第三节　区间估计

一、区间估计的基本概念

二、正态总体均值的区间估计

三、正态总体方差的区间估计

7.3.1 区间估计的基本概念

区间估计的基本思想

前面所学的矩估计法和最大似然估计法统称为点估计, 其估计值作为未知参数的近似值给人一个明确的数量概念, 这是很有用的, 但是估计值作为未知参数的近似值, 其精确度多高? 误差范围多大? 可信程度如何? 点估计本身没有给出回答, 区间估计在一定意义下弥补了点估计的上述缺陷.

所谓区间估计, 就是用一个区间作为未知参数的估计范围. 说得明确一点就是由样本构造一个区间, 使其包含未知参数具有事先指定的概率(可信程度).

7.3.1 区间估计的基本概念

一支笔有多长?

珠穆朗玛峰有多高?

它们真实的数值我们永远不可能知道. 测量数据总会带有误差.

7.3.1 区间估计的基本概念

定义7.3.1 设总体X的分布中含有未知参数θ，$\theta \in \Theta$，$(X_1, X_2, \dots, X_n)$为总体X的样本。

如果存在统计量$T_1 = T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$，$T_2 = T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$，使得对任意的$\theta \in \Theta$，均有$P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha$,则称$(\mathrm{T}_1, T_2)$为参数$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的**置信区间**，$\mathrm{T}_1, T_2$分别称为$\theta$的**置信下限**和**置信上限**。

$1 - \alpha$称为**置信度（置信水平）**，α称为**显著性水平**。

7.3.1 区间估计的基本概念

总体：X 置信度(置信水平) ⇐ 给定的常数：$1-\alpha(0<\alpha<1)$

一维参数：θ 置信下限 ⇐ 统计量：$T_1=T_1(X_1,\cdots,X_n)$

样本：$X_1,\cdots,X_n$ 置信上限 ⇐ 统计量：$T_2=T_2(X_1,\cdots,X_n)$

若满足$P(\boxed{T_1}<\theta<\boxed{T_2})\geq\boxed{1-\alpha}$

(T_1,T_2) 置信区间(双侧)

若满足$P(T_1<\theta)\geq 1-\alpha$

若满足$P(\theta<T_2)\geq 1-\alpha$

$$\left.\begin{matrix}(T_1,+\infty)\\ \\(-\infty,T_2)\end{matrix}\right\}\text{置信区间(单侧)}$$

7.3.1 区间估计的基本概念

几点注意

(1)一般情况下取(T_1,T_2)使$P(T_1<\theta<T_2)=1-\alpha$即可.

(2) 不能理解成 θ 落在(T_1, T_2)的概率为$1-\alpha$.应解释为随机区间 (T_1, T_2)以$1-\alpha$的概率包含未知参数θ的真值。

(3) 置信度增大, 则置信区间变长, 精度降低; 置信度减小, 则置信区间变短, 精度提高.

一般的处理方法是:在保证置信水平较大的前提下, 区间长度要尽量小.

7.3.1 区间估计的基本概念

枢轴量法

(1) 构造样本函数$Y=g(X_1,\cdots,X_n;\theta)$,除$\theta$外无其他未知参数,且$Y$的分布完全已知，$Y$即为枢轴量;

(2)对于给定的置信水平$1-\alpha$,确定常数c,d,使得$P(c<Y<d)=1-\alpha$;

(3)对不等式$c<Y<d$作等价变形，得到$T_1<\theta<T_2$,则

$$P(T_1<\theta<T_2)=P(c<Y<d)=1-\alpha$$

从而得到置信区间(T_1,T_2).

7.3.1 区间估计的基本概念

重点讨论：单个正态总体的双侧区间估计

前提条件: 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，样本为 $X_1,\cdots,X_n$，置信度为 $1-\alpha$.

3个问题:

（1）当 σ^2 已知时，求 μ 的置信区间；

（2）当 σ^2 未知时，求 μ 的置信区间；

$\Big\}$ 正态总体均值的区间估计

（3）求 σ^2 的置信区间. 正态总体方差的区间估计

7.3.2 正态总体均值的区间估计

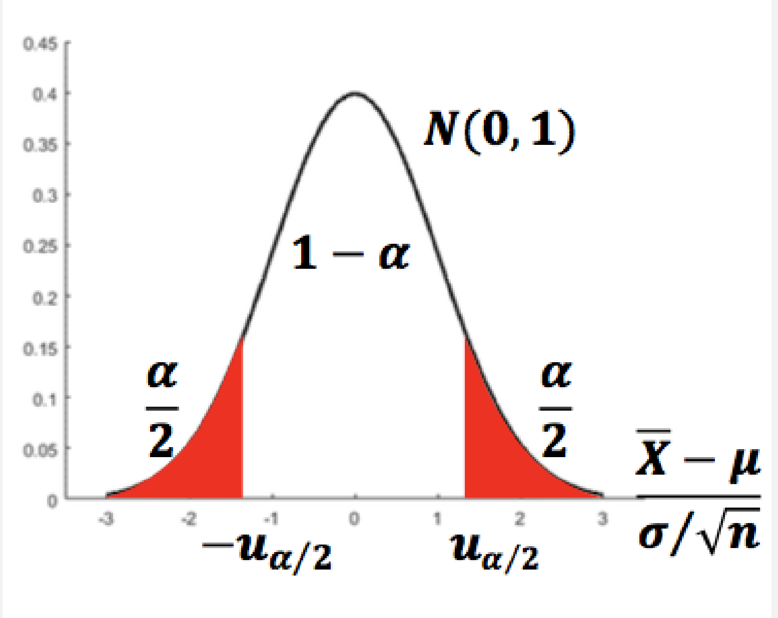
（1） 总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2已知, 求μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间；

枢轴量

$$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),\qquad \boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}\sim N(0,1),$$

$$\Rightarrow P\left(-u_{\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha,$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha,$$



μ的置信区间：$\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

7.3.2 正态总体均值的区间估计

置信区间的结果是唯一的吗？

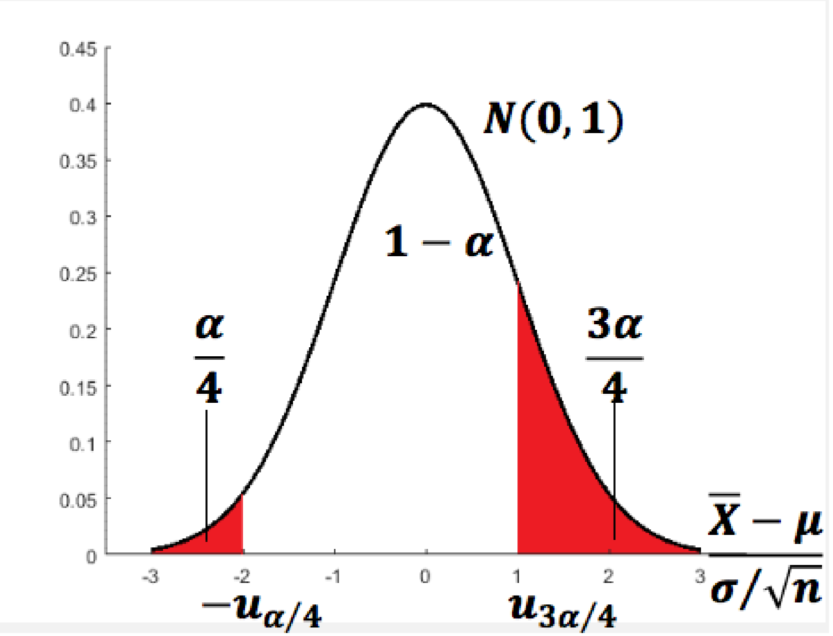
$$P\left(-u_{\alpha/4} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{3\alpha/4}\right) = 1-\alpha,$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{X} - u_{3\alpha/4}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + u_{\alpha/4}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1-\alpha.$$

μ 的另一个置信区间：

$$\left(\overline{X} - u_{3\alpha/4}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/4}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

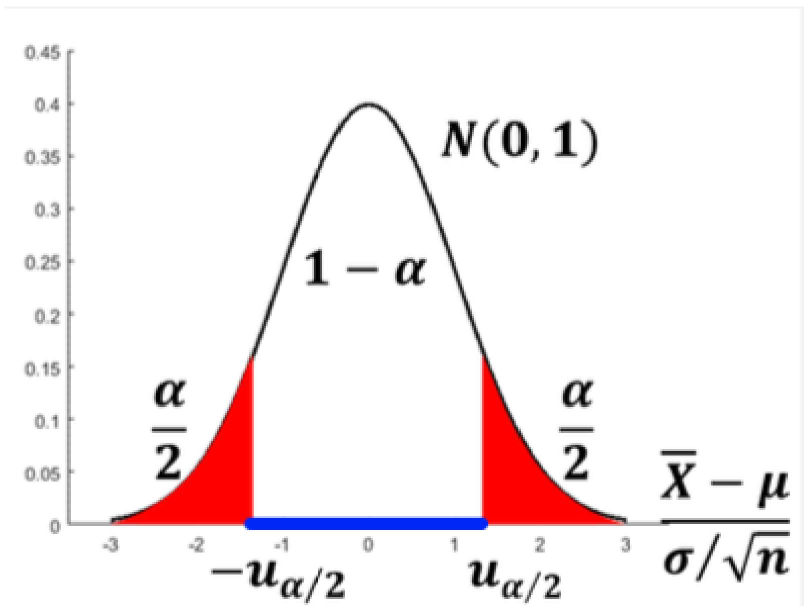


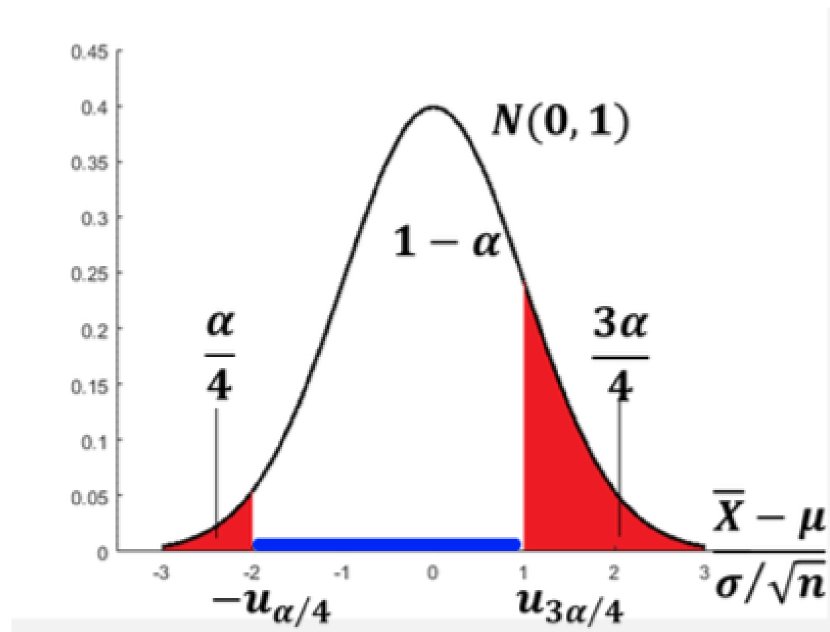
置信区间的结果不唯一

7.3.2 正态总体均值的区间估计

置信区间 $\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$ √ $\left(\bar{X}-u_{3\alpha/4}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/4}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

区间长度 $[u_{\alpha/2}-(-u_{\alpha/2})]\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}.$ 短 $[u_{\alpha/4}-(-u_{3\alpha/4})]\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}.$ 长



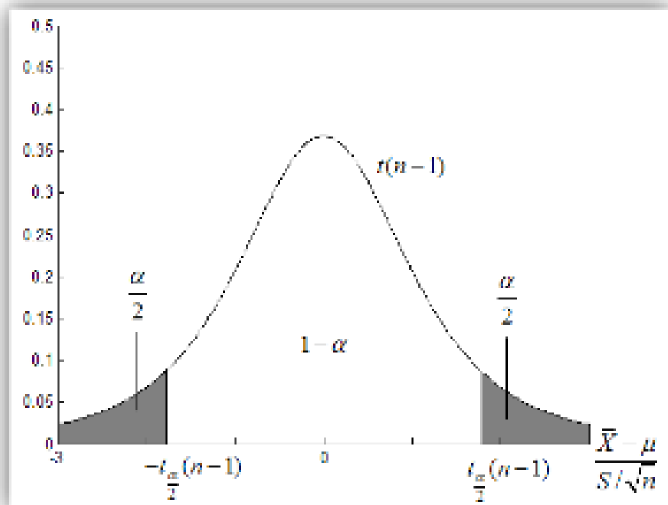


7.3.2 正态总体均值的区间估计

（2）总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2未知, 求μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间；

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}} \sim t(n-1),$$

枢轴量



$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

μ的置信区间：

$$\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

7.3.2 正态总体均值的区间估计

例1 从某厂生产的滚珠中随机抽取 10 个, 测得直径(单位:mm)为

14.6, 15.0, 14.7, 15.1, 14.9, 14.8, 15.0, 15.1, 15.2, 14.8.

设滚珠的直径服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 求μ的置信度为0.95的置信区间.

解 $\bar{X}=14.92$,

$s=0.193$,

$n=10$,

$1-\alpha=0.95$,

当σ^2未知时, 求μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间;

代入 $\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$

$$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.262$$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

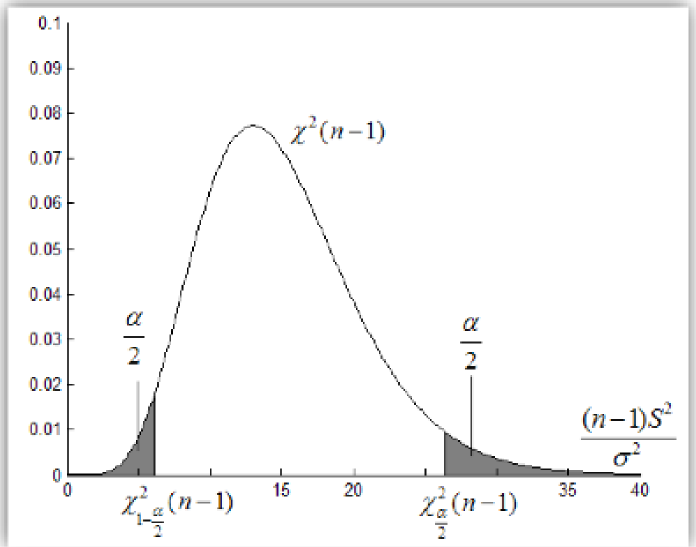
$$\left(14.92\pm 2.262\times\frac{0.193}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=(14.782,15.058).$$

7.3.3 正态总体方差的区间估计

（3） 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ未知， 求σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间；

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} \sim \chi^2(n-1),$$

枢轴量



$$\Rightarrow P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

σ^2的置信区间：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

小结

1. 区间估计

根据一个实际样本，由给定的置信水平，我们求出一个尽可能小的区间(T_1,T_2)，使 $P(T_1<\theta<T_2)=1-\alpha$，称区间 (T_1,T_2) 为θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

2. 单个正态总体的双侧区间估计

(1) 当 $\boldsymbol{\sigma}$2 已知时， $\boldsymbol{\mu}$ 的置信区间； $\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

(2) 当 $\boldsymbol{\sigma}$2 未知时， $\boldsymbol{\mu}$ 的置信区间；$\left(\bar{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right),$

(3) $\boldsymbol{\sigma}$2 的置信区间. $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$