$

Bây giờ với mọi x ta cần chỉ ra $f(x) =?$

Do đó, ta cần $f(y) - u = x$. Điều này có do tính toán ánh của f. Do đó

$$f(x) = -2u + x + u$$

Hay

$$f(x) = x - u$$

Từ đó ta có lời giải:

Kí hiệu $P(x, y)$ là mệnh đề chứa biến $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$. Ta có

$P\left(\frac{f(0)-x}{2}; -f\left(\frac{f(0)-x}{2}\right)\right) \Longrightarrow x = f\left(f\left(-f\left(\frac{f(0)-x}{2}\right)\right) - f\left(\frac{f(0)-x}{2}\right)\right)$ và do vậy $f(x)$ là toàn ánh.

Vậy tồn tại u để $f(u) = 0$ và v để $f(v) = x + u$.

Ta có $P(u, v) \Longrightarrow f(x) = x - u$ hay $f(x) = x + c$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

Giải:

Kí hiệu $P(x, y)$ là mệnh đề chứa biến $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.

$P\left(x, \frac{x^2 - f(x)}{2}\right) \Longrightarrow f(x)(f(x) - x^2) = 0$ và do đó $\forall x$, hoặc $f(x) = 0$, hoặc $f(x) = x^2$.

Ta sẽ chứng minh rằng một trong hai đồng nhất sau phải xảy ra

$$f(x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Hoặc

$$f(x) = x^2 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Thật vậy, $f(0) = 0$ trong cả hai trường hợp nên không mất tính tổng quát, ta giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$ và $b > 0$ sao cho $f(b) = b^2$ (vì $P(0, y) \Longrightarrow f(y) = f(-y)$).

$P(a, -b) \Longrightarrow f(-b) = f(a^2 + b)$, nên $f(b) = f(a^2 + b)$

So $0 \neq b^2 = f(b) = f(-b) = f(a^2 + b) =$
$\left[\begin{array}{l} 0 \quad (vô\ lý) \\ (a^2 + b)^2 \ (vô\ lý\ vì\ (a^2 + b)^2 > b^2) \end{array}\right.$

Thử lại, ta có hai nghiệm là $f(x) = 0\ \forall x$ và $f(x) = x^2\ \forall x$

Bình luận: Trong lời giải trên có dùng phép thế

$$y = \frac{x^2 - f(x)}{2}$$

Tại sao lại có điều này? Câu trả lời hoàn toàn tương tự như trước đây.

Bài toán 5: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\big(x - f(y)\big) = f(x) + f\big(f(y)\big) - 2xf(y) + f(y) + 20\,12 \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \ (1)$$

Phân tích:

Cho $x = f(y)$ ta thu được

$$f(0) = 2f\big(f(y)\big) - f^2(y) + f(y) + 2012$$

Hay

$$f\big(f(y)\big)=\frac{1}{2}f^2(y)-\frac{1}{2}f(y)-1006+\frac{1}{2}f(0)$$

Và ta đoán $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c\quad (*)$

Nhưng để thực hiện điều này ta cần chỉ ra f toàn ánh. Công việc này hơi khó. Ta thử thêm chút:

Thay x bởi $f(x)$ ta có

$$f\big(f(x)-f(y)\big)=f(f(x))+f\big(f(y)\big)-2f(x)f(y)+f(y)+20\,12$$

Mà

$$f\big(f(y)\big)=\frac{1}{2}f^2(y)-\frac{1}{2}f(y)-1006+\frac{1}{2}f(0)$$

$$f\big(f(x)\big)=\frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f(x)-1006+\frac{1}{2}f(0)$$

nên

$$f\big(f(x)-f(y)\big)=\frac{1}{2}\big(f(x)-f(y)\big)^2-\frac{1}{2}\big(f(x)-f(y)\big)+f(0)$$

Và để thực hiện được dự đoán (*), liệu với mọi t, ta có chỉ ra được x_0, y_0 để

$$t=f(x_0)-f(y_0)\ ?$$

Từ đó ta có lời giải:

Hiển nhiên là f không thể đồng nhất 0. Do đó tồn tại a mà $f(a)\neq 0$.

Trong (1), cho $y=a$

$$f\big(x-f(a)\big)=f(x)+f\big(f(a)\big)-2xf(a)+f(a)+20\,12\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Hay

$$f\big(y-f(a)\big)-f(y)=f\big(f(a)\big)-2yf(a)+f(a)+20\,12\ \ \forall y\in\mathbb{R}$$

Với mỗi số thực t, chọn

$$y_0=\frac{f\big(f(a)\big)+2012+f(a)-t}{2f(a)},x_0=y_0-f(a)$$

Khi đó ta có $t=f(x_0)-f(y_0)$

Trong (1), cho $x=f(y)$ ta thu được

$$f(0)=2f\big(f(y)\big)-f^2(y)+f(y)+2012$$

Hay

$$f\big(f(y)\big)=\frac{1}{2}f^2(y)-\frac{1}{2}f(y)-1006+\frac{1}{2}f(0)\quad (2)$$

Trong (1), thay x bởi $f(x)$ ta có

$$f\big(f(x)-f(y)\big)=f(f(x))+f\big(f(y)\big)-2f(x)f(y)+f(y)+20\,12$$

Từ đó

$$f\big(f(x_0)-f(y_0)\big)=\frac{1}{2}\big(f(x_0)-f(y_0)\big)^2-\frac{1}{2}\big(f(x_0)-f(y_0)\big)+f(0)$$

Hay $f(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+f(0)\quad$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $-1006+\frac{1}{2}f(0)=f(0)$ hay $f(0)=2012$

Thử lại, ta có với mọi số thực x, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2012$.

Với ý tưởng tương tự, ta có thể giải quyết được bài toán sau:

Bài toán 6: Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\longrightarrow(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\big(f(x)\big)=yf\big(yf(x)\big)\ \forall x,y\in(0;+\infty)\quad (1)$$

Giải:

Với mọi $t\in(0;+\infty)$, ta chọn tùy ý một x_0 cố định và $u=f(x_0),\ v=tf(x_0)$ thì

$$t=\frac{f(u)}{f(v)}$$

Ta thay trong (1) y bởi $\frac{1}{f(y)}$ ta có

$$f\big(f(x)\big)=\frac{1}{f(y)}f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)$$

Hay

$$f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=f(y).f\big(f(x)\big)\ \ (2)$$

Trong (1), thay y bởi $\frac{1}{f(x)}$ ta được

$$f\big(f(x)\big)=\frac{1}{f(x)}f(1)\ \ \forall x\in(0;+\infty)\quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = f(1).\frac{f(y)}{f(x)}$$

Do đó

$$f\left(\frac{f(u)}{f(v)}\right) = f(1).\frac{f(v)}{f(u)}$$

Do vậy, $f(t) = f(1).\frac{1}{t}\ \ \forall t \in (0; +\infty)$.

Thử lại, hàm cần tìm là $f(x) = \frac{a}{x}\ \ \forall x \in (0; +\infty)$ ở đó $a > 0$ là hằng số.

II.BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài toán 7: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + xf(x) \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài toán 8: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(f\left(y + f(x)\right)\right) = f(x + y) + f(x) + y\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài toán 9: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(y) + f\left(x + f(y)\right) = y + f\left(f(x) + f\left(f(y)\right)\right)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài toán 10: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x + f(y)\right) = 3f(x) + f(y) - 2x\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài toán 11: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x + f(y)\right) = f^2(y) + 2xf(y) + f(-x)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài toán 12: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^2) = f(x+y)f(x-y) + y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

III. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kì thi Olympic*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2004.

[2] Titu Andreescu, Iruie Boreico , *Functional equation.*

[3] Mathlink.ro.