安徽大学 20__19__—20__20__学年第__一__学期

《 概率论与数理统计 A 》考试试题（A 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 0.6　　7. $e^{-\lambda}$　　8. 1　　9. $\frac{1}{2}-e^{-1}$　　10. $\frac{20}{27}$

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

11. 解：记 $A_i(i=0,1,2,3)$ 表示事件“第一次取到 i 个新球”，B 表示事件“第二次取到 2 个新球”，根据古典概型有

$$P(A_0)=C_3^3/C_{12}^3=1/220,\qquad P(A_1)=C_3^2C_9^1/C_{12}^3=27/220,$$
$$P(A_2)=C_3^1C_9^2/C_{12}^3=27/55,\quad P(A_3)=C_9^3/C_{12}^3=21/55.$$

在第一次取得取到 i 个新球的情况下，第二次取球是在 $9-i$ 个新球，$3+i$ 个旧球中任取 3 个球，于是有，

$$P(B|A_0)=C_3^1C_9^2/C_{12}^3=27/55,\qquad P(B|A_1)=C_4^1C_8^2/C_{12}^3=28/55,$$
$$P(B|A_2)=C_5^1C_7^2/C_{12}^3=105/220,\quad P(B|A_3)=C_6^1C_6^2/C_{12}^3=90/220.$$
............6 分

（1）由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=1377/3025\approx 0.455;$$

（2）由 Bayes 公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{7}{51}\approx 0.137.$$
..........................12 分

12. 解：（1）由于 $f(x)$ 为概率密度函数，所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}k\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=k,$$

又 $P(X>1)=0.5$，所以 $0.5=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=e^{-\frac{1}{\theta}}$，从而 $\theta=\frac{1}{\ln 2}$． ....6 分

（2）由于 $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，所以，当 $x<0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$；当 $x\ge 0$ 时，$F_X(x)=\int_0^x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt=1-e^{-\frac{x}{\theta}}=1-e^{-x\ln 2}=1-2^{-x}$. 故随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\ge 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$ ....12 分

13. 解：（1）所求概率为

$$\begin{aligned}P(100\le X\le 120)&=\Phi\left(\frac{120-110}{10}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{10}\right)\\&=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.\end{aligned}$$ ....6 分

（2）由于 $P(X>x)\le 0.05$，所以 $P(X\le x)\ge 0.95$，即 $\Phi\left(\frac{x-110}{10}\right)\ge\Phi(1.65)$，从而 $x\ge 126.5$，故最小的 x 为 126.5. ....12 分

14. 解：（1）因为

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}[\int_{x^2}^{1}Cx^2ydy]dx=\frac{4}{21}C,$$

所以 $C=\frac{21}{4}$. ....6 分

（2）$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy=\int_0^1[\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2ydy]dx=\frac{3}{20}$. ....12 分

15. 解：（1）由于区域 G 的面积为 $S=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{6}$，故 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$ ....6 分

（2）X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ......12 分

16. 解：（1）由联合分布律的性质知，所有概率之和为 1，即

$$0.1+0.2+0.3+0.05+0.1+a+0.1=0.85+a=1,$$

故有 $a=0.15$． ....4 分

（2）由 (X,Y) 的联合分布律得 X,Y 的边缘分布律分别为

X	0	1	2
P	0.3	0.45	0.25

Y	-1	0	2
P	0.55	0.25	0.2

....8 分

（3）由 (X,Y) 的联合分布律得

$$\begin{aligned}P(XY=0)&=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)\\&=0.1+0.2+0.05=0.35.\end{aligned}$$ ....12 分

四、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

17. 证明：随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^x 2tdt=x^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

故

$$Y=F(X)=\begin{cases}0, & X<0,\\ X^2, & 0\le X\le 1,\\ 1, & X>1.\end{cases}$$

易见，随机变量 Y 的取值范围为 $[0,1]$，故当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\varnothing)=0$；当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\Omega)=1$；当 $0\le y\le 1$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\le y)=P(Y\le y,0\le X\le 1)\\&=P(X^2\le y,0\le X\le 1)\\&=P(0\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}2xdx=y.\end{aligned}$$

从而随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

即随机变量 Y 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布． ....8 分