9. (15pt)

$$\mathbf{p_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

를 control points로 가지는 2차원 uniform 2차 B-spline 곡선 $\mathbf{f}(t)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{p_i} N_i^2(t), \text{ where } N_i^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2, & r = t - \tau_i, \text{ if } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ -r^2 + r + \frac{1}{2}, & r = t - \tau_{i+1}, \text{ if } t \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}) \\ \frac{1}{2}(1-r)^2, & r = t - \tau_{i+2}, \text{ if } t \in [\tau_{i+2}, \tau_{i+3}) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) (4pt) $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$일 때, $\mathbf{f}(t)$의 knot sequence를 적으시오.

(b) (3pt) (a)의 knot sequence를 이용할 때, $\mathbf{f}(3.5)$의 값의 계산에 영향을 미치는 (즉, 0이 아닌) $N_i^2(t)$를 모두 쓰시오.

(c) (8pt) (a)의 knot sequence를 이용하여, $\mathbf{f}(3.5)$를 계산하시오.

(Answer)

(a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(b) $N_1^2(t), N_2^2(t), N_3^2(t)$.

(c) $\mathbf{f}(3.5) = (\frac{7}{8}, \frac{9}{8})$.

(설명) 우선 knot sequence의 경우, 이 곡선은 Uniform B-spline이므로 knot들 간의 간격이 일정하다. 즉 모든 연속한 knot들의 간격은 1로,
$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 2 \quad \tau_3 = 3, \cdots$ 이 된다.

한편, 이 곡선의 제어점(control point)의 개수는 5개로, 이 곡선 위에 있는 점의 위치는 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \sum_{i=0}^{4} \mathbf{p_i} N_i^2(t) \\ &= \mathbf{p_0} N_0^2(t) + \mathbf{p_1} N_1^2(t) + \mathbf{p_2} N_2^2(t) + \mathbf{p_3} N_3^2(t) + \mathbf{p_4} N_4^2(t), \end{aligned}$$

이때, 각 $N_i^2(t)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$N_0^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2, & r = t - 0, \text{ if } t \in [0, 1) \\ -r^2 + r + \frac{1}{2}, & r = t - 1, \text{ if } t \in [1, 2) \\ \frac{1}{2}(1-r)^2, & r = t - 2, \text{ if } t \in [2, 3) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

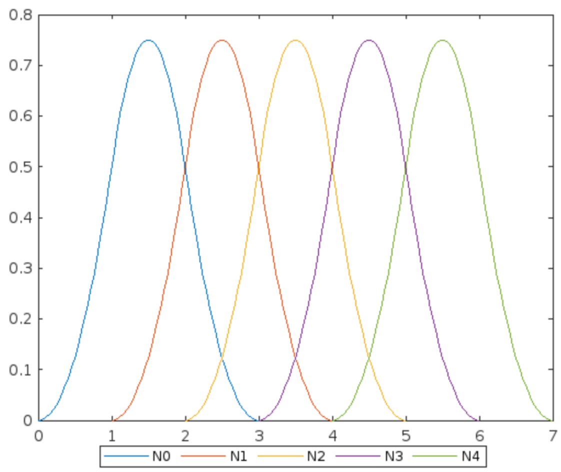
$$N_1^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2, & r = t - 1, \text{ if } t \in [1, 2) \\ -r^2 + r + \frac{1}{2}, & r = t - 2, \text{ if } t \in [2, 3) \\ \frac{1}{2}(1-r)^2, & r = t - 3, \text{ if } t \in [3, 4) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$N_2^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2, & r = t - 2, \text{ if } t \in [2, 3) \\ -r^2 + r + \frac{1}{2}, & r = t - 3, \text{ if } t \in [3, 4) \\ \frac{1}{2}(1-r)^2, & r = t - 4, \text{ if } t \in [4, 5) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$N_3^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2, & r = t-2,\ \text{if } t \in [3,4) \\ -r^2 + r + \frac{1}{2}, & r = t-3,\ \text{if } t \in [4,5) \\ \frac{1}{2}(1-r)^2, & r = t-4,\ \text{if } t \in [5,6) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$N_4^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}r^2, & r = t-3,\ \text{if } t \in [4,5) \\ -r^2 + r + \frac{1}{2}, & r = t-4,\ \text{if } t \in [5,6) \\ \frac{1}{2}(1-r)^2, & r = t-5,\ \text{if } t \in [6,7) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$N_0^2(t) \sim N_4^2(t)$의 함수를 그래프로 그리면 다음과 같다.



위의 식과 그래프에서 볼 수 있듯이 제어점이 5개인 2차 B-spline 곡선을 정의하기 위해서는 8개의 knot가 필요하고 (그래프에서 $N_i^2(t)$가 0보다 큰 모든 knot 구간들을 찾음) uniform한 B-spline이므로 이 곡선의 knot sequence는 $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$이다 ((a)의 답).

또한 $t = 3.5$ 일 때, $N_0^2(t) = 0$, $N_4^2(t) = 0$이므로 $\mathbf{f}(3.5)$의 값의 계산에 전혀혀 기여하지 않는다. 따라서 $t = 3.5$일 때 값의 계산에 영향을 미치는 $N_i^2(t)$는 $N_1^2(t)$, $N_2^2(t)$, $N_3^2(t)$가 된다 ((b)의 답).

이를 이용하여 $\mathbf{f}(3.5)$의 값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(3.5) &= \mathbf{p_1}N_1^2(3.5) + \mathbf{p_2}N_2^2(3.5) + \mathbf{p_3}N_3^2(3.5) \\
&= \frac{1}{2}\{1-(3.5-3)\}^2\mathbf{p_1} + \{-(3.5-3)^2 + (3.5-3) + 0.5\}\mathbf{p_2} + \frac{1}{2}(3.5-3)^2\mathbf{p_3} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{7}{8}\\\frac{9}{8}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

((c)의 답).