

УДК 539.3:624.075

ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УПРУГОЗАКРЕПЛЁННЫМИ КОНЦАМИ

О.Ю. Белова, А.Г. Важенин, Ю.Г. Сысоев
(Тюменский государственный архитектурно-строительный университет,
Тюменский государственный нефтегазовый университет)

Балки, упругое основание, изгиб, податливость упругих опорных шарниров, прочность

Beams, elastic foundation, bending, compliance of elastic support joints, strength

UDC 539.3:624.075

Bending of the beam on the elastic foundation with elastically fixed ends. Belova O.Yu., Vazhenin A.G., Sysoev Yu.G. Proceedings of Universities. Oil and Ga. 2010, No.2, p.

A procedure was developed to design beams on the elastic foundation with elastically fixed ends. The efficiency and validity of the designed procedure is proved. The proposed procedure permits to define elastic joints rigidity, to enhance reliability of rods. Fig. 2, ref. 5.

При решении технических вопросов в нефтяном машиностроении, строительстве и обустройстве промыслов приходится иметь дело с изгибом балок, лежащих на сплошном упругом основании. Теория расчёта балок со свободными, шарнирно опертыми, жёсткозаделанными концами и неразрезных балок на упругом основании изложена в [1-3].

Проблема расчёта балок с упругозакреплёнными концами на упругом основании не исследована.

Теория, методы расчёта составных конструкций с упругоподатливыми связями разработана в [4,5].

Авторами статьи решена задача изгиба балки на упругом основании с учётом податливости упругих опорных шарниров (рис.1).

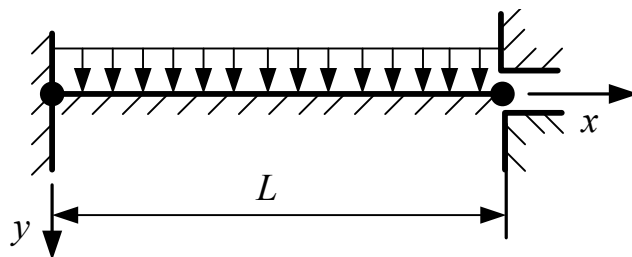


Рис.1. Балка на упругом основании с упругими опорными шарнирами

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид [2]:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q - ky. \quad (1)$$

Строительство и обустройство промыслов

Здесь y – прогиб балки, EJ – жёсткость балки при изгибе, q – интенсивность заданной сплошной нагрузки, ky – интенсивность реактивных воздействий основания на балку, k – величина реакции основания, приходящаяся на единицу длины балки при прогибе, равном единице.

Введя для краткости записи обозначение

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}, \quad (2)$$

представим общий интеграл уравнения (1), при постоянном значении q , в виде

$$y(x) = \frac{q}{k} + \sum_{m=1}^4 A_m \cdot \Phi_m(x), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sin \alpha x \cdot \operatorname{sh} \alpha x, \quad \Phi_2 = \sin \alpha x \cdot \operatorname{ch} \alpha x, \\ \Phi_3 &= \cos \alpha x \cdot \operatorname{sh} \alpha x, \quad \Phi_4 = \cos \alpha x \cdot \operatorname{ch} \alpha x. \end{aligned} \quad (4)$$

Постоянные A_m ($m = 1, 2, 3, 4$) должны быть определены из граничных условий:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad y = 0, \quad \theta = y' &= \alpha_M^1 \cdot EJ \cdot y''(0); \\ x = L; \quad y = 0, \quad \theta = y' &= -\alpha_M^2 \cdot EJ \cdot y''(L), \end{aligned} \quad (5)$$

где θ – угол поворота, α_M^1, α_M^2 – податливости упругих опорных шарниров.

Раскрывая эти условия с использованием формул (4), получим для определения следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{k} + A_4 \cdot 1 &= 0, \\ A_2 + A_3 &= 2\alpha \cdot \alpha_M^1 EJ (A_1 + A_4), \\ A_1 \cdot \Phi_1(\alpha L) + A_2 \cdot \Phi_2(\alpha L) + A_3 \cdot \Phi_3(\alpha L) + A_4 \cdot \Phi_4(\alpha L) &= -\frac{q}{k}, \\ a_{41} \cdot A_1 + a_{42} \cdot A_2 + a_{43} \cdot A_3 + a_{44} \cdot A_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $a_{41} = a_{44} = [\Phi_2(\alpha L) + \Phi_3(\alpha L)] + 2\alpha \alpha_M^2 EJ \cdot [\Phi_1(\alpha L) + \Phi_4(\alpha L)]$,

$$a_{42} = a_{43} = [\Phi_1(\alpha L) + \Phi_4(\alpha L)] + 2\alpha \alpha_M^2 EJ \cdot [\Phi_2(\alpha L) + \Phi_3(\alpha L)].$$

При $\alpha_M^1 = \alpha_M^2 = \infty$ полученные решения соответствуют балке с идеальными шарнирами, при $\alpha_M^1 = \alpha_M^2 = 0$ – балке с жёсткозакреплёнными концами.

После определения постоянных интегрирования A_m прогибы балки вычисляются по формулам (3), углы поворота и внутренние усилия по известным формулам сопротивления материалов.

Пример. Для стальной балки, лежащей на упругом основании (см. рис. 1), построить эпюры прогибов и изгибающих моментов, если $L = 5$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,

$q = 110 \text{ кг/см}$, поперечное сечение балки двутавр №30 ($J = 7080 \text{ см}^4$, $W = 472 \text{ см}^3$, ширина полки $b = 13,5 \text{ см}$), податливости упругих опорных шарниров:

$$\alpha_M^1 = \frac{L}{EJ}, \alpha_M^2 = \frac{L}{2EJ}, \text{ коэффициент постели основания } k_0 = 5 \text{ кг/см}^3.$$

Определяем k , α и αL :

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{67,5}{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 7080}} = 0,005855 \frac{1}{\text{см}},$$

$$\alpha L = 2,9275.$$

Система уравнений (6) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} A_4 + 1,6296 &= 0, \\ 5,855 A_1 - A_2 - A_3 - 9,5413 &= 0, \\ A_1 + 1,0058 A_2 - 4,5992 A_3 - 4,6257 A_4 + 0,8235 &= 0, \\ A_1 + 0,7656 A_2 + 1,3956 A_3 + A_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

решая которую, получили

$$A_1 = 1,4513; A_2 = -2,6071; A_3 = 1,5635; A_4 = -1,6296.$$

Прогибы балки определены по формуле (3) и приведены на рис. 2,а. Максимальный прогиб $y_{\max} = 1,08 \text{ см}$, что в $1,56/1,08 = 1,44$ раза меньше, чем для балки с идеальными шарнирами [2].

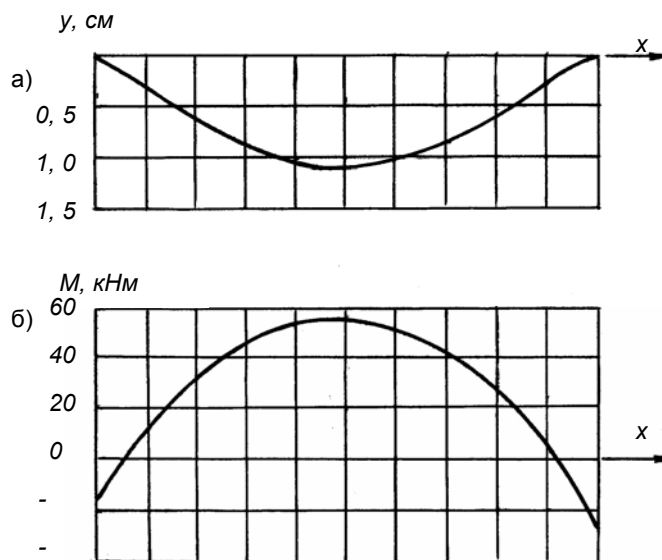


Рис. 2. Эпюры прогибов (а) и изгибающих моментов (б) для балки на упругом основании с упругими опорными шарнирами

Изгибающие моменты вычислены по формуле

$$M(x) = -EJ \cdot y'' =$$
$$= -EJ \cdot 2\alpha^2 \cdot \left\{ (A_1 + A_4) \cdot [\Phi_1(x) + \Phi_4(x)] + (A_2 + A_3) \cdot [\Phi_2(x) + \Phi_3(x)] \right\}. \quad (7)$$

Эпюра $M(x)$ приведена на рис. 2,б. Максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 55,8$ кН·м (при $x = 2,42$ м) и в $76,77/55,8 = 1,51$ раза меньше, чем для балки на упругом основании с идеальными опорными шарнирами [2]. Максимальные нормальные напряжения равны для данной балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{55,8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{472 \cdot 10^{-6}} = 118 \text{ МПа} < \sigma_{adm}.$$

Следовательно, расчёт балок на упругом основании необходимо выполнять с учётом податливости упругих опорных шарниров и выбирать их целесообразное сочетание.

Список литературы

1. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. *Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности*. – Москва, Издательство АСВ, 1995, - 588с.
2. Тимошенко С.П. *курс теории упругости*. – Киев: Наукова думка, 1972. – 508с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Справочник по сопротивлению материалов*. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736с.
4. Сысоев Ю.Г., Белова О.Ю. *Строительная механика составных конструкций наземных объектов нефтяной и газовой промышленности // Учебное пособие*. – Тюмень: ТИИ, 1994. – 122с.
5. Сысоев Ю.Г., Иванов И.А., Иванов В.А., Белова О.Ю. *Расчёт тонкостенных конструкций наземных транспортных средств на воздушной подушке*. – М.: Недра, 2001, - 320с.

Сведения об авторах

Белова О.Ю., к.т.н., доцент кафедры строительной механики Тюменского государственного архитектурно - строительного университета, тел.:(3452)41-82-05

Важенин А.Г., аспирант Тюменского государственного нефтегазового университета, тел.:(3452)41-82-05

Сысоев Ю.Г., д.т.н., профессор кафедры теоретической и прикладной механики Тюменского государственного нефтегазового университета, тел.:(3452)41-82-05

Belova O. Yu., Candidate of Technical Sciences, associate professor at Chair of Construction Mechanics of Tyumen State Architecture-Building University, phone: (3452) 41-82-05

Vazhenin A.G., graduate student of Tyumen State Oil and Gas University, phone: (3452) 41-82-05

Sysoev Yu.G., PhD, professor of Chair for Theoretical and Applied Mechanics of Tyumen State Oil and Gas University, phone: (3452) 41-82-05