习题 1.1

2．从某图书馆里任取一本书，事件A表示“取到数学类图书”，事件B表示“取到中文版图书”，事件C表示“取到精装图书”；

（1）试述$AB\overline{C}$的含义；（2）何种情况下，$C\subset B$？；（3）何种情况下，$\overline{A}=B$？

(1) $AB\overline{C}$ = {取到的是中文版数学类图书，但非精装版}

(2) 若精装图书全是中文版，则 $C\subset B$；

(3) 若中文版全是非数学类图书，且所有非数学类图书全是中文版，则 $\overline{A}=B$；

5. 试述下列事件的对立事件：

（1）$A=$“射击三次皆命中目标”；

（2）$B=$“甲产品畅销乙产品滞销”；

（3）$C=$“加工四个零件至少有一个是合格品”．

(1) A_i={第i次射击命中目标} $i=1,2,3$：$A=A_1A_2A_3$．从而，

$\overline{A}=\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$={至少有一次未命中目标}

(2) 记$A(C)$={产品甲(乙)畅(滞)销}．则有：$B=A\cap C$，从而．

$\overline{B}=\overline{A\cap C}=\overline{A}\cup\overline{C}$={产品甲滞销或产品乙畅销}．

(3) 记 A_i={第i个零件是合格品} $i=1,2,3,4$；则有：$C=\bigcup_{i=1}^{4}A_i$．从而，

$\overline{C}=\overline{\bigcup_{i=1}^{4}A_i}=\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i}$={所有4个零件全是不合格品}

习题 1.2

2．（1）袋中有7个白球3个黑球，现从中任取2个，试求“所取两球颜色相同”的概率；

（2）甲袋中有球5白3黑，乙袋中有球4白6黑，现从两袋中各取一球，试求“所取两球颜色相同”的概率．

(1) 记 ~~A~~ $A(B)$={取出2个白(黑)球}，则有：A,B互斥，且

P(两球颜色相同)$=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{|A|}{|\Omega|}+\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$

(2) 记 $A(B)$={从甲(乙)袋中取出白球}．则有：

P(所取两球颜色相同)$=P(AB\cup\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})$

$=\frac{5}{8}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{8}\times\frac{6}{10}=\frac{38}{80}=\frac{19}{40}$

3. 袋中有 a 只黑球，b 只白球，现将球一只一只依次取出，试求“第 k（$1 \le k \le a+b$）次取出黑球”的概率. $= A_k$

作法1：假设黑(白)球之间可以相互区别，且球全部被取出，

$1 \cdots k \cdots a+b$　　于是：$|\Omega| = A_{a+b}^{a+b}$，$|A_k| = C_a^1 \cdot A_{a+b-1}^{a+b-1}$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{a}{a+b}.$$

作法2：假设黑(白)球之间不可相互区别，且球全被取出，

于是：$|\Omega| = C_{a+b}^{a}$，$|A_k| = C_{a+b-1}^{a-1}$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{a}{a+b}.$$

其他作法略！

4.（1）n 个人任意地坐成一排，求“甲、乙两人坐在一起”的概率；

（2）n 个人随机地围一圆桌而坐，求“甲、乙相邻”的概率；

（3）n 个男生、m 个女生（$m \le n+1$）坐成一排，求“任意两个女生都不相邻”的概率.

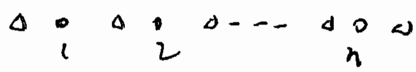
(1) 记 $A=\{$甲、乙两人坐在一起$\}$. 易见，$|\Omega| = A_n^n = n!$，$|A| = A_2^2 \cdot A_{n-1}^{n-1} = 2\cdot(n-1)!$，$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{n}$.

(2) 记 $A=\{$甲、乙相邻$\}$. 易见，$|\Omega| = n!/n = (n-1)!$

$|A| = A_2^2 \cdot (n-1)!/(n-1) = 2\cdot(n-2)!$，$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{n-1}$.

(3) 记 $A=\{$任意两个女生不相邻$\}$. 易见，$|\Omega| = (n+m)!$.

$|A| = n! \cdot A_{n+1}^{m}$



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!\cdot A_{n+1}^{m}}{(n+m)!}$$

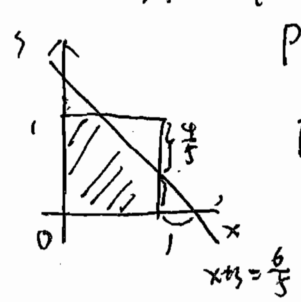
5. 从 $(0,1)$ 中随机地取两个数，试求：

（1）“两数之和小于 $6/5$”的概率；（2）“两数之积小于 $1/4$”的概率.

记：$A(B) = \{$两数之和(积)小于 $6/5$ $(1/4)\}$，设两数分别为 x, y，于是

$\Omega = (0,1)\times(0,1) = \{(x,y) \mid 0<x,y<1\}$

$A = \{(x,y) \mid x+y < 6/5,\ 0<x,y<1\}$，$B = \{(x,y) \mid xy < 1/4,\ 0<x,y<1\}$.

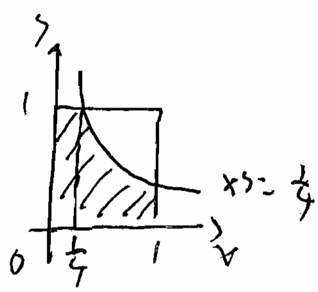


$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1-\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^2}{1\times1} = \frac{17}{25}$$

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx}{1\times1}$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$



7．设A,B为两事件，且$P(A)=0.4$，$P(B)=0.7$，问：

（1）在什么条件下，$P(AB)$取得最大值，最大值是多少？

（2）在什么条件下，$P(AB)$取得最小值，最小值是多少？若$P(B)=0.5$，结果又如何？

(1) 由 $AB\subset \begin{matrix}A\\B\end{matrix}$，所以 $P(AB)\le \begin{matrix}P(A)\\P(B)\end{matrix}$，也即 $P(AB)\le \min\{P(A),P(B)\}=0.4$

若 $A\subset B$，则 $AB=A$，$P(AB)=P(A)=0.4$．

(2) 由 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=1.1-P(A\cup B)\ge 0.1$．

若 $AB\ne\phi$，且 $A\cup B=\Omega$，所以 $P(AB)=0.1$；

若 $P(B)=0.5$．由 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.9-\underline{P(A\cup B)}\ge 0$．

若 $AB=\phi$，则 ~~$A\cup B$ $P(A\cup B)=P(A)$~~ $P(AB)=0$．

8．证明：（1）$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$；

（2）$P(A_1A_2\cdots A_n)\ge P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$．

(1) $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1$；

(2) $n=2$时，易知成立，假设$n=k$时，$P(A_1A_2\cdots A_k)\ge P(A_1)+\cdots+P(A_k)-(k-1)$，则

$n=k+1$时，$P(\bigcap_{i=1}^{k+1}A_i)=P(\underline{\bigcap_{i=1}^{k}A_i}\cap \underline{A_{k+1}})\ge P(\bigcap_{i=1}^{k}A_i)+P(A_{k+1})-1$

$\ge \sum_{i=1}^{k}P(A_i)-(k-1)+P(A_{k+1})-1=\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)-k$，

所以，$\forall n\ge 2$，$P(A_1A_2\cdots A_n)\ge P(A_1)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$

10．（1）设事件A,B,C同时发生必导致事件D发生，证明：

$$P(A)+P(B)+P(C)\le 2+P(D)；$$

$ABC\subset D\Rightarrow P(ABC)\le P(D)$

（2）设$P(A)=x,P(B)=2x,P(C)=3x$，且$P(AB)=P(BC)$，证明：$x\le\frac{1}{4}$．

(1) $2[P(A)+P(B)+P(C)]=[P(A)+P(B)]+[P(A)+P(C)]+[P(B)+P(C)]$

$=P(AB)+P(A\cup B)+P(AC)+P(A\cup C)+P(BC)+P(B\cup C)$

$\le 3+P(AB)+P(AC)+P(BC)=3+P(AB\cup AC\cup BC)+P(ABC)+P(ABC)$

$+P(ABC)-P(ABC)\le 4+2P(ABC)\le 4+2P(D)$．

(2) $P(BC)=P(B)+P(C)-P(B\cup C)=5x-\underline{P(B\cup C)}\ge 5x-1$

~~$\ge P(BC)$~~

$x=P(A)\ge P(AB)$ $\Rightarrow x\le\frac{1}{4}$．

11. （1）利用概率方法证明下列恒等式：设 $a,b(a<b)$ 为任意正整数，则恒有：

$$1+\frac{b-a}{b-1}+\frac{(b-a)(b-a-1)}{(b-1)(b-2)}+\cdots+\frac{(b-a)\times\cdots\times 2\times 1}{(b-1)\cdots(a+1)a}=\frac{b}{a};$$

原式即：$\frac{a}{b}+\frac{a(b-a)}{b(b-1)}+\frac{a(b-a)(b-a-1)}{b(b-1)(b-2)}+\cdots+\frac{(b-a)\times 2\cdots\times 2\times 1}{b(b-1)\cdots(a+1)}=1$.

设袋中有 b 只球，其中 a 只黑球，$b-a$ 只白球，现将球一一取出，取后不放回，直至取出黑球时为止，记 $A_i=\{第i次取出黑球\}$，$i=1,2,\cdots,b-a$；

可知：$A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\cdots\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{b-a}=\Omega$，从而

$P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+\cdots+P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{b-a})$

$=\frac{a}{b}+\frac{a(b-a)}{b(b-1)}+\frac{a(b-a)(b-a-1)}{b(b-1)(b-2)}+\cdots+\frac{(b-a)\times\cdots\times 2\times 1}{b(b-1)\cdots(a+1)}$

$=1$.

0 0
1 2

0 0 0
1 2 3

（2）试构造概率模型证明恒等式：

$$1+\frac{N-n}{N}\frac{n+1}{n}+\frac{(N-n)(N-n-1)}{N^2}\frac{n+2}{n}+\cdots+\frac{(N-n)(N-n-1)\cdots 2\times 1}{N^{N-n}}\frac{N}{n}=\frac{N}{n}.$$ $,N>n$.

原式即：$\frac{n}{N}+\frac{N-n}{N}\cdot\frac{n+1}{N}+\frac{(N-n)(N-n-1)}{N\cdot N}\cdot\frac{n+2}{N}+\cdots\frac{N-n}{N}\cdot\frac{N-n-1}{N}\cdots\frac{1}{N}=1$.

记袋中有 N 只球，其中 n 只黑球，$N-n$ 只白球；现将球一一取出，取后不放回，且每一球后放回一只黑球，直至取出黑球为止，记 $A_i=\{第i次取出黑球\}$.

$P(A_1)=\frac{n}{N}$，$P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{N-n}{N}\frac{n+1}{N}$

$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{N-n}{N}\cdot\frac{N-n-1}{N}\cdot\frac{n+2}{N}$

⋮

$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{N-n}A_{N-n+1})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_{N-n}|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{N-n-1})P(A_{N-n+1}|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{N-n})$

$=\frac{N-n}{N}\cdot\frac{N-n-1}{N}\cdots\cdots\frac{1}{N}\cdot 1$

$A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\cdots\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{N-n}A_{N-n+1}=\Omega$.

习题 1.3

3. 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，已知 $P(B|A)>P(B|\bar{A})$，证明：$P(A|B)>P(A|\bar{B})$.

由 $P(B|A)>P(B|\bar{A})$，即：$\frac{P(AB)}{P(A)}>\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，即有：

$P(AB)[1-P(A)]>[P(B)-P(AB)]P(A)$，即：$P(AB)>P(A)P(B)$，从而，

$P(AB)[1-P(B)]>[P(A)-P(AB)]P(B)$，也即：

$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$，即有：

$P(A|B)>P(A|\bar{B})$

4.（1）设一批产品中一、二、三等品各占60%、35%、5%，从中任取一件，结果不是三等品，求“取到的是一等品”的概率;

记 $A_i=\{$取到i等品$\}$, $i=1,2,3$. 由题设, $P(A_1)=\frac{3}{5}$、$P(A_2)=\frac{7}{20}$、$P(A_3)=\frac{1}{20}$、

2解:

作法1: $P(A_1|\bar{A}_3)=\frac{P(A_1\bar{A}_3)}{P(\bar{A}_3)}\ \overline{\ A_1\subset\bar{A}_3\ }\ \frac{P(A_1)}{1-P(A_3)}=\cdots$

作法2: $P(A_1|\bar{A}_3)=\frac{60}{60+35}$ （假设产品共100件）

（2）设10件产品中有4件是不合格品，从中任取两件，已知其中一件是不合格品，求“另一件也是不合格品”的概率.

作法1: 记 $A=\{$已知有一件是不合格品$\}$, $B=\{$两件都是不合格品$\}$

$$P(B|A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2-C_6^2}=\frac{1}{5}$$

作法2: 记两件产品是一一被取出(不放回). 令 $A_i=\{$第i次取到不合格品$\}$, $i=1,2$;

$$P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1A_2\cap(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)}=\frac{1}{5},$$ 这里,

$P(A_1)=\frac{4}{10}$, $P(A_2)=\frac{C_4^1C_9^1}{A_{10}^2}=\frac{4}{10}$.

$P(A_1A_2)=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}$

5. 在数集$\{1,2,\cdots,100\}$中随机地取一数，已知取到的数不能被2整除，求“其能被3或5整除”的概率.

记 $A_i=\{$取到的数能被i整除$\}$. 易见, $A_iA_j=A_{[i,j]}$. $[i,j]$表示i,j的最小公倍数.

且 $P(A_i)=\frac{[\frac{100}{i}]}{100}$, $[x]$—不大于x的最大整数; 于是,

$$P(A_3\cup A_5|\bar{A}_2)=\frac{P((A_3\cup A_5)\cap\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}=\frac{P(A_3\bar{A}_2\cup A_5\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}=\frac{P(A_3\bar{A}_2)+P(A_5\bar{A}_2)-P(A_3A_5\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}$$

$$=\frac{P(A_3)-P(A_3A_2)+P(A_5)-P(A_5A_2)-P(A_3A_5)+P(A_3A_5A_2)}{1-P(A_2)}=\frac{P(A_3)-P(A_6)+P(A_5)-P(A_{10})-P(A_{15})+P(A_{30})}{1-P(A_2)}$$

$$=\frac{\frac{33}{100}-\frac{16}{100}+\frac{20}{100}-\frac{10}{100}-\frac{6}{100}+\frac{3}{100}}{1-\frac{50}{100}}=\frac{24}{50}=\frac{12}{25}.$$

6. 一批产品共100件，其中有次品10件，合格品90件；现从中任取一件，取后不放回，接连取三次，试求“第三次才取到合格品”的概率.

记 $A_i=\{$第 i 次取到合格品$\}$，$i=1,2,3$；

解法1：$P(\bar A_1\bar A_2A_3)=P(\bar A_1)P(\bar A_2|\bar A_1)P(A_3|\bar A_1\bar A_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}$

解法2：$P(\bar A_1\bar A_2A_3)=\dfrac{A_{10}^2\cdot C_{90}^1}{A_{100}^3}$

0 0 0
1 2 3

7. 居民甲给居民乙打电话，但忘了其电话号码最后一位数字；因而随机拨号，如果拨完整个电话号码视作完成一次拨号，且假设乙的电话不占线，试求：
（1）“直到第 k 次才拨通乙的电话”的概率；
（2）“不超过 k 次而拨通乙的电话”的概率.

记 $A_i=\{$第 i 次拨通$\}$，$i=1,2,\cdots,10$。（1）$P(\bar A_1\cdots\bar A_{k-1}A_k)=P(\bar A_1)P(\bar A_2|\bar A_1)\cdots P(A_k|\bar A_1\cdots\bar A_{k-1})$
$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{1}{11-k}=\frac{1}{10}$；（2）$P(A_1\cup\bar A_1A_2\cup\cdots\cup\bar A_1\cdots\bar A_{k-1}A_k)$
$=P(A_1)+P(\bar A_1A_2)+\cdots+P(\bar A_1\cdots\bar A_{k-1}A_k)$
$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}=\frac{k}{10}$.

8. 以 A_t 表示“一分子在 $(0,t]$ 内不与其他分子碰撞”，假设“分子在 $(0,t]$ 内不发生碰撞的条件下，在 $(t,t+\Delta t]$ 内发生碰撞”的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，试求 $P(A_t)$.

由题设，$P(\bar A_{t+\Delta t}|A_t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$（$\Delta t>0$ 充分小），可知，$\dfrac{P(A_t\bar A_{t+\Delta t})}{P(A_t)}=\dfrac{P(A_t-A_{t+\Delta t})}{P(A_t)}$
$\underset{\Delta t>0}{\overset{A_t\supset A_{t+\Delta t}}{=\!=\!=}}\dfrac{P(A_t)-P(A_{t+\Delta t})}{P(A_t)}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；令 $f(t)=P(A_t)$，$t>0$，可知
$\dfrac{f(t)-f(t+\Delta t)}{f(t)}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，也即：$\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=-f(t)\left[\lambda+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]$，令 $\Delta t\to0^+$，
可知：$f'_+(t)=-\lambda f(t)$；同理，$f'_-(t)=-\lambda f(t)$，可知，$f'(t)=-\lambda f(t)$，$\int\dfrac{df(t)}{f(t)}=\int-\lambda dt$
$\ln f(t)-\ln C=-\lambda t$，可知 $f(t)=C\cdot e^{-\lambda t}$。$\forall\{t_n\}$：$t_1>t_2>\cdots>t_n\cdots\to0$，可知：
$\{(0,t_n],n\geq1\}\searrow\emptyset$，也即 $\{A_{t_n},n\geq1\}\nearrow\Omega$，可知：$1=P(\Omega)=P(\lim_{n\to\infty}A_{t_n})$
$=\lim_{n\to\infty}P(A_{t_n})=\lim_{n\to\infty}f(t_n)=\lim_{n\to\infty}C\cdot e^{-\lambda t_n}=C\cdot1$；故也可知：$P(A_t)=e^{-\lambda t}$.

9. 袋中有 4 白1红 5 只球，现有 5 人依次从袋中各取一球，取后不放回，试求“第 i（$i=1,2,\cdots,5$）人取到红球”的概率.

解、$P(A_1)=\frac{1}{5}$、 $P(A_2)=P(A_2\Omega)=P(A_2\cap(A_1\cup\bar{A_1}))=P(A_2A_1\cup A_2\bar{A_1})$

$=P(A_2A_1)+P(A_2\bar{A_1})=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A_1})P(A_2|\bar{A_1})=\frac{1}{5}\times 0+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.

或 $P(A_2)\xlongequal{古典方法}\frac{C_4^1}{A_5^2}=\frac{1}{5}$, $\overset{0}{1}$ $\overset{0}{2}$ $P(A_3)=\frac{A_4^2}{A_5^3}=\frac{1}{5}$ $\overset{0}{1}$ $\overset{0}{2}$ $\overset{0}{3}$

…… , $P(A_5)=\frac{1}{5}$.

10. 两台车床加工同样的零件，“第一台出现不合格品”的概率是 0.03，“第二台出现不合格品”的概率是 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，

（1）试求“任取一个零件是合格品”的概率；

（2）如果取出的零件是不合格品，求“它是由第二台车床加工”的概率.

设 A={取出不合格品}，B_i={取出的零件是第i台车床加工}，$i=1,2$；

由题设、$P(B_1)=2/3$，$P(B_2)=1/3$，$P(A|B_1)=0.03$，$P(A|B_2)=0.06$.

(1) $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.06=0.02+0.02=0.04$

$P(\bar{A})=1-P(A)=0.96$.

(2) $\cancel{P(A|B)}$ $P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}=\frac{0.02}{0.02+0.02}$

$=0.5$

11.（1）甲袋中有 2 只白球1只黑球，乙袋中有1只白球 2 只黑球，今从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求“此球是白球”的概率；

设 A={从乙袋中取出白球}，B={从甲袋中取出白球}

或 $A(B)$={从乙(甲)袋中取出白球}.

$P(A)=P(A\Omega)=P(A\cap(B\cup\bar{B}))=P(AB\cup A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})$

$=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

（2）甲袋中有5只黑球和1只白球，乙袋中有6只黑球，每次从甲乙两袋中随机各取一球交换放入另一袋中，依次取三次，求“白球仍在甲袋中”的概率；

令 A_i = {第 i 次交换后，白球仍在甲袋中}，$i=1,2,3$。易见，$P(A_1)=\frac{5}{6}$.

$$P(A_2)=P(A_2\Omega)=P(A_2\cap[A_1\cup\bar{A}_1])=P(A_2A_1)+P(A_2\bar{A}_1)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{18}.$$

$$P(A_3)=P(A_3\Omega)=P(A_3\cap[A_2\cup\bar{A}_2])=P(A_3A_2)+P(A_3\bar{A}_2)$$

$$=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(\bar{A}_2)P(A_3|\bar{A}_2)$$

$$=\frac{13}{18}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{18}\times\frac{1}{6}=\frac{5\times 14}{18\times 6}=\frac{35}{54}$$

（3）在 n 只袋中各有4只白球、6只黑球，而另一袋中有5只白球、5只黑球；今从 $n+1$ 只袋中任选一袋，从中随机取两球，都是白球，在这种情况下，有5只黑球、3只白球留在所选袋中的概率为 $\frac{1}{7}$，试求 n.

记：事件 A = {取出2只白球}，B = {球取自前 n 只袋中的一袋}，由题设：

$P(B)=\frac{n}{n+1}$，$P(\bar{B})=\frac{1}{n+1}$，则

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{C_4^2}{C_{10}^2}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{C_5^2}{C_{10}^2}\ \cancel{=\frac{1}{7}}$$

~~解：7[6n+10]=45(n+1). 42n+70=45n+45. 3n=~~

$$P(\bar{B}|A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B})}{P(A)}=\frac{C_5^2}{n\cdot C_4^2+C_5^2}=\frac{10}{6n+10}=\frac{1}{7}$$

$n=10$.

12. （1）某商店正在销售10台彩电，其中7台是一级品，3台是二级品；某人到商店时，彩电已售出2台，试求“此人能买到一级品”的概率；$\frac{7}{10}$

记 A = {此人买到一级品}，B_i = {已售出 i 台一级品}，$i=0,1,2$.

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{6}{8}+\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{5}{8}$$

$$=\frac{21+7\times 18+7\times 15}{9\times 5\times 8}=\frac{7\times(3+18+15)}{9\times 5\times 8}=\frac{7\times 36}{9\times 5\times 8}=\frac{7}{10}$$

（2）送检的两批灯泡在运输中各打碎一只；若每批10只，且第一批中有一只次品，第二批中有两只次品；现从剩下的灯泡中任取一只，求“取到次品”的概率.

记 $A=\{$取到次品$\}$，$B_i=\{$取到 i 批灯泡$\}$，$i=1,2$；$P(B_i)=\frac{1}{2}$，$i=1,2$；

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}[P(A|B_1)+P(A|B_2)]=\frac{1}{2}\times[\frac{1}{10}+\frac{2}{10}]=\frac{3}{20}$.

另法：$P(A|B_1)=P(C_1|B_1)P(A|C_1B_1)+P(C_0|B_1)P(A|C_0B_1)$

$=\frac{1}{10}\times 0+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$，同理，$P(A|B_2)=\frac{2}{10}$.

$C_i=\{$打碎 i 只次品$\}$，$i=0,1$；

—条件概率的全概率公式

13．有两箱零件，第一箱装50件，其中20件是一等品；第二箱装30件，其中18件是一等品；现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后任取两个零件，求：

（1）“第一次取出一等品”的概率；令 $A_i=\{$第 i 次取到次品$\}$，$i=1,2$，

（2）“第二次取出一等品”的概率；$B_i=\{$零件取自第 i 箱$\}$，~~$i=1,2$~~；$P(B_i)=\frac{1}{2}$，$i=1,2$

（3）在第一次取出一等品的条件下，“第二次取出的仍然是一等品”的概率；

（4）在第二次取出一等品的条件下，“第一次取出的仍然是一等品”的概率.

(1) $P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\frac{1}{2}\times[\frac{2}{5}+\frac{3}{5}]=0.5$；

(2) $P(A_2)=P(B_1)P(A_2|B_1)+P(B_2)P(A_2|B_2)=\frac{1}{2}\times[\frac{2}{5}+\frac{3}{5}]=0.5$；

(3) $P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)}{P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)}=\frac{\frac{C_{20}^2}{C_{50}^2}+\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}}=\frac{C_{20}^2}{C_{50}^2}+\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}$

(4) $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)}{P(B_1)P(A_2|B_1)+P(B_2)P(A_2|B_2)}=\frac{C_{20}^2}{C_{50}^2}+\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}$

---

(14) 记 $A=\{$检查出1件次品$\}$，$B_i=\{$检查的产品中有 i 件次品$\}$，$i=0,1,2,3,4$，且

$P(B_0)=0.37=P(B_1)$，$P(B_2)=0.18$，$P(B_3)=0.06$，$P(B_4)=0.02$

易见，$A\subset\bigcup_{i=1}^{4}B_i$，且 $P(A)=P(A\cap(\bigcup_{i=1}^{4}B_i))=P(\bigcup_{i=1}^{4}AB_i)=\sum_{i=1}^{4}P(AB_i)$

14．设某批产品共50件，其中有0,1,2,3,4件次品的概率分别为 0.37,0.37,0.18,0.06,0.02；现从该批产品中任取10件，检查出1件次品，试求“该批产品中次品不超过2件”的概率.

$=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.37\times\frac{C_{49}^{9}}{C_{50}^{10}}+0.18\times\frac{C_{48}^{9}C_2^1}{C_{50}^{10}}+0.06\times\frac{C_{47}^{9}C_3^1}{C_{50}^{10}}+0.02\times\frac{C_{46}^{9}C_4^1}{C_{50}^{10}}$.

$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)$

$=\frac{P(AB_1)+P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}$.

≈ 0.8

15. 设有来自三个地区的分别有10名，15名和25名考生的报名表，其中女生报名表分别有3份，7份和5份；现随机地抽取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，

（1）求“先抽到的是一份女生表”的概率；

（2）已知后抽到的是一份男生表，求“先抽到的是一份女生表”的概率.

记 A_i={第i次抽到女生表}，i=1,2； B_j={报名表是来自第j个地区}，$P(B_j)=\frac{1}{3}$，j=1,2,3；

(1) $P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)+P(B_3)P(A_1|B_3)$

$=\frac{1}{3}\times\left[\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right]$

(2) $P(A_1|\bar{A}_2)=\frac{P(A_1\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}=\frac{P(B_1)P(A_1\bar{A}_2|B_1)+P(B_2)P(A_1\bar{A}_2|B_2)+P(B_3)P(A_1\bar{A}_2|B_3)}{P(B_1)P(\bar{A}_2|B_1)+P(B_2)P(\bar{A}_2|B_2)+P(B_3)P(\bar{A}_2|B_3)}$

$=\dfrac{\frac{C_3^1C_7^1}{A_{10}^2}+\frac{C_7^1C_8^1}{A_{15}^2}+\frac{C_5^1C_{20}^1}{A_{25}^2}}{\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}}$

16. 假设有两箱同类零件，第一箱内装50件，其中10件是一等品，第二箱内装30件，其中18件是一等品；现从两箱中随机挑选一箱，再从该箱中先后取出两个零件， 记 A_i={第i次取出一等品}，B_i={零件来自第i箱}，$P(B_i)=\frac{1}{2}$，i=1,2；

（1）求“先取出的零件是一等品”的概率；

（2）已知先取出的零件是一等品，求“后取出的零件仍是一等品”的概率

(1) $P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right]=2/5$

(2) $P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)}{P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)}=\dfrac{\frac{A_{10}^2}{A_{50}^2}+\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}}$

17. 记 A={顾客买下这箱玻璃杯}，B_i={所取箱中含有i只次品}，i=0、1、2，且 $P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=P(B_2)=0.1$.

17. 玻璃杯成箱出售，每箱20只，假设各箱有0,1,2只次品的概率分别为0.8,0.1,0.1；一个顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时售货员随机取一箱，顾客开箱随机地查看4只，若无次品，就买下这箱玻璃杯，否则退回；试求：

（1） “顾客买下这箱玻璃杯”的概率；

（2） “在顾客买下的一箱中，确实没有次品”的概率.

(1) $P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$

$=0.8\times 1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}$

(2) $P(B_0|A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times 1}{\cdots}$

18．证明：$P(A|B)=P(A|BC)P(C|B)+P(A|B\overline{C})P(\overline{C}|B)$.

或：$P_B(A)=P_B(A|C)P_B(C)+P_B(A|\overline{C})P_B(\overline{C})$.

两边乘以 $P(B)$，即：

$$P(AB)=P(A|BC)\cdot P(BC)+P(A|B\overline{C})P(B\overline{C})$$

$$=P(ABC)+P(AB\overline{C})$$

$$=P(ABC\cup AB\overline{C})$$

19．（末步分析法）

（1） 连续n次掷一枚硬币，第一次掷出正面的概率为a，"第二次以后每次出现与前一次相同面"的概率为b，求"第n次掷出正面"的概率；

设 $A_i=\{$第i次掷出正面$\}$，$i=1,2,\cdots,n$；易见，$P(A_1)=a$．$\forall i\geq 2$

$P(A_i)=P(A_{i-1})P(A_i|A_{i-1})+P(\overline{A_{i-1}})P(A_i|\overline{A_{i-1}})=P(A_{i-1})\cdot b+[1-P(A_{i-1})]\cdot(1-b)$

$=(2b-1)P(A_{i-1})+1-b$，令 $P(A_i)=a_i$，$i\geq 1$，则有：$a_1=a$．

$i\geq 2$．$a_i=(2b-1)a_{i-1}+1-b$，令 $a_i+x=(2b-1)(a_{i-1}+x)$．$x=-\frac{1}{2}$，即有：

从而，$a_i-\frac{1}{2}=(2b-1)\cdot(a_{i-1}-\frac{1}{2})$．由此，$P(A_n)=a_n=(2b-1)^{n-1}\cdot(a-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$.

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & a=\frac{1}{2};\\ (2b-1)^{n-1}\cdot(a-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}, & a\neq\frac{1}{2};\end{cases}$$

（2）设有n只袋子，每只袋中有a只黑球和b只白球，现从第一只袋中任取一球放入第二只袋中，然后从第二只袋中任取一球放入第三只袋子，依此下去，问："从第n只袋中任取一球是黑球"的概率.

设 $A_i=\{$从第i只袋中取出黑球$\}$，$i=1,2,\cdots,n$；易见，$P(A_1)=\frac{a}{a+b}$.

$\forall i\geq 2$，$P(A_i)=P(A_{i-1})P(A_i|A_{i-1})+P(\overline{A_{i-1}})P(A_i|\overline{A_{i-1}})$

$$=P(A_{i-1})\cdot\frac{a+1}{a+1+b}+[1-P(A_{i-1})]\cdot\frac{a}{a+b+1}.$$

$$=\frac{1}{a+b+1}P(A_{i-1})+\frac{a}{a+b+1}$$；令 $P(A_i)=a_i$，且

$a_i+x=\frac{1}{a+b+1}(a_{i-1}+x)$，则有：$x=-\frac{a}{a+b}$；从而，

$a_n-\frac{a}{a+b}=\frac{1}{a+b+1}(a_{n-1}-\frac{a}{a+b})=\cdots=(\frac{1}{a+b+1})^{n-1}\cdot(a_1-\frac{a}{a+b})$，故

$P(A_n)=a_n=\frac{a}{a+b}$.

20. （首步分析法）

（1）（赌徒破产问题）设某赌徒有赌本$i(i\ge 1)$元，其对手有赌本$a-i\,(\ge 0)$元，每赌一次该赌徒以p（$q=1-p$）的概率赢（输）一元，赌博一直进行到两赌徒中有一人破产为止，试求“该赌徒破产”的概率；　$P(A_0)=1,\ P(A_a)=0.$

记 $A_i=\{$有 i 元赌本的赌徒破产$\}$，$i=0,1,\cdots,a$；易见，$P_0=1,\ P_a=0$，且

$\forall i\in\{1,2,\cdots,a-1\}$，$\cancel{P(A_i)=P(A_1)P(A_i|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_i|\bar{A}_1)}$)

$B=\{$有 i 元赌本的赌徒赢了第一局$\}$，则有：$P(A_i)=P(B)P(A_i|B)+P(\bar{B})P(A_i|\bar{B})$

$=p\cdot P(A_{i+1})+q\cdot P(A_{i-1})$，记 $P(A_i)=p_i$，$i=0,1,\cdots,a$；即：$p_0=1,\ p_a=0$，且

$p_i=p\cdot p_{i+1}+q\cdot p_{i-1}$，即：$p(p_{i+1}-p_i)=q(p_i-p_{i-1})$，也即：

$$\begin{cases} p_i-p_{i-1}=\left(\frac{q}{p}\right)(p_{i-1}-p_{i-2})=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}(p_1-1) \\ p_{i-1}-p_{i-2}=\left(\frac{q}{p}\right)^{i-2}(p_1-1) \\ \vdots \\ p_1-p_0=\left(\frac{q}{p}\right)^{0}\cdot(p_1-1) \end{cases}$$

则有：$p_i-1=\left[1+\frac{q}{p}+\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right](p_1-1)$

$=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\frac{q}{p}}(p_1-1)$，$i\ge 1$．取 $i=a$，

$-1=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\frac{q}{p}}\cdot(p_1-1)$，则有：$p_i=\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^i-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}$．

……

（2）（玻利亚概型）罐中有a只黑球和b只白球，每次从中任取一球并连同c只同色球一起放回，如此反复进行，试求“第n次取球时取出黑球”的概率（$c=0(-1)$时即有（无）放回抽样）.

记 $A_i=\{$第 i 次取出黑球$\}$，$i=1,2,\cdots,n$；易见，$P(A_1)=\dfrac{a}{a+b}$．

$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\dfrac{a}{a+b}\times\dfrac{a+c}{a+c+b}+\dfrac{b}{a+b}\times\dfrac{a}{a+b+c}=\dfrac{a}{a+b}$；假设 $n=k$ 时，

$P(A_k)=\dfrac{a}{a+b}$；则当 $n=k+1$ 时，$P(A_{k+1})=P(A_1)P(A_{k+1}|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_{k+1}|\bar{A}_1)$

$=\dfrac{a}{a+b}\times\dfrac{a+c}{a+c+b}+\dfrac{b}{a+b}\times\dfrac{a}{a+b+c}=\dfrac{a}{a+b}$；从而，$\forall n\ge 1$，$P(A_n)=\dfrac{a}{a+b}$．

习题 1.4

2. 甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.8和0.7，现已知目标被击中，求“甲命中”的概率.

记 $A(B)=\{$甲(乙)命中目标$\}$，由题意，A,B 独立，且 $P(A)=0.8$，

$P(B)=0.7$，即有：$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}$

$=\dfrac{0.8}{0.8+0.7-0.56}=\dfrac{0.8}{0.94}=\dfrac{40}{47}$

3．若事件 A,B 独立，且两事件“仅 A 发生”与“仅 B 发生”的概率都是 $\frac{1}{4}$，试求 $P(A)$ 与 $P(B)$.

由题设知，$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]=\frac{1}{4}$，

$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=[1-P(A)]P(B)=\frac{1}{4}$，

可解：$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$.

4．三人独立地破译一个密码，他们单独译出的概率分别为 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$，求“此密码被译出”的概率. 设三人分别为甲、乙、丙，令 $A(B、C)=\{$甲(乙、丙)译出密码$\}$

由题设知 $A、B、C$ 独立，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$、$P(C)=\frac{1}{5}$，可解：

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)=\cdots=\frac{3}{5}$.

另法：$P(\overline{A\cup B\cup C})=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$
$=\frac{2}{5}$

5．一射手对同一目标独立地射击四次，若“至少命中一次”的概率为 $\frac{80}{81}$，试求该射手进行一次射击的命中率为 p

设 $A_i=\{$第 i 次命中目标$\}$. $i=1,2,3,4$. 由题设知. A_1,A_2,A_3,A_4 独立，且 $P(A_i)=p$，$i=1,2,\ldots$

可解：$P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})=P(\bigcap_{i=1}^{4}\bar{A}_i)=\prod_{i=1}^{4}P(\bar{A}_i)=(1-p)^4=1-\frac{80}{81}$. $p=\frac{2}{3}$.

另法：由题设知，$b(0;4,p)=1-\frac{80}{81}$，即：$C_4^0\cdot p^0\cdot(1-p)^{4-0}=\frac{1}{81}$.

解得 $p=\frac{2}{3}$.

6．三门高射炮独立地向一飞机射击，已知“飞机中一弹被击落”的概率为 0.4，“飞机中两弹被击落”的概率为 0.8，中三弹则必然被击落；假设每门高射炮的命中率为 0.6，现三门高射炮各对飞机射击一次，求“飞机被击落”的概率.

设 $A=\{$飞机被击落$\}$，$B_i=\{$飞机中 i 弹$\}$，$i=0,1,2,3$，可解：$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.4$，

$P(A|B_2)=0.8$，$P(A|B_3)=1$；且 $P(B_0)=C_3^0(0.6)^0(0.4)^3$，$P(B_1)=C_3^1\,0.6(0.4)^2$，$P(B_2)$

$=C_3^2(0.6)^2\cdot0.4$，$P(B_3)=C_3^3\cdot(0.6)^3$，$A\subset\bigcup_{i=1}^{3}B_i$，

$P(A)=P(A\cap[\bigcup_{i=1}^{3}B_i])=P(\bigcup_{i=1}^{3}AB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

$=\cdots=$

7．甲乙两人连续独立地掷n次硬币，试求“甲乙两人掷出的正面数相等”的概率．

记：$B_k(C_k)=\{$甲(乙)掷出k次正面$\}$，$k=0,1,\cdots,n$；易见，B_k、C_k独立，$k=0,1,\cdots,n$；且 $P(B_k)=P(C_k)=C_n^k(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{n-k}$

$P\{$甲、乙掷出的正面数相等$\}=P(\bigcup_{k=0}^{n}B_kC_k)=\sum_{k=0}^{n}P(B_kC_k)=\sum_{k=0}^{n}P(B_k)\cdot P(C_k)$

$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{1}{2})^n\cdot C_n^k(\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^{2n}\cdot\underline{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot C_n^{n-k}}$．这里，$C_n^k=C_n^{n-k}$，且由 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$，左右两边$x^n$的系数分别为：$C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}$．

$=C_{2n}^n(\frac{1}{2})^{2n}$．

9．甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知每局中“甲获胜”的概率为0.6，“乙获胜”的概率为0.4；比赛可采用三局两胜制或五局三胜制，问：何种赛制对甲更有利？

记 $A_i=\{$第i局甲胜$\}$，$i=1,2,3,4,5$，易见，$A_1,A_2,\cdots,A_5$独立，且 $P(A_i)=0.6$

令 $B=\{$甲获胜$\}$．(i)若采用三局两胜制：$P(B)=P(A_1A_2\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3)$

$=P(A_1A_2)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=0.6^2+0.6^2\cdot0.4+0.6^2\cdot0.4=0.6^2+C_2^1\cdot0.4\cdot0.6\cdot0.6$

(ii)若采用五局三胜制：$P(B)=P(A_1A_2A_3\cup[\underbrace{\bigcup_{1\le i_1<i_2\le3}A_{i_1}A_{i_2}\bar{A}_{i_3}A_4}_{C_3^2}]\cup[\underbrace{\bigcup_{1\le i_1<i_2\le4}A_{i_1}A_{i_2}\bar{A}_{i_3}\bar{A}_{i_4}A_5}_{C_4^2}])$

$=P(A_1A_2A_3)+\sum_{1\le i_1<i_2\le3}P(A_{i_1}A_{i_2}\bar{A}_{i_3}A_4)+\sum_{1\le i_1<i_2\le4}P(A_{i_1}A_{i_2}\bar{A}_{i_3}\bar{A}_{i_4}A_5)$

$=C_3^3(0.6)^3+C_3^2\cdot0.6^2\cdot0.4^1\cdot0.6+C_4^2\cdot0.6^2\cdot0.4^2\cdot0.6$

10．某电厂由甲乙两台机组并联向一城市供电；当一台机组发生故障时，另一台机组能在这段时间满足城市全部用电需求的概率为0.85，设每台机组发生故障的概率为0.1，且它们是否发生故障相互独立；

（1）求“保证城市供电”的概率；

（2）若已知电厂机组发生故障，求“供电能满足需求”的概率．

记 $A=\{$电厂机组能保证城市供电$\}$，$B_i=\{$有i台机组发生故障$\}$，$i=0,1,2$；

易见，$P(B_0)=C_2^0\cdot0.1^0(0.9)^2=0.81$，$P(B_1)=C_2^1\cdot0.1\cdot0.9=0.18$，

$P(B_2)=C_2^2(0.1)^2(0.9)^0=0.01$，且 $P(A|B_0)=1$，$P(A|B_1)=0.85$．$P(A|B_2)=$

$\underline{A\subset(B_0\cup B_1)}$

(1) $P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)$

$=0.81\times1+0.18\times0.85=0.963$

(2) $P(A|B_1\cup B_2)=\frac{P(A\cap[B_1\cup B_2])}{P(B_1\cup B_2)}=\frac{P(AB_1)+P(AB_2)}{P(B_1)+P(B_2)}$

$=\frac{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)+P(B_2)}=\frac{0.18\times0.85}{0.18+0.01}=0.81$

11. 甲乙丙三人同时各自独立地对同一目标进行射击，三人击中目标的概率分别为0.4,0.5,0.7；若一人击中目标时目标被击毁的概率为0.2，两人击中目标时目标被击毁的概率为0.6，三人同时击中目标则目标必定被击毁；

（1）求“目标被击毁”的概率；

（2）已知目标被击毁，求“其是由一人击中”的概率；

（3）已知目标被击毁，求“其是由甲击中”的概率.

记 $A=\{$目标被击毁$\}$，$B_i=\{$有i人命中目标$\}$，$i=0,1,2,3$. 且

$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.2$，$P(A|B_2)=0.6$，$P(A|B_3)=1$.

令 第1、2、3人分别为甲、乙、丙，且 $C_i=\{$第i人命中目标$\}$，由题知，C_1、C_2、C_3 独立，且 $P(C_1)=0.4$，$P(C_2)=0.5$，$P(C_3)=0.7$，

$B_1=C_1\bar{C_2}\bar{C_3}\cup\bar{C_1}C_2\bar{C_3}\cup\bar{C_1}\bar{C_2}C_3$. $P(B_1)=P(C_1)P(\bar{C_2})P(\bar{C_3})+P(\bar{C_1})P(C_2)P(\bar{C_3})+P(\bar{C_1})P(\bar{C_2})P(C_3)=0.36$

$B_2=C_1C_2\bar{C_3}\cup C_1\bar{C_2}C_3\cup\bar{C_1}C_2C_3$ …… $P(B_2)=\dots=0.41$

$B_3=C_1C_2C_3$ …… $P(B_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)=0.14$

(1) $P(A)=P(A\cap[\bigcup_{i=1}^{3}B_i])=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$

$=P(B_1)\cdot0.2+P(B_2)\cdot0.6+P(B_3)\cdot1=0.458$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.2P(B_1)}{0.2P(B_1)+0.6P(B_2)+P(B_3)}$

$=0.16$

(3) $\cancel{P(C_1|A)=\frac{P(AC_1)}{P(A)}}$ $P(C_1\bar{C_2}\bar{C_3}|A)=\dfrac{P(C_1\bar{C_2}\bar{C_3}A)}{P(A)}$，这里，

$\cancel{P(AC_1)=P(C_1)P(A|C_1)}$ $P(C_1\bar{C_2}\bar{C_3}A)$

$=P(C_1\bar{C_2}\bar{C_3})P(A|C_1\bar{C_2}\bar{C_3})$

$=P(C_1)P(\bar{C_2})P(\bar{C_3})\cdot0.2$

$=0.4\times0.5\times0.3\times0.2=0.012$

习题 2.1

2.（1）设（离散型）随机变量（*r.v.*）X 的分布函数（*d.f.*）为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1/4, 0\le x<3;\\ 1/3, 3\le x<6;\\ 1, x\ge 6;\end{cases}$$ ，试求 $P(X<3)$、$P(X\le 3)$、$P(X>1)$、$P(X\ge 1)$；

$\forall x\in R,\ P(\{X<x\})=F(x-)$.

$P(X<3)=F(3-)=\lim_{x\to 3^-}F(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

$P(X\le 3)=F(3)=\frac{1}{3}$; $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-F(1-)=1-\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

（2）设（连续型）随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, x<1;\\ \ln x, 1\le x<e;\\ 1, x\ge e;\end{cases}$，试求：

$P(X<2)$、$P(0\le X\le 3)$、$P(2<X<2.5)$；

$P(X<2)=F(2-)=F(2)=\ln 2$;

$P(0\le X\le 3)=P(X\le 3)-P(X<0)=F(3)-F(0-)=F(3)-F(0)=1-0=1$.

$P(2<X<2.5)=P(X<2.5)-P(X\le 2)=F(2.5-)-F(2)=F(2.5)-F(2)$

$=\ln 2.5-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$.

（3）已知（混合型）随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ x/2, 0\le x<1;\\ 2/3, 1\le x<2;\\ 11/12, 2\le x<3;\\ 1, x\ge 3;\end{cases}$，试求：

$P(X<3)$、$P(1\le X<3)$、$P\left(X>\frac{1}{2}\right)$、$P(X=3)$.

$P(X<3)=F(3-)=\lim_{x\to 3^-}F(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{11}{12}=\frac{11}{12}$.

$P(1\le X<3)=P(X<3)-P(X<1)=F(3-)-F(1-)=\frac{11}{12}-\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{2}=\frac{5}{12}$.

$P(X>\frac{1}{2})=1-P(X\le\frac{1}{2})=1-F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

$P(X=3)=P(\{X\le 3\}-\{X<3\})=P(X\le 3)-P(X<3)$

$=F(3)-F(3-)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$.

3．设随机变量ξ的分布函数为$F(x)$，试用$F(x)$表示下列事件的概率：

$$\{|\xi|<1\},\{|\xi-2|<3\},\{2\xi+1>5\},\{\xi^2\le 4\},\{\xi^3<8\},\{a\xi+b\le c\}.$$

$\{X\le x\}=\{\omega|X(\omega)\le x\}$

$P(2\xi+1>5)=P(\xi>2)=1-P(\xi\le 2)=1-F(2)$.

$P(\xi^3<8)=P(\xi<2)=F(2-)$，$P(\xi^2\le 4)=P(-2\le\xi\le 2)=P(\xi\le 2)-P(\xi<-2)=F(2)-F(-2-)$

$a>0$，$P\{a\xi+b\le c\}=P\{a\xi\le c-b\}=P\{\xi\le\frac{c-b}{a}\}=F(\frac{c-b}{a})$；

$a<0$，$P\{a\xi+b\le c\}=P\{a\xi\le c-b\}=P\{\xi\ge\frac{c-b}{a}\}=1-P\{\xi<\frac{c-b}{a}\}=1-F(\frac{c-b}{a}-)$

$a=0$ $\{0\xi+b\le c\}=\{\omega|0\xi(\omega)+b\le c\}=\{\omega|0\xi(\omega)\le c-b\}=\begin{cases}\phi, & c<b;\\ \Omega, & c\ge b;\end{cases}$

即，$a=0$ $P\{a\xi+b\le c\}=\begin{cases}0, & c<b;\\ 1, & c\ge b;\end{cases}$

5．（1）设ξ（c.r.v.）的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, x<-1;\\ a+b\arcsin x,-1\le x<1;\\ 1,x\ge 1;\end{cases}$，试确定常数$a,b$；

由 $F(-1-)=F(-1+)$，即：$0=a+b\cdot(-\frac{\pi}{2})$

由 $F(1-)=F(1+)$，即：$1=a+b\cdot\frac{\pi}{2}$．解得：$a=\frac{1}{2}$、$b=\frac{1}{\pi}$．

（2）设ξ的分布函数为$F(x)=A+B\arctan x,x\in R$，试确定常数A,B．

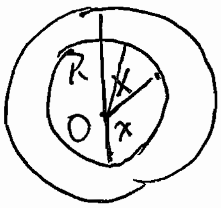
由 $F(+\infty)=1$．即 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(A+B\arctan x)=A+B\cdot\frac{\pi}{2}=1$．

由 $F(-\infty)=0$．即 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(A+B\arctan x)=A+B\cdot(-\frac{\pi}{2})=0$．

解得：$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{\pi}$

6．（1）在半径为R的圆内任取一点，求此点到圆心距离X的分布函数及概率$P\left(X>\frac{2}{3}R\right)$；

易见，$R(X)=[0,R)$．或 X 所有可能取值范围为 $[0,R)$，



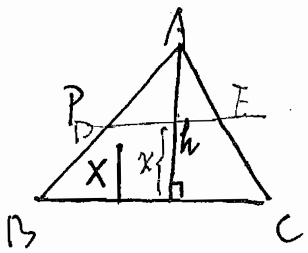
解得：$\forall x<0$，$F(x)=P(X\le x)=P(\phi)=0$；

$\forall x\ge R$．$F(x)=P(X\le x)=P(\Omega)=1$；　　即：

$\forall x\in[0,R)$．$F(x)=P(X\le x)\xlongequal{\text{几何概型}}\frac{\pi x^2}{\pi R^2}=\frac{x^2}{R^2}$．

$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2/R^2, & 0\le x<R;\\ 1, & x\ge R;\end{cases}$　　$P(X>\frac{2}{3}R)=1-P(X\le\frac{2}{3}R)$
$=1-F(\frac{2}{3}R)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$．

（2）在ΔABC内任取一点P，记X为点P到底边BC的距离，试求X的分布函数.



设BC边上的高为h，由题知，$R(X)=(0,h)$，可有：

$\forall x\le 0$，$F(x)=P(X\le x)=P(\phi)=0$；$\forall x\ge h$，$F(x)=P(X\le x)=P(\Omega)=1$；

$\forall x\in(0,h)$，$F(x)=P(X\le x)\xlongequal{\text{几何方法}}\dfrac{S_{\text{梯形}EDBC}}{S_{\triangle ABC}}=1-\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$

$=1-\left(\dfrac{h-x}{h}\right)^2$，即：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\left(\dfrac{h-x}{h}\right)^2, & 0<x<h;\\ 1, & x\ge h;\end{cases}$$

7.（1）设$F_1(x),F_2(x)$分别是两个随机变量的分布函数，$a,b>0$且$a+b=1$，试证明：$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$也是一个分布函数；

证、$F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的一个单调递增函数，且右连续.

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[aF_1(x)+bF_2(x)]=a\cdot F_1(+\infty)+b\cdot F_2(+\infty)$
$=a\cdot1+b\cdot1=1$

$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[aF_1(x)+bF_2(x)]=a\cdot F_1(-\infty)+b\cdot F_2(-\infty)$
$=a\cdot0+b\cdot0=0$

（2）若$F(x)$是一分布函数，试证：$\forall h>0,\Phi(x)=\dfrac{1}{h}\int_x^{x+h}F(t)dt$也是一分布函数.

证. $\Phi(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F(t)dt$是$x$的连续函数. 且 $\Phi(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F(t)dt\xlongequal{\text{令}t=x+u}$

$\frac{1}{h}\int_0^h F(x+u)du$；$\forall x_1,x_2\in R$，$x_1<x_2$，由$F(x_1+u)\le F(x_2+u)$，

可有 $\int_0^h F(x_1+u)du\le\int_0^h F(x_2+u)du$，也可有 $\Phi(x_1)\le\Phi(x_2)$.

由$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，可有：$\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>0,\forall x>\Delta$，$F(x)>1-\varepsilon$. 从而，

$\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>0,\forall x>\Delta$，$F(x+u)>1-\varepsilon$. $\frac{1}{h}\int_0^h F(x+u)du>\frac{1}{h}\int_0^h(1-\varepsilon)du$

$=1-\varepsilon$. 可有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=1$；同理可证：$\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$. ……

习题 2.2

2．现有三只盒子，第一只盒中装有1只白球4只黑球，第二只盒中装有2只白球3只黑球，第三只盒中装有3只白球2只黑球；现任取一只盒子，从中任取3只球，以X表示所取到的白球数，试求：

（1）X的分布列；（2）“取到白球数不少于2”的概率．

(1) 易见 $R(X)=\{0,1,2,3\}$，记 $A_i=\{$拿到第i只盒子$\}$，$i=1,2,3$；则有 $P(A_i)=\frac{1}{3}$；

$$P(X=0)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(X=0|A_i)=\frac{1}{3}\times[P(X=0|A_1)+P(X=0|A_2)+P(X=0|A_3)]=\frac{1}{3}\times\left[\frac{C_4^3}{C_5^3}+\frac{C_3^3}{C_5^3}+0\right]=\frac{1}{6};$$

$$P(X=1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(X=1|A_i)=\frac{1}{3}\left[\frac{C_4^2}{C_5^3}+\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}+\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{10}=\frac{1}{2}.$$

$$P(X=2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(X=2|A_i)=\frac{1}{3}\left[0+\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}=\frac{3}{10}.$$

$P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=\frac{1}{30}$．即：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

或

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30}\end{pmatrix}.$$

$P\{$取到的白球数不少于2$\}=P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{3}$.

3．某公司有5个顾问，假定每个顾问提供正确意见的概率为0.6，现公司就某项事宜是否可行征求各顾问的意见，并按多数人的意见作出决策，试求“公司作出正确决策”的概率．

记 $A=\{$公司作出正确决策$\}$，X为提供正确意见的顾问数．

易见，$X\sim B(5,0.6)$，且

$$P(A)=P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=C_5^3(0.6)^3(0.4)^2+C_5^4(0.6)^4(0.4)+C_5^5(0.6)^5=\cdots=0.6826.$$

4．现有5件产品，其中2件是次品；每次任取一件测试，

（1）直到两件次品都找出，记X,Y分别为找出第一件、第二件次品所用的次数，试求X,Y的分布列；

（2）直到找出两件次品或三件正品为止，试求需要测试次数Z的概率分布．

令 $A_i=\{$第i次取到次品$\}$，$i=1,2,3,4$.

(1)

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

这里，$P(X=1)=P(A_1)=\frac{2}{5}$，$P(X=2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$；$P(X=3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$.

~~(2)~~ (1)

Y	2	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

这里，$P(Y=2)=\frac{1}{10}$，$P(Y=3)=\cancel{\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{C_5^3}}=\frac{C_2^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1}{A_5^3}=\frac{1}{5}$

$$P(Y=4)=\cancel{\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^4}}=\frac{C_3^1A_3^2\cdot C_2^1}{A_5^4}=\frac{3}{10}.$$

(2)

Z	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

这里，$P(Z=2)=P(A_1A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$；

$P(Z=3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3)$

$=\cdots=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

5. 已知某射手的射击命中率为$\frac{4}{5}$，现其对一目标射击，分别以X,Y表示直到第一次、第二次命中为止所进行的射击次数，试求：“X取奇数”、“$Y=6$”的概率.

解，$X \sim G(\frac{4}{5})$. 可有：$P\{X取奇数\} = P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=2k-1\}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k-1)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{5})^{2k-2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4/5}{1-\frac{1}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{25}{24} = \frac{5}{6}$.

记Z为前五次射击中命中的次数，则，$Z \sim B(5, \frac{4}{5})$，令 $A_i = \{第i次命中\}$.

$P(Y=6) = P(\{Z=1\} \cap A_6) = P(Z=1) \cdot P(A_6 \mid Z=1) = P(Z=1) \cdot P(A_6)$

$= C_5^1 \cdot (\frac{4}{5})^1 \cdot (1-\frac{4}{5})^4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5^5}$

6. 袋中有5只球，编号为1,2,3,4,5；现从中任取3只，以X表示3只球中的最大号码；（1）试求X的分布列；（2）写出X的分布函数.

解，

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

，其中，$P(X=3) = \frac{1}{C_5^3}$，$P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_5^3}$；如下，

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} P(\phi) = 0, & x<3; \\ P(X=3) = \frac{1}{10}, & 3 \le x < 4; \\ P(X=3)+P(X=4) = \frac{2}{5}, & 4 \le x < 5; \\ P(\Omega) = 1, & x \ge 5; \end{cases}$$

7. 一汽车沿一街道行驶，需要经过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯亮何灯相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等；以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数，试求X的概率分布.

由于每个路口信号灯红绿显示时间相等，故汽车在每个路口遇到红灯的概率为$\frac{1}{2}$.
记 $A_i = \{第i个路口遇到红灯\}$，$i=1,2,3$；且 $P(A_i) = \frac{1}{2}$.
A_1, A_2, A_3 独立.

解，$R(X) = \{0, 1, 2, 3\}$. 且

$P(X=0) = P(A_1) = \frac{1}{2}$.

$P(X=1) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$P(X=2) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$.

$P(X=3) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \frac{1}{8}$. 即：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

8．（1）已知随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\0.5, 0\le x<1;\\0.7, 1\le x<3;\\1, x\ge 3;\end{cases}$，试求$X$的分布列；

由 $F(0)-F(0-)=P(X=0)=0.5-0=0.5$，

$F(1)-F(1-)=P(X=1)=0.7-0.5=0.2$，

$F(3)-F(3-)=P(X=3)=1-0.7=0.3$，可有：

X	0	1	3
P	0.5	0.2	0.3

（2）已知随机变量X的分布列为：$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0.25 & a & b\end{pmatrix}$，其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}c, x<-1;\\d, -1\le x<0;\\0.75, 0\le x<1;\\e, x\ge 1;\end{cases}$$，试求a,b,c,d,e.

解，$0.25+a+b=1$，可：$a+b=0.75$，由 $\cancel{F(-1)}=F(-\infty)=0$，可有：$c=0$。

由 $P(X=-1)=F(-1)-F(-1-)=d-0=0.25$、$d=0.25$

由 $F(+\infty)=1$、可有：$e=1$，

由 $P(X=0)=a=F(0)-F(0-)=0.75-d=0.5$、可有：$a=0.5$，$b=0.25$.

9．（1）从$1,2,3,4,5$五个数中任取三个，按大小顺序排列记为：$x_1<x_2<x_3$，令$X=x_2$，试求：X的分布及$P(X<2),P(X>4)$；

解

X	2	3	4
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

，已知，$P(X=2)=\dfrac{C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{4}{10}$，$P(X=4)=\dfrac{C_3^1}{C_5^3}$；

从而，$P(X<2)=0$．$P(X>4)=0$．

（2）连续“独立”地掷 n 次骰子，记 X,Y 分别为 n 个点数的最小、最大值，试求 X,Y 的分布列.

解、$R(X)=R(Y)=\{1,2,3,4,5,6\}$，且 $\forall k\in\{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(Y=k)=P\{\{Y\le k\}-\{Y\le k-1\}\}=P(Y\le k)-P(Y\le k-1)=\frac{k^n}{6^n}-\frac{(k-1)^n}{6^n}$$

$$=\left(\frac{k}{6}\right)^n-\left(\frac{k-1}{6}\right)^n;$$

$$P(X=k)=P\{\{X\ge k\}-\{X\ge k+1\}\}=P(X\ge k)-P(X\ge k+1)=\frac{(7-k)^n}{6^n}-\frac{(6-k)^n}{6^n}$$

$$=\left(\frac{7-k}{6}\right)^n-\left(\frac{6-k}{6}\right)^n.$$

10.（1）设 $X\sim P(\lambda)$，试求 X 的最大可能值，即：k 取何值时，概率 $P(X=k)$ 取最大值？

由 $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k+1)}=\dfrac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}}=\dfrac{k+1}{\lambda}\ge 1$，且 $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\dfrac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}}=\dfrac{\lambda}{k}\ge 1$.

可得，$k\le\lambda\le k+1$，即 $\lambda-1\le k\le\lambda$；

若 λ 为正整数，当 $k=\lambda$ 或 $\lambda-1$ 时，$P(X=k)$ 最大！

若 λ 不为正整数，当 $k=[\lambda]$ 时，$P(X=k)$ 最大！

（2）某食品店有 4 名售货员，据统计每名售货员平均在 1 小时内使用电子秤 15 分钟，问：该食品店配置几台电子秤较为合适？

记 X 为某个时刻使用电子秤的售货员数，由题意、$X\sim B(4,\frac{1}{4})$.

假如要配置 n 台电子秤，使 $P(X\le n)\ge 0.95$，则可认为 n 就是较为合适的电子秤台数；而由 $P(X\le 2)=C_4^0(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^4+C_4^1(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^3+C_4^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^2$

$$=\frac{3^4+4\cdot 3^3+6\cdot 3^2}{4^4}=\frac{3^2\cdot 27}{16\cdot 16}=\frac{243}{256}\ge 0.95.$$ 故配置 2 台电子秤合适！

（3）某公司生产一种配件，其不合格率为0.02；试问：一箱中至少应装多少配件才能以95%的把握保证每箱中有100件合格品？

(見理科教材P40.例2.2.7) 设每箱中至少应装进$100+n$件配件，记X为其中不合格的配件数；易见，$X\sim B(100+n, 0.02)$，记：$\lambda=(100+n)\times 0.02\approx 2$，由Poisson定理，$X\stackrel{\sim}{\sim}P(2)$，且由$P(X\le n)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}e^{-2}\ge 0.95$，查Poisson分布表，

取$n=5$.

11.（1）自动生产线在调整之后出现次品的概率为0.004，生产过程中只要一出现次品便立即进行调整，求在两次调整之间生产的正品数X的分布律；

几何分布的两种说法：① $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$，$k=1,2,\cdots$，则称$X\sim G(p)$；
② $P(X=k)=(1-p)^k\cdot p$，$k=0,1,\cdots$，则称$X\sim G(p)$.

假设从上次调整开始，记：$A_i=$ {生产的第i件是正品}，$i=1,2,\cdots$.

由题设，$A_1,A_2,\cdots$，独立，且$P(A_i)=0.996$；

$P(X=k)=P(A_1\cdots A_k\overline{A_{k+1}})=P(A_1)\cdots P(A_k)P(\overline{A_{k+1}})=(0.996)^k\cdot 0.004$，$k=0,1,\cdots$，

即：$X\sim G(0.004)$.

（2）设$X\sim\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3 & 4 & 7\\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.2\end{pmatrix}$，试求：

$P(|X|<3),P(-3<X\le 3),P(X\ge 2|X\ne 4),P(X<4|X=0)$.

$P(|X|<3)=P(-3<X<3)=P(X=0)=0.3$

$P(-3<X\le 3)=P(X=0)+P(X=3)=0.5$.

$P(X\ge 2|X\ne 4)=\frac{P(\{X\ge 2\}\cap\{X\ne 4\})}{P(X\ne 4)}=\frac{P(X=3)+P(X=7)}{1-P(X=4)}=\frac{0.2+0.2}{1-0.1}=\frac{4}{9}$.

$P(X<4|X=0)=1$.

12. 已知运载火箭在飞行中进入其仪器舱的宇宙粒子数服从参数为 2 的 *Poisson* 分布，而进入仪器舱的粒子随机落到仪器重要部位的概率为 0.1，求落到仪器重要部位的粒子数的概率分布.

记 X 为进入其仪器舱的宇宙粒子数，Y 为落到仪器重要部位的粒子数，由题意，

$X\sim P(2)$，且给定 $X=n$ 时，$Y\sim B(n,0.1)$. 从而，$\forall k\in\{0,1,2,\cdots\}$

$$P(Y=k)=P\left(\{Y=k\}\cap\left[\bigcup_{n=k}^{\infty}\{X=n\}\right]\right)=P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{X=n,Y=k\}\right)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n,Y=k)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)\cdot P(Y=k\mid X=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}e^{-2}\right)\cdot C_n^k(0.1)^k\cdot(1-0.1)^{n-k}$$

$$=\frac{(2\cdot0.1)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(2\cdot0.9)^{n-k}}{(n-k)!}\cdot e^{-2}\ \underline{\underline{令n-k=l}}\ \frac{(2\cdot0.1)^k}{k!}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2\cdot0.9)^l}{l!}\right]e^{-2}=\frac{(2\cdot0.1)^k}{k!}e^{2\cdot0.9}\cdot e^{-2}$$

$$=\frac{(0.2)^k}{k!}e^{-0.2},\quad k=0,1,\cdots;\ 即\ Y\sim P(0.2).$$

$$\boxed{C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

13. 一盒中装有两枚硬币，一枚是正品，一枚是次品（两面都印有分值），在盒中随机取一枚，投掷直至出现分值面，以 X 表示所需投掷的次数，试求 X 的分布律.

解 令 $A=\{取出正品\}$，则显然，$P(A)=\frac{1}{2}$，且

$P(X=1)=P(A)P(X=1\mid A)+P(\bar A)P(X=1\mid\bar A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1=\frac{3}{4}.$

$P(X=2)=P(A)P(X=2\mid A)+P(\bar A)P(X=2\mid\bar A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{8}.$

$P(X=3)=P(A)P(X=3\mid A)+P(\bar A)P(X=3\mid\bar A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{16}$

$\vdots$

$\forall k\geq2$，$P(X=k)=P(A)P(X=k\mid A)+P(\bar A)\cdot P(X=k\mid\bar A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\cdot0=\frac{1}{2^{k+1}}$，从而，

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^{k+1}}$	$\cdots$

15. 为保证设备正常工作，需要配备一些维修工；如果各台设备发生故障是相互独立的，且每台设备发生故障的概率都是 0.01；若某工厂有同类设备 300 台，为了保证设备发生故障而不能及时修理的概率小于 0.01，至少应配备多少维修工？

记 X 为发生故障的设备数，由题意，$X\sim B(300,0.01)$. $300\times0.01=3$.

由 Poisson 定理，X 近似 $\sim P(3)$；设至少配备 n 名维修工，由

$P(X>n)<0.01$，查 Poisson 分布表，$n=8$.

14. 设实验室器皿中产生甲、乙两类细菌的机会是相等的，以 X 表示产生细菌的个数，其分布为：$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$；试求：

（1）“产生甲类细菌但没有乙类细菌”的概率；

（2）在已知产生了细菌而没有乙类细菌的条件下，“有两个甲类细菌”的概率.

记 Y 为产生的甲类细菌数.

(1). $P(\{$产生甲类细菌而没有乙类细菌$\}) = P(\{X=Y\geq 1\})$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=Y=k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{X=k\}\cap\{Y=k\})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot \underline{P(Y=k\mid X=k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\cdot C_k^k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}-1\right] = e^{-\lambda}\cdot\left[e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right]$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{2}} - e^{-\lambda}$$

(2) $$P(Y=2\mid X=Y\geq 1) = \frac{P(\{X=Y\geq 1, Y=2\})}{P(X=Y\geq 1)} = \frac{P(X=Y=2)}{P(X=Y\geq 1)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{e^{-\frac{\lambda}{2}}-e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda}}{8(e^{-\lambda/2}-e^{-\lambda})}.$$

连续型

1. 设随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ A\sin x, & 0\le x<\pi/2;\\ 1, & x\ge \pi/2;\end{cases}$，试求：

（1）A ；（2） $P\left(|X|<\dfrac{\pi}{6}\right)$；（3） X 的概率密度函数.

(1) 由 $F(\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2}-)$，可有：$1=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}A\sin x=A$.

(2) $P(|X|<\frac{\pi}{6})=P(-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6})=F(\frac{\pi}{6}-)-F(-\frac{\pi}{6})=F(\frac{\pi}{6})-F(-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

(3) 记 $X\sim f(x)$，可有：$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}\cos x & ,0\le x<\frac{\pi}{2};\\ 0 & ,其他;\end{cases}$

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求 $P\left(-\dfrac{1}{2}\le X<\dfrac{1}{2}\right)$ 及 X 的分布函数.

$P(-\frac{1}{2}\le X<\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)dx=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$;

$\forall x\in R$, $F(x)=P(X\le x)=P(-\infty<X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dt=0 & ,x\le -1;\\ \int_{-\infty}^{-1}0dt+\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=x+1+\frac{1}{2}t|t|\Big|_{-1}^{x} & ,-1<x<1;\\ \quad =x+1+\frac{1}{2}x\cdot|x|+\frac{1}{2} & \\ \int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{1}(1-|t|)dt+\int_{1}^{x}0dt=1 & ,x\ge 1;\end{cases}$$

回忆. $\int |x|dx$
$=\frac{1}{2}x\cdot|x|+C$.

5. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}ae^{x}, & x<0;\\ b, & 0\le x<1;\\ 1-ae^{-(x-1)}, & x\ge 1;\end{cases}$，试求：

（1）常数 a,b；（2）概率密度函数 $f(x)$；（3） $P\left(X>\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 由 $F(0-)=F(0)$，可有：$a=b$;
由 $F(1-)=F(1)$，可有：$b=1-a$ ，可有：$a=b=\frac{1}{2}$.

(2) 由 $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & ,x<0;\\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)} & ,x\ge 1;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$

(3) $P(X>\frac{1}{2})=1-P(X\le\frac{1}{2})=1-F(\frac{1}{2})=1-b=\frac{1}{2}$.

6.（1）已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=ce^{-|x|},-\infty<x<+\infty$，试确定常数 c 并求 X 的分布函数；

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，可得：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=2c\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx=2c=1$，$c=\frac{1}{2}$。

$\forall x\in R$，$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}ce^{t}dt=ce^{t}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0;\\ \int_{-\infty}^{0}ce^{t}dt+\int_{0}^{x}ce^{-t}dt, & x>0;\end{cases}$$

$=c+c(1-e^{-x})=1-\frac{1}{2}e^{-x}$.

（2）求常数 c，使得 $f(x)=ce^{1+x-x^2}$ 成为某连续型随机变量 X 的密度函数；

回忆：设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X\sim f(x)$，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

法1：由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}c\cdot e^{-(x-\frac{1}{2})^2}\cdot e^{\frac{5}{4}}dx\xlongequal{令x-\frac{1}{2}=t}ce^{\frac{5}{4}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=ce^{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\pi}=1$.

法2：由 $f(x)=c\cdot e^{-(x-\frac{1}{2})^2}\cdot e^{\frac{5}{4}}=c\cdot e^{\frac{5}{4}}\cdot e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

若令 $X\sim f(x)$，可得：$X\sim N(\frac{1}{2},(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$，从而 $c\cdot e^{\frac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$，$c=e^{-\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

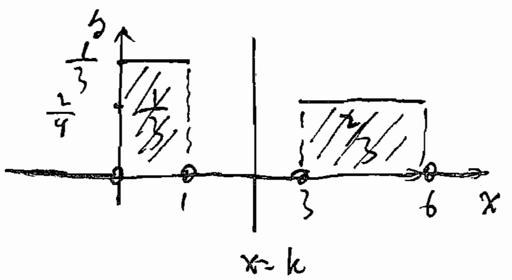
（3）设 $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$，为使 $f(x)$ 成为某连续型随机变量 X 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的密度函数，a,b,c 应该满足什么条件？

若记：$g(x)=ax^2+bx+c$，$x\in(-\infty,+\infty)$，易见、$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$g(x)>0$，从而 $a>0$，$\Delta=b^2-4ac<0$，由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$、可得：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}}d(x+\frac{b}{2a})$　　　$\int\frac{1}{a^2+u^2}du=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$，$a>0$

$\xlongequal{令\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})=t}\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+c-\frac{b^2}{4a}}dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\cdot\arctan\frac{t}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}=1$.

7.（1）设随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}1/3,0\le x\le 1;\\ 2/9,3\le x\le 6;\\ 0,其他;\end{cases}$，若 $P(X\ge k)=\frac{2}{3}$，试确定 k 的取值范围；



$P(X\ge k)=\int_{k}^{+\infty}f(x)dx=\frac{2}{3}$. 密度几何意义.

$k\in[1,3]$.

（2）设随机变量X,Y同分布（又记为：$X\overset{d}{=}Y$），且X有概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2,0<x<2;\\ 0,其他;\end{cases}$$

已知事件$A=\{X>a\}$与$B=\{Y>a\}$独立，且$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，试求常数a.

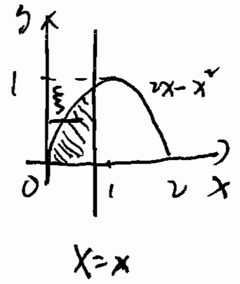
若令$Y\sim f_Y(y)$，可知：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8}y^2, & 0<y<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 此时，$P(X>a)=\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

$P(Y>a)=\int_a^{+\infty}f_Y(y)dy$，记$P(A)=P(B)=x$，由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2x-x^2=\frac{3}{4}$

$x^2-2x+\frac{3}{4}=(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})=0$. $x=\frac{1}{2}$. 由$P(A)=P(X>a)=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$. 可知：

$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^2\frac{3}{8}x^2dx+\int_2^{+\infty}0dx=\frac{1}{8}(8-a^3)=\frac{1}{2}$. $a=\sqrt[3]{4}$

8.（1）设A为曲线$y=2x-x^2$与x轴所围成的区域，在A中任取一点，求该点到y轴的距离ξ的分布函数及密度函数；



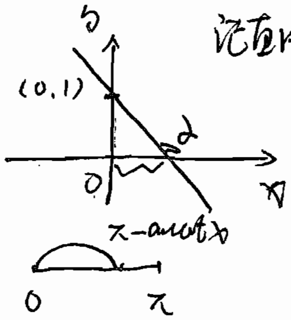
易见，$R(\xi)=(0,2)$；此时，$\forall x\le 0$，$F_\xi(x)=P(\xi\le x)=P(\varnothing)=0$；$\forall x\ge 2$，$F_\xi(x)=P(\xi\le x)=P(\Omega)=1$；$\forall x\in(0,2)$，$F_\xi(x)=P(\xi\le x)$

几何方法 $\dfrac{\int_0^x(2t-t^2)dt}{\int_0^2(2t-t^2)dt}=\dfrac{x^2-\frac{1}{3}x^3}{4-\frac{8}{3}}=\dfrac{3x^2-x^3}{4}$，即：

$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{3x^2-x^3}{4}, & 0<x<2;\\ 1, & x\ge 2;\end{cases}$ 令$\xi\sim f_\xi(x)$，可知：$f_\xi(x)=\frac{d}{dx}F_\xi(x)=\begin{cases}\frac{6x-3x^2}{4}, & 0<x<2;\\ 0, & 其他,\end{cases}$

（2）通过点$(1,0)$任意作直线与x轴相交成α角（$0<\alpha<\pi$），求直线在x轴上的截距的概率密度函数；

$(0,1)$



记直线在x轴上的截距为X，易见，~~X~~ $X=-\cot\alpha$，且$\alpha\sim U(0,\pi)$.

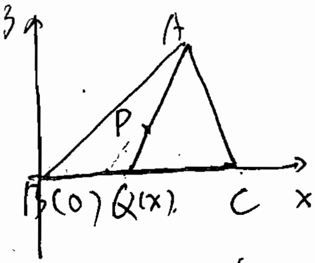
易见 $R(X)=(-\infty,+\infty)$. $\forall x\in R$，$F_X(x)=P(X\le x)=P(-\cot\alpha\le x)$

$=P(\cot\alpha\ge -x)=P(\alpha\le \operatorname{arccot}(-x))=P(\alpha\le\pi-\operatorname{arccot}x)$

$=\dfrac{\pi-\operatorname{arccot}x}{\pi}$，令$X\sim f_X(x)$，可知：

$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\left(\dfrac{\pi-\operatorname{arccot}x}{\pi}\right)'=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，$-\infty<x<+\infty$.

（3）向任意 ΔABC 内随机地抛掷一点 P，并将 AP 延长交 CB 于 Q，证明：Q 点服从 CB 上的均匀分布.



设 BC 边上的长为 a，即：$C(a,0)$，记：$BQ=X$.

易见，$\forall x<0$，$F_X(x)=P(X\le x)=P(\varnothing)=0$；$\forall x\ge a$，$F_X(x)=P(X\le x)=P(\Omega)$

$\forall x\in[0,a)$，$F_X(x)=P(X\le x)\xlongequal{\text{几何方法}}\dfrac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{x}{a}$，即：

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x<a;\\ 1, & x\ge a;\end{cases}$$

令 $X\sim f_X(x)$，有：

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<x<a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即：$X\sim U(0,a)$.

9．假设一设备在时间 t（h）内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 $Poisson$ 分布；若以 T 表示相邻两次故障之间的时间间隔，试求：

（1）T 的分布；（2）故障修复之后，“设备无故障运行 $3h$”的概率；

（3）如果设备已经无故障运行 $3h$ 的情况下，“再无故障运行 $3h$”的概率.

(1)，易见，$\forall t\le 0$，$F_T(t)=P(T\le t)=P(\varnothing)=0$；

$\forall t>0$，$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)$，$N(t)\sim P(\lambda t)$

$=1-\dfrac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}$，即：$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0;\end{cases}$ 即：$T\sim E(\lambda)$

(2) $P(T>3)=\int_3^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-3\lambda}$

(3) $P(T>3+3\mid T>3)\xlongequal{\text{无记忆性}}P(T>3)=e^{-3\lambda}$.

10．（1）设随机变量 $\xi\sim U[0,5]$，试求“方程 $4x^2+4\xi x+\xi+2=0$ 有实根”的概率；

$P\{\text{方程 } 4x^2+4\xi x+\xi+2=0 \text{ 有实根}\}=P\{\Delta=(4\xi)^2-4\cdot4(\xi+2)\ge 0\}$

$=P\{\xi^2-\xi-2=(\xi-2)(\xi+1)\ge 0\}=P\{\xi\ge 2 \text{ 或 } \xi\le -1\}=P(\{\xi\ge 2\}\cup\{\xi\le -1\})$

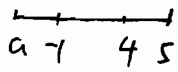
$=P(\{\xi\ge 2\})+P(\{\xi\le -1\})=P(\{\xi\ge 2\})\xlongequal{\text{几何方法}}\dfrac{5-2}{5-0}=\dfrac{3}{5}$.

（2）设 $Y\sim U(a,5)$，"方程 $4x^2+4Yx+3Y+4=0$ 无实根"的概率为0.25，求常数 a.

$P\{4x^2+4Yx+3Y+4=0 \text{ 无实根}\} = P\{\Delta=(4Y)^2-4\cdot 4\cdot(3Y+4)<0\}$

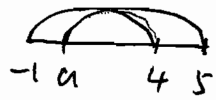
$=P\{Y^2-3Y-4=(Y-4)(Y+1)<0\} = P\{-1<Y<4\}$

若 $a<-1$，$P\{-1<Y<4\} \xlongequal{\text{几何概型}} \dfrac{4-(-1)}{5-a}=\dfrac{1}{4}$



$a=-15$；

若 $a>-1\ (\le 4)$，$P\{-1<Y\le 4\} \xlongequal{\text{几何概型}} \dfrac{4-a}{5-a}=\dfrac{1}{4}$



$a=\frac{11}{3}$.

11. 设随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty$，试求 $P(0\le\xi\le 2)$.

$P(0\le\xi\le 2)=\int_0^2 f(x)dx$ ··· 积不出来！

由 $\xi\sim f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，即 $\xi\sim N(1,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$.

$\dfrac{\xi-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1^2)$. 从而 $P(0\le\xi\le 2)=P(\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\le\frac{\xi-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\le\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}})=\Phi(\sqrt{2})-\Phi(-\sqrt{2})$

$=2\Phi(\sqrt{2})-1=\cdots$

12. 设随机变量 $X\sim N(3,2^2)$，试求：

（1）$P(2<X\le 5),P(|X|>2)$；（2）确定 c，使得 $P(X>c)=P(X<c)$；

（3）设 d 满足 $P(X>d)\ge 0.9$，d 至多为多少？

由 $X\sim N(3,2^2)$，可知：$\dfrac{X-3}{2}\sim N(0,1^2)$； 从而.

(1) $P(2<X\le 5)=P(\frac{-1}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{2}{2})=\Phi(1)-\Phi(-\frac{1}{2})=\Phi(1)+\Phi(\frac{1}{2})-1$；

$P(|X|>2)=1-P(|X|\le 2)=1-P(\frac{-5}{2}\le\frac{X-3}{2}\le\frac{-1}{2})=1-[\Phi(-\frac{1}{2})-\Phi(-\frac{5}{2})]$

$=1+\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(\frac{5}{2})$

(2) 由 $P\{X>c\}=P(\overline{\{X\le c\}})=P\{X<c\}=P\{X\le c\}=\frac{1}{2}$，即：

$P\{X\le c\}=P\{\frac{X-3}{2}\le\frac{c-3}{2}\}=\Phi(\frac{c-3}{2})=\frac{1}{2}$. $\frac{c-3}{2}=0$. $c=3$；

(3) $P(X>d)=1-P(X\le d)=1-P(\frac{X-3}{2}\le\frac{d-3}{2})=1-\Phi(\frac{d-3}{2})$

$=\Phi(-\frac{d-3}{2})=\Phi(\frac{3-d}{2})\ge 0.9=\Phi(1.28)$

$\frac{3-d}{2}\ge 1.28$，$d\le 0.44$.

13．由学校到火车站有两条路线，所需时间随交通堵塞状况有所变化，若以分钟计，第一条路线所需时间 $\xi_1\sim N(50,10^2)$，第二条路线所需时间 $\xi_2\sim N(60,4^2)$，如果要求：

（1）在70分钟内赶到火车站；

（2）在65分钟内赶到火车站；试问：各应选择哪条路线？

由题知，$\frac{\xi_1-50}{10}\sim N(0,1^2)$，$\frac{\xi_2-60}{4}\sim N(0,1^2)$；

(1) $P(\xi_1\le 70)=P(\frac{\xi_1-50}{10}\le\frac{70-50}{10})=\Phi(2)$. $P(\xi_2\le 70)=P(\frac{\xi_2-60}{4}\le\frac{70-60}{4})=\Phi(2.5)$

$\Phi(2)<\Phi(2.5)$，故选择第二条路线.

(2). $P(\xi_1\le 65)=P(\frac{\xi_1-50}{10}\le\frac{65-50}{10})=\Phi(1.5)$. $P(\xi_2\le 65)=P(\frac{\xi_2-60}{4}\le\frac{65-60}{4})=\Phi(1.25)$

$\Phi(1.5)>\Phi(1.25)$. 故选择第一条路线.

14．假设一机器的检修时间（单位：小时）服从 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的指数分布，试求：

（1）“检修时间超过2小时”的概率；

（2）若已经检修4小时，求“总共至少5小时检修好”的概率.

解 记检修的时间为 X，则有 $X\sim E(\frac12)$.

(1) $P(X>2)=\int_2^{+\infty}\frac12 e^{-\frac12 x}dx=e^{-1}$.

(2) $P(X>5\mid X>4)\xlongequal{\text{无记忆性}}P(X>1)=e^{-\frac12}$.

15．（1）设 $X\sim U(2,5)$，试求“对 X 进行三次独立地观测中，至少有两次观测值大于3”的概率；

解，$P(X>3)=\frac23$. 记 Y 为观测到 $X>3$ 出现的次数，$Y\sim B(3,\frac23)$.

$P(Y\ge 2)=P(Y=2)+P(Y=3)$

$=C_3^2(\frac23)^2(\frac13)^1+C_3^3(\frac23)^3$

（2）设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟记）服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布，某顾客在窗口等待服务若超过10分钟他就离开；他一个月要到银行五次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求 $P(Y\ge 1)$.

解，$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac15 e^{-\frac15 x}dx=-e^{-\frac15 x}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}$. $Y\sim B(5,e^{-2})$.

$P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_5^0(e^{-2})^0(1-e^{-2})^5$

$=1-(1-e^{-2})^5$.

16.（1）对某地考生抽样调查的结果表明：考生的外语成绩（百分制）近似服从$N\left(72,\sigma^2\right)$（$\sigma>0$未知）；已知96分以上的考生占考生总数的2.3%，试求“考生成绩介于60分与84分之间”的概率；

随机地挑选一名考生，记其外语成绩为X，由题知，$X \sim N(72, \sigma^2)$.

由 $P(X>96)=0.023$. 即：$P(X\leq 96)=P\left(\frac{X-72}{\sigma}\leq\frac{24}{\sigma}\right)=0.977$，所以：$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977$

$=\Phi(2)$，所以 $\frac{24}{\sigma}=2$，$\sigma=12$. 从而，

$P(60<X<84)=P\left(\frac{-12}{12}<\frac{X-72}{12}<\frac{12}{12}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$

（2）用正态分布估计高考录取最低分。某市有9万名高中毕业生参加高考，结果有5.4万名被各类高校录取；已知满分为600分，540分以上者有2025人，360分以下者有13500人；试估计高考录取的最低分.

记高考的最低分为a，随机地挑选一名高中毕业生，记其高考成绩为X，记 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$

由题知，$P(X>540)=\frac{2025}{90000}$. 即：$P(X\leq 540)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{540-\mu}{\sigma}\right)=1-\frac{2025}{90000}=0.9775=\Phi(2.01)$

$\frac{540-\mu}{\sigma}=2.01$，$P(X<360)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{360-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{360-\mu}{\sigma}\right)=\frac{13500}{90000}$

即：$\Phi\left(\frac{\mu-360}{\sigma}\right)=\frac{76500}{90000}=0.85=\Phi(1.04)$，所以：$\frac{\mu-360}{\sigma}=1.04$

由 $P(X\geq a)=\frac{5.4}{9}=0.6$. 即：$P(X\leq a)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=0.4 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right)=0.6$

17. 用正态分布设计公交大巴车门的高度；

设计要求：男子与车门顶端碰头的机会必须控制在1%以下；

参数提供：通过大范围的抽样调查，已知中国男性的平均身高为173cm，标准差为9cm.

随机地挑选一名男性，记其身高为X(cm)，由题知，$X\sim N(173, 9^2)$.

记公交车的车门高度为h(cm)，基于设计要求

由 $P(X>h)\leq 0.1$，即：$P(X\leq h)\geq 0.99$，所以

$P(X\leq h)=P\left(\frac{X-173}{9}\leq\frac{h-173}{9}\right)=\Phi\left(\frac{h-173}{9}\right)\geq 0.99=\Phi(2.33)$

所以 $\frac{h-173}{9}\geq 2.33$　$h\geq 173+20.97=193.97$. 故应设

车门高度为194cm.

18. 设某电子元件在工作中其两端电压 $V \sim N\left(220, 20^2\right)$，当 $V \in [200, 240]$，失效的概率为 0.05；当 $V < 200$，失效的概率为 0.1；当 $V > 240$，失效的概率为 0.5；求：

（1）“此元件失效”的概率；

（2）“当元件失效时，电压超过 240”的概率.

记 $A=\{$此元件失效$\}$. 由题知, $P(A|200\le V\le 240)=0.05$, $P(A|V<200)=0.1$, $P(A|V>240)=0.5$;

(1) $P(A)=P(200\le V\le 240)\cdot P(A|200\le V\le 240)+P(V<200)\cdot P(A|V<200)+P(V>240)\cdot P(A|V>240)$

$$= [\Phi(1)-\Phi(-1)]\cdot 0.05+\Phi(-1)\cdot 0.1+[1-\Phi(1)]\cdot 0.5$$

$$= [2\Phi(1)-1]\cdot 0.05+[1-\Phi(1)]\cdot 0.1+[1-\Phi(1)]\cdot 0.5$$

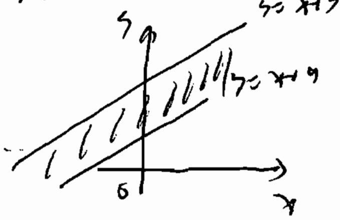
(2) $$P(V>240|A)=\frac{P(\{V>240\}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(V>240)\cdot P(A|V>240)}{P(A)}$$

$$=\frac{[1-\Phi(1)]\cdot 0.5}{[2\Phi(1)-1]\cdot 0.05+[1-\Phi(1)]\cdot 0.1+[1-\Phi(1)]\cdot 0.5}$$

19. 设 $F(x)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数，证明：对于任意的实数 $a,b,a<b$，下面等式成立：$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(x+b)-F(x+a)\right]dx=b-a$.

设 $X\sim f(x)$. 可有, $F(x+b)-F(x+a)=\int_{x+a}^{x+b} f(y)dy$. 从而,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[F(x+b)-F(x+a)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x+a}^{x+b} f(y)dy\right]dx \xlongequal{\text{交换次序}} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y-b}^{y-a} f(y)dx\right]dy$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(b-a)\cdot f(y)dy=(b-a)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy=b-a.$$

习题 2.4

1.(2) 设随机变量 X 的概率分布为：$P(X=k)=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$；试求 $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布律.

易见, $R(Y)=\{-1,0,1\}$. 且 $\{Y=0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=2k\}$

$$P(Y=0)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=2k\}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{\frac14}{1-\frac14}=\frac13.$$

$$P(Y=1)=P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=4k+1\}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=4k+1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4k+1}}=\frac{\frac12}{1-\frac1{16}}=\frac{8}{15}.$$

$P(Y=-1)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=\frac{2}{15}$, 即:

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

2.（1）设随机变量$X\sim U(-1,2)$，记$Y=\begin{cases}1, X\geq 0;\\ -1, X<0;\end{cases}$，试求$Y$的分布列；

记：$g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 可知：$Y=g(X)=\begin{cases}+1, & X\geq 0\\ -1, & X<0.\end{cases}$ 且 $P\{Y=1\}=P\{X\geq 0\}$

$=\frac{2}{3}$，如下，

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

（2）设随机变量$\xi\sim U[0,1]$，试求$X=[n\xi]+1$与$Y=\left[\frac{\ln\xi}{\ln q}\right]+1(0<q<1)$的分布.

① 求 $X=[n\xi]+1$ 的分布：易见，$R(X)=\{1,2,\cdots,n+1\}$，且

$P(X=n+1)=P([n\xi]+1=n+1)=P([n\xi]=n)=P(\xi=1)=0$，$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$

$P(X=k)=P([n\xi]+1=k)=P([n\xi]=k-1)=P(k-1\leq n\xi<k)=P(\frac{k-1}{n}\leq\xi<\frac{k}{n})$

$=\frac{1}{n}$，即：$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$

② $\forall k\geq 1$，$(k=1,2,\cdots)$，$P(Y=k)=P([\frac{\ln\xi}{\ln q}]+1=k)=P([\frac{\ln\xi}{\ln q}]=k-1)$

$=P(k-1\leq\frac{\ln\xi}{\ln q}<k)=P(k\ln q<\ln\xi\leq(k-1)\ln q)=P(q^k<\xi\leq q^{k-1})=q^{k-1}-q^k$

$=q^{k-1}(1-q)\xlongequal{\text{记}:p=1-q}(1-p)^{k-1}p$，即：$Y\sim G(p)$.

3.（1）设随机变量$X\sim U(0,1)$，试求$1-X$的分布；

猜想：$\underset{0\quad X\quad 1}{\overline{\quad\quad\quad}}$ $X\sim U(0,1)$，$1-X\sim U(0,1)$.

记：$Y=1-X$，由 $R(X)=(0,1)$，$R(Y)=(0,1)$. $\forall y\leq 0$，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\phi)=0$

$\forall y\geq 1$，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\Omega)=1$，$\forall y\in(0,1)$，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(1-X\leq y)$

$=P(X\geq 1-y)\xlongequal{\text{几何引法}}\frac{1-(1-y)}{1-0}=y$. 即：$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leq 0;\\ y, & 0<y<1;\\ 1, & y\geq 1;\end{cases}$

令 $Y\sim f_Y(y)$，可知 $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 即：$Y=1-X\sim U(0,1)$.

（2）设随机变量$X\sim E(2)$，试证：$Y_1=e^{-2X}$与$Y_2=1-e^{-2X}$均服从$(0,1)$上的均匀分布.

易见，$R(X)=(0,+\infty)$，$R(Y_1)=(0,1)$，从而，$\forall y\le 0$，$F_1(y)=P(Y_1\le y)=P(\phi)=0$；$\forall y\ge 1$，$F_1(y)=P(Y_1\le y)=P(\Omega)=1$；$\forall y\in(0,1)$，$F_1(y)=P(Y_1\le y)=P(e^{-2X}\le y)$
$=P(-2X\le \ln y)=P(X\ge -\frac{1}{2}\ln y)=\int_{-\frac{1}{2}\ln y}^{+\infty}2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_{-\frac{1}{2}\ln y}^{+\infty}=y$，即：

$$F_1(y)=\begin{cases}0 & ,y\le 0;\\ y & ,0<y<1;\\ 1 & ,y\ge 1;\end{cases}$$

，即：$Y_1\sim U(0,1)$；由(1)，$Y_2=1-Y_1\sim U(0,1)$

4．若随机变量$\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则称$X$服从对数正态分布；

（1）试求X的概率密度函数$f_X(x)$；（2）若$\ln X\sim N(1,4^2)$，求$P\left(\frac{1}{e}\le X\le e^3\right)$.

(2) $P(\frac{1}{e}\le X\le e^3)=P(-1\le \ln X\le 3)=P(-\frac{2}{4}\le\frac{\ln X-1}{4}\le\frac{2}{4})=\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(-\frac{1}{2})$
$=2\Phi(\frac{1}{2})-1$

(1) 记：$Y=\ln X$，可知 $X=e^Y$，且$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，

若$Y\sim f_Y(y)$，可知 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<y<+\infty$，

易见，$\forall x>0$，

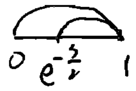
$f_X(x)=\cancel{f_Y[e^y]}\cdot f_Y[\ln x]\cdot|(\ln x)'|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$\cancel{x\ge 0}$.

即：$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & ,x>0;\\ 0 & ,x\le 0.\end{cases}$$

5．设随机变量 $X \sim U(0,1)$，试求以下 Y 的密度函数；

（1） $Y=-2\ln X$ ；（2） $Y=3X+1$ ；（3） $Y=e^{X}$ ；（4） $Y=|\ln X| = -\ln X$

(1) 易见，$R(X)=X(\Omega)=(0,1)$，$R(Y)=(0,+\infty)$。从而，$\forall y\le 0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\phi)=0$；
$\forall y>0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-2\ln X\le y\}=P\{X\ge e^{-\frac{y}{2}}\}=1-e^{-\frac{y}{2}}$。



即：$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$ 令 $Y\sim f_Y(y)$，可有：$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

即：$Y\sim E(\frac{1}{2})$。

另法：记 $X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$。$y=g(x)=-2\ln x$，$x\in(0,1)$，其反函数为：$x\underbrace{=}_{=h(y)}e^{-\frac{y}{2}}$，$y\in(0,+\infty)$

可有：$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$ 且

$f_Y(y)=f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|$，$y>0$

$=1\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$，$y>0$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

(2) 易见 $R(X)=(0,1)$，$R(Y)=(1,4)$。从而，$\forall y\le 1$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\phi)=0$；
$\forall y\ge 4$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\Omega)=1$；$\forall y\in(1,4)$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{3X+1\le y\}$
$=P\{X\le\frac{y-1}{3}\}=\frac{y-1}{3}$，即：

$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1;\\ \frac{y-1}{3}, & 1<y<4;\\ 1, & y\ge 4;\end{cases}$ 令 $Y\sim f_Y(y)$，可有：$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1<y<4;\\ 0, & 其他\end{cases}$

即：$Y\sim U(1,4)$。

另法：记 $X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$，$y=g(x)=3x+1$，$x\in(0,1)$，其反函数为：$x=h(y)$
$=\frac{y-1}{3}$，$y\in(1,4)$；可有。

$f_Y(y)=f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|$，$y\in(1,4)$

$=1\cdot\frac{1}{3}$，~~1<y<4~~ $y\in(1,4)$

$=\begin{cases}\frac{1}{3}, & y\in(1,4);\\ 0, & 其他.\end{cases}$

6.（1）设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x\in[1,8];\\ 0,其他;\end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数，试求随机变量$Y=F(X)$的分布函数；

易见，$R(X)=[1,8]$，$\forall x<1$，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\phi)=0$；$\forall x\ge 8$，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$；

$\forall x\in[1,8)$，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=(\int_{-\infty}^{1}+\int_{1}^{x})f(t)dt=\int_{1}^{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{t}\Big|_{1}^{x}=\sqrt[3]{x}-1$；

即：$F(x)=\begin{cases}0 &, x<1;\\ \sqrt[3]{x}-1 &, 1\le x<8;\\ 1 &, x\ge 8.\end{cases}$ 由$Y=F(X)$，~~易见，$R(Y$~~$)=\sqrt[3]{X}-1$，易见，$R(Y)=[0,1]$，

$\forall y<0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\phi)=0$；$\forall y\ge 1$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\Omega)=1$；

$\forall y\in[0,1)$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{\sqrt[3]{X}-1\le y\}=P\{X\le(1+y)^3\}$

$=F((1+y)^3)=\sqrt[3]{(1+y)^3}-1=y$. 即：$F_Y(y)=\begin{cases}0 &, y<0;\\ y &, 0\le y<1;\\ 1 &, y\ge 1;\end{cases}$ 即：$Y\sim U(0,1)$.

（2）设随机变量X的分布函数$F(x)$为严格单调连续函数，试求$Y=F(X)$的分布函数$F_Y(y)$；

易见，$R(Y)=(0,1)$，$\forall y\le 0$，$F_Y(y)=0$；$\forall y\ge 1$，$F_Y(y)=1$；

$\forall y\in(0,1)$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}$

$=F[F^{-1}(y)]=y$，即：

$F_Y(y)=\begin{cases}0 &, y\le 0;\\ y &, 0<y<1;\\ 1 &, y\ge 1;\end{cases}$ 即：$Y\sim U(0,1)$.

注：即使$F(x)$非严格单调，依然会有$Y=F(X)\sim U(0,1)$.

（3）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为严格单调连续函数，试求 $Z=-2\ln F(X)$ 的概率分布.

法1：由 $F(X)\sim U(0,1)$，则 $Z=-2\ln F(X)\sim E(\frac{1}{2})$.

法2：易知 $R(Z)=(0,+\infty)$，$\forall z\le 0$，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P(\phi)=0$；$\forall z>0$，

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{-2\ln F(X)\le z\}=P\{\ln F(X)\ge -\tfrac{z}{2}\}=P\{F(X)\ge e^{-\frac{z}{2}}\}$$
$$=P\{X\ge F^{-1}(e^{-\frac{z}{2}})\}=P\{X>F^{-1}(e^{-\frac{z}{2}})\}=1-P\{X\le F^{-1}(e^{-\frac{z}{2}})\}$$
$$=1-F[F^{-1}(e^{-\frac{z}{2}})]=1-e^{-\frac{z}{2}}$$；即：

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0;\end{cases}$$ 即：$Z\sim E(\frac{1}{2})$.

7.（1）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$\Phi(x)$ 表示 X 的分布函数，证明：随机变量 $Y=X+|X|$ 的分布函数 $F_Y(y)=\begin{cases}\Phi\left(\dfrac{y}{2}\right), & y\ge 0;\\ 0, & y<0;\end{cases}$；

易知 $R(Y)=[0,+\infty)$；故：$\forall y<0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\phi)=0$；$\forall y\ge 0$，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\ge 0\}P(Y\le y|X\ge 0)+P\{X<0\}P(Y\le y|X<0)$$
$$=P\{X\ge 0\}P(2X\le y|X\ge 0)+P\{X<0\}P(0\le y|X<0)$$
$$=P\{X\ge 0\}\cdot P(X\le \tfrac{y}{2}|X\ge 0)+P\{X<0\}=P\{0\le X\le \tfrac{y}{2}\}+P\{X<0\}$$
$$=P\{X\le \tfrac{y}{2}\}=\Phi(\tfrac{y}{2})$$. 即：$F_Y(y)=\begin{cases}\Phi(\frac{y}{2}), & y\ge 0;\\ 0, & y<0;\end{cases}$

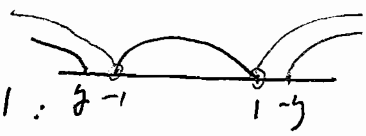
Y—混合型随机变量

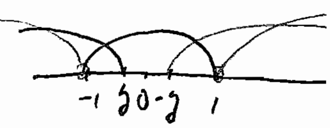
（2）设随机变量 $\xi\sim N(0,1^2)$，$\eta=\xi$ 或 $\eta=-\xi$ 视 $|\xi|\le 1$ 或 $|\xi|>1$ 而定，试求 η 的分布.

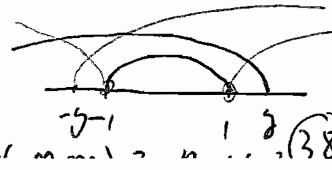
设 $g(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1;\\ -x, & |x|>1;\end{cases}$ 则：$\eta=g(\xi)=\begin{cases}\xi, & |\xi|\le 1;\\ -\xi, & |\xi|>1;\end{cases}$ 从而，$\forall y\in R$，

$$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P(|\xi|\le 1)\cdot P(\eta\le y\,|\,|\xi|\le 1)+P(|\xi|>1)\cdot P(\eta\le y\,|\,|\xi|>1)$$
$$=P(|\xi|\le 1)\cdot P(\xi\le y\,|\,|\xi|\le 1)+P(|\xi|>1)\cdot P(\xi\ge -y\,|\,|\xi|>1)$$
$$=P(\xi\le y,|\xi|\le 1)+P(\xi\ge -y,|\xi|>1)$$

$$=\begin{cases}P(\phi)+P(\xi\ge -y)=1-\Phi(-y)=\Phi(y), & y<-1;\\ P(-1\le\xi\le y)+P(\xi>1)=\Phi(y)-\Phi(-1)+1-\Phi(1)=\Phi(y), & -1\le y\le 1;\\ P(-1\le\xi\le 1)+P(-y\le\xi<-1)+P(\xi>1)\\ =\Phi(1)-\Phi(-1)+\Phi(-1)-\Phi(-y)+1-\Phi(1)=\Phi(y), & y>1\end{cases}$$





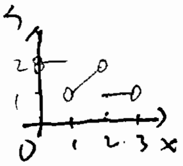


即：$F_\eta(y)=\Phi(y)$ ……

8. 设随机变量 $X \sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, 0<x<3;\\ 0, 其他;\end{cases}$，**且** $Y=\begin{cases}2, X\le 1;\\ X, 1<X<2;\\ 1, X\ge 2;\end{cases}$，**试求：**

（1） Y **的分布函数；（2）** $P(X\le Y)$.

(1) 设 $g(x)=\begin{cases}2, & x\le 1;\\ x, & 1<x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$ 可知 $Y=g(X)$，由 $g(x), x\in(0,3)$，可有：$R(Y)=[1,2]$；



$\forall y<1, F_Y(y)=0$；$\forall y\ge 2, F_Y(y)=1$；$\forall y\in(1,2)$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\le 1)\cdot P(Y\le y|X\le 1)$ $+P(1<X<2)\cdot P(Y\le y|1<X<2)+P(X\ge 2)\cdot P(Y\le y|X\ge 2)=P(X\le 1)P(\underbrace{2\le y}_{\phi}|X\le 1)+$ $P(1<X<2)\cdot P(X\le y|1<X<2)+P(X\ge 2)\cdot P(\underbrace{1\le y}_{\Omega}|X\ge 2)=0+P(X\le y, 1<X<2)+P(X\ge 2)$ $=P(1<X\le y)+P(X\ge 2)=\int_1^y \frac{1}{9}x^2dx+\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx=\frac{y^3+18}{27}$，即：$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1;\\ \frac{y^3+18}{27}, & 1\le y<2;\\ 1, & y\ge 2;\end{cases}$

$F_Y(1)-F_Y(1-)=P(Y=1)=\frac{19}{27}$，$F_Y(2)-F_Y(2-)=P(Y=2)=\frac{1}{27}$，Y—混合型随机变量。

(2) $P(X\le Y)=P(X\le 1)\cdot P(X\le Y|X\le 1)+P(1<X<2)\cdot P(X\le Y|1<X<2)+P(X\ge 2)\cdot P(X\le Y|X\ge 2)$
$=P(X\le 1)\cdot P(\underline{X\le 2}|\underline{X\le 1})+P(1<X<2)\cdot P(\underline{X\le X}|1<X<2)+P(X\ge 2)\cdot P(\underline{X\le 1}|\underline{X\ge 2})$
$=P(X\le 1)\cdot 1+P(1<X<2)\cdot 1+0=P(X<2)=\int_0^2\frac{1}{9}x^2dx=\frac{8}{27}$

9. 随机变量 X **的概率密度函数为** $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}, & 0<x<1;\\ \frac{1}{2}x^{-2}, & x\ge 1;\end{cases}$，**试求随机变量**

$Y=\frac{1}{X}$ **的概率密度函数** $f_Y(y)$.

法1：易见，$R(X)=(0,+\infty)$，$R(Y)=(0,+\infty)$，$\forall y\le 0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\phi)=0$；$\forall y>0$，$F_Y(y)=$
$P\{Y\le y\}=P\{\frac{1}{X}\le y\}=P\{X\ge \frac{1}{y}\}=\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}f_X(x)dx=\begin{cases}\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{1}{2x^2}dx=\frac{y}{2}, & 0<y<1;\\ \int_{\frac{1}{y}}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^2}dx=1-\frac{1}{2y}, & y\ge 1;\end{cases}$

即：$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{y}{2}, & 0<y<1;\\ 1-\frac{1}{2y}, & y\ge 1;\end{cases}$ $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1;\\ \frac{1}{2y^2}, & y\ge 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

法2：记：$y=g(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，可有其反函数 $x=h(y)=\frac{1}{y}$，$y\in(0,+\infty)$，即：

$f_Y(y)=f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|$，$y>0$；

$=f_X[\frac{1}{y}]\cdot\frac{1}{y^2}$，$y>0$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}, & 0<y<1;\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}, & y\ge 1;\end{cases}$

10. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，令 $Y=\min\{2X,1\}$，试求 Y 的分布函数及 $P(Y=1)$.

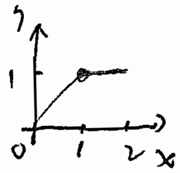
不妨设 $R(X)=(-1,2)$. 那么 $R(Y)=(-2,1]$ $\forall y\le -2$, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\phi)=0$.
$\forall y\ge 1$, $F_Y(y)=P(Y\le y)=1$; $\forall y\in(-2,1)$, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X\wedge 1\le y)=1-P(2X\wedge 1>y)$
$=1-P(2X>y,\underbrace{1>y}_{\Omega})=1-P(X>\frac{y}{2})=P(X\le\frac{y}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}}f_X(x)dx=\begin{cases}\int_{-1}^{\frac{y}{2}}\frac{1}{2}dx, & -2<y<0;\\ \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_0^{\frac{y}{2}}\frac{x}{4}dx, & 0\le y<1;\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{y}{4}+\frac{1}{2}, & -2<y<0;\\ \frac{1}{2}+\frac{y^2}{32}, & 0\le y<1;\end{cases}$ 即: $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \frac{y}{4}+\frac{1}{2}, & -2<y<0;\\ \frac{y^2}{32}+\frac{1}{2}, & 0\le y<1;\\ 1, & y\ge 1;\end{cases}$ Y—混合型随机变量

$P(Y=1)=F_Y(1)-F_Y(1-)=1-\lim_{y\to 1^-}(\frac{y^2}{32}+\frac{1}{2})=\frac{15}{32}$.

11.（1）设随机变量 $X\sim U[0,2]$，$g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 1, & 1\le x\le 2;\end{cases}$，试求随机变量 $Y=g(X)$ 的分布函数，并问：Y 是否为连续型随机变量？

解. $R(X)=[0,2]$, $R(Y)=[0,1]$. $\forall y<0$, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\phi)=0$;
$\forall y\ge 1$, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\Omega)=1$; $\forall y\in[0,1)$,



$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(0\le X<1)\cdot P(Y\le y\mid 0\le X<1)+P(1\le X\le 2)P(Y\le y\mid 1\le X\le 2)=P(0\le X<1)\cdot P(X\le y\mid 0\le X<1)+P(1\le X\le 2)\cdot\underbrace{P(1\le y\mid 1\le X\le 2)}_{\phi}$
$=P(0\le X<1,X\le y)+0=P(0\le X\le y)=\frac{y}{2}$. 即:

$Y=g(X)=\begin{cases}X, & 0\le X<1;\\ 1, & 1\le X\le 2;\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \frac{y}{2}, & 0\le y<1;\\ 1, & y\ge 1;\end{cases}$ 不是连续型的.

$F_Y(1)-F_Y(1-)=P(Y=1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Y—混合型随机变量

（2）设随机变量 $X \sim E(\lambda)$，证明：$Y = X \vee 2020 = \max\{X, 2020\}$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 恰好有一个间断点；

易见，$R(X)=(0,+\infty)$，$R(Y)=[2020,+\infty)$。$\forall y<2020$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\varnothing)=0$。
$\forall y\geq 2020$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\vee 2020\le y\}=P\{X\le y, \underbrace{2020\le y}_{\Omega}\}=P\{X\le y\}$
$=1-e^{-\lambda y}$，即：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<2020;\\ 1-e^{-\lambda y}, & y\geq 2020.\end{cases}$$

Y—1混合型随机变量

唯一的间断点：$y=2020$。 $F_Y(2020)-F_Y(2020-)$
$=1-e^{-2020\lambda}>0$.

（3）假设一设备开机后无故障工作的时间 $X \sim E\left(\frac{1}{5}\right)$，设备定时开机，出现故障时自动关机；且在无故障的情况下工作 2 小时便关机，试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，并指明 Y 是否为连续型随机变量？

由题知，$Y=X\wedge 2$，易见，$R(Y)=(0,2]$，可见：$\forall y\le 0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\varnothing)=0$；
$\forall y\geq 2$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\Omega)=1$；$\forall y\in(0,2)$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1-P\{Y>y\}$
$=1-P\{X\wedge 2>y\}=1-P\{X>y, \underbrace{2>y}_{\Omega}\}=1-P\{X>y\}=1-e^{-\frac{y}{5}}$；即：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 0<y<2;\\ 1, & y\geq 2.\end{cases}$$

$F_Y(2)-F_Y(2-)=1-(1-e^{-\frac{2}{5}})=e^{-\frac{2}{5}}>0$.
$=P(Y=2)$

Y不是连续型随机变量，Y是混合型的随机变量！

12. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x+\dfrac{1}{3}, & 0\le x<\dfrac{1}{2};\\ 1, & x\geq \dfrac{1}{2};\end{cases}$，试求：

（1）$P\left(X=\frac{1}{4}\right), P\left(X=\frac{1}{2}\right)$；（2）$P\left(0<X\le\frac{1}{3}\right), P\left(0\le X\le\frac{1}{3}\right)$；问：$X$ 是离散型随机变量还是连续型随机变量？为什么？

(1) $P(X=\frac{1}{4})=F(\frac{1}{4})-F(\frac{1}{4}-)=0$，$P(X=\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(\frac{1}{2}-)=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$.
(2) $P(0<X\le\frac{1}{3})=F(\frac{1}{3})-F(0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，$P(0\le X\le\frac{1}{3})=F(\frac{1}{3})-F(0-)=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$

X不是d.r.v.，也不是c.r.v.，是混合型随机变量！

$F(0)-F(0-)=P(X=0)=\frac{1}{3}$. $F(\frac{1}{2})-F(\frac{1}{2}-)=\frac{1}{6}=P(X=\frac{1}{2})$

13. 假设随机变量ξ的绝对值不大于1，$P(\{\xi=1\})=2P(\{\xi=-1\})=\frac{1}{4}$，在事件$\{-1<\xi<1\}$出现的条件下，$\xi$在$(-1,1)$内任一子区间上取值的条件概率与该区间的长度成正比，试求ξ的分布函数.

由题知，$R(\xi)=[-1,1]$. 即有：$\forall x<-1$，$F_\xi(x)=P(\{\xi\le x\})=P(\phi)=0$；$\forall x\ge 1$，$F_\xi(x)=P(\{\xi\le x\})=P(\Omega)=1$；另外，$\forall x\in(-1,1)$，

$$\underbrace{P(-1<\xi\le x\mid -1<\xi<1)=k(x+1)}_{(*)}.$$

从而，$\forall x\in(-1,1)$，$F_\xi(x)=P(\{\xi\le x\})$

$$=P(\{\xi=-1\})+P(\{-1<\xi\le x\})=\frac{1}{8}+P(\{-1<\xi\le x\}\cap\{-1<\xi<1\})$$

$$=\frac{1}{8}+P(\{-1<\xi<1\})\cdot P(-1<\xi\le x\mid -1<\xi<1)=\frac{1}{8}+\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot k(x+1)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}k(x+1).$$ 即：

$$F_\xi(x)=P(\{\xi\le x\})=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{1}{8}+\frac{5}{8}k(x+1), & -1\le \xi<1;\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}$$

由 $P(\{\xi=1\})=F_\xi(1)-F_\xi(1-)=1-\left[\frac{1}{8}+\frac{5}{8}k\cdot(1+1)\right]=\frac{7}{8}-\frac{5}{4}k=\frac{1}{4}$

$k=\frac{1}{2}$. 从而，$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\le x<1;\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}$ ξ是混合型随机变量.

$\boxed{\text{另法:}}$ 由(*)式，令$x\to 1-$，即有：

$$\lim_{x\to 1-}P(-1<\xi\le x\mid -1<\xi<1)=\lim_{x\to 1-}k(x+1)=1,\quad k=\frac{1}{2}.$$

习题 3.1

1. 袋中有1红2黑3白共6个球，现有放回从袋中取两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取到的红、黑、白球的个数，

（1）求 $P(X=1|Z=0)$；（2）求 (X,Y) 的概率分布.

(1) $P(X=1|Z=0)=\dfrac{P(X=1,Z=0)}{P(Z=0)}=\dfrac{P(X=1,Y=1)}{P(Z=0)}=\dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}}=\dfrac{4}{9}$；

(2) 解，

X\Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

注. $P(X=0,Y=0)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$；$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；$P(X=0,Y=2)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$；$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$；$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$；

$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

4.（1）假设 X,Y 同分布，且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$P(XY=0)=1$，试求 (X,Y) 的联合分布及 $P(|X|=|Y|)$；

$X\overset{d}{=}Y$

由 $P(XY=0)=1$，可知：$P(XY\neq0)=P(\{X=-1,Y=-1\}\cup\{X=-1,Y=1\}\cup\{X=1,Y=-1\}\cup\{X=1,Y=1\})=0$；可知

X\Y	-1	0	1	
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

，即为 (X,Y) 的联合分布.

$P(|X|=|Y|)=P(X=Y)+P(X=-Y)$

$=P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=1)$

$+P(X=1,Y=-1)=0+0+0+0=0$

（2）设 X,Y 为离散型随机变量，且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，已知 $P(X<Y)=0$，$P(X>Y)=\frac{1}{4}$，试求 (X,Y) 的联合分布.

由 $P(X<Y)=0$，可知：$P(X=-1,Y=0)+P(X=-1,Y=1)+P(X=0,Y=1)=0$.

也可知：

X\Y	-1	0	1	
-1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0			0	$\frac{1}{4}$
1			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	

；由 $P(X>Y)=\frac{1}{4}$，可知 $P(X=Y)=1-P(X<Y)-P(X>Y)=\frac{3}{4}$，

可知 $P(X=-1,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{3}{4}$

也可知：

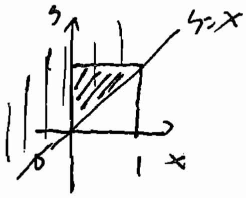
X\Y	-1	0	1	
-1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	

，即为 (X,Y) 的联合分布.

（4）设二维随机变量(X,Y)具有密度$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x,y<1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，试求：

$P(X<Y)$、$P(X+Y\ge 1)$、$P\left(Y\ge X+\frac{1}{2}\right)$.

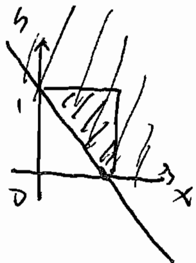
记：$D=[0,1]\times[0,1]$. 可有：$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$ 令 $D_1: x<y$.



可有：$P(X<Y)=P(\{(X,Y)\in D_1\})=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\left(\iint\limits_{D_1 D}+\iint\limits_{D_1\bar{D}}\right)f(x,y)dxdy$

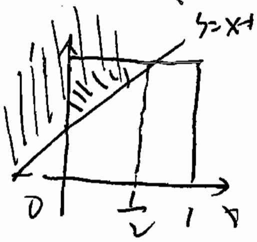
$=\iint\limits_{D_1 D} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 4xy\,dy=\int_0^1 2x\cdot(1-x^2)dx=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 可以简写为：

$P(X+Y\ge 1)=\iint\limits_{x+y\ge 1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 4xy\,dy=\int_0^1 2x\cdot[1-(1-x)^2]dx$



$=1-2\int_0^1 x\cdot(1-x)^2dx=1-2\int_0^1 x^2(1-x)dx=1-2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$;

$P(Y\ge X+\frac{1}{2})=\iint\limits_{y\ge x+\frac{1}{2}} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x+\frac{1}{2}}^1 4xy\,dy$



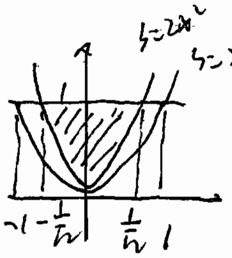
$=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x[1-(x+\frac{1}{2})^2]dx=\frac{1}{4}-2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot(x+\frac{1}{2})^2dx \xlongequal{令x+\frac{1}{2}=t}$

$\frac{1}{4}-2\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-\frac{1}{2})\cdot t^2dt=\frac{1}{4}-[\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{3}t^3]\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{4}-[\frac{15}{32}-\frac{7}{24}]$

$=\frac{1}{4}-\frac{17}{96}=7/96$.

5.（1）设(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, x^2\le y\le 1;\\ 0, \text{其他};\end{cases}$，

（i）确定常数c；（ii）求$P((X,Y)\in D)$，$D: 2x^2\le y\le 1$；



（i）记：$D_1: x^2\le y\le 1$；可有：

由 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=1$，可有：$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 cx^2y\,dy$

$=\int_{-1}^1 \frac{c}{2}x^2\cdot(1-x^4)=\frac{c}{2}\int_{-1}^1 x^2(1-x^4)dx=c\cdot\int_0^1 x^2(1-x^4)dx=\frac{4}{21}c=1$.

$c=\frac{21}{4}$；（ii）$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{2x^2}^1 x^2y\,dy$

$=\frac{21}{8}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2(1-4x^4)dx=\frac{21}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2(1-4x^4)dx=\frac{21}{4}\cdot[\frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}})^3-\frac{4}{7}(\frac{1}{\sqrt{2}})^7]$

$=\frac{21}{4}\times[\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{14\sqrt{2}}]=\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7-3}{42}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

（3）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} ke^{-3x-4y}, & x,y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，试求：

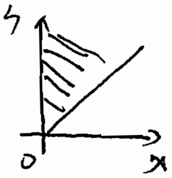
（i）(X,Y)的联合分布函数；（ii）$P(X\le Y),P(X+Y>1)$；

由 $\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = \iint_{x,y>0} ke^{-3x-4y}dxdy = \int_0^{+\infty}dx\cdot\int_0^{+\infty}ke^{-3x}\cdot e^{-4y}dy = \frac{k}{12}=1$，$k=12$。

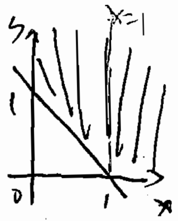
(i) $\forall(x,y)\in R^2$，$F(x,y) \triangleq P(X\le x, Y\le y) = \begin{cases} P(\phi)=0 & ,x\le 0或y\le 0; \\ \int_{-\infty}^x ds\cdot\int_{-\infty}^y f(s,t)dt & ,x,y>0; \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & ,x\le 0或y\le 0; \\ \int_0^x ds\int_0^y 12e^{-3s}e^{-4t}dt & ,x,y>0; \end{cases} = \begin{cases} 0 & ,x\le 0或y\le 0; \\ (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}) & ,x,y>0; \end{cases}$

(ii) $P(X\le Y) = \iint_{x\le y} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}12\cdot e^{-3x}\cdot e^{-4y}dy = \int_0^{+\infty}3e^{-3x}\cdot e^{-4x}dx = \frac{3}{7}$；



$P(X+Y>1) = \int_0^1 dx\int_{1-x}^{+\infty}12e^{-3x}\cdot e^{-4y}dy + \int_1^{+\infty}dx\cdot\int_0^{+\infty}12e^{-3x}\cdot e^{-4y}dy$



$= \int_0^1 3e^{-3x}\cdot e^{-4+4x}dx + \int_1^{+\infty}3e^{-3x}dx$

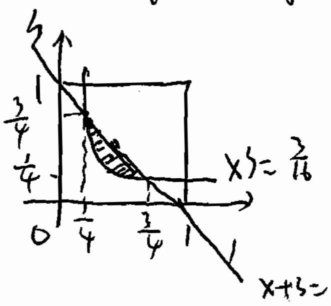
$= 3e^{-4}(e-1)+e^{-3} = 4e^{-3}-3e^{-4}$.

6.（1）从$(0,1)$中随机地取两个数，求“其积不小于$\frac{3}{16}$且其和不大于1”的概率；

方法1：(第一章的做法) E：向$(0,1)\times(0,1)$内随机掷一点，记点为(x,y) (几何概型)

$\Omega=(0,1)\times(0,1)$

$A=$\{两数之和(积)不大于1(不小于$\frac{3}{16}$)\}$=\{(x,y)\mid x+y\le 1, xy\ge\frac{3}{16}, 0<x,y<1\}$



$P(A) \xlongequal{几何方法} \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}[1-x-\frac{3}{16x}]dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\ln 3 = \frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3$.

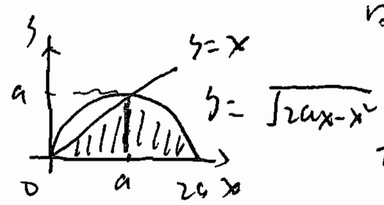
方法2. 记两数分别为(X,Y)，由题知 $(X,Y)\sim U(D)$，$D=(0,1)\times(0,1)$.

令$(X,Y)\sim f(x,y)$，可知 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{S(D)}=1 & ,(x,y)\in D; \\ 0 & ,(x,y)\notin D; \end{cases}$

$P(A)=P(XY\ge\frac{3}{16}, X+Y\le 1) = \iint_{\substack{xy\ge\frac{3}{16}\\x+y\le 1}} f(x,y)dxdy = \cdots\cdots = \frac{S(A)}{S(D)}$

$= \frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3$.

（2）向平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<y<\sqrt{2ax-x^2}\right\}$ 内随机地投掷一点，记其为 (X,Y)，试求 $P(X\ge Y)$.　　$(a>0)$



设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则有：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(D)}=\frac{2}{\pi a^2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$

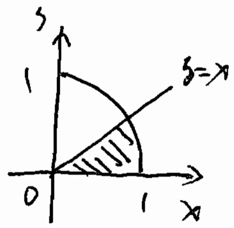
也可有：$P(X\ge Y)=\iint\limits_{x\ge y} f(x,y)\,dxdy=\frac{\text{对应面积}}{\text{所有面积}}=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi}{4}a^2}{\frac{\pi}{2}a^2}$

$=\frac{2+\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

（2）设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, & x,y>0;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，令 $\begin{cases}U=\sqrt{X^2+Y^2}\\ V=\arctan\frac{Y}{X}\end{cases}$，记 $F(u,v)$ 为 (U,V) 的联合分布函数，求 $F\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$.　(U,V) — (X,Y) 的函数分布函数.

解、$F(1,\frac{\pi}{4})=P(U\le 1, V\le\frac{\pi}{4})=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le 1, \arctan\frac{Y}{X}\le\frac{\pi}{4})$

$=P(X^2+Y^2\le 1, \arctan\frac{Y}{X}\le\frac{\pi}{4})=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ \arctan\frac{y}{x}\le\frac{\pi}{4}}} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ \arctan\frac{y}{x}\le\frac{\pi}{4}\\ x,y>0}}\frac{2}{\pi}\cdot e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$



$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{2}{\pi}e^{-r}\cdot r\,dr=\frac{1}{2}\int_0^1 r\cdot e^{-r}\,dr=\frac{1}{2}(-r-1)e^{-r}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{2}(1-2e^{-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$.

8. 设非负函数 $g(x)$ 满足 $\int_0^{+\infty}g(x)dx=1$，若

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}, & 0<x,y<+\infty;\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

试问：$f(x,y)$ 是否为某二维连续型随机向量的联合概率密度？

解、$\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{x,y>0} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{x,y>0}\frac{2g(\sqrt{x^2+y^2})}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

$\underline{\text{极坐标变换}}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}\frac{2g(r)}{\pi r}\cdot r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}d\theta\cdot\int_0^{+\infty}g(r)dr=1\cdot\int_0^{+\infty}g(x)dx=1$.

故、$f(x,y)$ 可作为某二维随机向量的联合密度！

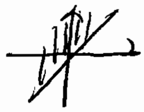
9. 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，其联合密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\times 10^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\times 10^2}}，\quad -\infty<x,y<+\infty；$$

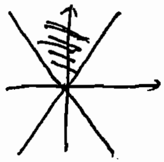
试求：$P(Y\ge X)$，$P(Y\ge |X|)$，$P(|Y|\ge |X|)$.

① $P(Y\geq X)=\iint\limits_{y\geq x} f(x,y)dxdy \xlongequal{极坐标变换} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\cdot 10^2}\cdot e^{-\frac{r^2}{2\cdot 10^2}}\cdot r dr$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{2\pi}1d\theta=\frac{1}{2}$；

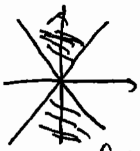

$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$

② $P(Y\geq |X|)=\iint\limits_{y\geq |x|} f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\cdot 10^2}\cdot e^{-\frac{r^2}{2\cdot 10^2}}\cdot r dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{1}{4}$；


$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

③ $P(|Y|\geq|X|)=P(Y\geq|X|)+P(Y\leq -|X|)$

$=\frac{1}{4}+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\cdot 10^2}\cdot e^{-\frac{r^2}{2\cdot 10^2}}\cdot r dr=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.


$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\cup[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$

10. 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0;\\ x\left(1-e^{-2y}\right), & 0\le x<1, y\ge 0;\\ 1-e^{-2y}, & x\ge 1, y\ge 0;\end{cases}$$

试求：(1) (X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$；(2) $P\left(X\le\frac{1}{2},1<Y\le 3\right)$，$P(X+Y\ge 1)$.

(1) 令$(X,Y)\sim f(x,y)$，可知 $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)$

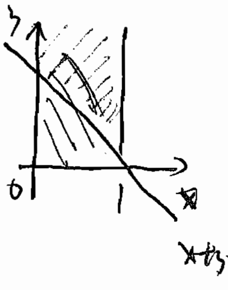
$=\begin{cases}2e^{-2y}, & 0\leq x<1, y\geq 0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2) $P(X\leq\frac{1}{2},1<Y\leq 3)=P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq 3)-P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq 1)$

$=F(\frac{1}{2},3)-F(\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}(1-e^{-6})-\frac{1}{2}(1-e^{-2})=\frac{1}{2}(e^{-2}-e^{-6})$.

$P(X+Y\geq 1)=\iint\limits_{x+y\geq 1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{+\infty}2e^{-2y}dy=\int_0^1 e^{-2+2x}dx$

$=e^{-2}\cdot\frac{1}{2}(e^2-1)=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$.



习题 3.2

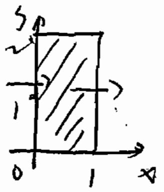
1. 设$(X,Y)\sim f(x,y)=\dfrac{1+\overset{a,\ 0\le a\le 1}{\sin x}\cdot\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$，$-\infty<x,y<+\infty$；试求$(X,Y)$关于$X,Y$的边缘密度$f_X(x),f_Y(y)$；

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac12(x^2+y^2)}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sin x\cdot\sin y}{2\pi}e^{-\frac12(x^2+y^2)}}_{\text{奇函数(关于}y)}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty,\ \text{即：}X\sim N(0,1^2);$$

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\cdots=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，$-\infty<y<+\infty$，即：$Y\sim N(0,1^2)$.

2. (1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3},(x,y)\in[0,1]\times[0,2];\\ 0,\text{其他};\end{cases}$，试求 X,Y 的边缘密度$f_X(x),f_Y(y)$及$P\left(Y<\frac12\middle|X<\frac12\right)$；



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^2+\int_2^{+\infty}\right)f(x,y)dy, & 0\le x\le 1;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0\,dy=0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac13xy\right)dy=2x^2+\frac23x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他；}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1\left(x^2+\frac13xy\right)dx=\frac13+\frac16y, & 0\le y\le 2;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$P\left(Y<\tfrac12\middle|X<\tfrac12\right)=\frac{P\left(X<\frac12,Y<\frac12\right)}{P\left(X<\frac12\right)}=\frac{\iint\limits_{(-\infty,\frac12)\times(-\infty,\frac12)}f(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{\frac12}f_X(x)dx}=\frac{\int_0^{\frac12}dx\int_0^{\frac12}\left(x^2+\frac13xy\right)dy}{\int_0^{\frac12}\left(2x^2+\frac23x\right)dx}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac12}\left[\frac12x^2+\frac16x\cdot\frac14\right]dx}{\frac23\cdot\frac18+\frac13\cdot\frac14}=\frac{\frac1{48}+\frac1{48}\cdot\frac14}{\frac16}=\frac{5}{32}.$$

3.（1）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, x,y>0;\\ 0,其他;\end{cases}$，试求事件$\{X<3\}$的概率；

法1：$P(X<3)=P(0<X<3)=P(0<X<3,\underbrace{0<Y<+\infty}_{\Omega})=\iint_{(0,3)\times(0,+\infty)} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^3 dx\cdot\int_0^{+\infty}2e^{-x}\cdot e^{-2y}dy=\int_0^3 e^{-x}dx=1-e^{-3};$$

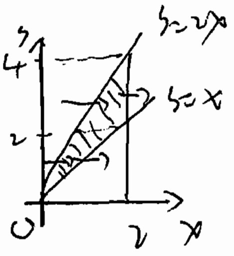
法2：记 $X\sim f_X(x)$，有：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-x}\cdot e^{-2y}dy=e^{-x}, & x>0;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0, & x\le 0;\end{cases}$ 即：$X\sim E(1)$

$P(X<3)=1-e^{-3}$.

$\int_0^3 e^{-x}dx=$

（2）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{8}, & 0<x<2, x<y<2x;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求：$P(Y>3)$.

法1：



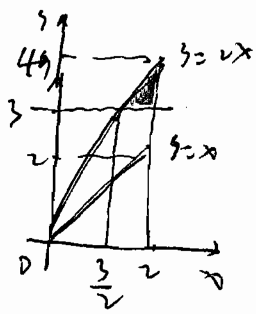
记 $Y\sim f_Y(y)$，有：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{3}{8}xdx, & y\in(0,2);\\ \int_{\frac{y}{2}}^{2}\frac{3}{8}xdx, & y\in[2,4);\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0, & y\notin(0,4);\end{cases}=\begin{cases}\frac{9}{64}y^2, & y\in(0,2)\\ \frac{3}{4}-\frac{3}{64}y^2, & y\in[2,4)\\ 0, & y\notin(0,4)\end{cases}$$

$$P(Y>3)=\int_3^{+\infty}f_Y(y)dy=\left(\int_3^4+\int_4^{+\infty}\right)f_Y(y)dy=3\int_3^4\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{64}y^2\right]dy=\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{3}(64-27)\right\}$$

$$=\frac{11}{192}\cdot 3=\frac{11}{64}.$$

法2：$P(Y>3)=P(\underbrace{0<X<2,Y>3}_{\Omega})=\iint_{(0,2)\times(3,+\infty)}f(x,y)dxdy$

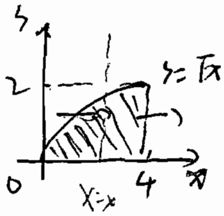


$$=\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_3^{2x}\frac{3}{8}xdy=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{3}{8}x\cdot(2x-3)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{16}x^2\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(8-\frac{27}{8}\right)-\frac{9}{16}\left(4-\frac{9}{4}\right)=\frac{74}{64}-\frac{63}{64}=\frac{11}{64}.$$

（3）已知(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$，其中

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 4, 0\le y\le\sqrt{x}\}$，试求$X$的边缘分布函数$F_X(x)$及$Y$的边缘密度函数$f_Y(y)$．



由 $\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_D Axy\,dxdy = \int_0^4 dx\cdot\int_0^{\sqrt{x}} Axy\,dy = \int_0^4 \frac{A}{2}x\cdot x\,dx = \frac{A}{6}\cdot 64 = 1$

$A=\frac{3}{32}$. 易见, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_{y^2}^{4}\frac{3}{32}xy\,dx, & 0\le y\le 2;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0, & 其他;\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{3y}{64}(16-y^4), & 0\le y\le 2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ~~$\forall x\in R,\ F_X(x)$~~ $\forall x<0,\ F_X(x)=P(X\le x)=0$;

$\forall x\ge 4,\ F_X(x)=P(X\le x)=1$; $\forall x\in[0,4),\ F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, \underbrace{0\le Y\le 2}_{\Omega})$

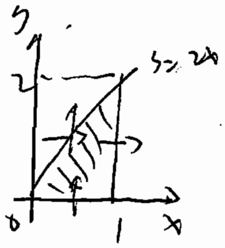
$=\iint_{(-\infty,x]\times[0,2]} f(s,t)\,dsdt = \int_0^x ds\int_0^{\sqrt{s}}\frac{3}{32}st\,dt = \int_0^x\frac{3}{64}s\cdot s\,ds = \frac{1}{64}x^3$. 即:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{64}x^3, & 0\le x<4;\\ 1, & x\ge 4;\end{cases}$$

5. 设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求：

（1）$f_X(x), f_Y(y)$；（2）$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$；（3）$P\left(Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right)$．

记 $D: 0<x<1,\ 0<y<2x$, 可有: $(X,Y)\sim U(D)$.

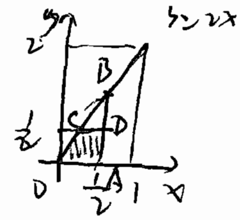


(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_0^{2x}1\,dy=2x, & 0<x<1;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0\,dy, & 其他;\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1\,dx=1-\frac{y}{2}, & 0<y<2;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0, & 其他;\end{cases}$

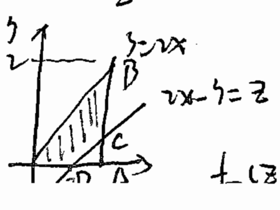
(3) $P(Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2}) = \dfrac{P(X\le\frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2})}{P(X\le\frac{1}{2})} = \dfrac{\iint_{(-\infty,\frac{1}{2}]\times(-\infty,\frac{1}{2}]} f(x,y)\,dxdy}{\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx} = \cdots\cdots$;

另法: $P(Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2}) \overset{几何方法}{=\!=\!=} \dfrac{S_{\square OADC}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{3}{4}$.



(2) 易见, 若 $Z=2X-Y$, $(x,y)\in D$, 可有: $R(Z)=(0,2)$; 从而, $\forall z\le 0,\ F_Z(z)=P(Z\le z)=0$;

$\forall z\ge 2,\ F_Z(z)=P(Z\le z)=1$; $\forall z\in[0,2),\ F_Z(z)=P(Z\le z) \overset{几何方法}{=\!=\!=} \dfrac{S_{\square OPCB}}{S_{\triangle OAB}}$



$=1-(1-\frac{z}{2})^2 = z-\frac{1}{4}z^2$. 即: $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\le z<2;\\ 1, & z\ge 2;\end{cases}$

$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2;\\ \cdots\end{cases}$

习题 3.3

1.（1）将2只球随机地放入3只盒中，以X,Y分别表示1号盒与2号盒中的球数，试求在$Y=0$的条件下X的条件分布；

易见，

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0
	$\frac{4}{9}$		

，这里，$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{9}$，$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{9}$，$P(X=0,Y=2)=\frac{1}{9}$，$P(X=1,Y=0)=\frac{2}{9}$，$P(X=1,Y=1)=\frac{2}{9}$，$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{9}$；且 $P(Y=0)=\frac{4}{9}$；即有：

$X\mid Y=0$	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

，或 $X\mid Y=0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

（2）从$1,2,3,4$中任取一个数，记为X；再从$1,\cdots,X$中任取一个数记为Y，试求(X,Y)的联合分布及Y的边缘分布与给定$X=4$时Y的条件分布；

易见，$P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j\mid X=i)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}$，$1\le j\le i\le 4$，这里，

$Y\mid X=i$	1	2	$\cdots$	i
P	$\frac{1}{i}$	$\frac{1}{i}$	$\cdots$	$\frac{1}{i}$

；即有：

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

，也即有：

Y	1	2	3	4
P	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

；

$X\mid Y=1$	1	2	3	4
P	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

.

（3）一射手进行射击，已知其每次的命中率为$p(0<p<1)$，射击一直进行到击中目标两次为止；令X表示其首次命中目标时所射击的次数，Y表示总共射击的次数，试求(X,Y)的联合分布、边缘分布和条件分布. 令$A_i=\{$第i次命中目标$\}$，$i=1,2,\cdots$；易见，$A_1,A_2,\cdots$，独立且 $P(A_i)=p$.

易见、$P(X=i,Y=j)$ ~~$=P(X=i$~~

$$=P(\bar A_1\cdots\bar A_{i-1}A_i\bar A_{i+1}\cdots\bar A_{j-1}A_j)$$

$$=P(\bar A_1)\cdots P(\bar A_{i-1})P(A_i)P(\bar A_{i+1})\cdots P(\bar A_{j-1})\cdot P(A_j)=(1-p)^{j-2}\cdot p^2,$$

$i=1,2,\cdots$；$j=i+1,\cdots$

$1\le i<j$；

$$P(X=i)=\sum_{j=i+1}^{\infty}P(X=i,Y=j)=\sum_{j=i+1}^{\infty}(1-p)^{j-2}\cdot p^2$$

$$=\frac{(1-p)^{i-1}\cdot p^2}{1-(1-p)}=(1-p)^{i-1}\cdot p,\quad i=1,2,\cdots;\quad X\sim G(p).$$

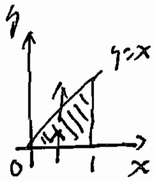
$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}P(X=i,Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}(1-p)^{j-2}\cdot p^2=(j-1)\cdot(1-p)^{j-2}\cdot p^2,\quad j=2,3,\cdots;$$

$P_{X|Y}(i\mid j)=P(X=i\mid Y=j)=\frac{1}{j-1}$，$i=1,2,\cdots,j-1$. 即：$X\mid Y=j\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & j-1\\ \frac{1}{j-1} & \frac{1}{j-1} & \cdots & \frac{1}{j-1}\end{pmatrix}$，$j=2,3,\cdots$；

$P_{Y|X}(j\mid i)=P(Y=j\mid X=i)=(1-p)^{j-i-1}\cdot p$，$j=i+1,i+2,\cdots$.

也即：$Y-i\mid X=i\sim G(p)$，$i=1,2,\cdots$.

2.（1）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}3x,0<y<x<1;\\ \quad 0,其他;\end{cases}$，试求给定$X=x$（$0<x<1$）时，$Y$的条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$及条件分布函数$F_{Y|X}(y|x)$；记 $X\sim f_X(x)$，则有；



$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3x\,dy=3x^2 & ,0<x<1;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$ $\forall x\in(0,1)$，

$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,0<y<x;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$ 即：$Y|X=x\sim U(0,x)$，$0<x<1$；

从而，$\forall y\in R$，$F_{Y|X}(y|x)=P(Y\le y|X=x)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(y|x)dy=\begin{cases}0 & ,y<0;\\ \frac{y}{x} & ,0\le y<x;\\ 1 & ,y\ge x;\end{cases}$

（2）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-y}\cdot e^{-\frac{x}{y}},x,y>0;\\ \quad 0,其他;\end{cases}$，$\forall y>0$，试求给定$Y=y$时，$X$的条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$及$P(X>1|Y=y)$；记 $Y\sim f_Y(y)$，则有：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

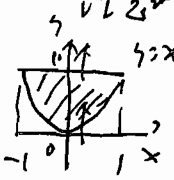
$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-y}e^{-\frac{x}{y}}dx & ,y>0;\\ 0 & ,y\le 0;\end{cases}=\begin{cases}e^{-y} & ,y>0;\\ 0 & ,y\le 0;\end{cases}$ 即：$Y\sim E(1)$；从而，$\forall y>0$，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{y}x} & ,x>0;\\ 0 & ,x\le 0;\end{cases}$ 即：$X|Y=y\sim E(\frac{1}{y})$，$y>0$；

$P(X>1|Y=y)=\int_1^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)dx=\cdots=e^{-\frac{1}{y}}$.

（3）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y,x^2\le y\le 1;\\ \quad 0,其他;\end{cases}$，求条件概率$P(Y\ge 0.75|X=0.5)$.

注意到 $P(X=0.5)=0$. 记 $X\sim f_X(x)$，则有：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2y\,dy & ,-1<x<1;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$



$=\begin{cases}\frac{21x^2(1-x^4)}{8} & ,-1<x<1;\\ 0 & ,其他\end{cases}$，从而，$\forall x\in(-1,1)$，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

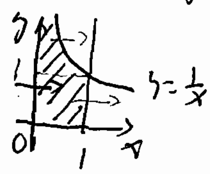
$=\begin{cases}\frac{2y}{1-x^4} & ,x^2\le y\le 1\ (或 y\in[x^2,1])\\ 0 & ,其他.(或 y\notin[x^2,1])\end{cases}$ 则有：$f_{Y|X}(y|0.5)=\begin{cases}\frac{32}{15}y & ,\frac{1}{4}\le y\le 1;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$

$P(Y\ge 0.75|X=0.5)=\int_{0.75}^{+\infty}f_{Y|X}(y|0.5)dy=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{32}{15}y\,dy=\frac{16}{15}y^2\Big|_{\frac{3}{4}}^{1}=\frac{7}{15}$.

或：$P(Y\ge 0.75|X=0.5)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}P(Y\ge 0.75|0.5-\Delta x<X\le 0.5)=\cdots=\frac{7}{15}$.

3.（1）设 $X\sim U(0,1)$，已知 $X=x$（$0<x<1$），$Y\sim U\left(0,\frac{1}{x}\right)$，试求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；由题设，$Y|X=x\sim U(0,\frac{1}{x})$，$0<x<1$；记 $X\sim f_X(x)$，$Y|X=x\sim f_{Y|X}(y|x)$，$0<x<1$，则有：$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<y<\frac{1}{x};\\ 0, & 其他\end{cases}$；令 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则有：

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\ 0<y<\frac{1}{x};\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



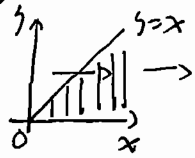
从而，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}, & 0<y<1;\\ \int_0^{\frac{1}{y}}x\,dx=\frac{1}{2y^2}, & 1\le y<+\infty;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$

（2）设 $\xi\sim f_\xi(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, x>0;\\ 0, x\le 0;\end{cases}$，$\eta$ 在 $(0,\xi)$ 上均匀分布，试求 η 的密度函数.

由题设，$\eta\sim U(0,\xi)$，也即：$\eta|\xi=x\sim U(0,x)$，$x>0$；令 $\eta|\xi=x\sim f_{\eta|\xi}(y|x)$，则有：$\forall x>0$，$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x;\\ 0, & 其他\end{cases}$ 记 $(\xi,\eta)\sim f(x,y)$，$\eta\sim f_\eta(y)$，则有：

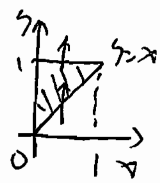
$$f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda x}, & 0<y<x;\\ 0, & 其他;\end{cases}$$ 从而，



$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{+\infty}\lambda^2e^{-\lambda x}dx=\lambda e^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$ 即：$\eta\sim E(\lambda)$.

4.（1）设 $Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, 0<y<1;\\ 0, 其他;\end{cases}$，给定 $Y=y$（$0<y<1$）时，X 的条件密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{3x^2}{y^3}, 0<x<y;\\ 0, 其他;\end{cases}$，试求 $P(X>0.5)$；记 $(X,Y)\sim f(x,y)$，$X\sim f_X(x)$，则有：

$$f(x,y)=f_Y(y)\cdot f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 15x^2y\,dy, & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{15}{2}x^2(1-x^2), & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$$ 从而，

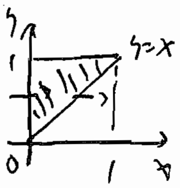
$$P(X>0.5)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{15}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{15}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{31}{32}\right]$$

$$=\frac{\cancel{15}}{2}\cdot\frac{\cancel{28}\,140-93}{\cancel{3\cdot5}\cdot32}=\frac{47}{64}.$$

（2）已知随机变量 X 的密度 $f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，给定 $X=x$ $(0<x<1)$ 时，随机变量 Y 的条件密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & x<y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$；试求 $P(Y\ge 0.5)$.

记 $(X,Y)\sim f(x,y)$，$Y\sim f_Y(y)$，则有：$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$

$$=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases} \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx=4y^3, & 0<y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$$



所以，$P(Y\ge 0.5)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4y^3dy=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(y+1)}, & x,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，试求：

（1）边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-x}\cdot e^{-xy}dy=e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$$ 即：$X\sim E(1)$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}xe^{-x(y+1)}dx, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^{+\infty}x(y+1)\cdot e^{-x(y+1)}d[x(y+1)], & y>0;\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

（2）条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$；

$$=\begin{cases}\frac{1}{(y+1)^2}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$

$$\forall x>0,\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}xe^{-xy}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$ 即：$Y|X=x\sim E(x)$，$x>0$；

$$\forall y>0,\ f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}x\cdot(y+1)^2\cdot e^{-x(y+1)}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（3）条件概率 $P(Y\le 1|X\le 2), P(Y\le 1|X=2)$.

注：$P(X\le 2)>0$，$P(X=2)=0$.

$$P(Y\le 1|X\le 2)=\frac{P(X\le 2, Y\le 1)}{P(X\le 2)}=\frac{\int_0^2dx\int_0^1 x\cdot e^{-x(y+1)}dy}{1-e^{-2}}=\frac{\int_0^2[e^{-x}(1-e^{-x})]dx}{1-e^{-2}}$$

$$=\frac{1-e^{-2}-\frac{1}{2}(1-e^{-4})}{1-e^{-2}}=1-\frac{1}{2}(1+e^{-2})=\frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

$$P(Y\le 1|X=2)=\int_{-\infty}^{1}f_{Y|X}(y|2)dy=\cdots=1-e^{-2}.$$

注：$Y|X=2\sim E(2)$

法1：由 $\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=1$. 即有：$A\cdot\iint_{R^2} e^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy = A\cdot\iint_{R^2} e^{-(x-y)^2-x^2}dxdy$

$\xlongequal{令\begin{cases}u=x-y\\v=x\end{cases}} A\cdot\iint_{R^2} e^{-(u^2+v^2)}dudv$

$= A\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr$

$= A\cdot\pi = 1 \Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$

6.设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty<x,y<+\infty,$$

试求常数 A 及条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.

法2：设 $X\sim f_X(x)$. 即有：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy = Ae^{-x^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy \xlongequal{令t=y-x} Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$

(注：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt \xlongequal{t=\frac{x}{\sqrt2}} \frac{1}{\sqrt2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt\pi$) $= A\cdot\sqrt\pi\cdot e^{-x^2}$, $-\infty<x<+\infty$；

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx = A\cdot\sqrt\pi\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx = A\cdot\sqrt\pi\cdot\sqrt\pi=1$, $A=\frac{1}{\pi}$.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$. $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt\pi}e^{-(y-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt2}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt2})^2}}$, $-\infty<y<+\infty$

即：$Y|X=x \sim N(x,(\frac{1}{\sqrt2})^2)$, $-\infty<x<+\infty$.

7. 设$Y\sim U[2,4]$，且给定$Y=y$（$2\le y\le 4$）时，$X\sim E(y)$，试求：

（1）(X,Y)的联合密度函数；（2）试证：$XY\sim E(1)$ 由题知 $X|Y=y\sim E(y)$, $2\le y\le 4$

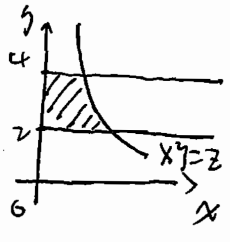
(1) 设 $Y\sim f_Y(y)$, $X|Y=y\sim f_{X|Y}(x|y)$, $2\le y\le 4$. $(X,Y)\sim f(x,y)$. 即有，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}y\cdot e^{-yx}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad 2\le y\le 4.$$

$$f(x,y)=f_Y(y)\cdot f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{y}{2}e^{-yx}, & x>0,\ 2\le y\le 4;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) 记：$Z=XY$. 即有：$R(Z)=(0,+\infty)$，从而，$\forall z\le 0$, $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\phi)=0$

$\forall z>0$. $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)=\iint_{xy\le z}f(x,y)dxdy$



$= \int_2^4dy\int_0^{\frac{z}{y}}\frac{y}{2}\cdot e^{-yx}dx = \int_2^4\frac{1}{2}\cdot(1-e^{-z})dy = 1-e^{-z}$,

即：$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0;\end{cases}$ 也即：

$Z=XY\sim E(1)$.

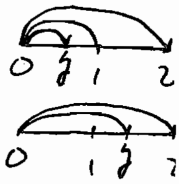
8.（1）设 X,Y 为两个随机变量，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$，且给定 $Y=k$ 时，$X\sim N\left(k,1^2\right)$，$k=0,1$；试求 X 的分布；由题设，$X|Y=0\sim N(0,1^2)$，$X|Y=1\sim N(1,1^2)$，即有：$X-1|Y=1\sim N(0,1^2)$；$\forall x\in R$，

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(Y=0)\cdot P(X\le x|Y=0)+P(Y=1)\cdot P(X\le x|Y=1)$$
$$=0.7\cdot\phi(x)+0.3\cdot P(X-1\le x-1|Y=1)$$
$$=0.7\cdot\phi(x)+0.3\phi(x-1).$$

（2）设 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，且给定 $X=k$ 时，$Y\sim U(0,k)$，$k=1,2$；试求 Y 的分布.

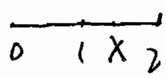
由题设，$Y|X=1\sim U(0,1)$，$Y|X=2\sim U(0,2)$；即有：$\forall y\in R$，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X=1)\cdot P(Y\le y|X=1)+P(X=2)\cdot P(Y\le y|X=2)$$
$$=\frac{1}{2}[P(Y\le y|X=1)+P(Y\le y|X=2)]=\begin{cases}\frac{1}{2}[0+0]=0 & ,y\le 0\\ \frac{1}{2}[y+\frac{y}{2}]=\frac{3}{4}y & ,0<y<1,\\ \frac{1}{2}[1+\frac{y}{2}]=\frac{1}{2}+\frac{y}{4} & ,1\le y<2;\\ \frac{1}{2}[1+1]=1 & ,y\ge 2;\end{cases}$$



令 $Y\sim f_Y(y)$，即有：
$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4} & ,0<y<1;\\ \frac{1}{4} & ,1\le y<2;\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

9.（1）设 $X\sim U(0,2)$，试求给定 $X>1$ 时，X 的条件分布；

猜测： $X|X>1\sim U(1,2)$. ? 验证：

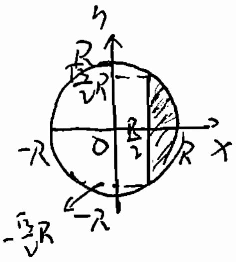
$\forall x\in R$，

$$F_{X|X>1}(x)=P(X\le x|X>1)=\frac{P(\{X>1,X\le x\})}{P(X>1)}=2\cdot P(X>1,X\le x)$$
$$=\begin{cases}2P(\phi)=0 & ,x\le 1;\\ 2P(1<X\le x)=2\cdot\frac{x-1}{2} & ,1\le x<2;\\ 2\cdot P(X>1)=2\cdot\frac{1}{2}=1 & ,x\ge 2;\end{cases}=\begin{cases}0 & ,x\le 1;\\ x-1 & ,1<x<2;\\ 1 & ,x\ge 2;\end{cases}$$

令 $X|X>1\sim f_{X|X>1}(x)$，即有：$f_{X|X>1}(x)=\frac{d}{dx}F_{X|X>1}(x)=\begin{cases}1 & ,1<x<2;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$

即：$X|X>1\sim U(1,2)$

（2）设$(X,Y)\sim U(D)$，$D: x^2+y^2\le R^2$，求$P\left(Y>0\middle|X=\frac{R}{2}\right)$、$P\left(Y>0\middle|X>\frac{R}{2}\right)$.



直观地，$Y|X=\frac{R}{2}\sim U[-\frac{\sqrt{3}}{2}R,\frac{\sqrt{3}}{2}R]$，$P(Y>0|X=\frac{R}{2})=\frac{1}{2}$（$\frac{长度}{长度}$）.

$(X,Y)|X>\frac{R}{2}\sim U(D_1)$，$D_1: \frac{R}{2}<x\le R$，$-\sqrt{R^2-x^2}\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$

$P(Y>0|X>\frac{R}{2})=\frac{1}{2}$（$\frac{面积}{面积}$）

事实上，$P(Y>0|X=\frac{R}{2})=\int_0^{+\infty}f_{Y|X}(y|\frac{R}{2})dy=\cdots=\frac{1}{2}$，$P(X=\frac{R}{2})=0$；

$$P(Y>0|X>\frac{R}{2})=\frac{P(X>\frac{R}{2},Y>0)}{P(X>\frac{R}{2})}=\frac{\int_{\frac{R}{2}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)dy}{\int_{\frac{R}{2}}^{+\infty}f_X(x)dx}=\cdots=\frac{1}{2}，P(X>\frac{R}{2})>0.$$

10. 设一个人一年内患感冒的次数服从参数为$\lambda_1=5$的*Poisson*分布；现有某种预防感冒的药物对75%的人有效（能将*Poisson*分布的参数减少为$\lambda_2=3$）；对另外25%的人不起作用；如果某人服用了此药，一年内患了两次感冒，那么该药对他有效的可能性是多少？随机地挑选一人，记$A=\{该药对此人有效\}$.

记X为此人一年患感冒的次数；由题设，$P(A)=\frac{3}{4}$，$P(\bar{A})=\frac{1}{4}$；$X|A\sim P(3)$，$X|\bar{A}\sim P(5)$. 即有：

$$P(A|X=2)=\frac{P(A\cap\{X=2\})}{P\{X=2\}}=\frac{P(A)\cdot P(X=2|A)}{P(A)P(X=2|A)+P(\bar{A})\cdot P(X=2|\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{3^2}{2!}e^{-3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5^2}{2!}e^{-5}}=\frac{27}{27+25\cdot e^{-2}}.$$

习题 3.4

1. 设随机变量X,Y独立同分布，且$X\sim\begin{pmatrix}0&1\\1-p&p\end{pmatrix}$，令$Z=\begin{cases}1,若X+Y为偶数;\\0,若X+Y为奇数;\end{cases}$，问：$p$取何值时，$X,Z$相互独立？

易知，

X\Y	0	1	
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
	$1-p$	p	

，这里、$P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)$，$i,j=0,1$；

可有：

$X+Y$	0	1	2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

，其中、$P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)$，$P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)$，也可有：

Z	0	1
P	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$

若由X,Z独立、可有，$\{X=0\}$与$\{Z=0\}$独立，即：$P(X=0,Z=0)=P(X=0)\cdot P(Z=0)$

可有：$P(X=0,Y=1)=P(X=0)\cdot P(Z=0)$ 也即：$p(1-p)=(1-p)\cdot 2p(1-p)$，$p=\frac{1}{2}$ ……

2．设随机变量X,Y独立，且$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，试求给定$X+Y=n$时，X的条件分布．注：$X\sim P(\lambda_1)$、$Y\sim P(\lambda_2)$，X、Y独立，$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$．

$\forall k=0,1,\cdots$，$P(X+Y=k)=P(\bigcup\limits_{i=0}^{k}\{X=i,Y=k-i\})=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i)\cdot P(Y=k-i)$

$=\sum\limits_{i=0}^{k}(\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1})\cdot(\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2})=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i\cdot\lambda_1^i\cdot\lambda_2^{k-i}$（二项式公式）$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

即：$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$．$\forall k\in\{0,1,\cdots,n\}$，$P_{X|X+Y}(k|n)=P(X=k|X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$

$=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}$

3．设随机向量(X,Y)具有如下的联合密度：　　即：$X|X+Y=n\sim B(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$．

（1）$f(x,y)=4xy,0<x,y<1$；（2）$f(x,y)=8xy,0<x<y<1$；

试讨论以上两种情形下，X,Y是否独立？（直观上，$4xy$为x、y之互可分离变量，且$0<x,y<1$为矩形域，(1)时X、Y独立），解：设$X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$．

(1)．$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 4xydy=2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$　同理，$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$

可知：$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，$X$、$Y$独立！

(2)．$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2), & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$　　$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xydx=4y^3, & 0<y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$　　可知：X、Y不独立！

4．（1）设$(X,Y)\sim U(D)$，其中$D:x^2+y^2\le 1$，试讨论X,Y的独立性；

（2）设$(X,Y)\sim U(G)$，其中$G=[0,1]\times[0,2]$，试讨论X,Y的独立性．

(2)　$X\sim U[0,1]$、$Y\sim U[0,2]$，且X、Y独立！

(1)．$X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$，

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\cdot\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\le x\le 1;\\ 0, & 其他、\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1\le y\le 1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，$X$、$Y$不独立！

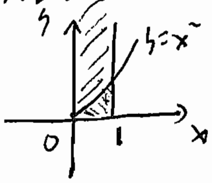
6.（1）设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim U[0,1]$，$Y\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$，

（i）试写出 (X,Y) 的联合密度函数；设 $X\sim f_X(x)$、$Y\sim f_Y(y)$、$(X,Y)\sim f(x,y)$

则：$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & 0\le x\le 1,\ y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（ii）试求“方程 $t^2+2Xt+Y=0$ 有实根”的概率；

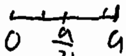
$P\{方程\ t^2+2Xt+Y=0\ 有实根\}=P\{\Delta=4X^2-4Y\geq 0\}=P(Y\le X^2)=\iint\limits_{y\le x^2} f(x,y)dxdy$



$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}dy=\int_0^1[1-e^{-\frac{x^2}{2}}]dx=1-\sqrt{2\pi}\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

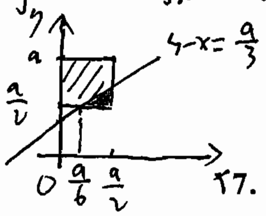
$$=1-\sqrt{2\pi}\cdot[\Phi(1)-\Phi(0)]$$

（2）从长度为 a 的线段的中点两边随机各选取一点，求“两点间距离小于 $\frac{a}{3}$”的概率.



法1：几何概率（几何方法计算） 法2：设两点分别为 X、Y，由题设 $X\sim U[0,\frac{a}{2}]$，$Y\sim U[\frac{a}{2},a]$
且 X、Y 独立，故令 $X\sim f_X(x)$、$Y\sim f_Y(y)$，$(X,Y)\sim f(x,y)$，则：

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{4}{a^2}, & 0\le x\le\frac{a}{2}\le y\le a;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $P\{两点距离小于\frac{a}{3}\}=P(Y-X<\frac{a}{3})$



$$=\iint\limits_{y-x<\frac{a}{3}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{y-x<\frac{a}{3}\\ 0\le x\le\frac{a}{2}\le y\le a}}\frac{4}{a^2}dxdy=\cdots=\frac{\frac{a^2}{18}}{\frac{a^2}{4}}=\frac{2}{9}\ \left(\frac{面积}{面积}\right).$$

7. 试用概率方法证明：$\forall a>0$，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\le\sqrt{1-e^{-a^2}}$.

设 X、Y 独立同 $N(0,1^2)$ 分布，则：$X\sim\varphi(x)$、$Y\sim\varphi(y)$

令 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则：$f(x,y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$，$-\infty<x,y<+\infty$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=P(-a\le X\le a)\cdot P(-a\le Y\le a)=P((X,Y)\in[-a,a]\times[-a,a])$$

$D: x^2+y^2\le 2a^2$

$$\le P((X,Y)\in D)=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2a^2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}[1-e^{-a^2}]d\theta=1-e^{-a^2}$$

则：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\le\sqrt{1-e^{-a^2}}$.

8. 设随机向量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4},-1<x,y<1;\\ 0,其他;\end{cases}$，试证：$X,Y$不独立，但$X^2,Y^2$是独立地。 ①证明：$X$、$Y$不独立！设 $X\sim f_X(x)$、$Y\sim f_Y(y)$，则有 $U(-1,1)$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac12, & -1<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$ 即：$X\sim U(-1,1)$；同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac12, & -1<y<1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 即：$Y\sim U(-1,1)$

即有：$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$，即：$X$、$Y$不独立！

②证：X^2、Y^2独立！ $\forall x,y\in R$. $F_{(X^2,Y^2)}(x,y)=P(X^2\le x,Y^2\le y)=\begin{cases}P(\emptyset)=0, & x<0或y<0;\\ P(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}), & 0\le x<1且y\ge1;\\ P(-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}), & x\ge1且0\le y<1;\\ P(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x},-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}), & 0\le x<1且0\le y<1\\ P(\Omega)=1, & x\ge1且y\ge1;\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & x<0或y<0;\\ \sqrt{x}, & 0\le x<1且y\ge1\\ \sqrt{y}, & x\ge1且0\le y<1;\\ *=\sqrt{xy}, & 0\le x<1且0\le y<1;\\ 1, & x\ge1且y\ge1;\end{cases}$ $*$ — $\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1+st}{4}dtds=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac14 dtds=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{y}}{2}ds=\sqrt{x}$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F_{(X^2,Y^2)}(x,y)=F_{Y^2}(y)$ ----- 或 $F_{X^2}(x)=P(X^2\le x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \sqrt{x}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge1;\end{cases}$

同理. $F_{Y^2}(y)=P(Y^2\le y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \sqrt{y}, & 0\le y<1;\\ 1, & y\ge1;\end{cases}$ 且 $F_{X^2}(x)\cdot F_{Y^2}(y)=F_{(X^2,Y^2)}(x,y)$.

即有：X^2、Y^2独立！

9. 设X_1,X_2,X_3独立，且$X_1,X_2\sim N(0,1^2)$，$X_3\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac12&\frac12\end{pmatrix}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$；
X_1、X_2的随机加权平均

试求(X_1,Y)的联合分布函数，并证明：$Y\sim N(0,1^2)$.

$\forall(x,y)\in R^2$. $F(x,y)=P(X_1\le x,Y\le y)=P(X_1\le x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y)$ (全概率公式)

$=P(X_3=0)P(X_1\le x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y|X_3=0)+P(X_3=1)\cdot P(X_1\le x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y|X_3=1)$

$=\frac12[P(X_1\le x,X_2\le y|X_3=0)+P(X_1\le x,X_1\le y|X_3=1)]$

x, y取较小值

$=\frac12[P(X_1\le x,X_2\le y)+P(X_1\le x,X_1\le y)]=\frac12[P(X_1\le x)\cdot P(X_2\le y)+P(X_1\le x\wedge y)]$

$=\frac12[\Phi(x)\Phi(y)+\Phi(x\wedge y)]=\begin{cases}\frac12[\Phi(x)\Phi(y)+\Phi(x)], & x\le y;\\ \frac12[\Phi(x)\Phi(y)+\Phi(y)], & x>y;\end{cases}$

$\forall y\in R$. $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac12[\Phi(x)\Phi(y)+\Phi(y)]=\frac12[\Phi(+\infty)\Phi(y)+\Phi(y)]=\Phi(y)$. 即：

$Y\sim N(0,1^2)$。或可：$\forall y\in R$. $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y)$

$=P(X_3=0)\cdot P(X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y|X_3=0)+P(X_3=1)\cdot P(X_3X_1+(1-X_3)X_2\le y|X_3=1)$

$=\frac12[P(X_2\le y|X_3=0)+P(X_1\le y|X_3=1)]$

$=\frac12[P(X_2\le y)+P(X_1\le y)]=\frac12[\Phi(y)+\Phi(y)]=\Phi(y)$. 即：$Y\sim N(0,1^2)$

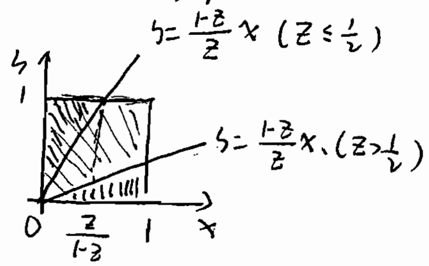
10.（1）设随机变量X,Y独立，且$X\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.25 & 0.75\end{pmatrix}$，试求$P(XY\le 2)$；

$$P(XY\le 2)=P(Y=-1)P(XY\le 2\mid Y=-1)+P(Y=1)\cdot P(XY\le 2\mid Y=1)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot P(X\ge -2\mid Y=-1)+\frac{3}{4}\cdot P(X\le 2\mid Y=1)$$
$$=\frac{1}{4}P(X\ge -2)+\frac{3}{4}P(X\le 2)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot[1-e^{-1}]=1-\frac{3}{4}e^{-1}.$$

（2）设随机变量X,Y独立同$U(0,1)$分布，试求$Z=\dfrac{X}{X+Y}$的分布函数.

由 $R(X)=R(Y)=(0,1)$，所有：$R(Z)=(0,1)$；从而，$\forall z\le 0$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=0$；$\forall z\ge 1$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=1$；$\forall z\in(0,1)$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X}{X+Y}\le z\right)=P((1-z)X\le zY)$

$$=P\left(Y\ge\frac{1-z}{z}X\right)=\begin{cases}\frac{z}{2(1-z)}, & z\le\frac{1}{2};\\ 1-\frac{1-z}{2z}, & z>\frac{1}{2};\end{cases}$$



于：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ \frac{z}{2(1-z)}, & 0<z\le\frac{1}{2};\\ 1-\frac{1-z}{2z}, & \frac{1}{2}<z<1;\\ 1, & z\ge 1;\end{cases}$ Z — c.r.v.

注：X,Y独立同$U(0,1)$分布，$(X,Y)\sim U(D)$，$D=(0,1)\times(0,1)$

11.（1）若随机向量$(X,Y)\sim f(x,y)=ke^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$，$-\infty<x,y<+\infty$，在什么条件下，$X$与$Y$相互独立？ 由 $\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=1$，所有：$a、c>0$.

记 $X\sim f_X(x)$，$Y\sim f_Y(y)$，所有：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=k\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-c(y+\frac{b}{c}x)^2}dy\cdot e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2}$

令 $\sqrt{c}(y+\frac{b}{c}x)=u$ $\quad\frac{k}{\sqrt{c}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du}_{(\sqrt{\pi})}\cdot e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2}=k\cdot\sqrt{\frac{\pi}{c}}\cdot e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2}$，$-\infty<x<+\infty$；同理，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=k\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-(c-\frac{b^2}{a})y^2}$，$-\infty<y<+\infty$. 由 $X、Y$独立，即：

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，即有：

$$k\cdot e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}=k\cdot\sqrt{\frac{\pi}{c}}\cdot e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2}\cdot k\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-(c-\frac{b^2}{a})y^2},\ -\infty<x,y<+\infty$$

所有：$k=\frac{\sqrt{ac}}{\pi}$，$b=0$，$a,c>0$

（2）试问在何条件下，函数 $f(x,y)=k\exp\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}$ 为某二维随机变量的联合密度函数？

法1：由 $\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R^2} k\cdot\exp\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}\,dxdy = 1$. $\forall x,y\in R$, $ax^2+2bxy+cy^2$ $(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}>0$

可有：$a,c>0$, $ac-b^2>0$, …… Jocabi 多换行！

法2：记 $(X,Y)\sim f(x,y)$，且 $X\sim f_X(x)$. 可有：$c>0$.

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = k\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c(y+\frac{b}{c}x)^2}dy\cdot e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2} = \frac{k}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2}$ $-\infty<x<+\infty$

由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$. 可有：$c>0$. $a-\frac{b^2}{c}>0$. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \frac{k}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a-\frac{b^2}{c})x^2}dx$

令 $t=\sqrt{a-\frac{b^2}{c}}\,x$ $\quad \frac{k}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\frac{b^2}{c}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{k\cdot\pi}{\sqrt{ac-b^2}} = 1$. 可有：

$a, c>0$, $ac-b^2>0$, $k=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$.

习题 3.5

1. 设 X,Y 满足 $P(X\geq 0, Y\geq 0)=\frac{3}{7}$，且 $P(X\geq 0)=P(Y\geq 0)=\frac{4}{7}$，试求 $P(\max\{X,Y\}\geq 0)$. 记 $A=\{X\geq 0\}$, $B=\{Y\geq 0\}$. 可有：$P(AB)=\frac{3}{7}$, $P(A)=P(B)=\frac{4}{7}$.

$P(\max\{X,Y\}\geq 0)= P(\{X\geq 0\}\cup\{Y\geq 0\}) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) = \frac{5}{7}$.

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，且 $P(X_i=0)=1-P(X_i=1)=0.6$，$i=1,2,3,4$，试求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$ 的概率分布. 易见，$X=X_1X_4-X_2X_3$. 可有：

$R(X)=\{-1, 0, 1\}$, $P(X=-1)=P(\{X_1X_4=0\}\cap\{X_2X_3=1\}) = P(X_1X_4=0)\cdot P(X_2X_3=1)$

$=[P(X_1=0)+P(X_4=0)-P(X_1=0)P(X_4=0)]\cdot P(X_2=1)\cdot P(X_3=1)$ (独立性)

$= 0.84\times 0.16$.

$P(X=1)=P(\{X_1X_4=1\}\cap\{X_2X_3=0\}) = \cdots = 0.84\times 0.16$

可有：

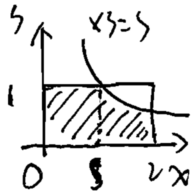
X	-1	0	1
P	0.84×0.16	1-2·0.84·0.16	0.84×0.16

4． 设某一设备装有三个同类的电器元件，各元件工作相互独立，且工作时间服从参数为 λ 的指数分布；当三个元件都正常工作时，设备才正常工作；试求设备正常工作时间 T 的概率分布．记三电器元件的工作时间分别为 X_1, X_2, X_3，由题设知，X_1, X_2, X_3 独立同 $E(\lambda)$ 分布，$T=\min\{X_1,X_2,X_3\}=\bigwedge_{i=1}^{3}X_i$；易见，$R(T)=(0,+\infty)$，故 $\forall t\le 0$，$F_T(t)=P(T\le t)=0$；$\forall t>0$，$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(\bigwedge_{i=1}^{3}X_i>t)$

$=1-P(\bigcap_{i=1}^{3}\{X_i>t\})=1-\prod_{i=1}^{3}P(X_i>t)=1-\prod_{i=1}^{3}e^{-\lambda t}=1-e^{-3\lambda t}$，即：

$$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0;\end{cases}\quad \text{即：} T\sim E(3\lambda).$$

5．（1） 设 $(X,Y)\sim U(D)$，$D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$，试求边长为 X,Y 的矩形面积 S 的概率分布；记 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则有：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其他.\end{cases}$



$S=XY$，$R(S)=[0,2]$，$\forall s\le 0$，$F_S(s)=P(S\le s)=0$；$\forall s\ge 2$，$F_S(s)=1$；

$\forall s\in(0,2)$，$F_S(s)=P(S\le s)=P(XY\le s)=\iint\limits_{xy\le s}f(x,y)\,dx\,dy=\dfrac{s+\int_s^2\frac{s}{x}dx}{2}$

$=\frac{1}{2}[s+s(\ln 2-\ln s)]$，即：$F_S(s)=\begin{cases}0, & s\le 0;\\ \frac{1}{2}[s+s(\ln 2-\ln s)], & 0<s<2;\\ 1, & s\ge 2;\end{cases}$

或由公式 $S\sim f_{XY}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{s}{x})\cdot\frac{1}{|x|}dx=\cdots$ 求出 S 的密度！

（2） 设 X,Y 独立同 $N(0,1^2)$ 分布，则 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布称为瑞利（*Rayleigh*）分布，试求 $P(X^2+Y^2\le 1)$．记 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则有：$f(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$-\infty<x,y<+\infty$

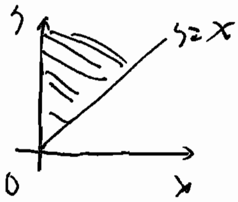
$P(X^2+Y^2\le 1)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)\,dx\,dy \xlongequal{极坐标变换} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,dr$

$=\int_0^1 e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,dr=1-e^{-\frac{1}{2}}$．

6. 设 X,Y 独立，且 $X\sim E(\lambda_1)$，$Y\sim E(\lambda_2)$，若 $P(\min\{X,Y\}>1)=e^{-1}$，$P(X\le Y)=\frac{1}{3}$，试求 λ_1,λ_2. 由 $P(\min\{X,Y\}>1)=P(\{X>1\}\cap\{Y>1\})=P(X>1)\cdot P(Y>1)=e^{-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_2}=e^{-1}$，所有：$\lambda_1+\lambda_2=1$；设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，由 X、Y 独立，

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

所有：$P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y} f(x,y)dxdy$



$$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy=\int_0^{+\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot e^{-\lambda_2 x}dx$$

$$=\lambda_1\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}dx=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{1}{3}；\ \lambda_1=\frac{1}{3},\ \lambda_2=\frac{2}{3}.$$

7.（1）设随机变量 X,Y 独立，且 $P(X=i)=\frac{1}{3}$，$i=-1,0,1$；$Y\sim U[0,1]$，记：$Z=X+Y$，试求：$P\left(Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)$、$Z$ 的概率密度 $f_Z(z)$；$P(Z\le\frac{1}{2}|X=0)=P(X+Y\le\frac{1}{2}|X=0)=P(Y\le\frac{1}{2}|X=0)=P(Y\le\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$；$\forall z\in R$. $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(X=-1)\cdot P(X+Y\le z|X=-1)+P(X=0)\cdot P(X+Y\le z|X=0)+P(X=1)\cdot P(X+Y\le z|X=1)=\frac{1}{3}[P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1)]$（独立）

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(0+0+0)=0, & z<-1;\\ \frac{1}{3}(z+1+0+0)=\frac{1}{3}(z+1), & -1\le z<0;\\ \frac{1}{3}(1+z+0)=\frac{1}{3}(z+1), & 0\le z<1;\\ \frac{1}{3}(1+1+z-1)=\frac{1}{3}(z+1), & 1\le z<2;\\ \frac{1}{3}(1+1+1)=1, & z\ge 2\end{cases}$$

即：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1;\\ \frac{1}{3}(z+1), & -1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2;\end{cases}$ 令 $Z\sim f_Z(z)$，所有

$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 即：$Z\sim U[-1,2]$

（2）设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，$Y\sim f_Y(y)$，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布：$\forall z\in R$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(X=1)\cdot P(X+Y\le z|X=1)+P(X=2)\cdot P(X+Y\le z|X=2)=0.3\cdot P(Y\le z-1|X=1)+0.7\cdot P(Y\le z-2|X=2)=0.3\cdot P(Y\le z-1)+0.7\cdot P(Y\le z-2)=0.3\underset{①}{\int_{-\infty}^{z-1}f_Y(y)dy}+0.7\underset{②}{\int_{-\infty}^{z-2}f_Y(y)dy}\xlongequal[②令 y+2=u]{①令 y+1=u}0.3\int_{-\infty}^{z}f_Y(u-1)du+0.7\int_{-\infty}^{z}f_Y(u-2)du=\int_{-\infty}^{z}[0.3\cdot f_Y(u-1)+0.7f_Y(u-2)]du$，所有：若令 $Z\sim f_{X+Y}(z)$，

所有：$f_{X+Y}(z)=0.3\cdot f_Y(z-1)+0.7\cdot f_Y(z-2)$.

（3）设随机变量X,Y独立，其分布函数分别为：

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ y, & 0\le y<1;\\ 1, & y\ge 1;\end{cases}$$

；试求$Z=X+Y$的概率分布．易见，

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\forall z\in R$, $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(X=0)\cdot P(X+Y\le z|X=0)+P(X=1)\cdot P(X+Y\le z|X=1)$

$=\frac{1}{4}\cdot P(Y\le z|X=0)+\frac{3}{4}P(Y\le z-1|X=1)=\frac{1}{4}P(Y\le z)+\frac{3}{4}P(Y\le z-1)=\frac{1}{4}F_Y(z)+\frac{3}{4}F_Y(z-1)$

$$=\begin{cases}0+0=0, & z<0;\\ \frac{1}{4}F_Y(z)+0=\frac{1}{4}F_Y(z)=\frac{z}{4}, & 0\le z<1;\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}(z-1)=\frac{3}{4}z-\frac{1}{2}, & 1\le z<2;\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1, & z\ge 2\end{cases}$$

即：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{z}{4}, & 0\le z<1;\\ \frac{3}{4}z-\frac{1}{2}, & 1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$ 若令$Z\sim f_Z(z)$.

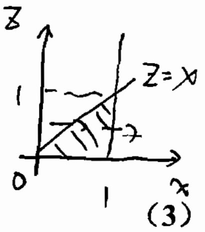
所以：$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<z<1;\\ \frac{3}{4}, & 1\le z<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

8.　（2）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}3x, 0<y<x<1;\\ 0, 其他;\end{cases}$，试求$Z=X-Y$的密度；

设$Z=X-Y\sim f_{X-Y}(z)$，所以：$f_{X-Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx$

$f(x,x-z)>0 \Leftrightarrow 0<x-z<x<1$

$$=\begin{cases}\int_z^1 3x\,dx=\frac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

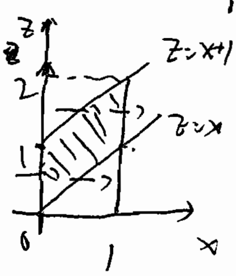


（3）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, 0<x,y<1;\\ 0, 其他;\end{cases}$，试求$Z=X+Y$的密度；

设$Z=X+Y\sim f_{X+Y}(z)$．所以：$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$f(x,z-x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\int_0^z(2-z)dx=z(2-z), & z\in(0,1);\\ \int_{z-1}^1(2-z)dx=(2-z)^2, & z\in[1,+\infty);\\ 0, & z\notin(0,2);\end{cases}$$



改为 $U(0,1)$ $Y=\bigvee_{i=1}^{n}X_i$, $Z=\bigwedge_{i=1}^{n}X_i$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，若 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，且 $X_i \sim E(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n$；求 Y,Z 的分布及其联合分布.

知，$R(Y)=R(Z)=(0,1)$，$\forall y,z \in$ ~~(0,1)~~ R

$$P(Y\le y, Z\le z)=\begin{cases} 0 &, y\le 0 \text{或} z\le 0; \\ P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\le y\})=y^n &, 0\le y<1 \text{且} z\ge 1; \\ 1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>z\})=1-(1-z)^n &, y\ge 1 \text{且} 0<z<1; \\ * &, 0\le y<1 \text{且} 0<z<1; \\ 1 &, y\ge 1 \text{且} z\ge 1; \end{cases}$$

这里，$0<y<1$，$0<z<1$.

$$P(Y\le y, Z\le z)=P(Y\le y)-P(Y\le y, Z>z)=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\le y\})-P(\bigcap_{i=1}^{n}\{z<X_i\le y\})$$

$$=\begin{cases} y^n &, y\le z; \\ y^n-(y-z)^n &, y>z; \end{cases}$$

即：
$$F(y,z)=P(Y\le y, Z\le z)=\begin{cases} 0 &, y\le 0 \text{或} z\le 0; \\ y^n &, 0\le y<1 \text{且} z\ge 1; \\ 1-(1-z)^n &, y\ge 1 \text{且} 0<z<1; \\ y^n &, 0<y\le z<1; \\ y^n-(y-z)^n &, 0<z<y<1; \\ 1 &, y\ge 1 \text{且} z\ge 1 \end{cases}$$

$\forall y\in R$.

$$F_Y(y)=\lim_{z\to+\infty}F(y,z)=\begin{cases} \lim_{z\to+\infty}0=0 &, y\le 0; \\ \lim_{z\to+\infty}y^n=y^n &, 0<y<1; \\ \lim_{z\to+\infty}1=1 &, y\ge 1; \end{cases}$$

也可：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\bigvee_{i=1}^{n}X_i\le y)$

$$=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i\le y\})=\prod_{i=1}^{n}P(\{X_i\le y\})=\begin{cases} 0 &, y\le 0; \\ y^n &, 0<y<1; \\ 1 &, y\ge 1 \end{cases}$$

10.（1）设 X,Y 独立同 $U[0,1]$ 分布，若 $Z=\begin{cases} X+Y, & 0\le X+Y\le 1; \\ (X+Y)-1, & 1<X+Y\le 2; \end{cases}$，试问：$Z$ 服从什么分布？

$$\forall z\in R.\ F_Z(z)=\lim_{y\to+\infty}F(y,z)=\begin{cases} \lim_{y\to+\infty}0=0 &, z\le 0; \\ \lim_{y\to+\infty}[1-(1-z)^n] &, 0<z<1; \\ \lim_{y\to+\infty}1=1 &, z\ge 1. \end{cases}$$

，也可：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(Z>z)=1-P(\bigwedge_{i=1}^{n}X_i>z)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>z\})$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(\{X_i>z\})=1-\cancel{(1-z)^n}=\begin{cases} 1-1=0 &, z\le 0; \\ 1-(1-z)^n &, 0<z<1; \\ 1-0=1 &, z\ge 1; \end{cases}$$

（2）设X,Y独立同$N\left(0,1^2\right)$分布，若$Z=\begin{cases}|Y|, & X\ge 0;\\ -|Y|, & X<0;\end{cases}$，则$Z\sim N\left(0,1^2\right)$.

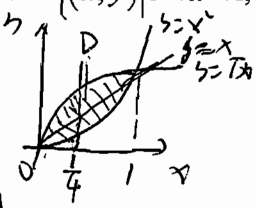
$\forall z\in R$, $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X\ge 0)\cdot P(Z\le z\mid X\ge 0)+P(X<0)P(Z\le z\mid X<0)$

$=\frac{1}{2}[P(|Y|\le z\mid X\ge 0)+P(|Y|\ge -z\mid X<0)]$

$=\frac{1}{2}[P(|Y|\le z)+P(|Y|\ge -z)]=\begin{cases}\frac{1}{2}(\Phi(z)-\Phi(-z))+\frac{1}{2}, & z>0;\\ \frac{1}{2}[1-P(|Y|\le -z)], & z\le 0;\end{cases}$

$=\begin{cases}\Phi(z), & z>0;\\ \Phi(z), & z\le 0;\end{cases}$ 即：$Z\sim N(0,1^2)$

11. 设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$上服从均匀分布，令$U=\begin{cases}1, & X\le Y;\\ 0, & X>Y;\end{cases}$



$S(D)=\int_0^1[\sqrt{x}-x^2]dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

（1）写出(X,Y)的概率密度；

记$(X,Y)\sim f(x,y)$，则有：

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(D)}, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其他;\end{cases}=\begin{cases}3, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）问U与X是否独立？

考虑：$\{U=1\}$与$\{X\le\frac{1}{4}\}$；易见，$P(U=1)=\frac{1}{2}$，$P(X\le\frac{1}{4})=\frac{\int_0^{\frac{1}{4}}(\sqrt{x}-x^2)dx}{\frac{1}{3}}$

$=3\cdot[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}]=\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$，$P(U=1,X\le\frac{1}{4})=\frac{\int_0^{\frac{1}{4}}(\sqrt{x}-x)dx}{\frac{1}{3}}$（几何方法）

$=3\cdot[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}]=\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}\ne\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{64}=P(U=1)\cdot P(X\le\frac{1}{4})$，即：$\{U=1\}$与$\{X\le\frac{1}{4}\}$不独立，则有：$U$与$X$不独立！

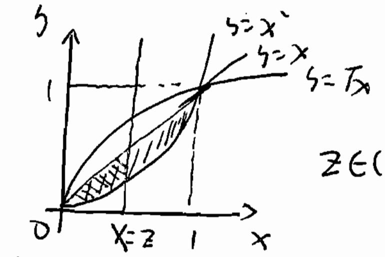
（3）求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

易见，$\forall z\le 0$，$F_Z(z)=0$；$\forall z\ge 2$，$F_Z(z)=1$；$\forall z\in(0,2)$，

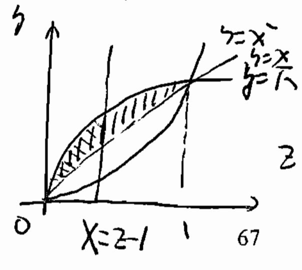
$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(U+X\le z)=P(U=1)\cdot P(U+X\le z\mid U=1)+P(U=0)\cdot P(U+X\le z\mid U=0)$

$=\frac{1}{2}[P(X\le z-1\mid U=1)+P(X\le z\mid U=0)]$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[0+\frac{\int_0^z(x-x^2)dx}{\frac{1}{6}}\right]=\frac{3}{2}z^2-z^3, & z\in(0,1);\\ \frac{1}{2}\left[\frac{\int_0^{z-1}(\sqrt{x}-x)dx}{\frac{1}{6}}+1\right]=2\cdot(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2}, & z\in[1,2)\end{cases}$



$z\in(0,1)$



$z\in[1,2)$.

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为1的指数分布，Y 的概率分布为：

$P(Y=-1)=p, P(Y=1)=1-p, 0<p<1$；令 $Z=XY$，

（1） 求 Z 的概率密度；$\forall z\in R$. $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$

$=P(Y=-1)P(XY\le z|Y=-1)+P(Y=1)\cdot P(XY\le z|Y=1)=p\cdot P(X\ge -z|Y=-1)+(1-p)\cdot P(X\le z|Y=+1)$

$=p\cdot P(X\ge -z)+(1-p)P(X\le z)$ 即：$F_Z(z)=\begin{cases}p+(1-p)(1-e^{-z}), & z>0;\\ p\cdot e^{z}, & z\le 0;\end{cases}$ 令 $Z\sim f_Z(z)$，有：

$=\begin{cases}p+(1-p)(1-e^{-z}), & z>0;\\ p\cdot e^{z}, & z\le 0;\end{cases}$ $f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}(1-p)e^{-z}, & z>0;\\ p\cdot e^{z}, & z\le 0;\end{cases}$

（2） X 与 Z 是否独立？

考虑事件：$\{X>\ln 2\}$ 与 $\{Z>\ln 2\}$. $P(X>\ln 2)=\int_{\ln 2}^{+\infty}e^{-x}dx=\frac{1}{2}$,

$P(Z>\ln 2)=\int_{\ln 2}^{+\infty}f_Z(z)dz=\int_{\ln 2}^{+\infty}(1-p)\cdot e^{-z}dz=(1-p)\cdot\frac{1}{2}$.

$P(X>\ln 2, Z>\ln 2)=P(X>\ln 2, XY>\ln 2)=P(Y=-1)\cdot P(X>\ln 2, XY>\ln 2|Y=-1)+P(Y=1)P(X>\ln 2, XY>\ln 2|Y=1)$

$=(\cancel{1-p})p\cdot P(X>\ln 2, X<-\ln 2|Y=-1)+\cancel{p}(1-p)\cdot P(X>\ln 2, X>\ln 2|Y=1)$

$=(1-p)\cdot P(X>\ln 2|Y=1)=(1-p)\cdot P(X>\ln 2)=(1-p)\cdot\frac{1}{2}\ne P(X>\ln 2)\cdot P(Z>\ln 2)$, $0<p<1$;

即：$\{X>\ln 2\}$ 与 $\{Z>\ln 2\}$ 不独立，所以 X、Z 不独立！

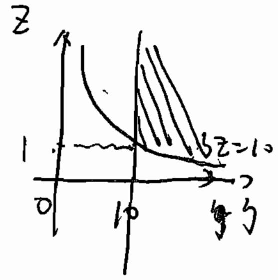
13.（1）设随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{100}{x^2y^2}, & x,y>10;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求

$Z=\frac{X}{Y}$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

回忆：$(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $Z=\frac{X}{Y}\sim f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(yz,y)|y|dy$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(yz,y)\cdot|y|dy=\begin{cases}\int_{\frac{10}{z}}^{+\infty}\frac{100}{y^3z^2}dy=\frac{1}{2}, & z\in(0,1);\\ \int_{10}^{+\infty}\frac{100}{y^3z^2}dy=\frac{1}{2z^2}, & z\in[1,+\infty);\\ 0, & z\le 0;\end{cases}$

$f(yz,y)\cdot|y|>0 \Leftrightarrow \begin{cases}yz>10\\ y>10.\end{cases}$



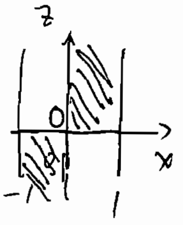
回顾：$(X,Y)\sim f(x,y)$. $XY\sim f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\frac{z}{x})\cdot\frac{1}{|x|}dx \xlongequal{\text{若}X,Y\text{独立}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(\frac{z}{x})\cdot\frac{1}{|x|}dx$

与 $Z=XY\sim f_{XY}(z)$. 所而：$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(\frac{z}{x})\cdot\frac{1}{|x|}dx$

$f_X(x)\cdot f_Y(\frac{z}{x})>0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1;\\ \frac{z}{x}>0\end{cases}$

（2）设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，

$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$；证明：$Z=XY\sim N(0,1^2)$；



$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{z}{x}\cdot e^{-\frac{z^2}{2x^2}}\frac{1}{|x|}dx, & z>0;\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{z}{x}e^{-\frac{z^2}{2x^2}}\cdot\frac{1}{|x|}dx, & z\le0;\end{cases}$

~~$z>0$, $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{z}{x}\cdot e^{-\frac{z^2}{2x^2}}\frac{1}{|x|}dx \xlongequal{\text{令}\frac{z}{x}=t} \int_{+\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{t^2}}}$~~

（见附页）

~~$\xlongequal{\text{令}t=-x}\frac{1}{\pi}\int_1^0\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{z}{t}e^{-\frac{z^2}{2t^2}}\frac{1}{|t|}dt$~~

（3）设随机向量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x,y>0;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，试求 $\frac{X\sim E(1)}{Y\sim E(2)}$

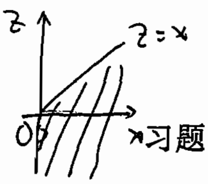
$Z=X-2Y$的密度函数$f_Z(z)$. 法1：公式法：$Z=aX+bY\ (ab\neq0)$

$Z\sim f_{aX+bY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z-ax}{b})\cdot\frac{1}{|b|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{z-by}{a},y)\cdot\frac{1}{|a|}dy$.

$\boxed{\text{法2:}}$ 易见 X、Y独立，且 $X\sim$ ~~$E(1)$~~ $f_X(x)$, $Y\sim f_Y(y)$, $2Y\sim\frac{1}{2}f_Y(\frac{y}{2})$, X, $2Y$独立

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot\frac{1}{2}f_Y(\frac{x-z}{2})\cdot dx=\begin{cases}\int_z^{+\infty}e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\cdot2e^{-(x-z)}dx, & z>0;\\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\cdot2e^{-(x-z)}dx, & z\le0;\end{cases}$

$f_X(x)\cdot f_Y(\frac{x-z}{2})>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \frac{x-z}{2}>0\end{cases}$



$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z}, & z>0;\\ \frac{1}{2}e^{z}, & z\le0;\end{cases}$

习题 4.1

2.（1）设随机变量X的概率密度$f(x)$满足：$f(\mu+x)=f(\mu-x)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

其中μ为常数，$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$收敛；试证明：$EX=\mu$；

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(2\mu-x)dx \xlongequal{\text{令}2\mu-x=t} -\int_{+\infty}^{-\infty}(2\mu-t)\cdot f(t)dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}2\mu f(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=2\mu\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=2\mu-EX=\mu.$

（2）设 $X\sim f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0;\\ 1-x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求 EX；

注意到，① EX 存在

② $f(x)=f(-x)$，基于(1)，$\underline{EX=0}$

（3）设 $X\sim f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-a|}$，$-\infty<x<+\infty$，试求 EX；$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{-|x-a|}dx$

$EX, EX^2, \cdots, EX^n$ 存在

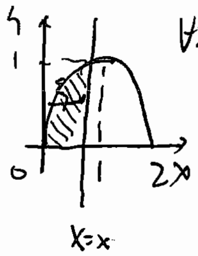
$\overset{令\,x-a=t}{=\!=\!=}\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+t)\cdot e^{-|t|}dt$

$f(a+x)=f(a-x)$，基于(1)，$EX=a$.

$=\frac{1}{2}a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}dt=a\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt$

$=a$

（4）设 G 为曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围区域，在区域 G 内任取一点，该点到 y 轴的距离为 ξ，求 $E\xi$. 解，$R(\xi)=(0,2)$；$\forall x\le 0$，$F_\xi(x)=P(\xi\le x)=0$；$\forall x\ge 2$，$F_\xi(x)=1$；



$\forall x\in(0,2)$，$F_\xi(x)=P(\xi\le x)\ \underline{\underline{几何方法}}\ \frac{\int_0^x(2t-t^2)dt}{\int_0^2(2t-t^2)dt}=\frac{x^2-\frac{1}{3}x^3}{4/3}=\frac{3x^2-x^3}{4}$，

即：$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{3x^2-x^3}{4}, & 0<x<2;\\ 1, & x\ge 2;\end{cases}$ 令 $\xi\sim f_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=\begin{cases}\frac{3(2x-x^2)}{4}, & 0<x<2;\\ 0, & 其他;\end{cases}$

$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_\xi(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3(2x-x^2)}{4}dx=\cdots=1$，由 $f_\xi(1+x)=f_\xi(1-x)$

所以，$E\xi=1$

3.（2）设 $X\sim E(1)$，试求 $E\left(X+e^{-2X}\right)$；

$X\sim f_X(x)$

$\underline{E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f_X(x)dx}$

$E(X+e^{-2X})=EX+E(e^{-2X})$

$=\frac{1}{1}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}\cdot f_X(x)dx$

一维连续型表示性公式(定理)

$=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot 1e^{-x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

（3）设 $X\sim N\left(0,1^2\right)$，试求 $E\left(Xe^{2X}\right)$；

$E(X\cdot e^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{2x}\cdot\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$=\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx}\cdot e^4=2\cdot e^4$

注：若 $X\sim N(2,1^2)$. $X\sim f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

所以 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx=2$.

类似地，$\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}dx=-1$.

$+16b$

$$= \frac{2(a+4b)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a+4b+16b = 39. \quad b=2,\ a=-1.$$

（4）设随机变量 X 有分布函数 $F(x)=a\Phi(x)+b\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$，其中 a,b 为常数，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，且 $EX^2=39$，试求 EX.

由 $F(+\infty)=1$，可有：$a+b=1$；记 $X\sim f(x)$，可有：$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=a\cdot\varphi(x)+b\cdot\varphi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$.

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx = a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx+\frac{b}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)dx \xlongequal{\frac{x-4}{2}=t} a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx+$$

$$\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)^2\varphi(t)\cdot 2dt = a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx+b\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(2x+4)^2\varphi(x)dx$$

$$=(a+4b)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx+16b\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx}_{0}+16b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx}_{1}=(a+4b)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx+16b$$

$$=2(a+4b)\cdot\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+16b \xlongequal{令x=\sqrt{2t}} 2(a+4b)\cdot\int_0^{+\infty}2t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}dt+16b=\frac{2(a+4b)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt+16b$$

$$=\frac{2(a+4b)}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)+16b(2\ldots$$

4.（1）设 $X\sim f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<+\infty$，试求：$E\left[\min\{|X|,1\}\right]$；

$$E[\min\{|X|,1\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}\cdot f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\min\{x,1\}\cdot f(x)dx$$

$$=2\int_0^1\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx+2\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\cdot\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.$$

（2）设 $X\sim f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$，试求：$E\left[\max\{|X|,1\}\right]$.

$$E[\max\{|X|,1\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{|x|,1\}\cdot f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\max\{x,1\}\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$=2\int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x\cdot e^{-x}dx$$

$$=(-e^{-x})\Big|_0^1+(-x-1)e^{-x}\Big|_1^{+\infty}=1-e^{-1}+2e^{-1}=1+e^{-1}.$$

5.（2）游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光。电梯于每个整点的第5分钟、第25分钟和第55分钟从底层起行，假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在 $[0,60]$ 上服从均匀分布，试求该游客的平均等候时间.

设游客的等候时间为 Y (min)，易见，

$$Y=\begin{cases}5-X, & 0\le X\le 5;\\ 25-X, & 5<X\le 25;\\ 55-X, & 25<X\le 55;\\ 60-X+5, & 55<X\le 60\end{cases}\qquad X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 0\le x\le 60;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$记：g(x)=\begin{cases}5-x, & 0\le x\le 5;\\ 25-x, & 5<x\le 25;\\ 55-x, & 25<x\le 55.\\ 65-x, & 55<x\le 60;\end{cases}\qquad 可有：Y=g(X).$$

$$EY=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)dx=\int_0^{60}g(x)\cdot\frac{1}{60}dx=\frac{1}{60}\Big(\int_0^5(5-x)dx$$

$$+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\Big)$$

6.（2） 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上均匀分布的随机变量，而经销商进货数量为区间 $[10,30]$ 中的某一整数，其每销售一单位该商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理一单位亏损 100 元；若供不应求，则从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利 300 元；为使经销商所获利润期望值不少于 9280 元，试确定最少进货量.

商进货

设经销量为 k $(k\in[10,30])$、记 Y 为经销商所获的利润. 由题知，$X\sim U[10,30]$，

$$Y=\begin{cases}500k+300(X-k), & X\geq k;\\ 500X-100(k-X), & X<k;\end{cases}=\begin{cases}300X+200k, & X\geq k;\\ 600X-100k, & X<k;\end{cases}$$ 记 $g(x)=\begin{cases}300x+200k, & x\geq k;\\ 600x-100k, & x<k.\end{cases}$ 可有，

$$Y=g(X).\quad E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f_X(x)dx=\int_{10}^{30}g(x)\cdot\frac{1}{20}dx=\frac{1}{20}\left(\int_{10}^{k}g(x)dx+\int_{k}^{30}g(x)dx\right)$$

$$=\frac{1}{20}\left[\int_{10}^{k}(600x-100k)dx+\int_{k}^{30}(300x+200k)dx\right]=15\cdot(k^2-10^2)-5k(k-10)+\frac{15}{2}\cdot(900-k^2)+10k(30-k)$$

$$=-\frac{15}{2}k^2+350k-1500+15\cdot450\triangleq g(k)$$ 要使 $g(k)\geq 9280$，可：

$$-\frac{15}{2}k^2+350k-1500+15\cdot450-9280\geq 0.$$

7.（1） 一项保险规定最高理赔额为10万元，假定投保人的损失 Y（单位：万元）具有密度函数：$f(y)=\dfrac{2}{y^3}$，$y>1$；试求其平均理赔额.

设保险公司的理赔额为 X（万元）；由题知，$X=\begin{cases}Y, & Y\leq 10;\\ 10, & Y>10;\end{cases}$

记：$g(y)=\begin{cases}y, & y\leq 10;\\ 10, & y>10;\end{cases}$ 可有：$X=g(Y)$

$$EX=E[g(Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\cdot f(y)dy=\int_{1}^{+\infty}g(y)\cdot\frac{2}{y^3}dy=\int_{1}^{10}y\cdot\frac{2}{y^3}dy+\int_{10}^{+\infty}10\cdot\frac{2}{y^3}dy$$

$$=2\cdot\left[1-\frac{1}{10}\right]+10\cdot\left[\frac{1}{100}-0\right]=2-0.2+0.1=1.9.\ (\text{万元})$$

$ET=3,\ T\sim E(\frac{1}{3})$

（2）一台仪器连续地测量与记录遥控地区的地震波，仪器寿命T是均值为3年的指数随机变量；由于前两年仪器没得到监控，实际发现它失效的时间是$U=T\vee 2=\max(T,2)$，试求EU． 设$T\sim f_T(t)$，可有：$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}, & t>0\\ 0, & t\le 0;\end{cases}$

可有：$EU=E(T\vee 2)=\int_{-\infty}^{+\infty}(t\vee 2)\cdot f_T(t)dt=\int_0^{+\infty}(t\vee 2)\cdot\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}dt$

$=\int_0^2 2\cdot\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}dt+\int_2^{+\infty}t\cdot\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}dt=2\cdot(1-e^{-2/3})+3\cdot(-\frac{t}{3}-1)e^{-t/3}\Big|_2^{+\infty}$

$=2(1-e^{-2/3})+3\cdot(\frac{2}{3}+1)\cdot e^{-2/3}=2+3\cdot e^{-2/3}$

8．（1）设$X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，对$X$进行独立重复观测四次，记$Y$为观测值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，试求$EY^2$； $P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=\frac{1}{2}$，故此，$Y\sim B(4,\frac{1}{2})$． $EY=4\cdot\frac{1}{2}=2$． $DY=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$．

$EY^2=DY+(EY)^2=1+4=5$．

（2）设$X\sim f(x)=\begin{cases}2^{-x}\cdot\ln 2, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$，对$X$进行独立重复地观测，直到第二个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测的次数，试求Y的分布及EY．

注：$P(X>3)=\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\,dx=(-2^{-x})\Big|_3^{+\infty}=\frac{1}{8}$．故此，$R(Y)=\{2,3,\cdots\}$

$\forall k\in R(Y)$，$P(Y=k)=C_{k-1}^{1}(\frac{1}{8})^1\cdot(1-\frac{1}{8})^{k-1-1}\cdot(\frac{1}{8})=(k-1)\cdot(\frac{1}{8})^2\cdot(\frac{7}{8})^{k-2}$．

$EY=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot P(Y=k)=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot(k-1)\cdot(\frac{1}{8})^2\cdot(\frac{7}{8})^{k-2}$．

考虑幂级数：$\cancel{S(x)=}\ \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$．可有：$\forall x\in(-1,1)$，$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}(x^k)''$

$=(\sum_{k=2}^{\infty}x^k)''=(\frac{x^2}{1-x})''=[\frac{1-(1-x^2)}{1-x}]''=[\frac{1}{1-x}-1-x]''=(\frac{1}{1-x})''=[\frac{1}{(1-x)^2}]'$

$=\frac{2}{(1-x)^3}$，取$x=\frac{7}{8}$，可有：$\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot(k-1)\cdot(\frac{7}{8})^{k-2}=2\cdot 8^3$，$EY=2\cdot 8=16$．

另法：利用几何分布的无记忆性．$Y=Y_1+Y_2$，Y_1—首次观测到"$X>3$"时观测的次数．

Y_1、Y_2独立同$G(\frac{1}{8})$．$EY=E(Y_1+Y_2)=EY_1+EY_2$ Y_2—第一次与第二次观测到"$X>3$"的

9. 设随机变量X有概率分布：$P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，且在给定$X=i$时，随机变量$Y\sim U(0,i)$，$i=1,2$；试求$EY$. 由题知，$Y|X=i\sim U(0,i)$，$i=1,2$；

$\forall y\in R$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X=1)\cdot P(Y\le y|X=1)+P(X=2)\cdot P(Y\le y|X=2)=\frac{1}{2}[P(Y\le y|X=1)+P(Y\le y|X=2)]$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(0+0)=0, & y\le 0;\\ \frac{1}{2}(y+\frac{y}{2})=\frac{3y}{4}, & 0<y<1;\\ \frac{1}{2}[1+\frac{y}{2}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1\le y<2;\\ \frac{1}{2}(1+1)=1, & y\ge 2;\end{cases}$$

令$Y\sim f_Y(y)$，所以：$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1;\\ \frac{1}{4}, & 1\le y<2;\\ 0, & 其他;\end{cases}$

从而，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{2}+\int_{2}^{+\infty})y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\cdot\frac{1}{4}dy=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$

10.（1）将n只球独立地放入M只盒子中，若每只球放入各只盒子是等可能的，问：平均有多少只盒子有球？记X为有球的盒子数，易见

X	1	2	$\cdots$	$\min\{n,M\}$
P				

$P(X=1)\overset{古典概型}{=\!=}\frac{C_M^1}{M^n}$

$P(X=2)==\frac{??}{M^n}$

$\vdots$

做法一绕过分布求期望. 令$X_i=\begin{cases}1, & 若第i只盒子有球;\\ 0, & 否则;\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,M$；

即有：$X=X_1+X_2+\cdots+X_M$，$EX=E(X_1+X_2+\cdots+X_M)=EX_1+EX_2+\cdots+EX_M$

这里，

X_i	1	0
P	$1-(1-\frac{1}{M})^n$	$(1-\frac{1}{M})^n$

$P(X_i=1)=1-(1-\frac{1}{M})^n$

$P(X_i=0)=\frac{(M-1)^n}{M^n}=(1-\frac{1}{M})^n$

$EX_i=1-(1-\frac{1}{M})^n$，$i=1,2,\cdots,M$；从而，$EX=M\cdot[1-(1-\frac{1}{M})^n]$

（2）一袋中装有60只黑球和40只红球，现从中任取20只，则平均取到多少只红球？记X为取到的红球数，假设将这些球是一一取出（不放回），

记：$X_i=\begin{cases}1, & 若第i次取出红球;\\ 0, & 否则;\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,20$；所以：$X=X_1+X_2+\cdots+X_{20}$，$EX=E(X_1+X_2+\cdots+X_{20})$

$=EX_1+EX_2+\cdots+EX_{20}$；这里，

X_i	1	0
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

且$P(X_i=1)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$（抽签原理，与顺序无关）

$P(X_i=0)=\frac{3}{5}$.

从而，$EX_i=1\times\frac{2}{5}+0\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，$i=1,2,\cdots,20$，$EX=20\times\frac{2}{5}=8$

（3）设随机变量$X\sim B(n,p)$，试由“随机变量的分解法”求EX；

假设做了n次独立重复试验，每次试验“成功”的概率为p，记成功的次数为X，所以：

$X\sim B(n,p)$，令$X_i=\begin{cases}1, & 若第i次试验“成功”;\\ 0, & 否则;\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$；所以

$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，$EX=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n$；

这里，

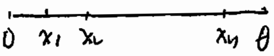
X_i	1	0
P	p	$1-p$

$EX_i=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$；从而，$EX=np$.

（4）求连续独立地掷100颗骰子所得点数之和的数学期望.

记X_i为第i颗骰子掷出的点数，$i=1,2,\cdots,100$；易见，$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$独立同$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & 6\\ \frac16 & \frac16 & \cdots & \frac16\end{pmatrix}$分布，所以：$E(X_1+X_2+\cdots+X_{100})=EX_1+EX_2+\cdots+EX_{100}=100\times(1+2+\cdots+6)\times\frac16=100\times\frac72=350$.

11.（1）设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同$U(0,\theta)$分布，记：$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，试求$EY,EZ$；

猜测一下： $x_1,x_2,\cdots,x_n$将$(0,\theta)$平均分割成$n+1$等分，$EZ=\frac{1}{n+1}\theta$，$EY=\frac{n}{n+1}\theta$.

解：$\forall y\in R$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\bigvee_{i=1}^{n}X_i\le y)=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\le y\})=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ (\frac{y}{\theta})^n, & 0<y<\theta;\\ 1, & y\ge\theta;\end{cases}$

记$Y\sim f_Y(y)$，所以：$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(\frac{y}{\theta})^{n-1}, & 0<y<\theta;\\ 0, & 其他\end{cases}$，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^\theta y\cdot\frac{n}{\theta}(\frac{y}{\theta})^{n-1}dy$

$\xlongequal{令\frac{y}{\theta}=t} n\theta\int_0^1 t^n dt=\frac{n}{n+1}\theta$.

$\forall z\in R$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(Z>z)=1-P(\bigwedge_{i=1}^{n}X_i>z)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>z\})$

$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ 1-(1-\frac{z}{\theta})^n, & 0<z<\theta;\\ 1, & z\ge\theta;\end{cases}$ 令$Z\sim f_Z(z)$，所以$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)$

$=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(1-\frac{z}{\theta})^{n-1}, & 0<z<\theta;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot f_Z(z)dz=\int_0^\theta z\cdot\frac{n}{\theta}\cdot(1-\frac{z}{\theta})^{n-1}dz\xlongequal{令\frac{z}{\theta}=t} n\theta\cdot\int_0^1 t\cdot(1-t)^{n-1}dt$

$\xlongequal{令t=1-x} n\theta\cdot\int_0^1(1-x)x^{n-1}dx=n\theta\cdot[\frac1n-\frac{1}{n+1}]=\frac{1}{n+1}\theta$.

（2）在区间$(0,1)$上随机地取n个点，求相距最远的两点间距离的数学期望；

由(1)的结论：$EX_{(n)}=\frac{n}{n+1}\cdot 1$，$EX_{(1)}=\frac{1}{n+1}\cdot 1$，$E[X_{(n)}-X_{(1)}]=EX_{(n)}-EX_{(1)}=\frac{n-1}{n+1}$.

另法：（提示）：求(Y,Z)的联合密度，再求$Y-Z$的密度，最后求$E(Y-Z)$.

$Y=X_{(n)}$，$Z=X_{(1)}$.

见75附

(3) 系统有n个部件组成，记X_i为第i个部件能持续工作的时间，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同$E(\lambda)$分布，试在以下情况下求系统持续工作的平均时间；

(i) 如果一个部件停止工作，系统就不工作； 记T为系统工作的时间.

解. $T = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

$\boxed{\text{见}P_{76}\text{附}}$

(ii) 如果至少有一个部件在工作，系统就工作.

解. $T = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

12. (1) 设X,Y独立同$N(0,1^2)$分布，试求$E[\max(X,Y)]$；

法1：记$(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $f(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$-\infty<x,y<+\infty$.

$E(X\vee Y)=\iint_{R^2}(x\vee y)\cdot f(x,y)dxdy = 2\iint_{y\le x}(x\vee y)\cdot f(x,y)dxdy = 2\iint_{y\le x} x\cdot f(x,y)dxdy$.

$=2\cdot\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty} r\cos\theta\cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,dr = \frac{\sqrt2}{\pi}\int_0^{+\infty} r^2\cdot e^{-\frac12 r^2}dr = \frac{\sqrt2}{\pi}\int_0^{+\infty} r\cdot e^{-\frac12 r^2}d(\frac{r^2}{2})$ 令 $\frac{r^2}{2}=x$. $r=\sqrt{2x}$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} x^{\frac12}e^{-x}dx = \frac{2}{\pi}\Gamma(\frac32) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac12\Gamma(\frac12) = \frac{1}{\pi}\cdot\sqrt\pi = \frac{1}{\sqrt\pi}$

法2：由 $\max(X,Y)=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$. 所以 $E[\max(X,Y)]=E[\frac{X+Y+|X-Y|}{2}]$

$=\frac12 E|X-Y|$.   因为 $X-Y\sim N(0,2)$. $\frac{X-Y}{\sqrt2}\sim N(0,1^2)$. 记：$Z=\frac{X-Y}{\sqrt2}$.

$Z\sim N(0,1^2)$. $E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\varphi(z)dz = 2\int_0^{+\infty} z\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{\frac2\pi}\cdot\int_0^{+\infty} z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{\frac2\pi}$.

$E|X-Y|=\sqrt2\cdot\sqrt{\frac2\pi}=\frac{2}{\sqrt\pi}$. $E[\max(X,Y)]=\frac{1}{\sqrt\pi}$.

法3：求$X\vee Y$的分布函数，求导得密度函数，再积分求期望.

$N(0,1^2)$

(2) 设X,Y独立同$N(\mu,\sigma^2)$分布，试求$E[\max(X,Y)],E[\min(X,Y)]$.

解，$\frac{X-\mu}{\sigma},\frac{Y-\mu}{\sigma}$ 独立同$N(0,1^2)$分布，   记：$X_1=\frac{X-\mu}{\sigma}$. $Y_1=\frac{Y-\mu}{\sigma}$. X_1,Y_1独立同

$E[\max(\frac{X-\mu}{\sigma},\frac{Y-\mu}{\sigma})\cdot\sigma+\mu]=E[\max(X,Y)]$ (*)

$E[\min(\frac{X-\mu}{\sigma},\frac{Y-\mu}{\sigma})\cdot\sigma+\mu]=E[\min(X,Y)]$.

由(1)的结论，$E(X_1\vee Y_1)=\frac{1}{\sqrt\pi}$

因 $X_1\vee Y_1+X_1\wedge Y_1=X_1+Y_1$,

所以 $E[X_1\vee Y_1]+E[X_1\wedge Y_1]=EX_1+EY_1$,

$E(X_1\wedge Y_1)=-\frac{1}{\sqrt\pi}$.

代入(*)式，可得：$E[\max(X,Y)]=\frac{\sigma}{\sqrt\pi}+\mu$

$E[\min(X,Y)]=-\frac{\sigma}{\sqrt\pi}+\mu$.

习题 4.2

2.（1）试证：$\forall c \neq EX$，$DX = E(X-EX)^2 < E(X-c)^2$；

$\forall c \in R$, $E(X-c)^2 = E[(X-EX)+(EX-c)]^2 = E(X-EX)^2 + E(EX-c)^2 + 2E[(EX-c)(X-EX)]$

$= E(X-EX)^2 + (EX-c)^2 + 2(EX-c)E(X-EX)$

$= E(X-EX)^2 + (EX-c)^2 > E(X-EX)^2 = DX$，$c \neq EX$.

（3） 设随机变量 X 仅在 $[a,b]$ 上取值，试证：$a \le EX \le b$，$DX \le \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.

不妨设 X 为 c.r.v.，$X \sim f(x)$，有：$f(x)=0$，$x \notin [a,b]$

$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_a^b x \cdot f(x)dx \le \int_a^b b \cdot f(x)dx = b \cdot \int_a^b f(x)dx = b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = b$.

同理，可知 $EX \ge a$。由(1)的结论，$DX \le E(X-c)^2$，取 $c = \frac{a+b}{2}$.

有：$E(X-c)^2 = E(X-\frac{a+b}{2})^2 \le E(b-\frac{a+b}{2})^2 = (\frac{b-a}{2})^2$

注：$DX \le (\frac{b-a}{2})^2$，等号成立的条件是？

X	a	b
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$EX = \frac{a+b}{2}$

$EX^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - (\frac{a+b}{2})^2$

$= \frac{(b-a)^2}{4}$

3. 设 $X \sim U(-1,2)$，$Y = \begin{cases} 1, & X>0; \\ 0, & X=0; \\ -1, & X<0; \end{cases}$，试求 DY.

解，

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

$P(\{Y=0\}) = P(X=0) = 0$.

$P(Y=-1) = P(X<0) = \frac{1}{3}$

$EY = (-1)\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. $EY^2 = (-1)^2\times\frac{1}{3} + 1^2\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. $DY = EY^2 - (EY)^2$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

4.（1）设 $X \sim f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0; \\ 1-x, & 0 \le x < 1; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$，试求 $D(3X+2)$；

解、$D(3X+2) = D(3X) = 9 \cdot DX$. 由 $f(x) = f(-x)$. $EX=0$.

$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$.

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{6}$, $D(3X+2) = 9 \cdot DX = \frac{3}{2}$.

5．设 X 有分布函数 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0;\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1;\end{cases}$，试求 DX．

记 $X\sim f(x)$，则 $f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0;\\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

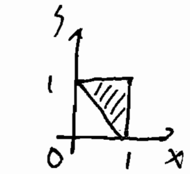
$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\underset{①}{\int_{-\infty}^{0}x\cdot\frac{1}{2}e^{x}dx}+\underset{②}{\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx}\xrightarrow[②令\frac{x-1}{2}=t]{①令x=-t}-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}t\cdot e^{-t}dt+\int_{0}^{+\infty}(t+\frac{1}{2})e^{-t}dt=-\frac{1}{2}\Gamma(2)+\Gamma(2)+\frac{1}{2}\Gamma(1)=1.$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\underset{③}{\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{x}dx}+\underset{④}{\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx}\xrightarrow[④令\frac{x-1}{2}=t]{③令x=-t}\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}t^2\cdot e^{-t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}(2t+1)^2e^{-t}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\Gamma(3)+\frac{1}{2}\cdot[4\cdot\Gamma(3)+4\cdot\Gamma(2)+\Gamma(1)]=1+\frac{1}{2}[8+4+1]=\frac{15}{2}.$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{13}{2}.$$

6．（1）设 $(X,Y)\sim U(D)$，其中 D 是以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域，试求 $D(X+Y)$； 方法有多种，选择：① 求 $X+Y$ 的分布；② 求 $D(X+Y)$：

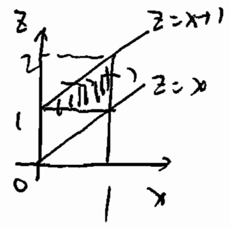


D: $0\le x,y\le 1$, $x+y\ge 1$

记 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其他;\end{cases}$ 令 $X+Y\sim f_{X+Y}(z)$，则

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z-1}^{1}2dx=2(2-z), & z\in(1,2);\\ 0, & z\notin(1,2)\end{cases}$$ ；如图，

$$f(x,z-x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le z-x\le 1\\ x+z-x\ge 1\end{cases}$$



$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot f_{X+Y}(z)dz=\int_{1}^{2}z\cdot 2(2-z)dz$$

$$=(2z^2-\frac{2}{3}z^3)\Big|_{1}^{2}=2\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 7=6-\frac{14}{3}=\frac{4}{3}.$$

$$E(X+Y)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\cdot f_{X+Y}(z)dz=\int_{1}^{2}z^2\cdot 2(2-z)dz$$

$$=(\frac{4}{3}z^3-\frac{1}{2}z^4)\Big|_{1}^{2}=\frac{4}{3}\cdot 7-\frac{1}{2}\cdot 15=\frac{28}{3}-\frac{15}{2}=\frac{11}{6}$$

$$D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2$$

$$=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{33-32}{18}=\frac{1}{18}.$$

（2）设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，试求$DX,DY,E(X+Y)^2$.

$EX=\iint\limits_{R^2}x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 4x^2\cdot x^2dx=\frac{4}{5}.$

$EY=\iint\limits_{R^2}y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 8x\cdot\frac{1}{3}x^3dx=\frac{8}{15}$

$EX^2=\iint\limits_{R^2}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x^2\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 4x^3\cdot x^2dx=\frac{2}{3}$

$EY^2=\iint\limits_{R^2}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y^2\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 2x\cdot x^4dx=\frac{1}{3}.$

$E(XY)=\iint\limits_{R^2}xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x xy\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 8x^2\cdot\frac{1}{3}x^3dx=\frac{4}{9}.$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}$，$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2=\frac{1}{3}-\frac{64}{225}=\frac{11}{225}$.

$E(X+Y)^2=E(X^2+2XY+Y^2)=EX^2+2E(XY)+EY^2=\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+\frac{1}{3}=\frac{17}{9}.$

7.（1）设X,Y独立同$N\left(0,\frac{1}{2}\right)$分布，试求$|X-Y|$的方差；

解，$X-Y\sim N(0-0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=N(0,1^2)$. 记：$Z=X-Y$. $Z\sim N(0,1^2)$

$E|X-Y|=E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\varphi(z)dz=2\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

$E|X-Y|^2=E|Z|^2=EZ^2=DZ+(EZ)^2=1,$

$D|X-Y|=E|X-Y|^2-[E|X-Y|]^2=1-\frac{2}{\pi}.$

（2）设随机向量$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x,y>0;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，若$Z=2X+Y$，试求$DZ$.

解、X、Y独立，且 $X\sim E(2)$，$Y\sim E(1)$. 于是

$DZ=D(2X+Y)=D(2X)+D(Y)=4DX+DY=4\cdot\frac{1}{4}+1=2.$

8.（1）设$X\sim E(1)$，且$Y=X+e^{-2X}$，试求：DY； 由 $X\sim f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$EY=E(X+e^{-2X})=EX+E(e^{-2X})=1+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}\cdot f(x)dx$

$=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$

$EY^2=E(X+e^{-2X})^2=E(X^2+e^{-4X}+2X\cdot e^{-2X})=EX^2+E(e^{-4X})+2E(X\cdot e^{-2X})$

$=2+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-4x}\cdot f(x)dx+2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{-2x}\cdot f(x)dx$

$=2+\int_0^{+\infty}e^{-4x}\cdot e^{-x}dx+2\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-2x}\cdot e^{-x}dx$

$=2+\frac{1}{5}+\frac{2}{3^2}\Gamma(2)=2+\frac{1}{5}+\frac{2}{9}.$ $DY=EY^2-(EY)^2$

$=2+\frac{1}{5}+\frac{2}{9}-\frac{16}{9}=\frac{29}{45}$

(2) 设$X\sim E(1)$，且$Y_1=\begin{cases}1, & X>1\\0, & X\le 1\end{cases}$，$Y_2=\begin{cases}1, & X>2\\0, & X\le 2\end{cases}$，试求：$D(Y_1+Y_2)$.

解.

$Y_1 \backslash Y_2$	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

这里，$\{Y_1=0, Y_2=0\}=\{X\le 1, X\le 2\}=\{X\le 1\}$

$\{Y_1=0, Y_2=1\}=\{X\le 1, X>2\}=\phi$

$\{Y_1=1, Y_2=0\}=\{X>1, X\le 2\}=\{1<X\le 2\}$

所以

Y_1+Y_2	0	1	2
P	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

从而，$E(Y_1+Y_2)=e^{-1}-e^{-2}+2e^{-2}=e^{-1}+e^{-2}$

$E(Y_1+Y_2)^2=1\cdot(e^{-1}-e^{-2})+4e^{-2}=e^{-1}+3e^{-2}$.

$D(Y_1+Y_2)=E(Y_1+Y_2)^2-[E(Y_1+Y_2)]^2$

$=e^{-1}+3e^{-2}-(e^{-1}+e^{-2})^2$

$=e^{-1}+2e^{-2}-2e^{-3}-e^{-4}$

9. 设随机变量$X\sim f(x)=ae^{4x-2x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，试确定a，并求EX,DX及$P(X\le k)$，$k=1,2$.

由 $f(x)=ae^{4x-2x^2}=\cancel{a\cdot e^{-(x-2)^2}}\ a\cdot e^{-2(x-1)^2}\cdot e^2=ae^2\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{2})^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

可知：$X\sim N(1,(\frac{1}{2})^2)$，从而，$a\cdot e^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{2}}$，$a=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2}$. 可知：$EX=1$，$DX=\frac{1}{4}$.

$P(X\le 1)=P(\frac{X-1}{1/2}\le 0)=\phi(0)=\frac{1}{2}$，

$P(X\le 2)=P(\frac{X-1}{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{1/2})=\phi(2)$.

10. 设随机变量X服从拉普拉斯（*Laplace*）分布，且具有概率密度：$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$；(1) 试求 EX,DX；(2) 若 $Y=|X|$，试求EY,DY.

(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=0$，$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2$.

$DX=EX^2-(EX)^2=2$；

(2) $EY=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx=\Gamma(2)=1$.

$EY^2=E(X^2)=2$，

$DY=EY^2-(EY)^2=1$.

习题 4.3

1.（1）连续独立地掷两次骰子，试求其点数之和与点数之差的协方差；

记 X_i 为第 i 次掷出的点数，$i=1,2$；由题可、X_1,X_2 独立同 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ 分布．即有：

$$Cov(X_1+X_2,X_1-X_2)=Cov(X_1,X_1)-Cov(X_1,X_2)+Cov(X_2,X_1)-Cov(X_2,X_2)$$
$$=Cov(X_1,X_1)-Cov(X_2,X_2)=DX_1-DX_2=0.$$

（2）将一枚均匀硬币重复掷 n 次，记 X,Y 分别为正面朝上、反面朝上的次数，试求 X,Y 的协方差与相关系数．易知、X、Y ~~独立~~ $\sim B(n,\frac{1}{2})$，且 $X+Y=n$．

即有：$EX=EY=\frac{n}{2}$，$DX=DY=\frac{n}{4}$；故而，

$$Cov(X,Y)=Cov(X,n-X)=Cov(X,n)-Cov(X,X)=-DX=-\frac{n}{4}；\text{即有：}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{-n/4}{n/4}=-1.$$

另法：由 $X+Y=n$，即：$Y=-X+n$，即有：$P\{Y=-X+n\}=1$．故而，$\rho(X,Y)=-1$．

2.（1）设随机变量 X,Y 独立同参数为0.6的0−1分布，即：$B(1,0.6)$：随机变量 $U=X+Y,V=X-Y$ 不相关也不独立；

① U、V 不相关：易知 $EX=EY=0.6$，$DX=DY=0.24$．即有：

$$Cov(U,V)=Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X,X)-Cov(X,Y)+Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)$$
$$=Cov(X,X)-Cov(Y,Y)=DX-DY=0.$$

② U、V 不独立：考虑事件：$\{U=2\}$ 与 $\{V=0\}$．

$$P(U=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=0.6\cdot 0.6=0.36$$
$$P(V=0)=P(X-Y=0)=P\{(X=1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\}=P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=0)$$
$$=P(X=1)P(Y=1)+P(X=0)P(Y=0)=0.6\cdot0.6+0.4\cdot0.4=0.52.$$
$$P(U=2,V=0)=P(X+Y=2,X-Y=0)=P(X=1,Y=1)=0.36\neq P(U=2)\cdot P(V=0)$$

即：$\{U=2\}$ 与 $\{V=0\}$ 不独立，进而 U、V 不独立！

（2）设随机变量 $X\sim f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，试证：$X$ 与 $|X|$ 不相关也不独立．

① X 与 $|X|$ 不相关：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$，(对称性)

$$E(X\cdot|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x|\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x|\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0.$$

$$Cov(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-EX\cdot E(|X|)=0-0=0.\ \text{即：}X、|X|\text{不相关！}$$

② X 与 $|X|$ 不独立：考虑 $\{X>\ln 2\}$ 与 $\{|X|>\ln 2\}$．

$$P(X>\ln 2)=\int_{\ln 2}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{4},$$
$$P(|X|>\ln 2)=P(X>\ln 2)+P(X<-\ln 2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

而 $P(X>\ln 2,|X|>\ln 2)=P(X>\ln 2)=\frac{1}{4}\neq P(X>\ln 2)\cdot P(|X|>\ln 2)$

即有：$\{X>\ln 2\}$ 与 $\{|X|>\ln 2\}$ 不独立；故而，X、$|X|$ 不独立！

3.（1）设$(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，试求：$P(X<Y)$；

由$\rho=0$，∴ X,Y独立，且同$N(\mu,\sigma^2)$分布；亦即 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$；这里，

$E(X-Y)=EX-EY=0$，$D(X-Y)=DX+DY=2\sigma^2$；故而，$P(X<Y)=P(X-Y<0)$

$=P\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}<0\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

（2）设$(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$，试求：$P(XY-Y<0)$.

由$\rho=0$，即X、Y独立，且 $X\sim N(1,1^2)$，$Y\sim N(0,1^2)$，$X-1\sim N(0,1^2)$

$P(XY-Y<0)=P((X-1)Y<0)=P(X-1<0,Y>0)+P(X-1>0,Y<0)$

$=P(X-1<0)\cdot P(Y>0)+P(X-1>0)\cdot P(Y<0)$

$=\Phi(0)[1-\Phi(0)]+[1-\Phi(0)]\Phi(0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

4.（1）设随机变量X,Y的$DX=DY=2$，相关系数$\rho=\rho(X,Y)=0.25$，试求随机变量$U=2X+Y$和$V=2X-Y$的相关系数；

$Cov(U,V)=Cov(2X+Y,2X-Y)=4Cov(X,X)-Cov(Y,Y)=4DX-DY=6$.

$DU=D(2X+Y)=4DX+DY+4Cov(X,Y)=10+4\cdot\rho(X,Y)\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=12$.

$DV=D(2X-Y)=4DX+DY-4Cov(X,Y)=10-2=8$.

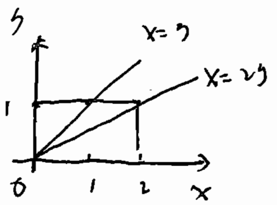
$\rho(U,V)=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=\frac{6}{\sqrt{12\cdot 8}}=\frac{6}{4\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

（2）设二维随机向量$(X,Y)\sim U(G)$，$G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$，记：

$$U=\begin{cases}1, & X>Y;\\ 0, & X\le Y;\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X>2Y;\\ 0, & X\le 2Y;\end{cases}$$

↓ 几何概型 几何方法

试求U,V的相关系数.



易知，

U \ V	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

其中，$P(U=0,V=0)$

$=P(X\le Y,X\le 2Y)$

$=P(X\le Y)=\frac{1}{4}$

故而，

U	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$EU=\frac{3}{4}$，$DU=\frac{3}{16}$；

V	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$EV=\frac{1}{2}$，$DV=\frac{1}{4}$.

UV	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

，这里，$\{UV=1\}=\{U=1\}\cap\{V=1\}$，$E(UV)=\frac{1}{2}$；

故而，$\rho(U,V)=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=\frac{E(UV)-EU\cdot EV}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. 设 a 为 $(0,1)$ 内的一个定点，随机变量 $X\sim U(0,1)$，以 Y 表示 X 到点 a 的距离，试问：a 为何值时，X 与 Y 不相关？ 易见，$Y=|X-a|$.

$EY=E|X-a|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|\cdot f_X(x)dx=\int_0^1|x-a|dx=\int_0^a(a-x)dx+\int_a^1(x-a)dx$

$=a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2-a+a^2=a^2-a+\frac{1}{2}$;

$E(XY)=E(X\cdot|X-a|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x-a|f_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot|x-a|\cdot dx=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx$

$=\frac{a^3}{2}-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$. 由 X、Y 不相关，可：

$E(XY)=EX\cdot EY$. 可有，$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(a^2-a+\frac{1}{2})$，即：$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{12}=0$

即：$4a^3-6a^2+1=0$. $4a^3-2a^2-(4a^2-1)=2a^2(2a-1)-(2a+1)(2a-1)=(2a^2-2a-1)(2a-1)=0$

$a=\frac{1}{2}$（其他舍去）

6.（2）设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{1}{2}xy\right), & 0<x<1,0<y<2;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求 X,Y 的协方差与相关系数.

$EX=\iint_{R^2}x\cdot f(x,y)dxdy=\frac{6}{7}\int_0^1 x^2dx\int_0^2(x+\frac{1}{2}y)dy=\frac{6}{7}\int_0^1 x^2\cdot(2x+1)dx=\frac{6}{7}\times[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}]=\frac{5}{7}$;

$EY=\iint_{R^2}y\cdot f(x,y)dxdy=\frac{6}{7}\int_0^1 xdx\int_0^2 y\cdot(x+\frac{1}{2}y)dy=\frac{6}{7}\int_0^1 x\cdot(2x+\frac{4}{3})dx=\frac{6}{7}\times[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}]=\frac{8}{7}$.

$EX^2=\iint_{R^2}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\frac{6}{7}\int_0^1 x^3dx\int_0^2(x+\frac{1}{2}y)dy=\frac{6}{7}\int_0^1 x^3\cdot(2x+1)dx=\frac{6}{7}\times[\frac{2}{5}+\frac{1}{4}]=\frac{39}{70}$;

$EY^2=\iint_{R^2}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\frac{6}{7}\int_0^1 xdx\int_0^2 y^2(x+\frac{1}{2}y)dy=\frac{6}{7}\int_0^1 x\cdot(\frac{8}{3}x+2)dx=\frac{6}{7}\times[\frac{8}{9}+1]=\frac{34}{21}$;

$E(XY)=\iint_{R^2}xy\cdot f(x,y)dxdy=\frac{6}{7}\int_0^1 x^2dx\int_0^2 y(x+\frac{1}{2}y)dy=\frac{6}{7}\int_0^1 x^2\cdot(2x+4/3)dx=\frac{6}{7}\times[\frac{1}{2}+\frac{4}{9}]=\frac{17}{21}$.

$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=\frac{17\times7-120}{3\times7\times7}=-\frac{1}{147}$,

$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{1}{147}}{\sqrt{\frac{23}{7\times7\times10}\times\frac{46}{7\times7\times3}}}$，这里，$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{39}{70}-(\frac{5}{7})^2=\frac{23}{7\times7\times10}$

$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{34}{21}-(\frac{8}{7})^2=\frac{46}{7\times7\times3}$

$=-\frac{\sqrt{15}}{23}$

7.（1）设随机变量 X,Y 间有线性函数关系：$Y=aX+b$，且 X 的方差存在，试求 X,Y 的相关系数 ρ；

由 $Y=aX+b$，可有：$Cov(X,Y)=Cov(X,aX+b)=aCov(X,X)+Cov(X,b)$

$=aDX$,

$DY=D(aX+b)=D(aX)=a^2DX$. 总而，

$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{aDX}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{a^2DX}}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1, & a>0;\\ -1, & a<0;\end{cases}$

可话：$Y=aX+b,\ a>0 \Longrightarrow \rho=1$.

$Y=aX+b,\ a<0 \Longrightarrow \rho=-1$.

回忆：$\rho=1 \Leftrightarrow Y=aX+b,\ a.s.\ a>0$.

$\rho=-1 \Leftrightarrow Y=aX+b,\ a.s.\ a<0$

（2）设随机变量$X\sim U\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$Y=\cos X$，则$Y$与$X$有（非线性）函数关系，试证：$X,Y$不（线性）相关，即无线性关系. 记 $X\sim f_X(x)$，则

$EX=0$，$E(XY)=E[X\cdot\cos X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\cos x\cdot f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}dx=0$.

可有：$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0-0=0$. 即：$X$、$Y$不(线性)相关！

9．设随机变量$X\sim N(0,1^2)$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，且$X,Y$相互独立，令$Z=XY$，试证：

（1）$Z\sim N(0,1^2)$；（2） X,Z不相关也不独立.

(1) $\forall z\in R$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)=P(Y=-1)\cdot P(XY\le z|Y=-1)+P(Y=1)\cdot P(XY\le z|Y=1)$

$=\frac{1}{2}[P(X\ge -z|Y=-1)+P(X\le z|Y=1)]$

$=\frac{1}{2}[P(X\ge -z)+P(X\le z)]$

$=\frac{1}{2}[1-\Phi(-z)]+\frac{1}{2}\Phi(z)=\Phi(z)$，即：$Z\sim N(0,1^2)$

(2) ① X、Z不相关：$EX=0$，$EZ=0$，$E(XZ)=E(X\cdot XY)=E(X^2Y)$ (X、Y独立)

$=EX^2\cdot EY=1\cdot 0=0$ 可有：$Cov(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=0-0=0$

即：X、Z不相关！

② X、Z不独立：考虑：$\{X\le 1\}$与$\{Z\le 1\}$.

由X、$Z\sim N(0,1^2)$，$P(X\le 1)=P(Z\le 1)=\Phi(1)=0.8413$

⑩ 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$中任意两个的相关系数都是ρ，试证：$\rho\ge-\frac{1}{n-1}$.（见P84附页）

$P(X\le 1,Z\le 1)=P(X\le 1,XY\le 1)$

$=P(Y=-1)\cdot P(X\le 1,XY\le 1|Y=-1)+P(Y=1)\cdot P(X\le 1,XY\le 1|Y=1)$

$=\frac{1}{2}[P(X\le 1,X\ge -1|Y=-1)+P(X\le 1|Y=1)]$

$=\frac{1}{2}[P(-1\le X\le 1)+P(X\le 1)]=\frac{1}{2}[\Phi(1)-\Phi(-1)+\Phi(1)]$

$=\frac{1}{2}[3\Phi(1)-1]=\frac{1}{2}[3\cdot 0.8413-1]=\ne P(X\le 1)\cdot P(Z\le 1)$

可以如下验证：若记$\Phi(1)=x$，若$P(X\le 1,Z\le 1)=P(X\le 1)\cdot P(Z\le 1)$，即：

$\frac{1}{2}(3x-1)=x^2$，即：$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{2}$或$x=1$，与$\Phi(1)=0.8413$矛盾；

即：$\{X\le 1\}$与$\{Z\le 1\}$不独立 即，X、Z不独立！

11．（1）某班级共有n名新生，班长从辅导员处领来全班所有的学生证，随机地发给每一名学生，试求恰好拿到自己学生证的人数X的数学期望与方差；

设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{若第}i\text{名新生拿到自己的学生证；}\\ 0, & \text{否则；}\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$； 即有：$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，$EX=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n$；这里，

X_i	1	0
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

，其中，$P(X_i=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$，$EX_i=\frac{1}{n}$，$EX=1$，

$DX_i=\cancel{\frac{1}{n(n-1)}}\ \frac{n-1}{n^2}$

$DX=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)=n\cdot\frac{n-1}{n^2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\left(E(X_iX_j)-EX_i\cdot EX_j\right)$

这里，

$X_i \backslash X_j$	1	0
1	$\frac{1}{n(n-1)}$	*
0	*	*

，

X_iX_j	1	0
P	$\frac{1}{n(n-1)}$	*

，其中，$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)$

$=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$

$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}$；从而，$DX=\frac{n-1}{n}+2\sum_{1\le i<j\le n}\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}\right]$

$=\frac{n-1}{n}+n(n-1)\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}\right]=1-\frac{1}{n}+1-\frac{n-1}{n}=1$

（2）袋中有n张卡片，分别标有号码$1,2,\cdots,n$；从中不放回地抽出k张卡片，设ξ表示所抽出的号码之和，试求$E\xi$与$D\xi$．

记：ξ_i为第i次抽出的卡片号码，$i=1,2,\cdots,k$；即有：$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k$；且由

抽签原理（Polya模型），$\xi_i\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$；从而，$E\xi_i=(1+2+\cdots+n)\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$，

$E\xi=\sum_{i=1}^{k}E\xi_i=\frac{k(n+1)}{2}$；由于 $i\ne j$，$P(\xi_i=s,\xi_j=t)=\begin{cases}\frac{1}{n(n-1)}, & s\ne t，\\ 0, & s=t；\end{cases}$

即有：$i\ne j$，$E(\xi_i\xi_j)=\sum_{s}\sum_{t\ne s}s\cdot t\cdot\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}st-\sum_{s=1}^{n}s^2\right]$

$=\frac{1}{n(n-1)}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{1}{n(n-1)}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\frac{3n(n+1)-(4n+2)}{12}=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$

$Cov(\xi_i,\xi_j)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=-\frac{n+1}{12}$；从而，

$D\xi=D(\sum_{i=1}^{k}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i+\cancel{2Cov}\ 2\sum_{1\le i<j\le k}Cov(\xi_i,\xi_j)$

$=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}\right]+2\sum_{1\le i<j\le k}\left(-\frac{n+1}{12}\right)$

$=\frac{(n+1)k(n-k)}{12}$

注意到：$\max(a,b) = a\vee b = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

$EX^2=EY^2=1$

12. 设二维随机向量(X,Y)满足：$EX=EY=0$，$DX=DY=1$，$Cov(X,Y)=\rho$，

试证：$E\left[\max\left(X^2,Y^2\right)\right]\le 1+\sqrt{1-\rho^2}$.

$$E[X^2\vee Y^2]=E\left[\frac{X^2+Y^2+|X^2-Y^2|}{2}\right]=1+\frac{1}{2}E|X^2-Y^2|=1+\frac{1}{2}E(|X+Y|\cdot|X-Y|)\ \underset{\text{Cauchy不等式}}{\le}$$

$$1+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{E(|X+Y|^2)\cdot E(|X-Y|^2)}=1+\frac{1}{2}\sqrt{E(X+Y)^2\cdot E(X-Y)^2}=1+\frac{1}{2}\sqrt{(EX^2+EY^2+2EXY)(EX^2+EY^2-2E\cdots}$$

$$=1+\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\rho)\cdot 2(1-\rho)}=1+\sqrt{1-\rho^2}.$$

13.（1） 设$DX,DY>0$，$\rho=\rho(X,Y)$，则

$$\min_{a,b\in R}E\left[Y-(aX+b)\right]^2=DY\cdot\left(1-\rho^2\right);$$

由此亦可见相关系数ρ刻划了随机变量X,Y的线性关系的强弱；

$$E[Y-(aX+b)]^2=E[(Y-EY)-a(X-EX)+(EY-aEX-b)]^2=E\{(Y-EY)^2+a^2(X-EX)^2+(EY-aEX-b)^2$$
$$-2a(X-EX)(Y-EY)+\underline{2(EY-aEX-b)(Y-EY)}-\underline{2a(EY-aEX-b)(X-EX)}\}$$ ～～ 易知期望为0

$$=E(Y-EY)^2+a^2E(X-EX)^2+(EY-aEX-b)^2-2a\cdot Cov(X,Y)$$
$$=DY+a^2DX+(EY-aEX-b)^2-2a\rho\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$$
$$=DY\cdot(1-\rho^2)+(a\cdot\sqrt{DX}-\rho\cdot\sqrt{DY})^2+(EY-aEX-b)^2\geqslant DY\cdot(1-\rho^2)$$

当等号成立当且仅当 $\begin{cases}a\cdot\sqrt{DX}=\rho\cdot\sqrt{DY}\\ EY=aEX+b\end{cases}$.

（4） 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=cxe^{-y}$，$0<x<y<+\infty$；试求：$P\left(X<1\middle|Y=2\right)$ 及 $E\left[Y-(aX+b)\right]^2$的最小值.

由上述(1)，$\min\limits_{a,b\in R}E[Y-(aX+b)]^2=DY\cdot(1-\rho^2)$，由 $\iint_{R^2}f(x,y)dxdy=\iint_{0<x<y}cxe^{-y}dxdy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}cxe^{-y}dy=\int_0^{+\infty}cxe^{-x}dx=1$，$C=1$；设 $Y\sim f_Y(y)$，可有 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$=\begin{cases}\int_0^y xe^{-y}dx, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}=\begin{cases}\frac{y^2}{2}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$ $\forall y>0$，令 $X|Y=y\sim f_{X|Y}(x|y)$，可有

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0<x<y;\\ 0, & 其他;\end{cases}$ $y>0$；也即有：$f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 从而

$P(X<1|Y=2)=\int_{-\infty}^{1}f_{X|Y}(x|2)dx=\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}$. $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{y^2}{2}e^{-y}dy=\frac{1}{2}\Gamma(4)=3$.

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{y^4}{2}e^{-y}dy=\frac{1}{2}\Gamma(5)=12$，$DY=EY^2-(EY)^2=3$，已知，$EX=\iint_{R^2}x\cdot f(x,y)dxdy=\iint_{0<x<y}x^2e^{-y}dxdy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}x^2e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$，$EX^2=\iint_{R^2}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\iint_{0<x<y}x^2\cdot xe^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}x^3e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}x^3\cdot e^{-x}dx=6$

$DX=EX^2-(EX)^2=2$. $E(XY)=\iint_{R^2}xy\cdot f(x,y)dxdy=\iint_{0<x<y}xy\cdot xe^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y x^2ye^{-y}dx=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}y^4e^{-y}dy=8$

$Cov(X,Y)$ $8-6$ …

14.（1）掷一颗均匀的骰子直到所有六个点数全部出现为止，试求所需投掷次数 Y 的数学期望与方差；

记 Y_1 为出现第1个点所掷的次数，Y_i 为掷出第 $i-1$ 个不同点后至得到第 i 个不同点出现掷出的次数，$i=2,3,4,5,6$；易见，$Y_1=1$，$Y_2\sim G(\frac{5}{6})$，$Y_3\sim G(\frac{4}{6})$，$Y_4\sim G(\frac{3}{6})$，$Y_5\sim G(\frac{2}{6})$，$Y_6\sim G($

且 Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6 独立，$Y=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5+Y_6$. 可有.

$$EY=EY_1+EY_2+EY_3+EY_4+EY_5+EY_6=1+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+6$$
$$=1+1.2+1.5+2+3+6=14.7,$$

$$DY=DY_1+DY_2+DY_3+DY_4+DY_5+DY_6=0+\frac{6}{25}+\frac{3}{4}+2+6+30=38.99.$$

---

(2) 易见，$X\sim B(n,\frac{1}{6})$、$Y\sim B(n,\frac{1}{6})$，$EX=EY=\frac{n}{6}$，$DX=DY=\frac{5n}{36}$，$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$.

令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{若第}i\text{次掷出“3”点；}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$ $Y_j=\begin{cases}1, & \text{若第}j\text{次掷出“5”点；}\\ 0, & \text{否则；}\end{cases}$ $i,j=1,2,\cdots,n$；可有：

$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y=\sum_{j=1}^{n}Y_j$，从而，~~Cov(X,Y)~~ $E(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(X_iY_j)$. 若 $i=j$，$X_iY_j=0$.

$E(X_iY_j)=0$. 故 $E(XY)=2\cdot\sum_{1\le i<j\le n}E(X_iY_j)$，通过

$$=2\sum_{1\le i<j\le n}EX_i\cdot EY_j=2\cdot\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)}{36}$$ 从而，$Cov(X,Y)=\frac{n(n-1)}{36}-\frac{n}{6}\cdot\frac{n}{6}=-\frac{n}{36}$.

（2）连续独立地掷一颗均匀的骰子 n 次，试求“3”点和“5”点出现次数 X,Y 的协方差及相关系数.

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{n}{36}}{\frac{5n}{36}}=-\frac{1}{5}.$$

习题 4.4

3.（1）设随机向量(X,Y)的协方差矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，试求$U=X-2Y$和$V=2X-Y$的相关系数；易知，$DX=1$，$DY=4$，$Cov(X,Y)=1$，故，

$$Cov(U,V)=Cov(X-2Y,2X-Y)=2Cov(X,X)-Cov(X,Y)-4Cov(Y,X)+2Cov(Y,Y)$$
$$=2DX-5Cov(X,Y)+2DY=5$$
$$DU=D(X-2Y)=DX+4DY-4Cov(X,Y)=13.$$
$$DV=D(2X-Y)=4DX+DY-4Cov(X,Y)=4.$$
$$\rho(U,V)=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=\frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

（2）设随机向量$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x,y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，试求$(X,Y)$的协方差矩阵.

$$EX=\iint_{R^2}x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1 6x^2y^2dy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$
$$EX^2=\iint_{R^2}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1 6x^3y^2dy=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2},\quad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18};$$
$$EY=\iint_{R^2}y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1 6xy^3dy=\int_0^1 \frac{3}{2}xdx=\frac{3}{4},$$
$$EY^2=\iint_{R^2}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\cdot\int_0^1 6xy^4dy=\int_0^1 \frac{6}{5}xdx=\frac{3}{5},\quad DY=EY^2-(EY)^2=\frac{3}{80}$$
$$E(XY)=\iint_{R^2}xy\,f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1 6x^2y^3dx=\frac{1}{2}=EX\cdot EY\ (可以证明：X,Y独立).$$
$$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0.\quad 故协方差矩阵\ \Sigma=\begin{pmatrix}\frac{1}{18} & 0\\ 0 & \frac{3}{80}\end{pmatrix}.$$

4. 两支股票A和B，在一个给定时期内的收益率R_A,R_B均为随机变量，且R_A,R_B的协方差阵为：$V=\begin{pmatrix}16 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$，现将一笔资金按比例$x,1-x$分别投资于股票$A,B$，从而形成一个投资组合$\Pi$，记其收益率为$R_\Pi$；

（1）求R_A,R_B的相关系数；（2）求$D(R_\Pi)$.

（1）由$D(R_A)=16$，$D(R_B)=9$，$Cov(R_A,R_B)=6$，即有：

$$\rho(R_A,R_B)=\frac{Cov(R_A,R_B)}{\sqrt{DR_A}\cdot\sqrt{DR_B}}=\frac{6}{4\cdot 3}=\frac{1}{2};$$

（2）由题设，$R_\Pi=x\cdot R_A+(1-x)R_B$，即有：

$$D(R_\Pi)=D[x\cdot R_A+(1-x)\cdot R_B]$$
$$=x^2\cdot D(R_A)+(1-x)^2\cdot D(R_B)+2x\cdot(1-x)\cdot Cov(R_A,R_B)$$
$$=16x^2+9(1-x)^2+2x\cdot(1-x)\cdot 6$$
$$=13x^2+6x+9.$$

5. 设随机向量$(X,Y)\sim f(x,y)=\dfrac{2}{\pi\left(1+x^2+y^2\right)^3}$，$-\infty<x,y<+\infty$，试求$EX,EY$及协方差阵.

$EX=\iint_{R^2} x\cdot f(x,y)dxdy$ (由对称性) $=0$，同理，$EY=\iint_{R^2} y\cdot f(x,y)dxdy=0$、

$EX^2=\iint_{R^2} x^2\cdot f(x,y)dxdy$，$EY^2=\iint_{R^2} y^2 f(x,y)dxdy$，由轮换对称性，

$EX^2=EY^2=E\left(\frac{X^2+Y^2}{2}\right)=\iint_{R^2}\frac{x^2+y^2}{2}\cdot f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\iint_{R^2}\frac{x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^3}dxdy$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}\frac{r^3}{(1+r^2)^3}dr=2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{r^3}{(1+r^2)^3}dr\ \underline{\underline{\text{令}x=r^2}}\ \int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right)dx$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. $DX=DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{2}$.

$E(XY)=\iint_{R^2}xy\cdot f(x,y)dxdy$ (由对称性) $=0$. $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$.

协方差矩阵 $\Sigma=\begin{pmatrix}DX & Cov(X,Y)\\ Cov(X,Y) & DY\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

习题 5.1

1.（3）设$X\sim N\left(1,1^2\right)$，$Y\sim N\left(0,1^2\right)$，且$E(XY)=-0.1$，试由切比雪夫不等式估计$P(-4<X+2Y<6)$；

$E(X+2Y)=EX+2EY=1$；$D(X+2Y)=DX+4DY+4Cov(X,Y)$

$=DX+4DY+4E(XY)-4EX\cdot EY=4.6$. 由 Chebyshev 不等式，

$P(-4<X+2Y<6)=P(|(X+2Y)-E(X+2Y)|<5)=1-P(|(X+2Y)-E(X+2Y)|\geq 5)$

$\geq 1-\frac{D(X+2Y)}{5^2}=1-\frac{4.6}{25}=1-0.184=0.816$.

（4）设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，且$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots,n$；对于$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，试由切比雪夫不等式估计$P\left(\mu-2<\overline{X}<\mu+2\right)$.

易见，$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{\sigma^2}{n}$；$P(\mu-2<\overline{X}<\mu+2)=P(|\overline{X}-\mu|<2)$

$=1-P(|\overline{X}-\mu|\geq 2)=1-P(|\overline{X}-E(\overline{X})|\geq 2)\geq 1-\frac{D\overline{X}}{2^2}=1-\frac{\sigma^2}{4n}$

2. 设随机变量$X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leq 0;\end{cases}$，$m\in\mathrm{N}$，试证：

$$P\left(0<X<2(m+1)\right)\geq\frac{m}{m+1}.$$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx=\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+1}\cdot e^{-x}dx=\frac{1}{m!}\Gamma(m+2)=\frac{(m+1)!}{m!}=m+1$.

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx=\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+2}\cdot e^{-x}dx=\frac{1}{m!}\Gamma(m+3)=\frac{(m+2)!}{m!}=$

$(m+2)(m+1)$，$DX=EX^2-(EX)^2=m+1$；由 Chebyshev 不等式，

$P(0<X<2(m+1))=P(|X-(m+1)|<m+1)=1-P(|X-EX|\geq m+1)\geq 1-\frac{DX}{(m+1)^2}$

$=1-\frac{m+1}{(m+1)^2}=1-\frac{1}{m+1}=\frac{m}{m+1}$.

3. 设在每次试验中，事件 A 发生的概率均为 0.75，试求 n 需多大时才能使得 n 次独立重复试验中事件 A 发生的频率在 $0.74\sim0.76$ 之间的概率至少为 0.90？

记 X 为 n 次试验中 A 发生的次数；易见，$X\sim B(n, 0.75)$，$EX=0.75n$，$DX=0.75n\times0.25$

以而，发 $P(0.74<\frac{X}{n}<0.76)=P(|X-0.75n|<0.01n)=1-P(|X-EX|\geq 0.01n)$

$$\geq 1-\frac{DX}{(0.01n)^2}=1-\frac{75\times25}{n}\geq 0.90$$

即有：$n\geq 75\times250=18750$.

4. 设随机序列 $\{X_n, n\geq1\}$ 独立同 $U(0,a)$ 分布，$a>0$ 为常数，则有：

$$Y_n=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\xrightarrow{P}a\ .$$

$\forall\varepsilon>0\,(<a)$. $P(|Y_n-a|\geq\varepsilon)=$ ~~$P(\{Y_n<a+\varepsilon\}\cup\{Y_n>a-\varepsilon\})=P(Y_n\geq a+\varepsilon)=1-P(Y_n\leq a+\varepsilon$~~

$=\cancel{P(\bigcup_{i=1}^{n}X_i}=P(\{Y_n\geq a+\varepsilon\}\cup\{Y_n\leq a-\varepsilon\})=P(Y_n\leq a-\varepsilon)=P(\bigvee_{i=1}^{n}X_i\leq a-\varepsilon)$

$=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\leq a-\varepsilon\})=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq a-\varepsilon)=\prod_{i=1}^{n}(\frac{a-\varepsilon}{a})=(1-\frac{\varepsilon}{a})^n\to0$ ，$n\to\infty$

即有：$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-a|\geq\varepsilon)=0$，也即：$Y_n\xrightarrow{P}a$.

5.（1）如果 $X_n\xrightarrow{P}a$，则 $\forall c\in R$，$cX_n\xrightarrow{P}ca$； 不妨设 $c>0$（<0 时类似）.

$\forall\varepsilon>0$，由 $P(|cX_n-ca|\geq\varepsilon)=P(c\cdot|X_n-a|\geq\varepsilon)=P(|X_n-a|\geq\frac{\varepsilon}{c})\to0$ ，$n\to\infty$

即：$cX_n\xrightarrow{P}ca$.

（2）如果 $X_n\xrightarrow{P}X$ 且 $X_n\xrightarrow{P}Y$，则 $P(X=Y)=1$，即：$X=Y, a.s.$；

$\forall\varepsilon>0$，$P(|X-Y|\geq\varepsilon)=P(|X-X_n+X_n-Y|\geq\varepsilon)\leq P(\{|X-X_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})$

$\leq P(|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2})+P(|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to0+0=0$ ，$n\to\infty$

由 ε 的任意性，$P(|X-Y|\neq0)=P(X\neq Y)=0$，即：$P(X=Y)=1$，也即：$X=Y, a.s.$.

注：$\forall c>0$，若 $|a+b|>c$，则必有 $|a|>\frac{c}{2}$ 或 $|b|>\frac{c}{2}$.

（3）如果 $X_n\xrightarrow{P}X$，$Y_n\xrightarrow{P}Y$，则 $X_n+Y_n\xrightarrow{P}X+Y$；

$\forall\varepsilon>0$，由 $P(|(X_n+Y_n)-(X+Y)|\geq\varepsilon)=P(|(X_n-X)+(Y_n-Y)|\geq\varepsilon)$

$\leq P(|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2})+P(|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to0+0=0$ ，$n\to\infty$

即有：$X_n+Y_n\xrightarrow{P}X+Y$.

（4）如果$X_n \xrightarrow{P} X$，$g(x)$是直线上的连续函数，则$g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

这里没用到"一致连续"的性质！将问题减弱为：$X_n \xrightarrow{P} c$，$g(x)$在$x=c$点连续，则$g(X_n) \xrightarrow{P} g(c)$

由题设，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当$0<|x-c|<\delta$时，必有：$|g(x)-g(c)|<\varepsilon$；从而，对于上述的ε,δ，

必有：$\{|g(X_n)-g(c)|\geq \varepsilon\} \subset \{|X_n-c|\geq \delta\}$；也即有：

$P(|g(X_n)-g(c)|\geq \varepsilon) \leq P(|X_n-c|\geq \delta) \to 0$，$n\to\infty$，即有：

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|g(X_n)-g(c)|\geq \varepsilon)=0$，即：$g(X_n) \xrightarrow{P} g(c)$.

6.（1）设$\{X_n,n\geq 1\}$为独立随机序列，且$P(X_n=\pm 2^n)=\frac{1}{2^{2n+1}}$，$P(X_n=0)=1-\frac{1}{2^{2n}}$，

$n=1,2,\cdots$；则$\{X_n,n\geq 1\}$服从大数定律；

由

X_n	-2^n	0	2^n
P	$\frac{1}{2^{2n+1}}$	$1-\frac{1}{2^{2n}}$	$\frac{1}{2^{2n+1}}$

，即有：$EX_n=0$，$EX_n^2=1$，$DX_n=1$，$n\geq 1$：从而，

$D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n}\to 0$，$n\to\infty$，由Chebyshev不等式，

$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} 0$，即：$\{X_n,n\geq 1\}$服从大数定律！

（2）设随机序列$\{X_n,n\geq 1\}$独立同分布，且有共同的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a},\quad -\infty<x<+\infty;$$

试问：辛钦大数定律对此随机序列是否适用？

设$X_n\sim f(x)$，即有：$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{\pi}\frac{a}{(a^2+x^2)}$，$-\infty<x<+\infty$；由$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x)dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\cdot|x|}{\pi(a^2+x^2)}dx=\infty$，即有：$EX_n$不存在，故Khinchine大数定律对此随机序

列不适用！

7.（1）设随机序列$\{X_n,n\geq 1\}$独立同$E(2)$分布，则当$n\to\infty$时，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2,\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$分别依概率收敛于什么？

① 由$\{X_n,n\geq 1\}$ i.i.d.，且$EX_n=\frac{1}{2}$，$n\geq 1$，依Khinchine大数定律，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$；

② 由$\{X_n^2,n\geq 1\}$ i.i.d.，且$EX_n^2=DX_n+(EX_n)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，依Khinchine大数定律，

$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$；

③ 由$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2$，及依概率收敛的性质，基于①、②

$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

（2）设随机序列$\{X_n, n\ge 1\}$独立同$U(-1,1)$分布，试求$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right)$；

易见，$EX_n = 0$，$DX_i = \frac{1}{3}$；由 Lindeberg－Levy 中心极限定理，

$\forall x \in R$，

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} X_i)}} \le x\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \phi(x)$，取 $x = \sqrt{3}$，即有．

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right) = \phi(\sqrt{3})$．

（3）设随机序列$\{X_n, n\ge 1\}$独立同参数为$\frac{1}{2}$的$0-1$分布，若

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{C\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - X_{2i-1})}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x)，试求常数C．$$

易见，$X_{2i} - X_{2i-1}$，$i = 1, 2, \cdots n$；独立同分布，且 $E(X_{2i} - X_{2i-1}) = EX_{2i} - EX_{2i-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$，$D(X_{2i} - X_{2i-1}) = DX_{2i} + DX_{2i-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

由 Lindeberg－Levy 中心极限定理，$\forall x \in R$，　记：$Y_i = X_{2i} - X_{2i-1}$．

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}} \le x\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2} \le x\right) = \phi(x)$，故常数 $C = \sqrt{2}$．

习题 5.2

1.（3）某餐厅每天接待400名顾客，假设每位顾客的消费额（元）服从$(20,100)$上的均匀分布，且顾客的消费额是相互独立的，试求：

（i）该餐厅每天的平均营业额；设 X_i 为第 i 位顾客的消费额，即：$X_i \sim U(20,100)$，$i = 1, \cdots, 400$

即有：$E(\sum_{i=1}^{400} X_i) = \sum_{i=1}^{400} EX_i = \sum_{i=1}^{400} 60 = 24000$（元）

这里，$D(\sum_{i=1}^{400} X_i) = \sum_{i=1}^{400} DX_i = 400 \times \frac{6400}{12} = \cancel{160000}$

（ii）“该餐厅每天的营业额在平均营业额± 760内”的概率．　由中心极限定理，

$P\left(\left|\sum_{i=1}^{400} X_i - E(\sum_{i=1}^{400} X_i)\right| < 760\right) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{400} X_i - E(\sum_{i=1}^{400} X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{400} X_i)}}\right| \le \frac{760}{400}\right) \approx 2\phi(1.9) - 1$

$= 0.90$．

2.（2）独立重复地对某物体的长度l进行n次测量，假设每次测量的结果X_i服从正态分布$N(l, 0.2^2)$；记$\overline{X}$为n次测量结果的算术平均值，为保证有95%的把握使平均值与实际值l的差异小于0.1，试问至少需要测量多少次？

易见，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(l, \frac{0.04}{n})$，这里，$E\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = l$，$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i$

$= \frac{0.04}{n}$；欲使 $P(|\overline{X} - l| < 0.1) = P\left(\left|\frac{\overline{X} - l}{0.2/\sqrt{n}}\right| < \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) - \phi(-\frac{\sqrt{n}}{2})$

$= 2\phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) - 1 \ge 0.95$，即：$\phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) \ge 0.975 = \phi(1.96)$，只须 $\sqrt{n}/2 \ge 1.96$．

$n \ge 15.366$，取 $n = 16$，即可！

3.（1）设有2500个同一年龄段和同一社会阶层的人参加了某保险公司的人寿保险，假设在一年中每个人死亡的概率为0.002，每个人在年初向保险公司缴纳保费1200元，而在死亡时保险受益人可以从保险公司领到保险金200000元，问：

（i）"保险公司亏本"的概率是多少？记X为死亡的投保人数，由题设，$X\sim B(2500,0.002)$，

即有：$EX=5$，$DX=4.99$，从而，P(保险公司亏本)$=P(2500\times1200-2\times10^5X<0)=P(X>15)$

$=1-P(X\le15)=1-P(\frac{X-5}{\sqrt{4.99}}\le\frac{10}{\sqrt{4.99}})\approx1-\phi(\frac{10}{\sqrt{4.99}})\approx0.000069\approx0$.

（ii）"保险公司获利不少于1000000元"的概率是多少？

P(保险公司获利不少于10^6元)$=P(2500\times1200-2\times10^5X\ge10^6)=P(X\le10)=P(\frac{X-5}{\sqrt{4.99}}\le\frac{5}{\sqrt{4.99}})$

$$\approx\phi(\frac{5}{\sqrt{4.99}})=0.9863.$$

（2）银行为支付某日即将到期的债券须准备一笔现金，已知这批债券共发行了500张，每张须支付本息1000元，假设"持券人（一人一券）到期日到银行领取本息"的概率为0.4，试问：银行于该日应准备多少现金才能以99.9%的把握满足客户的兑换？

设$X_i=\begin{cases}1, & \text{若第}i\text{个持券人到期日去银行兑换；}\\ 0, & \text{否则；}\end{cases}$ 易见，$X_1,X_2,\cdots,X_{500}$独立同$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$分布，$i=1,2,\cdots,500$；即有：$EX_i=0.4$，$DX_i=0.4\cdot0.6=0.24$；

由Lindeberg-Levy中心极限定理，从而$P(\sum_{i=1}^{500}X_i\le x)=P(\frac{\sum_{i=1}^{500}X_i-E(\sum_{i=1}^{500}X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{500}X_i)}}=\frac{\sum_{i=1}^{500}X_i-200}{\sqrt{120}}\le\frac{x-200}{\sqrt{120}})$

$\approx\phi(\frac{x-200}{\sqrt{120}})\ge0.999$，只须$\frac{x-200}{\sqrt{120}}\ge3.1$，即：$x\ge233.96$；故银行只须准备234000元.

注：本题也可依DeMoivre－Laplace中心极限定理计算！

4.（1）一复杂系统由100个相互独立工作的部件组成，每个部件正常工作的概率为0.9；已知整个系统中至少有85个部件正常工作，系统才能正常工作，试求"系统正常工作"的概率；

设X为正常工作的部件数，由题设，$X\sim B(100,0.9)$，$EX=90$，$DX=9$.

即有：P(系统正常工作)$=P(X\ge85)=1-P(X<85)=1-P(\frac{X-90}{\sqrt{9}}<\frac{85-90}{3})$

$$\approx1-\phi(-\tfrac{5}{3})=\phi(\tfrac{5}{3})=0.9525.$$

注：教材后所附习题的参考答案为0.9664，系用正态分布作为二项分布的近似计算中，为提高精度所作的修正！

（2）某车间有同型号的机床200台，在一小时内每台机床约有70%的时间是工作的；假定各机床工作是相互独立的，工作时每台机床要消耗电能15kW，问：至少需要多少电能，才可以有95%的可能性保证此车间正常生产？记X为同时工作的机床数，由题设，$X\sim B(200,0.7)$，$EX=140$，$DX=42$，由 $P(15X\le x)=P(X\le \frac{x}{15})=P(\frac{X-140}{\sqrt{42}}\le \frac{\frac{x}{15}-140}{\sqrt{42}})\approx\phi(\frac{\frac{x}{15}-140}{\sqrt{42}})\ge 0.95=\phi(1.645)$，即：$\frac{\frac{x}{15}-140}{\sqrt{42}}\ge 1.645$，$x\ge 2259.5\,kW$。

注：教材后所附的参考答案，仍为提高正态分布的近似计算精度所作的修正！

（3）电视台做关于某节目收视率的调查，在每天该节目播出时随机地向当地居民做电话问询；问其是否在看电视，若在看是否在看此节目；设回答在看电视的居民数为n，问为保证以95%的概率使调查误差在10%之内，n应取多大？

设X为回答看电视的居民中收看节目的人数；由题设，$X\sim B(n,P)$，P为收视率，$EX=nP$，$DX=nP\cdot(1-P)$，欲使 $P(|\frac{X}{n}-P|<0.1)\ge 0.95$，即：$P(|\frac{X-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}|<\frac{0.1n}{\sqrt{nP(1-P)}}=\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{P(1-P)}})$

$\approx 2\phi(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{P(1-P)}})-1\ge 0.95$，只须

$\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{P(1-P)}}\ge 1.96$，即 $n\ge(19.6)^2\cdot P(1-P)$；易见，$\forall P\in(0,1)$，$P(1-P)\le\frac{1}{4}$，

只须 $n\ge(19.6)^2\cdot\frac{1}{4}=96.04$，取 $n=97$ 即可。

5．设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$独立同$U(0,1)$分布，$Y=\prod_{i=1}^{100}X_i$，试由中心极限定理估计概率$P(Y<10^{-40})$．易见，$-\ln X_i\sim E(1)$，$-\ln Y=\sum_{i=1}^{100}(-\ln X_i)$．

$P(Y<10^{-40})=P(-\ln Y>40\ln 10)=P(\sum_{i=1}^{100}(-\ln X_i)>40\ln 10)$

$=P(\frac{\sum_{i=1}^{100}(-\ln X_i)-E(\sum_{i=1}^{100}(-\ln X_i))}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{100}(-\ln X_i))}}=\frac{\sum_{i=1}^{100}(-\ln X_i)-100}{10}>\frac{40\ln 10-100}{10})$

$\approx 1-\phi(\frac{40\ln 10-100}{10})=\phi(10-4\ln 10)\approx\phi(0.79)=0.7852$.

6．一中学有师生1600人，到学校食堂就餐人数约占师生总人数的$\frac{3}{4}$，试由中心极限定理确定：记X为到食堂就餐的人数，由题设 $X\sim B(1600,\frac{3}{4})$。

（1）学校食堂应最多安排多少座位，使“空座位超过100个”的概率不超过0.01；

$EX=1600\times\frac{3}{4}=1200$，$DX=1600\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=300$，若设安排$n$个座位，由

$P(0<X<n-100)=P(\frac{-1200}{\sqrt{300}}<\frac{X-1200}{\sqrt{300}}<\frac{n-1300}{\sqrt{300}})\approx\phi(\frac{n-1300}{\sqrt{300}})-\phi(-\frac{1200}{\sqrt{300}})$

$\approx\phi(\frac{n-1300}{\sqrt{300}})\le 0.01$，即：$\phi(\frac{1300-n}{\sqrt{300}})\ge 0.99=\phi(2.33)$，$n\le 1300-2.33\cdot\sqrt{300}$

（2）在此安排下，求“有师生就餐无座位”的概率．≈ 1259

由(1)，$P(X>1259)=1-P(X\le 1259)=1-P(\frac{X-1200}{\sqrt{300}}\le\frac{59}{\sqrt{300}})$

$\approx 1-\phi(\frac{59}{\sqrt{300}})=1-\phi(3.4)=1-0.9997=0.0003$.

7. 用概率论的方法证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=\dfrac{1}{2}$；

设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 独立同 $P(1)$ 分布，$EX_i = DX_i = 1$，$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim P(n)$（Poisson分布的可加性），

由 Lindeberg-Levy 中心极限定理，$\forall x\in R$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$$；取 $x=0$，即有：

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^n X_i \leq n) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$；这里，记：$Y=\sum_{i=1}^n X_i$，由 $Y\sim P(n)$，

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \leq n) = P(Y\leq n) = \sum_{k=0}^n P(Y=k) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}e^{-n}$$，即有：

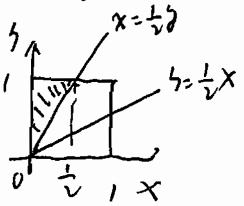
习题 6.1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}\right)e^{-n} = \frac{1}{2}.$$

2. （1）设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$，$(X_1,X_2)$ 为取自 X 的样本，求 $P\left(\dfrac{X_1}{X_2}\leq\dfrac{1}{2}\right)$；解：$X_1, X_2$ 独立，且与 X 同分布，故令 $(X_1, X_2)\sim f(x,y)$，则有

$f(x,y) = f_{X_1}(x)\cdot f_{X_2}(y) = \begin{cases}2x\cdot 2y, & 0<x,y<1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ 从而，$P(\frac{X_1}{X_2}\leq\frac{1}{2}) = P(X_1\leq\frac{1}{2}X_2)$

$$= \iint\limits_{x\leq\frac{1}{2}y} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{2x}^1 2x\cdot 2y\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x(1-4x^2)\,dx = \frac{1}{4}-2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}-\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$



（2）设 (X_1,X_2) 为取自 $X\sim E(\lambda)$ 的样本，$Y=\sqrt{X_1X_2}$，则 $E\left(\dfrac{4Y}{\pi}\right)=\dfrac{1}{\lambda}$.

解：X_1, X_2 独立同 $E(\lambda)$ 分布，令 $X\sim f(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leq 0、\end{cases}$

则有：$E(\frac{4Y}{\pi}) = \frac{4}{\pi}E(\sqrt{X_1X_2}) = \frac{4}{\pi}E(\sqrt{X_1}\cdot\sqrt{X_2}) = \frac{4}{\pi}E(\sqrt{X_1})E(\sqrt{X_2})$（独立性）

$$= \frac{4}{\pi}\underset{\text{（代表性）}}{E(\sqrt{X})\cdot E(\sqrt{X})} = \frac{4}{\pi}[E(\sqrt{X})]^2 = \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\cdot f(x)\,dx\right]^2 = \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx\right]^2$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\lambda x}\cdot e^{-(\lambda x)}\,d(\lambda x)\right]^2 \xlongequal{令\lambda x=t} \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}\,dt\right]^2$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma(\tfrac{3}{2})\right]^2 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\right]^2 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right]^2 = \frac{1}{\lambda}.$$

习题 6.2

记总体为X，则：$X\sim N(8,2^2)$，$\frac{X-8}{2}\sim N(0,1^2)$

1.（2） 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{16})$是取自总体$N(8,2^2)$的样本，试求以下概率：

$P(X_{(16)}>10)$，$P(X_{(1)}>5)$.

$P(X_{(16)}>10)=1-P(X_{(16)}\le 10)=1-P(\bigcap_{i=1}^{16}\{X_i\le 10\})=1-\prod_{i=1}^{16}P(X_i\le 10)=1-\prod_{i=1}^{16}P(X\le 10)$

$=1-\prod_{i=1}^{16}P(\frac{X-8}{2}\le\frac{2}{2})=1-[\Phi(1)]^{16}$；$P(X_{(1)}>5)=P(\bigcap_{i=1}^{16}\{X_i>5\})=\prod_{i=1}^{16}P(X_i>5)=\prod_{i=1}^{16}P(X>5)$

$=\prod_{i=1}^{16}[1-P(X\le 5)]=\prod_{i=1}^{16}[1-P(\frac{X-8}{2}\le\frac{-3}{2})]=\prod_{i=1}^{16}(1-\Phi(-\frac{3}{2}))=[\Phi(\frac{3}{2})]^{16}$.

2. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体$X\sim U(0,1)$的样本，$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$是样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的顺序统计量，试求$E[X_{(1)}],E[X_{(n)}]$以及样本极差$X_{(n)}-X_{(1)}$的分布.

法1：由$X_{(1)},X_{(n)}$的分布求$E(X_{(1)})$，$E(X_{(n)})$；

法2（微元密度法）：$\forall 0<y<x<1$，取$\Delta x,\Delta y>0$充分小，且$0\le y-\Delta y<y\le x-\Delta x<x<1$，

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x-\Delta x<X_{(n)}\le x,\ y-\Delta y<X_{(1)}\le y)}{\Delta x\cdot\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{C_n^1\cdot[y-(y-\Delta y)]\cdot C_{n-1}^{n-2}\cdot(x-\Delta x-y)^{n-2}\cdot[x-(x-\Delta x)]+\Delta x\Delta y\,o(1)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot(x-\Delta x-y)^{n-2}+\Delta x\cdot\Delta y\cdot o(1)}{\Delta x\cdot\Delta y}=n\cdot(n-1)\cdot(x-y)^{n-2}$$；令$(X_{(n)},X_{(1)})\sim f(x,y)$，故

有：$f(x,y)=\begin{cases}n\cdot(n-1)\cdot(x-y)^{n-2}, & 0<y<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$ 令$X_{(n)}\sim f_{X_{(n)}}(x)$，$X_{(1)}\sim f_{X_{(1)}}(y)$，即有：

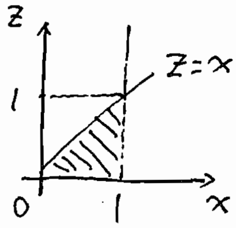
$f_{X_{(1)}}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 n(n-1)(x-y)^{n-2}dx, & 0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}n\cdot(1-y)^{n-1}, & 0<y<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$ $EX_{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}y f_{X_{(1)}}(y)dy$

$=\int_0^1 y\cdot n\cdot(1-y)^{n-1}dy=\int_0^1 n\cdot(1-x)\cdot x^{n-1}dx=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$； $f_{X_{(n)}}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$=\begin{cases}\int_0^x n\cdot(n-1)(x-y)^{n-2}dy, & 0<x<1;\\ 0, & 其他;\end{cases}=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{X_{(n)}}(x)dx=\int_0^1 x\cdot n\cdot x^{n-1}dx=\frac{n}{n+1}$

令$X_{(n)}-X_{(1)}\sim f_{X_{(n)}-X_{(1)}}(z)$，由差的密度公式，$f_{X_{(n)}-X_{(1)}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx$

$=\begin{cases}\int_z^1 n(n-1)z^{n-2}dx=n(n-1)z^{n-2}\cdot(1-z), & 0<z<1;\\ 0 & ,其他;\end{cases}$ 这里，$f(x,x-z)>0\Leftrightarrow 0<x-z<x<1$；



3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_5$独立同分布，且$X_i\sim f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$；试求：

$P\left(X_{(2)}<\frac{1}{2}\right)$. 方法1：可由顺序统计量求 $X_{(2)}$ 的分布，再求 $P(X_{(2)}<\frac{1}{2})$（见P97附页

方法2： $P(X_i<\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{1}{4}$，记Y为$X_1,X_2,\cdots,X_5$

~~$P(X_{(2)}<\frac{1}{2})$~~ = 中取值小于$\frac{1}{2}$的X_i的个数，易见，$Y\sim B(5,\frac{1}{4})$.

$P(X_{(2)}<\frac{1}{2})=P(X_1,X_2,\cdots,X_5$中至少有2个取值小于$\frac{1}{2})=P(Y\geq 2)$

$=1-P(Y<2)=1-C_5^0(\frac{1}{4})^0(1-\frac{1}{4})^5-C_5^1(\frac{1}{4})^1(1-\frac{1}{4})^4=1-\frac{3^5}{4^5}-\frac{5\cdot 3^4}{4^5}$

$=1-\frac{3^4\cdot 8}{4^5}=1-\frac{3^4}{4^4}\cdot 2=1-\frac{81}{128}=\frac{47}{128}$.

习题 6.3

2.（1） 设总体$X\sim N(\mu,10^2)$，现抽取一容量为n的样本，样本均值记为$\overline{X}$，欲使$P(\mu-5<\overline{X}<\mu+5)=0.954$，试问$n$取何值？ 易见，$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{10^2}{n})$. 从而，

由 $P(\mu-5<\overline{X}<\mu+5)=P(|\overline{X}-\mu|<5)=P(|\frac{\overline{X}-\mu}{10/\sqrt{n}}|<\frac{\sqrt{n}}{2})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{2})$

$=2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})-1=0.954$. 可有：$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})=0.9770=\Phi(2.0)$

可有： $n=16$.

（2） 从正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$中抽取一个样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求k使得

$P(\overline{X}>\mu+kS_n)=1-\alpha$，其中$\alpha$很小；这里，$S_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$. $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

易见，$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1^2)$. $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. 且

$\overline{X}$与S_n^2独立，可有：$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2}/n-1}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}\cdot\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$，由

$P(\overline{X}>\mu+kS_n)=P(\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}>k)=P(\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}\sqrt{n-1}>\underline{k\cdot\sqrt{n-1}})=1-\alpha$，可有：

$k\cdot\sqrt{n-1}=t_{1-\alpha}(n-1)$，即：$k=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot t_{1-\alpha}(n-1)$.

3. 设在正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$中抽取一容量为n的样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，μ,σ^2未知；（1）求$E(S^2),D(S^2)$； 由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. 可有：

$E[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}] = n-1$ ，$D[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}] = 2(n-1)$. 也可有：

$ES^2 = \sigma^2$, $DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

（2）当$n=16$时，求$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.04\right)$；这里，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

当$n=16$、$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$. 由 $P(\frac{15S^2}{\sigma^2} > 15\cdot 2.04 = 30.6) = 0.01$

可有：$P(\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.04) = P(\frac{15S^2}{\sigma^2} \le 30.6) = 1 - 0.01 = 0.99$.

4.（1）设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是取自正态总体$X \sim N(1,\sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，S为样本标准差；若$P(\overline{X} \le 1, S^2 \le \sigma^2) = \frac{1}{3}$，试求$P(S^2 \le \sigma^2)$；

易知，$\overline{X}$与S^2独立、且$\overline{X} \sim N(1, \frac{\sigma^2}{10})$. 可有：$P(\overline{X} \le 1) = \frac{1}{2}$、且

$P(\overline{X} \le 1, S^2 \le \sigma^2) = P(\overline{X} \le 1)\cdot P(S^2 \le \sigma^2) = \frac{1}{3}$；可有：$P(S^2 \le \sigma^2) = \frac{2}{3}$.

（2）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$为样本均值，若$P(|X-\mu| < a) = P(|\overline{X}-\mu| < b)$，试求$\frac{a}{b}$. $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1^2)$.

$P(|X-\mu| < a) = P(|\frac{X-\mu}{\sigma}| < \frac{a}{\sigma})$ 由 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$P(|\overline{X}-\mu| < b) = P(|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| < \frac{b}{\sigma}\sqrt{n})$ $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1^2)$

可有：$\frac{a}{\sigma} = \frac{b}{\sigma}\sqrt{n}$，$\frac{a}{b} = \sqrt{n}$.

5. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，计算：$E\left[\overline{X}\cdot S^2\right]^2, D\left[\left(\overline{X}-\mu\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)S^2\right]$.

由$\overline{X}$与S^2独立、可有：$\overline{X}^2$与$(S^2)^2$独立，从而 $E[\overline{X}\cdot S^2]^2 = E(\overline{X}^2\cdot S^4) = E\overline{X}^2\cdot ES^4$，

由$E\overline{X} = \mu$、$D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$，可有：$E\overline{X}^2 = D\overline{X} + (E\overline{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$，

由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且 $D[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}] = 2(n-1)$，可：$DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

$ES^4 = E(S^2)^2 = (ES^2)^2 + DS^2 = (\sigma^2)^2 + \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}\sigma^4$.

$D[(\overline{X}-\mu)^2 + (1-\frac{1}{n})S^2] = D(\overline{X}-\mu)^2 + D[(1-\frac{1}{n})S^2] = D(\overline{X}-\mu)^2 + (1-\frac{1}{n})^2\cdot DS^2$

由 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1^2)$. $\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} \sim \chi^2(1)$. $D[\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}] = 2$. $D(\overline{X}-\mu)^2 = \frac{2}{n^2}\sigma^4$.

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是取自正态总体$X\sim N(\mu,0.5^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值；(1) 若$\mu=0$，求$P\left(\sum_{i=1}^{10}X_i^2\geq 4\right)$；(2) 若$\mu$未知，求$P\left(\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\geq 2.85\right)$.

(1) $\mu=0$，由 $X_i/0.5$，$i=1,2,\cdots,10$ 独立同$N(0,1^2)$分布，即有：$\sum_{i=1}^{10}(2X_i)^2\sim\chi^2(10)$ 分布，

$P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2\geq 4)=P(\sum_{i=1}^{10}(2X_i)^2\geq 16)$

$=0.1$（查表）

（χ^2分布）上分位点 $\chi^2_{0.1}(10)=15.987$

(2) 由 $\frac{(10-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2}{0.5^2}\sim\chi^2(9)$，

即有：$P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\geq 2.85)$

$=P(\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2}{0.5^2}\geq 11.4)=0.25$

（查表，$\chi^2_{0.25}(9)=11.389$）

8. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{2n})$为取自X的样本，$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，试求统计量$T=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{i+1}-2\overline{X}\right)^2$的数学期望. $ET=E\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X})+(X_{i+1}-\overline{X})]^2\}$

$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}E(X_{i+1}-\overline{X})^2+2\sum_{i=1}^{n}[E(X_iX_{i+1}-X_i\overline{X}-X_{i+1}\overline{X}+\overline{X}^2)]$

$=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i-\overline{X})^2+2\sum_{i=1}^{n}E(X_iX_{i+1})-2E(\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{X})-2E(\sum_{i=1}^{n}X_{i+1}\overline{X})+2n\cdot E(\overline{X}^2)$

$=(2n-1)\cdot E[\frac{1}{2n-1}\sum_{i=1}^{2n}(X_i-\overline{X})^2]+2\sum_{i=1}^{n}EX_i\cdot EX_{i+1}-2E(\sum_{i=1}^{2n}X_i\overline{X})+2nE(\overline{X}^2)$

$=(2n-1)\sigma^2+2n\mu^2-4n\cdot E(\overline{X}^2)+2n\cdot E(\overline{X}^2)$

$=(2n-1)\sigma^2+2n\mu^2-2n\cdot E(\overline{X}^2)=(2n-1)\sigma^2+2n\mu^2-2n(\mu^2+\frac{\sigma^2}{2n})$

$=2(n-1)\sigma^2$,

9. 设(X_1,X_2)是取自正态总体$N(0,\sigma^2)$的样本，

(1) 求$\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$的分布； 易见，$(X_1-X_2)$与$(X_1+X_2)$独立同$N(0,2\sigma^2)$分布，

从而，$\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}=\frac{\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\sim F(1,1)$，

记：$F=\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$，由 $P(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_1-X_2)^2}>k)$

$=P(\frac{1}{1+F}>k)=P(1+F<\frac{1}{k})=P(F<\frac{1}{k}-1)=P(\frac{1}{F}>\frac{1}{\frac{1}{k}-1})=0.1$,

(2) 求常数k，使得$P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_1-X_2)^2}>k\right)=0.1$. 且 $F_{0.1}(1,1)=39.86$，注，$\frac{1}{F}\sim F(1,1)$

$P(\frac{1}{F}>39.86)=0.1$，即有：$\frac{1}{\frac{1}{k}-1}=39.86$，$k=0.976$.

习题 7.1

1. 设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，$(X_1,X_2,X_3)$为取自总体$X$的简单随机样本，令$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}=X_{(3)}$，

（1） 求T的概率密度；（2）确定a，使得$E(aT)=\theta$。

(1) 易见，$R(T)=(0,\theta)$；故$\forall t\le 0$，$F_T(t)=P(T\le t)=0$；$\forall t\ge\theta$，$F_T(t)=P(T\le t)=1$；$\forall t\in(0,\theta)$，$F_T(t)=P(T\le t)=P(\bigvee_{i=1}^{3}X_i\le t)=P(\bigcap_{i=1}^{3}\{X_i\le t\})$
$=\prod_{i=1}^{3}P(X_i\le t)=\prod_{i=1}^{3}\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\prod_{i=1}^{3}(\frac{t}{\theta})^3=(\frac{t}{\theta})^9$. 即：$F_T(t)=\begin{cases}0, & t\le 0;\\ (\frac{t}{\theta})^9, & 0<t<\theta;\\ 1, & t\ge\theta;\end{cases}$ 令$T\sim f_T(t)$，则有：$f_T(t)=\frac{dF}{dt}$
$=\begin{cases}\frac{9}{\theta}\cdot(\frac{t}{\theta})^8, & 0<t<\theta;\\ 0, & 其他；\end{cases}$ (2) $E(aT)=aET=a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot f_T(t)dt=a\cdot\int_0^\theta t\cdot\frac{9}{\theta}\cdot(\frac{t}{\theta})^8dt$

$9\cdot a\cdot\theta\int_0^t(\frac{t}{\theta})^9\cdot d(\frac{t}{\theta})\xlongequal{令\frac{t}{\theta}=x}9a\theta\cdot\int_0^1x^9dx=\frac{9}{10}a\theta=\theta$. 则有：$a=\frac{10}{9}$.

2. 设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，其中$\theta$是未知参数，设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体$X$的简单随机样本，若$E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$，试求$c$.

由 $E[c\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=c\cdot\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=c\cdot\sum_{i=1}^{n}E(X^2)=nc\cdot E(X^2)=nc\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x;\theta)dx$

$=n\cdot c\cdot\int_\theta^{2\theta}x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}dx=nc\cdot\frac{2}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot[(2\theta)^4-\theta^4]=\frac{5}{2}nc\cdot\theta^2=\theta^2$.

则有 $c=\frac{2}{5n}$.

5. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)(n>2)$是取自总体$X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$的一个样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$；试求：$D(Y_i),i=1,2,\cdots,n$及$Cov(Y_1,Y_n)$；若$C(Y_1+Y_n)^2$是$\sigma^2$的无偏估计量，求常数$C$.

① $DY_i=D(X_i-\overline{X})=D[-\frac{1}{n}X_1\cdots-\frac{1}{n}X_{i-1}+(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}X_{i+1}-\cdots-\frac{1}{n}X_n]=\frac{1}{n^2}DX_1+\cdots+\frac{1}{n^2}DX_{i-1}+(1-\frac{1}{n})^2DX_i+\frac{1}{n^2}DX_{i+1}$
$+\cdots+\frac{1}{n^2}DX_n=\sigma^2\cdot[\frac{1}{n^2}\times(n-1)+(1-\frac{1}{n})^2]=(1-\frac{1}{n})\sigma^2$；

② $Cov(Y_1,Y_n)=Cov(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})=Cov(X_1,X_n)-Cov(X_1,\overline{X})-Cov(X_n,\overline{X})+Cov(\overline{X},\overline{X})=0-2Cov(X_1,$
$+D\overline{X}=-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}Cov(X_1,X_i)+\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{1}{n}\sigma^2$；

③ 由$E[C(Y_1+Y_n)^2]=C\cdot\cancel{E(X_1+X_n-2\overline{X})^2}E[Y_1^2+Y_n^2+2Y_1Y_n]=C\cdot[EY_1^2+EY_n^2+2E(Y_1Y_n)]=C[DY$
$DY_n+2Cov(Y_1,Y_n)]=C\cdot[(1-\frac{1}{n})\sigma^2+(1-\frac{1}{n})\sigma^2+(-\frac{2}{n}\sigma^2)]=2C\cdot(1-\frac{2}{n})\sigma^2=\sigma^2$，即有：

$C=\frac{n}{2(n-2)}$.

6.（1）设总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$X$的一个样本，试确定常数$C$，使得$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计；由$E[C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}[EX_{i+1}^2+EX_i^2-$
$2EX_i\cdot EX_{i+1}]=C\cdot[\sum_{i=1}^{n-1}EX^2+\sum_{i=1}^{n-1}EX^2-2\sum_{i=1}^{n-1}EX\cdot EX]=C\cdot[2(n-1)\cdot(\mu^2+\sigma^2)-2(n-1)\mu^2]$
$=C\cdot2(n-1)\cdot\sigma^2=\sigma^2$，即有：$C=\frac{1}{2(n-1)}$.

（2）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的一个简单随机样本，试求常数$k$，使得$\sigma=k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|X_i-X_j\right|$为$\sigma$的无偏估计.

由$E\sigma=k\cdot E[2\sum_{1\le i<j\le n}|\frac{X_i-X_j}{\sqrt{2}\sigma}|]\cdot\sqrt{2}\sigma$，这里，$X_i-X_j\sim N(0,2\sigma^2)$，$i<j$：

所以，$E\sigma=2k\cdot[\sum_{1\le i<j\le n}E|\frac{X_i-X_j}{\sqrt{2}\sigma}|]\cdot\sqrt{2}\sigma=2k\cdot\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{2}\sigma$

$=2k\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{2}\sigma=\frac{2k\cdot n\cdot(n-1)}{\sqrt{\pi}}\sigma=\sigma$，即有 $k=\frac{\sqrt{\pi}}{2n(n-1)}$；其中，

若$Y=\frac{X_i-X_j}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1^2)$，则$E|Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\varphi(y)dy=2\cdot\int_{0}^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot(-e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^{+\infty})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(1) $\forall x\in R$, $F_{X_{(3)}}(x)=P(X_{(3)}\le x)=\prod_{i=1}^{3}P(X_i\le x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ (\frac{x}{\theta})^3, & 0<x<\theta;\\ 1, & x\ge\theta;\end{cases}$ 令 $X_{(3)}\sim f_{X_{(3)}}(x)$，即有：

$f_{X_{(3)}}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_{(3)}}(x)=\begin{cases}\frac{3}{\theta}(\frac{x}{\theta})^2, & 0<x<\theta;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 从而，$E[\frac{4}{3}X_{(3)}]=\frac{4}{3}E[X_{(3)}]=\frac{4}{3}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{X_{(3)}}(x)dx=\frac{4}{3}\int_0^{\theta}3\cdot(\frac{x}{\theta})^3dx$

7.（1）设 X_1,X_2,X_3 独立同均匀分布 $U(0,\theta)$，试证：$\frac{4}{3}X_{(3)}$ 与 $4X_{(1)}$ 均是 θ 的无偏估计量，哪个更有效？ $=\theta$；

$\forall x\in R$, $F_{X_{(1)}}(x)=P(X_{(1)}\le x)=1-P(X_{(1)}>x)=1-\prod_{i=1}^{3}P(X_i>x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-(1-\frac{x}{\theta})^3, & 0<x<\theta;\\ 1, & x\ge\theta;\end{cases}$ 令 $X_{(1)}\sim f_{X_{(1)}}(x)$

即有：$f_{X_{(1)}}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}\frac{3}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2, & 0<x<\theta;\\ 0, & 其他；\end{cases}$ 从而，$E[4X_{(1)}]=4E[X_{(1)}]=4\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{X_{(1)}}(x)dx$

$=4\cdot\int_0^{\theta}3\cdot\frac{x}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2dx=\theta$．即：$\frac{4}{3}X_{(3)}$、$4X_{(1)}$ 均为 θ 的无偏估计量！由

$E[\frac{4}{3}X_{(3)}]^2=\frac{16}{9}EX_{(3)}^2=\frac{16}{9}\int_0^{\theta}x^2\cdot\frac{3}{\theta}(\frac{x}{\theta})^2dx=\frac{16}{3}\theta^2\cdot\int_0^1t^4dt=\frac{16}{15}\theta^2$．

$E[4X_{(1)}]^2=16\cdot EX_{(1)}^2=16\cdot\int_0^{\theta}x^2\cdot\frac{3}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2dx=48\theta^2\cdot\int_0^1t^2(1-t)^2dt=\frac{8}{5}\theta^2>\frac{16}{15}\theta^2$

即：$D[4X_{(1)}]>D[\frac{4}{3}X_{(3)}]$，故 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 比 $4X_{(1)}$ 更有效！

习题 7.2

1. 设总体 X 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，即 X 的概率密度函数为：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$$

其中 $\mu\in(-\infty,+\infty)$，$\sigma^2\in(0,+\infty)$ 均未知；

（1）求 μ,σ^2 的矩估计量； 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为취自 X 的一个样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本值，

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\mu,\sigma^2)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\ \underline{\underline{\frac{\ln x-\mu}{\sigma}=t}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot e^{\sigma t}dt=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(t-\sigma)^2}d(t-\sigma)\ \underline{\underline{令u=t-\sigma}}\ e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$；

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x;\mu,\sigma^2)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\ \underline{\underline{\frac{\ln x-\mu}{\sigma}=t}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2\mu}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot e^{2\sigma t}dt$

$=e^{2\mu+2\sigma^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}}d(t-2\sigma)\ \underline{\underline{t-2\sigma=u}}\ e^{2\mu+2\sigma^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=e^{2\mu+2\sigma^2}$

由上述，$\mu+\frac{\sigma^2}{2}=\ln(EX)$，$2\mu+2\sigma^2=\ln(EX^2)$．即有：$\mu=2\cdot\ln(EX)-\frac{1}{2}\ln(EX^2)$，

$\sigma^2=\ln(EX^2)-2\ln(EX)$，用 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 替换 EX，用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 替换，即有：

$\hat{\mu}_{ME}=2\cdot\ln(\bar{X})-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$，$\hat{\sigma}^2_{ME}=\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)-2\cdot\ln(\bar{X})$．

（2）求μ,σ^2的最大似然估计量；考虑μ、σ^2的似然函数 $L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu,\sigma^2)$

$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i}e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x_i>0$；即有：$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

令 $\begin{cases}\frac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)=0,\\ \frac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0.\end{cases}$ 即有：$\begin{cases}\hat{\mu}_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\\ \hat{\sigma}^2_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu}_{MLE})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^2-\hat{\mu}^2_{MLE}\end{cases}$

所以，μ，σ^2的最大似然估计量为：$\hat{\mu}_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$，

$$\hat{\sigma}^2_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i^2-\hat{\mu}^2_{MLE}.$$

（3）求EX,DX的最大似然估计量.

由$EX=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$，$DX=EX^2-(EX)^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-(e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2})^2=e^{2\mu+\sigma^2}\cdot(e^{\sigma^2}-1)$，

依最大似然估计的不变性，$\widehat{EX}=e^{\hat{\mu}_{MLE}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2_{MLE}}$，

$$\widehat{DX}=e^{2\hat{\mu}_{MLE}+\hat{\sigma}^2_{MLE}}\cdot(e^{\hat{\sigma}^2_{MLE}}-1).$$

2．设总体X的概率密度为：$f(x;\theta,\lambda)=\begin{cases}\theta e^{-\theta(x-\lambda)}, & x>\lambda;\\ 0, & x\le\lambda;\end{cases}$；其中$\lambda\in R$，$\theta>0$均未知，试求$\theta,\lambda$的最大似然估计量.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自X的样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本值；考虑θ、λ的似然函数

$L(\theta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\theta\cdot e^{-\theta(x_i-\lambda)}=\theta^n\cdot e^{-\theta\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\lambda)}$，$x_i>\lambda$，$i=1,2,\cdots,n$；

$=\theta^n\cdot e^{-\theta\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i)}\cdot e^{n\theta\lambda}$，$x_{(1)}>\lambda$，$x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，

~~由~~ $\ln L(\theta,\lambda)=n\cdot\ln\theta-\theta\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i)+n\theta\lambda$，$x_{(1)}>\lambda$

由 $\frac{\partial\ln L(\theta,\lambda)}{\partial\lambda}=n\theta>0$，即有$\lambda$的最大似然估计值$\hat{\lambda}_{MLE}=x_{(1)}$；令

$\frac{d\ln L(\theta,\hat{\lambda}_{MLE})}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\hat{\lambda}_{MLE}=0$，即有：$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{1}{\bar{x}-\hat{\lambda}_{MLE}}=\frac{1}{\bar{x}-x_{(1)}}$，这里，

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，且 $\left.\frac{d^2\ln L(\theta,\hat{\lambda}_{MLE})}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{MLE}}=-\frac{n}{\hat{\theta}^2_{MLE}}<0$；故$\theta$，$\lambda$的最大似然估计量分

别为：$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{1}{\bar{X}-X_{(1)}}$，$\hat{\lambda}_{MLE}=X_{(1)}$，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

3.（1）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体X的样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本值，

①求θ的矩估计：$EX=0$与θ无关，由$DX=\frac{\theta^2}{3}$，$\theta=\sqrt{3DX}$，用$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$替换$DX$，

3.（1）设总体$X\sim U[-\theta,\theta]$，$\theta>0$未知；试求θ的矩估计与最大似然估计；

即得$\hat{\theta}_{ME}=\sqrt{3}S_n$、或由$EX^2=\frac{\theta^2}{3}$，$\theta=\sqrt{3EX^2}$，用$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$替换$EX^2$，

也可得$\hat{\theta}_{ME}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$，

②求θ的最大似然估计：设$X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta；\\ 0, & 其他，\end{cases}$ 考虑θ的似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n,\ -\theta\le x_i\le\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n,\ \cancel{-\theta\le x_{(1)}\le x_{(n)}}\ |x_i|\le\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n,\ \max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}\le\theta，\quad 由\frac{dL(\theta)}{d\theta}<0，即有：$$

$\hat{\theta}_{MLE}=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$；从而最大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}=\max\{|X_1|,|X_2|,\cdots,|X_n|\}$

（2）设总体$X\sim U[\theta_1,\theta_1+\theta_2]$，$\theta_1,\theta_2>0$为未知参数，试求参数$\theta_1,\theta_2$的矩估计与最大似然估计. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自$X$的样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本值，

①求矩估计：由$EX=\theta_1+\theta_2/2$，$DX=\theta_2^2/12$，即有：$\theta_1=EX-\sqrt{3DX}$，$\theta_2=2\sqrt{3DX}$；用$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$替换$EX$，

用$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$替换$DX$，即有：$\hat{\theta}_{1ME}=\overline{X}-\sqrt{3}S_n$，$\hat{\theta}_{2ME}=2\sqrt{3}S_n$；

②求最大似然估计：设$X\sim f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2}, & \theta_1\le x\le\theta_1+\theta_2；\\ 0, & 其他：\end{cases}$ 考虑θ_1,θ_2的似然函数

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2^n},\ \theta_1\le x_i\le\theta_1+\theta_2$$

$$=\frac{1}{\theta_2^n},\ \theta_1\le x_{(1)},\ \theta_2\ge x_{(n)}-\theta_1$$

4　设离散型总体X有如下分布：$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta\end{pmatrix}$，其中

$\theta\in\Theta=\left(0,\frac{1}{2}\right)$是未知参数；由总体得如下样本值：3，1，3，0，3，1，2，3，

求未知参数θ的矩估计与最大似然估计. 设$(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6,X_7,X_8)$为取自$X$的样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_8)=(3,1,\cdots,3)$为样本值；

（1）求矩估计$\hat{\theta}_{ME}$：由$EX=1\cdot2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta$，即：$\theta=\frac{3-EX}{4}$，用$\overline{X}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}X_i$替换$EX$，即有矩估计量$\hat{\theta}_{ME}=\frac{3-\overline{X}}{4}$；从而，矩估计值$\hat{\theta}_{ME}=\frac{3-\overline{x}}{4}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$

（2）求最大似然估计$\hat{\theta}_{MLE}$：考虑θ的似然函数$L(\theta)=P(X_1=3,X_2=1,X_3=3,X_4=0,X_5=3,X_6=1,X_7=2,X_8=3)=P(X_1=3)\cdot P(X_2=1)\cdot P(X_3=3)\cdot P(X_4=0)\cdot P(X_5=3)\cdot P(X_6=1)\cdot P(X_7=2)\cdot P(X_8=3)$

$$=(1-2\theta)^4\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot\theta^2=4\cdot\theta^6\cdot(1-\theta)^2\cdot(1-2\theta)^4.$$

由$\ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$，令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$，即：

$8\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{1-2\theta}\right)=2\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{1-\theta}\right)$，也即：$4\cdot\frac{1-3\theta}{\theta(1-2\theta)}=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$，即得$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

5.(1) 设总体为 X，且 $X \sim \left(\quad\right)$ $X=\begin{cases}1, & 取出白球\\ 0, & 取出黑球\end{cases}$

$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R+1} & \frac{R}{R+1} \end{pmatrix}$，设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自 X 的一个样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本值。

5.（1） 一个袋有白球与黑球，有放回地抽取一个容量为 n 的样本，其中有 k 个白球，试求袋中黑球数与白球数之比 R 的最大似然估计。

考虑 R 的似然函数 $L(R)=P((X_1,X_2,\cdots,X_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n))=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)$

$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{R+1}\right)^{x_i}\cdot\left(\frac{R}{R+1}\right)^{1-x_i}$，$x_i=0$ 或 1。

$=\frac{R^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}}{(R+1)^n}$。 $\ln L(R)=(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\cdot\ln R-n\ln(R+1)$，令 $\frac{d\ln L(R)}{dR}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{R}-\frac{n}{R+1}=0$。

即有：R 的最大似然估计值 $\hat{R}_{MLE}=\frac{1}{\bar{x}}-1$，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；从而，

R 的最大似然估计量 $\hat{R}_{MLE}=\frac{1}{\bar{X}}-1$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

（2） 甲、乙两人独立地校对一书稿的清样，他们分别发现了 k_1,k_2 个错误，其中有 $k_{12}>0$ 个错误是共同的，求总的错误个数 n 的估计。设清样中有 n 个错误，校对者找到有错误处可能发现错误、也可能发现不了；令甲、乙发现错误的概率为 P_1,P_2，且甲、乙发现共同错误的概率为 P_{12}；记 X、Y 为甲、乙发现清样的错误数；易见，$X\sim B(n,P_1)$，$Y\sim B(n,P_2)$。令 Z 为甲、乙发现人相同错误数，即有：$Z\sim B(n,P_{12})$；由于甲、乙两人是独立校对的，故 $P_{12}=P_1\cdot P_2$。

于是由 $EZ=nP_{12}$，即有：$n=\frac{EX\cdot EY}{EZ}$；由矩估计法，即有 n 的矩估计：

$\hat{n}=\frac{\bar{X}\cdot\bar{Y}}{\bar{Z}}$；记 k_1，k_2，k_{12} 为取自总体 X、Y、Z 的容量为 1 的样本值，即：

$\bar{x}=k_1$，$\bar{y}=k_2$，$\bar{z}=k_{12}$，即有 n 的矩估计值：$\hat{n}=\frac{k_1k_2}{k_{12}}$。

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 未知，

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，

（1） 求 θ 的矩估计量；（2）求 θ 的最大似然估计量.

(1) 易见，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x;\theta)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta e^{-\frac{\theta}{x}}\Big|_{0^+}^{+\infty}=\theta$，即：$\theta=EX$，用

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 替换 EX，即有 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$（或 $\hat{\theta}_{ME}$）$=\bar{X}$；

(2) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本值，考虑 θ 的似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^3}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}},\quad x_i>0,$$

$\ln L(\theta)=2n\cdot\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$。

即有 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$（或 $\hat{\theta}_{MLE}$）$=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$；从而，

θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$（或 $\hat{\theta}_{MLE}$）$=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$

7. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1;\\ 0, & 其他;\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，

（1） 求 θ 的矩估计量；（2）求 θ 的最大似然估计量.

(1) 由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1}x\cdot\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，即：$\theta=2EX-1$；用 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 替换 EX，即有 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$（或 $\hat{\theta}_{ME}$）$=2\overline{X}-1$；

(2) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本值，考虑 θ 的似然函数，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n}$，$\theta\le x_i\le 1$

$=\frac{1}{(1-\theta)^n}$，$\theta\le x_{(1)}$；$L(\theta)$ 越大，则 θ 越大，故 $\hat{\theta}_{MLE}=x_{(1)}$；从而最大似然估计量

$\hat{\theta}_{MLE}=X_{(1)}$；这里，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

8. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu;\\ 0, & x<\mu;\end{cases}$，其中 μ 是已知参数，

$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，

（1）求 A；（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;\sigma^2)dx=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx=A\cdot\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}d(\frac{x-\mu}{\sigma})\xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}A\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$

$=\frac{A}{2}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=A\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1$，即有：$A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本值，考虑 σ^2 的似然函数，

$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=A^n\cdot(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

$\ln L(\sigma^2)=n\cdot\ln A-\frac{n}{2}\cdot\ln(\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$；令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}$

$=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^4}=0$，即有：$\sigma^2$ 的最大似然估计值

$\hat{\sigma}^2_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$；从而，$\sigma^2$ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

9. (1) 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本值，考虑似然函数 $L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$，

$\ln L(\sigma)=-n\cdot\ln 2-n\cdot\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$；令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，即有：$\sigma$的最大似然估计值 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$；从而，$\sigma$的最大似然估计量 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$；

9. 设总体X的概率密度为：$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$，其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体$X$的简单随机样本；记$\sigma$的最大似然估计为$\hat{\sigma}$，(1) 求$\hat{\sigma}$；(2) 求$E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$；(3) 证明$\hat{\sigma}$是$\sigma$的相合估计量.

(2) $E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X|=E|X|$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx$

$=\sigma\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\sigma}\cdot e^{-\frac{x}{\sigma}}d(\frac{x}{\sigma})\xlongequal{令\frac{x}{\sigma}=t}\sigma\cdot\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-t}dt=\sigma\cdot\Gamma(2)=\sigma$，$D(\hat{\sigma})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i|)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X|)=\frac{1}{n}D(|X|)$，

这里，$E(|X|^2)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x;\sigma)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\sigma^2\int_0^{+\infty}(\frac{x}{\sigma})^2 e^{-(\frac{x}{\sigma})}d(\frac{x}{\sigma})\xlongequal{令\frac{x}{\sigma}=t}\sigma^2\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$

$=\sigma^2\Gamma(3)=2\sigma^2$，从而，$D(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}[D(|X|)]=\frac{1}{n}[E(|X|^2)-(E(|X|))^2]=\frac{1}{n}\sigma^2$；

(3) 由(2)，$\forall\varepsilon>0$，$P\{|\hat{\sigma}-\sigma|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(\hat{\sigma})}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\to 0$，$n\to\infty$，即：

$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\sigma}-E(\hat{\sigma})|\geq\varepsilon)=0$，也即：$\hat{\sigma}\xrightarrow{P}E(\hat{\sigma})=\sigma$，即：

$\hat{\sigma}$是σ的相合(一致)估计量！

10. 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做n次测量，该物体的质量μ是已知的，设n次测量结果$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且均服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是n次测量的绝对误差$Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$估计$\sigma$；

(1) 求Z_1的概率密度；(2) 利用一阶矩求σ的矩估计量；

(3) 求σ的最大似然估计量.

(1) $\forall z\leq 0$，$F_{Z_1}(z)=P(Z_1\leq z)=0$；$\forall z>0$，$F_{Z_1}(z)=P(Z_1\leq z)=P(|X_1-\mu|\leq z)=P(|\frac{X_1-\mu}{\sigma}|\leq\frac{z}{\sigma})=2\Phi(\frac{z}{\sigma})-1$；即：$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & z\leq 0;\\ 2\Phi(\frac{z}{\sigma})-1, & z>0;\end{cases}$ 令$Z_1\sim f_{Z_1}(z)$，即：

$f_{Z_1}(z)=\frac{d}{dz}F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & z\leq 0;\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0.\end{cases}$ (2) 视$(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$为取自总体$Z\sim f_{Z_1}(z)$的样本，

由$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot f_{Z_1}(z)dz=\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma})^2}dz\xlongequal{\frac{z}{\sigma}=x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\cdot\int_0^{+\infty}x e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ ~~令$x=\sqrt{2t}$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\cdot\int_0^{+\infty}\sqrt{2t}$~~

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\cdot(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^{+\infty})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$，即：$\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}EZ$，用$\bar{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i$替换$EZ$，即有$\sigma$的矩估计量

$\hat{\sigma}_{ME}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{Z}$；(3) 设$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$为取自$Z$的样本值，考虑$\sigma$的似然函数 $L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma)$

这里，~~f~~ $f(z_i;\sigma)=f_{Z_1}(z_i)=\begin{cases}0, & z_i\leq 0;\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}, & z_i>0.\end{cases}$ 即有：$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}$，$z_i>0$

$=(\frac{2}{\pi})^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{\sigma^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{2\sigma^2}}$，$\ln L(\sigma)=\frac{n}{2}\ln(\frac{2}{\pi})-n\cdot\ln\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{2\sigma^2}$，令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{\sigma^3}=0$.

即有：σ的最大似然估计值：$\hat{\sigma}_{MLE}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$；从而，$\sigma$的最大似然估计量为

$\hat{\sigma}_{MLE}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

11、设 $X \sim f(x;\theta)$，即有：$f(x;\theta) = \frac{d}{dx}F(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

(1) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx \xlongequal{令x=\sqrt{\theta t}} \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{\theta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{\theta} \cdot \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt$

$= \sqrt{\theta} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\theta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$；

11. 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 未知，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，

（1）求 $EX, E(X^2)$；（2）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；

$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx \xlongequal{令x=\sqrt{\theta t}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\theta t} \cdot 2t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{\theta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \theta \cdot \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \theta \cdot \Gamma(2)$

$= \theta$；

(2) 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本值，考虑 θ 的似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) = \frac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2}$，

$\ln L(\theta) = n\ln 2 + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - n \cdot \ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2$，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$，即有 θ 的

最大似然估计值 $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$；从而，$\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$；

（2） 是否存在实数 a，使得 $\forall \varepsilon > 0$，都有 $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - a\right| \ge \varepsilon\right) = 0$.

(3) 由 $E(\hat{\theta}_n) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX^2 = EX^2 = \theta$，$D(\hat{\theta}_n) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n DX_i^2$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X^2) = \frac{1}{n}D(X^2)$，这里，$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} x^4 \cdot \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx \xlongequal{令x=\sqrt{\theta t}}$

$\int_0^{+\infty} \theta^2 t^2 e^{-t}dt = \theta^2 \cdot \Gamma(3) = 2\theta^2$，$D(X^2) = EX^4 - (EX^2)^2 = \theta^2$，由 Chebyshev 不等式，$\forall \varepsilon > 0$，

$P(|\hat{\theta}_n - \theta| \ge \varepsilon) = P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \to 0$，$n\to\infty$，即：$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} a = \theta$

或由 Khinchine 大数定律，$X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 独立同分布，且 $EX_i^2 = EX^2 = \theta$，即有：

$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} EX^2 = \theta$，

习题 7.3

1. 从正态总体 $N(3.4, 6^2)$ 中抽取一容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问：样本容量 n 至少应为多大？

易见，样本均值 $\overline{X} \sim N(3.4, \frac{6^2}{n})$，由 $P(\overline{X} \in (1.4, 5.4)) = P(-2 < \overline{X} - 3.4 < 2)$

$= P(\frac{-2}{6/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{2}{6/\sqrt{n}}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1 \ge 0.95$，即：$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.975 = \Phi(1.96)$

即有：$\frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.96$，$n \ge (3 \times 1.96)^2$，也即有：$n \ge 35$.

2. 已知一批零件的长度（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu, 1^2)$，从中随机抽取 16 个，得到长度的平均值为 $40cm$，试求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

易见，样本均值 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{16})$，即有：$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{4}} \sim N(0, 1^2)$；对于给定的置信度 $1-\alpha = 0.95$

由 $P(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{4}}\right| < u_{0.025}) = P(\overline{X} - \frac{1}{4}u_{0.025} < \mu < \overline{X} + \frac{1}{4}u_{0.025}) = 0.95$，即：随机区间 $(\overline{X} - \frac{1}{4}u_{0.025}, \overline{X} + \frac{1}{4}$

以 0.95 的概率包含未知参数 μ 的真值，即为 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

对于 $\bar{x} = 40$，$u_{0.025} = 1.96$，即得置信区间 $(40 - \frac{1}{4} \cdot 1.96, 40 + \frac{1}{4} \cdot 1.96) = (40 - 0.49, 40 + 0.49)$.

4. 设总体 $X \sim N\left(\mu, 2.8^2\right)$，现抽取一容量为10的样本，且有 $\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i=1500$；

(1) 试求 μ 的置信水平为0.95的置信区间；由 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{2.8^2}{10})$，且 $P(-u_{0.025}<\frac{\overline{X}-\mu}{2.8/\sqrt{10}}<u_{0.025})=0.95$，即有：$\mu$ 的0.95的置信区间 $(\overline{X}-\frac{2.8}{\sqrt{10}}u_{0.025}, \overline{X}+\frac{2.8}{\sqrt{10}}u_{0.025})$，$u_{0.025}=1.96$，$\bar{x}=1500$，即得置信水平 $(1500-\frac{2.8}{\sqrt{10}}\cdot 1.96, 1500+\frac{2.8}{\sqrt{10}}\cdot 1.96)$.

(2) 欲使置信水平为0.95的置信区间长度小于1，样本容量 n 至少为多少？

由 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{2.8^2}{n})$，且 $P(-u_{0.025}<\frac{\overline{X}-\mu}{2.8/\sqrt{n}}<u_{0.025})=0.95$，欲使 μ 的0.95的置信区间 $(\overline{X}-\frac{2.8}{\sqrt{n}}u_{0.025}, \overline{X}+\frac{2.8}{\sqrt{n}}u_{0.025})$ 的长度 $2\cdot\frac{2.8}{\sqrt{n}}u_{0.025}=2\cdot\frac{2.8}{\sqrt{n}}\cdot 1.96<1$，必须 $n \geq 121$.

(3) 若 $n=100$，随机区间 $\left(\overline{X}-\frac{1}{2}, \overline{X}+\frac{1}{2}\right)$ 作为 μ 的置信区间，其置信水平为多少？ $n=100$，$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{2.8^2}{100})$，即有：

$$P(\overline{X}-\frac{1}{2}<\mu<\overline{X}+\frac{1}{2})=P(-\frac{1}{2}<\overline{X}-\mu<\frac{1}{2})=P(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2.8}{10}}<\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{2.8}{10}}<\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2.8}{10}})=\phi(\frac{5}{2.8})-\phi(-\frac{5}{2.8})$$

$$=2\phi(\frac{5}{2.8})-1=0.925.$$

5. 设总体 X 有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>\theta; \\ 0, & x \leq \theta; \end{cases}$，$-\infty<\theta<+\infty$；$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为抽自该总体的样本；

(1) 证明：$X_{(1)}-\theta$ 的分布与 θ 无关，并求此分布；

$\forall x \leq 0$，$F(x)=P(X_{(1)}-\theta \leq x)=0$；$\forall x>0$，$F(x)=P(X_{(1)}-\theta \leq x)=P(X_{(1)} \leq \theta+x)$

$=1-P(X_{(1)}>\theta+x)=1-P(\bigwedge_{i=1}^{n} X_i>\theta+x)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>\theta+x\})=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>\theta+x)$

$=1-\prod_{i=1}^{n}\int_{\theta+x}^{+\infty}e^{-(x-\theta)}dx=1-e^{-nx}$；即：$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-nx} & , x>0. \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$ 也即：

$X_{(1)}-\theta \sim E(n)$.

(2) 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

选择 $X_{(1)}-\theta$ 作为区间估计的枢轴量，由 $P(0<X_{(1)}-\theta<-\frac{1}{n}\ln\alpha)=F(-\frac{1}{n}\ln\alpha)$ $=1-e^{-n\cdot(-\frac{1}{n}\ln\alpha)}=1-\alpha$，即：$P(X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\alpha<\theta<X_{(1)})=1-\alpha$，即有 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间：$(X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\alpha, X_{(1)})$.