Bài giảng các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi

Hàng điểm điều hòa

Huỳnh Chí Hào – THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu

Tóm tắt nội dung

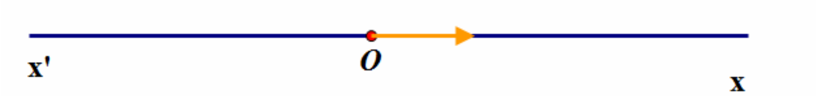
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Tọa độ trên trục

1. Trục

Một đường thẳng được gọi là trục (tọa độ) nếu trên đó đã chọn một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1

Điểm O gọi là gốc của trục, $\vec{i}$ được gọi là vectơ đơn vị của trục, hướng của $\vec{i}$ được gọi là hướng của trục.

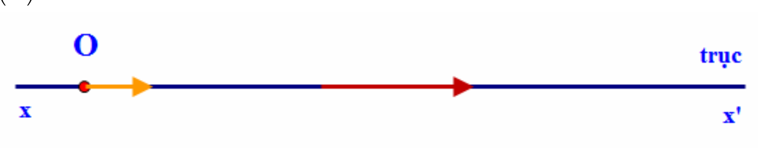


Ký hiệu: $x'Ox$

2. Tọa độ của một vectơ trên trục

Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị là $\vec{i}$. Vì $\vec{u}$ cùng phương $\vec{i}$ nên tồn tại duy nhất số x sao cho $\vec{u} = x.\vec{i}$. Số x được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$.

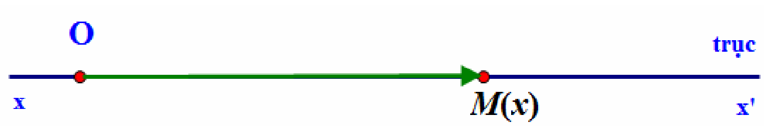
Ký hiệu: $\vec{u} = (x)$ hay $\vec{u}(x)$



3. Tọa độ của một điểm trên trục

Cho điểm M thuộc trục $x'Ox$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là tọa độ của điểm M.

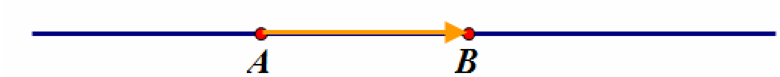
Ký hiệu: $M = (x)$ hay $M(x)$



4. Độ dài đại số của vectơ

Tọa độ của của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và ký hiệu là $\overline{AB}$

Chú ý: Khi ta viết $\overline{AB}$ có nghĩa là đường thẳng AB đã được xem là một trục với một gốc O nào đó và một



vectơ đơn vị $\vec{i}$ nào đó

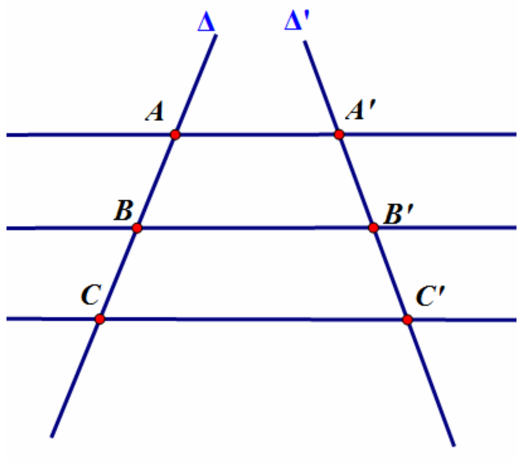
Tính chất:

- $\left|\overline{AB}\right| = AB$
- $\overline{AB} = AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{i}$
- $\overline{AB} = -AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{i}$
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}$, C bất kỳ trên đường thẳng AB
- $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, C bất kỳ trên đường thẳng AB
- $\overline{AB} = x_B - x_A$

5. Các định lý quan trọng có liên quan đến độ dài đại số

a) Định lý Thales (dạng đại số)

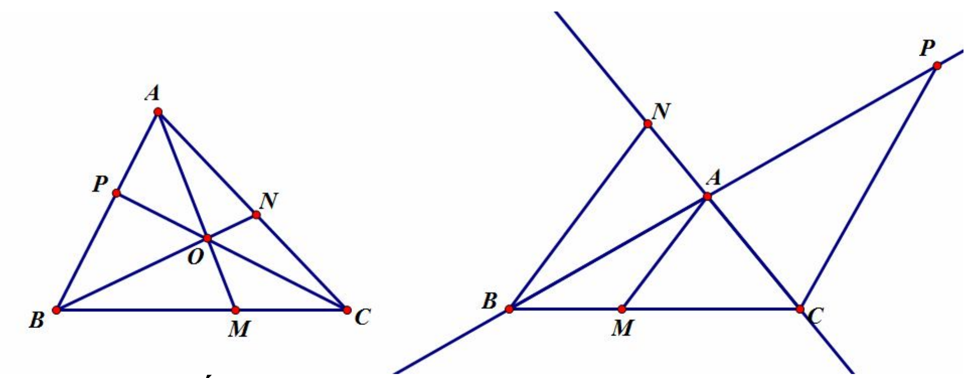
Cho các bộ ba điểm A, B, C và A', B', C', theo thứ tự thuộc các đường thẳng Δ và Δ'. Nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đôi một song song thì $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$



b) Định lý Ceva (dạng đại số)

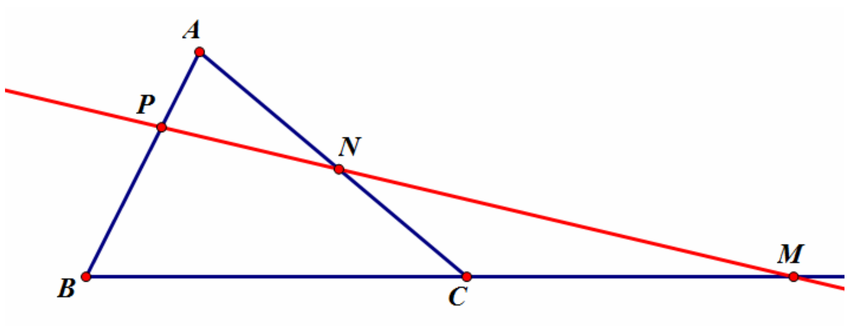
Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C, theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$



c) Định lý Menelaus (dạng đại số)

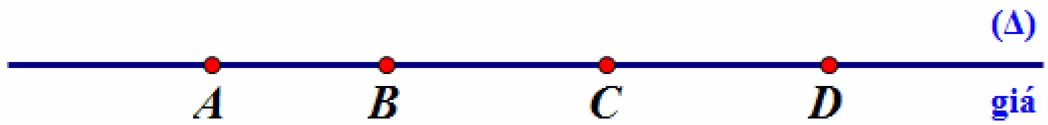
Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C, theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$



II. Hàng điểm điều hòa là gì ?

1. Hàng điểm

♥ Bộ bốn điểm đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một đường thẳng được gọi là **hàng điểm**.



Hàng điểm

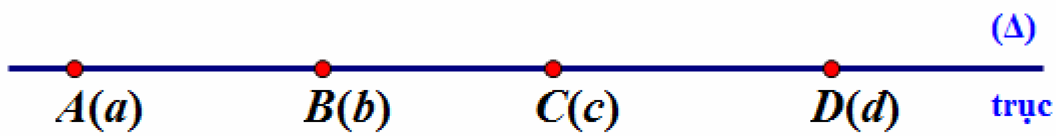
2. Tỉ số kép của hàng điểm

♥ **Định nghĩa:**

Tỉ số kép của hàng điểm A,B,C,D là **một số**, kí hiệu là $(ABCD)$ và được xác định như sau:

$$(ABCD)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

Dạng tọa độ:



Nếu $A(a),B(b),C(c),D(d)$ thì $(ABCD)=\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}$

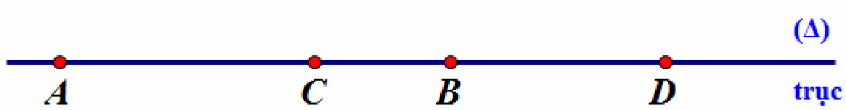
♥ **Tính chất:**

- $(ABCD)=(CDAB)=(BADC)=(DCBA)$
- $(ABCD)=\frac{1}{(BACD)}=\frac{1}{(ABDC)}$
- $(ABCD)=1-(ACBD)=1-(DBCA)$
- $(ABCD)=(ABCD')\Rightarrow D\equiv D'$
- $(ABCD)\neq 1$

3. Hàng điểm điều hòa

♥ **Định nghĩa:** Nếu $(ABCD)=-1$ thì hàng điểm A,B,C,D được gọi là **hàng điểm điều hòa**.

***Nói cách khác*:** Nếu $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ thì A,B,C,D được gọi là **hàng điểm điều hòa**.



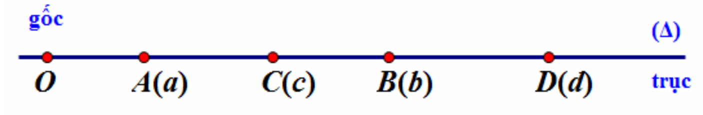
$$(ABCD)=-1\overset{dn}{\Leftrightarrow}\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

Khi đó ta nói: cặp điểm A,B và cặp điểm C,D là hai cặp điểm liên hợp điều hòa.

Lưu ý: Nếu $(ABCD)=-1$ thì $(CDAB)=(BADC)=(DCBA)=(BACD)=(ABDC)=-1$

♥ Biểu thức tọa độ đối với hàng điểm điều hòa

- **Hệ thức 1:** Nếu $A(a),B(b),C(c),D(d)$ thì $\boxed{(ABCD)=-1 \Leftrightarrow 2(ab+cd)=(a+b)(c+d)}$

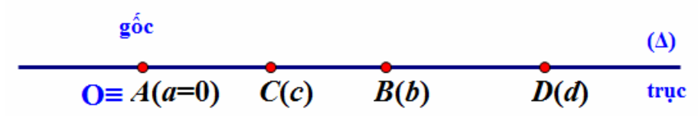


Chứng minh

Chọn một điểm O bất kỳ trên trục là gốc

Ta có: $(ABCD)=-1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c}=-\frac{a-d}{b-d} \Leftrightarrow 2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$ ●

- **Hệ thức 2: (hệ thức Descartes)** $\boxed{(ABCD)=-1 \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}}$



Chứng minh

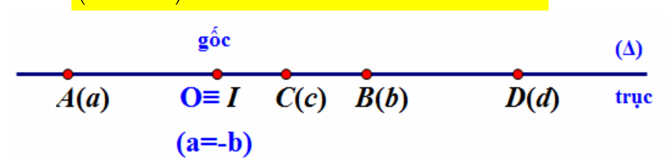
Chọn $O \equiv A$ ($a=0$) trên trục là gốc

Ta có: $(ABCD)=-1 \Leftrightarrow 2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$

$$\Leftrightarrow 2cd=b(c+d) \qquad \text{(do } a=0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$$ ●

- **Hệ thức 3: (hệ thức Newton)** $\boxed{(ABCD)=-1 \Leftrightarrow \overline{IA}^2=\overline{IB}^2=\overline{IC}.\overline{ID}}$



Chứng minh

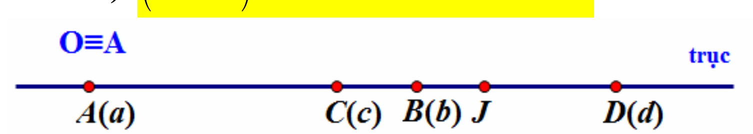
Chọn $O \equiv I$ (I là trung điểm của AB) trên trục là gốc

Ta có: $(ABCD)=-1 \Leftrightarrow 2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$

$$\Leftrightarrow a^2=cd \qquad \text{(do } a=-b\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IA}^2=\overline{IC}.\overline{ID}$$ ●

- **Hệ thức 4: (hệ thức Maclaurin)** $\boxed{(ABCD)=-1 \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AJ}}$



(J là trung điểm của CD)

Chứng minh

Chọn $O \equiv A$ trên trục là gốc

Ta có: $(ABCD)=-1 \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$

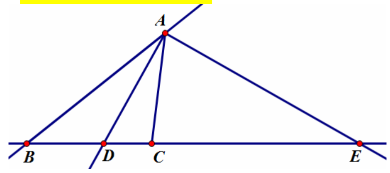
$$\Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\frac{\overline{AC}+\overline{AD}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AJ}$$ ●

♥ Những hàng điểm điều hòa cơ bản

♥ Định lí 1. Nếu AD, AE theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC thì

$$(BCDE) = -1$$



Chứng minh

Theo tính chất của phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ta có hệ thức:

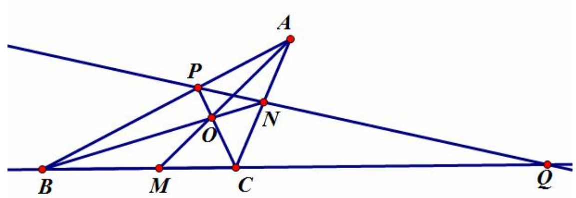
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}; \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Lại do, D nằm trong đoạn BC và E nằm ngoài đoạn BC nên ta có: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}; \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{AB}{AC}$

Suy ra: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \Rightarrow (BCDE) = -1$ ●

♥ Định lí 2. Cho tam giác ABC và điểm O không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Hai đường thẳng BC, NP giao nhau tại Q

Khi đó, $(BCMQ) = -1$



Chứng minh

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với sự đồng quy của AM, BN, CP, ta có hệ thức:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1 \qquad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với sự thẳng hàng Q, N, P, ta có hệ thức:

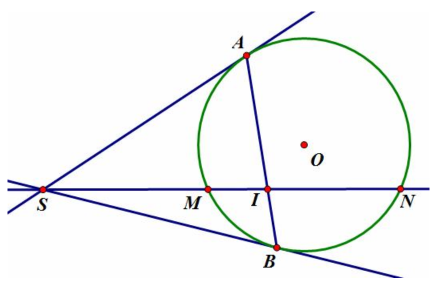
$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \Rightarrow (BCMQ) = -1$ ●

♥ Định lí 3. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), ta kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB $(A, B \in (O))$.

Một đường thẳng qua S cắt (O) tại M, N. Gọi I là giao điểm của AB và MN.

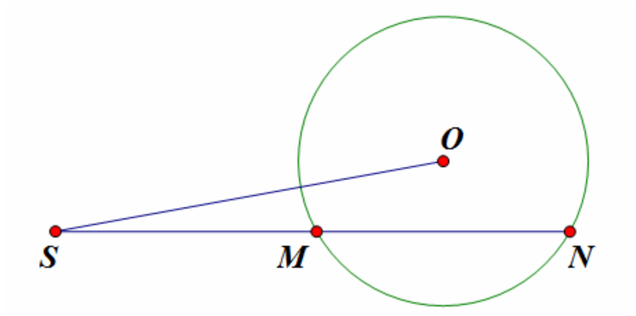
Khi đó, $(SIMN) = -1$



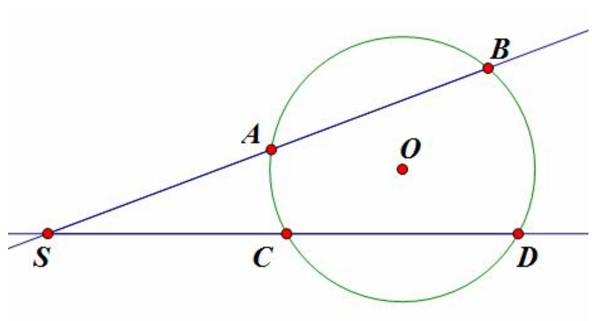
Để chứng minh định lý nầy ta cần sử dụng 3 bổ đề sau

Bổ đề 1. Qua điểm S không thuộc đường tròn (O), kẻ một đường thẳng cắt (O) tại M, N. Khi đó:

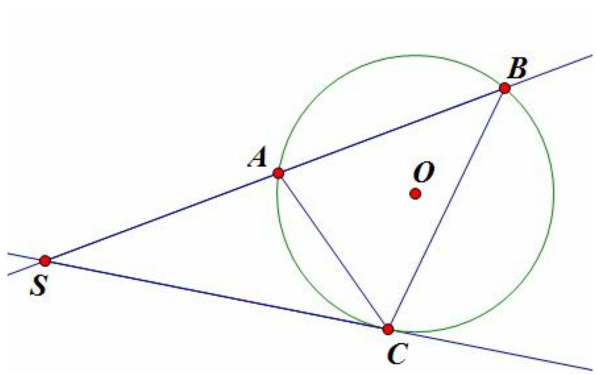
$$\overline{SM}.\overline{SN} = SO^2 - R^2$$



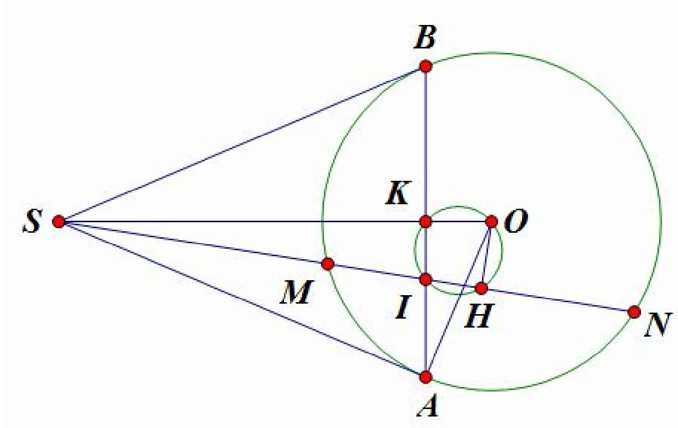
Bổ đề 2. Nếu các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại S khác A, B, C, D thì A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD}$.



Bổ đề 3. Nếu các đường thẳng AB, SC cắt nhau tại S khác A, B thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với SC khi và chỉ khi $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}^2$.



Chứng minh



Gọi H là hình chiếu của O trên MN và $K = SO \cap AB$

Do $\widehat{IKO} = \widehat{IHO}$ (cùng bằng 90^0). Suy ra tứ giác $OHIK$ nội tiếp

Theo các bổ đề trên và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta suy ra:

$$\overline{SM}.\overline{SN} = \overline{SA}^2 = \overline{SK}.\overline{SO} = \overline{SI}.\overline{SH}$$

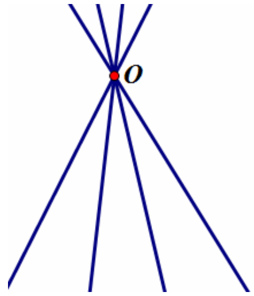
Do H là trung điểm của MN nên theo hệ thức Maclaurin ta suy ra $(SIMN) = -1$ ●

III. Tỉ số kép của chùm đường thẳng – Phép chiếu xuyên tâm – Chùm điều hòa.

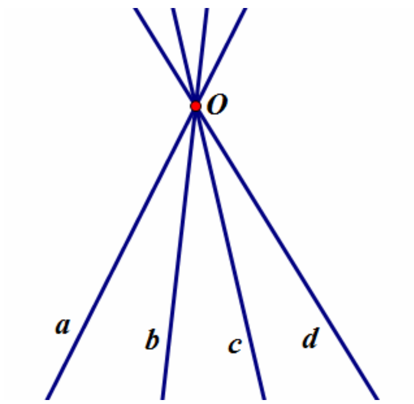
1. Chùm đường thẳng và tỉ số kép của nó

a) Các định nghĩa

- **Định nghĩa 1:** Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm được gọi là một **chùm đầy đủ đường thẳng.**



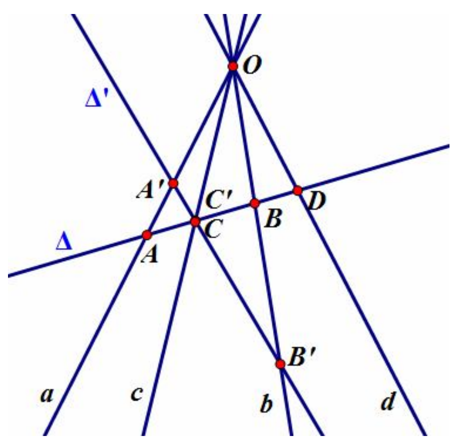
- **Định nghĩa 2:** Bộ bốn đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là một **chùm đường thẳng**.



b) Các định lý

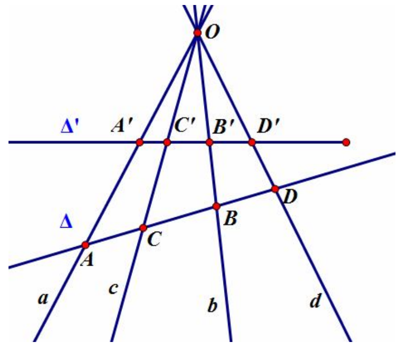
♥ **Định lý 4:** Cho a,b,c,d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a,b,c,d tại A,B,C,D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a,b,c tại A',B',C'.

Khi đó:
$$\Delta'//d \Leftrightarrow (ABCD)=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$$



♥ **Định lý 5:** Cho a,b,c,d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a,b,c,d tại A,B,C,D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a,b,c,d tại A',B',C',D'.

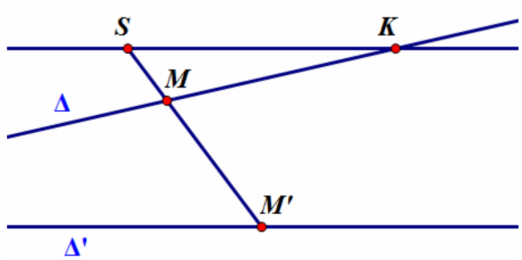
Khi đó: $$(ABCD)=(A'B'C'D')$$



- **Định nghĩa 3:** Số không đổi $(ABCD)$ nói trên được gọi là tỉ số kép của chùm a,b,c,d và được kí hiệu là $(abcd)$

2. Phép chiếu xuyên tâm

a) Định nghĩa: Cho hai đường thẳng Δ,Δ' và điểm S không thuộc Δ,Δ'. Gọi K là điểm thuộc Δ sao cho $SK//\Delta'$. Gọi f là ánh xạ đi từ tập hợp các điểm thuộc $\Delta\backslash\{K\}$ tới tập hợp các điểm thuộc Δ', xác định như sau: $f(M)=M'$ sao cho S,M,M' thẳng hàng. Ánh xạ f được gọi là **phép chiếu xuyên tâm** đi từ $\Delta\backslash\{K\}$ tới Δ'. Điểm S được gọi là tâm của f.



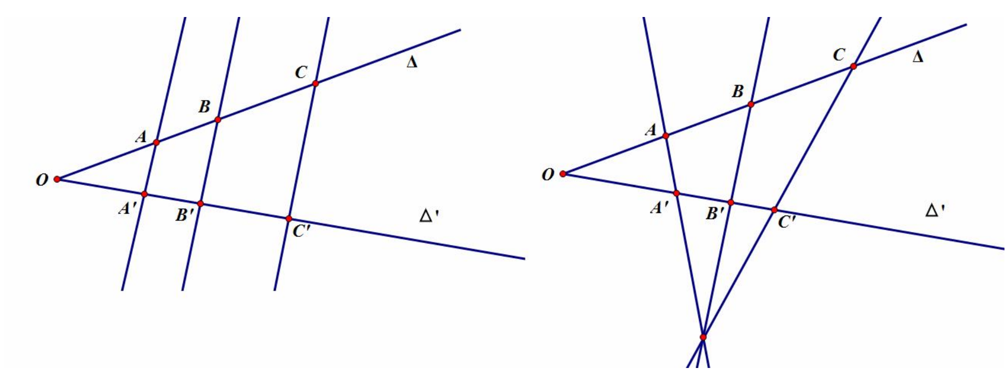
Lưu ý:

+ Nếu phép chiếu xuyên tâm f biến hàng điểm A,B,C,D thành hàng điểm A',B',C',D' thì $(ABCD)=(A'B'C'D')$ (hay Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép).

b) Các định lý

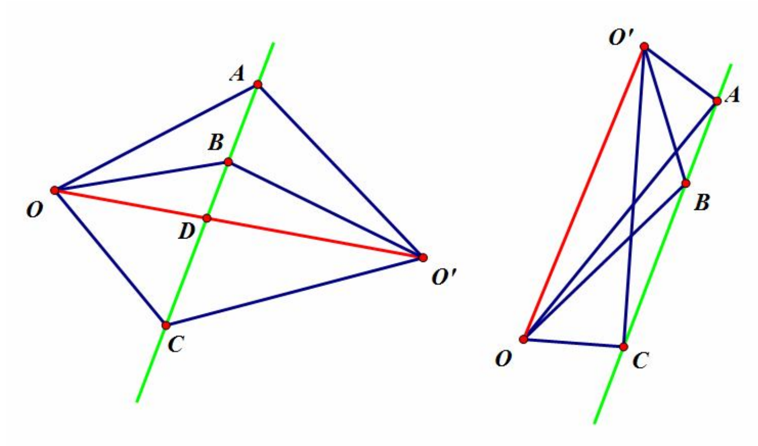
♥ **Định lý 6:** Cho hai đường thẳng Δ,Δ' cắt nhau tại O. Các điểm A,B,C thuộc Δ; các điểm A',B',C' thuộc Δ'. Khi đó:

AA',BB',CC' hoặc **đồng quy** hoặc **đôi một song song** $\Leftrightarrow$ $(OABC)=(OA'B'C')$



♥ **Định lý 7:** Cho hai chùm $O(ABCO')$ và $O'(ABCO)$. Khi đó:

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow O(ABCO') = O'(ABCO)$$



3. Chùm điều hòa

a) Định nghĩa: Chùm a, b, c, d được gọi là điều hòa nếu $(a, b, c, d) = -1$

b) Các định lý

♥ **Định lý 8:** Với chùm a, b, c, d các điều kiện sau là tương đương

i) $(a, b, c, d) = -1$

ii) Tồn tại một đường thẳng song song với một đường thẳng của chùm và định ra trên ba đường thẳng còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

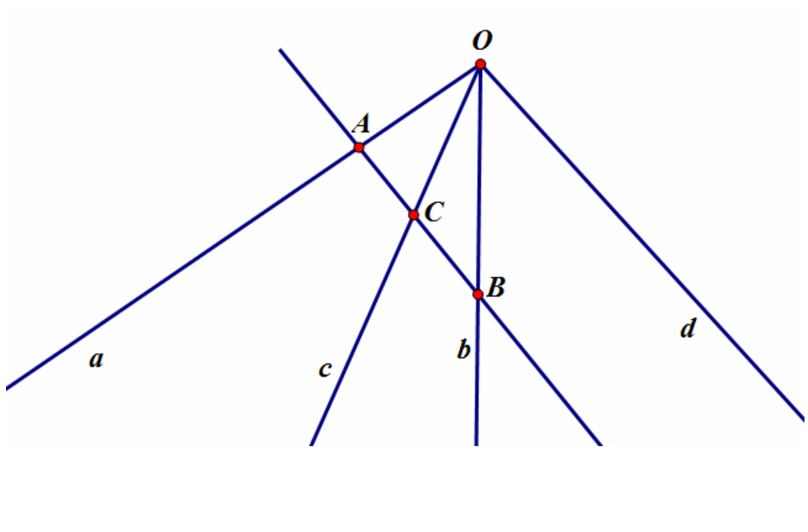
iii) Mọi đường thẳng song song với một đường thẳng của chùm định ra trên ba đường thẳng còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

♥ **Định lý 9:** Với chùm điều hòa a, b, c, d các điều kiện sau là tương đương

i) $c \perp d$

ii) c là một phân giác của các góc tạo bởi a, b

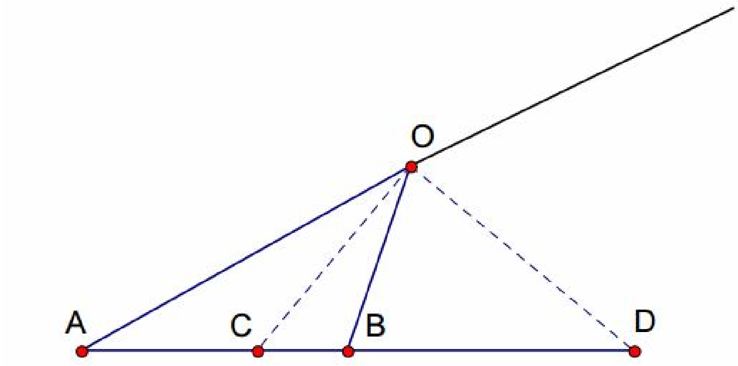
iii) d là một phân giác của các góc tạo bởi a, b



4. Một số kết quả thường sử dụng

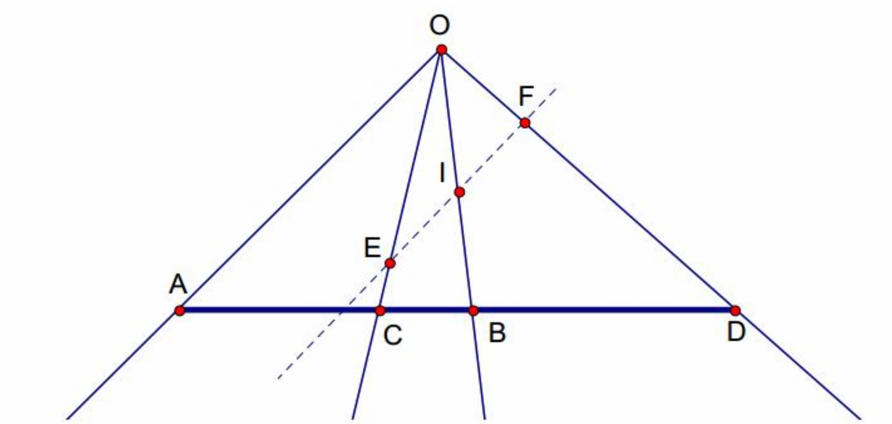
a) Kết quả 1

Cho $(ABCD) = -1$. Lấy O sao cho OC là phân giác trong của $\widehat{AOB}$ thì OD là phân giác ngoài của $\widehat{AOB}$.



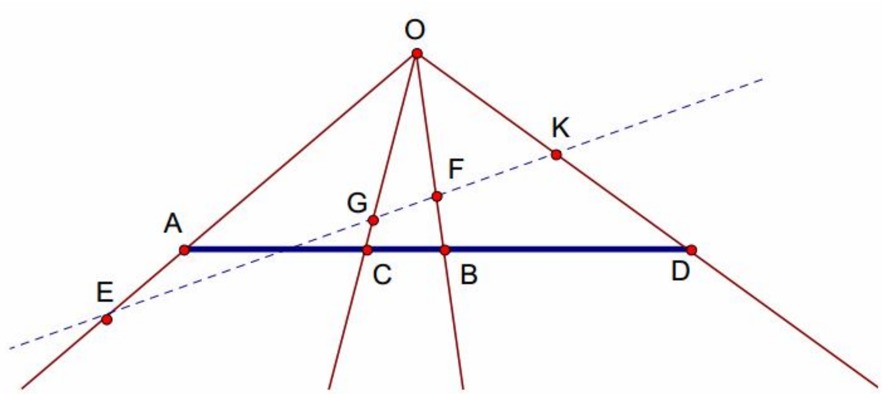
b) Kết quả 2

Cho $(ABCD) = -1$ và điểm O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Một đường thẳng d cắt ba tia OC, OB, OD lần lượt tại E, I, F. Khi đó I là trung điểm của EF khi và chỉ khi d song song với OA.



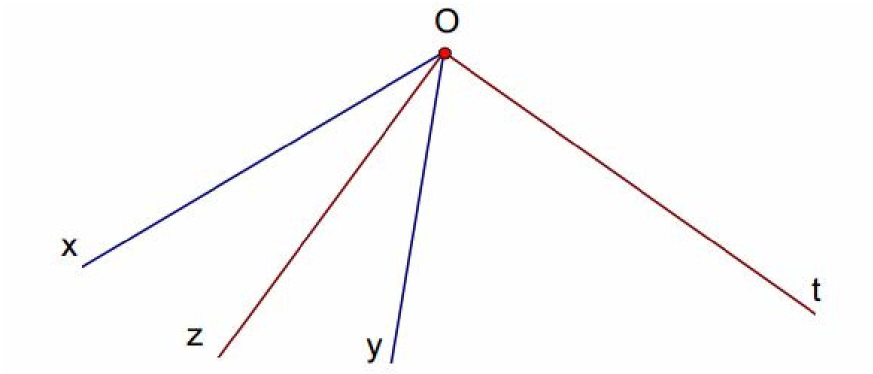
c) Kết quả 3

Cho $(OA, OB, OC, OD) = -1$. Một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh OA, OB, OC, OD lần lượt tại E, F, G, H khi đó ta có $(EFGK) = -1$.



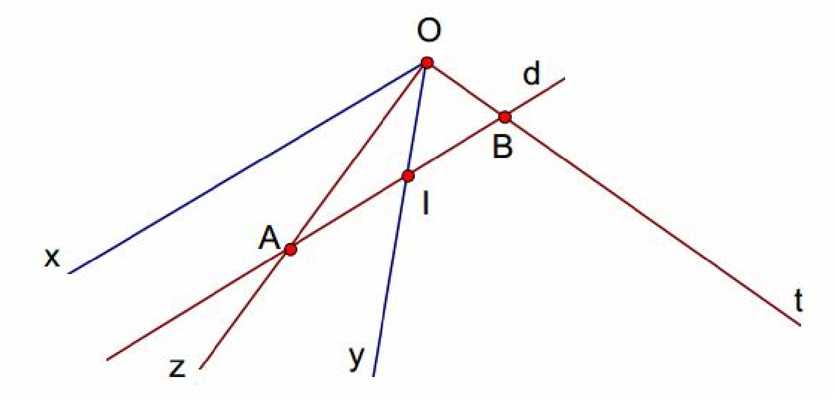
d) Kết quả 4

Cho chùm điều hòa $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$ khi đó nếu $\widehat{zOt} = 90^0$ thì Oz là phân giác trong của góc xOy và Ot là phân giác ngoài xOy.



e) Kết quả 5

Cho chùm điều hòa $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$ một đường thẳng d bất kì cắt Oz, Ot, Oy lần lượt tại A, B, I khi đó d song song Ox khi và chỉ khi I là trung điểm của AB.

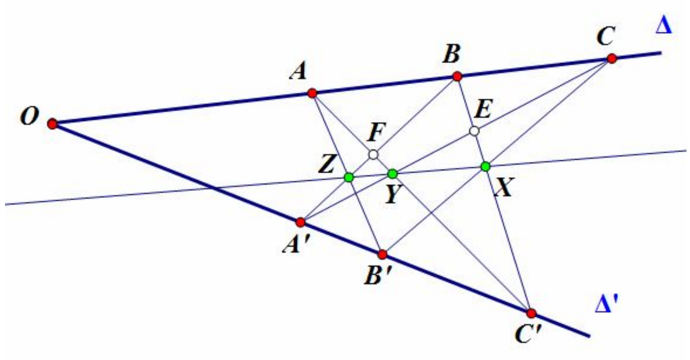


B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng Δ và Δ. Các điểm A, B, C thuộc Δ. Các điểm A', B', C' thuộc Δ.
$X = BC' \cap B'C$; $Y = CA' \cap C'A$; $Z = AB' \cap A'B$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

(***định lý Pappus***)

Lời giải



Ta bỏ qua trường hợp đơn giản $\Delta // \Delta'$
Xét trường hợp Δ và Δ' cắt nhau
Đặt $\Delta \cap \Delta' = O$, $E = BC' \cap CA'$, $F = AC' \cap BA'$
Ta có: $\left(BEXC'\right) = \left(OA'B'C'\right)$ (xét phép chiếu xuyên tâm C)

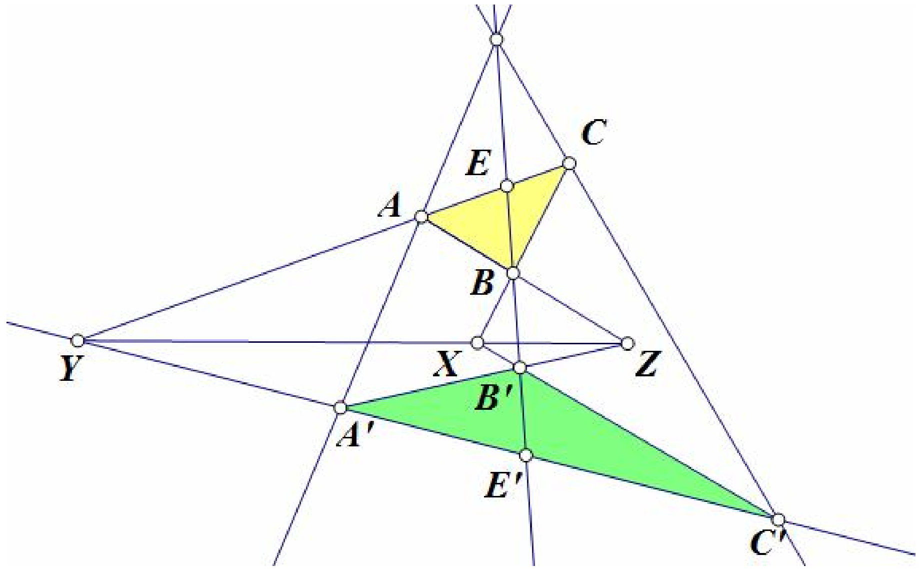
$= \left(BA'ZF\right)$ (xét phép chiếu xuyên tâm A)

Theo định lý về phép chiếu xuyên tâm ta suy ra: $EA', XZ, C'F$ đồng quy
Vậy X, Y, Z thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho các tam giác ABC và $A'B'C$. Đặt $X = BC \cap B'C'$; $Y = CA \cap C'A'$; $Z = AB \cap A'B'$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

(***định lý Desargues***)

Lời giải



Ta bỏ qua trường hợp đơn giản: $\left[\begin{array}{l} BB' // AC \\ BB' // A'C' \end{array}\right.$

Gọi E, E' theo thứ tự là giao điểm của BB' với $AC, A'C'$

Ta có: X, Y, Z thẳng hàng $\Leftrightarrow B(AB'CY) = B'(A'BC'Y)$ (định lý về chùm đường thẳng)

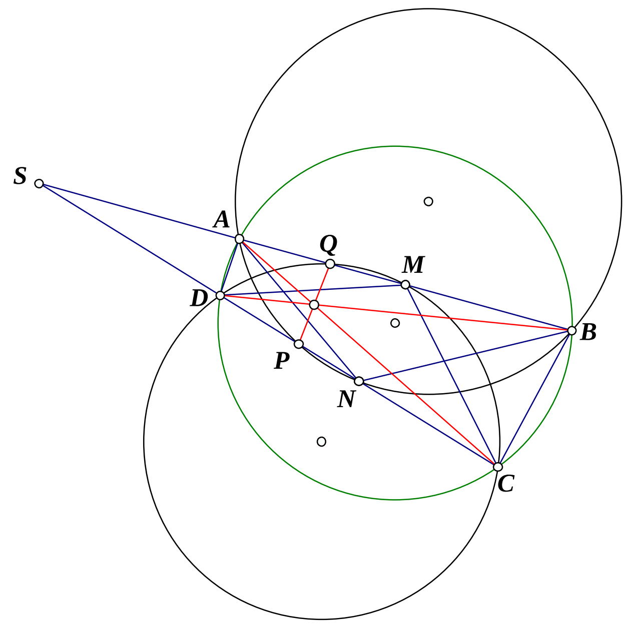
$\Leftrightarrow (AECY) = (A'E'C'Y)$

$\Leftrightarrow AA', EE', CC'$ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song

$\Leftrightarrow AA', BB', CC'$ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (AB không song song CD). M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q. Chứng minh rằng AC, BD, PQ đồng quy.

Lời giải



Đặt $S = AB \cap CD$

Ta có: $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD} = \overline{SQ}.\overline{SM}$

$\overline{SC}.\overline{SD} = \overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SP}.\overline{SN}$

Do M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, nên theo thức Maclaurin, suy ra:

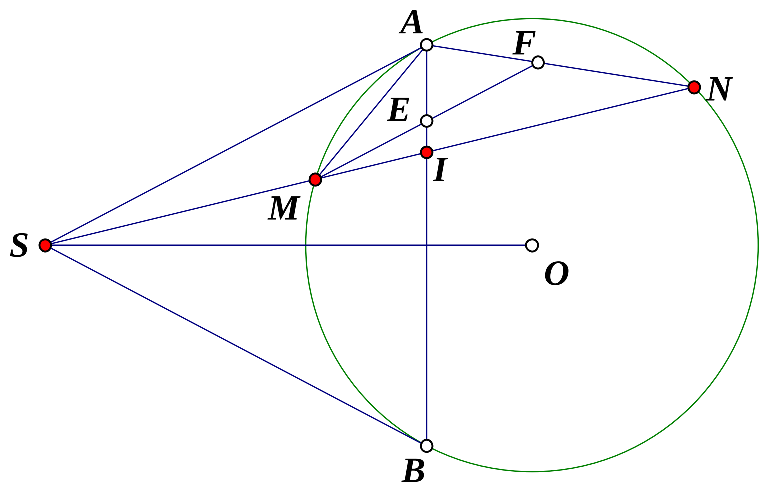
$$(SQAB) = -1$$

$$(SPCD) = -1$$

Vậy AC, BD, PQ đồng quy.

Ví dụ 4. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB (A, B thuộc (O)). Một đườg thẳng qua S, cắt (O) tại hai điểm M, N. Đường thẳng qua M, song song với SA theo thứ tự cắt AB, AN tại E, F. Chứng minh rằng $EM = EF$.

Lời giải



Đặt $I = AB \cap MN$

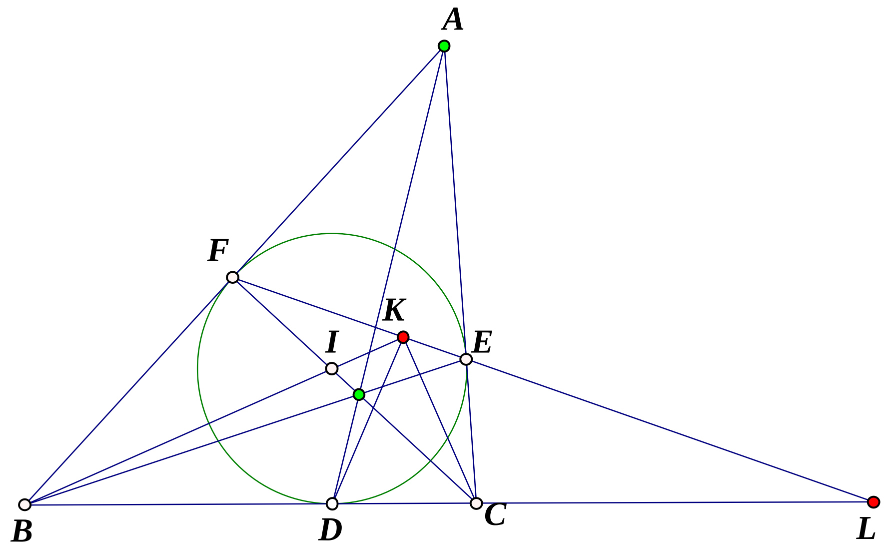
Ta có: $(SIMN) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản)

$\Rightarrow A(SBMN) = -1$

Do $MF // SA \Rightarrow EM = EF$ (định lý về chùm điều hòa)

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AC, AB tại E, F (EF không song song với BC). Đặt $K = BI \cap EF$. Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = 90^0$.

Lời giải



Đặt $L = EF \cap BC$. Gọi D là tiếp điểm của (I) và BC

Ta có: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \left(-\frac{DB}{DC}\right).\left(-\frac{EC}{EA}\right).\left(-\frac{FA}{FB}\right) = -\frac{FA}{EA}.\frac{DB}{FB}.\frac{EC}{DC} = -1$

Do AD, BE, CF không thể đôi một song song nên theo **định lý Ceva** ta suy ra AD, BE, CF đồng quy

Suy ra: $(BCDL) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản)

$\Rightarrow K(BCDL) = -1$

Mặt khác ta lại có: $\Delta KBD = \Delta KBF \Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BKF}$

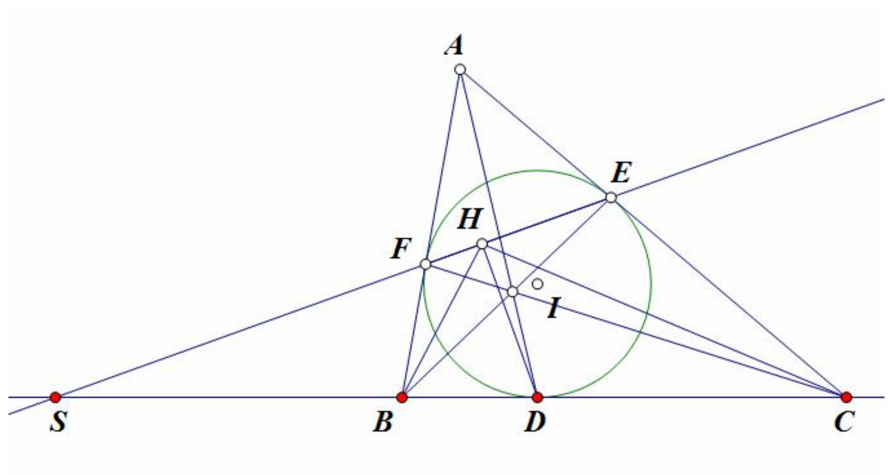
Vậy $\widehat{BKC} = 90^0$ (định lý về chùm điều hòa).

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F (EF không song song với BC). H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

Ý tưởng

Xem H là **đỉnh của một chùm điều hòa** trong đó có hai **đường thẳng vuông góc nhau**.

Lời giải



Đặt $S = EF \cap BC$

Ta có: AD, BE, CF đồng quy (theo định lý Ceva)

Suy ra: $(SDBC) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản)

Do đó: $H(SDBC) = -1$

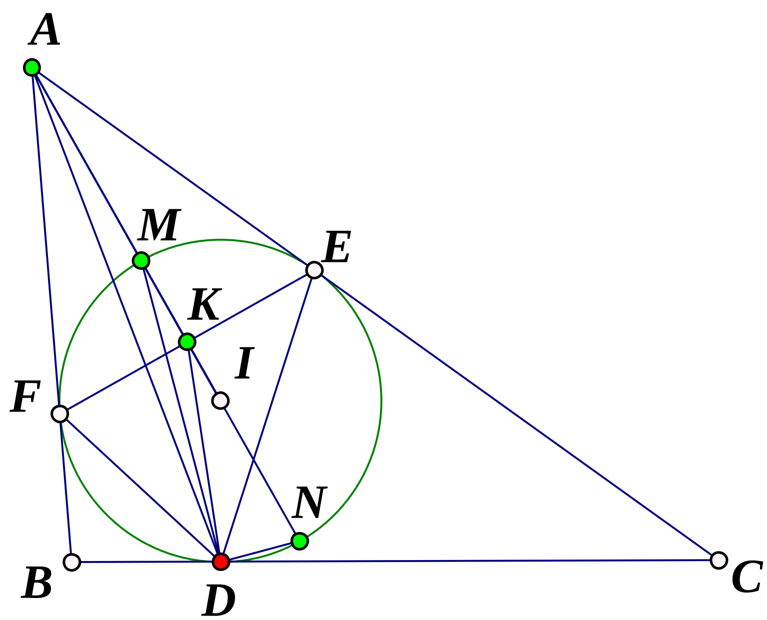
Vậy $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$ (do $HS \perp HD$, định lý về chùm điều hòa)

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của AI và EF. Chứng minh rằng $\widehat{KDE} = \widehat{ADF}$.

Ý tưởng

Xem D là **đỉnh của một chùm điều hòa** trong đó có hai **đường thẳng vuông góc nhau**.

Lời giải



Gọi M, N là giao của AI với (I)

Ta có: $D(AKMN) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản)

Do $DM \perp DN$ nên $\widehat{MDK} = \widehat{MDA}$ (định lý về chùm điều hòa)

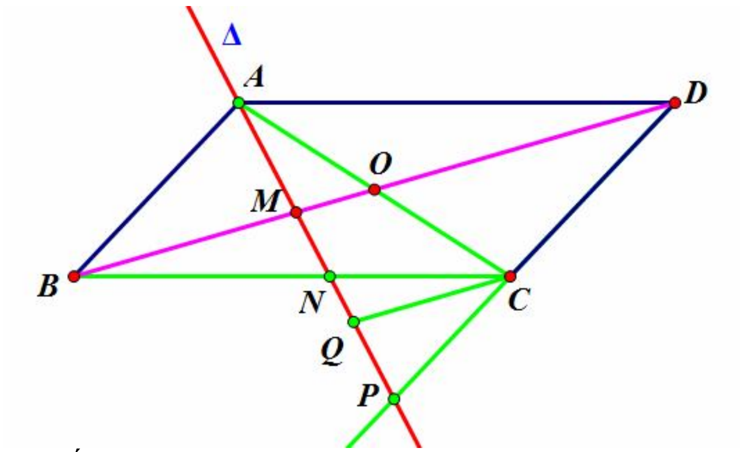
Mặt khác ta lại có: $\widehat{KDE} = \widehat{MDA}$

Suy ra: $\widehat{KDE} = \widehat{ADF}$.

Ví dụ 8. Đường thẳng Δ đi qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$, theo thứ tự cắt các đường thẳng BD, BC tại M, N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\overline{AM}} = \frac{1}{\overline{AN}} + \frac{1}{\overline{AP}}$$

Lời giải



♥ Đặt $O = AC \cap BD$. Trên Δ lấy Q sao cho $CQ // BD$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OB = OD$

♥ Do $CQ // BD$ nên theo **định lý về chùm điều hòa** ta suy ra được:

$$C(AQBD) = -1$$

Suy ra: $(AQNP) = -1$

Khi đó, theo hệ thức Descartes ta có: $\frac{2}{\overline{AQ}} = \frac{1}{\overline{AN}} + \frac{1}{\overline{AP}}$ (1)

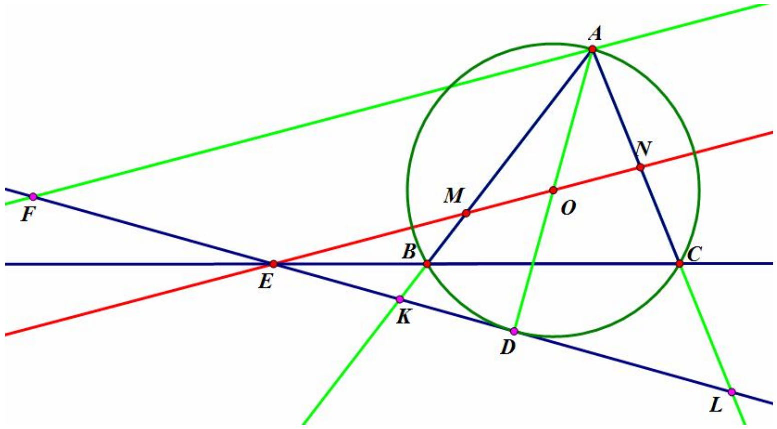
♥ Mặt khác, cũng vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$

Từ đó, kết hợp với $CQ // BD$ ta có: $\overline{AQ} = 2\overline{AM}$ (2)

♥ Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{\overline{AM}} = \frac{1}{\overline{AN}} + \frac{1}{\overline{AP}}$ ❑

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến với (O) tại D cắt BC tại E. OE theo thứ tự cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$

Lời giải



♥ Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với DE

Trên DE lấy F sao cho $AF // EO$

Ta thấy: $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{ACD} - \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{ABD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \widehat{CLD}$

Do đó, tứ giác $BKLC$ nội tiếp

♥ Từ đó, nên theo **định lý về hệ thức lượng trong đường tròn** ta suy ra được:

$$\overline{ED}^2 = \overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EK}.\overline{EL}$$

Mặt khác, vì O là trung điểm của AD và vì $AF // OE$ nên E là trung điểm của FD

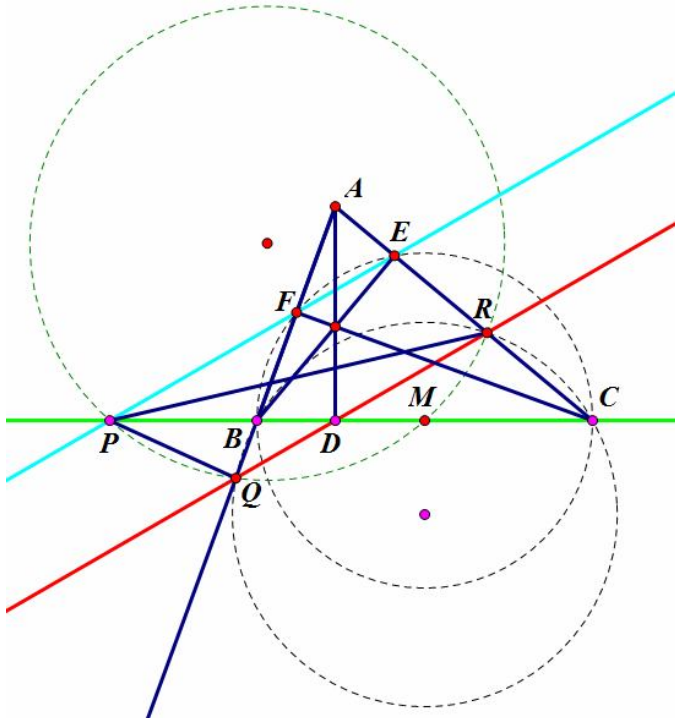
Vậy, theo **hệ thức Newton** ta có: $(FDKL) = -1$

Suy ra $A(FOMN) = -1$

♥ Từ đó, với chú ý rằng $AF // MN$, theo **định lý về chùm điều hòa** ta suy ra được: $OM = ON$ ❑

Ví dụ 10. AD, BE, CF là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Đặt $P = BC \cap EF$. Đường thẳng qua D, song song với EF theo thứ tự cắt AB, AC tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQR đi qua trung điểm của BC.

Lời giải



♥ Gọi M là trung điểm của BC. Theo giả thiết $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$

Do đó, bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn

Từ đó, với chú ý rằng $QR // FE$, suy ra B, C, Q, R cùng thuộc một đường tròn

Vậy, theo **định lý về hệ thức lượng trong đường tròn** ta suy ra

$$\overline{DQ}.\overline{DR} = \overline{DB}.\overline{DC} \qquad (1)$$

♥ Mặt khác, theo **định lý về hàng điểm điều hòa** ta suy ra: $(DPBC) = -1$

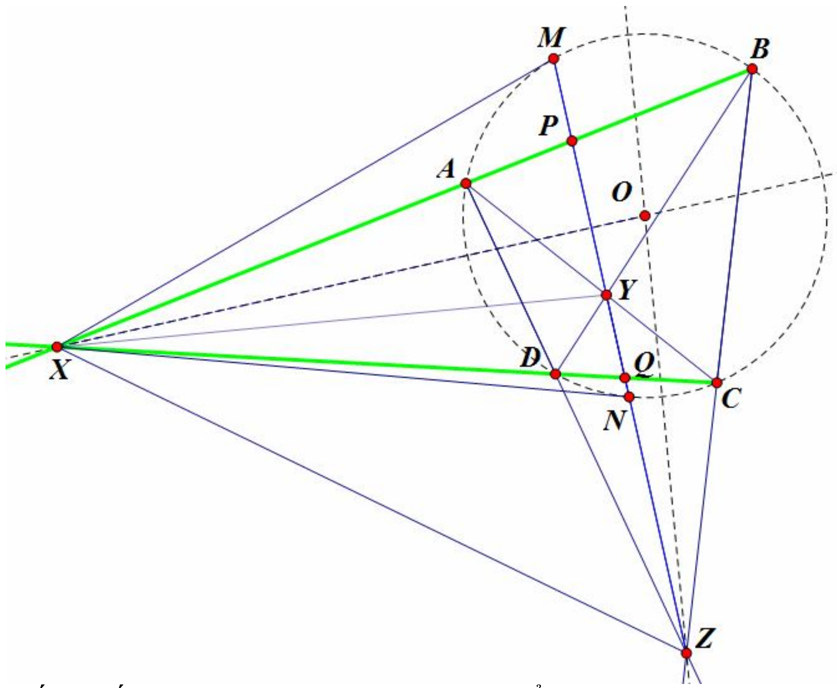
Từ đó, với chú ý rằng $MB = MC$, theo **hệ thức Maclaurin**:

$$\overline{DP}.\overline{DC} = \overline{DB}.\overline{DC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), theo **định lý về hệ thức lượng trong đường tròn**, suy ra đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQR đi qua trung điểm của BC. ❑

Ví dụ 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB, AC, AD theo thứ tự cắt CD, DB, BC tại X, Y, Z. Chứng minh rằng O là trực tâm tam giác XYZ.

Lời giải



♥ Qua X, kẻ tới O các tiếp tuyến XM, XN. Gọi P, Q là giao điểm của MN với AB, CD

Suy ra: $(XPAB) = (XQDC) = -1$

Do đó: AD, BC, PQ đồng quy $\Rightarrow Z \in PN$ (1)

♥ Mặt khác, ta lại có: $(XPAB) = (XQCD) = -1$

Suy ra: AC, BD, PQ đồng quy $\Rightarrow Y \in PN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MN \equiv YZ$

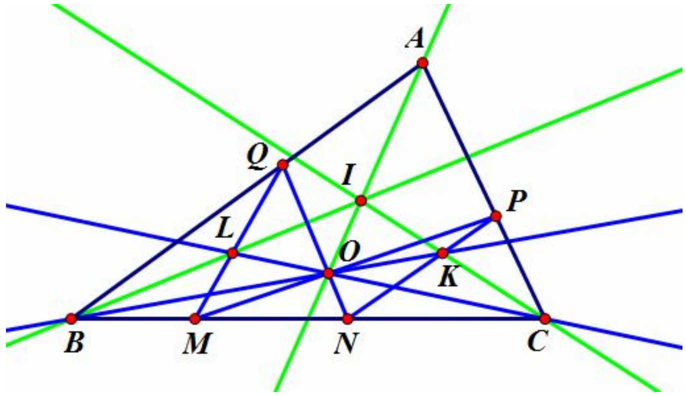
♥ Do $OX \perp MN \Rightarrow OX \perp YZ$

Chứng minh tương tự ta cũng được: $OZ \perp YX$

Vậy O là trực tâm tam giác XYZ. ❑

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc BC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB. Đặt $O = MP \cap NQ$; $K = BO \cap NP$; $L = CO \cap MQ$. Chứng minh rằng AO, BL, CK đồng quy.

Lời giải



♥ Đặt $I = BL \cap CK$; $U = BO \cap MQ$; $V = CO \cap NP$

Ta có: $B(ALOC) = (QLMU)$

$= (MULQ)$ (theo tính chất của tỉ số kép của hàng)

$= (PKVN)$ (xét phép chiếu xuyên tâm O)

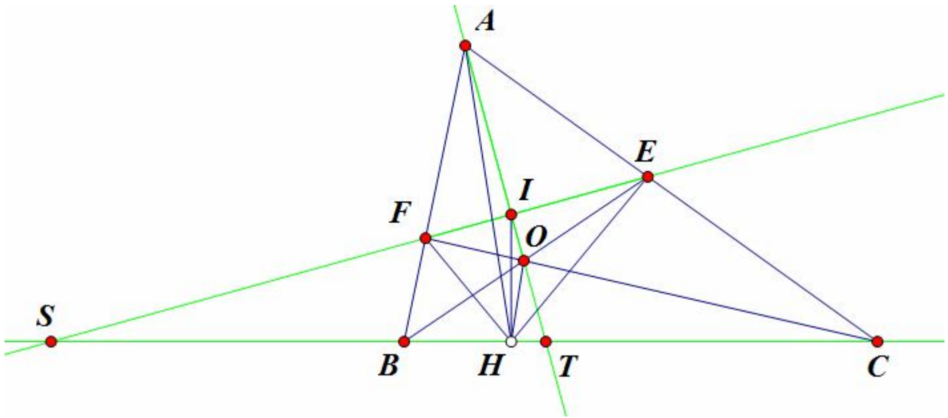
$= C(AKOB)$

♥ Từ đó suy ra: A, I, O thẳng hàng

Vậy AO, BL, CK đồng quy.❑

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. BO, CO theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F (EF không song song với BC). $I = AO \cap EF$. H là hình chiếu của I trên BC.
Chứng minh rằng $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$.

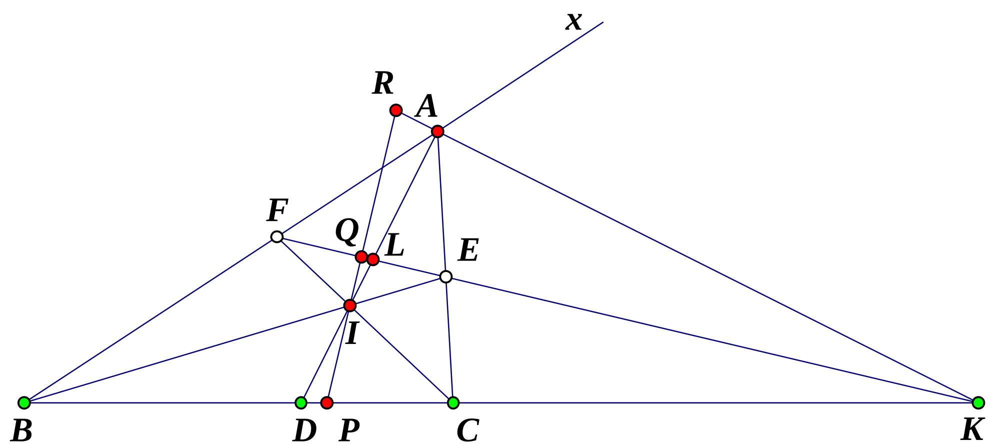
Ý tưởng
Xem H là **đỉnh của một chùm điều hòa** trong đó có **hai đường thẳng vuông góc nhau**.
Lời giải



Đặt $S = EF \cap BC$; $T = SO \cap BC$
Ta có: $\left(BCTS\right) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản)
Suy ra: $\left(FEIS\right) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm A)
$\left(AOTI\right) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm F)
Do đó: $H\left(FEIS\right) = -1$; $H\left(AOTI\right) = -1$
Suy ra: $\widehat{IHE} = \widehat{IHF}$; $\widehat{IHA} = \widehat{IHO}$ (do $HI \perp HS$, định lý về chùm điều hòa)
Vậy $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I (EF không song song với BC). Đường thẳng qua I, vuông góc với EF theo thứ tự cắt BC, EF tại P, Q. Giả sử $IP = 2IQ$. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải



Đặt $K = EF \cap BC;\ R = AK \cap PQ;\ D = IA \cap BC;\ L = IA \cap EF$

Ta có: $(CBKD) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản)

$\Rightarrow (AILD) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm E)

$\Rightarrow (RIQP) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm K)

Suy ra: $\dfrac{RQ}{RP} = \dfrac{IQ}{IP} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Q là trung điểm PR $\Rightarrow$ ΔKPR cân tại K $\Rightarrow$ $\widehat{AKE} = \widehat{BKE}$ $\Rightarrow$ $\widehat{BAC} = \widehat{KAC}$ (1)

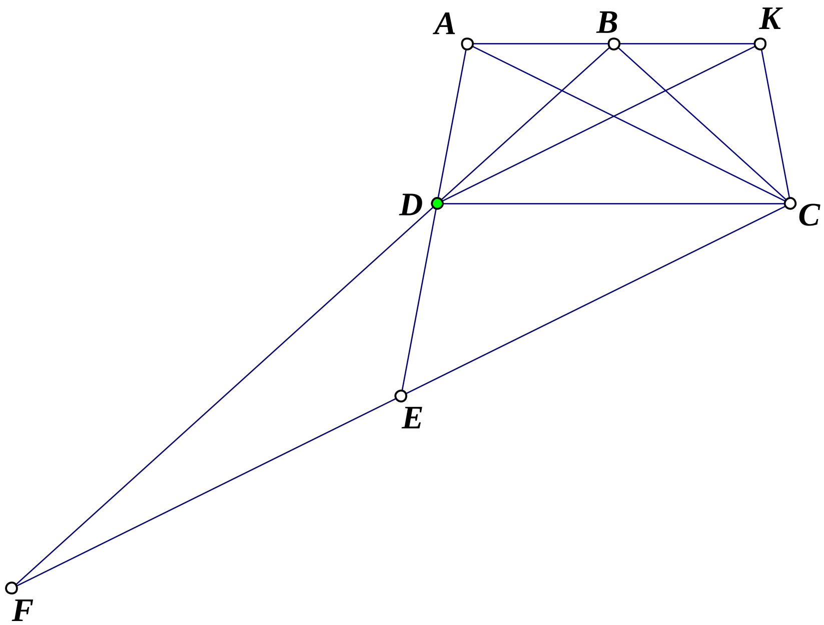
Mặt khác ta lại có: $(BCDK) = -1 \Rightarrow A(BCDK) = -1$

Do $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{xAK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BAC} = 60^0$

Ví dụ 15. Cho hình thang $ABCD$ $\left(AB//CD\right)$ có $BC = BD$. Đường thẳng đối xứng với CA qua CD theo thứ tự cắt AD, BD tại E, F. Chứng minh rằng $EC = EF$.

Lời giải



Lấy K sao cho B là trung điểm của đoạn AK
Vì $AK//DC$ và $BC = BD$ nên $AKCD$ là hình thang cân

Suy ra: $\widehat{KDC} = \widehat{ACD}$

Do $\widehat{ACD} = \widehat{ECD} \Rightarrow \widehat{KDC} = \widehat{ECD}$

Do đó: $DK//CE$ (1)

Mặt khác vì $DC//AK$ và $BA = BK$ $\Rightarrow D\left(CBAK\right) = -1$ (định lý về chùm điều hòa)

Do đó: $D\left(CFEK\right) = -1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $EC = EF$ (định lý về chùm điều hòa)

C. BÀI TẬP

Bài toán 1. (*IMO Shortlist 1995*) Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là tiếp điểm trên BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi X là một điểm bên trong tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc với BC tại D, tiếp xúc với XB, XC theo thứ tự tại Y, Z. Chứng minh E, F, Y, Z đồng viên.

Bài toán 2. (*China TST 2002*) Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi E, F, P lần lượt là giao điểm của AD và BC, AB và CD, AC và BD. Gọi O là chân đường vuông góc hạ từ P xuống EF. Chứng minh rằng $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$

Bài toán 3. (*Balkan MO 2007*) Cho ΔABC vuông tại A. $D \in AC$ và E đối xứng với A qua BD, F là giao điểm của đường thẳng qua D vuông góc với BC và đường CE. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Minh Hà (CB), Nguyễn Xuân Bình – *Toán nâng cao hình học 10 NXB GD 2000.*

[2] Đoàn Quỳnh (CB), Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình – *Tài liệu chuyên toán hình học NXB GD 2010.*

[3] https://julielltv.wordpress.com

[4] https://phamquangtoan.wordpress.com

Huỳnh Chí Hào – THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp
Email: chihao@moet.edu.vn