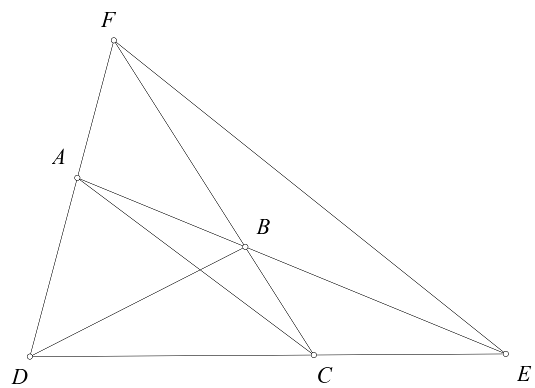
Một số vấn đề về tứ giác toàn phần

Nguyễn Văn Linh

Năm 2014

1 Giới thiệu

Một hình tạo bởi giao điểm của bốn đường thẳng sao cho không có ba đường thẳng nào đồng quy, được gọi là một tứ giác toàn phần. Ví dụ trong hình vẽ ở dưới, $ABCDEF$ được gọi là một tứ giác toàn phần với ba đường chéo AC, BD, EF.

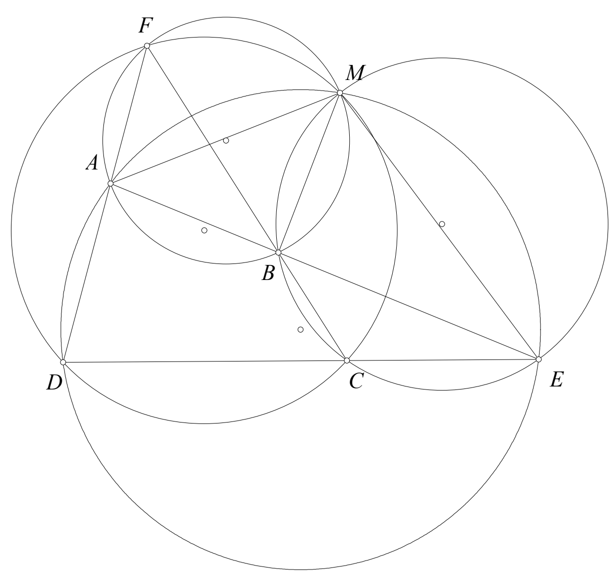


Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu các tính chất liên quan đến tứ giác toàn phần.

2 Tính chất

Nếu không có giải thích gì thêm, tứ giác toàn phần đang xem xét là $ABCDEF$.

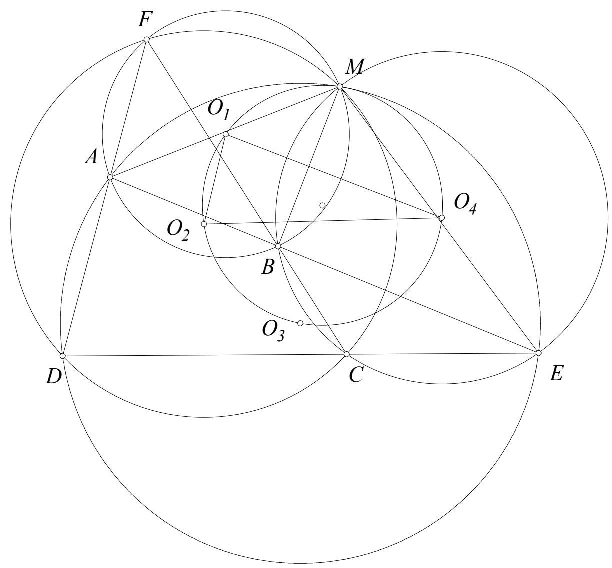
Tính chất 1. Đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABF, DCF, BCE, ADE đồng quy. Điểm đồng quy đó được gọi là ***điểm Miquel*** của tứ giác toàn phần.



Chứng minh. Gọi M là giao của (AFB) và (BEC). Ta có $\angle AME = \angle AMB + \angle EMB = \angle AFB + \angle BCD = 180^\circ - \angle ADE$.

Từ đó $M \in (ADE)$, tương tự $M \in (FDC)$. □

Tính chất 2. Điểm Miquel và tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF, DCF, BCE, ADE cùng nằm trên một đường tròn - ***đường tròn Miquel*** của tứ giác toàn phần.



Chứng minh. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm của $(FAB), (FCD), (EAD), (EBC)$.

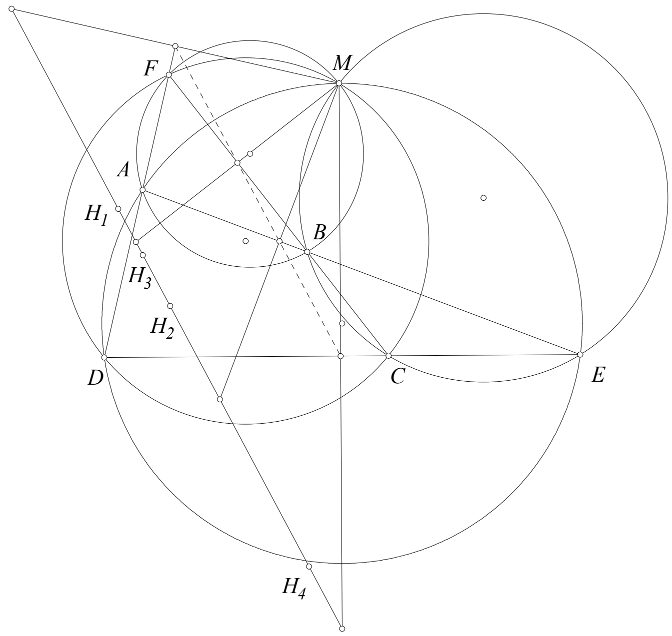
Dễ thấy điểm đối xứng với M qua ba cạnh tam giác $O_1O_2O_4$ lần lượt là F, B, C. Do F, B, C thẳng hàng nên M nằm trên $(O_1O_2O_4)$ và BC là đường thẳng Steiner của M ứng với tam giác $O_1O_2O_4$.

Chứng minh tương tự suy ra O_1, O_2, O_3, O_4, M cùng thuộc một đường tròn. □

Tính chất 3. Điểm Miquel có chung đường thẳng Simson ứng với các tam giác ABF, DCF, BCE, ADE.

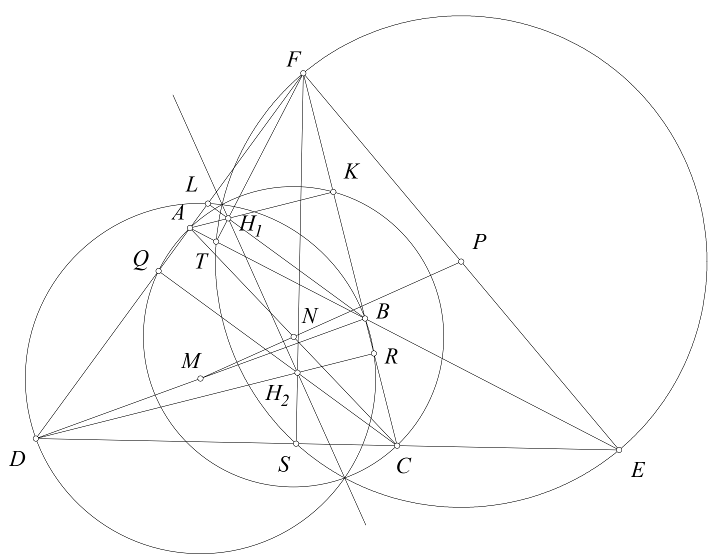
Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của tính chất 1. Hiển nhiên hình chiếu của M trên AB, BC, CD, DA thẳng hàng. □

Tính chất 4. Trực tâm của các tam giác ABF, DCF, BCE, ADE cùng nằm trên một đường thẳng, được gọi là ***đường thẳng Steiner*** của tứ giác toàn phần.



Chứng minh. Đây là hệ quả của tính chất 3, các trực tâm của tam giác ABF, DCF, BCE, ADE lần lượt nằm trên đường thẳng Steiner của M ứng với các tam giác ABF, DCF, BCE, ADE. Mà M có chung đường thẳng Simson nên cũng có chung đường thẳng Steiner với 4 tam giác này. Suy ra trực tâm của 4 tam giác thẳng hàng. □

Tính chất 5. Trung điểm các đường chéo của một tứ giác toàn phần cùng nằm trên một đường thẳng, gọi là ***đường thẳng Gauss-Newton*** của tứ giác toàn phần.



Chứng minh. Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm các tam giác AFB, DFC. Kẻ các đường cao AK, BL, FT của tam giác FAB, DR, CQ, FS của tam giác FDC.

Ta có $\overline{H_1A}.\overline{H_1K} = \overline{H_1B}.\overline{H_1L}, \overline{H_2D}.\overline{H_2R} = \overline{H_2C}.\overline{H_2Q}$ nên H_1H_2 là trục đẳng phương của (AC) và (BD).

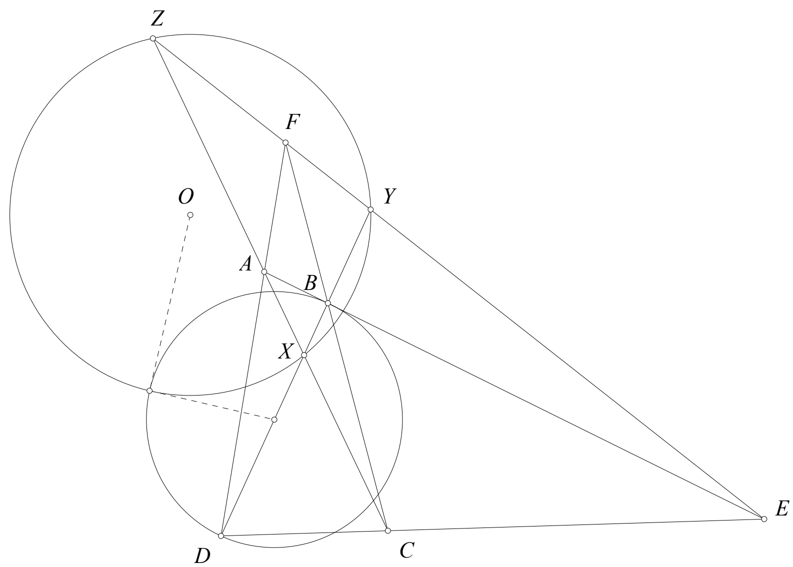
$\overline{H_1F}.\overline{H_1T} = \overline{H_1B}.\overline{H_1L}, \overline{H_2F}.\overline{H_2S} = \overline{H_2D}.\overline{H_2R}$ nên H_1H_2 là trục đẳng phương của (BD) và (EF).

Như vậy ba đường tròn $(AC), (BD), (EF)$ đồng trục và có trục đẳng phương là H_1H_2. Do đó trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng. □

Từ đó ta có tính chất sau.

Tính chất 6. Các đường tròn đường kính là ba đường chéo của tứ giác toàn phần đồng trục và có trục đẳng phương là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần đó.

Tính chất 7. Gọi XYZ là tam giác tạo bởi ba đường chéo AC, BD, EF. Khi đó (XYZ) trực giao với ba đường tròn đường kính AC, BD, EF, đồng thời tâm của (XYZ) nằm trên đường thẳng Steiner.



Chứng minh. (XYZ) trực giao với (BD) hiển nhiên do $(DBXY) = -1$, tương tự với $(AC), (EF)$. Gọi O là tâm của (XYZ). Khi đó $\mathcal{P}_{O/(BD)} = \mathcal{P}_{O/(AC)} = \mathcal{P}_{O/(EF)} = R^2_{(XYZ)}$. Vậy O nằm trên trục đẳng phương của $(AC), (BD), (EF)$ hay O nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. □

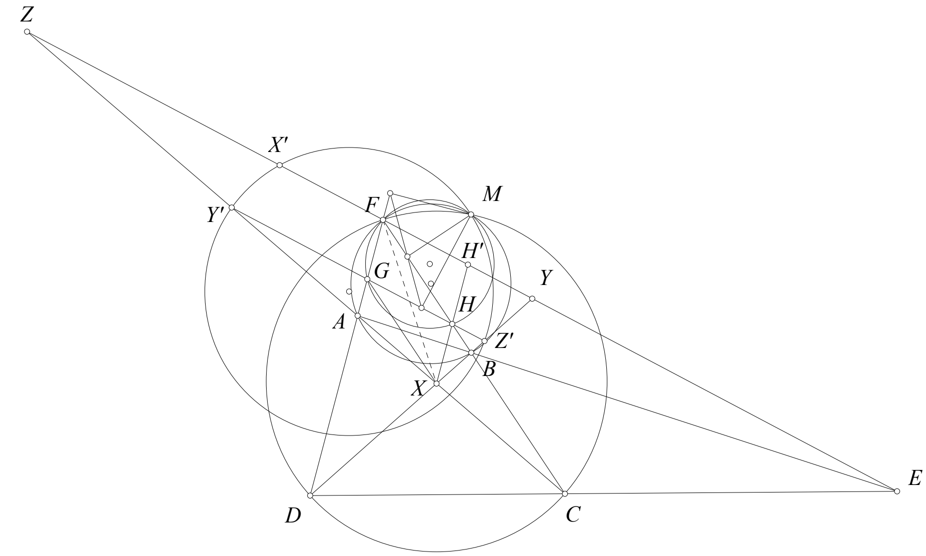
Tính chất 8. Các phân giác trong và ngoài của tứ giác toàn phần giao nhau tại 16 tâm nội tiếp và bàng tiếp của bốn tam giác. 16 điểm này nằm trên hai bộ đường tròn đồng trục với giao điểm của hai trục đẳng phương là điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

Chứng minh. Xem phần *Xung quanh bài 3 VMO 2012.* □

Tính chất 9. Điểm Miquel M là tâm vị tự quay của tứ giác $ABCD$. Nghĩa là tồn tại các phép vị tự quay tâm M biến AB thành CD, AD thành BC.

Chứng minh. Bằng cộng góc dễ thấy $\triangle MAD \sim \triangle MBC, \triangle MAB \sim \triangle MDC$, từ đó có đpcm. □

Tính chất 10. *(Định lý **Emelyanov**).* Gọi XYZ là tam giác tạo bởi các đường chéo $AC, BD, EF; M$ là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Khi đó M nằm trên đường tròn Euler của tam giác XYZ.



Chứng minh. *(Eisso J. Atzema).* Gọi X, Y, Z là giao điểm của AC, BD, EF. X', Y', Z' lần lượt là trung điểm YZ, ZX, XY. Qua X kẻ các đường thẳng song song với AD, BC và cắt BC, AD lần lượt tại H, G. Kéo dài XH cắt YZ tại H'.

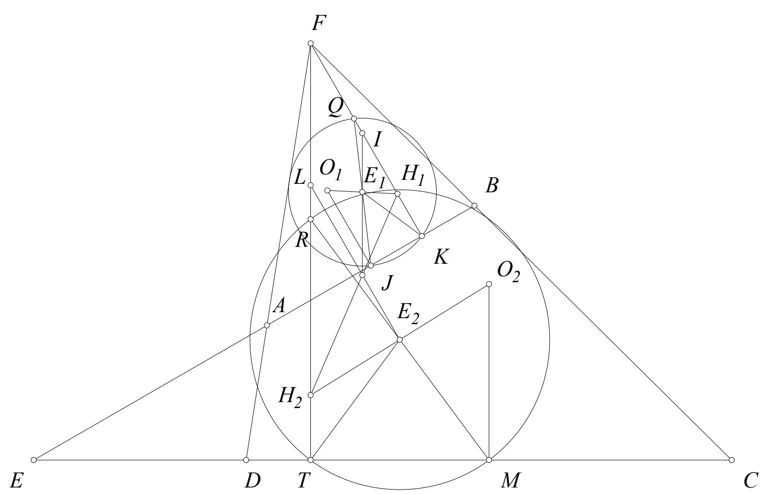
Ta có $F(DCXE) = -1$ và $XH \parallel FD$ nên H là trung điểm XH'. Như vậy H nằm trên đường trung bình ứng với đỉnh X của tam giác XYZ. Tương tự với G. Điều đó có nghĩa là G, H nằm trên $Y'Z'$.

Mặt khác, $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = X(A\infty GD) = X(CH\infty B) = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{BC}}$.

Theo tính chất 9, M là tâm vị tự quay biến AD thành BC nên biến GD thành HC. Nghĩa là $M \in (FGH)$.

Ta thu được hình chiếu của M trên GH nằm trên đường thẳng Simson của M ứng với tam giác DFC. Theo tính chất 3 suy ra hình chiếu của M trên $Y'Z'$ nằm trên đường thẳng Simson của M ứng với 4 tam giác FAB, FCD, EAD, EBC. Tương tự hình chiếu của M trên $X'Y', X'Z'$ cũng nằm trên đường thẳng này. Theo định lý Simson đảo suy ra M, X', Y', Z' cùng thuộc một đường tròn. □

Tính chất 11. Gọi E_1, E_2, E_3, E_4 lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác FAB, FCD, EAD, EBC. Khi đó các đường thẳng lần lượt qua E_1, E_2, E_3, E_4 và vuông góc với CD, AB, BC, AD đồng quy tại một điểm nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $ABCDEF$, gọi là ***điểm Morley*** của tứ giác toàn phần.



Chứng minh. Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm, O_1, O_2 lần lượt là tâm ngoại tiếp của tam giác FAB, FCD, M, J lần lượt là trung điểm CD, AB; K, T lần lượt là hình chiếu của F trên AB, CD. Đường thẳng qua E_1 và vuông góc với CD giao FK tại I, đường thẳng qua E_2 và vuông góc với AB giao FT tại L. $JE_1 \cap FK = \{Q\}, ME_2 \cap FT = \{R\}$.

Do $FK \parallel E_2H$ nên $\angle E_2LH_2 = \angle TFK$. Tương tự, $\angle E_1IH_1 = \angle TFK$. Suy ra $\angle E_2LH_2 = \angle E_1IH_1$.

Ta sẽ chứng minh $\angle RE_2M = \angle JE_1Q$, khi và chỉ khi $\angle TLE_2 + \angle LRE_2 = 270° - \angle E_1JK - \angle E_1IH_1$.

Tương đương $2\angle TFK = 90° - \angle E_1JK + \angle TRM = \angle JQK + \angle TRM$.

Hay $2\angle E = \angle O_1PH_1 + \angle O_2PH_2 = |\angle A - \angle B| + |\angle C - \angle D|$ (đúng)

Như vậy hai tam giác E_2LR và E_1QI có $\angle RE_2L = \angle QE_1I$ và $\angle RLE_2 + \angle QIE_1 = 180°$.

Áp dụng định lý hàm số sin suy ra $\dfrac{QI}{E_1Q} = \dfrac{RL}{E_2L}$ hay $\dfrac{QI}{\frac{1}{2}R_1} = \dfrac{RL}{\frac{1}{2}R_2}$. Nhưng $\dfrac{O_1J}{O_2M} = \dfrac{R_1\cos F}{R_2\cos F} = \dfrac{R_1}{R_2}$ nên $\dfrac{QI}{RL} = \dfrac{O_1J}{O_2M} = \dfrac{FH_1}{FH_2}$. Vậy $\dfrac{IH_1}{FI} = \dfrac{FL}{LH_2}$. Áp dụng định lý Thales suy ra đường thẳng qua E_1 vuông góc với CD giao đường thẳng qua E_2 vuông góc với AB tại một điểm trên H_1H_2. Chứng minh tương tự suy ra đpcm. □

Nhận xét. Bài toán tương tự được phát biểu trong *IMO Shortlist 2009, G6.*

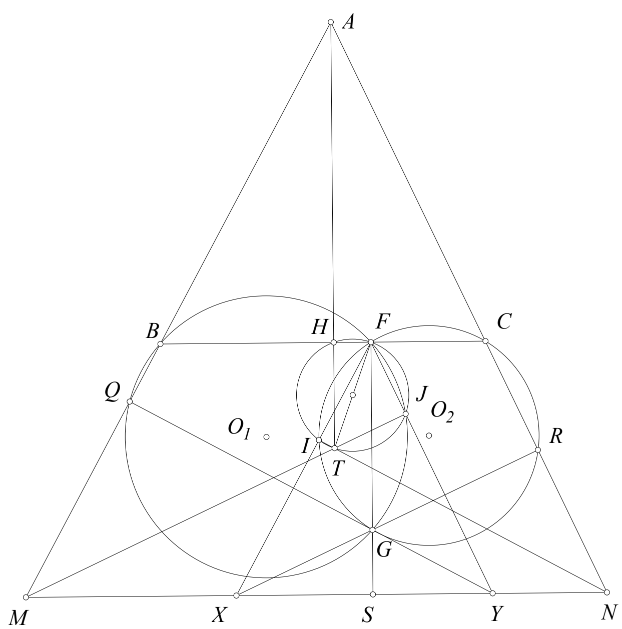
Tính chất 12. Các đường trung trực của $O_1H_1, O_2H_2, O_3H_3, O_4H_4$ đồng quy tại một điểm, gọi là ***điểm Hervey*** của tứ giác toàn phần.

Chứng minh. Cách 1.

Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) giao nhau tại F và G. Đường thẳng qua F và vuông góc với FG giao (O_1) và (O_2) lần lượt tại B và C. Gọi J, I là hai điểm bất kì trên (O_1) và (O_2). Đường thẳng qua B song song với FI giao đường thẳng qua C song song với FJ tại A. Kẻ $AH \perp BC$. Khi đó I, J, F, H cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh.



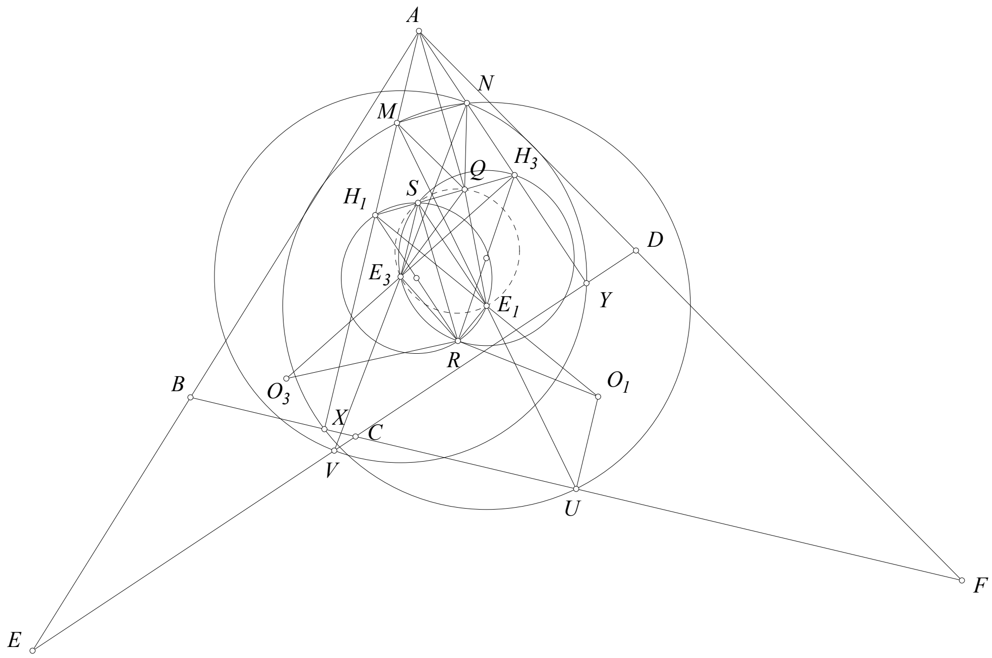
Gọi Q, R là giao điểm thứ hai của AB với (O_1), AC với (O_2). FI giao GR tại X, FJ giao GQ tại Y. Do $FX \parallel AB$ và $GQ \perp AB$ nên $FX \perp GQ$. Tương tự, $FY \perp GR$. Suy ra G là trực tâm tam giác XFY. Ta thu được $FG \perp XY$ hay $XY \parallel BC$.

Dựng hai hình bình hành $BMXF$ và $FCNY$. Gọi S là hình chiếu của F trên XY. Ta có $YS.YM = YG.YQ = YJ.YF$ suy ra tứ giác $MSJF$ nội tiếp hay $\angle MJF = 90°$. Tương tự, $\angle NIF = 90°$.

Từ đó AH, MJ, NI là ba đường cao của tam giác AMN và đồng quy tại trực tâm T.

Vậy H, I, J nằm trên đường tròn đường kính FT.

Trở lại bài toán.



Theo tính chất 11, gọi S là giao của các đường thẳng lần lượt qua E_1, E_2, E_3, E_4 và vuông góc với CD, AB, BC, AD.

Kẻ $AQ \perp H_1H_3$, M, N lần lượt là trung điểm AH_1, AH_3, U, V lần lượt là trung điểm BF, DE.

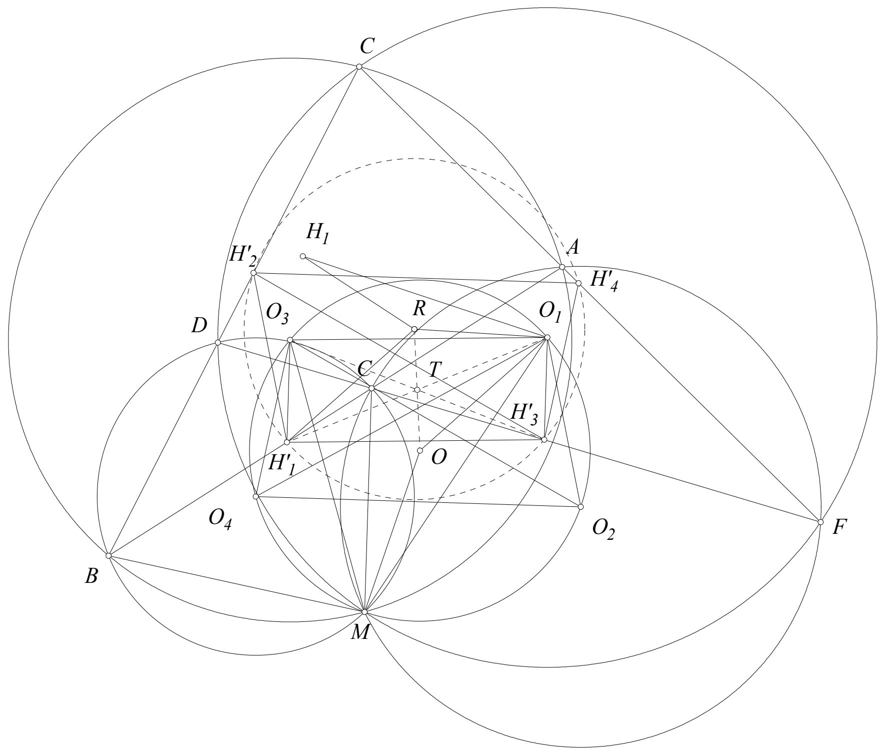
Ta có $\dfrac{MQ}{ME_1} = \dfrac{AH_1}{R_{(ABF)}} = \dfrac{2O_1U}{R_{(ABF)}} = 2\cos\angle BAD$. Tương tự suy ra $\dfrac{MQ}{ME_1} = \dfrac{NQ}{NE_3}$.

Mặt khác, ta có $\angle H_1MQ + \angle H_3NQ = 2\angle H_1AH_3 = \angle H_1AO_1 + \angle H_3AO_3 = \angle H_1ME_1 + \angle H_3NE_3$.

Suy ra $\angle H_1MQ - \angle H_1ME_1 = \angle H_3NE_3 - \angle QNH_3$ hay $\angle QME_1 = \angle QNE_3$. Do đó hai tam giác MQE_1 và NQE_3 đồng dạng. Suy ra $\angle E_3QE_1 = \angle MQN = \angle MAN = \angle E_3SE_1$ hay E_3, S, Q, E_1 cùng thuộc một đường tròn. (1)

Gọi R là giao của trung trực đoạn O_1H_1 với đường thẳng qua S vuông góc với H_1H_3. Đường thẳng qua S song song với AH_3 giao (H_1R) tại E_1'. Theo bổ đề 1 ta có E_3, S, Q, E_1' cùng thuộc một đường tròn. Kết hợp với (1) suy ra $E_1' \equiv E_1$ hay E_1R là trung trực của H_1O_1. Vậy trung trực của H_1O_1, H_3O_3 giao nhau tại R nằm trên đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Chứng minh tương tự suy ra trung trực của $H_1O_1, H_2O_2, H_3O_3, H_4O_4$ đồng quy tại R.

Cách 2.



Gọi H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 lần lượt là trực tâm các tam giác $O_2O_3O_4, O_1O_3O_4, O_1O_2O_4, O_1O_2O_3$.

Dễ thấy $O_1H'_3 \parallel= O_3H'_1$ nên $O_1H'_1$ giao $O_3H'_3$ tại trung điểm T của mỗi đường. Tương tự suy ra $O_1H'_1, O_2H'_2, O_3H'_3, O_4H'_4$ đồng quy tại T. Phép vị tự $\mathcal{H}_T^{-1}$: $O_1 \mapsto H'_1, O_2 \mapsto H'_2, O_3 \mapsto H'_3, O_4 \mapsto H'_4$ nên H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 cùng nằm trên đường tròn tâm R là đối xứng của O qua T.

Ta sẽ chứng minh trung trực của $O_1H_1, O_2H_2, O_3H_3, O_4H_4$ đồng quy tại R.

Dễ thấy $\triangle O_2O_3O_4 \sim \triangle FCD \sim \triangle H'_2H'_3H'_4$, đồng thời O_1 là trực tâm tam giác $H'_2H'_3H'_4$.

Ta có RO_1 và H_1O_1 là đường thẳng Euler của hai tam giác $H'_2H'_3H'_4$ và FCD. Do hai tam giác này đồng dạng nên $\angle RO_1H_1 = \angle(H'_2H'_4, DF) = \angle(O_2O_4, DF) = 90^\circ - \angle MCF = 90^\circ - \angle MBC = 90^\circ - \angle MO_3O_1 = \angle OO_1M$.

Mặt khác, $\dfrac{H_1O_1}{RO_1} = \dfrac{R_{(CDF)}}{R_{(H'_2H'_3H'_4)}} = \dfrac{R_{(CDF)}}{R_{(O_2O_3O_4)}} = \dfrac{O_1M}{O_1O}$.

Từ đó hai tam giác RO_1H_1 và OO_1M đồng dạng, suy ra tam giác RO_1H_1 cân tại R. Chứng minh tương tự suy ra trung trực của $H_1O_1, H_2O_2, H_3O_3, H_4O_4$ đồng quy tại R. □

Trên đây là một số tính chất cơ bản của tứ giác toàn phần. Xuyên suốt cuốn sách này chúng ta cũng bắt gặp rất nhiều định lý hay bài toán liên quan đến nó. Phải kể đến các tính chất của điểm Euler-Poncelet (xem chương), định lý Brocard trong trường hợp tứ giác $ABCD$ nội tiếp (xem chương), các tâm nghịch đảo trong trường hợp tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (xem chương) và các tính chất của tứ giác lưỡng tâm (xem chương).

3 Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho tam giác ABC và một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F theo thứ tự. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$; M_A là giao điểm khác M của đường tròn (AEF) với đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Các điểm M_B, M_C được xác định tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng AM_A, BM_B, CM_C đồng quy.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có DA, BC không song song. P là giao điểm của các đường chéo AC, BD. Các điểm M, N theo thứ tự chạy trên các đoạn DA, BC sao cho $\dfrac{DM}{DA} = \dfrac{BN}{BC}$. MN theo thứ tự cắt AC, BD tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) luôn đi qua một điểm cố định khác P.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) kẻ từ B và C cắt nhau tại T. S là điểm nằm trên tia CB sao cho $AS \perp AT$. B_1 và C_1 nằm trên tia ST (T nằm giữa B_1 và C_1, B_1 nằm giữa S và T) sao cho $B_1T = BT = C_1T$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và AB_1C_1 đồng dạng.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$, AC cắt BD tại G. Gọi tâm ngoại tiếp của các tam giác ABG, BCG, CDG, ADG lần lượt là O_1, O_2, O_3, O_4. O_1O_3 cắt O_2O_4 tại M. Đường thẳng d_1 qua G cắt các đường tròn $(O_2), (O_4)$ lần lượt tại J, K; đường thẳng d_2 qua G cắt các đường tròn $(O_1), (O_3)$ lần lượt tại S, T. Gọi I, U là trung điểm của JK, ST, CMR $MI = MU$.

Bài 5. *(IMO shortlist 2008).* Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng tồn tại điểm P nằm trong tứ giác thỏa mãn:

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90^\circ$$

khi và chỉ khi hai đường chéo AC và BD vuông góc.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kì vuông góc với nhau và đi qua H. d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X_1, Y_1, Z_1. Tương tự ta xác định X_2, Y_2, Z_2. Khi đó hai tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$ và $ABCX_2Y_2Z_2$ có chung điểm Miquel.

Bài 7. *(Đường thẳng **Droz-Farny**).* Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kì vuông góc với nhau và đi qua H. d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X_1, Y_1, Z_1. Tương tự ta xác định X_2, Y_2, Z_2. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC, đường thẳng l lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác AEF, BFD, CDE. Chứng minh rằng trực tâm tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên l.

Bài 9. Một đường tròn tâm O đi qua hai đỉnh A và C của tam giác ABC và cắt AB, BC lần thứ hai tại K, N. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và KBN. Chứng minh rằng $\angle OMB = 90^\circ$.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là giao của tiếp tuyến kẻ từ A của (O) với BC. Tương tự ta xác định được E, F. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AD, BE, CF. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 11. Cho tam giác ABC. H là điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle HBA = \angle HCA$. Gọi hình chiếu của H trên phân giác trong và ngoài góc A lần lượt là P và Q. M là trung điểm BC. Chứng minh rằng P, Q, M thẳng hàng.

Bài 12. Cho tam giác ABC. D, E, F là các điểm nằm trên BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và D_1, E_1, F_1 lần lượt là trung điểm các cạnh EF, FD, DE. Chứng minh rằng A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 đồng quy.

Bài 13. *(China TST 2004 Quiz).* Cho hai đường tròn bằng nhau (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P và Q. Gọi O là trung điểm PQ. Kẻ 2 đường thẳng AD và BC qua P sao cho $A, C \in (O_1)$ và $B, D \in (O_2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và CD . Biết rằng O_1 và O_2 không nằm trong phần mặt phẳng giao của hai đường tròn , M, N không trùng O. Chứng minh rằng M, N, O thẳng hàng.

Bài 14. Cho tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$, $AC \cap BD = \{O\}$, phân giác các góc $\angle DAB$ và $\angle CBA$ cắt nhau tại I. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn AB, CD, OI thẳng hàng.

Bài 15. Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác. (PAB) cắt AC tại E; (PCA) cắt AB tại F. M, N lần lượt là trung điểm BC, EF. Q là điểm liên hợp đẳng giác của P ứng với tam giác ABC. Chứng minh rằng $MN \parallel AQ$.

Bài 16. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại M. Gọi trọng tâm hai tam giác AMD, CMB lần lượt là P, Q; trực tâm hai tam giác DMC, MAB lần lượt là R, S. Chứng minh rằng $PQ \perp RS$.

Bài 17. *(IMO Shortlist 2009).* Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. AC giao BD tại E, AD giao BC tại F. Gọi G, H lần lượt là trung điểm AB và CD. Chứng minh rằng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EGH.

Bài 18. Cho tứ giác $ABCD$. P là một điểm nằm trong tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $S_{APB} + S_{CPD} = S_{BPC} + S_{APD}$ khi và chỉ khi P nằm trên đường thẳng Gauss của tứ giác $ABCD$.

Bài 19. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ nội tiếp (O). Chứng minh rằng đường thẳng Steiner của tứ giác $ABCD$ đi qua giao điểm P của hai đường chéo AC, BD.

Bài 20. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. AD cắt BC tại E, AC cắt BD tại G. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm các tam giác ECD, EAB, GCD, GAB. Chứng minh tứ giác $H_1H_3H_2H_4$ là hình bình hành.

Bài 21. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, AB cắt CD tại P, AD cắt BC tại Q. Chứng minh rằng khoảng cách giữa trực tâm hai tam giác APD và AQB bằng khoảng cách giữa trực tâm hai tam giác CQD và BPC.