NGUYÊN LÝ DIRICHLET VÀ ÁP DỤNG

==================================

Phương pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet là phương pháp mà học sinh được làm quen sớm nhất ngay từ khi học ở bậc tiểu học. Đây là một trong những phương pháp thể hiện rõ cái đẹp của toán học, làm cho học sinh thêm yêu thích môn toán. Chính vì vậy mà trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, các bậc: Tiểu học, THCS, THPT… thường xuyên có mặt các bài toán phải sử dụng phương pháp này.

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: ***the pigeonhole principle,*** hay là ***the drawer principle***) được phát biểu đầu tiên bởi **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** là nhà toán học người Đức gốc Pháp, 1805 – 1859).

Nguyên lý: “***Nếu nhốt hết 5 con thỏ vào 4 cái chuồng thì luôn có ít nhất là hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng”***

Mở rộng: **“ *Nếu nhốt hết m con thỏ vào n cái chuồng thì luôn tồn tại một chuồng nhốt ít nhất là* $1 + \left[\frac{m-1}{n}\right]$ *con thỏ”***

Thông thường người ta hay xét trường hợp số thỏ lớn hơn số chuồng!

Dễ dàng chứng minh được nguyên lý này bằng phương pháp phản chứng, vì vậy khi sử dụng nguyên lý không cần chứng minh. Tuy nhiên việc khai thác ứng dụng rất đa dạng và không hề đơn giản chút nào.Ta sẽ bắt đầu bằng một số ví dụ:

I. DÀNH CHO HỌC SINH THCS:

Ví dụ 1: Một lớp học có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất là 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

Lời giải: Để tôn trọng ta cần thay đổi ngôn ngữ ***thỏ, chuồng*** là ***học sinh , phòng***.

Phòng 1: Chứa các em mắc 1 lỗi.
Phòng 2: Chứa các em mắc 2 lỗi.
…………………………………….
Phòng 14: Chứa các em mắc 14 lỗi.
Phòng 15: Chứa các em không mắc lỗi.

Theo giả thiết *phòng 14* chỉ có em A. Còn lại 14 phòng chứa 29 em. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 3 em. Từ đó có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất là hai người có số người quen bằng nhau (chú ý là A quen B thì B quen A).

Lời giải: Có 5 người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là 4.

Phòng 0: Chứa những người không có người quen.
Phòng 1: Chứa những người có 1 người quen.
……………………………………………………
Phòng 4: Chứa những người có 4 người quen.

Để ý rằng *phòng 0* & *phòng 4* không thể cùng có người.

Thực chất 5 người chứa trong 4 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 2 người. Từ đó có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Trong một giải bóng đá có 10 đội tham gia, bất cứ hai đội nào trong số đó cũng phải đấu với nhau một trận. Chứng minh rằng tại bất cứ thời điểm nào của lịch thi đấu cũng có hai đội đã đấu được một số trận như nhau.

Lời giải: Xét một thời điểm bất kỳ của lịch thi đấu (mỗi đội thi đấu tối đa 9 trận).

Phòng 0: Chứa các đội chưa đấu trận nào.
Phòng 1: Chứa các đội đã thi đấu 1 trận.
……………………………………………
Phòng 9: Chứa các đội đã thi đấu 9 trận.

Để ý rằng *phòng 0* và *phòng 9* không thể cùng có đội thi đấu.

Thực chất 10 đội chứa trong 9 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng đối với một số n nguyên dương bất kì bao giờ ta cũng tìm được một số tự nhiên mà các chữ số của nó bao gồm chỉ có chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n.

Lời giải: Xét n+ 1 số sau: $a_1 = 5; a_2 = 55; ...; a_{n+1} = 55...5$ (n+1 chữ số 5).

Theo nguyên lý Dirichlet : với n+1 số trên ắt tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n. Hiệu của hai số này là số có dạng: 55…50…0 gồm toàn chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n. Đó là điều phải chứng minh!

Ví dụ 5: Chứng minh rằng luôn tồn tại số được viết bởi toàn chữ số 8 chia hết cho 2011.

Lời giải: Xét 2012 số $a_1 = 8; a_2 = 88; ...; a_{2012} = 88...8$ (2012 chữ số 8). Tương tự ví dụ 4 sẽ tồn tại số có dạng 88…80…0 (n chữ số 8 và k chữ số 0) chia hết cho 2011.
Mà: 88…80…0 = 88…8.10^k và (10^k,2011) = 1 suy ra số: 88…8 chia hết cho 2011. Điều phải chứng minh! (*Lưu ý: 2011 là số nguyên tố*)

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nếu (n, 2010) = 1 thì luôn tồn tại một số k nguyên dương sao cho $n^k - 1$ chia hết cho 2010.

Lời giải: Xét 2011 số sau: n; n^2 ; n^3;…; n^{2011}.
Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2010.Giả sử hai số đó là n^i và n^j với $1 \le i < j \le 2011$. Khi đó $n^j - n^i = n^i(n^{j-i} - 1) = n^i(n^k - 1)$ chia hết cho 2010 (k = j - i là số nguyên dương). Vậy $n^k - 1$ chia hết cho 2010 (vì (n^i, 2010) =1).

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong 1007 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 2011.

Lời giải: Ta xét phép chia 1007 số trên cho 2011 và xếp vào:
Nhóm 0: Các số chia hết cho 2011 (dư 0)
Nhóm 1: Các số chia cho 2011 dư 1 hoặc 2010.
Nhóm 2: Các số chia cho 2011 dư 2 hoặc 2009.
…………………………………………………
Nhóm 1005: Các số chia cho 2011 dư 1005 hoặc 1006.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm chứa ít nhất hai số. Theo cách xếp nhóm thì hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 2011.

Ví dụ 8: Cho n + 1 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2n (n > 1). Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 số nào đó mà một số bằng tổng hai số kia.

Lời giải: Sắp thứ tự n + 1 số đã cho $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} < 2n$ (Nhóm 1). Xét thêm n số:
$b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1; ...; b_n = a_{n+1} - a_1$. Ta có: $1 \le b_1 < b_2 < ... < b_n < 2n$ (Nhóm 2).

Tập 2n số của cả 2 nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận 2n -1 giá trị (*chuồng).*

Theo nguyên lý Dirichlet có 2 số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2 tức là phải thuộc 2 nhóm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

Ví dụ 9: Bên trong một tam giác đều cạnh bằng 1đơn vị, đặt 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá 1/2 .

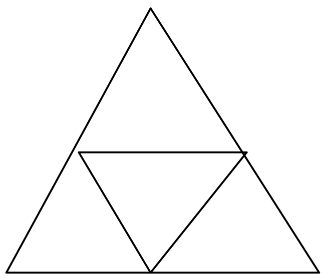
Lời giải: Chia tam giác đều thành 4 tam giác đều cạnh 1/2 bởi trung điểm các cạnh như hình vẽ 1.Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một tam giác đều nhỏ chứa ít nhất 2 điểm. Khoảng cách giữa 2 điểm này không vượt quá độ dài cạnh tam giác là 1/2.
Đó là điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 10:</u> Bên trong hình chữ nhật cạnh 3×4 đặt 6 điểm. Chứng minh rằng trong các điểm này luôn tìm được hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{5}$.

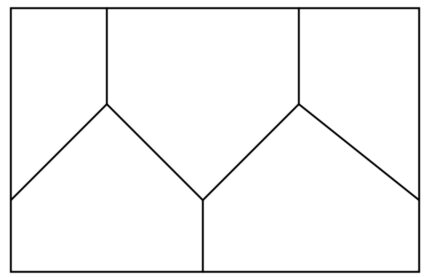
Lời giải: Chia hình chữ nhật thành 5 phần như hình vẽ 2.

Đường kính mỗi hình của 5 phần này đều bằng $\sqrt{5}$.

Theo nguyên lý Dirichlet suy ra điều phải chứng minh.



Hình 1



Hình 2

<u>Ví dụ 11:</u> Bên trong hình vuông cạnh bằng 1m, đặt 51 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính 1/7 m.

Lời giải: Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng 0,2m. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình vuông con chứa ít nhất 3 điểm. Hình tròn ngoại tiếp hình vuông này có bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{10}$ m < 1/7 m.

Vậy hình tròn đồng tâm với hình tròn trên với bán kính 1/7 m chứa ít nhất 3 điểm (đpcm!).

<u>Ví dụ 12:</u> Bên trong hình vuông cạnh 1m, đặt 2011 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2010}$ m^2.

Lời giải: Chia hình vuông đã cho thành 1005 hình chữ nhật kích thước: $1 \times \frac{1}{1005}$. Vì có 2011 điểm nên tồn tại 3 điểm thuộc một hình chữ nhật nhỏ. Diện tích tam giác nội tiếp hình chữ nhật đó không vượt quá 1/2 diện tích của hình chữ nhật. Ta có điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 13:</u> Chứng minh rằng trong 2011 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 28.

Lời giải: Xét 2011 số tự nhiên bất kỳ: a; a+1; a+2; …; a+2010. Trong 1000 số đầu luôn tồn tại một số chia hết cho 1000. Gọi số đó là b. Ta có: $a \le b \le a+999$.

Đặt S(b)= n (tổng các chữ số của b). Xét dãy số sau:

b; b+1;…;b+9; b+19; b+29;…; b+ 99; b+199; b+299; …; b+999;

Cả 28 số trên đều nằm trong dãy đang xét và tổng các chữ số của nó là: n; n+1; …; n+27.

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh!

Chú ý: ***Nếu thay số 2011 bằng số khác thì sao? Chẳng hạn: Trong 19 số tự nhiên liên tiếp có một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 10; trong 39 số tự nhiên liên tiếp có một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11…***

Ví dụ 14: Trên mặt phẳng cho 2011 điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện: trong 3 điểm bất kỳ luôn tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính 1 chứa không ít hơn 1006 điểm trong số các điểm đã cho.

Lời giải: Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong số các đoạn thẳng nối đôi một 2011 điểm đã cho (Số đoạn thẳng là hữu hạn nên theo nguyên tắc cực hạn có phần tử lớn nhất – Tham khảo phần " ***Nguyên tắc cực hạn***").

Nếu AB $\leq$ 1 thì hình tròn (A,1) chứa toàn bộ 2011 điểm đã cho. Khẳng định được chứng minh!

Nếu AB > 1 xét thêm điểm C bất kỳ trong 2009 điểm còn lại. Theo giả thiết có AC <1 hoặc BC< 1 suy ra C $\in$(A,1) hoặc C $\in$(B,1). Nghĩa là 2009 điểm còn lại nằm trong hai hình tròn (A,1) và (B,1). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một hình tròn chứa ít nhất 1005 điểm. Điểm A hoặc B cùng với 1005 điểm trên tạo ra ít nhất 1006 điểm được chứa trong hình tròn bán kính 1(ĐPCM!).

Ví dụ 15: Trong hình vuông cạnh 1, đặt một số đường tròn có tổng chu vi bằng 10. Chứng minh rằng số đường tròn không ít hơn 4 và tồn tại một đường thẳng vuông góc với cạnh AB, giao (cắt hoặc tiếp xúc) với ít nhất 4 đường tròn.

Lời giải: Chiếu vuông góc tất cả các đường tròn lên cạnh AB. Hình chiếu của đường tròn chu vi 1 là đoạn thẳng có độ dài $\frac{1}{\pi}$. Như vậy tổng độ dài của tất cả các hình chiếu là $\frac{10}{\pi}$>3. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một điểm thuộc hình chiếu của ít nhất 4 đường tròn. Vậy đường thẳng vuông góc với AB tại điểm đó giao với ít nhất 4 đường tròn.

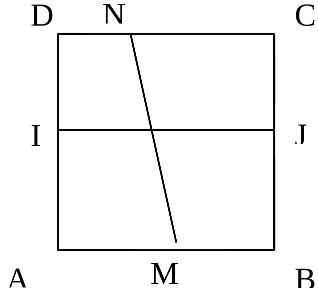
Ví dụ 16: Chín đường thẳng cùng có tính chất là: mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng 2: 3. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải: Để đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác thì đường thẳng đó phải cắt hai cạnh đối diện chứ không phải hai cạnh kề nhau.

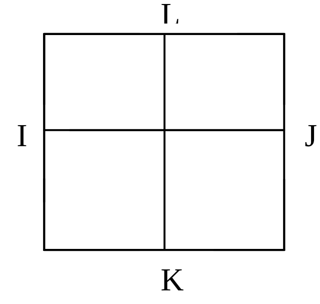
Giả sử một đường thẳng cắt các cạnh AB, CD tại M,N. Các hình thang ADMN và BCNM có các đường cao bằng nhau do đó tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số các đường trung bình, tức là MN chia đoạn thẳng IJ nối trung điểm của các cạnh AD và BC theo tỉ số 2:3 .

Tương tự nếu đường thẳng cắt hai cạnh BC và AD thì đường thẳng này chia đoạn thẳng nối trung điểm KL của các cạnh AB và CD (đường trung bình của hình vuông) theo tỉ số 2:3.

Trên mỗi đường trung bình của hình vuông có hai điểm chia theo tỉ số 2:3. Như vậy 9 đường thẳng đã cho luôn đi qua một trong 4 điểm nói trên. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 3 đường cùng đi qua một điểm.



Hình 3



Hình 4