Отчёт по практическому заданию “Численные методы решения СЛАУ”.

Общая постановка задачи

Дана заполненная квадратная невырожденная матрица $A \in R^{(n+1)*(n+1)}$ и правая часть $f \in R^{n+1}$. Требуется найти решение СЛАУ, посчитать его невязку $||Ax - f||$.

Где на практике используется СЛАУ

Решение СЛАУ требуется во многих сферах человеческой деятельности: в программировании, физике, математическом моделировании. Например решение СЛАУ используется а экономике и финансах - для моделирования и анализа экономических процессов, решения задач оптимизации инвестиций, расчета финансовых потоков и т. д.

Данные в задаче матрицы могут использоваться в:

1)Первая матрица может использоваться в задачах приближения функции по методу наименьших квадратов.

2) Вторая матрицы может использоваться в методах оптимизации: некоторые методы оптимизации и вычислительной математики (например, методы минимизации функций или задачи оптимального управления) могут привести к системам уравнений с трехдиагональными матрицами. Например решения трехдиагональных матриц могут быть полезны в моделировании и анализе: решения трехдиагональных матриц могут использоваться для моделирования и анализа различных физических процессов, таких как распространение тепла, распространение звука или динамика жидкостей при численном моделировании.

Какие методы решения СЛАУ также используются

1. Метод LU-разложения: Этот метод разлагает матрицу коэффициентов на произведение нижней треугольной матрицы (L) и верхней треугольной матрицы (U) и затем применяет прямой и обратный ходы.

https://habr.com/ru/sandbox/35982/

1. Метод Холецкого: Применяется для симметричных и положительно определенных матриц, он разлагает матрицу на произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицы.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Разложение_Холецкого

1. Метод QR-разложения: Разлагает матрицу на произведение ортогональной матрицы (Q) и верхнетреугольной матрицы (R). Он может использоваться для решения переопределенных систем.

https://ru.wikipedia.org/wiki/QR-алгоритм

Условия задания

Решить СЛАУ $A_i\mathbf{b} = \mathbf{f}_i$ методом Гаусса для следующих пар A_i и $\mathbf{f}_i$:

1.

$$(A_1)_{lk} = \sum_{m=0}^{50} x_m^{l+k}, \ \ (\mathbf{f}_1)_l = \sum_{m=0}^{50} x_m^l y_m, \ \ x_m = \frac{m}{10},$$

$$y_m = y(x_m), \ y(x) = x + \frac{x}{2}\sin(4x), \qquad l = \overline{0{,}10}, k = \overline{0{,}10}.$$

Дополнительно построить на одном графике функцию (x_m, y_m), $m = \overline{0{,}50}$ и функцию $(x_m, \hat{y}_m)$, где $\hat{y}_m = \sum_{l=0}^{10} b_l x_m^l \, m = \overline{0{,}50}$.

2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},$$

$$(\mathbf{f}_2)_l = x_l^2 * h^2, \quad x_l = \frac{l}{n}, \quad h = \frac{1}{n}, \quad l = \overline{0{,}n-1},$$

$$(\mathbf{f}_2)_n = \frac{1}{12}.$$

$$n = 100.$$

Дополнительно построить график (x_l, b_l), $\quad l = \overline{0{,}n}$.

Провести сравнение решений двух задач на основе следующих критериев:

1. Количество операций (умножений и делений) относительно размерностей матриц;
2. Норма невязки $||\mathbf{r}_i||_2 = ||A_i\mathbf{b} - \mathbf{f}_i||_2$.

Описание метод Гаусса

Метод Гаусса - один из самых простых методов решения СЛАУ. Он состоит двух этапов: прямого хода и обратного.

На прямом ходу матрица приводится к верхнетреугольному виду:

1) $a_{00} \neq 0$, тогда делим первое уравнение на a_{00}, затем вычитаем из остальных i уравнений первое умноженное на $a_{i0}, i = \overline{1, n}$.

2)a_{00} = 0 находим (точно найдём такой элемент, т.к матрица невырождена) a_{i0} ≠ 0, $i = \overline{1, n}$ меняем i уравнение с первым и возвращаемся к шагу 1.

Получим матрицу, в которой все $a_{i0} = 0, i = \overline{1, n}$

повторяем алгоритм для матрицы размера n - 1, полученной исключением первого столбца и первой строки матрицы и т.д.

В итоге получим

$$\begin{cases} \mathrm{x}_0 + c_{01}x_1 + ... + c_{0n}x_n = f_0 \\ ... \\ \mathrm{x}_n = f_n \end{cases}$$

Обратный ход:

из последнего уравнения получаем x_n, далее получаем x_{n-1} при подстановке x_n и т.д.

Сложность метода Гаусса

Делений: $\frac{1}{2}n(n+1)$

Умножений: $\frac{1}{3}n(n^2-1) + \frac{1}{2}n(n-1)$

Метод Гаусса даёт невязку близкую к нулю, однако вторую СЛАУ можно решить более совершенным методом - методом прогонки, который обладает линейной сложностью.

Источник: конспекты с лекций Сергея Ивановича Мухина.

Метод прогонки

$$\begin{cases} \mathrm{A}_i x_{i-1} - C_i x_i + B_i x_{i+1} = -F_i, i = \overline{1, n-1} (1) \\ \mathrm{x}_0 = \mu_1 x_1 + q_0 (2) \\ \mathrm{x}_n = \mu_2 x_{n-1} + q_n \end{cases}$$

При этом A_i, B_i ≠ 0 , $i = \overline{1, n-1}$

$A_i, B_i, C_i, F_i, i = \overline{1, n-1}, \mu_1, \mu_2, q_0, q_n$ - заданы

Условия (2) называются краевыми условиями

В простейшем случае $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Система (1)-(2) представляет собой

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & & \\ 0 & ... & 0 & 0 & A_{n-1} & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & -\mu 2 & 1 \end{pmatrix}$$

правой частью $f = (q_0, -F_1, ..., -F_{n-1}, q_n)^T$

неизвестными $x = (x_0, ..., x_n)^T$

Положим,что между неизвестными имеется рекуррентное соотношение.

$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = \overline{0, n-1} (3)$

$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i$, подставим x_i, x_{i-1} в (1)

Получим

$$\begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \beta_{i+1} + F_i = 0 \end{cases}$$

отсюда получаем рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, i = \overline{1, n-1}, (4)$$

$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i\beta_i}{C_i - A_i\alpha_i}, i = \overline{1, n-1}, (4)$

($C_i - A_i\alpha_i = 0?$ ≠ 0?)

$\alpha_1 = \mu_1, \beta_1 = q_0$(из (3) и (2))

Таким образом при прямом ходе можно получить все прогоночные α, β коэффициенты

При обратном ходе

через рекуррентную формулу (3) (только при $i = \overline{n-1, 0}$) получаем x_i

x_n находим из второго условия (2) подставляя (1) вместо x_{n-1}:

$x_n = \frac{\mu_2\beta_n + q_n}{1 - \mu_2\alpha_n}$

Сложность метод прогонки

количество умножений и делений при прямом ходе соответственно: $2n - 2$, $n - 1$

количество умножений при обратном ходе: $2n$

Общее количество умножений - $3n - 2$

Общее количество делений - $n - 1$

Источник: конспекты с лекций Сергея Ивановича Мухина.

Результаты

Вычисленные при помощи метода Гаусса значения неизвестных для первой матрицы:

```
Решение:
x0 = 0.286435
x1 = -13.819711
x2 = 101.473019
x3 = -250.104011
x4 = 299.775045
x5 = -199.919359
x6 = 78.895075
x7 = -18.706833
x8 = 2.587731
x9 = -0.189094
x10 = 0.005470


||r|| = ||Ab - f|| = 0.000001
```

Для второй методом Гаусса:

```
x0 = 0.000000
x1 = 0.001667   x26 = 0.042951  x51 = 0.079360  x76 = 0.098863
x2 = 0.003333   x27 = 0.044555  x52 = 0.080572  x77 = 0.099038
x3 = 0.005000   x28 = 0.046153  x53 = 0.081756  x78 = 0.099153
x4 = 0.006666   x29 = 0.047742  x54 = 0.082912  x79 = 0.099207
x5 = 0.008332   x30 = 0.049323  x55 = 0.084039  x80 = 0.099199
x6 = 0.009998   x31 = 0.050895  x56 = 0.085136  x81 = 0.099126
x7 = 0.011664   x32 = 0.052458  x57 = 0.086201  x82 = 0.098989
x8 = 0.013329   x33 = 0.054010  x58 = 0.087234  x83 = 0.098784
x9 = 0.014994   x34 = 0.055551  x59 = 0.088234  x84 = 0.098510
x10 = 0.016658  x35 = 0.057081  x60 = 0.089198  x85 = 0.098165
x11 = 0.018320  x36 = 0.058598  x61 = 0.090126  x86 = 0.097748
x12 = 0.019982  x37 = 0.060103  x62 = 0.091018  x87 = 0.097258
x13 = 0.021642  x38 = 0.061594  x63 = 0.091871  x88 = 0.096691
x14 = 0.023300  x39 = 0.063070  x64 = 0.092684  x89 = 0.096047
x15 = 0.024957  x40 = 0.064531  x65 = 0.093456  x90 = 0.095324
x16 = 0.026611  x41 = 0.065977  x66 = 0.094186  x91 = 0.094520
x17 = 0.028263  x42 = 0.067405  x67 = 0.094872  x92 = 0.093633
x18 = 0.029911  x43 = 0.068816  x68 = 0.095514  x93 = 0.092662
x19 = 0.031557  x44 = 0.070208  x69 = 0.096109  x94 = 0.091604
x20 = 0.033199  x45 = 0.071581  x70 = 0.096657  x95 = 0.090457
x21 = 0.034837  x46 = 0.072933  x71 = 0.097155  x96 = 0.089221
x22 = 0.036470  x47 = 0.074265  x72 = 0.097603  x97 = 0.087892
x23 = 0.038099  x48 = 0.075574  x73 = 0.098000  x98 = 0.086469
x24 = 0.039722  x49 = 0.076861  x74 = 0.098343  x99 = 0.084950
x25 = 0.041340  x50 = 0.078123  x75 = 0.098631  x100 = 0.083333

||r|| = ||Ab - f|| = 0.000000
```

Для второй методом прогонки:

```
решения:

x0 = 0.000000
x1 = 0.001667   x26 = 0.042951  x51 = 0.079360  x76 = 0.098863
x2 = 0.003333   x27 = 0.044555  x52 = 0.080572  x77 = 0.099038
x3 = 0.005000   x28 = 0.046153  x53 = 0.081756  x78 = 0.099153
x4 = 0.006666   x29 = 0.047742  x54 = 0.082912  x79 = 0.099207
x5 = 0.008332   x30 = 0.049323  x55 = 0.084039  x80 = 0.099199
x6 = 0.009998   x31 = 0.050895  x56 = 0.085136  x81 = 0.099126
x7 = 0.011664   x32 = 0.052458  x57 = 0.086201  x82 = 0.098989
x8 = 0.013329   x33 = 0.054010  x58 = 0.087234  x83 = 0.098784
x9 = 0.014994   x34 = 0.055551  x59 = 0.088234  x84 = 0.098510
x10 = 0.016658  x35 = 0.057081  x60 = 0.089198  x85 = 0.098165
x11 = 0.018320  x36 = 0.058598  x61 = 0.090126  x86 = 0.097748
x12 = 0.019982  x37 = 0.060103  x62 = 0.091018  x87 = 0.097258
x13 = 0.021642  x38 = 0.061594  x63 = 0.091871  x88 = 0.096691
x14 = 0.023300  x39 = 0.063070  x64 = 0.092684  x89 = 0.096047
x15 = 0.024957  x40 = 0.064531  x65 = 0.093456  x90 = 0.095324
x16 = 0.026611  x41 = 0.065977  x66 = 0.094186  x91 = 0.094520
x17 = 0.028263  x42 = 0.067405  x67 = 0.094872  x92 = 0.093633
x18 = 0.029911  x43 = 0.068816  x68 = 0.095514  x93 = 0.092662
x19 = 0.031557  x44 = 0.070208  x69 = 0.096109  x94 = 0.091604
x20 = 0.033199  x45 = 0.071581  x70 = 0.096657  x95 = 0.090457
x21 = 0.034837  x46 = 0.072933  x71 = 0.097155  x96 = 0.089221
x22 = 0.036470  x47 = 0.074265  x72 = 0.097603  x97 = 0.087892
x23 = 0.038099  x48 = 0.075574  x73 = 0.098000  x98 = 0.086469
x24 = 0.039722  x49 = 0.076861  x74 = 0.098343  x99 = 0.084950
x25 = 0.041340  x50 = 0.078123  x75 = 0.098631  x100 = 0.083333


Данная матрица удовлетворяет условиям устойчивости метода прогонки


||r|| = ||Ab - f|| = 0.000000
```

Графики:

график для функций (x_m, y_m) и $(x_m, \tilde{y}_m), m = \overline{0, 50}$

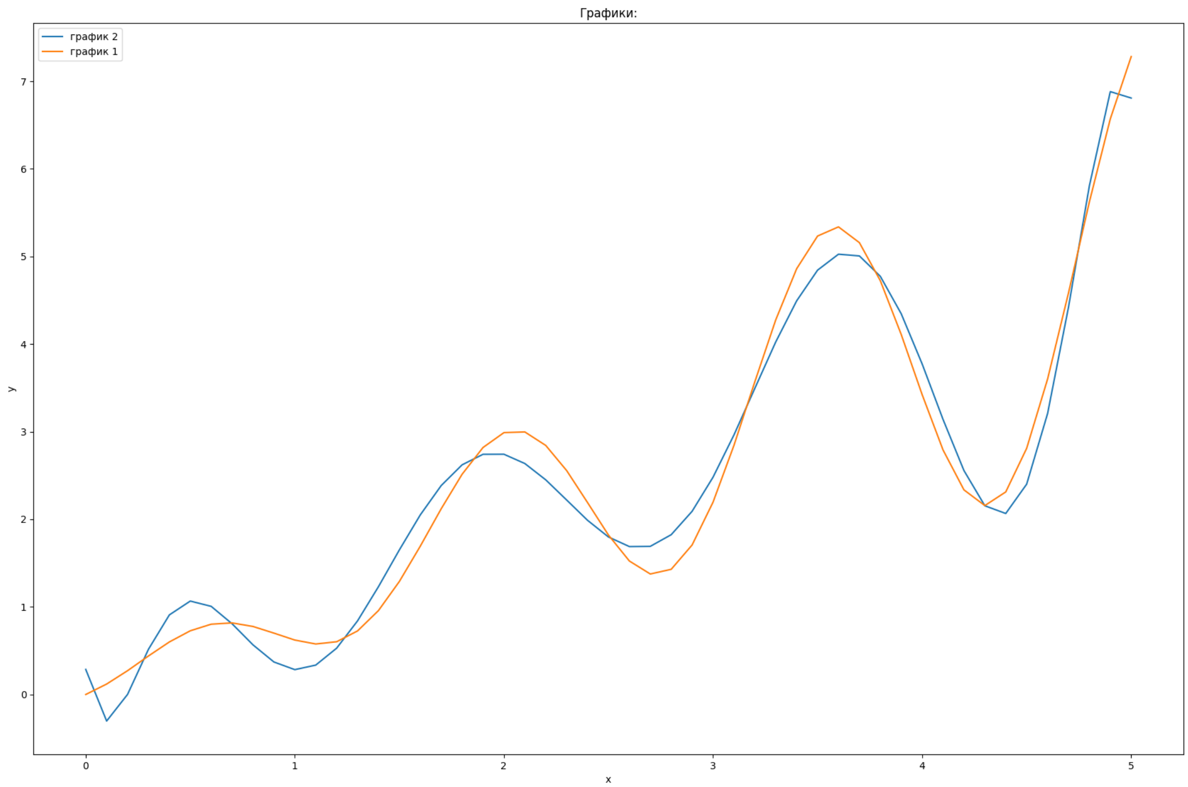
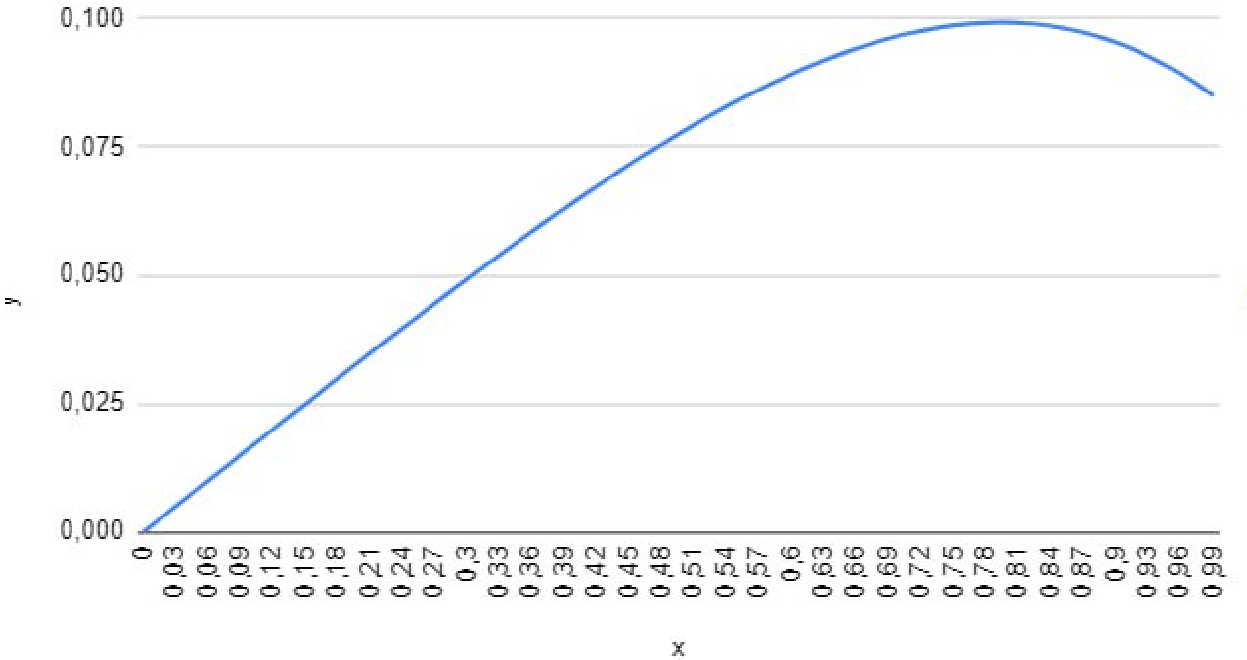


график для функции $(x_l, b_l), l = \overline{0, n}$



Графики 1 и 2 построены в Python при помощи библиотеки matplotlib.

График 3 построен в excel

Сравнение

1.

Для первой матрицы:

умножений в методе Гаусса: 495

делений в методе прогонки: 66

Для второй матрицы:

умножений через метод Гаусса: 348450

делений через метод Гаусса: 5151

умножений через метод прогонки: 301

делений через метод прогонки: 100

2.

Норма невязки для первой матрицы равна 0.000001

Норма невязки для второй матрицы в обоих случаях равна нулю

Соответственно можно сделать вывод о том, что при осуществлении метода Гаусса для трёхдиагональной матрицы, программа совершает значительно большее количество операций чем в методе прогонки т.к сложность метода Гаусса O(n^3), а метода прогонки

O(n).

Заключение

Метод Гаусса

Достоинства: универсальный, простой и эффективный метод.

Недостатки: для больших матриц потребуется большое количество вычислительных ресурсов и времени. Также стоит отметить неэффективность для разреженных матриц - при работе с разреженными матрицами (матрицами, у которых большая часть элементов равна нулю) метод Гаусса может быть неэффективным и требовать большого количества вычислительных ресурсов.

Метод прогонки

Достоинства: требует меньшего количества вычислительных ресурсов и времени, более устойчив к ошибкам округления.

Недостатки: метод прогонки применим только для трехдиагональных матриц. Также необходимо чтобы матрица удовлетворяла условиям устойчивости метода прогонки.

Данная в условии матрица удовлетворяет (проверено в программе).