

A1 氦氖雷射綜合實驗



週一班 第四組

B09202037 李翊銓 (右)

B09202003 陳雙雙 (中)

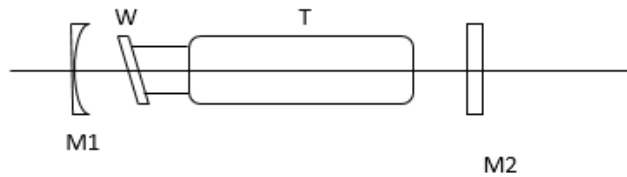
B09202027 林柏喬 (左)

實驗一：氦氖雷射共振腔模擬及實際調整

一、原理：

氦氖雷射主要由光學共振腔、增益介質（氦氣、氖氣）、激發系統（雷射電源）三部分組成。當氦氖混合氣體被電流激發時，與某些譜線對應的上下能級的粒子數發生反轉，使介質具有增益。當介質的增益大於光學共振腔的損耗，雷射振盪才能被建立，見到明顯的雷射光。

而這個實驗主要調整的雷射種類為半外腔雷射，其簡要裝置圖如下：



放電管 T 的右端和輸出腔鏡 M2 封接，左端是一布魯斯特鏡片，偏振平行於入射面的光無損耗的通過布魯斯特鏡片，因此輸出光為平行於入射面的線偏振光。

調整 M1 鏡面，使之與 M2 嚴格平行，則雷射可出光，會見到明顯的雷射光。

雷射穩定後，其飽和增益係數應等於總損耗係數：

$$G(\nu, I_\nu) = a - \frac{1}{2l} \ln(R_1 R_2)$$

a 為除反射鏡損耗外其他的總損耗係數， l 為放電管長度， $R_1 R_2$ 為兩反射鏡的反射率。一般情況下，氦氖雷射的一端為全反射（ $R_1 = 1$ ），另一端為部分反射，假設部分反射該端的透過率為 T ，忽略反射鏡的吸收和散射損耗時， $R_2 = 1 - T$ 。由於氦氖雷射的 T 都很小，則：

$$-\ln(R_1 R_2) = -\ln(1 - T) \approx T$$

$$a_c = 1 - e^{-2al} \approx 2al$$

a_c 是除透射損耗外，光在共振腔內往返一次的總損耗百分數。做近似代換後得到：

$$2G(\nu, I_\nu)l = a_c + T$$

將此式代入增益係數公式，該式不容易求解，因此引入圖解法，引入激發參數 β

$$\beta = \frac{2G_m l}{a_c + T}$$



由 β 能圖解法計算出 $I_{\nu 0}$ ，再根據下式計算出輸出功率 P

$$P = A \times T \times I_{\nu 0}^+$$

A 為光束的有效橫截面積。一般情況下，雷射束受共振腔內振盪光束模體積的限制，不能充滿整個放電毛細管。對雷射有貢獻的只是模體積內的那部分氣體原子。因此 A 應為毛細管的橫截面積乘以一個係數。

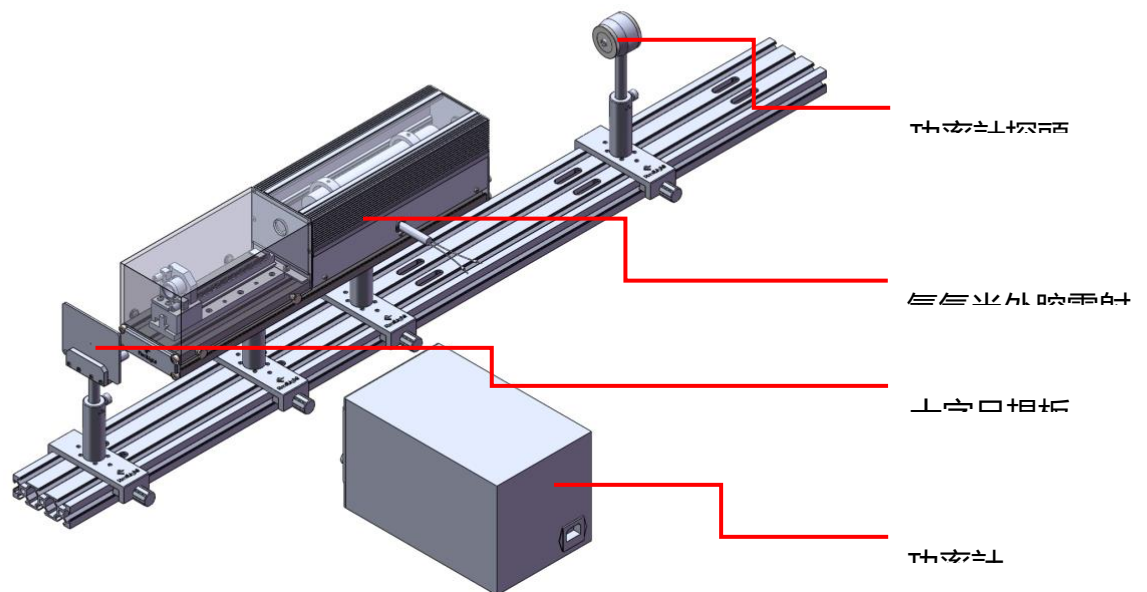
二、實驗步驟

I. 虛擬部分：

1. 打開實驗虛擬軟體
2. 點擊按鈕打開雷射外殼觀察內部構造
3. 點擊按鈕進入虛擬調節，點擊「通過小孔觀察」，使視野調整到十字尺規板的小孔處，然後點擊「打開檯燈」和打開「雷射管電源按鈕」
4. 「調節旋鈕」，此時使用滑鼠左鍵點擊旋鈕使其高亮顯示，然後使用鍵盤Q鍵和E鍵旋轉旋鈕，模擬十字尺規的調節。
5. 點擊「開始測量功率和光譜」，在雷射出光後嘗試繼續調節旋鈕，使功率值最大，點擊「關閉測量」按鈕。

II. 實驗部分：

1. 依照下圖安裝儀器：

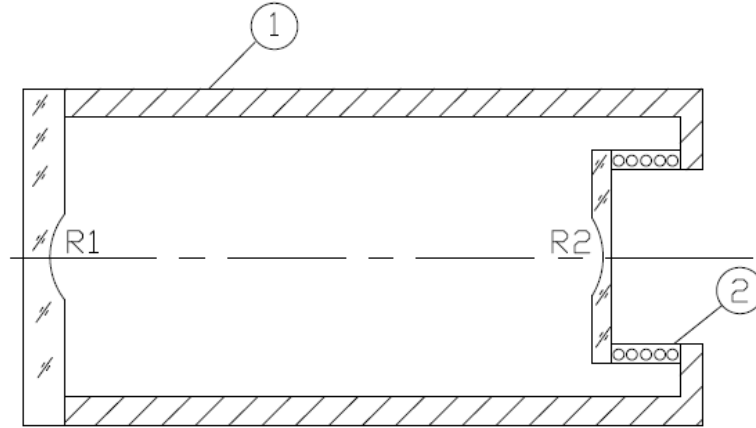


2. 戴上 OD-2 護目鏡。
3. 使用檯燈照亮十字尺規板，尺規線朝向半外腔雷射。
4. 校正雷射(調整十字尺規板、後腔鏡角度距離)
5. 調整出光，並用功率計測量雷射功率

實驗二：共焦球面掃描干涉儀調整實驗

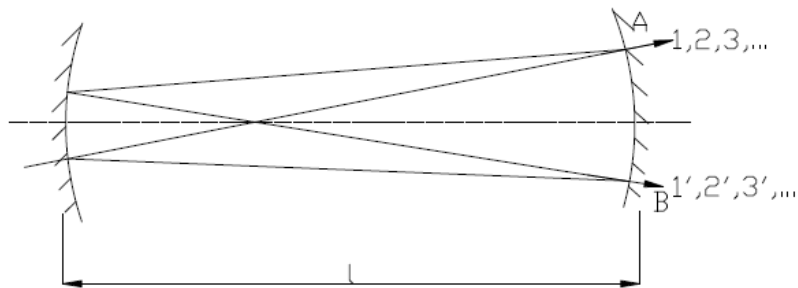
一、原理：

此為共焦球面掃描干涉儀的裝置簡圖：



其由兩塊曲率半徑和腔長相等 ($R_1 = R_2 = l$) 的球形凹面反射鏡 (標示 R_1 、 R_2 處) 構成共焦腔。①為由低膨脹係數製成的間隔圈，用以保持兩球形凹面反射鏡 R_1 、 R_2 總處於共焦狀態。②為壓電陶瓷環，其特性是若在環的內外壁上加一定數值的電壓，環的長度將隨之發生變化，且長度的變化與外加電壓的幅度成線性關係，這正是掃描干涉儀被用來掃描的基本條件。

自由光譜範圍這個參數可以描述掃描干涉儀的性能。考慮光在共焦腔內的光路，如下圖：



一束波長為 λ_a 的雷射以近軸光的方式入射，在忽略球面像差的條件下，共焦腔中入射光經四次反射形成一閉合路徑，光程近似為 $4l$ 。且一束光將有標示為 1 及 1' 的兩組透射光，若 m 是光線在腔內往返的次數，則標示為 1 的這組經歷了 $4m$ 次反射，標示為 1' 這組則經歷了 $4m+2$ 次反射。令 α 為往返一次所造成的相位差，意即：

$$\alpha = 2\mu l \frac{2\pi}{\lambda_a}$$

μ 為腔內介質的折射率。當 $\alpha = k\pi$ ($k \in N$)，即

$$4\mu l = k\lambda_a$$

此時 λ_a 的光將會同調，而其他波長則相互抵消 (k 稱為掃描干涉儀的干涉序數)。外加電壓又可使腔長變化到 l_a ，使 λ_a 符合共振條件，產生極大透射，而 λ_a 等其

他波長又相互抵消。所以只要有一定幅度的電壓來改變腔長，則可以使雷射全部不同波長的光依次產生相干極大透射，形成掃描。值得注意的是，若一個確定的腔長有可能使幾個不同波長同時產生相干極大，會造成重序。例如，當腔長變化到使 λ_d 極大時， λ_a 會再次出現極大，意即

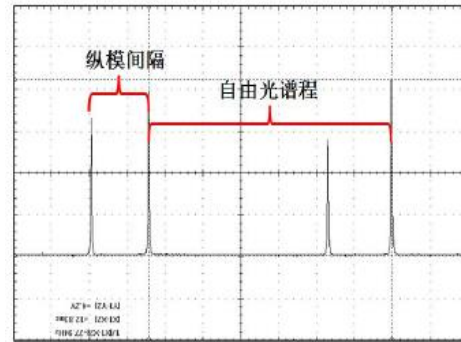
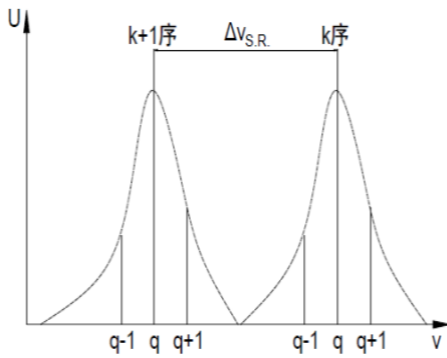
$$4l_d = k\lambda_d = (k+1)\lambda_a$$

掃描干涉儀存在一個不重序的最大頻率差，以 $\Delta v_{S.R}$ 表示。且由於 λ_a 與 λ_d 間相差很小，可共用同一個波長近似：

$$\Delta v_{S.R} = \frac{c}{4l}$$

由於我們不希望出現重序現象，故選用掃描干涉儀時，必須首先知道它的 $\Delta v_{S.R}$ 和待分析的雷射頻率 Δv ，並且使 $\Delta v_{S.R} > \Delta v$ 才能保證腔長和模的波長或頻率間是一一對應關係。

自由光譜範圍還可用腔長的變化量來描述。當共焦腔腔長變化為 $\frac{\lambda}{4}$ 時，波長 λ 的光可再次透過干涉儀。當滿足 $\Delta v_{S.R} > \Delta v$ 條件，且外加電壓足夠大，可使腔長的變化量是 $\frac{\lambda}{4}$ 的 i 倍，將會掃描出 i 個干涉序，雷射的所有模將週期性地重複出現在干涉序列 $k, k+1, \dots, k+i$ 中，如下圖：



這時橫軸是時間軸，用來衡量縱模間隔的是時間差 Δx 。設兩個縱模時間間隔為 Δx_1 ，自由光譜程時間間隔為 Δx_2 。

本實驗中氦氖內腔雷射的縱模間隔可用以下公式求得：

$$\Delta v_1 = \frac{c}{2L}$$

$L = 250\text{mm}$ 為已知。則自由光譜 $\Delta v_{S.R}$ 可用下式求得：

$$\Delta v_{S.R} = \Delta v_1 \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

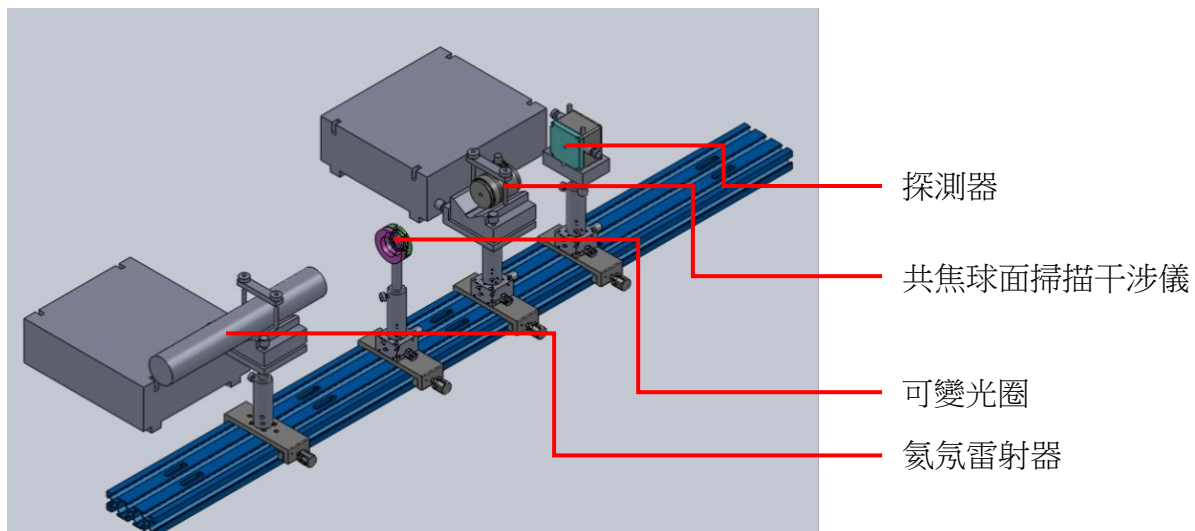
求得 $\Delta v_{S.R}$ 後，用此式求共焦球面掃描儀的腔長：

$$\Delta v_{S.R} = \frac{c}{4l}$$

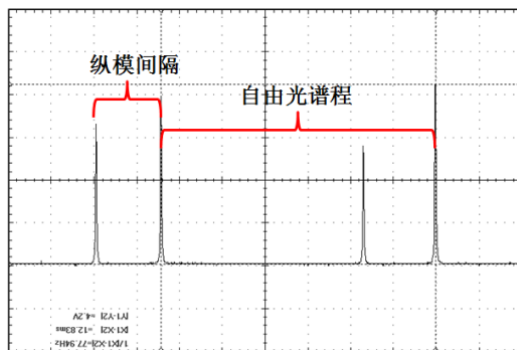
二、

實驗步驟

1. 照下圖架設實驗儀器：



2. 使用可變光圈校正儀器同軸等高
3. 控制器輸出三角波接入干涉儀，另輸出鋸齒波於示波器 Ch1
4. 探測器的訊號輸出接示波器 Ch2
5. 調整示波器參數
6. 調整共焦腔使反射光斑重合
7. 微調儀器接收訊號
8. 使用示波器的游標測量功能，測量縱模間隔 Δx_1 和週期間隔 Δx_2 ：



9. 根據已知被測氦氖雷射腔長為 250mm，根據公式 $\Delta \nu_1 = \frac{c}{2L}$

和 $\Delta \nu_{S-R} = \Delta \nu_1 \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ ，計算共焦球面掃描干涉儀自由光譜區。

10. 根據公式 $\Delta \nu_{S-R} = \frac{c}{4l}$ ，計算共焦球面掃描器的腔長。(腔長參考值為 30.2mm)。

三、實驗結果

1. 實驗數據（黃底為測量原始數據）：

將測量到的縱模間隔 Δx_1 、週期間隔 Δx_2 帶入課本公式計算，可以得到共焦球面掃描器的腔長。

| 縱模間隔 Δx_1 (ms) | 週期間隔 Δx_2 (ms) | $\Delta \nu_{SR}$ (Hz) | 腔長 (mm) |
|------------------------|------------------------|------------------------|---------|
| 5.1 | 32.8 | 3.859e9 | 19.44 |
| 6.8 | 23.6 | 2.082e9 | 36.02 |
| 4.8 | 21.2 | 2.650e9 | 28.30 |

平均共焦球面掃描器腔長為 27.92 mm，和理論值 30.2 mm 相比，誤差-7.5%。

2. 誤差討論：

(1) 誤差傳遞：

我們測量 Δx_1 和 Δx_2 的不準量取最小刻度 0.20 ms，則

由誤差傳遞的公式可以得到 $\sigma_l = l \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x_1}}{\Delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta x_2}}{\Delta x_2}\right)^2} =$

1.23 mm，所以我們的結果為 27.92 ± 1.23 mm。

(2) 我們測得的三組數據差異很大，平均下來才比較接近正確答案，代表不同組的間隔大小有差，若取更多組數據算平均，可能可以得到更準確的結果。

實驗三：氦氖半外腔雷射等效腔長測量

一、原理：

從前面的描述我們可以得知，半外腔雷射出光的條件是光在共振腔中往返一周的光程差為波長的整數倍：

$$2\mu L = q\lambda_q$$

μ 是折射率，對氣體 $\mu \approx 1$ ； L 是腔長； q 被稱作縱模係數，為正整數，每一個 q 對應縱向一種穩定的電磁場分佈 λ_q ，叫一個縱模。因此 λ_q 對應的頻率為：

$$\nu_q = q \frac{c}{2\mu L}$$

而我們關注的通常是相鄰兩個縱模的頻率間隔 $\Delta\nu_{\Delta q=1}$ ：

$$\Delta\nu_{\Delta q=1} = \frac{c}{2\mu L} \approx \frac{c}{2L}$$

若以相鄰兩個縱模的時間間隔 Δt 表達：

$$\Delta t \cdot L \approx \text{constant}$$

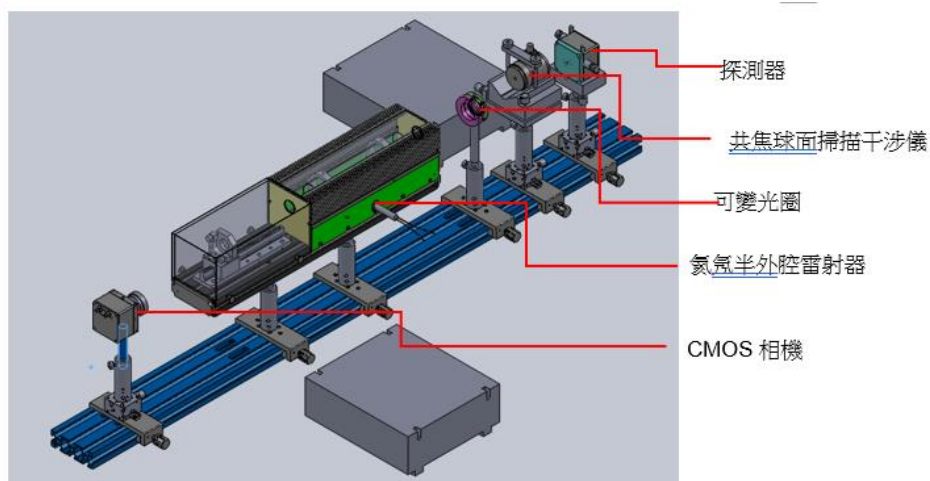
因此，若我們有一組雷射裝置具有已知的腔長 L_1 ，則可以透過以下關係式求得另一組雷射裝置的腔長 L_2 ：

$$L_2 = L_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

Δt_1 為第一組雷射裝置的相鄰縱模時間間隔， Δt_2 為欲求腔長的雷射裝置的相鄰縱模時間間隔，兩者皆可經由實驗量得。

二、實驗步驟

1. 照以下圖片架設：



2. 依照實驗一調整雷射出光
3. 依照實驗二架設球面共焦掃描儀
4. 連接相機，安裝衰減片，打開相機軟體

5. 調整相機位置，確認光斑為基模
6. 用鋼尺測量外腔雷射腔長
7. 使用示波器的游標測量功能，測量縱模間隔 Δx_1 和週期間隔 Δx_2

用公式 $L_2 = L_1 \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$ 計算出半外腔的腔長 L_2 ，與實測的腔長進行

對比。

三、實驗結果

1. 實驗數據（黃底為測量原始數據）：
將測量到的半外腔縱模間隔 Δt_1 、內腔縱模間隔 Δt_2 帶入公式

$(L_2 = L_1 \times \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2})$ 計算，可以得到半外腔的腔長。（已知氦氖內

腔雷射腔長 $L_1 = 250 \text{ mm}$ ）

| 半外腔 Δt_1 (ms) | 內腔 Δt_2 (ms) |
|-----------------------|----------------------|
| 6.4 | 4.8 |
| 8.0 | 5.6 |
| 8.0 | 4.6 |
| 7.5 | 5.0 |

得到半外腔的腔長 $L_2 = 373.3 \text{ mm}$ ，和理論值（實際用直尺測量的值） 329.0 mm 相比，誤差 13.5%。

2. 誤差討論：

- (1) 誤差傳遞：

同上實驗，我們測量 Δx_1 和 Δx_2 的不準量取最小刻度 0.20 ms ，則由誤差傳遞的公式可以得到 $\sigma_{L_2} =$

$$L_2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta t_1}}{\Delta t_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t_2}}{\Delta t_2}\right)^2} = 15.8 \text{ mm}, \text{ 所以我們的結果為 } 373.3 \pm 15.8 \text{ mm}.$$

- (2) 我們使用直尺測量半外腔的腔長也會有誤差，由於無法很明確了解哪邊是真的半外腔的兩端，不準量估計為 10 mm ，因此理論值為 $329.0 \pm 10.0 \text{ mm}$ 。

實驗四：半外腔雷射橫模變換與參數測量

一、原理：

原理部分將分為橫模及高斯光束之參數兩部份進行敘述。

首先是橫模的部分。橫模用來描述垂直於雷射光軸向的光場分佈，縱模則用來描述軸向光場分佈，而雷射的每一個頻率會對應一種光場分佈。其發生的原因為：增益介質的橫截面積和鏡面都是有限的，當平行光通過它們時，因為繞射作用，使出射光波陣面發生改變，從而在垂直於光的軸向上，出現各種不同的場強分佈，每一種分佈形式叫做一種橫模。

垂直於光軸的分佈是二維的，因此可以用兩個橫模序數 m, n 來完整的描述一個橫模。對非共焦腔的同一個縱模 q 而言，以 m, n 描述相鄰橫模的頻率差為：

$$\Delta \nu_{Transverse} = \frac{c}{2\mu L} \left\{ \frac{1}{\pi} (\Delta m + \Delta n) \cos^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{R_1}\right) \left(1 - \frac{1}{R_2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

而實驗中我們會觀察不同橫模的光斑樣式。

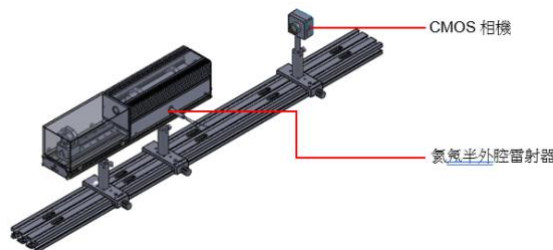
接著是高斯光束之參數。若我們固定一個雷射模式，於不同位置 z 測量其光束直徑 w ，並做 w 對 z 的雙曲線 fitting ($w^2(z) = A + Bz + Cz^2$ ， A, B, C 為常數)，則可以利用以下式子求得高斯光束的光腰位置 z_0 、光腰半徑 ω_0 、遠場發散角 θ 、瑞利長度 Z_0 、光束傳輸因子 M^2 ：

$$z_0 = -\frac{B}{2C}, \quad \omega_0 = \sqrt{A - \frac{B^2}{4C}}, \quad \theta = \sqrt{C}, \quad Z_0 = \frac{1}{2C} \sqrt{4AC - B^2},$$

$$M^2 = \frac{\pi}{2\lambda} \sqrt{4AC - B^2}$$

二、實驗步驟

1. 架設如下圖：



2. 同實驗一，調整出光
3. 連接相機，打開光斑分析元件，確定雷射模式
4. 調整相機位置，測量光斑寬度與高斯參數(見實驗六步驟 3、4)
5. 挑整後腔鏡距離與角度，改變雷射模式
6. 重複步驟 4.

三、實驗結果

1. 實驗數據（黃底為測量原始數據）：

單模：

| 測量位置 (cm) | 水準寬度 (mm) | 垂直寬度 (mm) |
|-----------|-----------|-----------|
| 68.0 | 0.5016 | 0.4989 |
| 68.5 | 0.5186 | 0.5143 |
| 69.0 | 0.4951 | 0.5091 |
| 69.5 | 0.5242 | 0.5149 |
| 70.0 | 0.5376 | 0.5244 |
| 75.0 | 0.5642 | 0.5772 |
| 80.0 | 0.6473 | 0.6265 |
| 85.0 | 0.7147 | 0.7028 |
| 90.0 | 0.8311 | 0.8143 |
| 95.0 | 0.8822 | 0.8484 |
| 100.0 | 0.9736 | 0.9684 |

多模（光斑為上下兩瓣的圖形）：

| 測量位置 (cm) | 水準寬度 (mm) | 垂直寬度 (mm) |
|-----------|-----------|-----------|
| 62.0 | 0.5400 | 0.8130 |
| 65.0 | 0.5473 | 0.8516 |
| 70.0 | 0.5891 | 0.9128 |
| 75.0 | 0.6377 | 1.0101 |
| 80.0 | 0.6908 | 1.1149 |
| 85.0 | 0.7734 | 1.2614 |
| 90.0 | 0.8578 | 1.3966 |
| 95.0 | 0.9297 | 1.5176 |
| 100.0 | 1.0484 | 1.6983 |
| 105.0 | 1.1226 | 1.8245 |

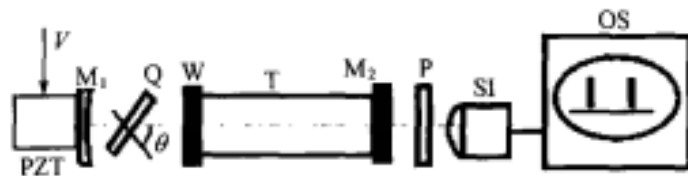
實驗五：氦氖雷射縱模正交偏振與模式競爭觀測

一、原理：

此實驗的原理將分為正交偏振及模式競爭兩部分敘述。

首先是正交偏振，這是指雷射相鄰的頻率具有互相垂直的偏振狀態。由此可知，有正交偏振現象時，雷射一定會有頻率分裂，這是雷射共振腔內的雙折射元件的效應。雙折射元件對兩正交偏振方向的光有不同的折射率，所以原本唯一的共振腔長“分裂”為物理長度不同的兩個腔長，兩個共振腔有不同的共振頻率，即發生了頻率分裂，一個雷射頻率變成了兩個。

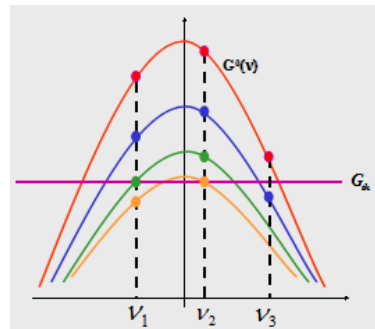
正交偏振可由以下的實驗裝置觀察到：



M_1 為球面全反射鏡、 M_2 為平面鏡、 T 為雷射增益管、 Q 為石英晶體，其晶軸與它的面法線一致、 W 為增透窗片、 θ 為晶軸與雷射夾角、 SI 為掃描干涉儀、 P 為偏振片、 OS 為示波器、 PZT 為壓電陶瓷，其上加電壓 V 。將偏振片從 0° 轉到 180° ，中間會有不同的頻率輪流跳出來在示波器上，及為正交偏振的各個頻率，最後 180° 時會回到 0° 的圖形。

接著是模式競爭，模式競爭可再分為均勻加寬及非均勻加寬雷射的模式競爭。均勻加寬雷射的模式競爭原理可參考右下圖：

當增益下降到如圖中的橙色曲線時，其增益係數等於閾值，光強達到穩定值，不再增大，整個增益曲線也不再下降。最後，共振腔內只有一個模式形成穩定的振盪。這代表均勻加寬雷射中滿足閾值條件的縱模在振盪過程中互相競爭，結果總是靠近中心頻率附近的縱模取勝，其他模式都被抑制熄滅。



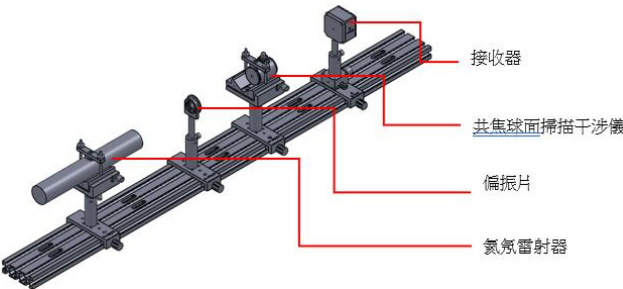
但是軸向的空間燒孔效應可能讓雷射變為多模，其原因是某種反轉粒子數密度或增益係數在腔內軸線上具有某種分佈。頻率為 ν' 的另一個雷射模式所形成的駐波分佈一般說來不與 ν 的駐波重合，但如果 ν' 的腹點與 ν 的節點重合，則 ν' 模式也有可能得到較高的增益係數而形成振盪。這代表，由於腔軸線方向的空間燒孔效應，不同縱模使用空間不同部分的高能級粒子而同時產生振盪。

橫模的空間燒孔現象也可能讓雷射變為多模。由於不同橫模其橫向光場分佈也不同，它們分別使用不同空間的啟動粒子。因此，如果啟動粒子的空間轉移的速度很慢，不能消除橫向燒孔效應，當激發足夠強時，就可能形成多橫模振盪。

非均勻加寬雷射的模式競爭存在於那些頻率間隔小的縱模之間，由於相鄰縱模的燒孔部分重疊，其共用相同的反轉粒子數而產生競爭。但這種競爭一般不會像均勻加寬那樣能將另一個頻率完全抑制。在非均勻加寬的氣體中，若兩個頻率恰好對中心頻率對稱的縱模同時滿足起振條件，這兩個模式的燒孔會完全重合，使得它們之間的競爭變得激烈，結果是它們的輸出功率無規則起伏。

二、實驗步驟

- 在實驗二的光路中，將光圈換成偏振片，如下：

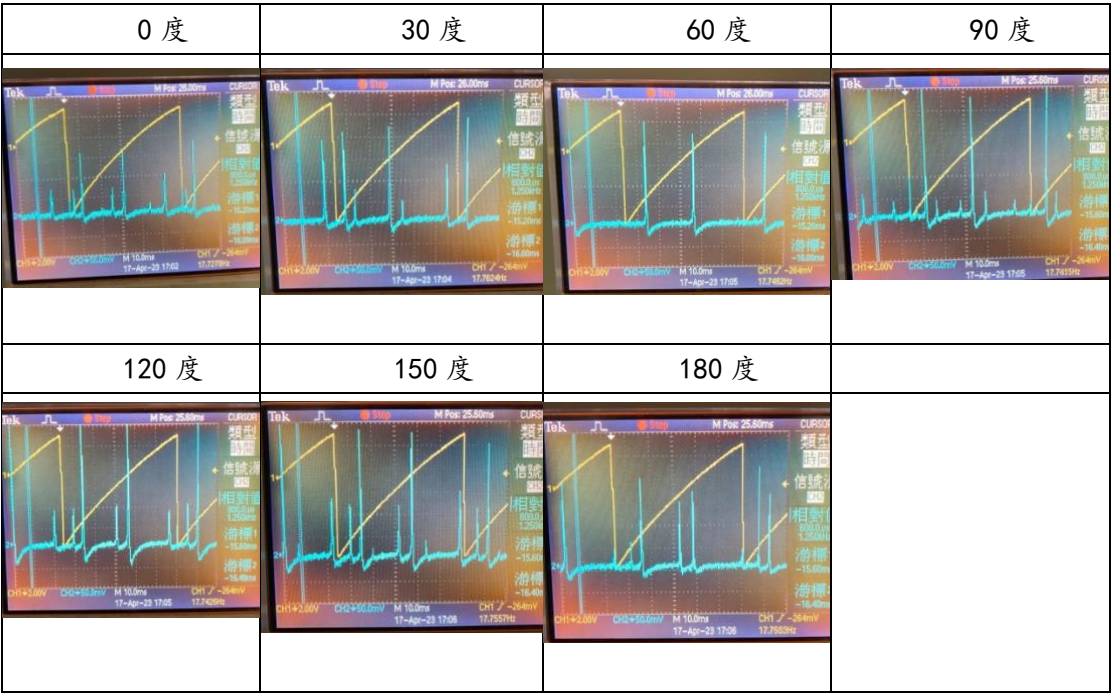


- 旋轉偏振片，觀察示波器縱模序列的變化
- 取下偏振片，觀察示波器

三、實驗結果

- 實驗結果：

偏振（圖為不同偏振角度的圖形）：



由示波器上的圖形可以觀察到，在偏振 0 度時有兩種波並存。當偏振角度改變至 60 度時，其中一個波峰消失，剩下的波峰強度變大。繼續改變至 90 度後，新的小波峰重新出現，而接著轉至 150 度，新出現的波峰變強而另一波峰變弱。轉至 180 度時，波形則變得跟 0 度時相似，則可知氦氖雷射的偏振態為正交偏振。

實驗六：高斯光束基本參數測量

一、 原理：

高斯光束是 Helmholtz equation ($(\nabla^2 + k^2)E(\mathbf{r}) = 0$) 在慢變振幅近似下的一個特解，且光束具有柱狀對稱，因此我們可以採用柱座標來表達這個解：

$$E(r, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{r^2}{\omega^2(z)}} e^{-i\left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi(z)\right]}$$

其中：

ω_0 為光腰的光束半徑、 $Z_0 = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$ 被稱為瑞利尺寸、 $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_0}\right)^2}$ 為光束於位置 z ，且光強隨 r 減弱到 $\frac{1}{e^2}$ 時的半徑。

$R(z) = Z_0 \left(\frac{z}{Z_0} + \frac{Z_0}{z}\right)$ 為光束的等相位面的曲率半徑。

$\Psi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{Z_0}\right)$ 為高斯光束的 Gouy phase shift。

從 $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_0}\right)^2}$ 的描述中我們可以看出 $\omega(z)$ 隨著 z 做雙曲線變化：

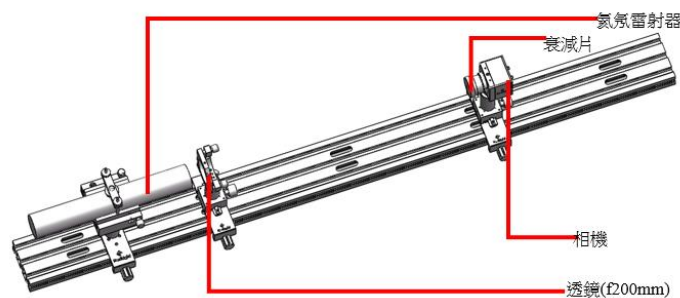
$$\frac{\omega^2(z)}{\omega_0^2} - \frac{z^2}{Z_0^2} = 1$$

因此我們可以於不同位置 z 測量其光束直徑 w ，做 w 對 z 的雙曲線 fitting

($w^2(z) = A + Bz + Cz^2$ ， A, B, C 為常數)，則可以利用實驗四中的公式求得高斯光束的 z_0 、 ω_0 、 θ 、 Z_0 、 M^2 等參數。

二、 實驗步驟

1. 照下圖架設器材：



2. (照 PPT 不安裝透鏡) 開啟光斑分析軟體，調整相機距離，量測高斯光束的寬度
3. 紀錄相機位置與光斑寬度 (每次距離至少 30mm)，量測 16 組
4. 利用光斑分析軟體，描點，繪製擬合曲線得到光斑參數：束腰位置、束腰寬度、遠場發散角、 M^2 因數以及瑞利長度。

三、實驗結果

1. 實驗數據（黃底為測量原始數據）：

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 14 | 644.2 | 639 | 0.3208 |
| 17 | 655.1 | 657.9 | 0.32825 |
| 20 | 677.3 | 659.5 | 0.3342 |
| 23 | 688.4 | 699.4 | 0.34695 |
| 26 | 719.9 | 715.5 | 0.35885 |
| 29 | 729.4 | 737.7 | 0.366775 |
| 32 | 776.8 | 779.3 | 0.389025 |
| 35 | 789 | 793.3 | 0.395575 |
| 38 | 821.4 | 830.5 | 0.412975 |
| 41 | 882.5 | 881.6 | 0.441025 |
| 44 | 881.7 | 896.2 | 0.444475 |
| 47 | 899 | 908.6 | 0.4519 |
| 50 | 936.6 | 952.7 | 0.472325 |
| 53 | 995.6 | 1001.3 | 0.499225 |
| 56 | 1031.7 | 1053.4 | 0.521275 |
| 59 | 1056.8 | 1087.6 | 0.5361 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 43.4641 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.311 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0008 |
| 瑞利長度 Z_0 | 381.7081 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.258 |

將以上結果帶入公式 $Z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ 、 $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ 計算，得到相對誤差約為

27%、20%，說明我們的擬合不夠準確，可能原因如下討論。

2. 誤差討論

(1) 光斑寬度變化：

在測量光斑寬度時，我們發現寬度隨時間變化並不小，每次數據抖動都十分劇烈，且軟體無法很及時地抓到當下曝光時間的影像，大約水平寬度跟垂直寬度都會有接近 5% 的變化量，所以對於每個光斑的平均半徑可能都有大約 5% 的不確定量。

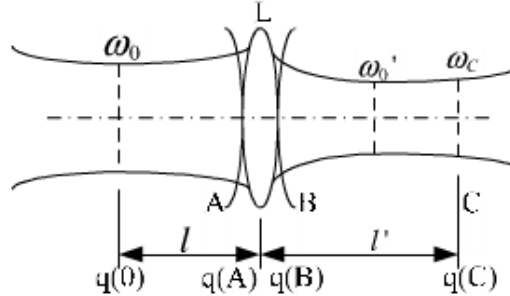
(2) 光路不準直的影響：

在進行實驗時，光路可能沒有調到完全平行，導致光線不能保證一直打在相機收光處，所以我們會調整相機的高低左右來收光，雖然並未移動水平方向，但仍會造成一定程度的誤差。

實驗七：高斯光束的傳播特性

一、原理：

考慮如下圖的實驗設置：



其中 A 側為入射光，L 為薄透鏡，B 側為出射光。且入射高斯光束束腰半徑為 ω_0 ，入射光束腰位置與透鏡的距離為 l ，透鏡的焦距為 F 。

由講義中的聯立方程式可以解出：

$$q_C = l_C + F \frac{l(F-l) - \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2} + i \frac{F^2 \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

已知束腰處的等相位面為一平面，所以若我們將 C 面取在出射光的束腰處（意即 $l' = l_C$ ），則 $R(C) \rightarrow \infty$ ，意即 $Re\left[\frac{1}{q_C}\right] = \frac{1}{R_C} \rightarrow 0$ ，代表

$$l_C + F \frac{l(F-l) - \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2} = 0$$

$$q_C = i \frac{F^2 \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

由此我們可以得知：

$$l' = F + \frac{(l-F)F^2}{(l-F)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}, \quad \omega_0'^2 = \frac{\omega_0^2 F^2}{(l-F)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

由這兩條式子我們可以計算經過薄透鏡後的光束束腰參數。

接著，如果令 $l_C = F$ ，即出射光束束腰位於透鏡前焦面，可以利用前面的公式求出束腰的半徑：

$$\omega_C = \frac{\lambda}{\pi\omega_0} F$$

二、實驗步驟

1. 同實驗六，但在相機與雷射之間加裝透鏡
2. 依照實驗六利用軟體步驟描點、擬合
3. 利用光斑分析軟體，描點，繪製擬合曲線得到光斑參數：束腰位置、束腰寬度、遠場發散角、 M^2 因數以及瑞利長度。
4. 研究、比較透鏡使用前後的差異

三、實驗結果

1. 實驗數據（黃底為測量原始數據）：

(1) 無透鏡

原始數據同實驗 6，而計算出的 q 參數如下第三點。

(2) 有透鏡（焦距 $f = 150 \text{ mm}$ ）

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 14 | 230.7 | 217.6 | 0.112075 |
| 17 | 223.5 | 225.8 | 0.112325 |
| 20 | 298.7 | 269.9 | 0.14215 |
| 23 | 353.1 | 372 | 0.181275 |
| 26 | 480.1 | 486 | 0.241525 |
| 29 | 576.4 | 589.3 | 0.291425 |
| 32 | 697.7 | 706.7 | 0.3511 |
| 35 | 775.6 | 797.1 | 0.393175 |
| 38 | 937.4 | 927.5 | 0.466225 |
| 41 | 1007.2 | 1023.7 | 0.507725 |
| 44 | 1150.2 | 1145.6 | 0.57395 |
| 47 | 1319 | 1267.3 | 0.646575 |
| 50 | 1366.4 | 1388 | 0.6886 |
| 53 | 1510.1 | 1492.3 | 0.7506 |
| 56 | 1569.7 | 1593.4 | 0.790775 |
| 59 | 1708.4 | 1721.6 | 0.8575 |

代入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 150.7606 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.1071 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0019 |
| 瑞利長度 Z_0 | 55.0462 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.034 |

將以上結果代入 $Z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ 、 $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ ，得到相對誤差約為

5.0%、2.4%。因我們有盡量將透鏡貼近出光口放置，可以發現擬合出的束腰位置位於透鏡的焦點位置，符合理論預期。

(3) q 參數分析

計算有 / 無透鏡的高斯光束 q 參數，得到以下結果：

| 無透鏡 q_1 | | 有透鏡 q_2 | |
|------------|------------|------------|------------|
| real | imaginary | real | imaginary |
| 207.237344 | 449.157395 | 141.240717 | 53.6814478 |
| 245.368559 | 437.954065 | 171.065025 | 53.5432401 |
| 281.216585 | 426.647795 | 200.928256 | 53.4568498 |
| 315.088044 | 415.683379 | 230.820404 | 53.399686 |
| 347.331075 | 405.348774 | 260.733849 | 53.3600725 |
| 378.284563 | 395.803102 | 290.663164 | 53.3315667 |
| 408.25027 | 387.11061 | 320.604511 | 53.3104064 |
| 437.481794 | 379.271764 | 350.555146 | 53.2942858 |
| 466.1839 | 372.247891 | 380.513077 | 53.2817319 |
| 494.51722 | 365.978973 | 410.476827 | 53.2717706 |
| 522.605045 | 360.395611 | 440.445288 | 53.2637372 |
| 550.540375 | 355.426568 | 470.417609 | 53.2571664 |
| 578.392316 | 351.003205 | 500.393132 | 53.2517248 |
| 606.211485 | 347.061838 | 530.371336 | 53.2471685 |
| 634.034401 | 343.54479 | 560.351809 | 53.243316 |
| 661.886939 | 340.400642 | 590.334217 | 53.2400296 |

理論上， q_1 、 q_2 會滿足光學系統變換的關係式： $q_2 =$

$$\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}, \text{ 其中透鏡的參數 } A=1, B=0, C=-\frac{1}{f}, D=1, \text{ 將上}$$

表結果帶入此轉換，可以發現實驗值大致符合理論上的透鏡矩陣變換。

2. 誤差討論：

(1) 相機與雷射距離的影響：

除了實驗 6 討論到的誤差之外，我們觀察到相機與雷射的距離會影響 q 參數的計算（因為計算 R、w 時需要用到此距離），然而在實驗時我們並不能完全確定雷射的出光位置，因此測量雷射位置到相機位置的距離也會不準確，可能造成 q 參數的誤差。

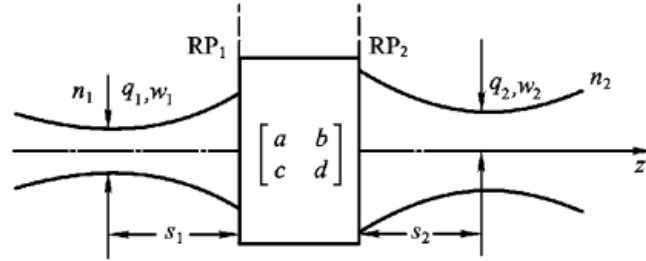
(2) 有 / 無透鏡的高斯光束參數誤差比較：

由實驗結果可以發現，沒有放置透鏡時擬合高斯光束參數的結果，誤差明顯比有透鏡時大很多，這是因為沒有透鏡時的束腰位置不在我們測量範圍之內，因此會導致誤差偏大，而加上透鏡聚光後，結果會準確許多。

實驗八：高斯光束擴束及準直

一、原理：

考慮雷射光束經過如下圖的光學系統變換：



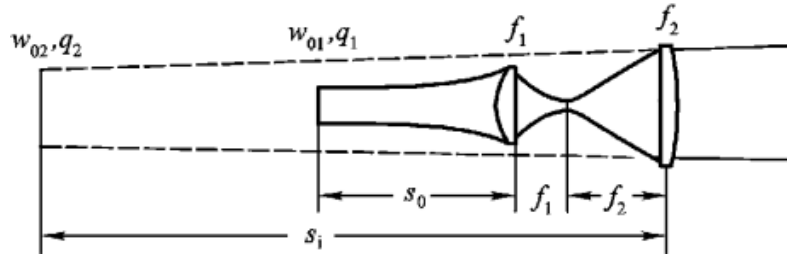
其中光學系統左側為入射光，右側為出射光。經過推導之後可以得到：

$$as_0 + ds_i + cs_0s_i + b = -Z_{01}^2 \frac{c(a + bs_i)}{d + cs_0}$$

$$\omega_{02} = \omega_{01} |a + cs_i| \sqrt{1 + Z_{01}^2 \frac{c^2}{(d + cs_0)^2}}$$

其中 Z_{01} 為入射光側的瑞利長度， Z_{02} 為出射光側的瑞利長度。因此上兩式決定了出射光束腰位置 s_i 和束腰大小 ω_{02} ，被稱為成像公式和物像比公式。

如果上述的光學系統為調焦望遠鏡系統，如下圖：



f_1, f_2 分別為兩個透鏡的焦距，另外定義 $l = f_1 + f_2$ 為兩透鏡的間距，則望遠鏡系統的變換矩陣為

$$m = \begin{bmatrix} M_T & l \\ 0 & M_T \end{bmatrix}$$

其中 $M_T = \frac{f_1}{f_2}$ 。將此變換代入成像公式和物像比公式，得到：

$$s_i = -M_T(f_1 + f_2) - M_T^2 s_0$$

$$\omega_{02} = |M_T| \omega_{01}$$

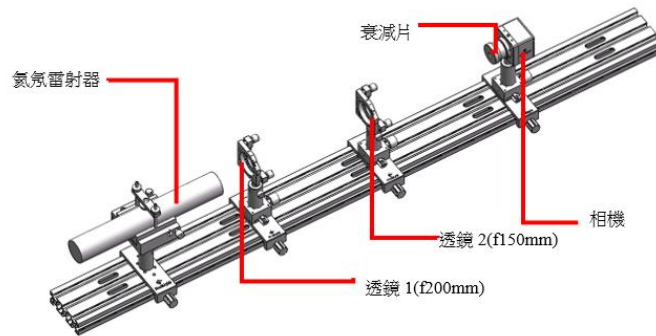
由此可知，倒裝望遠鏡系統，即 $|M_T| > 1$ ，可使高斯光束擴束 $|M_T|$ 倍。由瑞利長度公式可知，相應的像方準直範圍也增大 M_T^2 倍。由於遠場發散角與束腰成反比關係，因此像方遠場發散角被壓縮 $|M_T|$ 倍。當 $s_0 = f_1$ 時，由成像公式可算出

$s_i = f_2$ 。當 $s_0 \gg f_1 + f_2$ 時， $s_i \approx -M_T^2 s_0$ 。此時調焦望遠鏡的擴束比為 $\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} =$

$|M_T|$ 。

二、實驗步驟

1. 按照下圖架設：



2. 調整兩透鏡角度與距離，使之間距離為焦聚和，且同軸，其稱之為「準直」
3. 紀錄相機 16 組光斑尺寸與相機距離資料
4. 使用光斑分析軟體分析，資料並得到光斑參數：束腰位置、束腰寬度、遠場發散角、 M^2 因數以及瑞利長度。
5. 比較實驗七無透鏡之資料

三、實驗結果

1. 實驗數據（黃底為測量原始數據）：

(1) 無透鏡

原始數據同實驗 6。

(2) 擴束系統（透鏡焦距 $f_1 = 75 \text{ mm}$ 、 $f_2 = 150 \text{ mm}$ ）

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 32 | 281.5 | 294.6 | 0.144025 |
| 35 | 318.7 | 313.1 | 0.15795 |
| 38 | 309 | 328.8 | 0.15945 |
| 41 | 393.8 | 396.2 | 0.1975 |
| 44 | 423.6 | 445.7 | 0.217325 |
| 47 | 501.8 | 525 | 0.2567 |
| 50 | 571 | 586 | 0.28925 |
| 53 | 627.6 | 648.7 | 0.319075 |
| 56 | 717.1 | 751.2 | 0.367075 |
| 59 | 813.6 | 825.2 | 0.4097 |
| 62 | 848.5 | 888.6 | 0.434275 |
| 65 | 942.3 | 968.7 | 0.47775 |
| 68 | 1047.3 | 1063.3 | 0.52765 |
| 71 | 1091.8 | 1108.2 | 0.55 |
| 74 | 1202.5 | 1223.9 | 0.6066 |
| 77 | 1253.8 | 1292.1 | 0.636475 |

代入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 319.3319 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.1455 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0014 |
| 瑞利長度 Z_0 | 105.2279 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 0.9988 |

將以上結果帶入公式 $Z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ 、 $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ 計算，得到相對誤差約為 1.3%、2.5%。

比較加入擴束系統（雙透鏡）前後的光束參數，可以發現束腰寬度的比為 $\frac{0.1455}{0.311} \approx 0.5 = f_1/f_2$ 。此外，由光束品質的定義可知，發散角和束腰寬度兩者乘積為定值，因此發散角的比例應為 2:1，實驗數據為 0.0014: 0.0008，也大致符合理論預期。

實驗九：光束品質分析

一、原理：

M^2 因數可作為衡量雷射光束品質的參考，其定義為：

$$M^2 = \frac{\omega_{\text{practical}} \theta_{\text{practical}}}{\omega_{\text{ideal}} \theta_{\text{ideal}}}$$

其中 $\omega_{\text{practical}}$ 為實際光束的束腰半徑， $\theta_{\text{practical}}$ 則為實際光束的遠場發散角；下標為 *ideal* 的則是理想光束的參數。從 M^2 的定義可知，實際光束的光束品質是以理想高斯光束為標準，理想高斯光束（一般為基模高斯光束）的光腰與遠場發散角的乘積為 $\frac{\lambda}{\pi}$ 。通常 $M^2 > 1$ ， M^2 越大，光束偏離理想高斯光束越多，光束品質越差。

而求得 M^2 的關鍵在於能否測量不同位置的光束半徑，要做到這點，對於光束半徑需要有良好的定義，最嚴謹的為二階矩定義。令光斑的強度分佈為 $I(x, y)$ ，則光斑的一階矩（即光斑的中心位置）為

$$\bar{x} = \frac{\int \int x I(x, y) dx dy}{\int \int I(x, y) dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\int \int y I(x, y) dx dy}{\int \int I(x, y) dx dy}$$

二階矩為

$$\sigma_x^2 = \frac{\int \int (x - \bar{x})^2 I(x, y) dx dy}{\int \int I(x, y) dx dy}, \quad \sigma_y^2 = \frac{\int \int (y - \bar{y})^2 I(x, y) dx dy}{\int \int I(x, y) dx dy},$$
$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\int \int (x - \bar{x})(y - \bar{y}) I(x, y) dx dy}{\int \int I(x, y) dx dy}$$

則光束半徑可表示為

$$\omega_x^2 = 2 \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \gamma \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right)$$
$$\omega_y^2 = 2 \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \gamma \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right)$$

其中 $\gamma = \text{sign}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ 。

有了良好的半徑定義之後，量測半徑的工具主要是使用 CCD，直接測量光束截面的功率分佈，能夠根據二階矩的定義即時快速地獲得光束品質的情況。

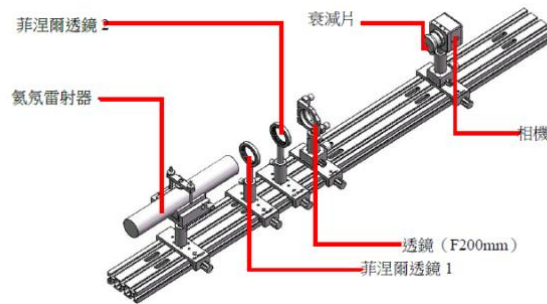
在多個位置用 CCD 測量光束半徑後，做 ω 對 z 的雙曲線 fitting ($w^2(z) = A + Bz + Cz^2$, A, B, C 為常數)，則可以利用以下式子求得 M^2 ：

$$M^2 = \frac{\pi}{2\lambda} \sqrt{4AC - B^2}$$

二、

實驗步驟

1. 按照下圖架設實驗器具(無菲涅爾透鏡 2):



2. 先不使用菲涅爾透鏡，使用光斑分析軟體測量光斑直徑，與對應相機距離
3. 將數據輸入光斑分析軟體，描點、擬合曲線
4. 得到光斑參數：
5. 束腰位置、束腰寬度、遠場發散角、 M^2 因數(即為原理提及之光束品質因數)以及瑞利長度
6. 放上菲涅爾透鏡，重複步驟 2、3、4、5
7. 不拆卸菲涅爾透鏡，更換不同焦距之透鏡，重複步驟 2-5
8. 比對不同透鏡的結果。

三、

實驗結果

1. 實驗數據 (黃底為測量原始數據):

(1) 無菲涅爾透鏡

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 22 | 229.6 | 226.1 | 0.113925 |
| 25 | 251.5 | 236.2 | 0.121925 |
| 28 | 297.6 | 287.6 | 0.1463 |
| 31 | 391.8 | 379 | 0.1927 |
| 34 | 492.3 | 459.7 | 0.238 |
| 37 | 564.4 | 560.1 | 0.281125 |
| 40 | 694.2 | 680.3 | 0.343625 |
| 43 | 811.5 | 816.8 | 0.407075 |
| 46 | 926.6 | 911.9 | 0.459625 |
| 49 | 1032.3 | 1000.5 | 0.5082 |
| 52 | 1129.3 | 1108.3 | 0.5594 |
| 55 | 1278.6 | 1232.4 | 0.62775 |
| 58 | 1380.5 | 1341.1 | 0.6804 |
| 61 | 1510.3 | 1453.7 | 0.741 |
| 64 | 1565.4 | 1504.4 | 0.76745 |
| 67 | 1704 | 1660.8 | 0.8412 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 227.2999 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.1118 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0019 |
| 瑞利長度 Z_0 | 59.2667 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.0476 |

(2) 有菲涅爾透鏡

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 22 | 213.7 | 213.2 | 0.106725 |
| 25 | 268.4 | 269.8 | 0.13455 |
| 28 | 373 | 363.4 | 0.1841 |
| 31 | 480.7 | 482.3 | 0.24075 |
| 34 | 599.1 | 604.3 | 0.30085 |
| 37 | 745.1 | 730.1 | 0.3688 |
| 40 | 875.9 | 858 | 0.433475 |
| 43 | 1018.7 | 981.9 | 0.50015 |
| 46 | 1156.8 | 1110.5 | 0.566825 |
| 49 | 1280.8 | 1235.6 | 0.6291 |
| 52 | 1400 | 1354.6 | 0.68865 |
| 55 | 1493.6 | 1469.8 | 0.74085 |
| 58 | 1631 | 1597.4 | 0.8071 |
| 61 | 1763 | 1723 | 0.8715 |
| 64 | 1875.5 | 1836.6 | 0.928025 |
| 67 | 2017.4 | 1967.4 | 0.9962 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 202.3785 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.0935 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0021 |
| 瑞利長度 Z_0 | 43.9609 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 0.988 |

從我們的實驗結果可以看到，加入菲涅爾透鏡後 M^2 值反而變小了，說明我們的結果並不準確，理論上光束品質因數 M^2 應大於一，且因菲涅爾透鏡會使光束品質變差， M^2 值應該要增加。

2. 誤差討論

(1) 光路調整不佳：

實驗中，我們也許在校正雷射光路時沒有做到最好，導致光束品質不佳。另外，由於相機和雷射的位置關係會直接影響

測量結果，需要確保相機和雷射之間的距離、角度等位置參數的準確性，若光路沒有完全準直，則可能會造成測量距離和光斑寬度的誤差。此外，菲涅爾透鏡表面的缺陷、污垢或損壞等都可能導致光束散焦或失真，從而影響 M^2 值的測量結果。

(2) 環境因素：

在進行測量時，我們需要注意環境中的可能干擾因素，例如環境中光的影響、震動等，這些都可能對測量結果產生干擾。

實驗十：雷射共振腔設計實驗

一、實驗步驟

1. 將半外腔雷射後腔鏡分別換成 $R=500\text{mm}$, $R=1000\text{mm}$, $R=2000\text{mm}$
2. 調節雷射出光(見實驗一)
3. 以實驗六方法測量光斑寬度與對應相機距離，再以此計算高斯光束參數。
4. 選定其中一種曲率半徑之後腔鏡，調節鏡座齒輪條臺，改變雷射腔長。
5. 同樣以實驗六之方法測量光斑寬度，再以此計算高斯光束參數。

二、實驗結果

1. 實驗數據 (黃底為測量原始數據):

(1) $R = 500 \text{ mm}$, 後腔鏡座標 = 2.92 cm

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 45.5 | 522.9 | 603.5 | 0.2816 |
| 48.5 | 523.4 | 615.1 | 0.284625 |
| 51.5 | 561.5 | 653.2 | 0.303675 |
| 54.5 | 617.3 | 701 | 0.329575 |
| 57.5 | 674.2 | 743.4 | 0.3544 |
| 60.5 | 705.1 | 779 | 0.371025 |
| 63.5 | 717.2 | 824.3 | 0.385375 |
| 66.5 | 773.5 | 900.5 | 0.4185 |
| 69.5 | 836.9 | 969.9 | 0.4517 |
| 72.5 | 888.4 | 1025.7 | 0.478525 |
| 75.5 | 969 | 1093.1 | 0.515525 |
| 78.5 | 999.3 | 1166.6 | 0.541475 |
| 81.5 | 1065.1 | 1204 | 0.567275 |
| 84.5 | 1110.9 | 1237.9 | 0.5872 |
| 87.5 | 1150.2 | 1288.8 | 0.60975 |
| 90.5 | 1198.7 | 1340.3 | 0.63475 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 328.3409 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.2395 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0010 |
| 瑞利長度 Z_0 | 230.7177 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.2348 |

(2) $R = 500 \text{ mm}$, 後腔鏡座標 = 0.0 cm

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 45.5 | 523.4 | 508.7 | 0.258025 |
| 48.5 | 505.9 | 505.2 | 0.252775 |
| 51.5 | 543 | 526.7 | 0.267425 |
| 54.5 | 580.1 | 557.1 | 0.2843 |
| 57.5 | 615.3 | 599.6 | 0.303725 |
| 60.5 | 662.3 | 640.3 | 0.32565 |
| 63.5 | 704.7 | 678.8 | 0.345875 |
| 66.5 | 749.4 | 724.5 | 0.368475 |
| 69.5 | 788 | 754.4 | 0.3856 |
| 72.5 | 828 | 801.9 | 0.407475 |
| 75.5 | 879.7 | 866.3 | 0.4365 |
| 78.5 | 925.4 | 876.3 | 0.450425 |
| 81.5 | 966.7 | 974.3 | 0.48525 |
| 84.5 | 1025.5 | 1020.1 | 0.5114 |
| 87.5 | 1076.2 | 1067.4 | 0.5359 |
| 90.5 | 1114.7 | 1081 | 0.548925 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 371.8264 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.2362 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0009 |
| 瑞利長度 Z_0 | 249.3681 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.1104 |

(3) $R = 1000 \text{ mm}$, 後腔鏡座標 = 0.0 cm

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 45.5 | 612.4 | 641.7 | 0.313525 |
| 48.5 | 637 | 653.3 | 0.322575 |
| 51.5 | 634.5 | 659.7 | 0.32355 |
| 54.5 | 662.9 | 677.1 | 0.335 |
| 57.5 | 672.6 | 674.8 | 0.33685 |
| 60.5 | 729.4 | 714 | 0.36085 |
| 63.5 | 739.9 | 728.9 | 0.3672 |
| 66.5 | 759.5 | 747.2 | 0.376675 |
| 69.5 | 786 | 765 | 0.38775 |
| 72.5 | 805.3 | 784 | 0.397325 |
| 75.5 | 845.1 | 816.1 | 0.4153 |
| 78.5 | 867.6 | 887.3 | 0.438725 |
| 81.5 | 906.2 | 887.9 | 0.448525 |
| 84.5 | 931.7 | 885.7 | 0.45435 |
| 87.5 | 965.4 | 944.2 | 0.4774 |
| 90.5 | 1009.2 | 969.6 | 0.4947 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 345.6493 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.3046 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0007 |
| 瑞利長度 Z_0 | 438.923 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.0492 |

(4) $R = 1000 \text{ mm}$, 後腔鏡座標 = 2.0 cm

| 距離 (cm) | 直徑 X (μm) | 直徑 Y (μm) | 平均半徑 (mm) |
|---------|------------------------|------------------------|-----------|
| 45.5 | 666.7 | 641 | 0.326925 |
| 48.5 | 675.7 | 655.4 | 0.332775 |
| 51.5 | 658.6 | 654.7 | 0.328325 |
| 54.5 | 677.1 | 659.7 | 0.3342 |
| 57.5 | 711.6 | 690.2 | 0.35045 |
| 60.5 | 722.1 | 710.1 | 0.35805 |
| 63.5 | 743 | 726.9 | 0.367475 |
| 66.5 | 751.2 | 732.8 | 0.371 |
| 69.5 | 781.6 | 760.8 | 0.3856 |
| 72.5 | 812 | 794.1 | 0.401525 |
| 75.5 | 835.8 | 834.6 | 0.4176 |
| 78.5 | 860.5 | 868.8 | 0.432325 |
| 81.5 | 899 | 888.5 | 0.446875 |
| 84.5 | 927.3 | 910.7 | 0.4595 |
| 87.5 | 958.8 | 934.8 | 0.4734 |
| 90.5 | 996.9 | 973.9 | 0.4927 |

帶入雙曲線擬合後，得到參數結果：

| | |
|----------------|---------------|
| 束腰位置 z_0 | 410.9694 (mm) |
| 束腰寬度 w_0 | 0.3241 (mm) |
| 遠場發散角 θ | 0.0008 |
| 瑞利長度 Z_0 | 430.6281 (mm) |
| 光束傳輸因子 M^2 | 1.2108 |

根據實驗結果可以發現， $R = 1000 \text{ mm}$ 後腔鏡的瑞利長度及束腰寬度都較 $R = 500 \text{ mm}$ 的大，而改變後腔鏡位置則主要會影響束腰位置。

問題與討論

1. 實驗八中，是否可以通過擴束系統，不改變光束的發散角，只改變光束的光腰半徑？或者不改變光束的光腰半徑，只改變光束的發散角？為什麼？

答：不能。光束的發散角和光腰半徑根據下表：

| | |
|-------|---------------------------------------|
| 光腰位置 | $z_0 = -\frac{B}{2C}$ |
| 光腰半徑 | $\omega_0 = \sqrt{A - B^2 / 4C}$ |
| 遠場發散角 | $\theta = \sqrt{C}$ |
| 瑞利長度 | $Z_0 = \frac{1}{2C} \sqrt{4AC - B^2}$ |

兩者之間變數不獨立。再從光束品質的定義可知，兩者的乘積是固定值，且通過理想光學系統後光束品質並不會改變。

2. 實驗八的括束系統中，如果擴束系統的離焦量不為零，即兩透鏡的間距不等於兩透鏡焦距之和，實驗結果會怎麼樣？

答：先定義離焦量：

$$\Delta = f_1 + f_2 - l$$

離焦量不為零，矩陣變換為：

$$m' = \begin{bmatrix} M_T - \Delta/f_2 & l + \Delta \\ \Delta/f_1 f_2 & \frac{1}{M_T} - \Delta/f_1 \end{bmatrix}$$

只要離焦量不為零，組合透鏡幾乎等同於一個完美(或不完美)的厚透鏡(比較實驗七的矩陣變化表)，擴束成效會因為離焦合的偏移而減少，品質因數也可能變大。

3. 在實驗九，光束品質分析中，使用不同的透鏡對氦氖雷射的雷射光束做變換，是否會影響測量到的 M^2 因數？

答：若是理想薄透鏡， M^2 因數應不會改變，由問題一可以得知。

4. 實驗九，菲涅爾片放置的位置是否會影響光束品質？菲涅爾片的顆粒度是否會影響光束品質？為什麼菲涅爾片會降低光束品質？

答：菲涅爾透鏡可視為非理想的透鏡，距離不會影響光束品質，但菲涅爾透鏡的顆粒度會對光線的散射造成影響，其係因為透鏡的幾何構造導致：我們能用菲涅爾透鏡做出更薄的凸透鏡，但由於其幾何結構不平整，光線會在邊緣散射，導致品質因數的下降。

Ref:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8F%B2%E6%B6%85%E8%80%B3%E9%80%8F%E9%8F%A1>

5. 為甚麼 He-Ne 雷射我只關注 632.8nm 的波長，而且也不會不小心調到符合其他波長的雷射光？

答：He-Ne 雷射本身主要會放出三種不同波長的光分別是 632.8nm、1.15 μ m、3.39 μ m，而另外兩光波段為紅外光需要特殊的材質和共振腔條件，才有辦法出光並用其他儀器觀測到，因此我們在此實驗中不會調到其他波長的光。

實驗總結

一開始我們花很久時間在調半外腔的部分，後來我們發現是我們認知的最小白色光斑跟講義認知的不同，在修正認知之後每次就能快速調出光。

在共焦球面掃描干涉儀的實驗中，我們測量到的腔長誤差在 10% 以內，而在這部分的實驗我們學到如何調整、準直光路。而半外腔腔長實驗的誤差則為 13.5%。

在橫模變換實驗中我們僅調出單模、雙峰、圓環及四瓣狀的沒看到，我們推測是每種模態他在空間所佔的比例不同，而不同的橫模所造成的相位差也不同，因此共振頻率會因為橫模而略有不同。而在觀測縱模實驗中隨著電壓上升能觀測到的縱模數上升(因電壓越高我可以掃到更多頻率)，但會發現縱模間距略下降，我們推測是電壓越高時其共振腔長會略上升而導致相鄰縱模變近。

和高斯光束描述相關的實驗六至九中，實驗六我們的 $M^2 = 1.258$ ，和理想的高斯光束有段落差，而我們推測的原因可能是測量高斯光束的寬度時因為數值浮動所以導致一部份誤差；在高斯光束的傳播特性實驗中，我們的 $M^2 = 1.034$ ，且得到的矩陣變換和預期的大致相符；而擴束的實驗 $M^2 = 0.9988$ ，加入擴束系統（雙透鏡）前後，束腰寬度的比為 $\frac{0.1455}{0.311} \approx 0.5 = f_1/f_2$ 。此外，發散角的比例應為 2:1，實驗數據為 0.0014: 0.0008，也大致符合理論預期；在菲涅爾透鏡的實驗中，未加入菲涅爾透鏡時 $M^2 = 1.0476$ ，加入菲涅爾透鏡後 $M^2 = 0.988$ ，說明我們的結果並不準確，可能和光路調整不佳有關。

最後實驗十，我們只有調 $R = 500\text{mm}$ 及 $R = 1000\text{mm}$ 的後腔鏡， $R = 1000\text{mm}$ 後腔鏡的瑞利長度及束腰寬度都較 $R = 500\text{mm}$ 的大，而改變後腔鏡位置則主要會影響束腰位置及 M^2 。