安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》（B 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C;　　2. B;　　3. D;　　4. A;　　5. C.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{3}{5}$；　7. 1;　8. $\frac{1}{2n}$;　9. 0.5;　10. $(2.027,\ 2.223)$.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：设 B = {取到的产品为次品}；

A_1 = {取到的产品来自于甲车间}；

A_2 = {取到的产品来自于乙车间}；

A_3 = {取到的产品来自于丙车间}；

（1）由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\ &= 0.2\times0.05+0.35\times0.02+0.45\times0.04\\ &=0.035；\end{aligned}$$

（5 分）

（2）由贝叶斯公式有

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.02}{0.035}=\frac{0.007}{0.035}=0.2.$$ （10 分）

12．解：（1）$P\{3<X<9\}=3\int_3^9 e^{-3x}dx=-e^{-3x}\big|_3^9=e^{-9}-e^{-27}$；（5 分）

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}3\int_0^x e^{-3t}dt, & x>0\\ \int_{-\infty}^{x}0dt, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ （10 分）

13. 解: 由于 $X\sim U(0,1)$, 所以

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$$

而 $y=1-x$ 在区间 $(0,1)$ 上严格单调减少，值域为 $(0,1)$，反函数为

$$x=f^{-1}(y)=1-y,\quad (f^{-1}(y))'=-1,$$

故, $Y=1-X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(x)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$$ （10分）

14. 解：（1）由于

$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\le 1,Y\le 2)=P(Y\le 1)=1-e^{-1}$，

$P(X_1=0,X_2=1)=P(Y\le 1,Y>2)=0$，

$P(X_1=1,X_2=0)=P(Y>1,Y\le 2)=P(1<Y\le 2)=e^{-1}-e^{-2}$，

$P(X_1=1,X_2=1)=P(Y>1,Y>2)=P(Y>2)=e^{-2}$，

故(X_1,X_2)的联合分布列为

X_2 \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

（5 分）

(2) 注意到：$P(X_2=0)=1-e^{-2}$，则在$X_2=0$的条件下X_1的条件分布为：

$$P(X_1=0|X_2=0)=\frac{e}{e+1}，\quad P(X_1=1|X_2=0)=\frac{1}{e+1}.$$ （10 分）

15．解：(1) 由于$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，

故当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^{2x}1dy=2x$，

此即，

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

同理$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，

故当$0<y<2$时，$f_Y(y)=\int_{\frac{y}{2}}^{1}1dx=1-\frac{y}{2}$，

此即，

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他,\end{cases},$$ （6分）

(2) 因为在$0<x<1,0<y<2x$内，$f(x,y)\ne f_X(y)\cdot f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不相互独立.

（10分）

16. 解：（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$EX=\dfrac{\theta}{2}$，由 $EX=\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$，

解得θ的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}$；（5 分）

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 下的样本值，

则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n},0<x_i<\theta\,(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

又因为$\theta>0$，所以$L(\theta)$随着θ的减小而增大，

故 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}=x_{(n)}$，

解得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}=X_{(n)}$.（10 分）

四、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

17. 证明：因为随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为λ_1与λ_2的泊松分布，则

$$P(X=i)=\frac{\lambda_1{}^i e^{-\lambda_1}}{i!},P(Y=j)=\frac{\lambda_2{}^j e^{-\lambda_2}}{j!}\quad i,j=0,1,2,\cdots$$

对任意的 $k=0,1,2,\cdots,$ 由于

$$\begin{aligned}P(X+Y=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)\\&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)\\&=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1{}^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2{}^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1{}^i\lambda_2{}^{k-i}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\end{aligned}$$

从而$X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.（10 分）