

# 112-2 近代物理實驗 He-Ne Laser Comprehensive

## 第四組

左：趙唯竣 B10202069 右：林軒宇 B10202015

Apr. 8 & Apr. 15 & Apr. 22, 2024



# 1 引言與原裡 [1, 2, 3, 4, 5]

## 1.1 A1 氦氖雷射共振腔調整實驗

### 1.1.1 雷射成因與增益

雷射 Laser 為 Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation 的首個字母縮寫，顧名思義，其為透過刺激原子導致電子躍遷釋放輻射能量而產生的具有同調性的增強光子束。假設一腔體內部充滿溫度為  $T$  的氣體，假設兩能階  $i$ 、 $j$ ，其中其能量  $E_j > E_i$ 。根據 Boltzmann distribution，兩能階的平均粒子數量  $N_j$  和  $N_i$  比值為

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{e^{-E_j/k_B T}}{e^{-E_i/k_B T}} \quad (1)$$

其中  $k_B$  為波茲曼常數。而此原子於此兩能階變化放出的光子頻率  $\nu_{ji}$  為

$$\nu_{ji} = (E_j - E_i)/h \quad (2)$$

此外，單位時間內位於某能階的原子因 stimulate absorption、stimulate emission 或 spontaneous emission 的數量變化可表示為

$$\left( \frac{dN_i}{dt} \right)_{ab} = -B_{ij} N_i u_\nu \quad (3)$$

$$\left( \frac{dN_j}{dt} \right)_{st} = -B_{ji} N_j u_\nu \quad (4)$$

$$\left( \frac{dN_j}{dt} \right)_{sp} = -A_{ji} N_j \quad (5)$$

其中  $u_\nu$  為能量密度， $B_{ij}$  為 Einstein absorption coefficient， $A_{ji}$  為 Einstein spontaneous emission coefficient。由於 stimulate emission 的機率與能量密度  $u_\nu$  相關，而 spontaneous emission 的機率則不是，且對於雷射的情況能量密度普遍高，因此 stimulate emission 占主導地位。此外，由於雷射內部氣體以高速移動，因此原本原子越遷被限制在狹窄的頻率範圍內因都普勒效應以擴展成相當寬的高斯形頻帶。除了上述之外，雷射還會受到內部增益影響，定義 gain coefficient  $g$  為雷射在腔室內部來回震盪時每通過單位長度對其造成的強度放大倍率，而 loss coefficient  $\alpha$  單位長度的強度損耗。假設一強度為  $I_0$  的光束從長度為  $L$  的腔室一端抵達另外一端後，其強度  $I$  可表示為

$$I = I_0 e^{(g-\alpha)L} \quad (6)$$

接著再經過兩次反射率分別為  $R_1$  和  $R_2$  的反射鏡後返回原點，其強度可表示為

$$I = I_0 R_1 R_2 e^{2(g-\alpha)L} \quad (7)$$

而 total two-pass gain  $G$  可表示為

$$G = R_1 R_2 e^{2(g-\alpha)L} \quad (8)$$

當增益大於損耗時，即  $G = 1$ ，雷射開始震盪，因此閥值增益係數為

$$g_{th} = \alpha + \frac{1}{2L} \ln \left( \frac{1}{R_1 R_2} \right) \quad (9)$$

## 1.2 A2 共焦球面掃描干涉儀調整實驗

### 1.2.1 自由光譜範圍

自由光譜範圍 (FSR) 是繞射儀或繞射光學元件的兩個連續反射或透射光強度最大值或最小值之間的光頻率或波長間隔。FSR 通常可以表示為

$$|\Delta\lambda_{FSR}| = \frac{2\pi}{L} \left| \left( \frac{\partial\beta}{\partial\lambda} \right)^{-1} \right| \quad (10)$$

或者是

$$|\Delta\nu_{FSR}| = \frac{2\pi}{L} \left| \left( \frac{\partial\beta}{\partial\nu} \right)^{-1} \right| \quad (11)$$

其中  $\beta = 2\pi n(\lambda)/\lambda$ ， $n(\lambda)$  為折射率  $L$  為腔體往返光程。由於

$$\left( \frac{\partial\beta}{\partial\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \left( n(\lambda) - \lambda \frac{\partial n}{\partial\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda^2} n_g \quad (12)$$

其中  $n_g$  為群速度，因此  $|\Delta\lambda_{FSR}|$  可表示為

$$|\Delta\lambda_{FSR}| = \frac{\lambda^2}{n_g L} \quad (13)$$

如果材料的色散可忽略不計，我們有

$$|\Delta\lambda_{FSR}| \approx \frac{\lambda^2}{n(\lambda)L} \quad (14)$$

同樣的

$$|\Delta\nu_{FSR}| \approx \frac{c}{n(\lambda)L} \quad (15)$$

而再本實驗中， $n(\lambda) \approx 1$ ，而因光束再共焦腔內經四次反射，因此  $L = 4l$ ，其中  $l$  為共焦腔長，即

$$|\Delta\nu_{FSR}| = \frac{c}{4l} \quad (16)$$

### 1.2.2 縱模

在由兩面相對的平面鏡構成的諧振腔中允許的模式為那些腔長  $L$  恰好是其半整數倍的波長  $\lambda$ :

$$L = q \frac{\lambda}{2} \quad (17)$$

其中  $q$  為整數，被稱為模序列。兩相鄰縱模， $q$  和  $q + 1$ ，的頻率可表示為

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \quad (18)$$

如果配合節 1.1.1的增益對雷射的影響，我們可以得到不同模序列的強度關係，見圖 1。在本實驗中，自由光譜  $\Delta\nu_{FSR}$  可表示為

$$\Delta\nu_{FSR} = \Delta\nu \times \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \quad (19)$$

其中  $\Delta x_1$  為縱模間隔時間， $\Delta x_2$  為自由光譜程間隔時間。

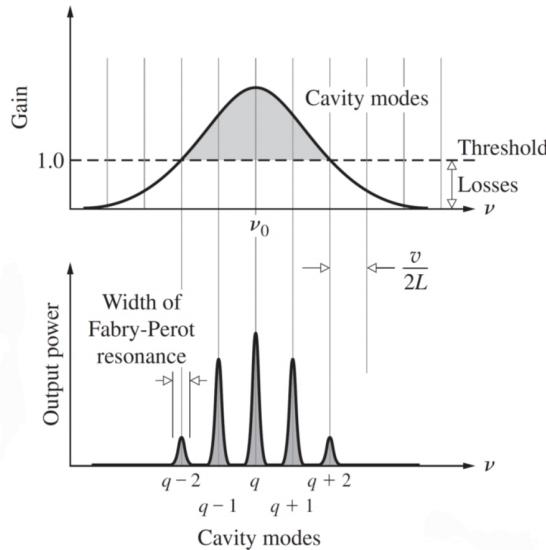


圖 1: 模序列強度關係圖

### 1.3 A3 氦氖半外腔等效腔長測量實驗

雷射主要由增益介質、共振腔和激發能源三個部件所組成，激發能源產生一定頻率的光，增益介質強化部分頻率區段的光，最後共振腔使光在腔中發生共振達到持續

增益的效果進而產出雷射。利用式 (18) 可以推估半外腔雷射  $L_1$  與內腔雷射  $L_2$  的腔長關係為：

$$L_2 = L_1 \times \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \quad (20)$$

$t_1$  和  $t_2$  分別為內腔縱模時間間隔和半外腔縱模時間間隔。

## 1.4 A4 雷射橫模變換與參數測量實驗

雷射橫模的成因為平行光通過反射鏡時一由於繞射作用產生的畸變使得雷射在橫向與傳播方向上出現了不同的光強分布，每種分布情形配稱作一種橫模。利用傍軸波方程 (paraxial wave equation) 的解，可以得到兩種解，分別為 Hermite-gaussian eigensolution( $\tilde{u}_{nm}(x, y, z)$ ) 和 Laguerre-gaussian eigensolution( $\tilde{u}_{pm}(r, \theta, z)$ )，前者為傍軸波方程在笛卡爾坐標系下的解，後者則為方程在柱座標下的解，依據不同坐標系一般會用兩組三個參數來分別描述橫模的分布: $n$ 、 $m$  和  $q$  或  $p$ 、 $m$  和  $q$ ，其中  $q$  為縱模的數量但通常因其數量級較大而忽略， $(n,m)$  代表  $(x,y)$  方向的節點數， $(p,m)$  則為  $(r,\theta)$  方向上的節點數。

兩者的解如下：

$$E_{n,m}(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} - ik\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i(n+m+1)\eta\right) \quad (21)$$

$$E_{p,m}(r, \theta, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right)^{|m|} L_p^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2(z)} - ik\frac{r^2}{2R(z)} - ikz + im\theta + i(2p+|m|+1)\eta\right) \quad (22)$$

其中： $\omega(z)$  與  $R(z)$  的定義分別對應章節 1.6 中的式 (44) 和 (45)，而  $\eta$  則為：

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi\omega_0^2(z)n}\right) \quad (23)$$

而  $H^n$  為  $n$  階 Hermite polynomial， $L_p^m$  為對應參數的 Laguerre polynomial，可以注意到當  $n$ 、 $m$  和  $p$ 、 $m$  都為 0 時，兩式結果皆且回歸高斯基模 ( $TEM_{00}$ )

## 1.5 A5 氦氖雷射縱模正交偏振與模式競爭觀測實驗

### 1.5.1 正交偏振

兩偏振相互正交的光在雷射內腔其內部的雙折射晶體中有不同的折射率，而不同的折射率將使不同偏振的光在雷射中經歷不同的腔長，這點可以由高斯光束穿越長

L 之折射率 n 介質的 ABCD 矩陣看出：

$$\begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

此種現象導致一個共振腔內可能產生兩種不同頻率的光，又兩光的偏振方向垂直，形成正交偏振。

### 1.5.2 模式競爭

雷射的模式競爭可以用燒孔效應來涵蓋。燒孔效應的成因源於共振腔內多個縱模的交互作用而形成，當兩個縱模同時在共振腔內產生駐波，兩者將會發生干涉，他們共同形成的疊加波將影響增益介質在不同區域的增益效果，再波峰處的增益效果會達到飽和，而最符合增益效果分布的模態將獲得相較於其他模態更多的增益，最終壓制其他縱模。

## 1.6 A6 高斯光束基本參數測量實驗

### 1.6.1 diffraction optics in the paraxial approximation

考慮一電場為均勻偏振的單色波

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t)e^{i\omega t} \quad (25)$$

其中複數振幅  $\tilde{\mathbf{E}}$  須滿足向量形式的波方程

$$(\nabla^2 + k^2)\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = 0 \quad (26)$$

其中  $k = \omega/c$ 。給定位於平面  $z = z_1$  上的複數場  $\tilde{\mathbf{E}}(x_1, y_1, z_1)$ ，為於任意平面  $z$  上的複數場可藉由 Fresnel Kirchoff integral 得知

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{J}{\lambda} \int_s \int_s \tilde{\mathbf{E}}(x_1, y_1, z_1) \frac{-ikr}{r} \cos \theta dx_1 dy_1 \quad (27)$$

示意圖如圖 2，其中  $r$  為點  $P_1(x_1, y_1)$  到點  $P(x, y)$  之間的距離， $\theta$  為  $\overline{P_1P}$  與平面  $z = z_1$  的法向量之間的夾角。假設波以小角度傳播，這種情況下  $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z)$  可寫成

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z) e^{-ikz} \quad (28)$$

其中  $\tilde{u}$  為在空間中緩慢變化的函數，將式 (28) 帶入式 (26) 得

$$\nabla_{\perp}^2 u - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

其中  $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$ 。式 (29) 即為 paraxial wave equation。使用 paraxial wave approximation， $r$  可寫成

$$\begin{aligned} r &= (z - z_1) \left[ 1 + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(z - z_1)^2} \right]^{1/2} \\ &\approx (z - z_1) + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(z - z_1)} \end{aligned} \quad (30)$$

將式 (28) 以及式 (30) 帶入式 (27)，有

$$u(x, y, z) = \frac{i}{\lambda L} \int \int_s u(x_1, y_1, z_1) e^{-ik \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2L}} dx_1 dy_1 \quad (31)$$

其中  $L = z - z_1$ 。接著考慮一介由矩陣  $ABCD$  描述的光學系統，並將惠根斯定理擴展至一般光學系統，場  $u(x, y, z)$  是由從平面發射的各個小波的疊加獲得的，並經由此系統傳輸，因此我們獲得

$$u(x, y, z) = \frac{i}{\lambda B} \int \int_s u(x_1, y_1, z_1) e^{-ik \frac{A(x^2 - x_1^2) + D(y^2 - y_1^2) - 2x_1 x - 2y_1 y}{2B}} dx_1 dy_1 \quad (32)$$

對於 free space，我們有  $A = D = 1$ ， $B = L$ ，而式 (32) 變回到式 (31)

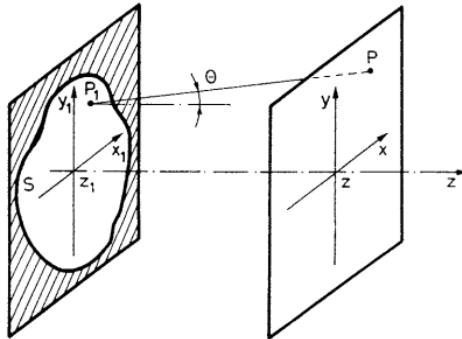


圖 2: Fresnel Kirchoff integral 示意圖

### 1.6.2 Gaussian beam

假設在平面  $z = z_1$  沒有任何孔徑的限制，即式 32 的積分範圍為整個平面，我們可以得知

$$u(x, y, z) \propto e^{-ik[(x^2 + y^2)/2q]} \quad (33)$$

其中  $q = q(z)$  是一個 complex parameter，以及

$$u(x_1, y_1, z_1) \propto e^{-ik[(x_1^2 + y_1^2)/2q_1]} \quad (34)$$

為式 (32) 的 eigensolution。同時也可以得知

$$u(x, y, z) = \frac{1}{A + (B/q_1)} e^{-ik\frac{x^2 + y^2}{2q}} \quad (35)$$

以及

$$q = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (36)$$

而式 (36) 稱為高斯光束的 ABCD 法則。結合式 (28) 和式 (33)，我們有

$$\tilde{\mathbf{E}} \propto e^{-ik\left[z + \frac{x^2 + y^2}{2q}\right]} \quad (37)$$

因一球面波在 paraxial approximation 的情況下可寫成

$$\tilde{\mathbf{E}} \propto e^{-ik\left[z + \frac{x^2 + y^2}{2R}\right]} \quad (38)$$

其中  $R$  為曲率半徑，比較式 (37) 和式 (42)，我們得之高斯光束可視曲率半徑為複數  $q$  的球面波。如果將  $q$  寫成

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (39)$$

並帶入式 (37)，有

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) \propto e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2}} \times e^{-ik\left[z + \frac{x^2 + y^2}{2R}\right]} \quad (40)$$

因此高斯光束強度為

$$I = I_{max} e^{-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}} \quad (41)$$

當距離中心點  $w/\sqrt{2}$  時，光強度  $I = I_{max}/e^2$ ，定義此距離為 spot size  $W_1$ ，即  $w_1 = w/\sqrt{2}$ 。現在考慮高斯光束在自由空間中傳播， $A = D = 1$ ， $B = z$ ，我們有

$$q = q_1 + z \quad (42)$$

接著假設在  $z = 0$  處  $R = \infty$ ，即

$$\frac{1}{q_1} = -i \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \quad (43)$$

其中  $w_0$  為在  $z = 0$  處的 spot size。接著將式 (39) 和式 (43) 帶入式 (42)，得到

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \quad (44)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2 \right] \quad (45)$$

同樣我們也可得到

$$u(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \times e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2R}} e^{i\phi} \quad (46)$$

其中  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)$ 。而 Rayleigh ranged( $z_R$ ) 可定義為

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (47)$$

此外當  $z \rightarrow \infty$ ， $w$  正比於  $z$ ，因此定義 beam divergence  $\theta_d = w/z$

$$\theta_d = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (48)$$

## 1.7 A7 高斯光束的傳播特性實驗

### 1.7.1 thin lenses and gaussian beams

薄透鏡在近軸的範圍內是一種簡單的改變波前曲率半徑的裝置。考慮一點波原放出球面波，當球面波抵達透鏡時，其半徑為  $o$ ，經過透鏡後變成曲率半徑為  $i$  的球面波，示意圖如圖 3，且  $o$ 、 $i$  和透鏡焦距  $f$  有以下關係

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad (49)$$

因高斯光束波前同樣為球面波，因此也適用此關係。將光束的束腰  $w_{01}$  視為一物體，且與焦距  $f$  的透鏡之間的距離為  $d_1$ ，假設成像距離透鏡  $d_2$ ，束腰寬度為  $w_{02}$ 。示意圖如圖 4。根據式 (45) 以及式 (49)，我們有

$$\frac{1}{d_1 \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_{01}^2}{\lambda d_1} \right)^2 \right]} + \frac{1}{d_2 \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_{02}^2}{\lambda d_2} \right)^2 \right]} = \frac{1}{f} \quad (50)$$

此外，由於通過透鏡前後的光束半徑  $w(z)$  應相同，因此根據式 (44) 我們得知

$$w_{01} \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda d_1}{\pi w_{01}^2} \right)} = w_{02} \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda d_2}{\pi w_{02}^2} \right)} \quad (51)$$

因此由式 (50) 以及 51，我們有

$$\begin{aligned} d_2 &= f + \frac{f^2(d_1 - f)}{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2} \\ w_{02}^2 &= \frac{w_{01}^2 f^2}{(f - d_1)^2 + \left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2} \end{aligned} \quad (52)$$

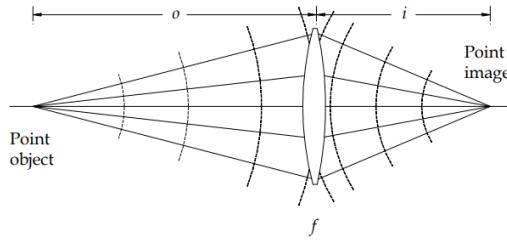


圖 3: 球面波通過凸透鏡式意圖

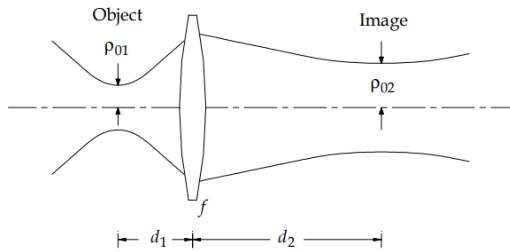


圖 4: 高斯光束通過透鏡式意圖

## 1.8 A8 高斯光束擴束及準直實驗

### 1.8.1 ray transfer matrix analysis

考慮圖 5中的光學系統，在點  $P_1$ ，根據 Snell's Law，有

$$n_{i1}(\alpha_{i1} + \alpha_1) = n_{t1}(\alpha_{t1} + \alpha_1) \quad (53)$$

其中  $n_{i1}$  和  $n_{t1}$  分別為入射光所處介值的折射率及透射光所處介值的折射率， $\alpha_{i1}$  和  $\alpha_{t1}$  分別為入射光和透射光與水平線的夾角， $\alpha_1$  則式鏡面法線與水平線夾角，其中這裡假設所有角度均為小角度。因  $\alpha_1 = y_1/R_1$ ，式 (53) 可寫為

$$n_{i1}(\alpha_{i1} + \frac{y_1}{R_1}) = n_{t1}(\alpha_{t1} + \frac{y_1}{R_1}) \quad (54)$$

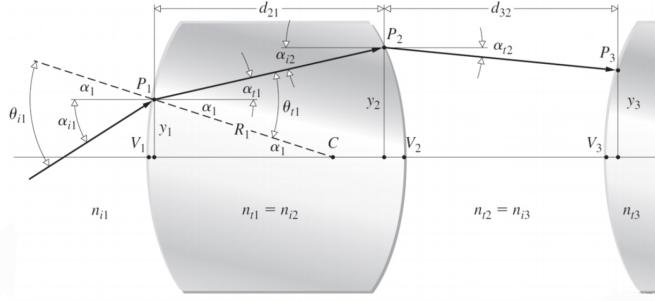


圖 5: 光學系統式意圖

其中  $y_1$  為  $P_1$  到中心軸的垂直距離， $R_1$  為  $P_1$  點的曲率半徑。定義  $\mathfrak{D}_1 = (n_{t1} - n_{i1})/R_1$ ，式 (54) 可改寫為

$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \mathfrak{D}_1 y_1 \quad (55)$$

式 (55) 即為 Refraction equation。對於點  $P_2$  到中心軸的垂直距離  $y_2$  可寫成

$$y_2 = y_1 + d_{21}\alpha_{t1} \quad (56)$$

式 (56) 即為 Transfer equation，其中  $d_{21}$  為  $P_1$  到  $P_2$  的水平距離，這裡我們假設  $d_{21}$  大約等於  $\overline{V_1 V_2}$ 。由式 (55) 以及  $y_{t1} = 0 + y_{i1}$ ，我們有

$$\begin{bmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathfrak{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \quad (57)$$

這裡我們定義向量  $\mathbf{r}_{t1}$ 、 $\mathbf{r}_{i1}$  以及矩陣  $\mathbf{R}_1$

$$\mathbf{r}_{t1} \equiv \begin{bmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{i1} \equiv \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\mathfrak{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

而  $\mathbf{R}_1$  稱為 Refraction matrix。同樣的，對於式 (56) 以及  $n_{i2}\alpha_{i2} = n_{t2}\alpha_{t2} + 0$  可寫成

$$\begin{bmatrix} n_{i2}\alpha_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix} \quad (59)$$

其中定義矩陣  $\mathbf{T}_{21}$

$$\mathbf{T}_{21} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

即稱為 Transfer matrix。介由兩個 Refraction matrix 和一個 Transfer matrix 的組合，我們得之圖 5 中的厚透鏡可表示為矩陣  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{21} \mathbf{R}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\mathfrak{D}_2 d_{21}}{n_{t1}} & -\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2 + \frac{\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \\ \frac{d_{21}}{n_{t1}} & 1 - \frac{\mathfrak{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

另外，因厚透鏡的焦距  $f$  可表示為

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - 1)d_l}{n_l R_1 R_2} \right] \quad (62)$$

其中  $n_l$  為透鏡內部的折射係數， $R_1$ 、 $R_2$  為透鏡兩側的曲率半徑， $d_l$  為兩個 principle planes 之間的距離，式意圖如圖 6。因此厚透鏡矩陣  $\mathbf{A}$  可寫為

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{R_2}{f} & -\frac{1}{f} \\ R_1 + R_2 - \frac{R_1 R_2}{f} & 1 - \frac{R_1}{f} \end{bmatrix} \quad (63)$$

其中假設  $n_{i1} = n_{t2} = 1$ 。對於薄透鏡， $d_{21}$  趨近於零，式 (61) 改寫為

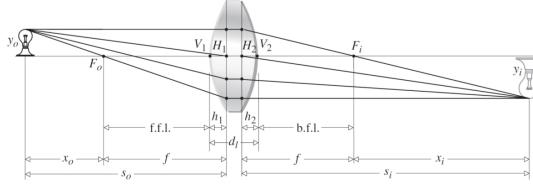


圖 6: 厚透鏡焦距式意圖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

其中  $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 = 1/f$ 。對於反射鏡，如圖 7。因  $\theta_i = \theta_r$ ，因此有

$$\alpha_i - \theta_i = \frac{-y_i}{R} \quad (65)$$

這裡一樣假設所有角度均為小角度， $y_i$  大於零， $R$  為鏡面半徑且小於零，此外根據圖 7，我們可以看出  $\alpha_i = \alpha_r + 2\theta_i$ ，結合式 (65)，有

$$\alpha_r = -\alpha_i - \frac{2y_i}{R} \quad (66)$$

將等式兩邊乘以折射率  $n$  並寫成矩陣形式

$$\begin{bmatrix} n\alpha_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2n}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (67)$$

其中

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2n}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

即為 mirror matrix。

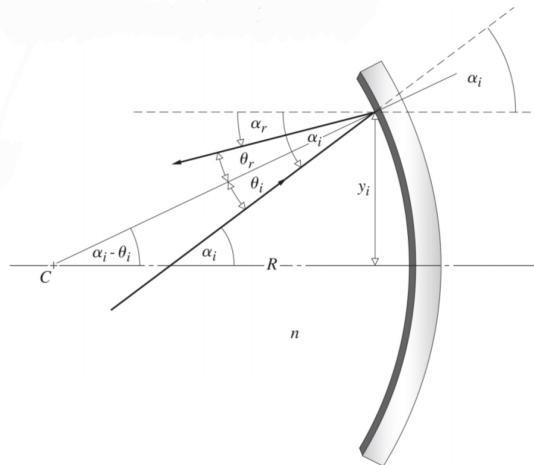


圖 7: 反射鏡式意圖

### 1.8.2 擴束系統

擴束系統式意圖如圖 8，可以用矩陣描述此系統，此系統光束先通過一焦距為  $f_1$  的薄透鏡，在通過一長度為  $f_1 + f_2$  的自由空間，最後在通過一焦距為  $f_2$  的薄透鏡，根據式 (64)，以及式 (60)，我們有

$$m = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{f_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_1 + f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{f_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M_T} & 0 \\ f_1 + f_2 & -M_T \end{bmatrix} \quad (69)$$

其中  $M_T = f_2/f_1$ 。配合式 (44) 和式 (45) 我們可得知

$$s_i = -M_T(f_1 + f_2) - M_T^2 s_o \quad (70)$$

$$w_{02} = |M_T|w_{01} \quad (71)$$

其中  $s_o$  和  $s_i$  為通過透鏡前後高斯光束的光腰位置， $w_{01}$  和  $w_{02}$  為通過透鏡前後高斯光束的光腰半徑。

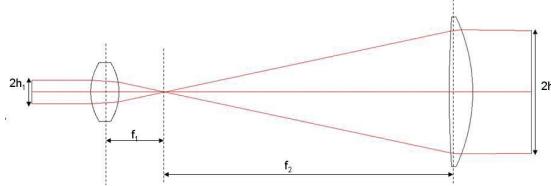


圖 8: 擴束系統式意圖

## 1.9 A9 光束品質分析實驗

### 1.9.1 Beam quality $M^2$

beam quality  $M^2$  的定義為

$$M^2 = \frac{\pi w_0 \theta}{\lambda} \quad (72)$$

其中  $w_0$  式光腰寬度， $\theta$  為遠場發散角。根據式 (48)，對於理想的高斯光束，其  $M^2 = 1$ 。此外光束半徑  $w(z)$  可寫為

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{M^2(z - z_0)\lambda}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (73)$$

因此對於  $M^2 > 1$  的光束遠場散射角  $\theta$  為理想高斯光束的  $M^2$  倍。

## 1.10 A10 雷射共振腔設計實驗

### 1.10.1 optical cavity

雷射共振腔式意圖如圖 9。假設左側反射鏡曲率半徑為  $R_1$ ，右側為  $R_2$ ，共振腔長為  $l$ ，三者皆大於零。根據節 1.8 裡面定義的 Transfer matrix 和 Refraction matrix，此共振腔的矩陣形式  $\mathbf{A}$  為

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_1 \mathbf{T}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{21} \mathbf{R}_1 \mathbf{T}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_{21} \quad (74)$$

對於兩反射鏡的曲率半徑相同  $R_1 = R_2 = R$  的共振腔，有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2l}{R} - 1\right)^2 - \frac{2l}{R} & \frac{4}{R} \left(\frac{l}{R} - 1\right) \\ 2l \left(1 - \frac{l}{R}\right) & 1 - \frac{2l}{R} \end{bmatrix} \quad (75)$$

此即為 confocal cavity。如果光束能在共振腔內共，須滿足

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i \quad (76)$$

即  $\mathbf{A}$  的 eigenstate。

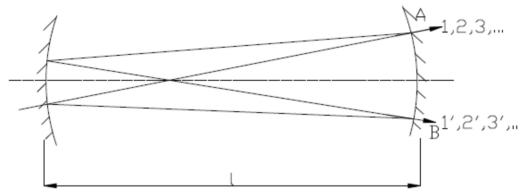


圖 9: 雷射共振腔式意圖

### 1.10.2 eigenmode

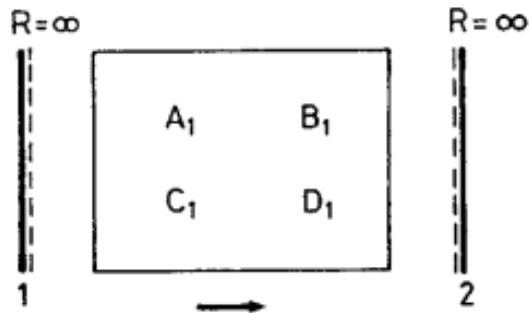


圖 10: 廣義光學系統式意圖，其中兩端為位於無限遠的平面鏡

考慮圖 10 中的光學系統，當光束從平面鏡 1 出發並在此系統中來回一趟後，我們有

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_1D_1 - 1 & 2B_1D_1 \\ 2A_1C_1 & 2A_1D_1 - 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

從式 (77) 我們可以知道  $A = D$ 。由於 q parameter 和矩陣的元素滿足關係式

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (78)$$

即

$$Cq^2 + (D - A)q - B \quad (79)$$

因此有

$$q = q_1 = i\sqrt{-\frac{B_1 D_1}{A_1 C_1}} \quad (80)$$

同理，對於從平面鏡 2 出發的光束，我們有

$$q_2 = i\sqrt{-\frac{A_1 B_1}{C_1 D_1}} \quad (81)$$

因  $q_1, q_2$  均為純虛數，因此其在平面鏡 1 和 2 前的光均為平面波。我們得出一般結論：鏡面上等相面與鏡面重合。接著將此光學系統限制於兩鏡面組成的共振系統，如圖 12，在這裡我們定義兩無因次參數： $g_1, g_2$ ：

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 - \frac{L}{R_1} \\ g_2 &= 1 - \frac{L}{R_2} \end{aligned} \quad (82)$$

其中  $R_1, R_2$  為鏡面曲率半徑、 $L$  為鏡面距離。我們得知

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & L \\ -(1 - g_1 g_2)/L & g_2 \end{bmatrix} \quad (83)$$

藉由式 (80)、式 (39) 以及式 (82)，有

$$w_1 = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)}\right]^{1/4} \quad (84)$$

同理，對於式 (81)，有

$$w_2 = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}\right]^{1/4} \quad (85)$$

對於對稱的共振腔，式 (82) 和式 (81) 變成

$$w = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{1 - g^2}\right]^{1/4} \quad (86)$$

對於 confocal resonator，其  $g = 0$ ，因此有

$$w = \left(\frac{L\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \quad (87)$$

式意圖如圖 11。

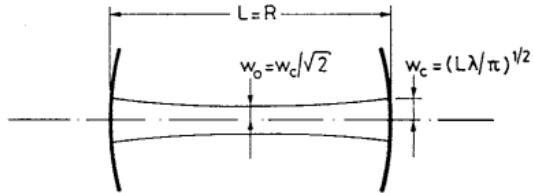


圖 11: confocal resonator 式意圖

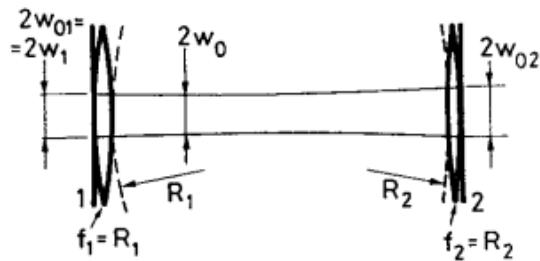


圖 12: Transformation of a two-mirror resonator into a resonator with plane end-mirrors

## 2 實驗步驟與觀察記錄

### 2.1 A1 氦氖雷射共振腔調整實驗

1. 依據圖 (13) 架設儀器，並將功率計與電腦的軟體連結
2. 配戴護目鏡，須注意其上方之標示以確認衰減強度與對應波長，這裡我們選擇 OD2 對應波長 632 nm
3. 開啟雷射，於反射鏡裝上曲率半徑 500 mm 的腔鏡，之後從半外腔架最外方的十字尺規板，由外側從十字看向外腔內部，調整尺規板的旋鈕使氦氖氣體所產稱的大光斑與二次反射所生之小光斑重疊於中心，類似於日全蝕斑的圖像。
4. 開啟檯燈，此時應當能在視野中看見綠色的十字，調整反射鏡的旋鈕使時自對準光斑中心，對準後應當出現 lasing 現象，可以從雷射的發射端觀察到紅色的光斑，若無則重回上一步，重新調整十字的位置，屆此過程直至雷射產生。

5. 將產出的光對準功率計的探頭，再次調整反射鏡的旋鈕使得功率讀數最大，並記錄此讀數。
6. 改變後腔鏡位置並重複上述實驗。

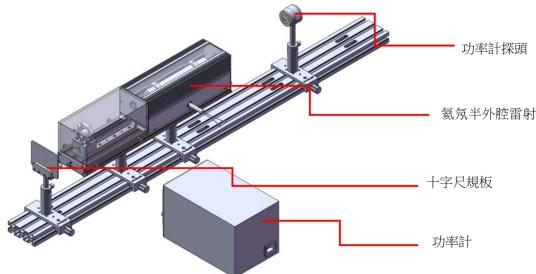


圖 13: A1 實驗儀器架設示意圖

## 2.2 A2 共焦球面掃描干涉儀調整實驗

1. 依據圖 (14) 架設儀器，並利用可變光圈校正所有元件之光路。
2. 將三角波輸出連接干涉儀，探測器電源接探測器，鋸齒波檢測與探測計一同連接至示波器的不同頻道。
3. 開啟各儀器的電源，調整示波器使訊號方便閱讀
4. 調整共焦腔的支架使之與光路重和，探測器使讀取到的訊號最強，則可在示波器上看到相應的訊號，利用示波器的 cursor 來量取相鄰縱模間隔與周其間隔。

## 2.3 A3 氮氖半外腔等效腔長測量實驗

1. 依據圖 (15) 架設儀器，並利用實驗 A1 和 A2 的方法調整半外腔雷射與干涉儀。
2. 架設相機並將之連接至電腦軟體，在觀測之前先行裝上 35% 的衰減片以避免損壞，調整曝光時間或裝上更多衰減片使所讀取之訊號不致飽和。

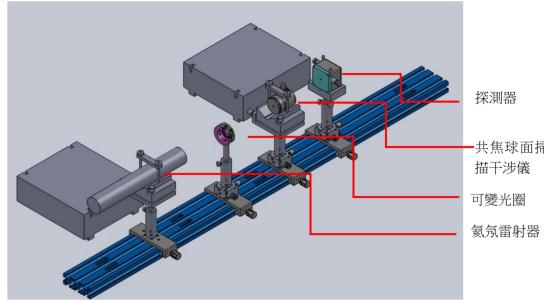


圖 14: A2 實驗儀器架設示意圖

3. 將雷射調整出基模，之後利用示波器紀錄縱模時間間隔，並量取半外腔長度。
4. 保持各參數不變並對內腔雷射重複上述步驟，取得內腔雷射的縱模間隔。

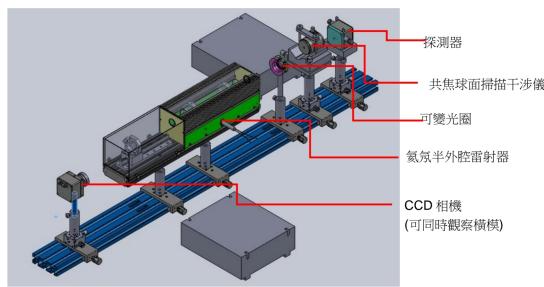


圖 15: A3 實驗儀器架設示意圖

## 2.4 A4 雷射橫模變換與參數測量實驗

1. 依據圖 (16) 架設儀器，並利用實驗 A1 的方法調出光，並連接相機觀察光斑的樣式。
2. 透過調整後腔鏡的位置或旋鈕式著調出不同的橫模模態，在這次實驗中我們調出了  $TEM_{00}$ (圖 (26))、 $TEM_{01}$ (圖 (28)) 和  $TEM_{01}^*$ (圖 (27))。

## 2.5 A5 氦氖雷射縱模正交偏振與模是競爭觀測實驗

1. 依據圖 (17) 架設儀器，利用實驗 A2 的架構為基礎添入一偏振片。
2. 利用示波器觀察旋轉偏振片所發生的現象並確認有正交偏振的產生。

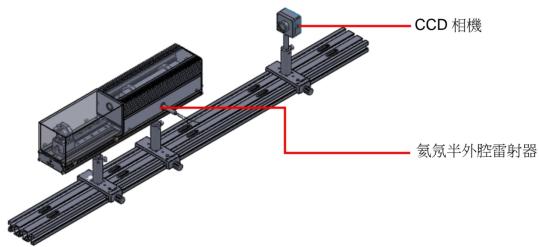


圖 16: A4 實驗儀器架設示意圖

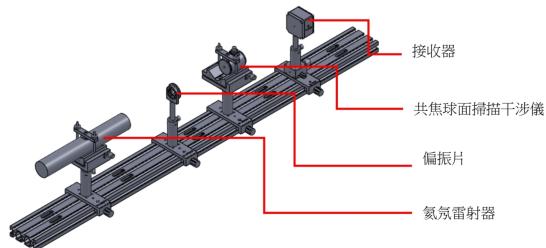


圖 17: A5 實驗儀器架設示意圖

## 2.6 A6 高斯光束基本參數測量實驗

1. 依據圖 (18) 架設儀器，將相機與光束品質分析軟體相互連接，之後調整光路，使得不論如何移動相機光斑都會出現於影像視窗的中央。
2. 加入焦距為 150 mm 的透鏡，重複步驟已達到調整光路的效果
3. 改變相機的位置，利用分析軟體紀錄各位置下的光斑半徑，之後紀錄光束品質分析的數據欄位中的各項光斑數據並分析。

## 2.7 A7 高斯光束的傳播特性實驗

1. 依據圖 (18) 架設儀器，重複實驗 A6 的實驗，改變相機位置，並記錄光斑半徑隨位置的變化。
2. 在光路中加入焦距為 150 mm 的透鏡，重複上步驟，並比較放不放透鏡的差異。

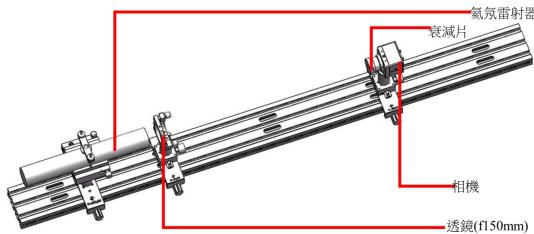


圖 18: A6,A7 實驗儀器架設示意圖

## 2.8 A8 高斯光束擴束及準直實驗

1. 實驗儀器架設示意圖如圖 19。
2. 調整兩透鏡之間的角度、距離，使其之間同軸且距離為兩透鏡的焦距合。
3. 以實驗 A6 的方法測量雷射光班寬度，並計算高斯光束的參數。
4. 將兩透鏡移除，重複步驟 3。
5. 比較有無透鏡的高斯光束參數。

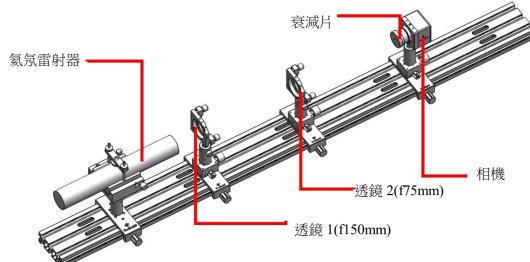


圖 19: A8 實驗儀器架設示意圖

## 2.9 A9 光束品質分析實驗

1. 實驗儀器架設示意圖如圖 20。
2. 先不使用菲涅爾透鏡，以實驗 A6 的方法測量雷射光班寬度，並計算高斯光束的參數。
3. 使用菲涅爾透鏡。重複步驟 2。

#### 4. 比較使用菲涅爾透鏡前後的光束品質 $M^2$

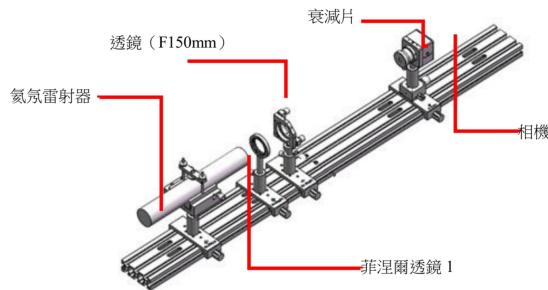


圖 20: A9 實驗儀器架設示意圖

### 2.10 A10 雷射共振腔設計實驗

1. 使用半外腔雷射後腔鏡曲率  $R = 500 \text{ mm}$  的反射鏡。
2. 調節雷射出光 (見實驗 A1)
3. 以實驗 A6 的方法測量雷射光斑寬度，以計算高斯光束的參數。
4. 接著改變後腔鏡位置並重複步驟 3。
5. 將後腔鏡曲率改成  $R = 1000 \text{ mm}$  和  $R = 2000 \text{ mm}$ ，並重複步驟 2 至 4。

## 3 結果與討論

### 3.1 A1 氦氖雷射共振腔調整實驗

本實驗透過改變內腔鏡曲率半徑以及其位置，測量雷射輸出功率。實驗結果見圖 21。可以發現雷射功率與後腔鏡位置大至無關聯以及後腔鏡曲率越大，輸出功率越小。

### 3.2 A2 共焦球面掃描干涉儀調整實驗

本實驗藉由縱模時間間隔 ( $\Delta x_1$ ) 與自由光譜程時間間隔 ( $\Delta x_2$ ) 計算內腔雷射腔長。實驗結果見表 1，根據式 (16)、式 (18) 以及式 (19)，其中氦氖雷射腔長

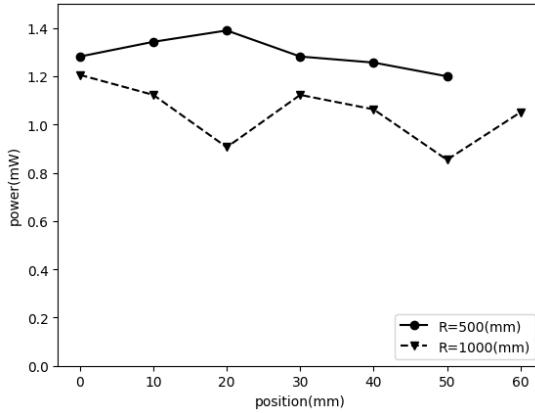


圖 21：內腔鏡曲率半徑以及內腔鏡位置與雷射輸出功率關係圖

理論值為  $L = 250\text{ mm}$ ，共焦腔腔長理論值為  $30.2\text{ mm}$ 。我們得之共焦腔長為  $30.19 \pm 0.29\text{ mm}$ ，與理論值相差  $-0.03\%$ 。

縱模時間間隔 $\Delta x_1$ ms	自由光譜程時間間隔 $\Delta x_2$ ms	$\Delta v_{SR}$ GHz	腔長 mm
0.189	0.75	2.38	31.46
0.178	0.75	2.53	29.65
0.181	0.75	2.49	30.13
0.176	0.74	2.51	29.79
0.175	0.73	2.50	29.91
平均腔長 (mm) : $30.19 \pm 0.29$			

表 1: A2 實驗: 縱模時間間隔、自由光譜程時間間隔、以及腔長測量結果

### 3.3 A3 氦氖半外腔等效腔長測量實驗

本實驗透過共焦球面掃描儀計算半外腔和內腔雷射裝置相鄰縱模時間間隔，並根據已知的內腔雷射腔長  $250\text{ mm}$  和式 (20) 計算半外腔雷射腔長。實驗結果見表 2，半外腔雷射腔長計算結果為  $409.4 \pm 9.4(\text{mm})$ ，實際測量長度為  $393\text{ mm}$ ，誤差為  $4.2\%$ 。

半外腔 $\Delta t_1$	內腔 $\Delta t_2$
ms	ms
0.71	1.18
0.67	1.09
0.72	1.17
0.67	1.10
平均半外腔 $\Delta t_1(\text{ms}) : 0.69 \pm 0.01$	
平均內腔 $\Delta t_2(\text{ms}) : 1.13 \pm 0.02$	

表 2: A3 實驗: 半外腔  $\Delta t_1$  和內腔  $\Delta t_2$  測量結果

### 3.4 A4 雷射橫模變換與參數測量實驗

本實驗藉由測量不同模式在不同位置的光斑寬度，計算其雷射高斯參數。測得數據點後，使用函數

$$w^2(z) = A + Bz + cz^2 \quad (88)$$

對數據點進行擬合，其中  $w$  為  $a, b$  軸的半徑，擬合結果如圖 22、23、24，以及表 3。可以從圖 24 發現  $\text{TEM}_{01}^*$  理論上  $a$ 、 $b$  兩軸半徑應相同，然而實際結果並非如

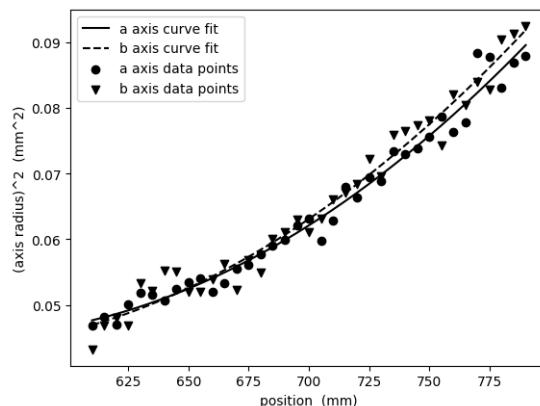


圖 22: A4 實驗:  $\text{TEM}_{00}$  擋合結果

此，推測可能原因為: 光束對 CCD 相機的入射角並非  $0^\circ$ ，示意圖如圖 25，其中  $\theta$

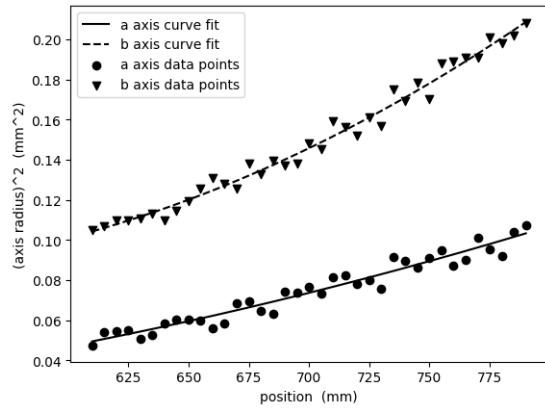


圖 23: A4 實驗:TEM<sub>01</sub> 擬合結果

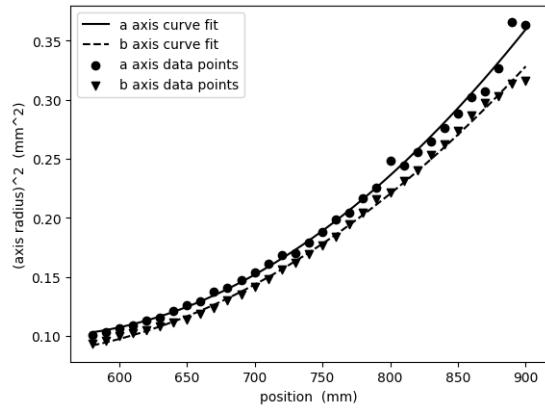


圖 24: A4 實驗:TEM<sub>01</sub>\* (doughnut mode) 擬合結果

模式	A(mm <sup>2</sup> )	B(mm)	C	$R^2$
TEM <sub>00</sub>	a axis 2.9*10 <sup>-1</sup>	-8.8*10 <sup>-4</sup>	8.0 <sup>-7</sup>	0.98
	b axis 2.6*10 <sup>-1</sup>	-8.4*10 <sup>-4</sup>	7.8 <sup>-7</sup>	0.97
TEM <sub>01</sub>	a axis 3.0*10 <sup>-2</sup>	-1.7*10 <sup>-4</sup>	3.4 <sup>-7</sup>	0.94
	b axis 3.9*10 <sup>-1</sup>	-1.3*10 <sup>-3</sup>	1.3 <sup>-6</sup>	0.98
TEM <sub>01</sub> *	a axis 6.7*10 <sup>-1</sup>	-2.1*10 <sup>-3</sup>	2.0 <sup>-6</sup>	0.99
	b axis 4.7*10 <sup>-1</sup>	-1.5*10 <sup>-3</sup>	1.5 <sup>-6</sup>	0.99

表 3: A4 實驗:TEM<sub>00</sub>、TEM<sub>01</sub>、TEM<sub>01</sub>\* 擬合參數以及擬合  $R^2$

為光束入射角， $l$  為實際光軸長度、 $l'$  為測量光軸長度，兩者有以下關係

$$l' = \frac{l}{\cos \theta} \quad (89)$$

或

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{l}{l'} \right) \quad (90)$$

假設 b 軸軸長測量結果為實際光軸長度  $l$ ，a 軸軸長測量結果為  $l'$ ，根據式 (90)，我們得之光束入射角約為  $0.27^\circ$ 。

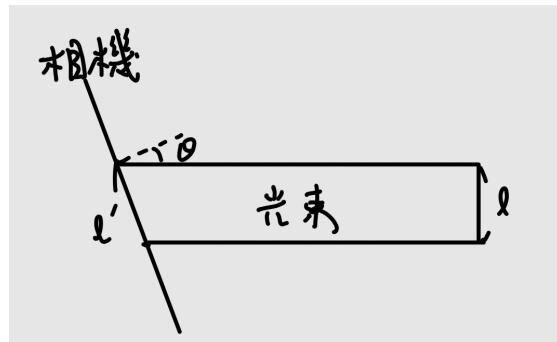


圖 25: 光束與 CCD 相機入射角關係式意圖

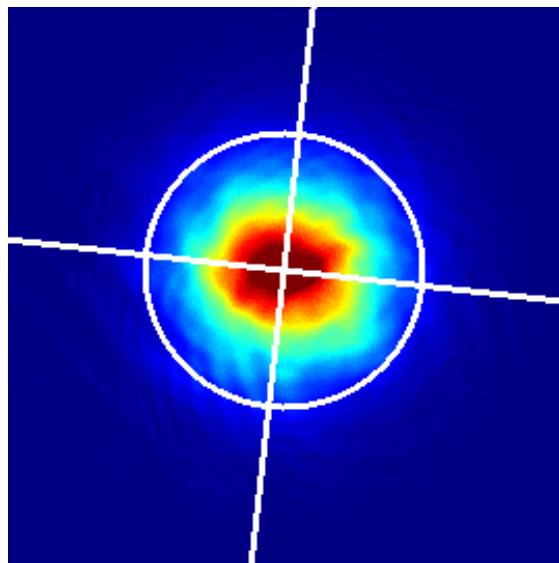


圖 26: A4 實驗:TEM<sub>00</sub>

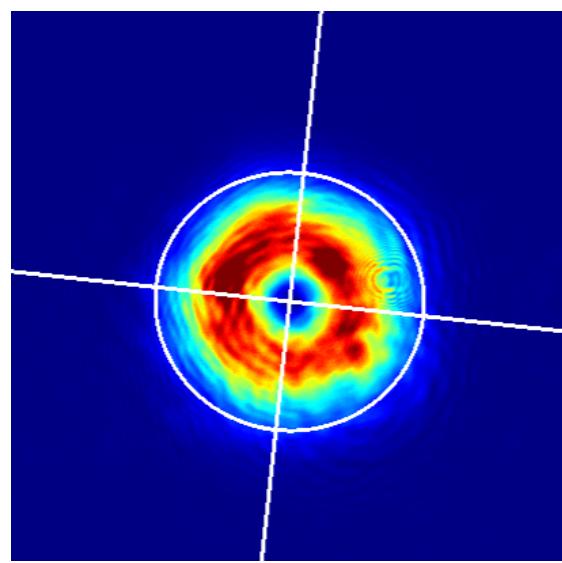


圖 27: A4 實驗:TEM<sub>01</sub><sup>\*</sup>

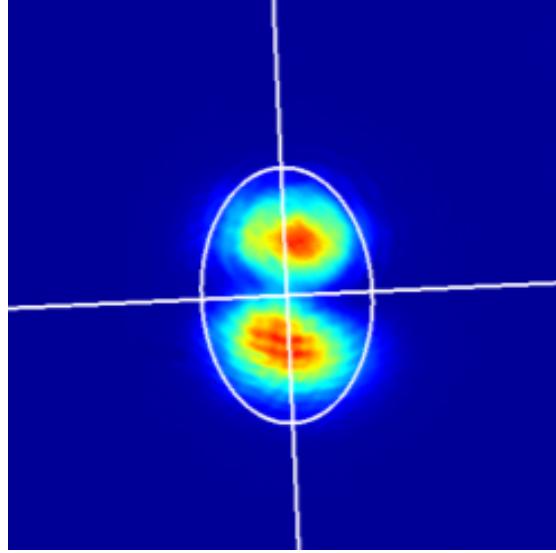


圖 28: A4 實驗:TEM<sub>01</sub>

### 3.5 A5 氦氖雷射縱模正交偏振與模是競爭觀測實驗

本實驗藉由旋轉偏振片角度，觀察縱模序列的變化以驗證氦氖雷射的偏振狀態為共焦偏振。實驗結果如圖 29到圖 41。我們可以發現偏振片在 0° 時兩相鄰的縱模只存在其中一個縱模，且大小達到最大值，在 45° 時波峰同時存在且大小相同，偏振角度為 90° 時原本的波峰消失，新出現的波峰達到最大值。而偏振 135° 的情況大致和 45° 的情況相同，最後當偏振角度為 180° 時，波形再次回到和 0° 時的相同。因此我們可以得知氦氖雷射的偏振狀態為共焦偏振。

### 3.6 A6 高斯光束基本參數測量實驗

本實驗中我們將雷射出光口放置於 1020 mm 處，在位置 975 mm 處放置焦距為 150 mm 的透鏡，並使用 CCD 相機觀測不同位置的光般大小。測量結果以及使用式 (88) 和函數

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{(z - z_0)\lambda}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (91)$$

進行擬合，其中  $w_0$  為光腰半徑， $z_0$  為光腰位置，雷射波長  $\lambda = 632.8 * 10^{-6}$  mm。擬合結果如圖 42、圖 43和表 4，高斯光束各項參數計算結果見表 5。其中須注意的是在使用式 (91) 擬合時，我們只使用在光腰位置附近的數據點進行擬合，如果使用全部數據點會因在光腰位置左右兩邊的數據點數量明顯不同而導致擬合結果失

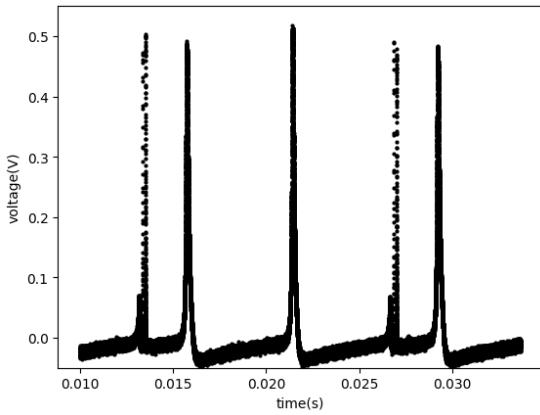


圖 29: 偏振角度  $0^\circ$

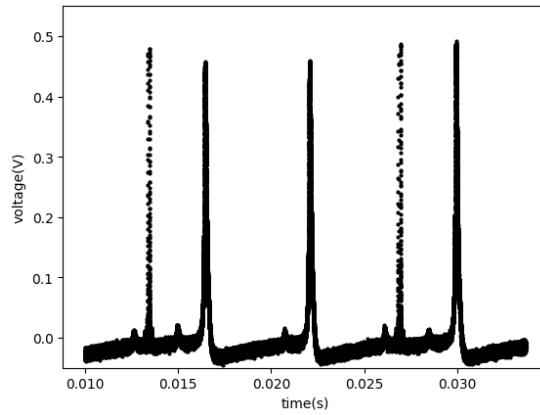


圖 30: 偏振角度  $15^\circ$

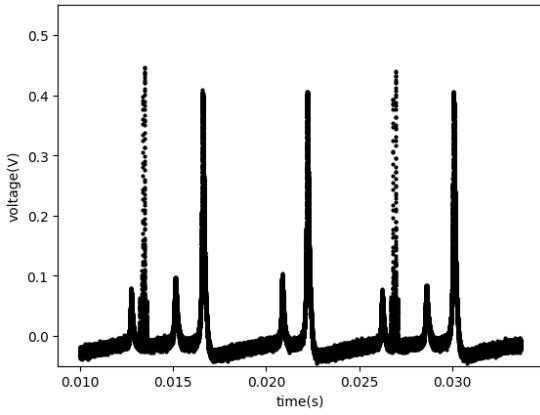


圖 31: 偏振角度  $30^\circ$

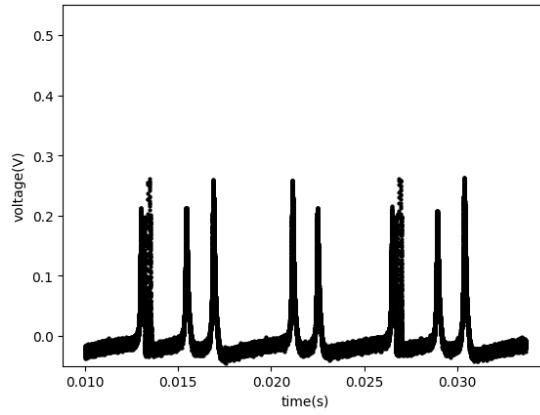


圖 32: 偏振角度  $45^\circ$

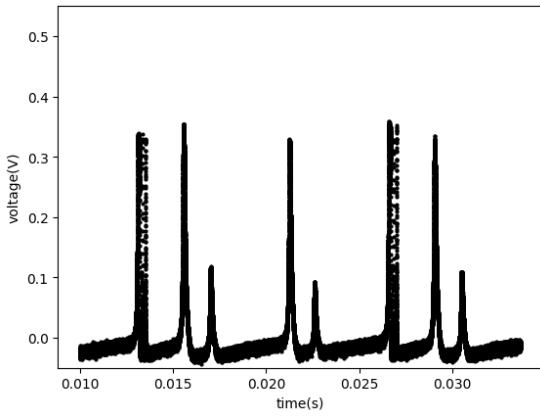


圖 33: 偏振角度  $60^\circ$

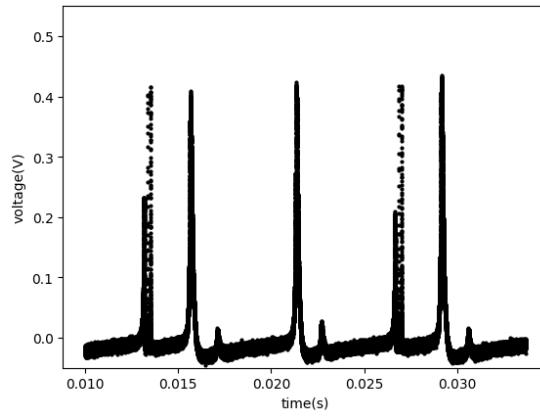


圖 34: 偏振角度  $75^\circ$

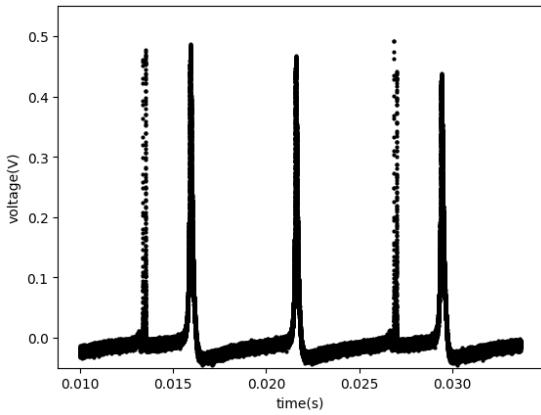


圖 35: 偏振角度  $90^\circ$

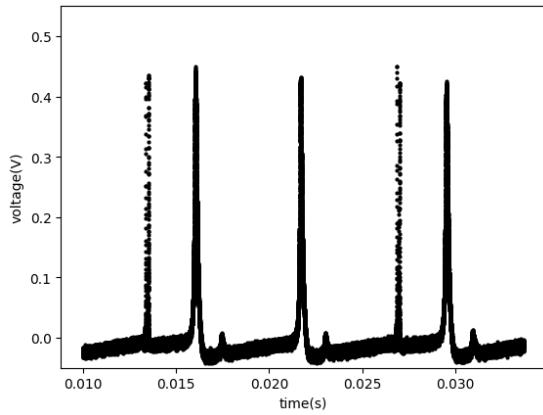


圖 36: 偏振角度  $105^\circ$

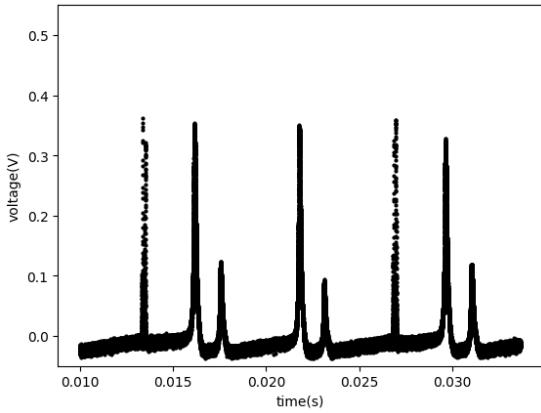


圖 37: 偏振角度  $120^\circ$

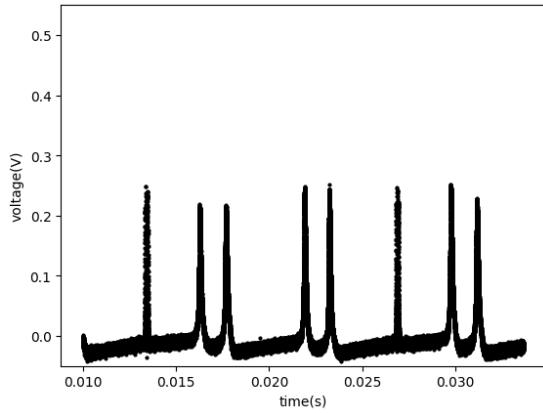


圖 38: 偏振角度  $135^\circ$

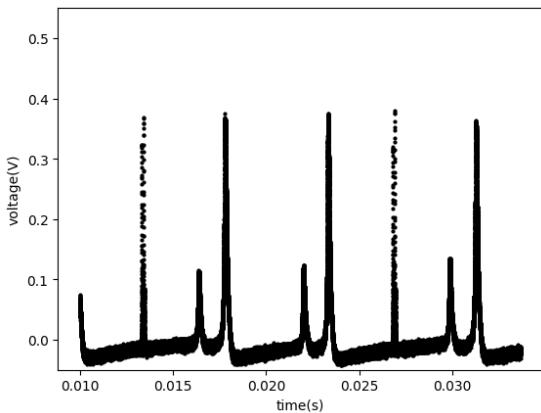


圖 39: 偏振角度  $150^\circ$

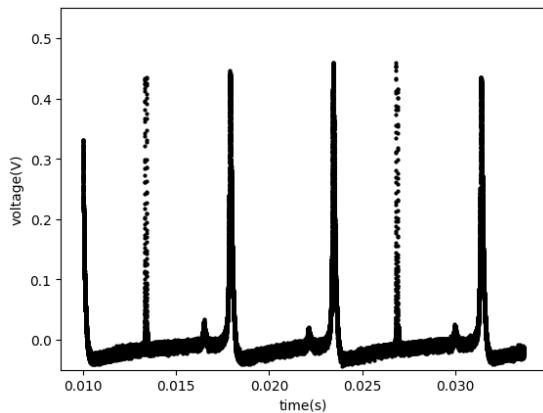


圖 40: 偏振角度  $165^\circ$

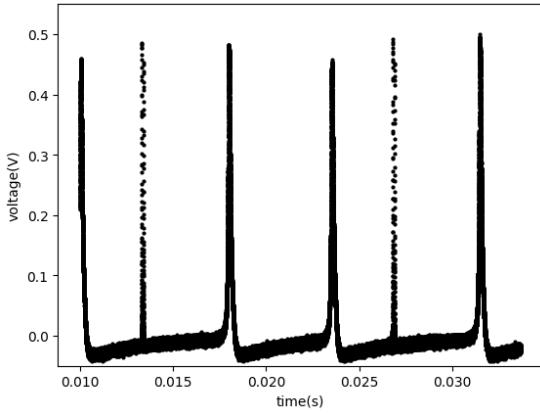


圖 41: 偏振角度  $180^\circ$

真，如圖 44。我們可以發現儘管使用不同擬合函數後計算的高斯光束參數大致相

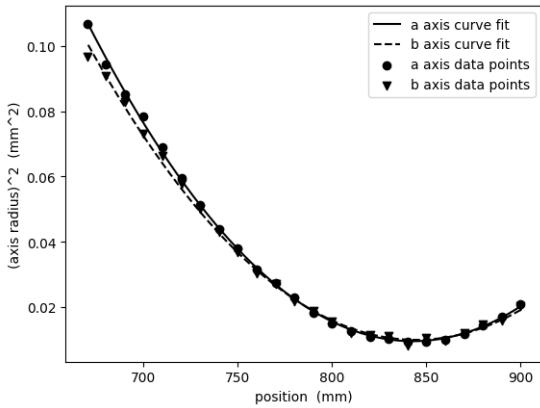


圖 42: A6 實驗: 實驗結果以及使用式  
(88) 擋合結果

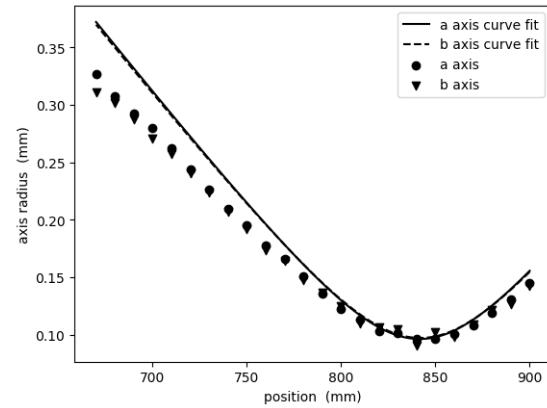


圖 43: A6 實驗: 實驗結果以及使用式

(91) 擋合結果

符合，然而從圖 43可得知測量數據和擋合結果仍有明顯差異，推測可能原因為: 高斯光束與其他不同模式的光相互混合，且由於其他模式的光束寬度普遍比高斯光束的還要寬，導致最終測量結果出現誤差，式意圖如圖 45。我們根據此概念進行以下修正:

### 1. 使用函數

$$w(z) = a * w_0 * \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda(z - z_0)}{\pi w_0^2} \right)^2} + (1 - a) * w'_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda(z - z_0)}{\pi w'_0^2} \right)^2} \quad (92)$$

對數據進行擋合，其中第一項為高斯光束，第二項為其他高階模式，而  $a$  為

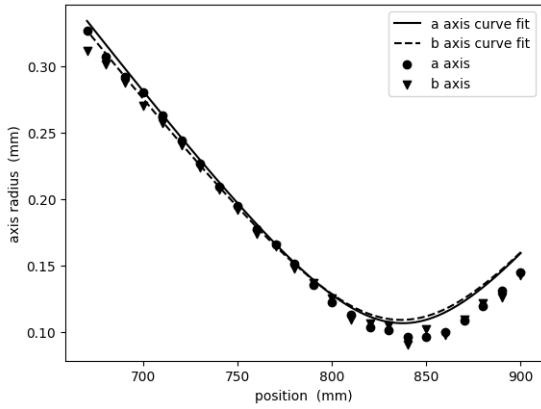


圖 44: A6 實驗: 使用所有數據點進行擬合導致擬合結果失真

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	A( $\text{mm}^2$ )	B(mm)	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	2.33	$-5.5 * 10^{-3}$	$3.3 * 10^{-6}$	0.99	$9.6 * 10^{-2}$	$8.416 * 10^2$	0.91
b axis	2.14	$-5.0 * 10^{-3}$	$3.0 * 10^{-6}$	0.99	$9.7 * 10^{-1}$	$8.420 * 10^2$	0.88

表 4: A6 實驗: 實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0(\text{mm})$	$w_0(\text{mm})$	$\theta(\text{rad})$	$Z_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$w_0(\text{mm})$	$\theta(\text{rad})$	$Z_0(\text{mm})$
a axis	842.8	0.097	0.0018	53.9	841.6	0.096	0.0017	45.9
b axis	844.5	0.099	0.0020	57.6	842.0	0.097	0.0020	46.8

表 5: A6 實驗: 高斯光束各項參數計算結果

高斯光束占的比例， $w_0$  和  $w'_0$  分別為高斯光束的光腰寬度和其他模式的光腰寬度，而我們預期  $w'_0$  應大於  $w_0$ 。

2. 為了方便，我們在對 a、b 軸進行擬合時，擬合函數中的光腰位置  $z_0$  直接使用表 5裡面的計算結果。
3. 擬合結果如圖 46和表 6。我們可以發現使用修正函數擬合後高斯光束的兩軸光腰寬度  $w_0$  都比表 5中的光腰寬度更小，符合我們的預期，而其他模式的光腰寬度  $w'_0$  比高斯光束光腰寬度  $w_0$  還要大，也符合我們的預期。

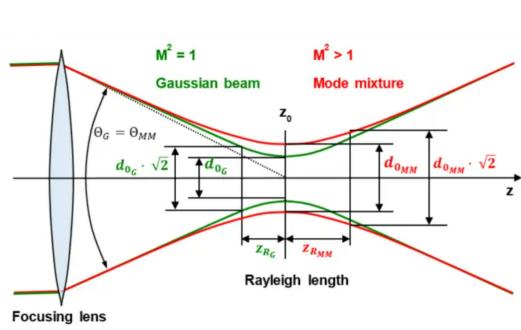


圖 45: A6 實驗:mode mixture 式意圖

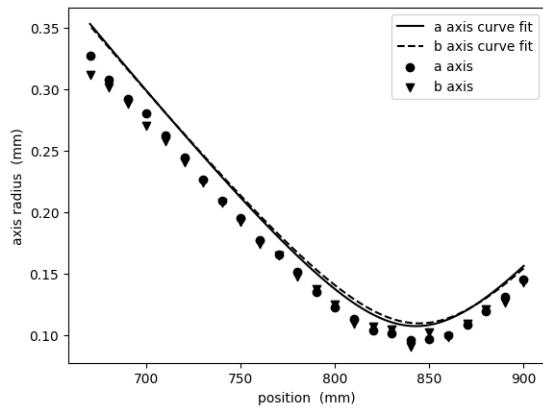


圖 46: A6 實驗: 實驗結果以及使用式 (92) 修正結果

擬合函數	式 (92)			
	a	$w_0$ (mm)	$w'_0$ (mm)	$R^2$
a axis	0.68	0.094	0.135	0.95
b axis	0.67	0.095	0.139	0.92

表 6: A6 實驗: 實驗數據使用修正函數擬合結果

### 3.7 A7 高斯光束的傳播特性實驗

本實驗透過測量未加透鏡時雷射光束在不同位置的光束寬度，並介由有無透鏡之間數據結果驗證式 (52)。雷射出光口放置於 1020mm 處，測量結果及擬合結果如圖

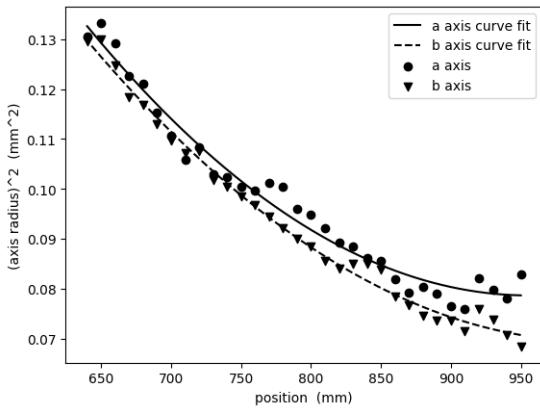


圖 47: A7 實驗: 實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

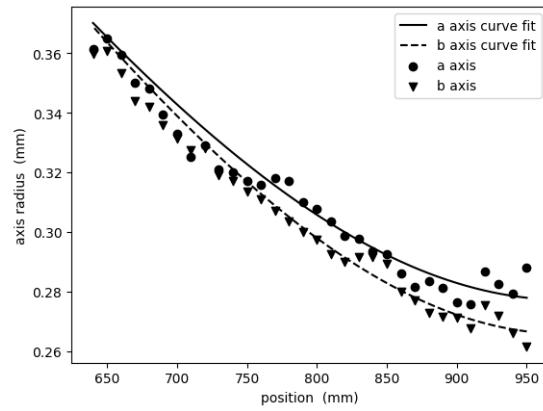


圖 48: A7 實驗: 實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

47、圖 48以及表 7，高斯光束各項參數計算結果見表 8。

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	A( $\text{mm}^2$ )	B(mm)	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$5.7 * 10^{-1}$	$-1.0 * 10^{-3}$	$5.4 * 10^{-7}$	0.97	$2.8 * 10^{-1}$	$9.775 * 10^2$	0.95
b axis	$5.2 * 10^{-1}$	$-9.1 * 10^{-4}$	$4.6 * 10^{-7}$	0.99	$2.7 * 10^{-1}$	$9.776 * 10^2$	0.88

表 7: A7 實驗: 實驗數據擬合結果

配合有透鏡的測量結果，即表 5，我們可以計算有透鏡時光腰位置到透鏡擺放位置的距離  $l'$  以及光腰的平方  $w_0^2$ ，並和本實驗光腰位置到透鏡擺放位置的距離  $l$  和光腰的平方  $w_0'^2$  做比較，見表 9。我們發現：

1. 比較表 8 中使用式 (88) 和式 (91) 擬合計算出的  $z_0$ ，發現使用式 (88) 對 a、b 軸的計算結果相差甚大，推測造成此誤差的原因為束腰位置不在我們的測量範圍內，且式 (88) 比式 (91) 多一個自由度，導致擬合結果誤差較大，而式 (91) 擬合結果雖然  $R^2$  值較低，但最終計算結果較接近實際值。
2. 表 9 中使用透鏡時光腰平方測量值小於預測值，而透鏡至光腰距離則是測量值大於預測值，我們推測造成此誤差的原因為透鏡實際焦距並非 150 mm：根

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0$ (mm)	$w_0$ (mm)	$\theta$ (rad)	$Z_0$ (mm)	$z_0$ (mm)	$w_0$ (mm)	$\theta$ (rad)	$Z_0$ (mm)
a axis	956.0	0.280	0.0007	381.3	997.6	0.277	0.0007	381.4
b axis	1003.1	0.263	0.0006	389.4	997.6	0.266	0.0007	350.7

表 8: A7 實驗: 高斯光束各項參數計算結果

據式 (52)，我們將  $d_2$  和  $w_{02}^2$  對焦距  $f$  偏微分，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_2}{\partial f} &= 1 + \frac{2(d_1 - f)f}{\left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2 + (d_1 - f)^2} - \frac{f^2}{\left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2 - (d_1 - f)^2} + \frac{2(d_1 - f)^2 f^2}{\left(\left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2 + (d_1 - f)^2\right)^2} \\ \frac{\partial w_{02}^2}{\partial f} &= -\frac{2f^2(f - d_1)w_{01}^2}{\left(\left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2 + (f - d_1)^2\right)^2} + \frac{2fw_{01}^2}{\left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2 + (f - d_1)^2}\end{aligned}\tag{93}$$

接著再將  $f = 150$  mm,  $d_1 = 4.5$  mm,  $w_{01} = 0.272$  mm 以及  $\lambda = 632.8 * 10^{-6}$  mm 帶入式 (93)，得知  $\partial d_2 / \partial f > 0$ ,  $\partial w_{02}^2 / \partial f < 0$ 。因此根據實驗的測量結果，推測透鏡的焦距應大於 150 mm。

	無透鏡	有透鏡	預測值	誤差 (%)
透鏡至光腰 距離 (mm)	4.5	131.2	128.1	2.4
光腰平方 (mm <sup>2</sup> )	0.0739	0.0097	0.0104	-6.7

表 9: A7 實驗: 有無透鏡之光腰位置到透鏡的距離與光腰的平方測量值與預測值。其中預測值由無透鏡的參數帶入式 (52) 所得，須注意式 (52) 中的  $d_1$  為此處的  $l$ ,  $d_2$  為  $l'$ ,  $w_{01}$  為此處的  $w_0$ ,  $w_{02}$  為此處的  $w'_0$

### 3.8 A8 高斯光束擴束及準直實驗

本實驗介由測量無透鏡以及使用擴束系統(透鏡焦距  $f_1 = 150\text{ mm}$ 、 $f_2 = 75\text{ mm}$ )後高斯光束在不同位置的光般大小，以驗證。無擴束系統實驗結果如圖 49、圖 50以及表 10，高斯光束參數計算結果見表 11。有擴束系統實驗結果如圖 51、圖 52以及表 12，高斯光束參數計算結果見表 13。

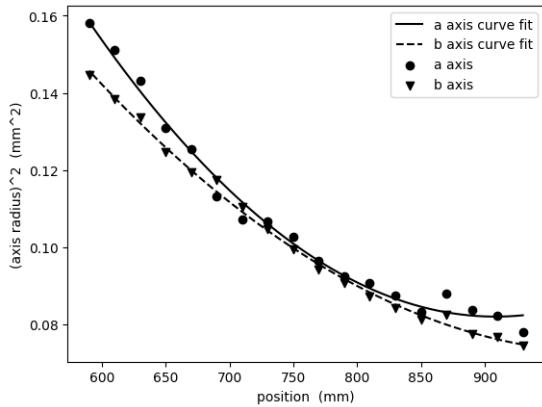


圖 49: A8 實驗: 無擴束系統實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

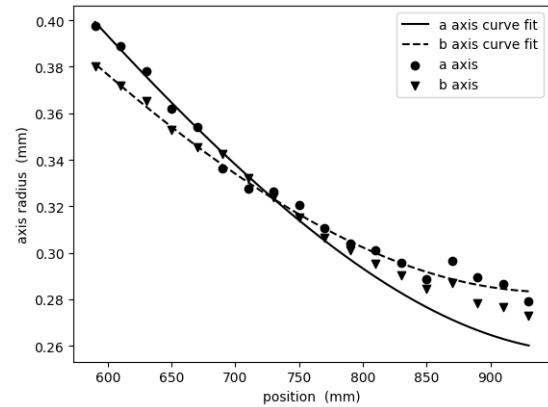


圖 50: A8 實驗: 無擴束系統實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	A( $\text{mm}^2$ )	B( $\text{mm}$ )	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$7.0 * 10^{-1}$	$-1.4 * 10^{-3}$	$7.5 * 10^{-7}$	0.98	$2.6 * 10^{-1}$	$9.800 * 10^2$	0.88
b axis	$5.1 * 10^{-1}$	$-8.7 * 10^{-4}$	$4.4 * 10^{-7}$	0.99	$2.8 * 10^{-1}$	$9.490 * 10^2$	0.98

表 10: A8 實驗: 無擴束系統實驗數據擬合結果

將表 11 和表 13 的計算結果帶入式 (70) 和式 (71)，結果見表 14，其中  $w_o$  和  $w_i$  為通過透鏡前後光腰半徑， $w_i^{predict}$  為將  $w_o$  帶入式 (71) 的預測結果， $s_o$  和  $s_i$  為通過透鏡前後光腰到透鏡的距離， $s_i^{predict}$  為將  $s_o$  帶入式 (70) 的預測結果。可以發現

- 根據表 14， $w_i^{predict}$  普遍大於  $w_i$ ，而  $s_i^{predict}$  小於  $s_i$ ，推測造成此誤差的可能原因為兩透鏡實際焦距不是  $f_1 = 150\text{ mm}$  和  $f_2 = 75\text{ mm}$ 。根據式 (70) 和式 (71)，將  $s_i^{predict}$  和  $w_i^{predict}$  對  $f_1$  和  $f_2$  偏微分，再將  $f_1 = 150$ 、 $f_2 = 75$ 、

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0(\text{mm})$	$w_0(\text{mm})$	$\theta(\text{rad})$	$Z_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$w_0(\text{mm})$	$\theta(\text{rad})$	$Z_0(\text{mm})$
a axis	908.6	0.28	0.0008	330.1	980.0	0.26	0.0008	328.6
b axis	999.1	0.27	0.0007	407.9	949.0	0.28	0.0007	398.1

表 11: A8 實驗: 無擴束系統高斯光束各項參數計算結果

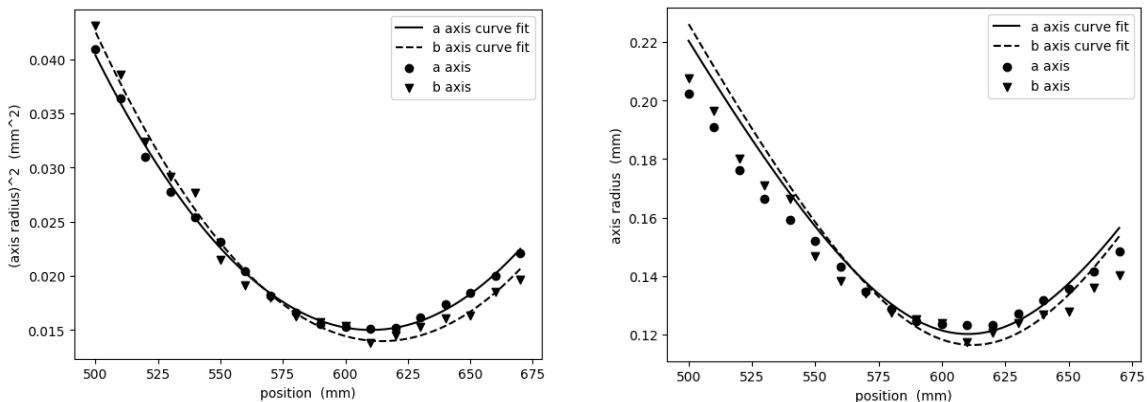


圖 51: A8 實驗: 有擴束系統實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

圖 52: A8 實驗: 有擴束系統實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	A( $\text{mm}^2$ )	B(mm)	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$7.9 * 10^{-1}$	$-2.6 * 10^{-3}$	$2.1 * 10^{-6}$	0.99	$1.2 * 10^{-1}$	$6.102 * 10^2$	0.87
b axis	$8.3 * 10^{-1}$	$-2.7 * 10^{-4}$	$2.2 * 10^{-7}$	0.99	$1.2 * 10^{-1}$	$6.121 * 10^2$	0.87

表 12: A8 實驗: 有擴束系統實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0(\text{mm})$	$w_0(\text{mm})$	$\theta(\text{rad})$	$Z_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$w_0(\text{mm})$	$\theta(\text{rad})$	$Z_0(\text{mm})$
a axis	610.2	0.12	0.0014	84.7	610.2	0.12	0.0016	71.8
b axis	614.6	0.12	0.0015	80.1	610.1	0.12	0.0017	68.3

表 13: A8 實驗: 有擴束系統高斯光束各項參數計算結果

$w_o = 0.277$  和  $s_o = 45.2$  帶入，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial f_1} s_i^{predict} &> 0 \\ \frac{\partial}{\partial f_2} s_i^{predict} &< 0 \\ \frac{\partial}{\partial f_1} w_i^{predict} &< 0 \\ \frac{\partial}{\partial f_2} w_i^{predict} &> 0\end{aligned}\tag{94}$$

最終推測可能焦距  $f_1$  的透鏡實際焦距大於  $f_1$ ，與節 3.7 的結果符合，而焦距  $f_2$  的透鏡實際焦距小於  $f_2$ 。

擬合函數	式 (88)			式 (91)		
	a axis	b axis	兩軸平均	a axis	b axis	兩軸平均
$w_o$ (mm)	0.286	0.269	0.277	0.257	0.283	0.270
$w_i$ (mm)	0.122	0.118	0.120	0.120	0.116	0.118
$w_i^{predict}$ (mm)	0.143	0.135	0.138	0.128	0.141	0.135
誤差 (%)	-14.6	-12.5	-13.0	-6.3	-17.7	-12.6
$s_o$ (mm)	66.4	24.1	45.2	5.0	25.9	15.5
$s_i$ (mm)	139.8	135.4	137.6	139.8	135.4	137.6
$s_i^{predict}$ (mm)	129.1	118.5	123.8	113.8	119.0	116.4
誤差 (%)	8.2	14.2	11.1	22.8	13.8	2.2

表 14: A8 實驗: 計算參數與使用式 (70) 和式 (71) 預測結果

### 3.9 A9 光束品質分析實驗

本實驗透過有無使用菲涅爾透鏡，紀錄高斯光束在不同位置的光般大小，並計算光束品質因數  $M^2$ 。無菲涅爾透鏡實驗結果如圖 53、圖 54、表 15，高斯光束參數計算結果見表 16。有菲涅爾透鏡實驗結果如圖 55、圖 56、表 17，高斯光束參數計算結果見表 18。可以看出大部分光束品質  $M^2$  在使用菲涅爾透鏡後普遍變得較大，符合我們的預期。

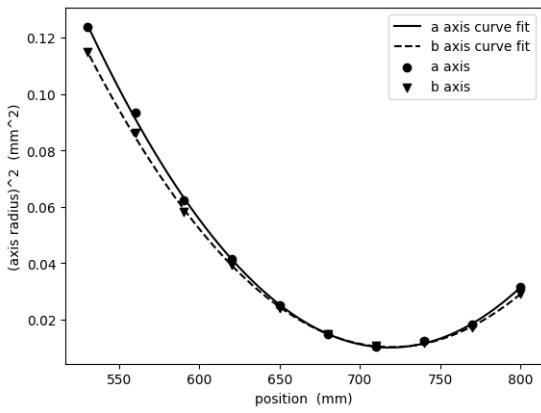


圖 53: A9 實驗: 無菲涅爾透鏡實驗結果  
以及使用式 (88) 擬合結果

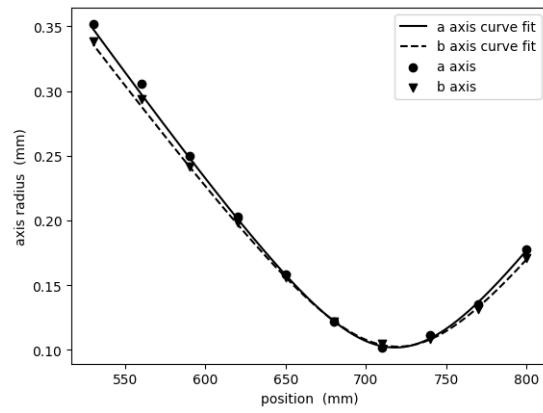


圖 54: A9 實驗: 無菲涅爾透鏡實驗結果  
以及使用式 (73) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (73)			
	A( $\text{mm}^2$ )	B( $\text{mm}$ )	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$	$M^2$
a axis	1.7	$-4.6 * 10^{-3}$	$3.2 * 10^{-6}$	0.99	$1.0 * 10^{-1}$	$7.181 * 10^2$	0.99	0.89
b axis	1.5	$-4.2 * 10^{-4}$	$2.9 * 10^{-7}$	0.99	$1.0 * 10^{-1}$	$7.196 * 10^2$	0.99	0.86

表 15: A9 實驗: 無菲涅爾透鏡實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)					式 (73)				
	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$M^2$	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$M^2$
	mm	mm	rad	mm		mm	mm	rad	mm	
a axis	718.5	0.10	0.0018	56.2	0.90	718.1	0.10	0.0019	51.5	0.89
b axis	719.6	0.10	0.0017	59.5	0.86	719.6	0.10	0.0019	52.2	0.86

表 16: A9 實驗: 無菲涅爾透鏡高斯光束各項參數計算結果

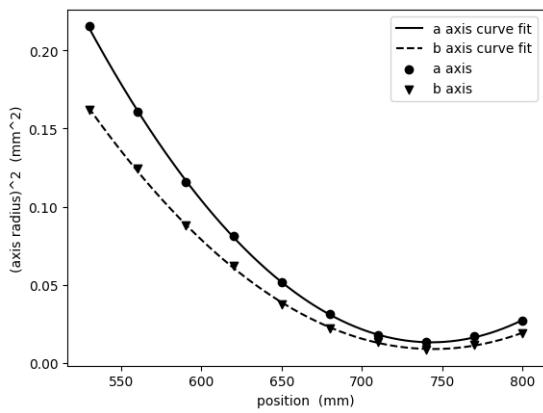


圖 55: A9 實驗: 有菲涅爾透鏡實驗結果  
以及使用式 (88) 擬合結果

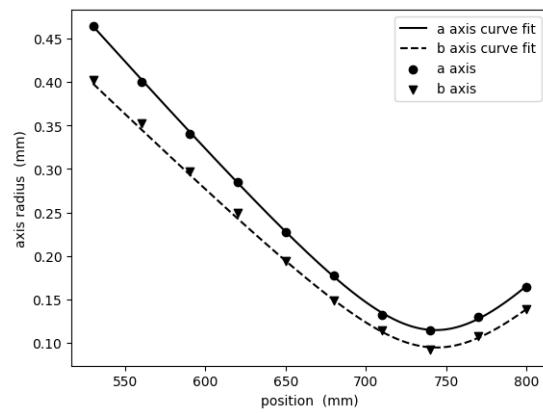


圖 56: A9 實驗: 有菲涅爾透鏡實驗結果  
以及使用式 (73) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (73)			
	A( $\text{mm}^2$ )	B( $\text{mm}$ )	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$	$M^2$
a axis	2.5	$-6.6 * 10^{-3}$	$4.4 * 10^{-6}$	0.99	$1.1 * 10^{-1}$	$7.433 * 10^2$	0.99	1.20
b axis	1.9	$-5.0 * 10^{-4}$	$3.4 * 10^{-7}$	0.99	$9.4 * 10^{-2}$	$7.437 * 10^2$	0.99	0.85

表 17: A9 實驗: 有菲涅爾透鏡實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)					式 (73)				
	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$M^2$	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$M^2$
	mm	mm	rad	mm		mm	mm	rad	mm	
a axis	743.1	0.11	0.0021	54.5	1.20	743.3	0.11	0.0017	65.4	1.20
b axis	744.2	0.09	0.0018	51.3	0.87	743.7	0.09	0.0020	48.7	0.85

表 18: A9 實驗: 有菲涅爾透鏡高斯光束各項參數計算結果

### 3.10 A10 雷射共振腔設計實驗

本實驗介由使用不同曲率半徑的雷射後腔鏡，以及不同的雷射槍長，並使用 CCD 相機記錄不同位置的光般大小。實驗結果如圖 57、58、59、60、61、62、63、64、65、66，其中  $R$  表示後腔鏡曲率半徑， $l$  表示後腔鏡座標。高斯光束參數計算結果見表 19、21、23、25、27，高斯光束各項參數計算結果見表 20、22、24、26、28。我們可以發現瑞利長度  $Z_0$  和光腰寬度  $w_0$  隨著後腔鏡曲率半徑變大而增加，與式 (86) 的預測結果相符。而改變後腔鏡位置主要改變束腰位置  $z_0$ 。此外因後腔鏡曲率半徑  $R = 2000\text{ mm}$  的光斑非常不穩定，測量出的 a、b 軸半徑上下波動非常嚴重，導致使用式 (88) 的高斯參數計算結果較不符合預期，然而使用式 (91) 的結果符合預期。

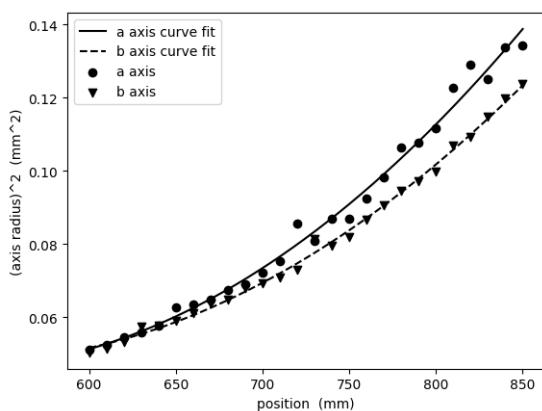


圖 57: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$   
實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

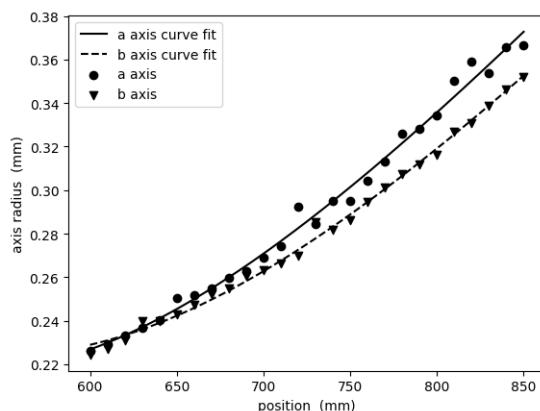


圖 58: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$   
實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	A( $\text{mm}^2$ )	B( $\text{mm}$ )	C	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$2.8 * 10^{-1}$	$-8.9 * 10^{-4}$	$8.6 * 10^{-7}$	0.99	$2.2 * 10^{-1}$	$5.245 * 10^2$	0.99
b axis	$2.5 * 10^{-1}$	$-7.7 * 10^{-4}$	$7.3 * 10^{-7}$	0.99	$2.2 * 10^{-1}$	$5.472 * 10^2$	0.99

表 19: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$
	mm	mm	rad	mm	mm	mm	rad	mm
a axis	520.8	0.21	0.0009	231.4	524.5	0.21	0.0009	230.7
b axis	527.4	0.22	0.0009	256.4	547.2	0.22	0.0009	249.0

表 20: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  高斯光束各項參數計算結果

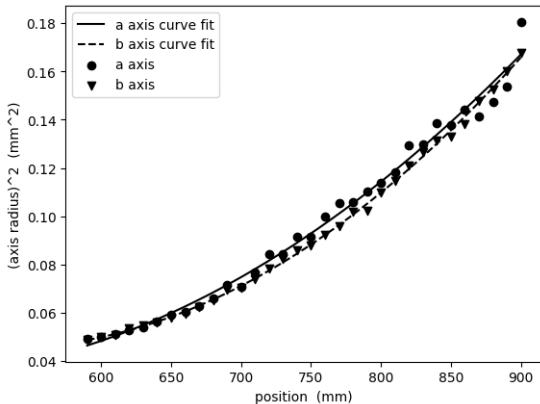


圖 59: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

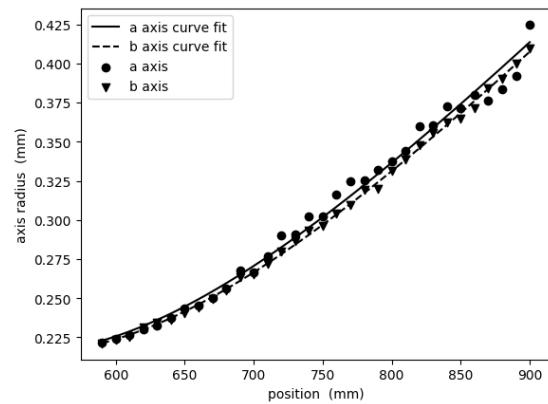


圖 60: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	$A(\text{mm}^2)$	$B(\text{mm})$	$C$	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$1.7 * 10^{-1}$	$-5.9 * 10^{-4}$	$6.6 * 10^{-7}$	0.99	$2.1 * 10^{-1}$	$5.240 * 10^2$	0.99
b axis	$2.9 * 10^{-1}$	$-9.2 * 10^{-4}$	$8.7 * 10^{-7}$	0.99	$2.1 * 10^{-1}$	$5.313 * 10^2$	0.99

表 21: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$
	mm	mm	rad	mm	mm	mm	rad	mm
a axis	449.1	0.18	0.0008	225.5	524.0	0.21	0.0009	227.3
b axis	527.8	0.21	0.0009	228.4	531.3	0.21	0.0009	227.9

表 22: A10 實驗: $R = 500\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  高斯光束各項參數計算結果

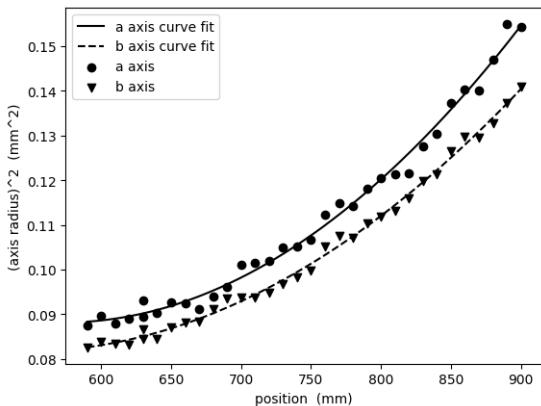


圖 61: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

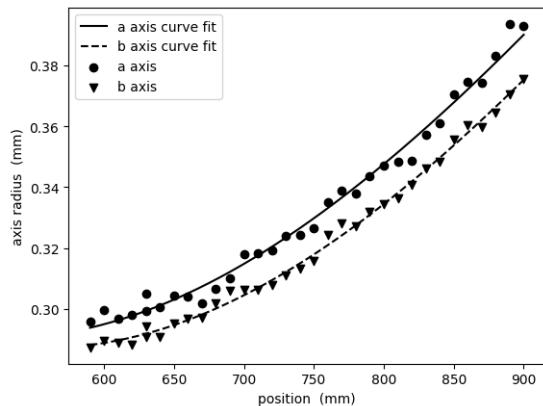


圖 62: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	$A(\text{mm}^2)$	$B(\text{mm})$	$C$	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$2.9 * 10^{-1}$	$-7.1 * 10^{-4}$	$6.2 * 10^{-7}$	0.99	$2.9 * 10^{-1}$	$5.244 * 10^2$	0.99
b axis	$2.2 * 10^{-1}$	$-5.0 * 10^{-4}$	$4.6 * 10^{-7}$	0.99	$2.9 * 10^{-1}$	$5.555 * 10^2$	0.99

表 23: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$
	mm	mm	rad	mm	mm	mm	rad	mm
a axis	572.7	0.30	0.0008	377.2	524.4	0.29	0.0007	418.3
b axis	543.9	0.29	0.0007	419.7	555.5	0.29	0.0007	409.3

表 24: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  高斯光束各項參數計算結果

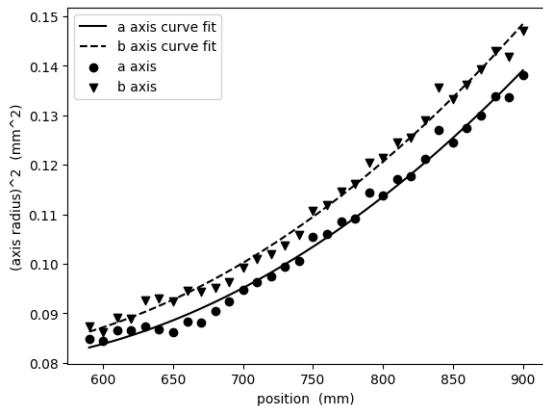


圖 63: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

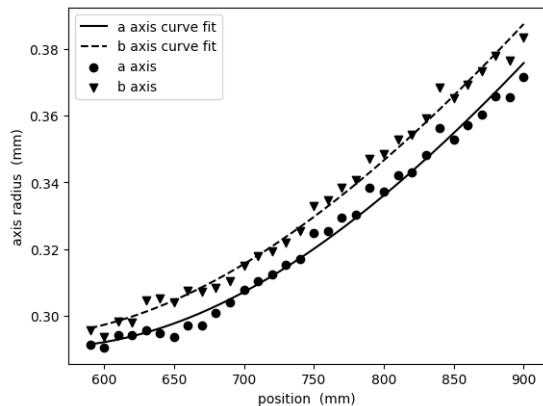


圖 64: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	$A(\text{mm}^2)$	$B(\text{mm})$	$C$	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$1.7 * 10^{-1}$	$-3.5 * 10^{-4}$	$3.6 * 10^{-7}$	0.99	$2.9 * 10^{-1}$	$5.563 * 10^2$	0.99
b axis	$1.6 * 10^{-1}$	$-3.5 * 10^{-4}$	$3.7 * 10^{-7}$	0.99	$2.9 * 10^{-1}$	$5.315 * 10^2$	0.99

表 25: A10 實驗: $R = 1000\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$	$z_0$	$w_0$	$\theta$	$Z_0$
	mm	mm	rad	mm	mm	mm	rad	mm
a axis	491.4	0.28	0.0006	472.9	556.3	0.29	0.0007	418.9
b axis	474.2	0.29	0.0006	468.7	531.4	0.29	0.0007	427.7

表 26: A10 實驗:  $R = 1000\text{mm}$   $l = 30\text{mm}$  高斯光束各項參數計算結果

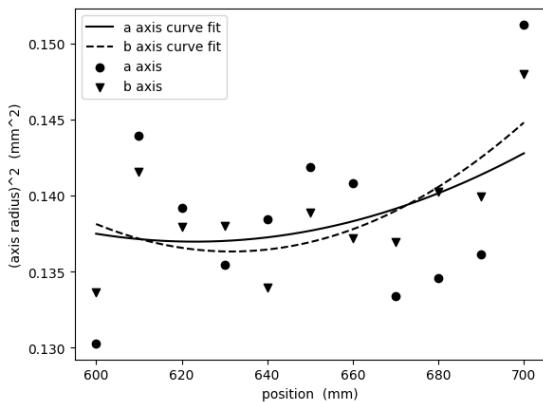


圖 65: A10 實驗:  $R = 2000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (88) 擬合結果

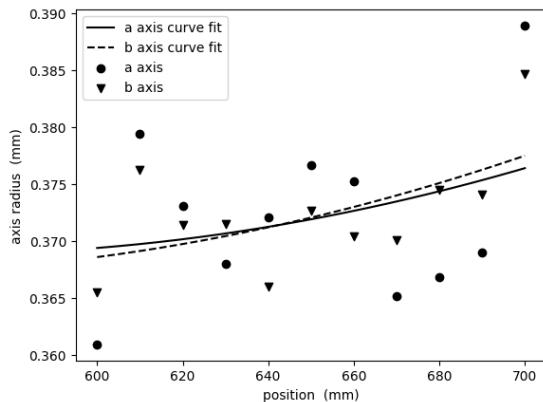


圖 66: A10 實驗:  $R = 2000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗結果以及使用式 (91) 擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)		
	$A(\text{mm}^2)$	$B(\text{mm})$	$C$	$R^2$	$w_0(\text{mm})$	$z_0(\text{mm})$	$R^2$
a axis	$5.2 * 10^{-1}$	$-1.2 * 10^{-3}$	$9.8 * 10^{-7}$	0.11	$3.7 * 10^{-1}$	$5.625 * 10^2$	0.10
b axis	$8.6 * 10^{-1}$	$-2.3 * 10^{-3}$	$1.8 * 10^{-6}$	0.50	$3.7 * 10^{-1}$	$5.398 * 10^2$	0.37

表 27: A10 實驗:  $R = 2000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  實驗數據擬合結果

擬合函數	式 (88)				式 (91)			
	$z_0$ mm	$w_0$ mm	$\theta$ rad	$Z_0$ mm	$z_0$ mm	$w_0$ mm	$\theta$ rad	$Z_0$ mm
a axis	623.1	0.37	0.0010	373.5	562.5	0.37	0.0005	675.3
b axis	631.6	0.37	0.0013	274.3	539.8	0.37	0.0005	669.1

表 28: A10 實驗:  $R = 2000\text{mm}$   $l = 0\text{mm}$  高斯光束各項參數計算結果

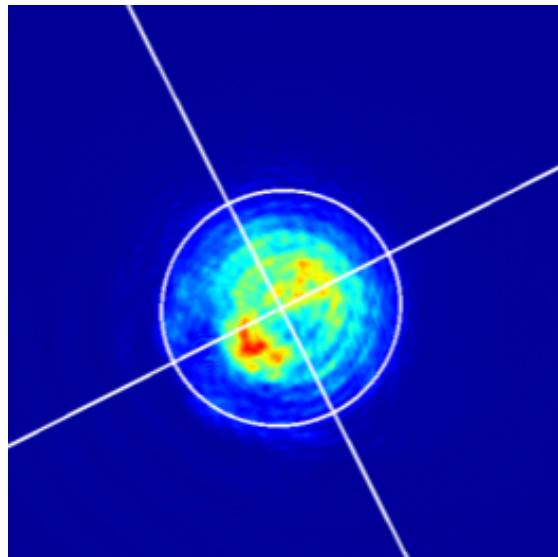


圖 67: 後腔鏡曲率半徑  $R = 2000\text{mm}$  光斑

## 4 回答問題

### 4.1 問題一 [6]

氦氖有這麼多能階，為何出光的波長只有  $632.8\text{nm}$  而不會不小心調到符合其他波長的雷射光？

不同雷射所能輸出之光的性質與其內部的增益介質相關，而氦氖雷射顧名思義便是利用氦氖的混合氣體作為增益介質。

在共振腔中氦氣與氖氣的比例大約為 10 比 1，這樣的系統為一四階系統 (four level system)，電子會與氦氣發生非彈性碰撞，使氦原子由 ground state  $1^1S_0$  激發至  $2^3S_1$  或  $2^1S_0$ ，這些 state 的能量分別為  $19.81\text{ eV}$  和  $20.61\text{ eV}$ ，而正好這兩個能量

個別非常接近氖氣的其中兩個 state:  $2S_2$ (18.7 eV) 和  $3S_2$ (20.66 eV) 非常接近，反應式如下：



其中 g.s 代表 ground state，而兩者能量差距可以由原子的動能提供。

此時便會發生所謂 population inversion 的現象，該現象描述在高能階的電子數量反而比低能階數量多的情形，處於激發態的氖氣將下降至附近的低能階並以光子的形式釋放能量，如圖 (68) 所示：由圖可見得氦氖混和氣體可以產出波長為

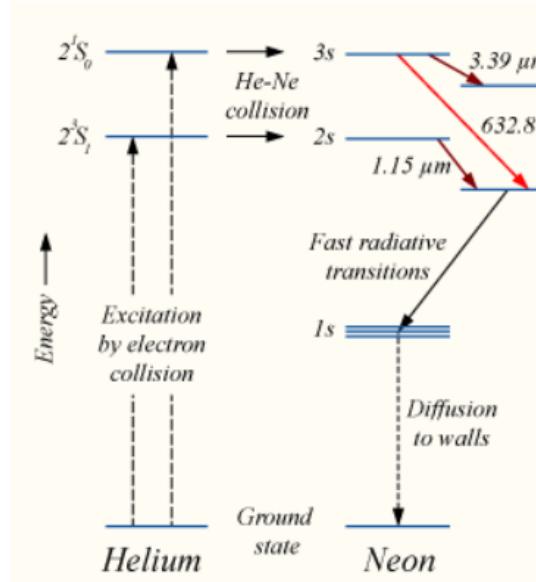


圖 68: HeNe 雷射能階示意圖

3.39 $\mu\text{m}$  和 1.15 $\mu\text{m}$  的紅外光和波長為 632 的可見光，而這些紅外光會被腔內的石英 (quartz) 所吸收最終得到單一輸出的可見光。

## 4.2 問題二 [7]

為何只要兩面反射鏡夠平行，任意長度的共振腔都會有雷射？

在一般情況下若要產生雷射則其共振腔需滿足自再現，意即在共振腔往返一輪後高斯光束應等同於自身，而這個現象可以用參數  $g$  來描述共焦腔的特質。 $g$  參數的定

義為：

$$g_i = 1 - \frac{L}{\rho_i} \quad (95)$$

其中  $L$  為腔長， $\rho_i$  則為對應反射鏡之取率半徑，而若要符合穩定則兩反射鏡的  $g$  參數的乘積需介於 0 和 1 之間：

$$0 < g_1 g_2 < 1 \quad (96)$$

當兩反射足夠平行時則兩反射鏡的中心部分可視作兩平面鏡，平面鏡的取率半徑大小為無限大，則此時不論  $L$  是多少，雷射的穩定條件皆可被滿足。

### 4.3 問題三 [8]

請用自己的話解釋一次 Confocal Fabry Perot Etalon 的運作原理，並計算精細常數。

Fabry Perot Etalon 即為 Fabry Perot 干涉儀，是由兩個部分透射的反射鏡相隔一段距離所組成光學腔體，當光從一端（起始端）打入腔體時，其將於另一端（出光端）的反射鏡同時發生透射反射，此時反射的光再次打到起始端的反射鏡，發生二次反射，此二次反射光同樣會在出光端的發生透射與反射，這時透射的光便與最初射出的光有了光程差，其差正為  $2L$ （腔長的兩倍），進而產生干涉的效果。

而 Confocal Fabry Perot Etalon 則是以兩共焦的反射鏡作為起始端與出光端，其構造大約如圖 69 所示：由圖可以看到由上方射出的透射光與下方射出的透射光之光

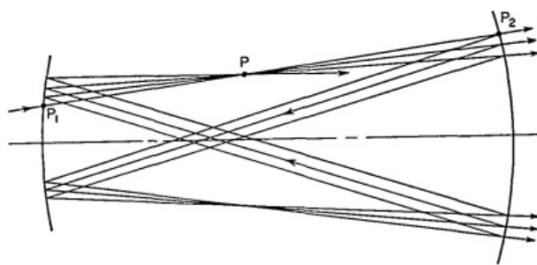


圖 69: Confocal Fabry Perot Etalon 構造圖

程差為  $[(4m+2)-(4m)]L$

精細常數 ( $F$ ) 可以被定義為：

$$F = \frac{\Delta\nu_f}{\Delta\nu_m} \quad (97)$$

其中  $\Delta\nu_f$  為自由光譜範圍 (推導可見章節 1.2.1)，而  $\Delta\nu_m$  則是儀器的頻寬 (instrumental width)，指儀器所能辨別之最小頻差，其可表示為：

$$\Delta\nu_m = \frac{c(1 - R^2)}{4\pi LR} \quad (98)$$

結合式 (16) 可以得到：

$$F = \frac{\pi R}{1 - R^2} \quad (99)$$

#### 4.4 問題四

為何只有共振腔內的光路會有雷射穿過空氣後燒起來的感覺，而腔外的雷射沒有。

由於增益僅發生在具有增益介質 (氦氖) 的腔內而非暴露於空氣的腔外光路，且腔內包含了各個方向的散射光，而腔外則以是單方向的同調光，因此使得腔內看似燒起來一般，而腔外則無。

#### 4.5 問題五 [9]

請解釋為何相鄰的縱模其偏振為正交。

相鄰縱模偏振為正交的成因可以用模式競爭來解釋，各個縱模會有自己偏振方向的「偏好」，在模式競爭的作用下，在中心模態為某一方向的線偏振，而在兩側的其他縱模則被迫發生偏振翻轉 (polarization flip) 才得以「存活」，這個 flip 將導致最終相鄰兩縱模的偏振正交的結果。

### 5 結論

在本實驗中，我們先從 A1 實驗中了解半外腔雷射的基本構造以及其原理，接著從實驗 A2、A3、A5 中使用共焦球面掃描干涉儀驗計算干涉儀腔長、半外腔雷射腔長以即驗證還氖雷射兩相臨模式為正交偏振。在實驗 A4、A6 中使外半外腔雷射觀察不同模式的光束形狀以及其在不同位置的光束寬度，並使用兩種不同的函數擬合數據以及計算高斯光束參數。在實驗 A7 中我們移除了位於出光口的透鏡，並測量其高斯光束參數，並與實驗 A6 的結果作比較。實驗 A8 中我們比較有無使用擴束

系統的高斯光束參數。在實驗 A9 中，透過菲涅爾透鏡使光束測量光束的品質因數  $M^2$ ，並與無菲涅爾透鏡的實驗結果做比較。實驗 A10 中透過改變後腔鏡曲率半徑以及位置，計算出高斯光束參數後互相比較。

## References

- [1] Eugene Hecht. *OPTICS, 5th Edition.* Pearson, 2017.
- [2] Anthony E. *Lasers by Siegman.* Plenum Publishers, 1986.
- [3] Amnon Yariv. *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications.* Plenum Publishers, 1994.
- [4] Orazio Svelto. *Principles of Lasers, 5th Edition.* Springer, 1998.
- [5] P. Hariharan. Chapter 6 - the laser as a light source. In P. Hariharan, editor, *Basics of Interferometry*, pages 45–55. Academic Press, San Diego, 1992.
- [6] Robert A. Meyers. *Encyclopedia of Physical Science and Technology.* 2001.
- [7] 呂百達. *Laser optics : Laser beam propagation and beam quality control.* 四川大學出版社, 1992.
- [8] Michael Hercher. The spherical mirror fabry-perot interferometer. *Appl. Opt.*, 7(5):951–966, May 1968.
- [9] Ester K. Halse. Polarization properties of he-ne-lasers. *Optics Communications*, 31(2):206–210, 1979.