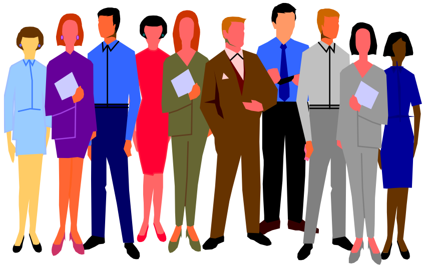
二维随机变量的条件分布

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念 .

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率



$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

设有两个随机变量X,Y， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布. 这个分布就是条件分布.

例如：考虑一大群人，从中随机挑选一个人，分别用X,Y记录此人的体重和身高，则X和Y都是随机变量，它们都有自己的分布。

现在如果限制Y的取值从1.5m到1.6m，在这个条件下求X的分布.

第三节　条件分布

一、离散型随机变量的条件分布律

二、连续型随机变量的条件概率密度函数

三、小结

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律

1. 定义

设 (X,Y)为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij,}\ i,j=1,2\ \ldots$$

对于固定的 j，称 $P(X=x_i\mid Y=y_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_i)}{P(Y=y_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$， $i=1,2\ \ldots$

为在 $Y=y_i$条件下随机变量X的条件分布律.

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律

1. 定义

类似地，

对于固定的 i，称 $P(Y=y_i \mid X=x_i \mid)=\frac{P(X=x_i,Y=y_i)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$， $j=1,2\ldots$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律.

作为条件的那个随机变量认为取值是给定的，

在此条件下求另一随机变量的概率分布.

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律

2. 性质

条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质．正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质．

(1) 非负性 $P(X = x_i \mid Y = y_j) \geq 0$, $P(Y = y_j \mid X = x_i) \geq 0$;

(2) 归一性

$$\sum_i P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = 1$$

$$\sum_j P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{i\cdot}}{p_{i\cdot}} = 1$$

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律

例 3.3.1 P73 将某一医药公司8月份和9月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为X和Y，根据以往积累的资料知X和Y的联合分布律为

X	Y				
	51	52	53	54	55
51	0.06	0.07	0.05	0.04	0.05
52	0.05	0.05	0.10	0.02	0.06
53	0.05	0.01	0.10	0.02	0.05
54	0.01	0.01	0.05	0.01	0.01
55	0.01	0.01	0.05	0.03	0.03

试求8月份的订单数为51时，9月份订单数Y的条件分布律

解 由于

$$P(X=51)=0.06+0.07+0.05+0.04+0.05=0.27$$

所以当X=51时，Y=51的条件概率为：

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律

X	Y				
	51	52	53	54	55
51	0.06	0.07	0.05	0.04	0.05
52	0.05	0.05	0.10	0.02	0.06
53	0.05	0.01	0.10	0.02	0.05
54	0.01	0.01	0.05	0.01	0.01
55	0.01	0.01	0.05	0.03	0.03

$$P(Y=51\mid X=51)=\frac{P(X=51,Y=51)}{P(X=51)}=\frac{0.06}{0.27}=\frac{6}{27}$$

类似可得 $P(Y=52\mid X=51)=\frac{7}{27}$　　$P(Y=53\mid X=51)=\frac{5}{27}$

$P(Y=54\mid X=51)=\frac{4}{27}$　　$P(Y=55\mid X=51)=\frac{5}{27}$

Y	51	52	53	54	55
$P(Y=k\mid X=51)$	6/27	7/27	5/27	4/27	5/27

3.3.2 连续型随机变量的条件概率密度函数

1. 定义

设X和Y的联合概率密度为$f(x,y)$， (X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$，$f_Y(y)>0$，若对于固定的y，则称$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度。记为

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

条件分布函数为 $F(x|y):=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

类似地，可以定义在$X=x$的条件下Y的条件概率密度为

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

条件分布函数为 $F(y|x):=P(Y\le y|X=x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$

Continuous conditional distribution

Prove:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \le x|y - \varepsilon < Y \le y + \varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(X \le x, y - \varepsilon < Y \le y + \varepsilon)}{P(y - \varepsilon < Y \le y + \varepsilon)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)}{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{[F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)]/2\varepsilon}{[F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)]/2\varepsilon}$$

Continuous conditional distribution

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{[F(x, y+\varepsilon) - F(x, y-\varepsilon)]/2\varepsilon}{[F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y-\varepsilon)]/2\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \Big/ \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy\right]}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x, y)dx}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}dx$$

Continuous conditional distribution

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

According to definition：

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

So，$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Similarly，$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

3.3.2 连续型随机变量的条件概率密度函数

由上述定义可知，联合密度函数$f(x,y)$、边缘密度函数$f_X(x)$、$f_Y(y)$和条件密度函数$f(y|x)$、$f(x|y)$之间的关系：

$$f(x,y)=f_X(x)f(y|x)=f_Y(y)f(x|y)$$

类似于第1章中的条件概率计算公式和概率的乘法公式：

条件概率计算公式：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$　　$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$

3.3.2 连续型随机变量的条件概率密度函数

例3.3.3 P76 设二维随机变量(X,Y)的密度函数$f(x,y)$为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ |y|<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 试求条件密度函数$f(x|y)$

解 Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}dx, & -1<y\le 0,\\ \int_{y}^{1}dx, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

随机变量X的条件概率密度为

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例3.3.4 设随机变量 X 在区间(0,1)上随机地取值，而观察到$X = x(0 < x < 1)$时，随机变量Y在区间$(x,1)$上随机地取值，求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

解 由题意知X具有密度函数 $f_X(x)=\begin{cases} 1, 0 < x < 1, \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

当$X = x\ (0 < x < 1)$时， Y的条件密度函数为 $f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, x < y < 1, \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

X和Y的联合概率密度函数

$$f(x,y) = f_X(x)f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, 0 < x < y < 1, \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$$

Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}dx, 0 < y < 1, \\ 0, 其他. \end{cases} = \begin{cases} -ln(1-y), 0 < y < 1, \\ 0, 其他. \end{cases}$$

小结

这一节，我们介绍了条件分布的概念和计算，并举例说明对离散型和连续型随机变量如何计算条件分布.