УДК 539.3:624.075

ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УПРУГИМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ШАРНИРАМИ

О. Ю. Белова, Ю. Г. Сысоев

(Тюменский государственный архитектурно-строительный университет; Тюменский государственный нефтегазовый университет)

Ключевые слова: ***балки, упругое основание, изгиб, податливость упругих шарниров, прочность***

Key word: ***beams, elastic foundation, deflection, slenderness of elastic hinges, strength***

При решении ряда технических вопросов в нефтяном машиностроении, строительстве и обустройстве промыслов приходится иметь дело с изгибом балок, лежащих на сплошном упругом основании. Теория расчёта балок со свободными, шарнирно опертыми, жёстко заделанными концами и неразрезных балок на упругом основании изложена [1-3].

Проблема расчёта балок на упругом основании с промежуточными упругими шарнирами не исследована.

Теория, методы расчёта составных конструкций с упругоподатливыми связями и балок на упругом основании с упругозакреплёнными концами разработана [4-6].

Авторами статьи решена задача изгиба балки на упругом основании с учётом податливости упругих промежуточных шарниров (рис.1).

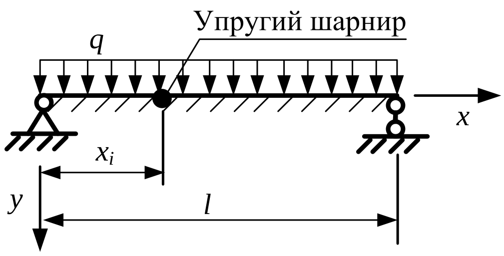

Рис.1. Балка на упругом основании с упругим шарниром

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки [2]:

$$EJ\,\frac{d^4y}{dx^4} = q - ky, \tag{1}$$

где y – прогиб балки, EJ – жёсткость балки при изгибе, q – интенсивность заданной сплошной нагрузки, ky – интенсивность реактивных воздействий основания на балку, k – величина реакции основания, приходящаяся на единицу длины балки при прогибе, равном единице.

Введем для краткости записи обозначение:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}\ . \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение (1) представим

$$y^{IV} + 4\alpha^4 y = \frac{q}{EJ}\ . \tag{3}$$

Решение данного уравнения записывается следующим образом:

$$y(x) = y(x)^* + \sum_{m=1}^{4} c_m \cdot y_m(x), \tag{4}$$

где $y(x)^*$ – частное решение, зависящее от внешней нагрузки, $y_m(x)$ – функции, образующие общее решение однородного уравнения,

$$y^{IV} + 4\alpha^4 y = 0, \tag{5}$$

c_m – постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления опорных сечений балки. Функции y_m равны

$$y_1 = \sin\alpha x \cdot sh\alpha x\ ; \quad y_2 = \sin\alpha x \cdot sh\alpha x\ ;$$
$$y_3 = \cos\alpha x \cdot ch\alpha x\ ; \quad y_4 = \cos\alpha x \cdot ch\alpha x\ . \tag{6}$$

При наличии упругого шарнира функция *y(x)*, определяемая равенством (4), для каждого из участков составной балки будет различной. При переходе через *i*-й шарнир торцевые сечения участков, примыкающих к шарниру, получают взаимное угловое смещение:

$$\Delta\theta_i(x_i) = \theta(x_i + 0) - \theta(x_i)\ . \tag{7}$$

При $x \geq x_i$ угол поворота $\theta(x)$ получит добавку, равную

$$\theta(x) = y^{/}(x\ ) = \Delta\theta_i \cdot 1(x - x_i)\ , \tag{8}$$

где $1(x - x_i)$ – единичная функция Хэвисайда.

Дифференцируя последовательно данное выражение, находим

$$y^{IV}(x) = \Delta\theta_i \cdot \delta^{//}(x - x_i), \tag{9}$$

где $\delta^{//}(x - x_i)$ – вторая производная дельта-функции.

Учитывая, что упругий шарнир обладает податливостью α_M , можно записать [6]:

$$\Delta\theta_i = -\alpha_M \cdot M(x_i) = EJ \cdot y^{//}(x_i)\ . \tag{10}$$

Здесь $M(x_i)$ – изгибающий момент в сечении x_i стержня. Подставив это выражение в (9) и далее в (5), получим следующее дифференциальное уравнение, позволяющее учесть угол поворота (7):

$$y^{IV} + 4\alpha^4 y = K_2 \cdot \delta^{//}(x - x_i), \tag{11}$$

где
$$K_2 = \Delta\theta_i = \alpha_M \cdot EJ \cdot y^{//}(x_i). \tag{12}$$

Интегрирование данного уравнения выполнено по методике, изложенной в [4], представив его в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{4} a_j \cdot y^{4-j}(x) = \sum_{r=0}^{4} K_r \cdot \delta^r(x - x_i), \tag{13}$$

где
$$a_0 = 1, a_4 = 4\alpha^4,\ K_2 = \alpha_M \cdot EJ \cdot y^{//}(x_i),$$
остальные коэффициенты равны нулю.

Общее решение однородного уравнения (5)

$$y(x) = \sum_{m=1}^{4} C_m \cdot y_m(x)$$

на двух участках оси *x*, разделённой точкой $x = x_i$, будет содержать различные постоянные интегрирования C_m . Поэтому полагаем

$$C_m = A_m + g_m \cdot 1(x - x_i)\ , \tag{14}$$

где A_m, g_m – новые постоянные. Так как порядок дифференциального уравнения (13) равен порядку производных от дельта-функции, входящих в его правую часть, то полный интеграл этого уравнения можно записать

$$y(x) = \sum_{m=1}^{4} A_m \cdot y_m(x) + 1(x - x_i) \sum_{m=1}^{4} g_m \cdot y_m(x). \tag{15}$$

Неизвестные постоянные g_m определяются в результате решения системы четырёх линейных алгебраических уравнений [5]:

$$\sum_{m=1}^{4} g_m \cdot y_m^k(x_i) = X_{3-k}, (k = 0,1,2,3), \tag{16}$$

где $k -$ порядок производной функции y_m .

Коэффициенты X находятся из системы пяти алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{4} a_j \cdot X_{\ j+r} = K_r,\ r = 0,1,\ldots,4). \tag{17}$$

В развёрнутом виде эта система записывается

$$\left.\begin{array}{lr}
r = 0 & X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = K_0 = 0, \\
r = 1 & X_1 + a_1X_2 + a_2X_3 + a_3X_4 = K_1 = 0, \\
r = 2 & X_2 + a_1X_3 + a_2X_4 = K_2, \\
r = 3 & X_3 + a_1X_4 = K_3 = 0, \\
r = 4 & X_4 = K_3 = 0,
\end{array}\right\}$$

$$a_0 = 1, \quad a_4 = 4a^4, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0\ .$$

Решая данную систему, находим $X_2 = K_2 = \Delta\theta_i$ остальные коэффициенты равны нулю.

Система алгебраических уравнений (16) для определения постоянных g_m записывается

$$\left.\begin{aligned}
&g_1\cdot 0+g_2\cdot 0+g_3\cdot 0+g_4\cdot 1=X_3=0,\\
&g_1\cdot 0+g_2\cdot\alpha+g_3\cdot\alpha+g_4\cdot 0=X_2=K_2,\\
&2\alpha^2\cdot g_1+g_2\cdot 0+g_3\cdot 0+g_4\cdot 0=X_1=0,\\
&g_1\cdot 0+g_2\cdot 2\alpha^3-g_3\cdot 2\alpha^3+g_4\cdot 0=X_0=0.
\end{aligned}\right\}$$

Отсюда следует, что $g_1=g_4=0$; $g_2=g_3=\dfrac{K_2}{2\alpha}=\dfrac{\Delta\theta_i}{2\alpha}$.

Полный интеграл дифференциального уравнения (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
y&=\sum_{m=1}^{4}A_m\cdot y_m(x)+1(x-x_i)\left[g_2y_2(x-x_i)+g_3y_3(x-x_i)\right]=\\
&=\sum_{m=1}^{4}A_m\cdot y_m(x)+1(x-x_i)\cdot\frac{\Delta\theta_i}{2\alpha}\left[y_2(x-x_i)+y_3(x-x_i)\right]=\\
&=\sum_{m=1}^{4}A_m\cdot y_m(x)+1(x-x_i)\cdot\Delta\theta_i\cdot y_\theta(x-x_i),
\end{aligned}\tag{18}$$

где
$$y_\theta=\frac{1}{2\alpha}\left[y_2(x-x_i)+y_3(x-x_i)\right].\tag{19}$$

Окончательная формула для вычисления $y(x)$ с учётом конечного числа упругих шарниров и внешней нагрузки записывается

$$y(x)=y^*(x)+\sum_{m=1}^{4}A_m\cdot y_m(x)+\sum_{i=0}^{k}1(x-x_i)\cdot\Delta\theta_i y_\theta(x-x_i),\tag{20}$$

где k – количество упругих шарниров,

$$\Delta\theta_i=\alpha_m EJ\left[y^{*//}(x_i)+\sum_{m=1}^{4}A_m\cdot y^{//}{}_m(x_i)+\sum_{j=0}^{i-1}\Delta\theta_i\cdot y_\theta^{//}(x_i-x_j)\right],\tag{21}$$

A_m – постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления опорных сечений балки.

В качестве примера рассмотрим балку с шарнирно опертыми концами, лежащую на сплошном упругом основании, изгибаемую равномерно распределённой нагрузкой интенсивности $q=110\dfrac{\text{кг}}{\text{см}}=110\dfrac{кн}{м}$ (рис. 2). Длина балки $l=5\text{м}$, поперечное сечение балки – двутавр №30 (момент инерции $J=7080$ см^4, осевой момент сопротивления W=472 см^3, модуль упругости $E=2\cdot 10^6\dfrac{кг}{см^2}=2\cdot 10^5 МПа$. Упругий шарнир податливостью $\alpha_M=\dfrac{l}{EJ}=3{,}5311\cdot 10^{-8}\dfrac{1}{кг\cdot см}$ расположен посередине длины балки. Величина *К*, входящая в формулу (2), принята равной $K=67{,}5\dfrac{кг}{см^2}=6{,}75МПа$.

Из условий симметрии рассматриваемой балки в формулах (20), (21) следует учитывать только чётные функции. В результате получаем

$$y(x)=\frac{q}{K}+A_1\cdot y_1(x)+A_4\cdot y_4(x)+1(x)\cdot\Delta\theta_0\cdot y_\theta(x),\tag{22}$$

$$\Delta\theta_0=\frac{1}{2}\alpha_M EJ\left[A_1y_1^{//}(0)+A_4y_4^{//}(0)\right]=\alpha^2\cdot\alpha_M EJ\cdot A_1\tag{23}$$

$$y_\theta=\frac{1}{2\alpha}\left[y_2(x)+y_3(x)\right].\tag{24}$$

Введя для краткости записи обозначение $\dfrac{\alpha l}{2}=u$, формулы для $y(x)$, $y^{//}(x)$ представим в виде

$$\mathrm{y(x)}=\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{K}}+A_1\left\{y_1(x)+u\left[y_2(x)+y_3(x)\right]\right\}+A_4\cdot y_4(x),\tag{25}$$

$$y^{//}(x)=2\alpha^2\left\{A_1\left\{y_4(x)+u\left[y_3(x)-y_2(x)\right]\right\}-A_4\cdot y_1(x)\right\}.\tag{26}$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий:

$$y(x=\frac{l}{2})=0,\ y^{//}(x=\frac{l}{2})=0.$$

Раскрывая эти условия с использованием формул (25), (26), получаем для определения A_1, A_4, систему двух линейных алгебраических уравнений:

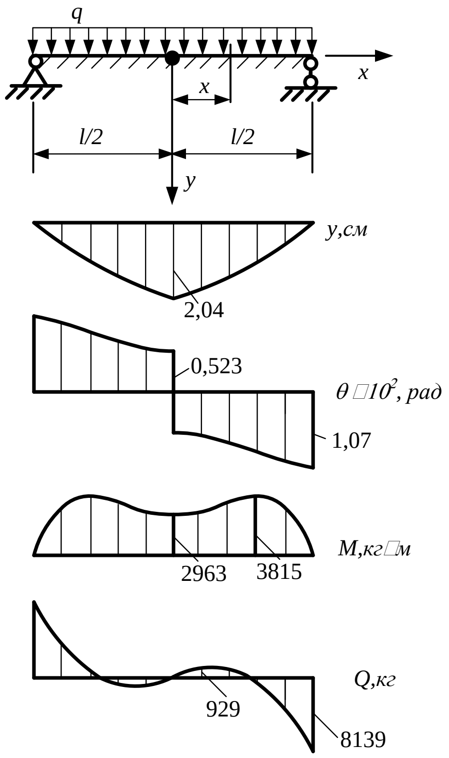

Рис. 2.
Балка с шарнирно опертыми концами и упругим промежуточным шарниром, лежащая на сплошном упругом основании

$$\frac{q}{K}+A_1\{y_1(u)+u[y_2(u)+y_3(u)]\}+A_4y_4(u)=0$$
$$A_1\{y_4(u)+u[y_3(u)-y_2(u)]\}-A_4y_1(u)=0. \qquad (27)$$

Учитывая, что $\alpha=\sqrt[4]{\frac{K}{4EJ}}=\sqrt[4]{\frac{67{,}5}{4\cdot 2\cdot 10^6\cdot 7080}}=0{,}0058755\frac{1}{см}$,

$u=\frac{\alpha l}{2}=\frac{0{,}0058755\cdot 500}{2}=1{,}4689$ система уравнений (27) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{q}{K}+A_1\{2{,}0465+1{,}4689[2{,}2755+0{,}2093]\}+A_4\cdot 0{,}2327=0,\\ A_1\{0{,}2327+1{,}4689[0{,}2093-2{,}2755]\}-A_4\cdot 2{,}0465=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая систему, находим

$$A_1=-0{,}18596\frac{q}{K}, \qquad A_4=0{,}25464\frac{q}{K}.$$

Формулы для определения прогибов, углов поворота $\theta(x)$, изгибающих моментов *M(x)* и поперечных сил $Q(x)$ с учётом зависимостей между функциями $y_i\ (\alpha x)\ (i=1,2,3,4)$ и их производными принимают вид

$$y=\frac{q}{K}\{\{1-0{,}18596\{y_1(\alpha x)+1{,}4689[y_2(\alpha x)+y_3(\alpha x)]\}+0{,}25464\cdot y_4(\alpha x)\}\}$$

$$\theta=y^{/}=\frac{q}{K}\{\{-0{,}18596\{y_1^{/}(\alpha x)+1{,}4689[y_2^{/}(\alpha x)+y_3^{/}(\alpha x)]\}+0{,}25464\cdot y_4^{/}(\alpha x)\}\}=$$
$$\frac{q}{K}\cdot\alpha[-0{,}4406\cdot y_2(\alpha x)+0{,}0686872\cdot y_3(\alpha x)-0{,}546303\cdot y_4(\alpha x)],$$
$$M(x)=-EJ\cdot y^{//}(\alpha x)=$$
$$=-\frac{q}{K}EJ\cdot 2\alpha^2\times\{\{-0{,}18596\{y_4(\alpha x)+1{,}4689[y_3(\alpha x)-y_2(\alpha x)]\}-0{,}25464\cdot y_1(\alpha x)\}\},$$
$$Q(x)=-EJ\cdot y^{///}(\alpha x)=$$
$$=-\frac{q}{K}EJ\cdot 2\alpha^3\cdot[0{,}546303y_1(\alpha x)-0{,}0686872y_2(\alpha x)-0{,}4406y_3(\alpha x)],$$

где $-\frac{q}{K}EJ\cdot 2\alpha^3=-1593206(кг\cdot см),\quad -\frac{q}{K}EJ\cdot 2\alpha^3=-9360{,}88(кг).$

Эпюры перемещений и внутренних усилий приведены (см. рис. 2).

Максимальный прогиб равен $y_{max} = 2{,}04 см$ и в 1,33 раза превышает прогиб сплошной балки на упругом основании (y_{max} =1,54 см, [2]).

Наибольший изгибающий момент $M_{\max} = 3814{,}94 \text{кг} \cdot \text{м}$ действует в сечении $x = 1{,}5 м$, что в 1,99 раза меньше аналогичной сплошной балки на упругом основании ($M_{\max} = 7585{,}56 \text{кг} \cdot \text{м}, [2]$).

Максимальные нормальные напряжения для данной балки равны

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3814{,}94 \cdot 10^2}{472} = 808 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 80{,}8 МПа < \alpha_{adm} = 100 \text{МПа} .$$

Следовательно, расчёт составных балок на упругом основании необходимо выполнять с учётом реальной податливости упругих промежуточных шарниров.

Список литературы

1. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – Москва, Издательство АСВ, 1995. - 588с.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1972. – 508с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736с.
4. Сысоев Ю.Г., Белова О.Ю. Строительная механика составных конструкций наземных объектов нефтяной и газовой промышленности // Учебное пособие. – Тюмень: ТИИ, 1994. – 122с.
5. Сысоев Ю.Г., Иванов И.А., Иванов В.А., Белова О.Ю.Расчёт тонкостенных конструкций наземных транспортных средств на воздушной подушке. – М.: Недра, 2001. - 320с.
6. Белова О.Ю., Важенин А.Г., Сысоев Ю.Г. Изгиб балки на упругом основании с упруго закреплёнными концами // Известия вузов. Нефть и газ.- 2010.- №2. – С.113-116.

Сведения об авторах

Белова О. Ю., *к.т.н., доцент кафедры строительной механики Тюменского государственного архитектурно-строительного университета, тел.: (3452) 43-23-37*

Сысоев Ю. Г., *д.т.н., профессор кафедры теоретической и прикладной механики Тюменского государственного нефтегазового университета, тел.: (3452) 20-10-41*

Belova O. Yu.*, Candidate of Technical Sciences, associate professor at Chair of Construction Mechanics of Tyumen State Architecture-Building University, phone: (3452) 43-23-37*

Sysoev Yu. G.*, PhiD, professor of Chair for Theoretical and Applied Mechanics of Tyumen State Oil and Gas University, phone: (3452) 20-10-41*