统计推断的基本问题

- 统计推断
  - 参数估计
    - 点估计
      - 矩估计
      - 最大似然估计
    - 区间估计
  - 假设检验
    - 参数假设检验
    - 非参数假设检验

第七章

张小玲　　安徽大学物质科学与信息技术研究院

第七章 参数估计

- 第一节 点估计概念及评价标准
- 第二节 参数的点估计
- 第三节 区间估计

第一节　点估计概念及评价标准

一、点估计的概念

二、评价估计量的标准

7.1.1 点估计的概念

1. 定义

定义7.1.1 设θ为总体X的分布中所含的参数或参数的函数或X的数字特征，统称θ为总体X的分布的参数；记Θ为θ的所有可能取值的集合，称之为总体分布的参数空间。

7.1.1 点估计的概念

参数的类型

参数是刻画总体某方面概率特性的数量. 参数的类型有

1、分布中所含的未知参数

例如，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 若 μ, σ^2 未知, 通过构造统计量, 给出它们的估计值或取值范围就是参数估计的内容.

点 估 计　　区 间 估 计

7.1.1 点估计的概念

2、分布中所含的未知参数θ的函数 $g(\theta)$

例如：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ，σ^2 未知，假设 X 是血液检验的结果，感兴趣的是检验值不超过 a 的人数的比例，即要估计

$$\boxed{P(X \le a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}$$

即为 μ,σ 的函数。

7.1.1 点估计的概念

3、分布的各种特征数

例如：$E(X)$，$D(X)$ 等。

参数估计问题是利用从总体抽样得到的样本，通过**估计量**来估计上述各种参数。**估计量**就是估计总体参数的统计量.

7.1.1 点估计的概念

点估计问题的提出

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$，（$X_1,X_2,\ldots,X_n$）是X的样本，（$x_1, x_2,\ldots, x_n$）是相应样本值， θ是总体分布中的未知参数。

问题：如何利用这些信息估计参数θ?

7.1.1 点估计的概念

方法：构造一个适当的统计量$\mathbf{g}(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n})$，用统计量的观测值$\mathbf{g}$（$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$）作为未知参数 $\boldsymbol{\theta}$真值的估计。

称$\mathbf{g}(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n})$为$\boldsymbol{\theta}$的点估计量，记作 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

称$\mathbf{g}$（$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$）为$\boldsymbol{\theta}$的点估计值，记作 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

这种对总体分布中未知参数进行定值的估计，就是参数的点估计。

7.1.2 评价估计量的标准

注意

对于同一个参数,用不同的估计方法求出的估计量可能不相同.

问题

(1) 对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2) 评价估计量的标准是什么?

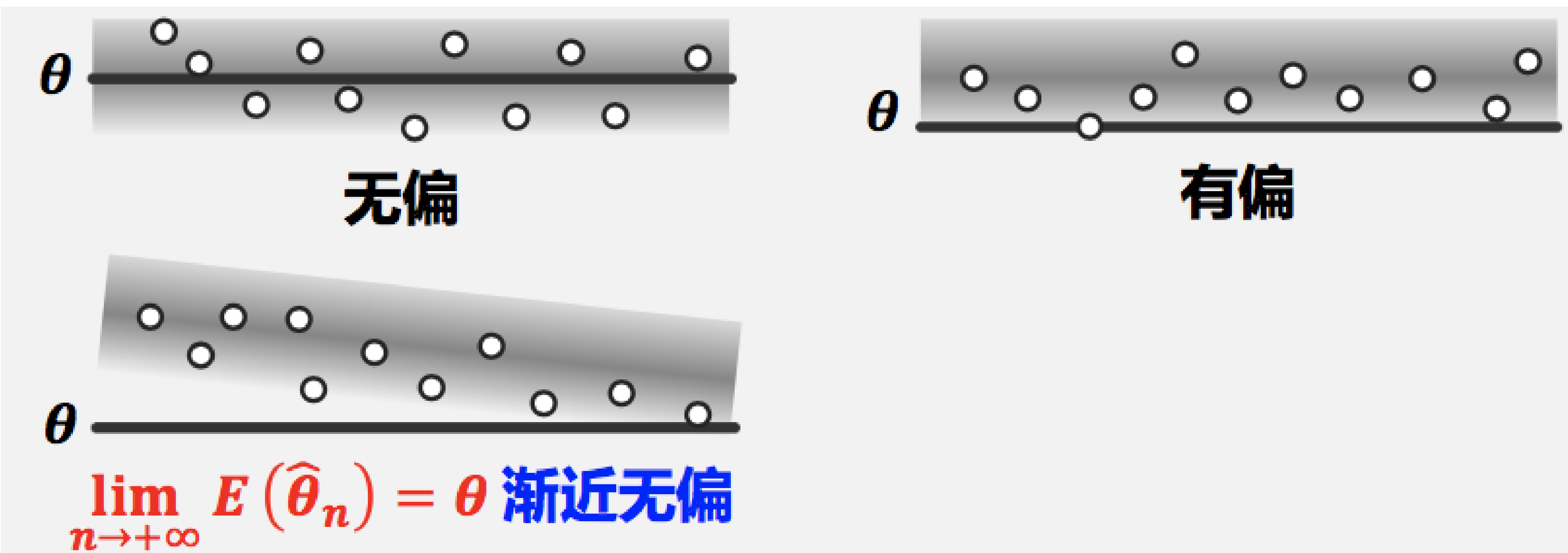
本节介绍几个常用标准：无偏性和有效性。

7.1.2 评价估计量的标准

2. 无偏性

定义7.1.3 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}$（$X_1,X_2,\ldots,X_n$）为总体参数$\theta$的估计量，$\theta\in\Theta$.

若$E(\hat{\theta})=\theta$,则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。



7.1.2 评价估计量的标准

注意：

1. 即使$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量，$f(\hat{\theta})$也未必是$f(\theta)$的无偏估计量；
2. 同一个未知参数的无偏估计量可能不止一个。

7.1.2 评价估计量的标准

例1 证明 $\bar{X}$ 为总体期望 μ 的无偏估计量.

证明 $$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = E(X) = \mu.$$

所以 $\bar{X}$ 为总体期望 μ 的无偏估计量.

例2 设总体X的方差为σ^2，考察未修正的样本方差的无偏性.

解

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2,$$

$$E(S_n^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X^2)-[D(\overline{X})+\left(E(\overline{X})\right)^2]$$

$$=E(X^2)-\left[\frac{1}{n}D(X)+\left(E(X)\right)^2\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)D(X)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2.$$

有偏

7.1.2 评价估计量的标准

$$E(S_n^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X}^2)$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)D(X)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2.$$

有偏

$$\lim_{n\to+\infty}E(S_n^2)=\sigma^2$$

渐近无偏估计量

$$S^2=\frac{n}{n-1}S_n^2\Rightarrow E(S^2)=\frac{n}{n-1}E(S_n^2)=\sigma^2$$

所以 S^2 为 σ^2 的无偏估计量.

例3 设X_1,X_2为总体X的样本, 且$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$,考查μ的两个估计量的无偏性.

解 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2,\qquad \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2.$

$$E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\mu.$$

无偏

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=\mu.$$

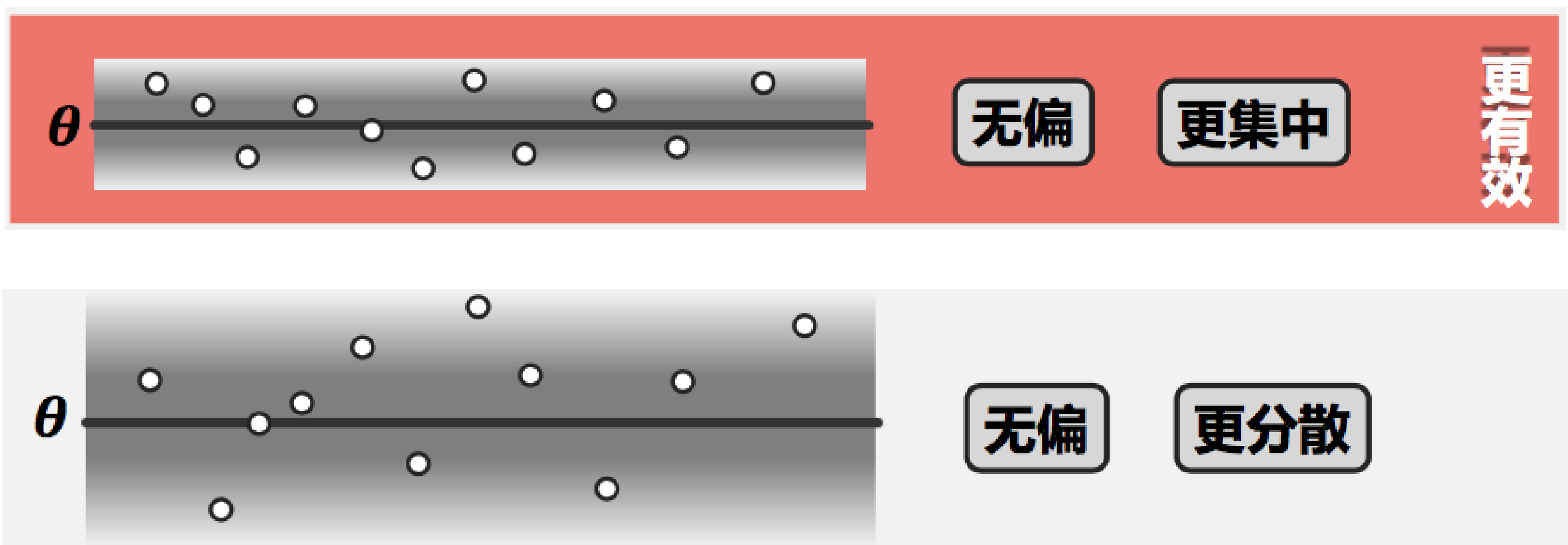
无偏

同一参数的无偏估 计量可能不止一个

7.1.2 评价估计量的标准

3. 有效性

有效性的定义 设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都为总体参数θ的无偏估计量，若$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$,则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效。



7.1.2 评价估计量的标准

例4 设X_1, X_2为总体X的样本，且$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$，考查μ的两个无偏估计量的有效性.

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2,\qquad \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2.$$

解

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=\frac{1}{2}\sigma^2.$$

小

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{9}{16}D(X_2)=\frac{5}{8}\sigma^2.$$

大

$\hat{\mu}_1$更有效

小结

(1) 点估计

对总体分布中未知参数进行定值的估计.

(2) 估计量的评选的三个标准 $\left\{ \begin{array}{l} \text{无偏性} \\ \text{有效性} \\ \text{相合性} \end{array} \right.$