

112-2 近代物理實驗 Ultrasonic Comprehensive

第四組

左：趙唯竣 B10202069 右：林軒宇 B10202015

Mar. 18 & Mar. 25 & Apr. 1, 2024



1 引言與原理

1.1 A4 Attenuation of ultrasound in liquids[1, 2]

1.1.1 計算聲速

超音波在樣品中傳遞時，探針的保護層以及塗抹在表面的凝膠會影響反射波抵達探針的時間 t 。時間 t 由兩部分組成，一部分是穿越樣品的時間 t_s ，另一部分是穿越其他非樣品部分所需時間 t_{PL} 。如果我們測量超聲波穿越兩個不同長度 s_1 、 s_2 的樣品所需的時間 t_1 以及 t_2 ，我們可以使用式 (1) 來消除非樣品部分所造成的影響

$$v = \frac{2(s_1 - s_2)}{t_1 - t_2} = \frac{2(s_1 - s_2)}{(t_{1s} + t_{PL}) - (t_{2s} + t_{PL})} = \frac{2(s_1 - s_2)}{t_{1s} - t_{2s}} \quad (1)$$

1.1.2 衰減係數

當聲波撞擊微小粒子時將導致散射，使能量損失。假設在溶液中的粒子數量為 N ，且大小相同，經過散射後其能量損失為

$$d\xi = -N\xi_{retrodiffusion} \quad (2)$$

其中 $\xi_{retrodiffusion}$ 為一個粒子反射的能量。溶質質量與溶液質量比值 C_m 可表示為

$$C_m = \frac{Nm_{particle}}{m_{liquid} + Nm_{particle}} \approx \frac{Nm_{particle}}{m_{liquid}} \quad (3)$$

其中 $m_{particle}$ 為一個粒子的質量， m_{liquid} 為溶劑質量。此外 $m_{particle}$ 可用其密度 $\rho_{particle}$ 以及平均粒子半徑 $\langle a \rangle$ 表示：

$$m_{particle} = \rho_{particle} \frac{4\pi}{3} \langle a \rangle^3 \quad (4)$$

而 m_{liquid} 可用液體密度 ρ_{liquid} 和其長 dx 、寬 w 、高 h 來表示：

$$m_{liquid} = \rho_{liquid} V_{liquid} = \rho_{liquid} * (whdx) \quad (5)$$

因此我們可以得知粒子數量 N

$$N \approx \frac{m_{liquid}}{m_{particle}} = C_m \frac{3}{4} \frac{\rho_{liquid} wh dx}{\rho_{particle} \pi \langle a \rangle^3} \quad (6)$$

強度為 I 的平面波撞擊一不可壓縮的粒子後，其散射強度 I_s 為

$$\frac{I_s}{I} = \frac{16\pi^4 f^4}{9v^4 r^2} \langle a \rangle^6 (1 - 3 \cos \theta)^2 \quad (7)$$

其中 f 為平面波頻率， v 為平面波在此液體中的傳遞速度， r 和 θ 則是極座標。儘管式 (7) 由極座標描述，然而因其對稱性仍適用於三維空間。入射波強度 I 可由入式波能量 ξ 以及發射器直徑 D 來表示：

$$I = \frac{\xi}{\pi(\frac{D}{2})^2} = \frac{4\xi}{\pi D^2} \quad (8)$$

所有被反射的能量 $\xi_{retrodiffusion}$ 可由式 (7) 對半個球面積分求得：

$$\begin{aligned} \xi_{retrodiffusion} &= \int_{\pi/2}^{\pi} I_s(r, \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{16\pi^4 f^4}{9v^4} \langle a \rangle^6 I \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - 3 \cos \theta)^2 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{114}{9} \frac{\pi^5 \langle a \rangle^6}{\lambda^4} I \\ &= \frac{152}{3} \frac{\pi^4 \langle a \rangle^6}{\lambda^4 D^2} \xi \end{aligned} \quad (9)$$

其中波長 $\lambda = v/f$ 。節由式 2 和式 9 我們得之

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{\xi} &= -\frac{152}{3} \frac{\pi^4 \langle a \rangle^6}{\lambda^4 D^2} \times c_m \frac{3}{4} \frac{\rho_{liquid} wh dx}{\rho_{particle} \pi \langle a \rangle^3} \\ &= -A \frac{\pi \langle a \rangle}{\lambda^4} \frac{\rho_{liquid} wh dx}{\rho_{particle}} c_m dx \end{aligned} \quad (10)$$

其中長數 $A = 38\pi^3 wh/D^2$ 。將式 (10) 兩邊積分得

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\xi_0} &= e^{-c_m A \frac{\langle a \rangle^3}{\lambda^4} \frac{\rho_{liquid}}{\rho_{particle}}} \\ &= e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 ξ_0 為在位置 $x = 0$ 處入射波能量，衰減係數 α 為

$$\alpha = c_m A \frac{\langle a \rangle^3}{\lambda^4} \frac{\rho_{liquid}}{\rho_{particle}} \quad (12)$$

1.2 A5 Spectral investigation[3, 4]

1.2.1 Fast Fourier Transformation, FFT

快速傅立葉轉換是一種計算離散傅立葉轉換的演算法，將訊號從時間域轉換到空間域，其定義為

$$X_k = \sum_{m=0}^{n-1} x_m e^{-i2\pi km/n} \quad (13)$$

其中 x_0, \dots, x_{n-1} 為複數。此外，使用離散傅立葉轉換的 complexity 為 $O(n^2)$ ，然而使用快速傅立葉轉換的 complexity 為 $O(n \log n)$ ，可大幅減少計算的複雜程度。

1.2.2 Cepstrum analysis

Cepstrum 的定義如下：

$$\begin{aligned} 9 \quad C_{ceps}(\lambda) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \ln \{ \mathcal{F}(f) \} \} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ \ln A(f) + i\phi(f) \} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 \mathcal{F} 為傅立葉轉換， \mathcal{F}^{-1} 為逆傅立葉轉換， λ 為一以時間為單位之計量，又被稱為 quenfrency，而 C_{ceps} 為倒頻光譜， $A(f)$ 和 $\phi(f)$ 分別為 $\mathcal{F}(f)$ 的實部與虛部。因此傅立葉轉換可描述為

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(x(t)) = A e^{i\phi(f)} \quad (15)$$

其中 $x(t)$ 為原本的訊號。若將 $\phi(f)$ 定為 0，則我們得到 real cepstrum 的表示式

$$C_{ceps}(\lambda) = \mathcal{F}^{-1} \{ \ln \{ A(f) \} \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \ln |\mathcal{F}(f)| \} \quad (16)$$

訊號若在 FFT 的中有峰值產生，則其 Cepstrum 也將有峰值在其時間域對應的位置產生，意即 Cepstrum 圖能幫助我們更好的看出訊號在時間上的變化，週期性的回聲等性質也能更清晰地呈現，比如兩個捲積 (convolution) 的訊號在傅立葉轉換後搭們的結果會被相乘，但利用對數率與逆傅立葉轉換則可將結果轉為兩隊應訊號的相加，進而達到 deconvolution 的效果，而能更清晰的看出訊號的時間特性。

1.3 A6 Frequency dependent of resolution power[5, 6]

1.3.1 繞射極限 (解析度與波長)

所謂解析度時常會以兩個物體的辨別程度來決定，意即當兩個物體靠在一起時，能不能解析出其為兩樣物體而非單一一點。當雷射打向平面時，平面上不會出現一個點而將產生聚焦於圓心的圓形圖紋，外部有著多個環亮暗相間的環繞，其剖面的強度大約可用 bessel function 來表達，即由中央逐漸衰減之圖形，這樣的圖紋被稱作 Airy disk，如圖 1：

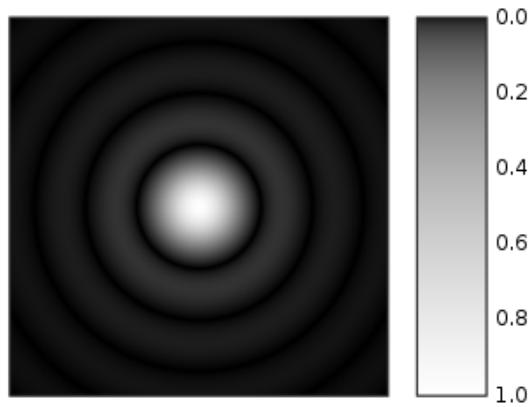


圖 1: Airy disk 圖像

該圖形的成因源自繞射。其中央亮圈的半徑可以用下方式子描述：

$$\theta = 1.2197 \frac{\lambda}{2R} R = n \sin \theta \quad (17)$$

其中 θ 為亮圈之半徑， λ 為入射波長， R 則為 numerical aperture， n 為介質折射率， θ 則是描述發射體所壟罩之發射範圍的角度，普遍而言解析度越好的儀器其 R 會越大。

當兩個亮圈半徑相同的 Airy disks 以一方之首個最小值與另一方之最大值重疊之時，兩者將剛好合一而無法被分辨，此時兩方的距離恰為亮圈之半徑即繞射極限，又 Airy disk 為一對稱圖形，則其半徑恰等於兩亮圈中央之距離和 full width at half

maximum(FWHM) , 因此 FWHM 也常作為解析度的指標。

現今為了計算上的方便，常會將 θ 簡化為 $\frac{\lambda}{2}$ ，由此能看出波長越小則其解析度應當越好，以此將其類比於聲波並可大略估計用不同頻率的 probe 結果上的差異。

1.4 A7 Shear wave in solid state material

1.4.1 Shear wave and longitudinal wave in solid

利用司乃爾定律可以分別得到橫波 (shear wave) 和縱波 (longitudinal wave) 在固體內傳播速度的比值，如下方式子所列：

$$\frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu)}} \quad (18)$$

其中 c_L 為縱波速率 c_T 為橫波速率， μ 則為 Poisson's ratio， μ 與材料種類相關，且由上式可發現縱波速率會較橫波快，因此若在 A-scan 的影像中有兩個峰值，則可以利用橫軸的時間判斷出先出現者源於縱波。

1.5 hool

1.6 A11 Debye-Sears effect[7]

傳播至施以超聲波之液體中之光線可見圖 2來呈現入射與散射波的情形：其中， S_0 為入射光之方向向量， S 為散射光之方向向量， s 為 $S_0 - S$ 。我們可以將這種現象視作光被液體因超聲波的震盪產生的平面所反射。之後配合布拉格繞射定理可以推得：

$$\Lambda = \frac{\lambda}{s} \quad (19)$$

其中 Λ 為聲波的波長， λ 為入射光之波長， s 為向量 s 的長度，且該長度為 $2 \sin \theta$ ，其中 θ 為 S_0 與 s 的夾角。藉此可以推得不同繞射圖紋的光程差應為 λ 的整數倍，知道這點後便可推出聲波波長 Λ 和雷射波長的關係 λ 。

雷射在超聲波液體的光路圖如圖 3：若散射光與平面的距離 S 遠大於光般距離 x ，

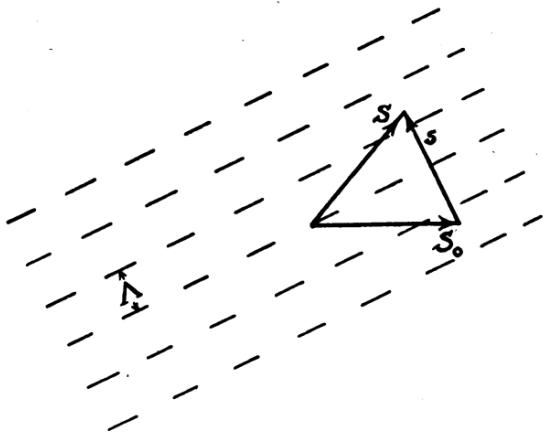


圖 2: Debye-Sear effect 簡圖

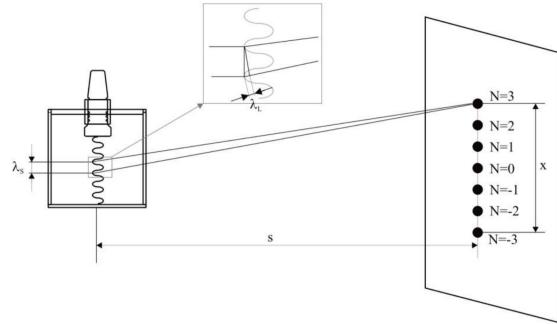


圖 3: Debye-Sear 光路簡圖

則可推得：

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x/2}{S} \quad (20)$$

又聲波與雷射的波長有著下方之關係：

$$\frac{N\lambda}{\Lambda} = \sin \theta \quad (21)$$

將兩式合併並整理，最終可得：

$$\Lambda = 2N\lambda \frac{S}{x} \quad (22)$$

最後，利用所求得之超聲波波長即可推知液體中的波速。

1.7 A23 Dispersion of ultrasonic Waves[8]

Lamb wave 描述了波在薄平面內的傳播現象，各個坐標軸方向如圖四：

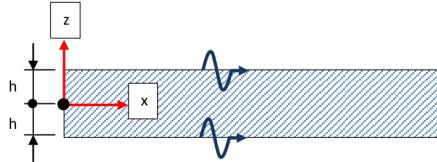


Fig. 1. Geometry of the free plate

圖 4: Lamb wave 平面簡圖

未知的位移向量 \mathbf{u} 可以利用 Helmholtz theorem 來定義：

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \psi \quad (23)$$

其中 $\phi = \phi(x, z)$ 和 $\psi = (0, -\psi(x, z), 0)$ 分別為 potential 和 vector function，且 $\nabla\psi = 0$ 。其 EOM 可以用 \mathbf{u} 來表達：

$$(2\mu + \lambda)\nabla^2\mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (24)$$

其中 λ 和 μ 為 Lame constant， ρ 為材料之密度，將 (23) 與代入 (24)，可以得到兩組等式：

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

其中 c_L 便是所謂的縱波速率， c_T 則為橫波速率，從 (25) 和 (26) 可以分別解出：

$$\phi = \Lambda(z)e^{i(kx-\omega t)} \quad (27)$$

$$\psi = \Omega(z)e^{i(kx-\omega t)} \quad (28)$$

其中， k 為 wavenumber， ω 為角速度， $\Lambda(z)$ 和 $\Omega(z)$ 代表著在 z 方向上的駐波，重新將 (27) 和 (28) 代入 (24) 可得：

$$\Lambda(z) = \theta_1 \sin K_L z + \theta_2 \cos K_L z \quad (29)$$

$$\Omega(z) = \delta_1 \sin K_T z + \delta_2 \cos K_T z \quad (30)$$

$$K_L^2 = k_L^2 - k^2 \quad \text{and} \quad k_T^2 = k_T^2 - k^2 \quad (31)$$

最後利用虎克定律可以將上列式子整理為：

$$u_x = \left(\frac{d\Omega}{dz} + ik\Lambda \right) e^{i(kx-\omega t)} \quad (32)$$

$$v_y = 0 \quad (33)$$

$$w_z = \left(\frac{d\Lambda}{dz} + ik\Omega \right) e^{i(kx-\omega t)} \quad (34)$$

$$\sigma_{xx} = \left\{ \lambda \left(\frac{d^2\Lambda}{dz^2} - \Lambda k^2 \right) - 2\mu \left(k^2 \Omega - ik \frac{d\Omega}{dz} \right) \right\} e^{i(kx-\omega t)} \quad (35)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(k^2 \Omega + \frac{d^2\Omega}{dz^2} + 2ik \frac{d\Lambda}{dz} \right) e^{i(kx-\omega t)} \quad (36)$$

$$\sigma_{zz} = \left\{ \lambda \left(\frac{d^2\Lambda}{dz^2} - \Lambda k^2 \right) + 2\mu \left(\frac{d^2\Lambda}{dz^2} - ik \frac{d\Omega}{dz} \right) \right\} e^{i(kx-\omega t)} \quad (37)$$

依據上列式 (32) 到 (37) 為對應 $z=0$ 的奇偶函數分為兩組，並代入 boundary condition: σ_{xz} 以及 $\sigma_{zz} = 0$ 和 $z = \pm h$ 則可得：

$$\frac{\tan(K_T h)}{\tan(K_L h)} = \left[\frac{4k^2 K_T K_L}{(K_T^2 - K_L^2)} \right]^{\pm 1} \quad (38)$$

其中正號代表 symmetric mode，而負號代表 antisymmetric mode。

2 實驗步驟與觀察記錄

2.1 A1 Ultrasonic echography

1. 將 1 MHz 探頭表面塗抹凝膠，使探頭和樣品偶合。
2. 測量樣品每個小孔的 S_1 和 S_2 反射波時間，樣品示意圖如圖 10，其中需調整到反射波訊號達到最大值再紀錄數據。
3. 使用 2 MHz 探頭並重複步驟 1 和 2。

2.2 A4 Attenuation of ultrasound in liquids

1. 儀器架設示意圖如圖 5，水槽邊緣和探針需用凝膠耦合。
2. 將探頭調整為收發模式。
3. 移動鋁板位置，並記錄鋁板與探針距離 x 和對應的反射波訊號振幅 A 。此處須注意調整鋁板角度直到反射波訊號出現最大值。

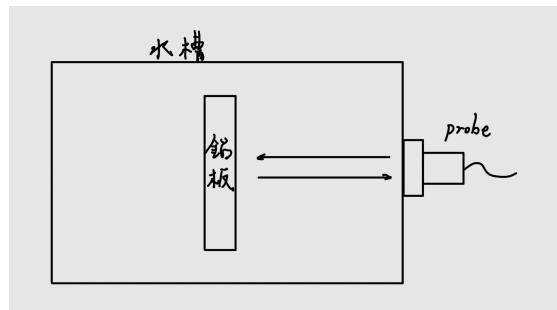


圖 5: A4 實驗儀器架設示意圖

2.3 A5 Spectral investigation

1. 本實驗儀器架設示意圖如圖 6。利用實驗所提供之壓克力圓柱與基板疊合成緩衝，將探頭接上圓柱朝向桌面，以其為最終反射面，而任兩物體的介面之間 (包含探頭-壓克力和壓克力-壓克力) 除了桌面外皆須塗抹凝膠，並注意耦合，並將接收與傳輸利用儀器設為同一個端口。
2. 先觀察 A-scan 之結果，使用儀器調整輸出強度令訊號達方便檢視的振幅，病讀取訊號時間，之後利用軟體內的 cursor 選取波包進行 FFT 以及 cepstrum 分析，利用 cepstrum 可以得到聲波的 TOF，紀錄之。
3. 利用游標尺量測各壓克力板之尺寸，並與由 TOF 所得之厚度進行較。

4. 利用不同探針重複實驗，並比較結果。
5. 我們將不同數量的壓克力板疊加組合，並試圖比較其結果差異。

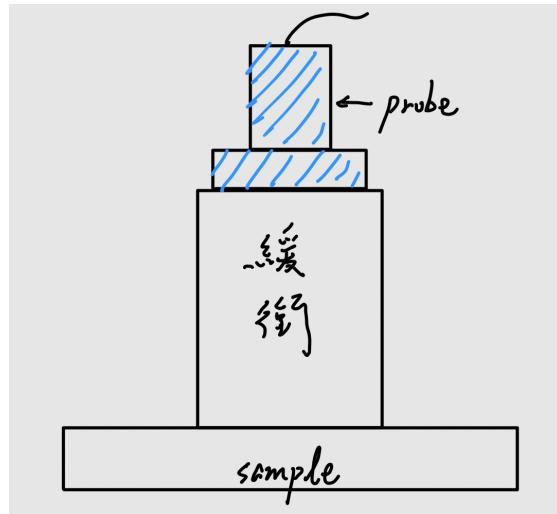


圖 6: A5 實驗儀器架設示意圖

2.4 A6 Frequency dependent of resolution power

1. 將探針的模式調整反射模式。
2. 測量圓柱形壓克力樣品長度，使用反射波抵達時間以及 FFT 讀取訊號頻率以測量 1 MHz、2 MHz、4 MHz 探頭的實際頻率、與聲速，。此部分實驗儀器架設與圖 6相同。
3. 使用測得的波速與頻率計算波長。
4. 測量每個探針的 pulse width 並計算 pulse width 和週期的比質。
5. 使用不同頻率探針測量壓克力樣品小孔 1 號和 2 號反射波的時間差，並計算兩孔洞之間的距離。壓克力樣品示意圖如圖 10。

2.5 A7 Shear wave in solid state material

1. 實驗儀器架設示意圖如圖 7。準備一裝滿 RO 水的容器 (實驗器具之一)，將兩頻率相同的探頭連接至儀器兩者間同樣由凝膠連接並注意耦合。
2. 將探針設定其一為輸出端，另一為發射端，將壓克力板的旋轉盤放入容器，觀察 A-scan 影像，調整壓克力板的角度，使訊號達到最大，此時的角度將被定義為零度
3. 之後每次轉 2.5 度觀察 A-scan 影像，並利用先前縱波速率大於橫波的速率的結論判斷所出現的峰值為何者，並紀錄直至訊號消失。
4. 重複實驗，但把壓克力換做鋁板。

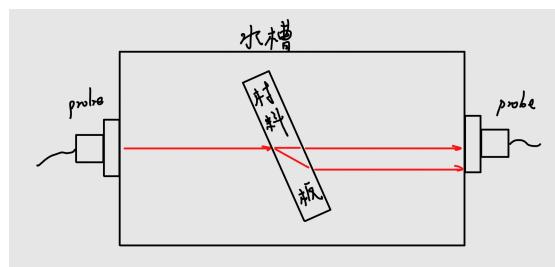


圖 7: A7 實驗儀器架設示意圖

2.6 A11 Debye-Sears effect

1. 實驗儀器架設示意圖如圖 8。須注意探針頂部需沒入去離子水中。
2. 開啟 SC600 sound wave controller 輸出雷射和超音波。
3. 測量探針在水中形成的”光闌”至投影在牆面的干涉條紋的距離、干涉條紋之 N 和 x 。
4. 計算超音波在水中聲速以及波長。

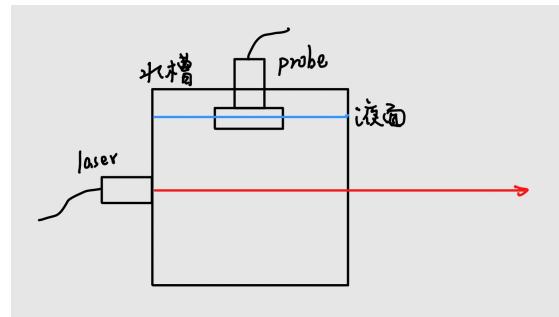


圖 8: A11 實驗儀器架設示意圖

2.7 A23 Dispersion of ultrasonic Waves

1. 實驗儀器架設示意圖如圖 9。將樣品放置於方格紙上進行量測與實驗。
2. 將兩相同頻率之探針與實驗設備中有角度不一的壓克力斜坡組以凝膠連接並耦合，並利用儀器設置為一輸出一接收，從電腦上觀察 A-scan 影像，移動可動的探針使訊號達到最強的同時兩探針最為接近。
3. 利用方格紙逐步移動可動之探針與另一探針之距離，將新的影像與原先的互相比較以得出 TOF，並利用該數據推估聲波在樣品中的群速度。
4. 重複實驗，配合課本所提供之表格判斷 mode，更換探針或斜坡來取得其他的數據結果。

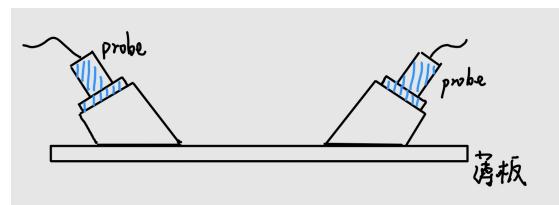


圖 9: A23 實驗儀器架設示意圖

2.8 額外實驗: 測量未知結構樣本內部缺陷分布

1. 將 2 MHz 的探針塗抹凝膠後置於未知內部結構樣品的長邊邊緣，其中探針邊緣與樣品邊緣對齊。
2. 每次移動探針 3 mm 並記錄反射波訊號，直到探針邊緣與樣品另一個邊緣對齊。

3 結果與討論

3.1 A1 Ultrasonic echography

壓克力樣品三邊長度如表 1，測量超聲波在壓克力樣品高邊來回傳遞所需時間為 $30.42 \mu\text{s}$ ，計算得聲速為 $2674 \pm 1 \text{ m/s}$ ，符合理論值 2600 至 2800m/s。

長	寬	高
150.18(1.7)	80.44(1.7)	42.04(1.7)

表 1: 壓克力樣品邊長 (單位:mm)

超聲波因樣品小孔反射來回傳遞所需時間、距樣品邊緣長度以及小孔直徑見表 2、3、4、5，其中小孔編號和距離編號如圖 10。我們發現小孔直徑普遍比實際大小還要小，導致測量誤差的主要原因為：

1. 聲速測量誤差：由於樣品內部佈滿孔洞，在計算聲速時我們只能測量超聲波在高邊的傳播時間，無法取得其他長度的傳播時間，因此無法消去探測頭保護層對測量聲速的影響，使聲速變慢。
2. 凝膠用量誤差：在本實驗中使用凝膠使探測頭和樣品耦合，然而凝膠的厚度會使待測物厚度增加，以及每次使用量均不相同，使 S1、S2 時間變長導致 S1、S2 距離增加，進而使小孔直徑減小。

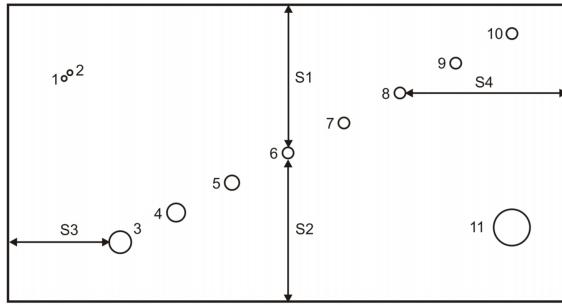


圖 10: A1 實驗小孔編號以及距離編號示意圖

3. 讀取時間誤差: 我們選擇反射波訊號對時間的微分大於 0.02 的時間點作為我們的反射時間，然而此方法讀取出的數值會因人為定義的閥值而有所影響。

3.2 A4 Attenuation of ultrasound in liquids

我們對去離子水，大豆沙拉油和異丙醇三種不同液體進行此實驗。方形容器長邊、寬邊長度以及由式 (1) 計算得超聲波聲速見表 6，超聲波衰變的原始數據見附錄節 6.1。將 $2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i}$ 對 $x_i - x_1$ 做散布圖和線性回歸分析，結果如圖 11。從線性回歸求得的函數斜率可得知液體衰減細數 α ，液體衰減係數測量值和參考值如表 7。

我們發現測量值普遍比參考值小，推測其原因為：

1. 因在計算 $2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i}$ 時，測量數據會和第一筆數據結果作比值，因此第一筆數據振幅變得極為重要。假設超聲波在介質中傳遞的過程無擴散，因此當與障礙物的入射角為小角度時其反射波在容器與探頭的接觸面成像應為圓形。假設夾角誤差為 0.5 度時，我們藉由計算超聲波反射波在邊緣的成像面積與圓形探頭面積的比值來修正誤差。示意圖如圖 12，假設探頭與障礙物間距為 x ，障礙物夾角誤差為 θ ，圓形探頭圓心與反射波成像圓心間距 Δl 為

$$\Delta l = 2x\theta \quad (39)$$

小孔編號	S1 時間	S2 時間	S1 距離	S2 距離	S1 距離實際	S2 距離實際
	μs	μs	mm	mm	mm	mm
1 和 2	12.92	43.52	17.85(1))	60.14(2)	17.20(1.7)	59.44(1.7)
3	44.92	9.56	62.08(2.5)	13.21(1)	61.44(1.7)	12.70(1.7)
4	39.42	15.58	54.48(2)	21.53(1)	54.00(1.7)	21.16(1.7)
5	33.92	21.60	46.87(2)	29.85(2)	46.58(1.7)	29.60(1.7)
6	28.42	27.96	39.27(1.6)	38.64(1.5)	39.08(1.7)	38.16(1.7)
7	22.56	33.74	31.17(1)	46.62(2)	31.04(1.7)	46.04(1.7)
8	16.76	39.56	23.16(1)	54.67(2)	23.10(1.7)	54.10(1.7)
9	10.96	45.43	15.15(1)	62.66(2)	15.14(1.7)	62.06(1.7)
10	5.14		7.103(3)		7.08(1.6)	70.34(1.7)
11	40.74	10.72	56.30(2)	14.81(1)	55.88(1.7)	14.70(1.7)
寬	58.64		81.04(3)		80.44(1.7)	

表 2: 1 Hz 探測頭，S1、S2 時間、距離以及距離實際值測量結果。其中實際距離為使用游標卡尺測量結果，S1，S2 距離為小孔到樣品邊緣的距離。

小孔編號	S1 時間	S2 時間	S1 距離	S2 距離	S1 距離實際	S2 距離實際
	μs	μs	mm	mm	mm	mm
1 和 2	12.74	43.52	17.60(1))	60.14(2)	17.20(1.7)	59.44(1.7)
3	44.64	9.56	61.69(2.5)	13.21(1)	61.44(1.7)	12.70(1.7)
4	39.28	15.46	54.28(2)	21.37(1)	54.00(1.7)	21.16(1.7)
5	33.92	21.62	46.88(2)	29.89(2)	46.58(1.7)	29.60(1.7)
6	28.30	27.84	39.11(1.6)	38.47(1.5)	39.08(1.7)	38.16(1.7)
7	22.48	33.68	31.06(1)	46.54(2)	31.04(1.7)	46.04(1.7)
8	16.62	39.56	22.95(1)	54.67(2)	23.10(1.7)	54.10(1.7)
9	10.96	45.34	15.14(1)	62.65(2)	15.14(1.7)	62.06(1.7)
10	5.2		7.186(3)		7.08(1.6)	70.34(1.7)
11	40.66	10.84	56.19(2)	14.98(1)	55.88(1.7)	14.70(1.7)
寬	58.52		80.87(3)		80.44(1.7)	

表 3: 2 Hz 探測頭，S1、S2 時間、距離以及距離實際值測量結果。其中實際距離為使用游標卡尺測量結果，S1，S2 距離為小孔到樣品邊緣的距離。

小孔編號	直徑	實際直徑	誤差 (%)
1 和 2	3.05(4)	3.80(3)	-20
3	5.75(4)	6.30(3)	-9
4	5.03(4)	5.28(3)	-4
5	4.32(4)	4.26(3)	2
6	3.13(4)	3.21(3)	-3
7	3.25(4)	3.36(3)	-3
8	3.21(4)	3.24(3)	-1
9	3.23(4)	3.24(3)	-0.3
10		3.02(3)	
11	9.93(4)	9.86(3)	0.7

表 4: 1 Hz 探測頭，樣品孔洞直徑與實際直徑。其中實際直徑為游標卡尺測量結果，直徑為樣品寬減去 S1 和 S2 距離。

小孔編號	直徑	實際直徑	誤差 (%)
1 和 2	3.13(4)	3.80(3)	-17
3	5.97(4)	6.30(3)	-5
4	5.22(4)	5.28(3)	-1
5	4.10(4)	4.26(3)	-4
6	3.29(4)	3.21(3)	2
7	3.27(4)	3.36(3)	-3
8	3.25(4)	3.24(3)	0.3
9	3.08(4)	3.24(3)	17
10		3.02(3)	
11	9.70(4)	9.86(3)	-4

表 5: 2 Hz 探測頭，樣品孔洞直徑與實際直徑。其中實際直徑為游標卡尺測量結果，直徑為樣品寬減去 S1 和 S2 距離。

樣品	去離子水	大豆沙拉油	異丙醇
容器長邊 (cm)		20.0 ± 0.1	
容器短邊 (cm)		9.9 ± 0.1	
長邊時間 (μs)	134.56	135.36	131.1
短邊時間 (μs)	67.36	67.23	65.37
聲速 (m/s)	1502.97	1482.46	1536.59

表 6: A4 實驗: 超音波在溶液內聲速

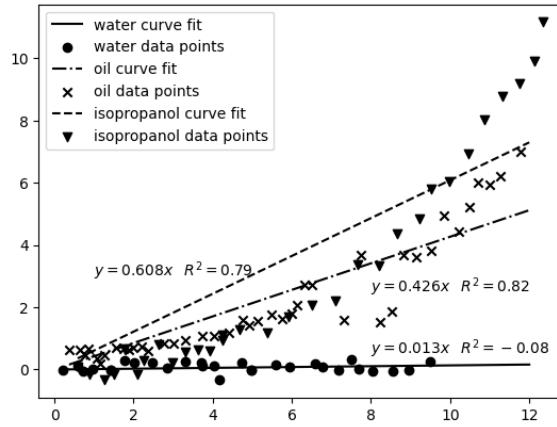


圖 11: A4 實驗: 超聲波在液體內部衰減曲線

A 點、B 點與兩圓心的終點間距 s 為

$$s = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \theta^2 x^2} \quad (40)$$

而探頭與反射波重疊面積 $area$ ，即圖 12 斜線區域面積，為

$$\begin{aligned} area &= 2 \int_{-s}^s \left(-\frac{\Delta l}{2} + \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \\ &= 4 \int_0^s \left(-\frac{\Delta l}{2} + \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \\ &= 4 \left\{ -\frac{\Delta l}{2}s + \frac{R^2}{4} \left[2 \arcsin\left(\frac{s}{R}\right) + \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{s}{R}\right)\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

樣品	測量值	參考值	誤差 (%)
去離子水	0.01 ± 0.005	0.02	-50
大豆沙拉油	0.43 ± 0.02	0.467	-8
異丙醇	0.61 ± 0.04	0.63	-3.1

表 7: A4 實驗: 液體衰減係數參考值和測量值，單位:db/cm

測量結果為 V ，而修正後的結果 V' 可表示為

$$V' = V * \frac{\pi R^2}{area} \quad (42)$$

將 $\theta = 1^\circ$ 、 $R = 1.35(\text{cm})$ 以及三種液體第一筆測量結果 V 帶入式 42。最終修正結果如表 8，其中 α' 為將第一筆測量結果修正後重新計算求得的衰減係數。

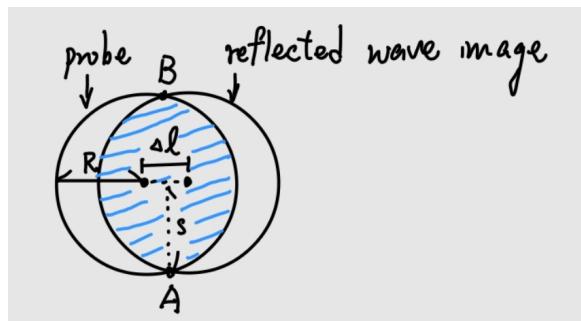


圖 12: 圓形探頭與反射波成像示意圖

3.3 A5 Spectral investigation

我們針對厚度為 5.6、7.8、8.9 毫米的薄板進行測量，根據課本超聲波在此薄片內聲速為 2670 m/s 。為了方便敘述，以下將這三個不同厚度薄板分別稱為薄板 1 號、2 號、3 號。實驗結果及誤差見表 9 和表 10。我們可以發現使用 cepstrum 的誤差均比使用 A-scan 誤差小，推測其可能原因：

樣品	x	V	V'	α'	修正後誤差
	cm	V	V	db/cm	%
去離子水	2.885	1.356	1.424	0.15±0.02	-25
大豆沙拉油	2.778	1.265	1.2946	0.47±0.02	1.3
異丙醇	2.80	1.191	1.218	0.671±0.03	6.3

表 8: A4 實驗: 修正後實驗結果

1. 使用 A-scan 求得的 peak time 包含超聲波穿越探頭的保護殼以及塗抹於表面的凝膠，因此測得時間比超聲波在樣品內部時間還要長，導致樣品測離厚度比實際厚度大。
2. 由於倒譜是專門用於研究頻率空間內週期性結構的工具，可以特別強調訊號的反射及其資訊，因此在使用倒譜分析樣品厚度會更加準確。

薄板編號	A-scan		$\frac{1}{2}$ 平均	A-scan	cepstrum	cepstrum
	peak time	μs	間隔時間	求得厚度	間隔時間	求得厚度
					μs	mm
1	30.49	34.84	39.11	2.16	5.75	4.28
2	30.55	36.52	42.43	2.97	7.92	5.88
3	30.51	37.32	44.03	3.38	9.02	6.71

表 9: A5 實驗: 單層薄板實驗測量結果

另外，我們還有將 1 號和 2 號薄板相疊以及 1 號和 3 號薄板相疊並進行測量，測量結果見表 11。我們先依照表 9 的 A-scan 測量結果推測每個 peak time 的反射波在樣品內的行徑路線，如圖 13，再依照此結果推算薄板厚度，見表，推算方法如下：

薄板編號	直接	A-scan	cepstrum
	測量厚度	誤差	誤差
	mm	%	%
1	5.6	2.7	2.0
2	7.8	1.5	0.5
3	8.9	1.3	0.6

表 10: A5 實驗: 單層薄板實驗誤差

1. 我們先將圖 13的左圖中的反射路徑由左到右分別編號為 1 號到 6 號路徑。右圖的編號方法相同
2. 對於圖 13的左圖，我們將路徑 2 和路徑 1 的時間相減並除以 2 得到一筆薄板 1 號的時間數據。將路徑 3 和路徑 1 的時間相減並除以 4 得到一筆薄板 1 號的時間數據。
3. 接著將路徑 4 和路徑 2 的時間相減並除以 2 得到一筆薄板 2 號的時間數據，再將路徑 4 的時間減去 2 倍薄板 2 號的時間數據再減去路徑 1 的時間再除以 2 得到一筆薄板 1 的時間數據。
4. 將路徑 5 和路徑 3 的時間相減並除以 2 得到一筆薄板 2 號的時間數據，再將路徑 5 的時間減去 2 倍薄板 2 號的時間數據再減去路徑 1 的時間再除以 4 得到一筆薄板 1 的時間數據。
5. 將路徑 6 和路徑 2 的時間相減並除以 4 得到一筆薄板 2 號的時間數據，再將路徑 6 的時間減去 4 倍薄板 2 號的時間數據再減去路徑 1 的時間再除以 2 得到一筆薄板 1 的時間數據。
6. 圖 13的右圖處理方法同步奏 2 至 5。

我們發現兩層薄板相疊測量薄板 1、2、3 厚度結果誤差普遍比單層薄板測量結果誤差大，推測可能是兩片薄板之間塗的凝膠使超聲波來回時間更長導致最終薄片厚度計算結果比理論值更大。

薄板編號	A-scan peak time(μs)					
1+2	30.49	34.96	39.34	40.88	45.27	46.80
1+3	30.48	34.88	39.24	41.66	45.99	48.43

表 11: A5 實驗: 兩層薄板測試結果

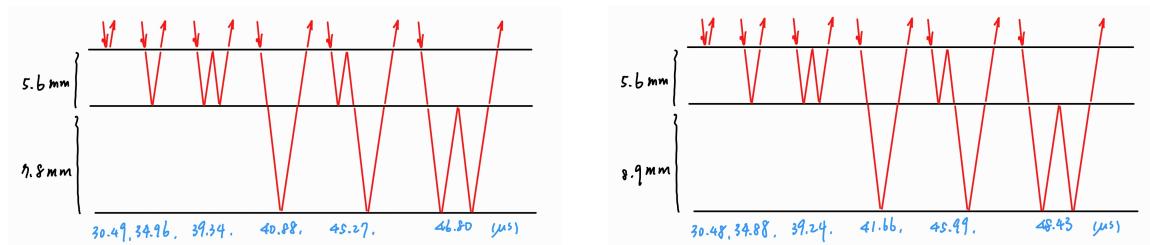


圖 13: A5 實驗: 樣品內部反射波行徑路線，左圖為薄板編號 1+2 推測結果，右圖為薄板編號 1+3 推測結果

3.4 A6 Frequency dependence of resolution power

本實驗中，我們先計算圓柱形壓克力樣品波速，測量結果見表 13，並依照式 (1) 計算聲速。接著計算 1 MHz、2 MHz、4 MHz 探頭的實際頻率、週期、波長、pulse width 以及 pulse width 和波長的比值，結果見表 14。最後測量壓克力樣品小孔 1、2 號之間的距離，此處聲速選擇節 3.1 測量的聲速 2763.97 m/s，結果見表 15。我們可以發現當探針頻率越大，測量誤差越小，符合波長越短，解析力越高的原則。

薄板編號	$\frac{1}{2}$ 平均 間隔時間	A-scan 求得厚度	直接 測量厚度	誤差
	μs	mm	mm	%
1	2.21	5.90	5.6	5.4
2	2.96	7.91	7.8	1.3
3	3.38	9.03	8.9	1.5

表 12: A5 實驗: 兩層薄板實驗推算薄板厚度結果與誤差

s_1 mm	t_1 μs	s_2 mm	t_2 μs	c m/s
120.0	88.54	39.9	30.42	2756.37

表 13: A6 實驗: 圓柱形壓克力樣品聲速測量結果

探針頻率	1 MHz	2 MHz	4 MHz
實際頻率 MHz	0.98	1.95	3.91
波長 mm	2.82	1.42	0.71
週期 μs	1.02	0.51	0.26
pulse width mm	5.09	4.86	1.60
pulse width/波長	1.80	3.43	2.27
(pulse width/波長) 誤差 (%)	-10.0	71.5	13.5

表 14: A6 實驗: 不同頻率探針各參數量測結果，其中 (pulse width/波長) 理論值為 2

探針頻率	1 MHz	2 MHz	4 MHz
孔洞距離 卡尺測量值 (mm)		1.74	
波峰 $\Delta t(\mu s)$	1.05	1.23	1.26
孔洞距離 mm	1.45	1.70	1.73
誤差 (%)	-16	-2	-0.5

表 15: A6 實驗: 小孔 1、2 號距離測量結果

3.5 A7 Shear wave in solid state materials

本實驗透過旋轉鋁製材料版以及壓克力材料版的角度以產生橫波和縱波，並測量其在不同旋轉角度下的振幅，如圖 14，以及橫波和縱波波速，見表 16，原始數據見節 6.2。此外，還可以透過出現橫波最大振幅時的角度計算橫波波速，見表 17

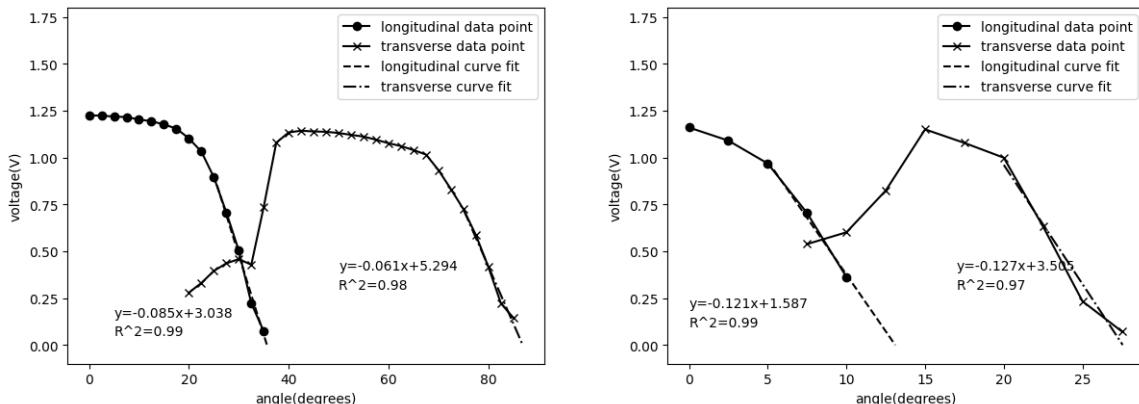


圖 14: A7 實驗: 壓克力板 (左圖) 和鋁板 (右圖) 之橫波和縱波振幅與旋轉角度關係圖

最後，我們計算 modulus of elasticity(E)、shear modulus(G) 以及 Poisson's

v_{inc} m/s	材料	ϕ_L <i>degree</i>	v_L m/s	v_L 公認值 m/s	誤差 %	ϕ_T m/s	v_T m/s	v_T 公認值 <i>degree</i>	誤差 %
1502.97	壓克力	35.63	2579.67	2610	-1.16	86.87	1505.22	1430	5.26
	鋁	13.10	6631.37	6320	4.92	27.60	3244.25	3040	6.72

表 16: A7 實驗: 不同材料內橫波和縱波波速及誤差。其中 v_{inc} 為水中聲速， ϕ_L 和 ϕ_T 為產生全反射時的入射角，即為擬合函數的 x 軸節距， v_L 和 v_T 則為縱波和橫波波速。

v_{inc} (m/s)	材料	$\Phi(degree)$	v_T (m/s)	誤差 (%)
1502.97	壓克力	42.5	1573.08	10.0
	鋁	15.0	4106.19	35.1

表 17: A7 實驗: 使用出現橫波最大振幅時的入射角計算橫波波速結果

ratio(μ)，結果見表，其中計算所使用的 v_L 和 v_T 均使用表 16 的結果。

材料	ρ	μ	μ 公認值	μ 誤差
	kg/m ³			%
壓克力	1180	0.24	0.29	-16.6
鋁	2710	0.34	0.31	10.5

表 18: A7 實驗:Poisson's ratio(μ) 計算結果與誤差

材料	ρ	G	G 公認值	G 誤差
	kg/m ³	MPa	MPa	%
壓克力	1180	2673.51	2600	2.83
鋁	2710	28523.18	26000	9.97

表 19: A7 實驗:shear modulus(G) 計算結果與誤差

3.6 A11 Debye-Sear effect

本實驗中我們使用波長為 532 nm 的綠光和 652 nm 的紅光進行實驗，實驗測量結果見表 21 和表 22，其中波長根據式 (22) 計算，須注意式中 Λ 即為此處的超聲波波長 λ_s 。我們發現使用綠色雷射光所量測的聲速誤差和標準差均較大。由於

$$v = f * 2N\lambda_L \frac{s}{x} \quad (43)$$

其中 v 為聲速，根據誤差傳遞公式可得

$$\Delta v = v * \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2} \quad (44)$$

因測量 s 和 x 的尺最小刻度均為 0.1 cm，故 Δs 和 Δx 均為 0.03 cm。由於綠色雷射光實驗結果中有 4 筆數據的 s 為 217.5 cm，較其他筆數據小，因此這些數據計算

材料	ρ	E	E 公認值	E 誤差
	kg/m ³	MPa	MPa	%
壓克力	1180	6662.26	6800	-2.02
鋁	2710	67379.7	68000	-0.91

表 20: A7 實驗: modulus of elasticity(E) 計算結果與誤差

頻率 MHz	s	N	x	λ_s	聲速
	cm		cm	μs	m/s
3	217.5	3	1.35	514.3	1542.8 ± 34.3
3.5	646.1	5	8.0	429.7	1503.8 ± 5.6
4	217.5	4	2.4	385.7	1542.8 ± 19.3
4.5	646.1	4	8.3	331.3	1490.9 ± 5.4
5	217.5	4	3.0	308.6	1542.8 ± 15.4
5.5	646.1	4	10.1	272.3	1497.4 ± 4.5
6	217.5	3	2.7	257.1	1542.8 ± 17.2
6.5	646.1	2	6.0	229.2	1489.5 ± 7.5
7	646.1	2	6.4	214.8	1503.8 ± 7.0
7.5	646.1	2	6.9	199.3	1494.5 ± 6.5
聲速平均值 (m/s)				1515.1	
聲速標準差				23.0	
誤差 (%)				0.8	

表 21: A11 實驗: 綠色雷射光實驗結果

頻率 Hz	s cm	N cm	x μs	λ_s	聲速 m/s
3	616.0	4	6.4	502.0	1506.1 ± 7.1
3.5	616.0	4	7.5	428.4	1499.4 ± 6.0
4	616.0	6	12.8	376.5	1506.1 ± 3.5
4.5	616.0	4	9.6	334.7	1506.1 ± 4.7
5	616.0	4	10.7	300.3	1501.4 ± 4.2
5.5	616.0	4	11.8	272.3	1497.6 ± 3.8
6	616.0	4	12.8	251.0	1506.1 ± 3.5
6.5	616.0	4	13.9	231.2	1502.5 ± 3.2
7	616.0	3	11.2	215.2	1506.1 ± 4.0
聲速平均值 (m/s)				1503.5	
聲速標準差				3.2	
誤差 (%)				0.03	

表 22: A11 實驗: 紅色雷射光實驗結果

出的聲速不確定度較大，與實際值相差甚遠，導致最終聲速標準差和誤差比紅色雷射光實驗結果的不確定度和誤差大。

3.7 A23 Dispersion of ultrasonic wave(Lamb wave)

在本實驗中，我們測量不同模式 Lamb wave 的頻率、移動距離 Δs 死相對應的傳播時間 Δt ，並計算出群速度 v_{Gr} 並曲平均 $\overline{v_{Gr}}$ ，實驗結果見表 23，實驗值與理論值比較如圖 15。推測可能造成實驗誤差的原因為以下幾點

1. 實驗中，探頭與薄板的接觸距離並非一點而是一個平面，測量兩者之間的距離通常是取兩探頭最前端的兩點距離。然而這未必是超聲波在薄板內部的行徑距離，此外也會因量尺最小刻度為 1 mm 導致測量誤差。
2. 因其中一個探頭無法固定於薄板上，且實驗讀取到的訊號會明顯受到兩探頭擺上的角度、方向影響，導致波包過於平緩使測量到的時間誤差變大。
3. 有時電腦顯示的訊號不清楚，甚至出現雜音過大、出現多個波包的情況以及移動探頭後的大致波型和先前的不一樣，有可能使我們沒有正辦法確讀取到 Lamb wave 模態的訊號，導致 Δt 以及 $\overline{v_{Gr}}$ 出現誤差。
4. 使用 FFT 讀取訊號頻率時，我們發現部分數據測得的頻率與表 14 的頻率相差甚大，導致 $f * d$ 偏離理論值，推測可能是雜訊所導致。

3.8 額外實驗: 測量未知結構樣本內部缺陷分布

本實驗中，我們測量一塊未知內部結構的壓克力樣品內部缺陷分布，測量結果見表 26，其中 x 為探針中心到樣品邊緣的距離。此外，為了找出每個孔洞反射波振幅達到最大直時的 x ，必須了解探針在探測缺陷時探針位置與訊號振幅的關係。我們選擇使用 python 進行模擬，程式代碼見節 6.3:

探針頻率 MHz	LW comb.	Mode	頻率 MHz	d mm	頻率 *d MHz * mm	Δs	Δt μs	v_{Gr} km/s	$\overline{v_{Gr}}$ km/s
1	LW5	S0	1.31	0.96	1.26	5	1.18	4.237	
						10	2.16	4.630	4.735
						15	3.10	4.839	
						20	3.82	5.235	
1	LW6	S0	1.10	0.96	1.06	5	0.90	5.555	
						10	1.96	5.102	5.287
						15	2.84	5.282	
						20	3.84	5.208	

Continued on next page

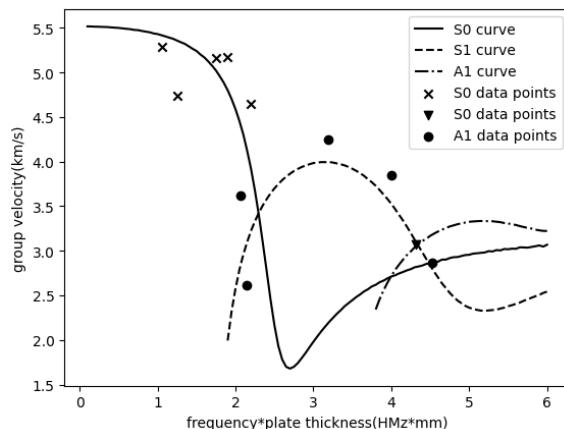


圖 15: A23 實驗: $\overline{v_{Gr}} - f * d$ 圖實驗值與理論值

探針頻率 MHz	LW comb.	Mode	頻率 MHz	d mm	頻率 *d MHz * mm	Δs	Δt μs	v_{Gr} km/s	\bar{v}_{Gr} km/s
2	LW5	S0	1.83	0.96	1.75	5	0.86	5.814	
						10	2.06	4.854	
						15	2.98	5.033	5.157
						20	4.06	4.926	
2	LW3	S0	1.82	1.04	1.90	5	0.68	7.35	
						10	1.98	5.05	
						15	3.44	4.36	5.176
						20	4.24	4.72	
						25	5.68	4.40	
2	LW7	S0	1.77	1.24	2.19	5	1.27	3.94	
						10	2.16	4.63	
						15	2.74	5.47	4.643
						20	4.42	4.52	
2	LW1	A1	1.99	1.08	2.15	10	3.84	2.604	
						15	5.50	2.727	2.617
						20	7.94	2.519	
2	LW2	A1	2.10	0.98	2.06	5	1.18	4.34	
						10	2.56	3.91	
						15	4.78	3.14	3.614
						20	6.30	3.17	

Continued on next page

探針頻率 MHz	LW comb.	Mode	頻率 MHz	d mm	頻率 *d MHz * mm	Δs mm	Δt μ s	v_{Gr} km/s	\bar{v}_{Gr} km/s
2	LW6	A1	2.42	1.32	3.19	5	1.16	4.31	
						10	2.34	4.27	
						15	3.56	4.21	4.250
						20	4.76	4.20	
4	LW3	A1	3.85	1.04	4.00	5	1.04	4.81	
						10	2.52	3.97	
						15	4.06	3.69	3.843
						20	5.80	3.45	
						25	7.58	3.30	
4	LW4	A1	4.44	1.02	4.53	5	1.72	2.91	
						10	3.58	2.79	
						15	5.10	2.94	2.865
						20	7.10	2.82	
4	LW1	S2	3.99	1.08	4.31	5	1.64	3.05	
						10	2.92	3.42	
						15	5.04	2.98	
						20	7.04	2.84	3.072

表 23: A23 實驗:Lamb wave 實驗測量結果

- 在模擬中，我們創建了一個長寬均為 10 個單位的水槽，並切割成 $200 * 200$ 個小正方形，其長寬分別為 dx 和 dy ，同時模擬的時間持續 0.025 個單位時間，並將其切割成 4000 個 dt 。我們也在水槽邊原創建一個長 5 個單位的探針，並在探針上面均勻分布 100 個點波原，同時此探針也負責接收反射回來的訊號。同時我們也在水槽正中心創建一個直徑為 r 的圓形障礙，其直徑依照需求做調整。

$$r = 5 \frac{D}{R} \quad (45)$$

其中 D 為真實孔洞直徑， R 為真實探針直徑。

- 模擬中的波方程為

$$\begin{aligned} u(t+1, x, y) = & c^2 dt^2 \left(\frac{u(t, x+dx, y) - 2u(t, x, y) + u(t, x-dx, y)}{dx^2} \right. \\ & + \left. \frac{u(t, x, y+dy) - 2u(t, x, y) + u(t, x, y-dy)}{dy^2} \right) \\ & + 2u(t, x, y) - u(t - dt, x, y) - \gamma * dt(u(t, x, y) - u(t - dt, x, y)) \end{aligned} \quad (46)$$

其中 $u(t, x, y)$ 為波函數， γ 則是 damping coefficient，模擬反射波示意圖見圖 16，模擬探針的位置和振幅關係圖見圖 17。我們使用高斯曲線和勞倫茲曲線進行擬合，發現高斯曲線較符合模擬結果。

最後我們使用高斯曲線對實際測量結果進行擬合，如圖 18，並找出反射波振幅達到最大直時的 x ，結果如表 26。其中 s_3 和 s_1 為小孔到樣品邊緣的距離，式意圖見圖 19。可以發現此樣品內部基本和實驗 A1 所使用的樣品相同，因此我們也將實驗結果和 A1 實驗中使用卡尺量測的 s_3 和 s_1 進行比較。

x mm	推測訊號來源	反射波抵達時間 μs	反射波振幅 V
22.5			0.389
25.5			1.182
28.5	孔洞 1	8.98	1.142
31.5			1.192
34.5			0.856
37.5			0.169
40.5			0.678
43.5	孔洞 2	15.22	0.738
46.5			0.741
49.5			0.425
52.5			0.190
55.5			0.482
58.5	孔洞 3	21.5	0.449
61.5			0.283
64.5			0.079
67.5			0.075
70.5			0.187
73.5	孔洞 4	27.92	0.265
76.5			0.177
79.5	孔洞 4	27.92	0.045
	孔洞 5	33.94	0.032

Continued on next page

表 24: Caption

x mm	推測訊號來源	反射波抵達時間 μs	反射波振幅 V
82.5	孔洞 5	33.94	0.067
85.5			0.135
88.5			0.147
91.5			0.055
100.5	孔洞 6	39.5	0.016
103.5			0.052
106.5			0.039
109.5			0.030
112.5			0.016
115.5	孔洞 6 孔洞 7	39.5	0.009
		45.28	0.013
118.5	孔洞 7	45.28	0.039
121.5			0.031
124.5	孔洞 7 孔洞 8	45.28	0.010
		10.62	0.115
127.5	孔洞 8	10.62	0.939
130.5			1.280
133.5			1.256
136.5			1.237

表 25: 額外實驗: 實驗結果

孔洞編號	對應實驗 A1 的孔洞邊號	s_3	實際 s_3	誤差	s_1	實際 s_1	誤差
		mm	mm	%	mm	mm	%
1	3	29.50 ± 0.81	27.28	8.1	11.89 ± 0.04	12.70	6.3
2	4	44.31 ± 0.56	42.60	4.0	20.35 ± 0.04	21.16	-3.8
3	5	57.32 ± 0.28	58.70	-2.3	28.75 ± 0.04	29.60	-2.9
4	6	73.27 ± 0.13	73.70	-0.5	37.33 ± 0.03	38.16	-2.1
5	7	86.86 ± 0.34	88.74	-2.1	45.38 ± 0.04	46.04	-1.4
6	8	105.62 ± 0.85	103.70	1.8	52.81 ± 0.04	54.10	-2.3
7	9	119.60 ± 0.86	118.78	0.7	60.54 ± 0.05	62.06	-2.4
8	11	133.21 ± 1.10	133.84	-0.5	14.20 ± 0.04	14.70	-3.4

表 26: 額外實驗: 實驗結果。其中 A1 實驗中透明樣品的 s_1 和 s_3 量測值作為實際值

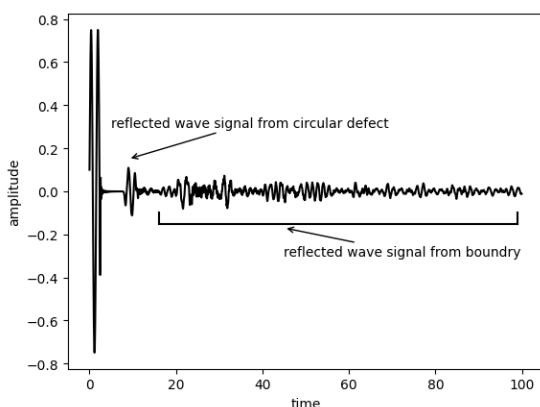


圖 16: 反射波訊號模擬結果

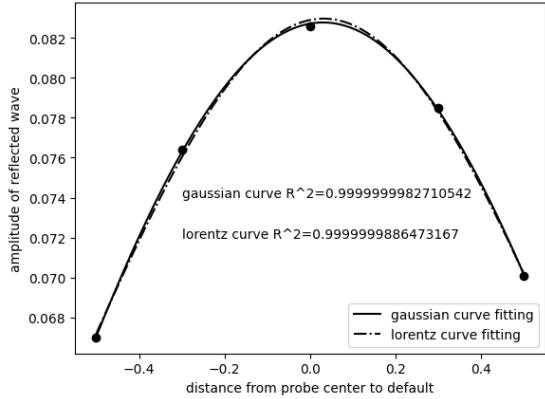


圖 17: 額外實驗: 探針的位置和振幅關係圖，此為模擬結果。

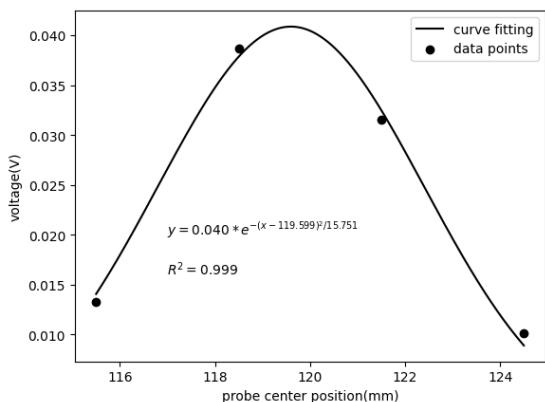


圖 18: 單一孔洞反射波訊號擬合結果，以孔洞 7 的結果為例

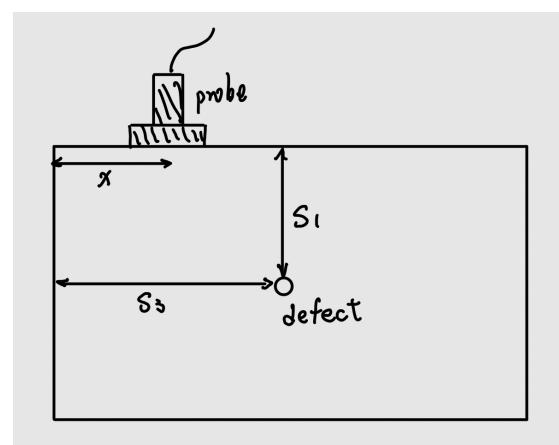


圖 19: x 、 s_1 、 s_3 式意圖

4 回答問題

4.1 問題一

請找尋並說明超聲波目前於業界的作用

超聲波目前已在業界被廣泛的使用，清洗、粉碎、檢測等，其中最為著名的便是在醫學上常使用的超聲波影像。超聲波影像的優點在於其可攜性、即時性以及安全性。其主要工作原理為：透過探棒向組織發射超聲波，由於聲波在每個組織的反射效果不同，因此透過反射回來的訊號便能推得組織內部的結構。

聲波穿透組織的能力可以用 acoustic impedance 來描述：

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (47)$$

$$T = \left(\frac{2Z_2 Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (48)$$

其中，R 代表反射係數，T 代表透射係數， Z_1 和 Z_2 分別為起始介質和目標介質之 acoustic impedance，以下為常見物品之數據 (單位： $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$)：

1. 空氣： 0.0004×10^6

2. 水： 1.48×10^6

3. 肝： 1.65×10^6

4. 肌肉： 1.71×10^6

5. 骨頭： 7.8×10^6

6. 壓克力： 3.26×10^6

7. 木頭： 3.27×10^6

從上方的數據可以見得在水與大部分的軟組織反射效果接近，從反射係數的關係式可見當兩介質差距越大反射效果將越明顯，從一般的超聲波胎兒圖可判斷胎兒的 acoustic impedance 大於水，正如上方列舉的其他軟組織一般。

另外對比空氣與壓克力 acoustic impedance 可以發現其反射係數極大，約為 0.996，因此推斷測量壓克力樣品小孔的實驗中 (如實驗 A1)，超聲波打到小孔時幾乎不會發生透射，這意味著在 A-scan 中看到後續的 peak 更多是直接源於桌面的反射。

最後也可以看到木頭與空氣的 acoustic impedance 差距夠大以作為實驗的反射面。(木頭的 acoustic impedance 將隨著品種上的不同而有所差異，但其仍與空氣相差甚遠。若為金屬桌面的話反射效果又會更好，例如鋼鐵的 acoustic impedance 約為 $45 \times 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$)

4.2 問題二

試計算平面波從液態介質入射至固態介質的反射係數以及透射係數

一態和固態介質內平面波的 velocity potential 可分別表示為

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \nabla\Phi \\ \mathbf{v} &= \nabla\phi + \nabla \times \psi\end{aligned}\tag{49}$$

且這些未能可以被描述為波函數的平面波解

$$\begin{aligned}\Phi_i &= e^{i(\omega t - k \sin \theta_i x + k \cos \theta_i z)} \\ \Phi_r &= R e^{i(\omega t - k \sin \theta_r x - k \cos \theta_r z)} \\ \phi &= T_l e^{i(\omega t - k_l \sin \theta_l x + k_L \cos \theta_l z)} \\ \psi &= T_s e^{i(\omega t - k_s \sin \theta_s x + k_s \cos \theta_s z)}\end{aligned}\tag{50}$$

其中 k 和 k_l 為液體和固體中縱波的波數， k_s 則為固體中橫波的波數。 R 、 T_l 、 T_s 則為反射和透射係數。在液體中，使用 $p = -T = \lambda S$ 、 $S = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 、 $v = i\omega u$ 以及

$\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ，我們有

$$\begin{aligned} p &= \frac{\lambda_1}{i\omega} \nabla^2 \Phi \\ V_1^2 &= \frac{\lambda_1}{\rho_1} = \frac{\omega^2}{k^2} \end{aligned} \quad (51)$$

而在固體內，normal stress 和 tangential stress 分別為

$$\begin{aligned} i\omega T_{zz} &= \lambda_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_z}{\partial z} \right) + 2\mu_2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ i\omega T_{xz} &= 2\mu_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{v_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

其中

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (53)$$

而對於 bulk wave 的 V_l^2 和 V_s^2 可表示為

$$\begin{aligned} V_l^2 &= \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2} = \frac{\omega^2}{k_l^2} \\ V_s^2 &= \frac{\mu_2}{\rho_2} = \frac{\omega^2}{k_s^2} \end{aligned} \quad (54)$$

將這些結果帶入式 52

$$\begin{aligned} i\omega T_{zz} &= \lambda_2 \nabla^2 \phi + 2\mu_2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \\ i\omega T_{xz} &= \mu_2 \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

我們將會把這些結果帶入邊界條件內，假設液體是理想的，我們有三個邊界條件來決定三個振幅 R 、 T_l 和 T_s

1. normal velocities 的連續性

$$v_{z1} v_{z2} \quad (56)$$

或

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (57)$$

2. normal stress 的連續性

$$p = T_{zz}$$

$$\lambda_1 \nabla^2 \Phi = \lambda_2 \nabla^2 \phi + 2\mu_2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \quad (58)$$

3. 因液體無法提供 viscous stress，故 tangential stress 等於 0

$$T_{xz} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (59)$$

從這三個邊界條件我們可以得到

$$k \cos \theta_1 R + k_l \cos \theta_l T_l - k_s \sin \theta_s T_s = k \cos \theta_i$$

$$k_l^2 \sin 2\theta_l T_l + k_s^2 \cos 2\theta_s T_s \quad (60)$$

$$\rho_1 R + \left(2 \frac{k_l^2}{k_s^2} \sin^2 \theta_s - 1 \right) + \rho_2 \sin 2\theta_s T_s = 0$$

此聯立方程組的解為

$$R = \frac{Z_l \cos^2 2\theta_s + Z_s \cos^2 2\theta_s - Z_1}{Z_l \cos^2 2\theta_s + Z_s \cos^2 2\theta_s + Z_1}$$

$$T_l = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2Z_l \cos 2\theta_s}{2\theta_s + Z_s \cos^2 2\theta_s + Z_1} \quad (61)$$

$$T_s = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2Z_s \cos 2\theta_s}{2\theta_s + Z_s \cos^2 2\theta_s + Z_1}$$

其中

$$Z_1 = \frac{\rho_1 V_1}{\cos \theta_1}, \quad Z_l = \frac{\rho_2 V_l}{\cos \theta_l}, \quad Z_s = \frac{\rho_2 V_s}{\cos \theta_s} \quad (62)$$

5 結論

在 A1 實驗中，我們使用超聲波的反射波計算樣品缺陷與邊界的距離，初步了解聲納的原裡，A4 實驗裡我們測量超聲波在介質中衰減的現象，也從節 1.1.2 了解其背

後機制。在 A5 實驗中，我們透過超聲波在樣品內部來回反射導致的時間差計算樣品厚度，透過反射波的時間差推測超聲波在樣品內的行徑路線。在 A6 實驗中我們使用不同頻率的超聲波測量兩孔洞之間的距離，驗證波長越長解析度越好。A7 實驗中我們測量固體樣品內橫波和縱波波速，並計算其 μ 、 E 和 G 三個常數。實驗 A11 中，我們驗證超聲波在水中傳遞對水分子的壓縮可以產生類似光閘的效果，並依此計算超聲波聲速和波長。A23 實驗我們測量不同模式的 Lamb wave 的群速度並和理論值做比較。此外，我們還測量未知結構的樣品內部構造，並使用模擬結果推測樣品缺陷與表面的距離，並取得不錯的結果。

6 附錄

6.1 A4 Attenuation of ultrasound in water

frequency MHz	time ms	x cm	Amplitude V	$(x_i - x_1)$ cm	$(2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i})$ db
2	19.2	2.885	1.356		
2	20.6	3.096	1.358	0.210	-0.017
2	23.15	3.479	1.348	0.594	0.111
2	24.02	3.610	1.360	0.724	-0.047
2	25.72	3.866	1.355	0.980	0.013
2	28.70	4.314	1.358	1.428	-0.013
2	30.96	4.653	1.334	1.767	0.300
2	32.66	4.910	1.338	2.023	0.236
2	35.74	5.372	1.340	2.486	0.219
2	38.14	5.732	1.353	2.847	0.044
2	41.26	6.201	1.338	3.316	0.245
2	43.96	6.607	1.340	3.721	0.218
2	44.07	6.624	1.347	3.738	0.122
2	45.99	6.912	1.347	4.026	0.117
2	46.96	7.058	1.384	4.172	-0.342
2	50.68	7.617	1.338	4.731	0.233
2	52.30	7.861	1.357	4.975	-0.006
2	56.38	8.474	1.346	5.888	0.138

Continued on next page

frequency MHz	time ms	x cm	Amplitude V	$(x_i - x_1)$ cm	$(2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i})$ db
2	58.76	8.831	1.351	5.946	0.074
2	63.01	9.484	1.341	6.598	0.197
2	64.23	9.654	1.349	6.768	0.094
2	66.96	10.064	1.357	7.178	-0.012
2	69.10	10.386	1.332	7.500	0.314
2	70.34	10.572	1.356	7.686	0.011
2	72.69	10.925	1.361	8.039	-0.054
2	76.13	11.442	1.361	8.556	-0.054
2	78.80	11.843	1.359	8.958	-0.033
2	82.39	12.383	1.336	9.497	0.265

表 27: 超聲波在水中衰減測量解果，其中 time 為探測棒到鋁板之間傳遞時間， x 為探測棒到鋁板之間距離， x_1, A_1 分別為第一筆數據的 x 和 A 。

frequency MHz	time ms	x cm	Amplitude V	$(x_i - x_1)$ cm	$(2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i})$ db
2	18.47	2.778	1.265		
2	21.24	3.148	1.219	0.370	0.635
2	23.04	3.415	1.219	0.637	0.636
2	24.04	3.563	1.230	0.785	0.476
2	24.50	3.632	1.217	0.853	0.656
2	25.94	3.845	1.239	1.067	0.348
2	26.62	3.946	1.252	1.168	0.172
2	27.24	4.038	1.232	1.260	0.452
2	29.26	4.337	1.214	1.559	0.706
2	30.56	4.530	1.217	1.752	0.653
2	31.46	4.663	1.220	1.885	0.618
2	32.16	4.767	1.215	1.989	0.690
2	33.68	4.993	1.211	2.214	0.750
2	34.62	5.132	1.220	2.354	0.612
2	98.20	14.557	0.845	11.779	7.006
2	94.80	14.053	0.883	11.275	6.226
2	92.95	13.779	0.899	11.001	5.927
2	91.00	13.490	0.895	10.712	6.001
2	89.50	13.268	0.936	10.489	5.212
2	87.60	12.986	0.980	10.208	4.429
2	85.10	12.615	0.952	9.837	4.936
2	82.90	12.289	1.015	9.511	3.807

Continued on next page

frequency MHz	time ms	x cm	Amplitude V	$(x_i - x_1)$ cm	$(2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i})$ db
2	80.45	11.926	1.027	9.148	3.610
2	78.25	11.600	1.023	8.822	3.676
2	76.30	11.311	1.135	8.533	1.866
2	74.30	11.014	1.158	8.236	1.524
2	71.05	10.532	1.023	7.754	3.670
2	68.00	10.080	1.154	7.303	1.579
2	62.70	9.295	1.080	6.517	2.730
2	61.30	9.087	1.081	6.309	2.724
2	60.16	8.918	1.122	6.140	2.071
2	59.16	8.770	1.141	5.992	1.779
2	57.50	8.524	1.152	5.746	1.617
2	55.80	8.272	1.143	5.494	1.755
2	53.46	7.925	1.157	5.147	1.542
2	52.02	7.711	1.164	4.934	1.431
2	50.78	7.528	1.154	4.750	1.579
2	48.56	7.198	1.182	4.421	1.173
2	45.90	6.804	1.187	4.026	1.090
2	44.04	6.528	1.188	3.751	1.075
2	41.12	6.095	1.198	3.318	0.938
2	39.08	5.793	1.205	3.015	0.840
2	37.42	5.547	1.204	2.769	0.848

表 28: 超聲波在大豆花生油中衰減測量解果，其中 time 為探測棒到鋁板之間傳遞時間，x 為探測棒到鋁板之間距離， x_1, A_1 分別為第一筆數據的 x 和 A。

frequency MHz	time ms	x cm	Amplitude V	$(x_i - x_1)$ cm	$(2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i})$ db
2	18.19	2.80	1.191		
2	22.01	3.382	1.185	0.587	0.073
2	23.89	3.671	1.200	0.875	-0.141
2	26.33	4.045	1.213	1.250	-0.324
2	28.02	4.305	1.202	1.510	-0.168
2	29.64	4.555	1.145	1.760	0.672
2	31.82	4.889	1.200	2.094	-0.138
2	32.96	5.065	1.170	2.270	0.301
2	35.25	5.416	1.136	2.621	0.809
2	37.58	5.775	1.175	2.980	0.221
2	39.66	6.094	1.153	3.299	0.548
2	41.84	6.429	1.147	3.634	0.640
2	43.75	6.722	1.150	3.927	0.596
2	45.81	7.039	1.127	4.244	0.944
2	45.79	7.036	1.116	4.240	1.124
2	48.60	7.467	1.105	4.672	1.286
2	53.17	8.170	1.112	5.375	1.174
2	56.77	8.723	1.081	5.928	1.677
2	60.54	9.302	1.057	6.507	2.059
2	64.38	9.892	1.048	7.097	2.203
2	68.06	10.458	0.981	7.663	3.356
2	71.52	10.989	0.982	8.194	3.332

Continued on next page

frequency MHz	time ms	x cm	Amplitude V	$(x_i - x_1)$ cm	$(2 * 8.686 * \ln \frac{A_1}{A_i})$ db
2	74.58	11.459	0.925	8.664	4.377
2	78.22	12.019	0.901	9.224	4.845
2	80.21	12.325	0.853	9.529	5.792
2	83.14	12.775	0.840	9.980	6.045
2	86.28	13.257	0.798	10.462	6.941
2	88.86	13.654	0.750	10.859	8.025
2	91.85	14.113	0.717	11.318	8.793
2	94.63	14.540	0.701	11.745	9.204
2	97.05	14.912	0.673	12.117	9.897
2	98.50	15.135	0.626	12.340	11.156

表 29: 超聲波在異丙醇中衰減測量解果，其中 time 為探測棒到鋁板之間傳遞時間，
 x 為探測棒到鋁板之間距離， x_1, A_1 分別為第一筆數據的 x 和 A 。

6.2 A7 Shear wave in solid state materials

入射角 <i>degree</i>	橫波振幅 <i>V</i>	縱波振幅 <i>V</i>	入射角 <i>degree</i>	橫波振幅 <i>V</i>	縱波振幅 <i>V</i>
0.0		1.2258	47.5	1.138	
2.5		1.2244	50.0	1.1313	
5.0		1.2193	52.5	1.1216	
7.5		1.2168	55.0	1.1124	
10.0		1.2038	57.5	1.0955	
12.5		1.1943	60.0	1.0769	
15.0		1.1772	62.5	1.0616	
17.5		1.1552	65.0	1.0404	
20.0	0.2795	1.1028	67.5	1.0164	
22.5	0.3309	1.0322	70.0	0.9331	
25.0	0.3954	0.8955	72.5	0.8311	
27.5	0.4358	0.7078	75.0	0.7243	
30.0	0.4583	0.5039	77.5	0.5859	
32.5	0.4285	0.2224	80.0	0.4159	
35.0	0.7381	0.0725	82.5	0.2221	
37.5	1.0797		85.0	0.1444	
40.0	1.1348		87.5	0.0777	
42.5	1.1437		90.0	0.0783	
45.0	1.1398				

表 30: A7 實驗: 壓克力板橫波和縱波振幅與旋轉角度關係圖

入射角 <i>degree</i>	橫波振幅 縱波振幅	
	<i>V</i>	<i>V</i>
0.0		1.1608
2.5		1.0908
5.0		0.9687
7.5	0.5386	0.7042
10.0	0.6014	0.3628
12.5	0.8244	
15.0	1.1508	
17.5	1.0786	
20.0	0.9996	
22.5	0.6314	
25.0	0.2332	
27.5	0.0723	
30.0	0.0723	
32.5	0.02	

表 31: A7 實驗: 鋁板橫波和縱波振幅與旋轉角度關係圖

6.3 額外實驗: 測量未知結構樣本內部缺陷分布

```
1 Lx = 10 # total width of the pool
2 Nx = 200 # amount of points in the x direction
3 Ly = 10 # total height of the pool
4 Ny = 200 # amount of points in the y direction
5 dl = Lx/Nx
6 omega = 4
7 probe_length = 5
8 probe_center = 5 # origin 5
9 default_center = [5, 5]
10 default_diameter = 2
11
12 x_vec = np.linspace(0, Lx, Nx)
13 dx = x_vec[2] - x_vec[1] # defines dx as the space between 2 points in x
14
15 y_vec = np.linspace(0, Ly, Ny)
16 dy = y_vec[2] - y_vec[1] # defines dy as the space between 2 points in y
17
18 dt = 0.025 # the amount of time that will pass after every iteration
19 Nt = 4000 # amount of iterations
20
21 c = 1 # wave velocity
22 gamma = 0.03 #damping coefficient
23
24 # defines a 2 dimensional array that corresponds to the value of u at
   every point in the mesh
25 u = np.zeros([Nt, len(x_vec), len(y_vec)])
26 y_default = []
```

```

27 # y_default = np.zeros(int((default_center[1] + default_diameter/2)//dl -
28                         (default_center[1] - default_diameter/2)//dl))
29
30 def func(y, diameter):
31     return np.sqrt((diameter/2)**2 - (y - default_center[1])**2)
32
33 time = []
34 data = []
35 for i in range(int(probe_center//dl + (probe_length/2)//dl -
36                     probe_center//dl + (probe_length/2)//dl)):
37     data.append([])
38
39 for i in range(int(probe_center//dl - (probe_length/2)//dl),
40                  int(probe_center//dl + (probe_length/2)//dl)):
41     u[0, i, 1] = np.sin(0) # disturbance at t = 0
42     u[1, i, 1] = np.sin(omega*t*dt) # disturbance at t = 1
43
44 for i in range(int((default_center[1] - default_diameter/2)//dl+1),
45                  int((default_center[1] + default_diameter/2)//dl+2)):
46     y = i*dl
47     delta_x = func(y, default_diameter)
48     y_default += [[i for i in range(int((default_center[0] - delta_x)//dl),
49                                     int((default_center[0] + delta_x)//dl))]]
50
51 for t in range(1, Nt-1):
52     time += [t*dt]
53
54 for i in range(int(probe_center//dl - (probe_length/2)//dl),
55                  int(probe_center//dl + (probe_length/2)//dl)):

```

```

49     data[int(i-int(probe_center//dl - (probe_length/2)//dl))] += [u[t,
50                         i, 1]]
51
52     n = 0
53
54     for y in range(1, Ny-1):
55         rang = [x for x in range(1, Nx-1)]
56
57         if y not in [i for i in range(int((default_center[1] -
58                                         default_diameter/2)//dl+1), int((default_center[1] +
59                                         default_diameter/2)//dl+2))]:
60
61             for x in range(1, Nx-1):
62                 if (t < 100):
63
64                     for i in range(int(probe_center//dl -
65                                     (probe_length/2)//dl), int(probe_center//dl +
66                                     (probe_length/2)//dl)):
67
68                         u[t, i, 1] = np.sin(omega*t*dt)
69
70                         u[t+1, x, y] = c**2 * dt**2 * ( ((u[t, x+1, y] - 2*u[t, x,
71                                         y] + u[t, x-1, y])/(dx**2)) + ((u[t, x, y+1] - 2*u[t, x,
72                                         y] + u[t, x, y-1])/(dy**2)) ) + 2*u[t, x, y] - u[t-1, x,
73                                         y] - gamma*dt*(u[t, x, y] - u[t-1, x, y])
74
75             else:
76
77                 for i in y_default[n]:
78
79                     rang.remove(i)
80
81                 for x in rang:
82
83                     if (t < 100):
84
85                         for i in range(int(probe_center//dl -
86                                         (probe_length/2)//dl), int(probe_center//dl +
87                                         (probe_length/2)//dl)):
88
89                             u[t, i, 1] = np.sin(omega*t*dt)

```

```
67      u[t+1, x, y] = c**2 * dt**2 * ( ((u[t, x+1, y] - 2*u[t, x,
           y] + u[t, x-1, y])/(dx**2)) + ((u[t, x, y+1] - 2*u[t, x,
           y] + u[t, x, y-1])/(dy**2)) ) + 2*u[t, x, y] - u[t-1, x,
           y] - gamma*dt*(u[t, x, y] - u[t-1, x, y])
68      n += 1
```

References

- [1] Frank Babick, Frank Hinze, and Siegfried Ripperger. Dependence of ultrasonic attenuation on the material properties. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 172(1):33–46, 2000.
- [2] C.W. Lim, L.H. Tong, and Y.C. Li. Theory of suspended carbon nanotube thinfilm as a thermal-acoustic source. *Journal of Sound and Vibration*, 332(21):5451–5461, 2013.
- [3] B. Liang, S.D. Iwnicki, and Y. Zhao. Application of power spectrum, cepstrum, higher order spectrum and neural network analyses for induction motor fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1):342–360, 2013.
- [4] Robert B. Randall. A history of cepstrum analysis and its application to mechanical problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 97:3–19, 2017. Special Issue on Surveillance.
- [5] Rayleigh. Xxxi. investigations in optics, with special reference to the spectro-scope. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8(49):261–274, 1879.
- [6] Robert D. Guenthe. *Encyclopedia of Modern Optics*. 2005.
- [7] P. Debye and F. W. Sears. On the scattering of light by supersonic waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(6):409–414, 1932.
- [8] K. Worden. Rayleigh and lamb waves - basic principles. *Strain*, 37(4):167–172, 2001.