第四章

张小玲　　安徽大学物质科学与信息技术研究院

第四章

随机变量的数字特征

第一节　数学期望

一、离散型随机变量的数学期望

二、连续型随机变量的数学期望

三、随机变量的函数的数学期望

四、多维随机变量的函数的数学期望

五、数学期望的性质

4.1.1 离散型随机变量的数学期望

1. 定义

设离散型随机变量X的分布律为$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\ldots$。

若$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k<+\infty$,则称$\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$为随机变量$X$的数学期望，简称期望或均值，记为$E(X)$,即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k\,.$$

关于定义的几点说明

(1) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$是一个实数, 而非变量, 它是一种加权平均, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 $\boldsymbol{X}$ 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变 ,之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量 $\boldsymbol{X}$ 取可能值的平均值, 它不应随可能值的排列次序而改变.

(3) 随机变量的数学期望由概率分布唯一确定，不同于变量的算术平均值.

4.1.1 离散型随机变量的数学期望

例4.1.2　彩票发行的例子：发行彩票100万张，每张5元。设头等奖5个，奖金各31.5万；二等奖95个，奖金各5000元；三等奖900个，奖金各300元；四等奖9000个，奖金各20元。

解 以X记一张彩票的奖金额，分布律为

X	315000	5000	300	20	0
P	$\frac{5}{1000000}$	$\frac{95}{1000000}$	$\frac{900}{1000000}$	$\frac{9000}{1000000}$	$\frac{990000}{1000000}$

因此每张彩票中奖期望为

$$E(X)=315000\times\frac{5}{1000000}+5000\times\frac{95}{1000000}+300\times\frac{900}{1000000}+20\times\frac{9000}{1000000}$$
$$=2.5\text{元}$$

彩票中奖与否是随机的，但彩票的平均所得是可以计算出的

4.1.1 离散型随机变量的数学期望

2. 常见的离散型随机变量的数学期望

1 0–1分布　　设X服从参数为p的0–1分布，求$E(X)$.

解 X 的分布律为

$$p_k = P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k} \qquad k = 0, 1. (0 < p < 1)$$

因此　$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

4.1.1 离散型随机变量的数学期望

2 二项分布　　设$X \sim B(n,p)$，求$E(X)$.

解 X 的分布律为 $p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$,

$$k = 0, 1, 2 \ldots, n, q = 1 - p.$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np(p+q)^{n-1}$$

$$= np$$

3 泊松分布　设$X\sim P(\lambda)$，求$E(X)$.

解 X 的分布律为

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, \dots$$

因此

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}$$

$$= \lambda$$

4.1.1 离散型随机变量的数学期望

4 几何分布　　设$X \sim G(p)$，求$E(X)$.

解 X 的分布律为 $p_k = P\{X=k\} = q^{k-1}p$，　$k = 1, 2 \dots, q = 1-p$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)'\Big|_{x=q} = p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\Big)'\Big|_{x=q}$$

$$= p\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Big|_{x=q} = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

4.1.2 连续型随机变量的数学期望

3. 连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量X的密度函数为$f(x)$.若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ **绝对收敛**，**则称此积分值为**X的**数学期望**，简称为**期望**或**均值**，

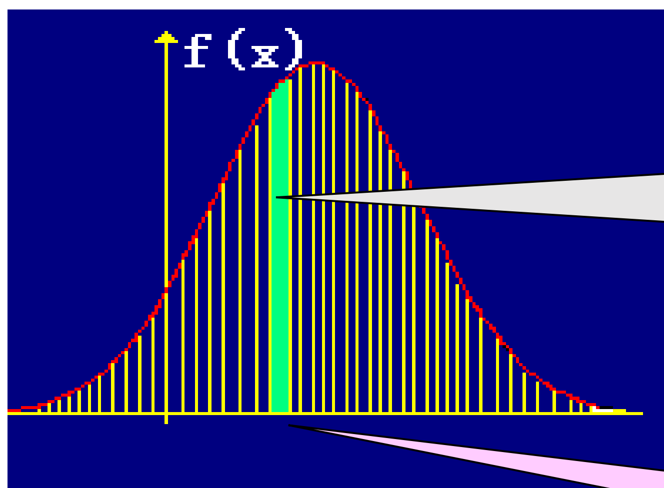
记为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\approx f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)$$

$$= f(x_i)\Delta x_i$$



The shadow area is approximately $f(x_i)\Delta x_i$

Small interval $[x_i\,,\,x_{i+1}\,)$

4. 常见的连续型随机变量的数学期望

1 均匀分布　　设$X\sim U(a,b)$，求$E(X)$.

解 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

均匀分布的数学期望位于区间(a,b)的中点

4.1.2 连续型随机变量的数学期望

2 指数分布　　设$X \sim E(\lambda)$，求$E(X)$.

解 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

4.1.2 连续型随机变量的数学期望

3 正态分布　　设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$E(X)$.

解 X的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu$$

$N(\mu, \sigma^2)$中的参数μ正是它的数学期望

4.1.2 连续型随机变量的数学期望

4 Γ分布　　设$X \sim \Gamma(r,\lambda)$，求$E(X)$.

解 X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^r e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}x^r e^{-x}dx=\frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)}=\frac{r}{\lambda}$$

5 对数正态分布　　设$X \sim LN(\mu,\sigma^2)$，则数学期望$E(X)$为

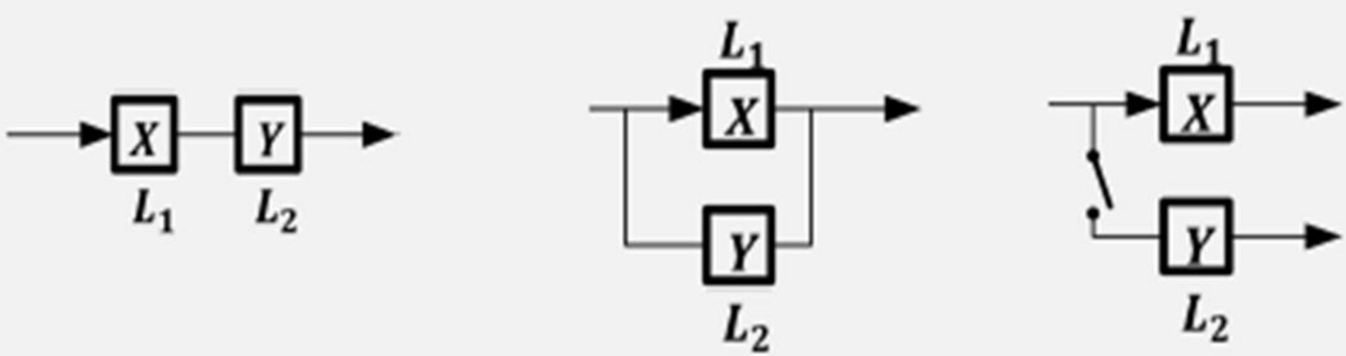
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

The Mathematical Expectation of Continuous Random Variables

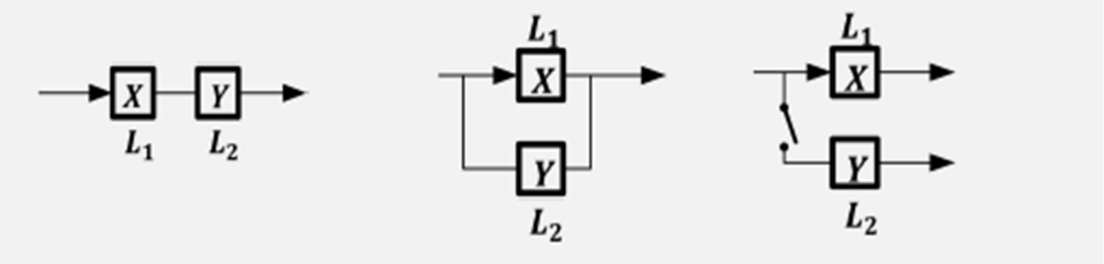
Example 3: Assuming that a system L has three connection modes, and its life Z is a random variable, it is now known that the probability densities of the respective lifespans of these three connection modes are:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的密度函数.



The Mathematical Expectation of Continuous Random Variables



$(\alpha > 0,\ \beta > 0)$

Z_1 (series):

$$f_{\min} = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

Z2 (parallel)

$$f_{max} = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

Z3 (spare)

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}] & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

Find: Which of the connection methods has the longest average life?

The Mathematical Expectation of Continuous Random Variables

Answer: According to the meaning of the question, when z>0, the mathematical expectations are:

$$f_{\min} = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$E(Z_1) = (\alpha+\beta)\int_0^{+\infty} z e^{-(\alpha+\beta)z} dz = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

The Mathematical Expectation of Continuous Random Variables

Answer: According to the meaning of the question, when z>0, the mathematical expectations are:

$$f_{max} = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$E(Z_2) = \int_0^{+\infty} z\alpha e^{-\alpha z} dz + \int_0^{+\infty} z\beta e^{-\beta z} dz - \int_0^{+\infty} z(\alpha+\beta) e^{-(\alpha+\beta)z} dz$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha+\beta}$$

The Mathematical Expectation of Continuous Random Variables

Answer: According to the meaning of the question, when z>0, the mathematical expectations are:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}] & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$E(Z_3)=\int_0^{+\infty} z[\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z}-e^{-\alpha z})]dz \quad =\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

Obviously: $E(Z_3)>E(Z_2),\ E(Z_2)-E(Z_1)=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}>0$

Therefore, Z_3 has the longest lifespan in the spare connection mode.

4.1.3 随机变量的函数的数学期望

一维随机变量函数的数学期望

问题

已知随机变量X的分布，如何求随机变量X的函数$Y=g(X)$的数学期望?

思路

先利用X的分布求出$Y=g(X)$的分布，然后根据数学期望的定义求出Y的数学期望。然而在一定条件下，可以直接利用X的分布直接求$Y=g(X)$的数学期望，而不必先求$Y=g(X)$的分布。

4.1.3 随机变量的函数的数学期望

定理4.1.1 设X是随机变量，$Y=g(X)$**是X的函数**

（1）设X是离散型随机变量，且分布律为$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\dots$. 若级数$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$绝对收敛，则随机变量$Y=g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

4.1.3 随机变量的函数的数学期望

例 设离散随机变量X的概率分布为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_n)$	$\cdots$

则随机变量$Y=g(X)$的概率分布

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
$p(y)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_n)$	$\cdots$

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p(x_i)$$

4.1.3 随机变量的函数的数学期望

例4. 1. 5 设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

对X独立重复观察4次，Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求Y^2的数学期望.

解 由题意 $P\left(X>\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=1-\sin\frac{\pi}{6}=0.5$

故Y的分布律为

$$P(X=k)=C_4^k 0.5^k 0.5^{4-k}=C_4^k 0.5^4 \quad k=0,1,2,3,4.$$

根据定理4.1.1

$$E\left(Y^2\right)=\sum_{k=0}^{4}k^2 C_4^k 0.5^4=5$$

也可以先利用Y**的分布求出**Y^2**的分布，然后根据数学期望的定义求出**Y^2**的数学期望。**

4.1.3 随机变量的函数的数学期望

定理4.1.2 设X是随机变量，$Y=g(X)$是X的函数

（2）设连续型随机变量X密度函数为$f(x)$.若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则随机变量$Y=g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

例4. 1. 6 设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le x\le 2\pi,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

求$Y=|\sin X|$的数学期望.

解 根据定理4.1.1 $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

$$E(Y)=E|\sin X|$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|\sin x|f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2\pi}|\sin x|dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right]\quad=\frac{2}{\pi}$$

多维随机变量函数的数学期望

问题

已知多维随机变量$(X_1, X2, \dots, Xn)$**的分布，如何求多维随机变量的函数** $Z = g(X_1, X2, \dots, Xn)$**的数学期望?**

常规思路

利用多维随机变量$(X_1, X2, \dots, Xn)$**的分布，求出多维随机变量的函数** $Z = g(X_1, X2, \dots, Xn)$**的分布，然后根据定义求出$Z$的数学期望?**

新方法

直接利用$(X_1, X2, \dots, Xn)$的分布求$Z = g(X_1, X2, \dots, Xn)$的数学期望

定理4.1.3 设(X,Y)是二维随机变量， $Z=g(X,Y)$是(X,Y)的函数

（1）设(X,Y)是二维离散型随机变量，且分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\dots.$$

若级数$\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则随机变量$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E(X)=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}=\sum_i x_i p_{i\cdot}$$

$$E(Y)=\sum_i\sum_j y_j p_{ij}=\sum_j y_j p_{\cdot j}$$

4.1.4 多维随机变量的函数的数学期望

例. 设二维离散型随机变量(X,Y)具有如下分布律:

X	Y		
	-1	0	1
0	1/6	1/4	1/6
1	1/8	1/6	1/8

设$Z=\sin[\pi(X+Y)/2]$,求$E(Z)$.

解

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E(Z)=E\sin[\pi(X+Y)/2]$$

$$=\sin[\frac{\pi(0-1)}{2}]\times\frac{1}{6}+sin[\frac{\pi(0+0)}{2}]\times\frac{1}{4}+sin[\frac{\pi(0+1)}{2}]\times\frac{1}{6}$$

$$+\sin[\frac{\pi(1-1)}{2}]\times\frac{1}{8}+sin[\frac{\pi(1+0)}{2}]\times\frac{1}{6}+sin[\frac{\pi(1+1)}{2}]\times\frac{1}{8}\qquad=\frac{1}{6}$$

4.1.4 多维随机变量的函数的数学期望

定理4.1.4 设(X,Y)是二维随机变量，$Z=g(X,Y)$是(X,Y)的函数

（2）设(X,Y)是连续型随机变量,密度函数为$f(x,y)$.若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$ 绝对收敛，则随机变量$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

4.1.4 多维随机变量的函数的数学期望

例4.1.9 在长为a的线段上任取两个点X和Y，求此两点间的平均距离。

解 由题意知，X和Y都服从$(0,a)$上的均匀分布，且X和Y相互独立，所以(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & 0<x<a, 0<y<a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

令Z=|x-y|

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(Z)=E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^a\int_0^a\frac{1}{a^2}|x-y|dxdy$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a dx\left[\int_0^x(x-y)dy+\int_x^a(y-x)dy\right]=\frac{a}{3}$$

4.1.5 数学期望的性质

性质1 设C为常数，则$E(C)=C$.

性质2 设X为一个随机变量，C为常数，则$E(CX)=CE(X)$.

性质3 设X, Y为任意的两个随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

性质4 设X, Y为两个相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$.

性质3和4可以推广到有限个随机变量的和及积的情况

性质3推广 一般地，设$X_1, X_2, \ldots, Xn$为n个随机变量，则$E(X_1+X_2+\cdots+$

性质4推广 若随机变量$X_1, X2, \ldots, Xn$相互独立，则 $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

4.1.5 数学期望的性质

性质1 设$\boldsymbol{C}$为常数，则$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$.

证明 $E(X)=E(c)=1\times c=c.$

性质2 设X为一个随机变量，$\boldsymbol{C}$为常数，则$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{CX}) = \boldsymbol{CE}(\boldsymbol{X})$.

证明
$$
\begin{aligned}
E(cX) &= \sum_k c x_k p_k \\
&= c\sum_k x_k p_k \\
&= cE(X).
\end{aligned}
$$

4.1.5 数学期望的性质

性质3 设X, Y为任意的两个随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明1：（离散型随机变量的情况）

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_{i\cdot}+\sum_{j=1}^{+\infty}y_j p_{\cdot j}=E(X)+E(Y).$$

4.1.5 数学期望的性质

性质3 设X, Y为任意的两个随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明2：（连续型随机变量的情况）设(X, Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,边缘密度函数为$f_X(x)$和$f_Y(y)$,根据定理4.1.2

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_y(x)dy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

4.1.5 数学期望的性质

性质4 设X, Y为两个**相互独立的**随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$.

性质4推广 若随机变量X_1, X2, …, Xn相互独立，则$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

证明：（连续型随机变量的情况）设(X, Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,边缘密度函数为$f_X(x)$和$f_Y(y)$,若X, Y相互独立，

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \quad =E(X)E(Y)$$

小结

1.数学期望是一个实数，而非变量,它是一种**加权平均**，与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质：

$$\begin{cases} 1^0 \quad E(C)=C; \\ 2^0 \quad E(CX)=CE(X); \\ 3^0 \quad E(X+Y)=E(X)+E(Y); \\ 4^0 \quad X,Y \text{ 独立} \Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y). \end{cases}$$

小结

3.常见离散型随机变量的数学期望

分布	分布律	$E(X)$
(0-1)分布 $X\sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np
泊 松 分 布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$

小结

4.常见连续型随机变量的数学期望

分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布 $X \sim U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布 $X \sim E(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$

5. 随机变量函数的数学期望

定理4.1.1 设X是随机变量，$Y=g(X)$是X的函数

（1）设X是离散型随机变量，且分布律为$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\ldots$. 若级数$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$绝对收敛，则随机变量$Y=g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

（2）设连续型随机变量X密度函数为$f(x)$.若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则随机变量$Y=g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

小结

定理4.1.2 设(X,Y)是二维随机变量， $Z=g(X,Y)$是(X,Y)的函数

（1）设(X,Y)是二维离散型随机变量，且分布律为$P\left(X=x_i,Y=y_j\right)=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$.若级数$\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则随机变量$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E(X)=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}=\sum_i x_i p_{i\cdot} \qquad E(Y)=\sum_i\sum_j y_i p_{ij}=j\sum y_j p_{\cdot j}$$

（2）设(X,Y)是连续型随机变量,密度函数为$f(x,y)$.若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$ 绝对收敛，则随机变量$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx \quad E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$