代数

<载体，运算>

\+ 结合律

$a*(b*c)=(a*b)*c$

↓

半群

\+ 幺元

$\forall a\in G$

$a*e=e*a=a$

↓

独异点

\+ 逆元

$\forall a\in G$，存在 a^{-1}

使 $a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$

↓

群

1.判断…是否代数=>半群=>独异点=>群。并找出幺元、零元(如果需要)

(1) $a+b\sqrt[3]{2}$ $a,b\in Z$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 矩阵 $a,b\in Z$

2.判断半群=>独异点=>群=>循环群

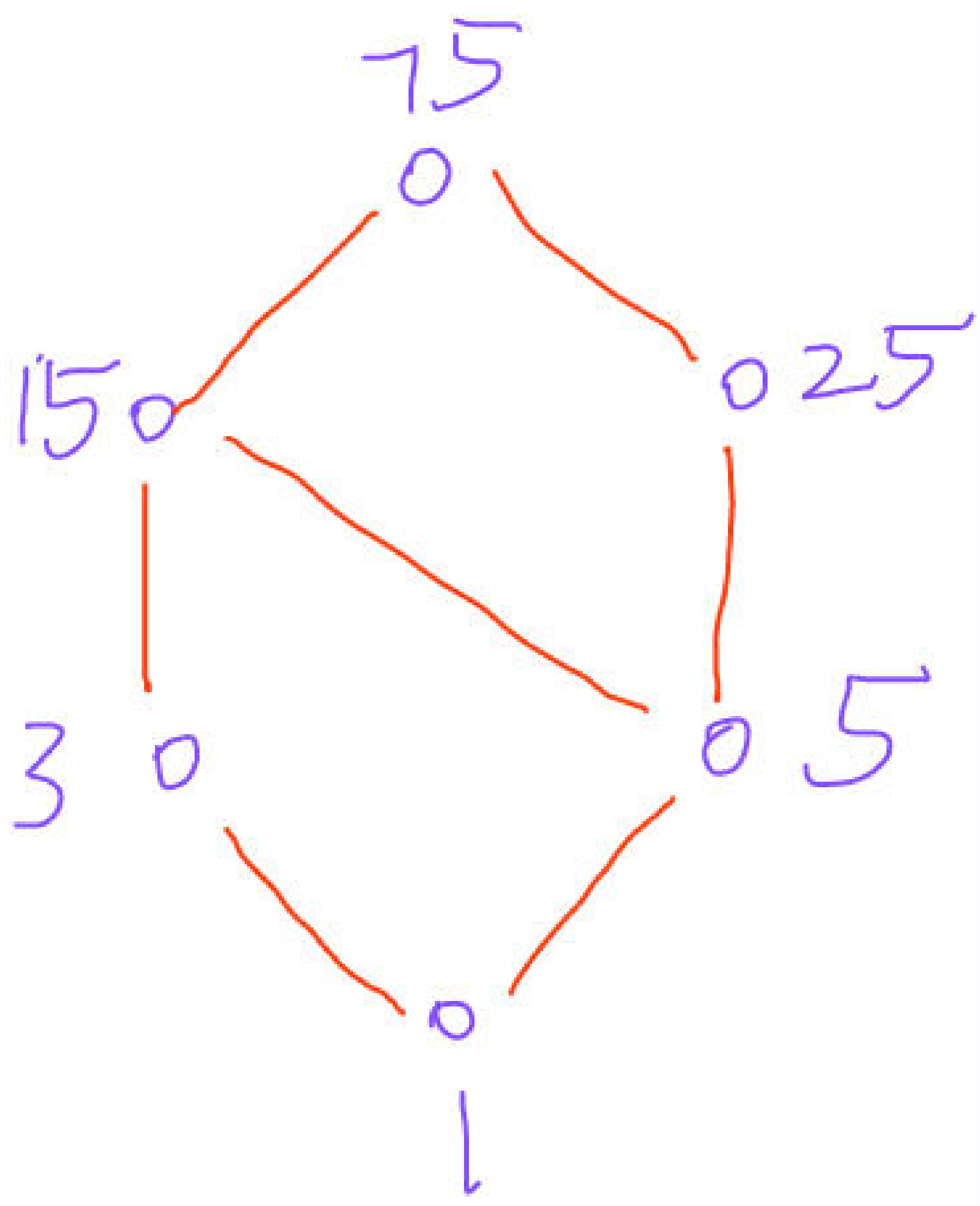
找出幺元(如果需要)

(1) 模k加法

(2)

幺元：$1_l * x = x$ 乘法运算中的1，加法中的0

零元 $0_l * x = 0_l$ 乘法中的0



哈斯图

3. 格 $\langle S_{75}, D\rangle$ 画哈斯图并找补元

$75' = 1 \quad 25' = 3 \quad 3' = 25 \quad 1' = 75$

15 和 5 没有补元

P239.7 原题

4 模6加法、$\langle N_6, +_6\rangle$ 找子群，及对应陪集

$6 = 1\times 6 = 2\times 3$ 因子分解

4个子群 $\langle\{0\}, +_6\rangle$ $\langle\{0,3\}, +_6\rangle$
H_1 H_2

$\langle\{0,1,2,3,4,5\}, +_6\rangle$ $\langle\{0,2,4\}, +_6\rangle$
H_3 H_4

与 N_6 中每个元素运算得 aH 陪集

左陪集 = 右陪集 = 陪集

H_1 陪集：$0H_1 = H_1 0 = \langle\{0\}, +_6\rangle$

$1H_1 = H_1 1 = \langle\{1\}, +_6\rangle$, $2H_1 = H_1 2 = \langle\{2\}, +_6\rangle$

$3H_1 = H_1 3 = \langle\{3\}, +_6\rangle$, $4H_1 = H_1 4 \langle\{4\}, +_6\rangle$

$5H_1 = H_1 5 = \langle\{5\}, +_6\rangle$

H_2 陪集：$0H_2 = 3H_2 = \langle\{0,3\}, +_6\rangle$

$1H_2 = 4H_2 = \langle\{1,4\}, +_6\rangle$, $2H_2 = 5H_2 = \langle\{2,5\}, +_6\rangle$

H_3 陪集：$0H_3 = 1H_3 = 2H_3 = 3H_3 = 4H_3 = 5H_3 = \langle\{0,1,2,3,4,5\}, +_6\rangle$

H_4 陪集：$0H_4 = 2H_4 = 4H_4 = \langle\{0,2,4\}, +_6\rangle$

$1H_4 = 3H_4 = 5H_4 = \langle\{1,3,5\}, +_6\rangle$

主析取范式：⊕

$\alpha_0 m_0 \oplus \alpha_1 m_1 \cdots \oplus \alpha_n m_n$

极小项 $m_0 = x_1' * x_2' * x_3'$

主合取范式：$*$

$(\alpha_0 \oplus M_0) * (\alpha_1 \oplus M_1) \cdots * (\alpha_n \oplus M_n)$

极大项 $M_0 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

化简可使用卡诺图

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	0	1	1	ϕ
1	0	0	0	1

$x_2 x_3' \oplus x_1 x_2'$

5、布尔代数 $B\langle \{0,1,a,b\}, \oplus, \otimes, ', 0, 1 \rangle$

① 主析取范式/主合取范式 P253.16(1)

② $f(x_1, x_2, x_3)$ 化简 P252.2(1)

③ 给出 x_1, x_2, x_3 值，求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 结果 P253.14

7.4.2 化简下列各布尔表达式：

②

(a) $a * b \oplus a' * b * c' \oplus b * c$

(b) $(a * b' \oplus c) * (a \oplus b') * c$

(c) $a * b \oplus a * b' * c \oplus b * c$

(d) $(a * b)' \oplus (a \oplus b)'$

(e) $(1 * a) \oplus (0 * a')$

解 (a)

$$\begin{aligned} & a * b \oplus a' * b * c' \oplus b * c \\ = & b * (a \oplus a' * c' \oplus c) \\ = & b * (a \oplus c \oplus (a \oplus c)') \\ = & b * 1 \\ = & b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & (a * b' \oplus c) * (a \oplus b') * c \\ = & ((a * b' \oplus c) * c) * (a \oplus b') \\ = & c * (a \oplus b') \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & a * b \oplus a * b' * c \oplus b * c \\ = & a * (b \oplus b' * c) \oplus b * c \\ = & a * (b \oplus c) \oplus b * c \\ = & a * b \oplus a * c \oplus b * c \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} & (a * b)' \oplus (a \oplus b)' \\ = & a' \oplus b' \oplus a' * b' \\ = & (a' \oplus b') * (a' \oplus b') \\ = & (a * b)' \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} & (1 * a) \oplus (0 * a') \\ = & a \oplus 0 \\ = & a \end{aligned}$$

7.4.16 下列是布尔代数$\langle\{0, a, b, 1\}, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$上的布尔表达式，试求出它的主析取范式和主合取范式。 ①

(a) $f(x_1, x_2, x_3)=a * x_1 * x_2 \oplus b * x_3$

(b) $f(x_1, x_2, x_3)=b * x_1 * (x_3 \oplus x_2') \oplus a * x_2 * (x_1 \oplus x_3) \oplus x_1 * x_2$

解 (a)
$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a * x_1 * x_2 \oplus b * x_3 \\
&= a * x_1 * x_2 * (x_3 \oplus x_3') \oplus b * (x_1 \oplus x_1') * (x_2 \oplus x_2') * x_3 \\
&= a * x_1 * x_2 * x_3 \oplus a * x_1 * x_2 * x_3' \oplus b * x_1 * x_2 * x_3 \\
&\quad \oplus b * x_1 * x_2' * x_3 \oplus b * x_1' * x_2 * x_3 \oplus b * x_1' * x_2' * x_3 \\
&= m_7 \oplus a * m_6 \oplus b * m_5 \oplus b * m_3 \oplus b * m_1
\end{aligned}
$$
为主析取范式，
$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = a * x_1 * x_2 \oplus b * x_3 \\
&= (a \oplus b) * (a \oplus x_3) * (x_1 \oplus b) * (x_1 \oplus x_3) * (x_2 \oplus b) * (x_2 \oplus x_3) \\
&= (a \oplus (x_1 * x_1') \oplus (x_2 * x_2') \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus (x_3 * x_3')) \\
&\quad * (x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus x_3) * (b \oplus (x_1 * x_1') \oplus x_2 \oplus (x_3 * x_3')) * ((x_1 * x_1') \oplus x_2 \oplus x_3) \\
&= (a \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (a \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (a \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (a \oplus x_1' \oplus x_2' \oplus x_3) \\
&\quad * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3') * (b \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3') \\
&\quad * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') * (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (a \oplus x_1' \oplus x_2' \oplus x_3) \\
&\quad * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3') * (b \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3') * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') \\
&= M_0 * M_2 * M_4 * (a \oplus M_6) * (b \oplus M_1) * (b \oplus M_3) * (b \oplus M_5)
\end{aligned}
$$
为主合取范式。

(b)
$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= b * x_1 * (x_3 \oplus x_2') \oplus a * x_2 * (x_1 \oplus x_3) \oplus x_1 * x_2 \\
&= b * x_1 * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' \oplus a * x_2 * x_1 \oplus a * x_2 * x_3 \oplus x_1 * x_2 \\
&= b * x_1 * (x_2 \oplus x_2') * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * (x_3 \oplus x_3') \oplus x_1 * x_2 * (x_3 \oplus x_3') \\
&\quad \oplus a * (x_1 \oplus x_1') * x_2 * x_3 \\
&= b * x_1 * x_2 * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * x_3' \oplus x_1 * x_2 * x_3 \oplus x_1 * x_2 * x_3' \\
&\quad \oplus a * x_1 * x_2 * x_3 \oplus a * x_1' * x_2 * x_3 \\
&= x_1 * x_2 * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * x_3' \oplus x_1 * x_2 * x_3' \oplus a * x_1' * x_2 * x_3 \\
&= m_7 \oplus b * m_5 \oplus b * m_4 \oplus m_6 \oplus a * m_3
\end{aligned}
$$
为主析取范式。
$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = b * x_1 * (x_3 \oplus x_2') \oplus a * x_2 * (x_1 \oplus x_3) \oplus x_1 * x_2 \\
&= (b \oplus x_2 \oplus x_1) * (b \oplus x_2) * (b \oplus x_1 \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_2) * (x_1 \oplus a) * (x_1 \oplus a \oplus x_2) \\
&\quad * (x_1 \oplus x_2) * (x_1 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_3 \oplus x_2) * (x_3 \oplus x_2' \oplus a \oplus x_1) * (x_3 \oplus x_2' \oplus x_1) \\
&= (x_1 \oplus x_2) * (b \oplus x_2) * (x_1 \oplus x_3) * (a \oplus x_1) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_3 * x_3')) * (b \oplus (x_1 * x_1') \oplus x_2 \oplus (x_3 * x_3')) * (x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus x_3) \\
&\quad * (a \oplus x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus (x_3 * x_3')) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3') * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) \\
&\quad * (a \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3') \\
&= M_0 * M_1 * (b \oplus M_4) * (b \oplus M_5) * M_2 * (a \oplus M_3)
\end{aligned}
$$
为主合取范式。

7.4.14 已知 $\langle\{0, a, b, 1\}, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$ 上的布尔函数 $f(x_1, x_2, x_3)=a * x_1 * x_2' \oplus x_1 * (x_3 \oplus b)$，试求 $f(b, 1, a)$ 的值。 3

解 $f(b,1,a)=a * b * 1' \oplus b * (a \oplus b)=0 \oplus b * 1=b$

7.4.15 下列是二元素布尔代数上的布尔表达式，试求出它们的主析取范式和主合取范式。 1

(a) $x_1 \oplus x_2$

(b) $(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1' * x_3)$

(c) $(x_1 * x_2') \oplus x_4$（假定它是四个变元的表达式）

解 (a) $x_1 \oplus x_2$

$$= x_1 * (x_2 \oplus x_2') \oplus (x_1 \oplus x_1') * x_2$$
$$= x_1 * x_2 \oplus x_1 * x_2' \oplus x_1' * x_2$$
$$= m_3 \oplus m_2 \oplus m_1$$

为主析取范式。

$x_1 \oplus x_2 = M_0$ 为主合取范式。

(b) $(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1' * x_3)$

$$= x_1' * x_2' \oplus x_1' * x_3$$
$$= x_1' * x_2' * (x_3 \oplus x_3') \oplus x_1' * (x_2 \oplus x_2') * x_3$$
$$= x_1' * x_2' * x_3 \oplus x_1' * x_2' * x_3' \oplus x_1' * x_2 * x_3$$
$$= m_1 \oplus m_0 \oplus m_3$$

为主析取范式。

$$(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1 * x_3)$$
$$= x_1' * x_2' \oplus x_1' * x_3$$
$$= x_1' * (x_2' \oplus x_3)$$
$$= (x_1' \oplus x_2 * x_2' \oplus x_3 * x_3') * (x_1 * x_1' \oplus x_2' \oplus x_3)$$
$$= (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3) * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3') * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3)$$
$$= M_4 * M_5 * M_6 * M_7 * M_2$$

为主合取范式。

(c) $(x_1 * x_2') \oplus x_4$

$$= x_1 * x_2' * (x_3 \oplus x_3') * (x_4 \oplus x_4') \oplus ((x_1 \oplus x_1') * (x_2 \oplus x_2') * (x_3 \oplus x_3') * x_4$$
$$= x_1 * x_2' * x_3 * x_4 \oplus x_1 * x_2' * x_3 * x_4' \oplus x_1 * x_2' * x_3' * x_4 \oplus x_1 * x_2' * x_3' * x_4'$$
$$\oplus x_1 * x_2 * x_1 * x_4 \oplus x_1 * x_2 * x_3' * x_4 \oplus x_1' * x_2 * x_3 * x_4 \oplus x_1' * x_2 * x_3' * x_4$$
$$\oplus x_1' * x_2 * x_3 * x_4 \oplus x_1' * x_2' * x_3' * x_4$$
$$= m_{11} \oplus m_{10} \oplus m_9 \oplus m_8 \oplus m_{15} \oplus m_{13} \oplus m_7 \oplus m_5 \oplus m_3 \oplus m_1$$

为主析取范式。

$$(x_1 * x_2') \oplus x_4$$
$$= (x_1 \oplus x_4) * (x_2' \oplus x_4)$$
$$= (x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus (x_3 * x_3) \oplus x_4) * ((x_1 * x_1' \oplus x_2' \oplus (x_3 * x_3') \oplus x_4)$$
$$= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3' \oplus x_4) * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3 \oplus x_4)$$
$$* (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3' \oplus x_4) * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3 \oplus x_4) * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3' \oplus x_4)$$
$$= M_0 * M_2 * M_4 * M_6 * M_{12} * M_{14}$$

为主合取范式。

A、$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\to v_j \text{ 可} \\ 0, & v_i \nrightarrow v_j \text{ 不可}\end{cases}$

A, A^2, A^3 互出现重复（例 $A^4=A^2$）则 $P=A\vee A^2\vee A^3=[\quad]$

$P\wedge P^T$（强分图）

6、图的矩阵表示

① 邻接矩阵

② 可达性矩阵

③ 强分图

3. 图 8.3－5 给出了一个有向图，试求该图的邻接矩阵和可达性矩阵。

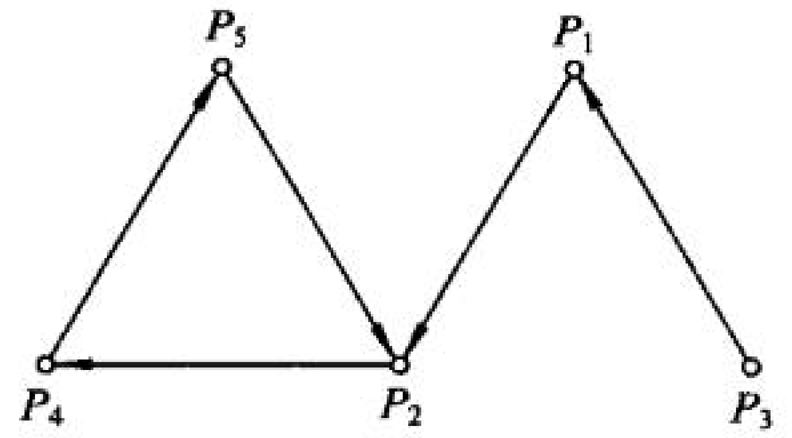


图 8.3－5

邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$

可达性矩阵为

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^5=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P=A\vee A^2\vee A^3\vee A^4\vee A^5=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

8.3.1 图 8.35 给出了一个有向图。

(*a*) 求出它的邻接矩阵 A。

(*b*) 求出 $A^{(2)}$、$A^{(3)}$、$A^{(4)}$，说明从 v_1 到 v_4 长度为 1、2、3 和 4 的路径各有几条？

(*c*) 求出 A^T、A^TA、AA^T，说明 AA^T 和 A^TA 中第(2,3)个元素和第(2,2)个元素的意义。

(*d*) 求出 A^2、A^3、A^4 及可达性矩阵 P。

(*e*) 求出强分图。

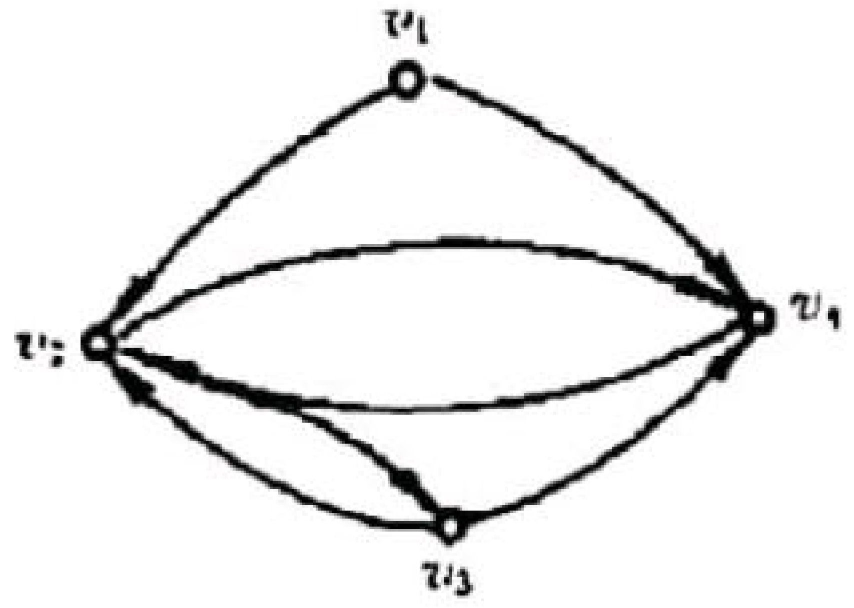


图 8.35

解 (*a*) 图 8.35 的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

(*b*) $$A^{(2)}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&2&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\ A^{(3)}=\begin{pmatrix}0&2&1&2\\0&1&2&2\\0&2&1&2\\0&2&0&1\end{pmatrix},\ A^{(4)}=\begin{pmatrix}0&3&2&3\\0&4&1&3\\0&3&2&3\\0&1&2&2\end{pmatrix}$$

由 A，$A^{(2)}$，$A^{(3)}$，$A^{(4)}$可知从 v_1 到 v_4 长度为 1,2,3 和 4 的路径分别为 1,1,2,3 条。

(*c*) $$A^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix},\ A^TA=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&2\\0&0&1&1\\0&2&1&3\end{pmatrix},\ AA^T=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&2&1&0\\2&1&2&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

AA^T 中第(2,3)个元素为 1，说明从 v_2 和 v_3 引出的边能共同终止于同一结点的只有一个，即 v_4。AA^T 中第(2,2)个元素为 2，说明 v_2 的引出次数为 2。

A^TA 中第(2,3)个元素为 0，说明没有结点引出的边同时终止于 v_2 和 v_3。A^TA 中第(2,2)个元素为 3，说明 v_2 的引入次数为 3。

(*d*) $$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ A^4=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P=A\vee A^2\vee A^3\vee A^4=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

(*e*) $$P^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\qquad P\wedge P^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

所以强分图的顶点集为：$\{v_1\}$，$\{v_2,v_3,v_4\}$。

7、证明：群$\langle G, * \rangle$中、a,b两元素，a*b与b*a有相同的阶

阶的性质：任意a,c∈G，则a的阶和c*a*c^(-1)的阶相同。

设|p|代表p的阶，则设|a|=n,|cac^(-1)|=m。

则(cac^(-1))^n=c^(n)*a^n*c^(-n)=c^n*c^(-n)=e，所以m<=n

同理a^m=(c^(-1)cac^(-1)c)^m=c^(-1(cac^(-1))^nc=c^(-1)c=e，所以n<=m。

所以，只能m=n。

8、

定理 6.3－3 设 h 是从代数 $A=\langle S, *, \times\rangle$ 到 $A'=\langle S', \circledast, \otimes\rangle$ 的同态，这里 $*$、$\circledast$、$\times$、$\otimes$ 都是二元运算，$A''=\langle h(S), \circledast, \otimes\rangle$ 是 A 的同态象。

(1) 如果 $*$ 是可交换和(或)可结合的，则在 A'' 中，$\circledast$ 也是可交换和(或)可结合的。(对 $\times$ 和 $\otimes$ 可重复这一断言，为了简便，略去。在下述(2)和(3)中亦如此，以后不再声明。)

(2) 对运算 $*$，如果 A 有么(零)元 e，则对运算 $\circledast$，代数 A'' 中有么(零)元 $h(e)$。(注意：在不含(指不关注)常数的代数结构中，由于不要求常数对应，此时 $h(e)$ 不一定是代数 A' 中的实际么(零)元，除非 h 是满同态。)

(3) 对于运算 $*$，如果一个元素 $x\in S$ 具有逆元 x^{-1}，则对于 $\circledast$，在代数 A'' 中，元素 $h(x)$ 具有逆元 $h(x^{-1})$。(注意：在和(2)相同的情况下，这个逆元是对 A'' 中么元 $h(e)$ 而言的。不一定是对 A' 中么元而言，除非 h 是满同态。)

(4) 如果运算 $*$ 对运算 $\times$ 是可分配的，则在 A'' 中运算 $\circledast$ 对运算 $\otimes$ 也是可分配的。

证

(1) $$h(x_1)\circledast h(x_2)=h(x_1 * x_2)=h(x_2 * x_1)=h(x_2)\circledast h(x_1)$$

$$\begin{aligned}(h(x_1)\circledast h(x_2))\circledast h(x_3) &= h(x_1 * x_2)\otimes h(x_3)\\ &= h((x_1 * x_2) * x_3) = h(x_1 * (x_2 * x_3))\\ &= h(x_1)\circledast h(x_2 * x_3)\\ &= h(x_1)\otimes(h(x_2)\circledast h(x_3))\end{aligned}$$

所以，$\circledast$ 是可交换的和(或)可结合的。

(2) e 是么元时，有

$$h(x)\circledast h(e)=h(x * e)=h(x)$$

e 是零元时，有

$$h(x)\circledast h(e)=h(x * e)=h(e)$$

所以，$h(e)$ 是 A'' 中的么(零)元。

(3) $$h(x)\otimes h(x^{-1})=h(x * x^{-1})=h(e)$$

$$h(x^{-1})\circledast h(x)=h(x^{-1} * x)=h(e)$$

因为 $h(e)$ 是 A'' 中的么元，这就说明 $h(x^{-1})$ 是 $h(x)$ 的逆元。

(4) $$\begin{aligned}h(x_1)\circledast(h(x_2)\otimes h(x_3)) &= h(x_1)\circledast h(x_2\times x_3)\\ &= h(x_1 * (x_2\times x_3))\\ &= h((x_1 * x_2)\times(x_1 * x_3))\\ &= h(x_1 * x_2)\otimes h(x_1 * x_3)\\ &= (h(x_1)\circledast h(x_2))\otimes(h(x_1)\circledast h(x_3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(h(x_2)\otimes h(x_3))\circledast h(x_1) &= h(x_2\times x_3)\circledast h(x_1)\\ &= h((x_2\times x_3) * x_1)\\ &= h((x_2 * x_1)\times(x_3 * x_1))\\ &= h(x_2 * x_1)\otimes h(x_3 * x_1)\\ &= (h(x_2)\circledast h(x_1))\otimes(h(x_3)\circledast h(x_1))\end{aligned}$$

所以，在 A'' 中分配律成立。证毕。

平面图欧拉公式

$n-m+k=2$

顶点数 边数 面数

9、(n,m)连通平面图每个面至少5个边围成，证明 $m \le \frac{5n-10}{3}$

证明：面的个数等于边长数的2倍

故 $2m \ge 5k$

（每个面至少5个边，即单一情况下 $\frac{m}{5} \ge k$，一条边可被两个面共用

即分到两个面上，$\frac{m}{5} \ge \frac{k}{2} \Rightarrow 2m \ge 5k$）

由欧拉公式 $n-m+k=2$ 得

$$n-m+\frac{2}{5}m \ge 2$$

$$n-\frac{3}{5}m \ge 2$$

$$m \le \frac{5n-10}{3}$$

定理 8.6-2 在 $n \geqslant 3$ 的任何连通平面简单(n,m)图中，有 $m \leqslant 3n-6$ 成立。

证 因为图是简单的，所以，每个面用 3 条或更多条边围成。因此，边数大于或等于 $3k$（k 是面数，这里边数包含重复计算的）。另一方面，因为一条边在至多两个面的边界中，所以各个面总边数小于 $2m$。因此

$$2m \geqslant 3k$$

或

$$\frac{2}{3}m \geqslant k$$

根据欧拉公式，我们有

$$n-m+\frac{2}{3}m \geqslant 2$$

所以

$$3n-6 \geqslant m$$

本定理对 $n \geqslant 3$ 非连通平面简单图也成立。因为对每一分图此公式成立，所以，对整个图更成立。

8.5.2 证明在 $n \geqslant 3$ 的平面简单图中，有 $k \leqslant 2n-4$。这里 n 是图的顶点数，k 是面数。

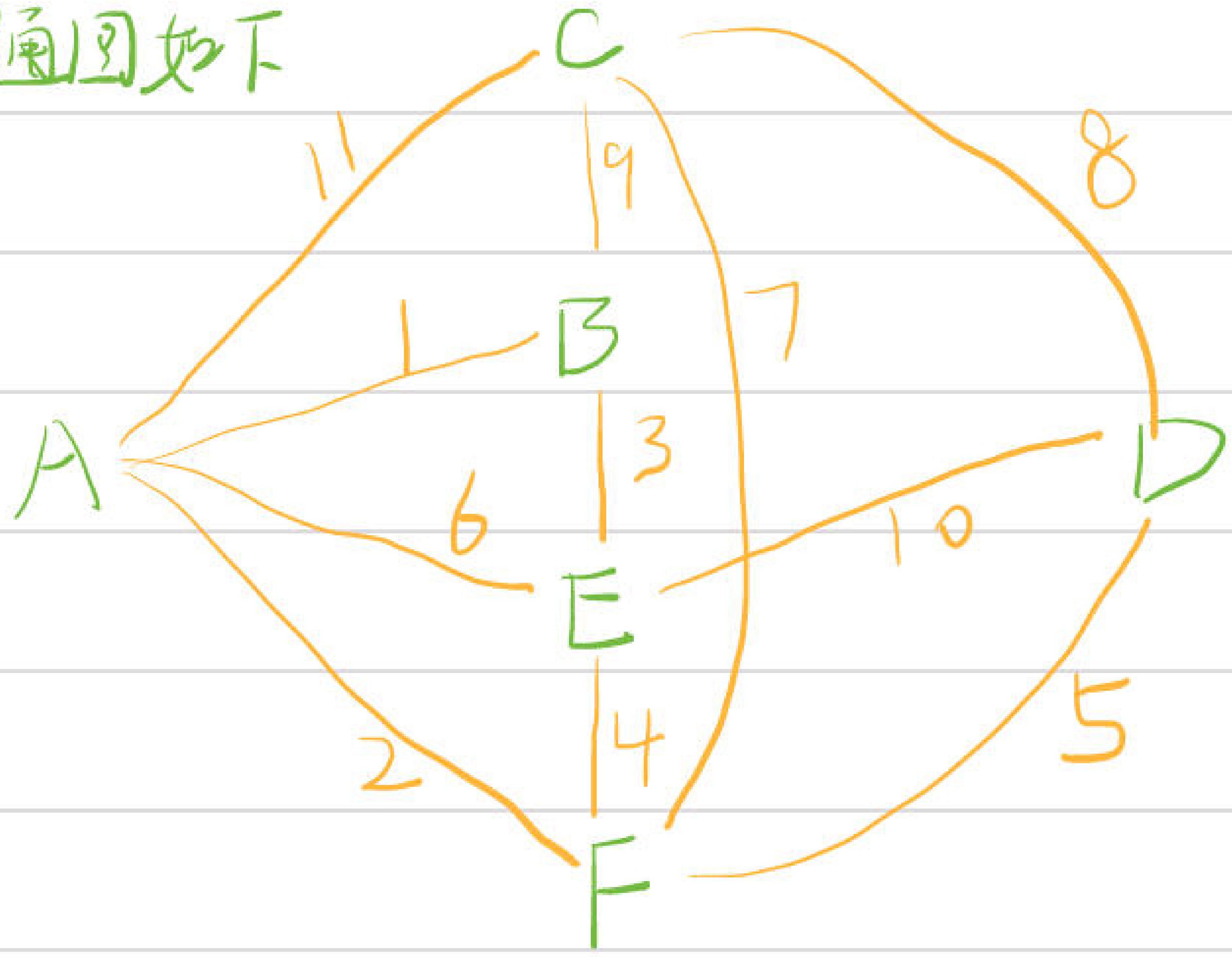
证明 设平面简单图有 $r(r \geqslant 1)$个弱分图，用 $r-1$ 条边把 r 个弱分图连接起来，得到一个连通的平面简单图 G。G 中的顶点数和面数不变，仍为 n 和 k。设 G 的边数为 m，则有 $m \leqslant 3n-6$。由欧拉公式 $n-m+k=2$ 得 $k \leqslant 2n-4$。

8.5.3 证明若 G 是每个区域至少由 $k(k \geqslant 3)$条边围成的连通平面图，则 $m \leqslant k(n-2)/k-2$。这里 n、m 分别是图 G 的顶点数和边数。

证明 因为 G 的每个区域至少由 $k(k \geqslant 3)$条边围成，所以有 $2m \geqslant k \cdot f$，其中 f 为面数。再由欧拉公式 $n-m+f=2$ 得 $m \leqslant k(n-2)/k-2$。

10. 学校里有6个供水站，ABCDEF，其中铺设管道的费用 AB = 1，AC = 11，AE = 6，AF = 20，BC = 9，BE = 3，CF = 7，CD = 8，DF = 5，DE = ，EF = 4，要求所有供水站都能连接，所需铺设费用最短的方案是什么，画出.

连通图如下



最小生成树 P308