

Николай Сергеевич БАХТИЙ —  
аспирант кафедры алгебры и математической логики  
nbakhtiy@gmail.com

Владимир Николаевич КУТРУНОВ —  
профессор кафедры алгебры  
и математической логики,

доктор физико-математических наук

Институт математики и компьютерных наук  
Тюменского государственного университета

УДК 622.276/279

## ПРИТОК ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ ИЗ РАДИАЛЬНОГО ПЛАСТА

### IMPERFECT WELL STREAM IN RADIAL RESERVIOR

**АННОТАЦИЯ.** Рассматривается задача о притоке из радиального пласта несжимаемой однофазной жидкости к скважине, часть ствола которой осталась неперфорированной. Получено аналитическое и численное решения данной задачи и проведено сравнение результатов с классическим решением М. Маскета.

**SUMMARY.** A problem of well stream in radial reservoir is considered. Fluid is incompressible and has one phase. Part of well bore is not perforated. The analytical solution was obtained and compared with classic solution of M. Masket.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Фильтрация жидкости, несовершенная скважина.

**KEY WORDS.** Fluid filtration, imperfect well.

**Введение.** В данной работе методом разделения переменных получено решение задачи притока к несовершенной скважине, которое отличается от решения, приведенного в [1], большей общностью. В процессе решения нет необходимости ограничивать количество интервалов перфорации и их положение на стволе скважины. Влиянием силы тяжести пренебрегаем.

**Список обозначений.**  $r_1$  — радиус трубы,  $r_2$  — радиус питания,  $H$  — толщина пласта,  $h$  — перфорированная толщина пласта,  $r$  — радиальная координата,  $z$  — осевая координата,  $p$  — отклонение давления от заданного на контуре питания,  $k$  — проницаемость пласта,  $\mu$  — вязкость жидкости.

**Постановка задачи и математическая модель процесса.** Скважина радиуса  $r_1$  добывает несжимаемую однофазную жидкость из пласта, кровля ( $z = 0$ ) и подошва ( $z = H$ ) которого горизонтальны и непроницаемы. На расстоянии  $r_2$  от оси скважины давление жидкости остается постоянным (не теряя общности его можно принять равным нулю). Некоторая часть ствола скважины перфорирована, и на ней поддерживается постоянное давление, остальная часть неперфорирована и приток жидкости к ней отсутствует. Уравнение, описывающее такой процесс в осесимметричной системе координат, есть

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Граничное условие на поверхности ствола скважины ( $r = r_1$ ) запишем в виде

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \varphi(z), \quad (2)$$

пока не конкретизируя вид функции  $\varphi(z)$ . Остальные граничные условия:

$$p|_{r=r_2} = 0; \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=H} = 0; \quad (5)$$

**Решение задачи.** Предположим, что все частные решения уравнения (1) имеют вид [2]

$$p(r, z) = R(r)Z(z). \quad (6)$$

Тогда, подставляя (6) в (1) и разделяя переменные, получим

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad (7)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \lambda^2 R = 0. \quad (8)$$

Нетривиальное решение уравнения (7), удовлетворяющее граничным условиям (4) и (5), есть

$$Z_n(z) = C_n \cos(\lambda_n z), \quad (9)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{H}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Решение уравнения (8) при  $n > 0$  записывается в функциях Бесселя многого аргумента:

$$R_n(r) = M_n I_0(\lambda_n r) + L_n K_0(\lambda_n r). \quad (11)$$

Константы  $M$  и  $L$  найдем из граничных условий  $R'(r_1) = 1$  и  $R(r_2) = 0$ :

$$M = -L \frac{K_0(\lambda_n r_2)}{I_0(\lambda_n r_2)}; \quad (12)$$

$$L = -\frac{1}{\lambda_n} \left[ \frac{K_0(\lambda_n r_2)}{I_0(\lambda_n r_2)} I_1(\lambda_n r_1) + K_1(\lambda_n r_1) \right]^{-1} \quad (13)$$

При  $n = 0$  собственное число  $\lambda_0 = 0$  и уравнение (8) принимает вид  $R'' + \frac{1}{r} R' = 0$ . Его решение, удовлетворяющее тем же граничным условиям  $R'(r_1) = 1$  и  $R(r_2) = 0$ , имеет вид:

$$R_0 = r_1 \ln(r/r_2). \quad (14)$$



Собирая воедино (9), (11) и (14) и производя суммирование по  $n$ , получим решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3), (4) и (5):

$$p(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(r) \cos(\lambda_n z). \quad (15)$$

Производная функции (15) по  $r$  при  $r=r_1$  с учетом граничных условий (2) и  $R'(r_1)=1$  равна:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n z) = \varphi(z). \quad (16)$$

Выражение (16) есть разложение функции  $\varphi(z)$  в ряд Фурье по косинусам. Его коэффициенты

$$C_0 = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi(\xi) d\xi, \quad C_n = \frac{2}{H} \int_0^H \varphi(\xi) \cos(\lambda_n \xi) d\xi, \quad n=1, 2, \dots \quad (17)$$

**Подбор функции  $\varphi(z)$ .** Теперь конкретизируем граничное условие на стволе скважины. Предположим, что задано некоторое  $h \in (0, H)$  и на отрезке  $(h, H]$  плотность притока жидкости к скважине равна нулю (другими словами, этот интервал неперфорирован и на нем  $\varphi(z) = 0$ ). На остальной (перфорированной) части ствола  $[0, h]$  поддерживается постоянное отклонение забойного давления от давления на контуре питания ( $p_{заб}$ ). Тогда коэффициенты  $C_n$ , определенные формулами (17), имеют вид:

$$C_0 = \frac{1}{H} \int_0^h \varphi(\xi) d\xi, \quad C_n = \frac{2}{H} \int_0^h \varphi(\xi) \cos(\lambda_n \xi) d\xi, \quad n=1, 2, \dots \quad (18)$$

Разложим функцию  $\varphi(z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\varepsilon = h/2$ , удержав только  $N_{sum}$  первых членов:

$$\varphi(z) = \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \sum_{q=0}^{N_{sum}} B_q (z - \varepsilon)^q. \quad (19)$$

*Замечание.* Как будет видно из процедуры ниже, перфорированная часть ствола (плотность притока к которой не равна 0) не обязательно прилегает к кровле или подошве пласта. Более того, перфорированная часть ствола может состоять из произвольного количества непересекающихся отрезков — в этом случае на каждом из таких отрезков необходимо задавать «свое» разложение вида (19). В этом отличие представленного решения от известного решения М. Маскета [1].

Подставляя (19) в (18), предполагая, что возможно почленное интегрирование, и вводя обозначения  $o_{0,q} = \frac{1}{H} \int_0^h (\xi - \varepsilon)^q d\xi$ ,  $o_{n,q} = \frac{2}{H} \int_0^h (\xi - \varepsilon)^q \cos(\lambda_n \xi) d\xi$ ,  $n=1, 2, \dots$ , получим:

$$C_n = \sum_{q=0}^{N_{sum}} B_q o_{n,q}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Теперь, подставляя (20) в (15) и вводя обозначение  $\Theta_q(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} o_{nq} R_n(r) \cos(\lambda_n z)$ , имеем:

$$p(r, z) = \sum_{q=0}^{N_{sum}} B_q \Theta_q(r, z). \quad (21)$$

Зададим на отрезке  $[0, h]$  разбиение  $\{z_i\}, i=1, 2, \dots, l$  и потребуем выполнения равенств:

$$p(r_1, z_i) = p_{заб}. \quad (22)$$

Из (21) и (22) имеем

$$p_{заб} = \sum_{q=0}^{N_{sum}} B_q \Theta_q(r_1, z_i), \quad i=0, 1, 2, \dots, l. \quad (23)$$

Так как количество точек  $\{z_i\}$  (другими словами, число  $l+1$ ) можно выбрать существенно больше числа коэффициентов  $B_q$ , система линейных алгебраических уравнений (23) является (в общем случае) переопределенной и должна быть решена в обобщенном смысле. Тогда, следуя методу наименьших квадратов и вводя обозначение  $\Theta_{iq} = \Theta_q(r_1, z_i)$ , из (23) получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^l \Theta_{i0}^2 B_0 + \sum_{i=0}^l \Theta_{i1} \Theta_{i0} B_1 + \sum_{i=0}^l \Theta_{i2} \Theta_{i0} B_2 + \dots + \sum_{i=0}^l \Theta_{iN_{sum}} \Theta_{i0} B_{N_{sum}} = p_{заб} \sum_{i=0}^l \Theta_{i0} \\ \sum_{i=0}^l \Theta_{i0} \Theta_{i1} B_0 + \sum_{i=0}^l \Theta_{i1}^2 B_1 + \sum_{i=0}^l \Theta_{i2} \Theta_{i1} B_2 + \dots + \sum_{i=0}^l \Theta_{iN_{sum}} \Theta_{i1} B_{N_{sum}} = p_{заб} \sum_{i=0}^l \Theta_{i1} \\ \dots \\ \sum_{i=0}^l \Theta_{i0} \Theta_{iN_{sum}} B_0 + \sum_{i=0}^l \Theta_{i1} \Theta_{iN_{sum}} B_1 + \sum_{i=0}^l \Theta_{i2} \Theta_{iN_{sum}} B_2 + \dots + \sum_{i=0}^l \Theta_{iN_{sum}}^2 B_{N_{sum}} = p_{заб} \sum_{i=0}^l \Theta_{iN_{sum}} \end{cases} \quad (24)$$

Находя из (24) коэффициенты  $B_0, B_1, \dots, B_{N_{sum}}$ , мы окончательно определим функцию  $\varphi(z)$ . Определенная таким образом плотность притока  $\varphi(z)$  обеспечивает значение забойного давления на перфорированной части ствола максимально близким к заданному значению  $p_{заб}$ .

**Дебит скважины.** Дебит скважины выражается формулой:

$$Q = \int_0^H \int_0^{2\pi} r_1 v_r \Big|_{r=r_1} d\psi dz, \quad (25)$$

где радиальная скорость жидкости  $v_r$  равна:

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (26)$$

Подставляя (19) в (26), а затем (26) в (25) и производя интегрирование, получим:

$$Q = -\frac{2\pi k r_1}{\mu} \sum_{q=0}^{\lfloor N_{sum}/2 \rfloor} B_{2q} \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)4^q}, \quad (27)$$

где  $\lfloor N_{sum}/2 \rfloor$  — целая часть числа  $N_{sum}/2$ .



**Результаты расчетов.** Для получения результатов зададим следующие параметры:  $H = 10$  м;  $r_1 = 0,1$  м;  $r_2 = 500$  м;  $p_{заб} = -5$  МПа;  $k = 0,1$  мкм<sup>2</sup>;  $\mu = 5$  МПа·сек. При суммировании по  $q$  было учтено 6 членов (то есть,  $N_{sum} = 6$ ), при суммировании по  $n$  — 120 членов (например, при вычислении  $\Theta_{iq}$ ), количество точек разбиения  $\{z_i\}$ , равномерно распределенных на отрезке  $[0, h]$ , было задано равным 100.

Значения дебита скважины, интервал перфорации который прилегает к кровле или подошве пласта, вычисленные по формуле (27) и по формуле Маскета [1], для различных значений  $h$  представлены на рис. 1. Можно видеть, что результаты, получаемые по обеим формулам, очень близки.

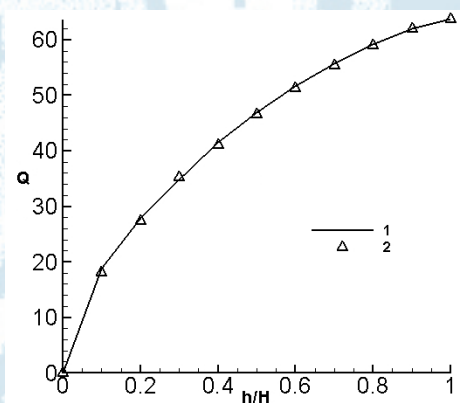


Рис. 1. Зависимость дебита скважины от доли  $h/H$  перфорированной толщины пласта. 1 — формула Маскета; 2 — формула (27)

Пусть теперь начало  $h_1$  и конец  $h_2$  интервала перфорации расположены произвольно. Перфорированная толщина пласта  $h = h_2 - h_1$ . Тогда, выбрав  $\varepsilon = (h_1 + h_2)/2$ , легко показать, что формула (27) останется неизменной. На рис. 2 показана зависимость дебита скважины от отношения  $h_1/H$  (при фиксированном  $h = H/2$ ).

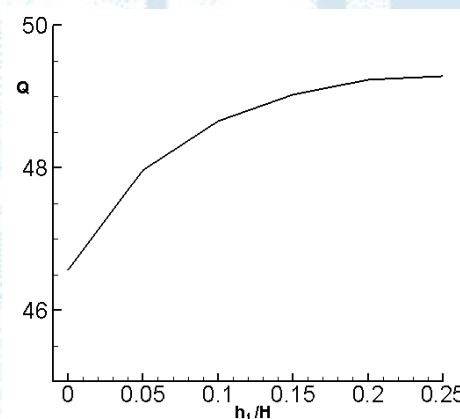


Рис. 2. Зависимость дебита скважины от отношения  $h_1/H$

При изменении  $h_1/H$  от 0 до 0,25 дебит скважины увеличивается с 46,57 м<sup>3</sup>/сут до 49,29 м<sup>3</sup>/сут. Однако при других значениях параметров изменение дебита может быть более существенным, поэтому положение интервала перфорации при решении данной задачи желательно учитывать.

**Заключение.** Получено стационарное аналитическое решение задачи притока жидкости к несовершенной скважине. Данное решение не накладывает ограничений на количество интервалов перфорации и их расположение на стволе скважины. Показано, что при фиксированной перфорированной толщине максимальный дебит жидкости достигается при положении интервала перфорации посередине между кровлей и подошвой пласта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маскет М. Течение однофазных жидкостей в пористой среде. М.: ИКИ, 2004. 640 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

**Олег Николаевич КУЗЯКОВ** —  
зав. кафедрой кибернетических систем,  
доктор технических наук  
kuzyaov@tsogu.ru

**Владимир Николаевич СЫЗРАНЦЕВ** —  
зав. кафедрой «Машины и оборудование  
нефтяной и газовой промышленности»,  
доктор технических наук  
v\_syzrantsev@mail.ru

**Алексей Михайлович МАРГОЛИН** —  
ассистент кафедры кибернетических систем  
alex\_meta@mail.ru

Тюменский государственный  
нефтегазовый университет

УДК 681.3.01.002.5

#### СИСТЕМА СБОРА И АНАЛИЗА ДАННЫХ

#### С ДАТЧИКОВ ДЕФОРМАЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

#### INTEGRAL TYPE STRAIN GAUGES DATA CAPTURE AND ANALYSIS SYSTEM

**АННОТАЦИЯ.** Произведен обзор методов оценки реакции датчиков деформации интегрального типа, позволяющих оценить нагруженность и усталостные изменения конструкций, приведена структура разработанной системы сбора первичных данных, а также алгоритмы работы комплекса на этапах начальной настройки и последующих измерений.

**SUMMARY.** A survey of assessment methods for the reaction of integral type strain gauges which allow to estimate loading and fatigue changes of constructions has been conducted. The author gives the structure of a developed system for primary data capture as