

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)



Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №3

по дисциплине: Исследования операций

тема: «Модификации симплекс метода. Методы искусственного базиса и
больших штрафов»

Выполнил: ст. группы ПВ-223

Дмитриев А.А.

Проверил:

Вирченко Ю.П.

Белгород 2024 г.

Цель работы: изучить метод искусственного базиса и больших штрафов решения задач ЛП в канонической форме, не подготовленных к работе симплекс-методом в чистом виде.

Задания для подготовки к работе:

1. Изучить метод и алгоритм искусственного базиса и составить программу решения задачи ЛП этим методом.
2. Изучить метод и алгоритм больших штрафов и составить программу решения задачи ЛП этим методом.
3. Запрограммировать изученные алгоритмы и отладить соответствующие программы. В рамках подготовки тестовых данных решить вручную задачу, соответствующую варианту.

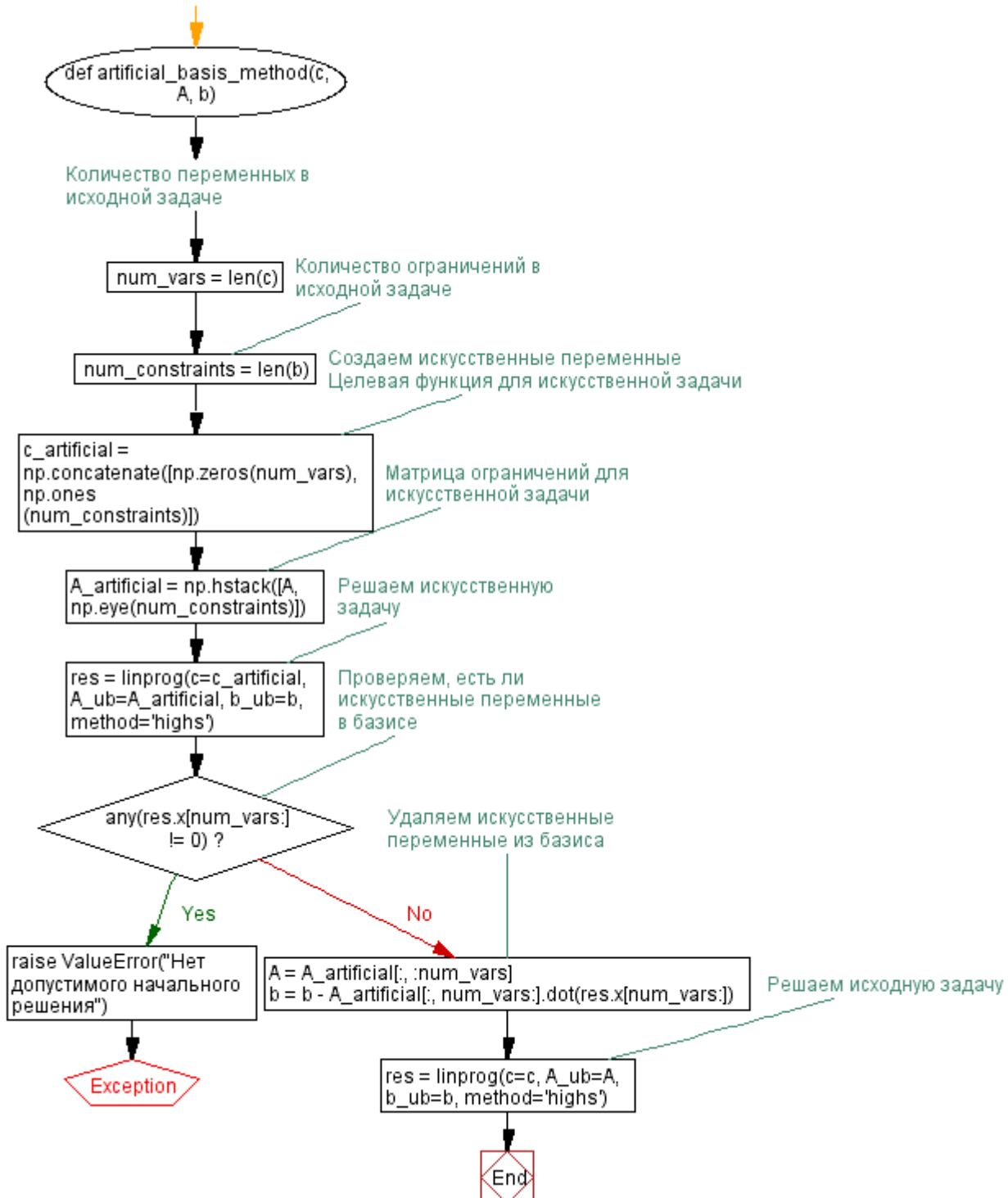
Вариант 2:

$$z = 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 28, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 30, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

Задание №1:

Блок схема:



Листинг кода:

```
def artificial_basis_method(c, A, b):
    num_vars = len(c)  # Количество переменных в исходной задаче
    num_constraints = len(b)  # Количество ограничений в исходной задаче
    # Создаем искусственные переменные
    c_artificial = np.concatenate([np.zeros(num_vars),
                                     np.ones(num_constraints)])  # Целевая функция для
искусственной задачи
    A_artificial = np.hstack([A, np.eye(num_constraints)])  # Матрица ограничений для
искусственной задачи
    # Решаем искусственную задачу
    res = linprog(c=c_artificial, A_ub=A_artificial, b_ub=b, method='highs')
    # Проверяем, есть ли искусственные переменные в базисе
    if any(res.x[num_vars:] != 0):
        raise ValueError("Нет допустимого начального решения")
    # Удаляем искусственные переменные из базиса
    A = A_artificial[:, :num_vars]
    b = b - A_artificial[:, num_vars:].dot(res.x[num_vars:])
    # Решаем исходную задачу
    res = linprog(c=c, A_ub=A, b_ub=b, method='highs')
    return res.x[:num_vars]  # Возвращаем решение исходной задачи
```

Тестовые данные:

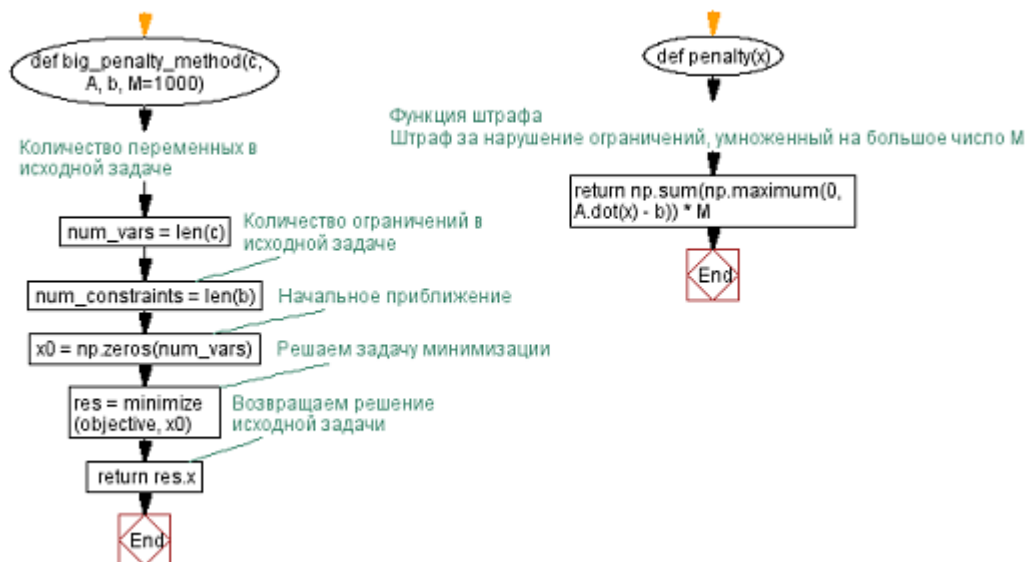
```
A = np.array([[4, 5, 1, 2, -3],
              [2, -1, 4, 1, 1],
              [-3, 2, 6, 4, -8]], dtype=float)
b = np.array([25, 28, 30], dtype=float)
c = np.array([5, -4, 2, -1, 6], dtype=float)
```

Результат работы программы:

При ограничениях с константами A и свободными членами b и целевой функции c получим ответ: переменные – 3,4285, 0, 4,4285, 3,4285, 0; целевая функция – 22,5714

Задание №2:

Блок схема:





Листинг кода:

```
def big_penalty_method(c, A, b, M=1000):
    num_vars = len(c)  # Количество переменных в исходной задаче
    num_constraints = len(b)  # Количество ограничений в исходной задаче

    # Функция штрафа
    def penalty(x):
        # Штраф за нарушение ограничений, умноженный на большое число M
        return np.sum(np.maximum(0, A.dot(x) - b)) * M

    # Целевая функция с штрафом
    def objective(x):
        # Целевая функция исходной задачи плюс штраф
        return c.dot(x) + penalty(x)

    # Начальное приближение
    x0 = np.zeros(num_vars)
    # Решаем задачу минимизации
    res = minimize(objective, x0)
    return res.x  # Возвращаем решение исходной задачи
```

Тестовые данные:

```
A = np.array([[4, 5, 1, 2, -3],
              [2, -1, 4, 1, 1],
              [-3, 2, 6, 4, -8]], dtype=float)
b = np.array([25, 28, 30], dtype=float)
c = np.array([5, -4, 2, -1, 6], dtype=float)
```

Результат работы программы:

При ограничениях с константами A и свободными членами b и целевой функции c получим ответ: переменные – 3,4285, 0, 4,4285, 3,4285, 0; целевая функция – 22,5714

Решение вручную:

Представим данные в виде таблицы определим таблицу:

Базис	Свободный член	Переменные				
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
	25	4	5	1	2	-3
	28	2	-1	4	1	1
	30	-3	2	6	4	-8
F	0	5	-4	2	-1	6

Базис	Свободный член	Переменные							
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3
u1	25	4	5	1	2	-3	1	0	0
u2	28	2	-1	4	1	1	0	1	0
u3	30	-3	2	6	4	-8	0	0	1
F	-83M	-5-3M	4-6M	-2-11M	1-7M	-6+10M	0	0	0

Итерация №1:

Базис	Свободный член	Переменные								
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3	
u1	25	4	5	1	2	-3	1	0	0	25/1
u2	28	2	-1	4	1	1	0	1	0	28/4
u3	30	-3	2	6	4	-8	0	0	1	30/6
F	-83M	-5-3M	4-6M	-2-11M	1-7M	-6+10M	0	0	0	

Базис	Свободный член	Переменные							
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3
u1	20	9/2	14/3	0	4/3	-5/3	1	0	-1/6
u2	8	4	-7/3	0	-5/3	19/3	0	1	-2/3
x3	5	-1/2	1/3	1	2/3	-4/3	0	0	1/6
F	10-28M	-6-17/2M	14/3-7/3M	0	7/3+M	-26/3-14/3M	0	0	1/3+11/6M

Итерация №2:

Базис	Свободный член	Переменные								
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3	
u1	20	9/2	14/3	0	4/3	-5/3	1	0	-1/6	40/9
u2	8	4	-7/3	0	-5/3	19/3	0	1	-2/3	2
x3	5	-1/2	1/3	1	2/3	-4/3	0	0	1/6	-
F	10-28M	-6-17/2M	14/3-7/3M	0	7/3+M	-26/3-14/3M	0	0	1/3+11/6M	

Базис	Свободный член	Переменные							
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3
u1	11	0	175/24	0	77/24	-5/3	-211/24	0	-1/6
x1	2	1	-7/12	0	-5/12	19/3	19/12	1	-2/3
x3	6	0	1/24	1	11/24	-4/3	-13/24	0	1/6
F	22-11M	0	7/6- 175/24M	0	-1/6- 77/24M	-26/3- 14/3M	5/6+ 211/24M	0	1/3+11/6M

Итерация №3:

Базис	Свободный член	Переменные								min
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3	
u1	11	0	175/24	0	77/24	-5/3	-211/24	0	-1/6	264/175
x1	2	1	-7/12	0	-5/12	19/3	19/12	1	-2/3	-
x3	6	0	1/24	1	11/24	-4/3	-13/24	0	1/6	144
F	22-11M	0	7/6- 175/24M	0	-1/6- 77/24M	-26/3- 14/3M	5/6+ 211/24M	0	1/3+11/6M	

Базис	Свободный член	Переменные							
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3
x2	264/175	0	1	0	11/25	-211/175			
x1	72/25	1	0	0	-4/25	22/25			
x3	1039/175	0	0	1	11/25	-86/175			
F	506/25	0	0	0	-17/25	56/25	-4/25+M	42/25+M	-19/25+M

Итерация №4:

Базис	Свободный член	Переменные								min
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3	
x2	264/175	0	1	0	11/25	- 211/175				24/7
x1	72/25	1	0	0	-4/25	22/25				-
x3	1039/175	0	0	1	11/25	-86/175				1039/77
F	506/25	0	0	0	- 17/25	56/25				

Базис	Свободный член	Переменные							
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	u1	u2	u3
x4	24/7	0	25/11	0	1	-211/77			
x1	24/7	1	4/11	0	0	34/77			
x3	31/7	0	-1	1	0	5/7			
F	158/7	0	17/11	0	0	29/77			

Получили оптимальный план:

$$x_1 = 24/7, x_2 = 0, x_3 = 31/7, x_4 = 24/7, x_5 = 0$$

$$F(X) = 5 \cdot 24/7 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 31/7 - 1 \cdot 24/7 + 6 \cdot 0 = 158/7$$

Вывод: В ходе лабораторной работы были изучены методы искусственного базиса и больших штрафов решения задач ЛП в канонической форме, не подготовленных к работе симплекс-методом в чистом виде. Получили навыки кодирования изученного алгоритма, отладки и тестирования соответствующих программ, как признак – результаты ручного решения и решения программой совпадают.