

A3 光激發原子吸收實驗



週一班 第四組

B09202037 李翊銓 (右)

B09202003 陳雙雙 (中)

B09202027 林柏喬 (左)

一、實驗目的：

了解光學激發磁量儀(Optical pumping magnetometer, OPM)的運作原理。並使用鹼金族元素鉷(Rubidium, Rb)實際測量地球磁場，並探討 Rb^{87} 與 Rb^{85} 的 g-factor，和 Rb 原子吸收光的截面積。

二、實驗原理：

1. Rb 原子結構：

根據精細結構(Fine structure)，Rb 的總自旋數 J 可寫成：

$$J = L + S$$

其中 L 為最外層電子軌域的角動量， S 為電子自旋角動量。考慮超精細結構(Hyperfine structure)，則可再修正 Rb 的總自旋數為 F ：

$$F = J + I$$

I 為核角動量。

在自然中的鉷原子以 Rb^{85} (佔約 72.17%)與 Rb^{87} (佔約 27.83%)為主，兩者

的核自旋數 I 並不相同， Rb^{87} 的 I 為 $3/2$ ，而 Rb^{85} 的 I 為 $5/2$ 。兩種 Rb 原子在基態時($L=0$)，因為最外層電子為 $S=\pm 1/2$ 自旋，因此 Rb^{87} 的總角動量 F 值有 1 或 2； Rb^{85} 則有 $F=2, 3$ ，兩者電子基態根據 Hyperfine structure 理論都具備兩個額外的能階。

在 $L=1$ state， Rb^{85} 與 Rb^{87} 均有兩道根據 Fine structure 理論預測之能階，我們會將基態標示為 $^2S_{1/2}$ ， $L=1$ 的兩個 state 標示為 $^2P_{1/2}$ 與 $^2P_{3/2}$ ； $^2P_{1/2}$ 和 $^2S_{1/2}$ 之間的越遷被稱為 D_1 transition。

2. 塞曼效應(Zeeman Effect)：

在外加磁場的環境下，對於電子軌域有 Hamiltonian 的擾動：

$$H'_Z = -(\mu_s + \mu_l) \cdot B_{\text{ext}}$$

其中的 μ_s 代表電子自旋產生的磁矩， μ_l 則是電子軌道角動量產生的磁矩，若無軌道角動量可省略。根據古典物理的計算，理應孤立電子環繞一特定圓形軌域產生的磁矩為：

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

其與電子環繞圓形軌域之角動量為：

$$S = I \times \omega = mr^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

因此磁矩與角動量有著比例關係：

$$\mu = \left(\frac{e}{2m}\right) S = \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5} \text{eV/T}$$

由此我們能知道電子在 Spin-up 或 Spin-down 在不同強度的外加磁場下，會有能階的分裂，為 Zeeman effect， μ_B 為波爾磁子：

$$E_0 \pm \frac{1}{2} \mu_B B_{\text{ext}}$$

我們能得知能階差會有：

$$\Delta E = \mu_B B_{\text{ext}}$$

然而實驗測量的值與理論有著常數大小的差距：

$$\Delta E = g_J \mu_B B_{\text{ext}}$$

該常數 g_e 為電子的 g factor，我們稱為 Lande g-factor(g_J)，在不同的能階下：

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

考慮 Hyperfine structure，也就是原子和角動量 I ， g_J 改寫成 g_F ：

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + S(S+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}$$

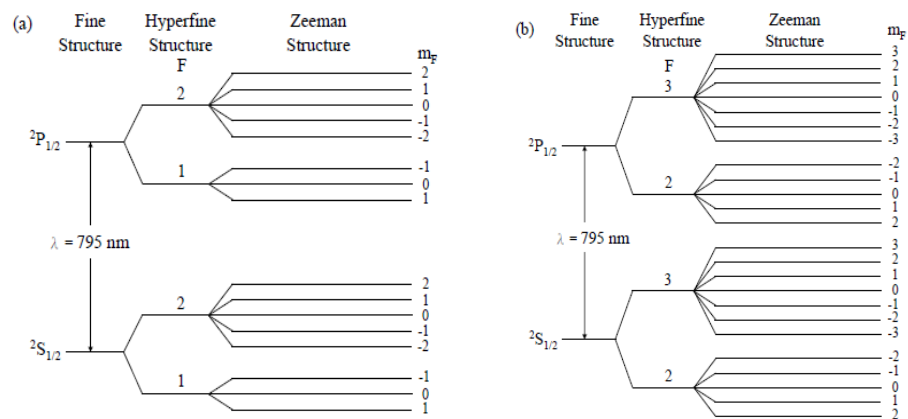
因此能階差改寫為：

$$\Delta E = g_F \mu_B B_{\text{ext}}$$

基態下的 Rb^{87} 與 Rb^{85} 的 Lande g-factor 均為 2， $g_f(\text{Rb}^{87}) = 1/2$ 、 $g_f(\text{Rb}^{85}) = 1/3$ 。

3. Rb 原子在磁場下的能階：

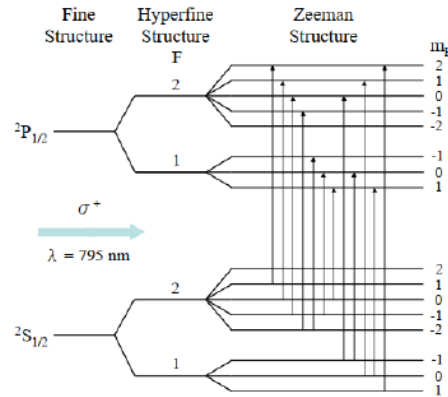
綜上所述，Zeeman effect 使 Hyperfine structure 的每一個能階在有外加磁場時，從 F 分裂成 $2F+1$ 個能階，因此 Rb^{85} 在 $J=0$ 和 $J=1$ 時各有 3 與 7 個 Zeeman 能階， Rb^{87} 則有 3、5 個能階。見下圖：



圖：摘自光激發原子吸收實驗講義

4. 光學激發(Optical Pumping):

光學激發為使用圓偏振極化光改變原子中電子能階分布:



接著電子自發性衰退，且符合選擇定則(Selection rule), $\Delta F = 0, \pm 1$ 、 $\Delta m_F = 0, \pm 1$ 。如下圖示:

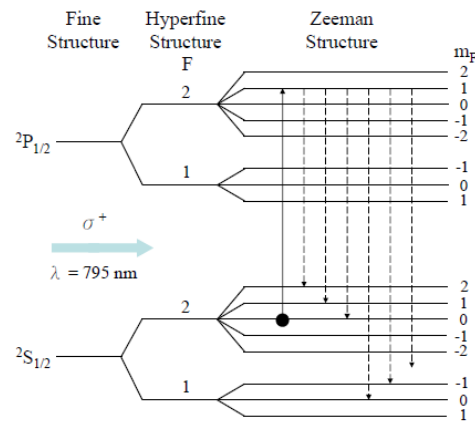


圖: Rb^{87} 的 Selection rule

重複激發、躍升後，電子被激發至 $F=2$ 、 $m_F=2$ ，停止。在對應拉曼進動頻率 ω_L ，我們使用該頻率轉動磁場，能使電子週期性的從激發態轉為基態；若給定入射光強固定，則接收到經過原子團的出射光強也會有週期性變化。而帶有自旋光的入射光能防止原子撞擊氣壁的鬆弛機制發生，讓所有的電子與原子的極化方向一致。

因此測量拉曼進動頻率 ω_L :

$$\Delta E = \omega_L \hbar$$

ΔE 為上述提及的 Zeeman 能階差。

$$\omega_L = \frac{1}{\hbar} \Delta E = \frac{g_F \mu_B}{\hbar} B = \gamma B$$

γ 被稱為迴轉磁比，已知磁場的情況下，我們若測得拉曼近動頻率，便能求得該原子能階的 g factor，在已知 g factor 的前提下，也可以此測量極弱之磁場，即為 OPM 測量磁場法。

三、實驗步驟

實驗裝置示意圖如下：



其中 RF Signal generator 未呈現。

1. 前置作業

- (1) 將 H-field、V-field、Sweep field 的旋鈕皆轉到最小。
- (2) 按下 Cell temp 開關，讓 Cell 加熱。
- (3) 將抽屜中的指南針平放於桌面，並將導軌擺放平行於地磁水平分量的方向。
- (4) 等待直到 Cell temp 及 Lamp temp 指示燈亮起，代表儀器達到工作溫度，可以開始實驗。

2. 零垂直場校正

- (1) 把指南針平放在 Cell 頂部，此時指南針的尖端因地磁鉛直分量的影響，應垂向地面。
- (2) 逐漸增加 V-field 的電流，直到指南針的尖端抬起至平行於地面。

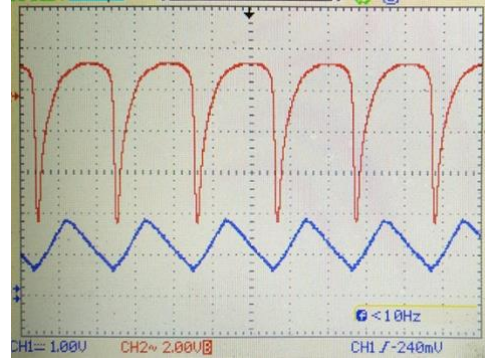
3. 觀察 Optical pumping 訊號

- (1) 以波形按鍵選擇方波作為 Sweep field 訊號，並增加其幅度。
- (2) 改變 Sweep field 方向，讓 Sweep field 方向與地球磁場水平分量的方向相反。
- (3) 拿開指南針。
- (4) 透過旋轉偏振片、調整 Sweep field 幅度和 V-field 幅度，直到觀察到最明顯的 Optical pumping 訊號。

4. 量測 g-factor

- (1) V-field amplitude 和偏振片角度保持不變。
- (2) 以波形按鍵選擇三角波作為 Sweep field 訊號。
- (3) 調整 Sweep field amplitude，用示波器讀值確保其小於 1V。

- (4) 將 H-field 電流設為 0.200A。
- (5) 利用指南針將 H-field、Sweep field 設定為與地球磁場的水平分量同方向。
- (6) 打開 RF signal generator。
- (7) 將 RF signal generator 的頻率設為 100kHz，並開始將頻率往上調，直到 Detector 於示波器中的訊號第一次出現類似右圖 Channel 2 的波形（此為 Rb⁸⁵ 的共振訊號）。紀錄此時 H-field 電流 I_H 及共振頻率 $\nu_{85,1}$ 。
- (8) 將頻率繼續往上調，直到第二次出現類似的波形（此為 Rb⁸⁷ 的共振訊號），紀錄此共振頻率 $\nu_{87,1}$ 。
- (9) 反轉 H-field 方向，並保持 Sweep field amplitude 不變。
- (10) 同樣地，調整 RF signal generator 的頻率，可以得到共振頻率 $\nu_{85,2}$ 以及 $\nu_{87,2}$ 。
- (11) 則以



$$\nu_{85} = \frac{\nu_{85,1} + \nu_{85,2}}{2}$$

計算 ν_{85} 做為 Rb⁸⁵ 的共振頻率。以此排除地球磁場的水平分量和 Sweep field 的直流分量的影響。

- (12) 以相同方法計算 ν_{87} 。
- (13) 以下式計算 H-field 的值：

$$H = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu N I}{R}$$

其中 μ 為磁導率， $N = 125$ 為水平 Helmholtz 線圈匝數， $R = 0.2406\text{m}$ 為水平 Helmholtz 線圈有效半徑。

- (14) 由公式計算 Rb⁸⁵、Rb⁸⁷ 之 g-factor:

$$g_F = \frac{h\nu}{\mu_B H}$$

其中 μ_B 為 Bohr's magneton。

5. 求地磁

- (1) 將 H-field、Sweep field 設定為與地球磁場的水平分量同方向。
- (2) 量測 ν_1 。
- (3) 將 H-field、Sweep field 兩者皆設定為與地球磁場的水平分量反方向。
- (4) 量測 ν_2 。
- (5) 則 ν 為：

$$\nu = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$$

以此排除地球磁場的垂直分量和 Sweep field 的直流分量的影響。

- (6) 以下式計算地磁水平分量量值 H_H ：

$$H_H = \frac{h\nu}{\mu_B g_F}$$

- (7) 以 V-field 電流讀值 I_V 及下式計算地磁鉛直分量量值 H_V ：

$$H_V = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu N I_V}{R}$$

於此 $N = 100$ 為鉛直 Helmholtz 線圈匝數， $R = 0.1530\text{m}$ 為鉛直 Helmholtz 線圈有效半徑。

- (8) 以地磁鉛直分量及地磁水平分量求得地磁大小。

6. Rb 原子吸收截面積的測量

- (1) 將 Cell 移開光路。
- (2) 用電表測量 Rb 燈發出的光未經過 Cell 的初始強度 I_0 。（因有些訊號量值太小所以我們以電表測量。）
- (3) 將 Cell 放回光路上。
- (4) 用電表測量 Rb 燈發出的光有經過 Cell 的吸收後強度 I 。
- (5) 改變 I_0 並重複步驟(1)-(4)，量取多組 (I_0, I) 的數據。
- (6) 以 I 對 I_0 作圖，其線性迴歸線的斜率即為 $e^{-\sigma\rho t}$ 。 σ 為 Rb 原子對 790nm 波長的光的吸收截面積、 ρ 為 Rb 蒸汽於工作溫度時的密度（查表）、 $t = 0.025\text{m}$ 為 Cell 的長度。如此可求得 σ 。

四、實驗結果

1. 激發吸收訊號

(1) 調整訊號

透過調整偏振片、垂直場大小、掃場大小，吸收訊號幅度最大的情形如下圖：



其中粉色線為輸出方波，黃色線為 optical pumping 吸收訊號，圖形大致符合講義圖 13。

(2) 測量 g 因數

保持上述設定，調整 RF 訊號產生器的頻率，可以觀察到共振訊號如下圖：



我們可以測量到兩個共振訊號 (ν_1)，頻率為 327.0 kHz、647.0 kHz，分別對應到 Rb^{85} 、 Rb^{87} 的共振頻率。

改變水平場方向以消除地磁水平分量和掃場直流分量的影響，可以得到第二組共振訊號 (ν_2)，頻率分別為 898.0 kHz (Rb^{85})、1478.0 kHz (Rb^{87})。

計算水平磁場數值：使用公式 $H = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu NI}{R}$ ，水平場電流為 0.2 A，線圈參數參考講義 ($N = 125, R = 240.6 \text{ mm}$)，可以得到水平磁場大小為 $9.343 \times 10^{-5} \text{ T}$ 。

最後，我們可以計算 Rb 兩同位素的 Lande g-factor：

$$g_F = \frac{\omega_L \hbar}{\mu_B B}$$

	B (T)	$\omega_L = (\nu_1 + \nu_2)/2$ (kHz)	g-factor	誤差
Rb^{85}	9.343×10^{-5}	612.5	0.468	+41.94%
Rb^{87}		1062.5	0.813	+62.50%

其中誤差為 g-factor 分別和其理論值 1/3、1/2 比較的結果。討論可能的誤差來源有以下幾項：

1) 磁場大小誤差：

本實驗計算磁場的方式為以線圈的電流大小帶入理論公式，但器材可能因長期使用而不一定完全符合理論情況，因此造成磁場計算的誤差。為了驗證以上猜測，我們使用高斯計重新測量水平磁場大小，得到的數值為 $1.20 \times 10^{-4} \text{ T}$ ，和使用電流計算的結果有 22% 的相對誤差。用此數據計算 g-factor 的結果為：

	B (T)	$\omega_L = (\nu_1 + \nu_2)/2$ (kHz)	g-factor	誤差
Rb^{85}	1.20×10^{-4}	612.5	0.365	+10.51%
Rb^{87}		1062.5	0.633	+26.52%

可以發現誤差確實明顯降低。

2) 尋找共振頻率的誤差：

由我們的實驗數據可以發現， Rb^{87} 的誤差比 Rb^{85} 大很多，推測為在尋找共振頻率時，較高共振頻率的圖形判讀沒有很準確。例如在測量 Rb^{87} 的 ν_2 時，我們沒辦法找到完美的共振圖形，而是如下圖：



且因此頻率大小相較其他數據非常大，推測可能其測量不準確，才會導致 Rb^{87} 的 g -factor 有較高的誤差。

3) 誤差傳遞計算：

實驗中調整頻率大小的最小間距為 1 kHz，因此 Rb^{85} 的 $\omega_L = (\nu_1 + \nu_2)/2 = 612.5 \pm 0.7$ kHz， Rb^{87} 的 $\omega_L = (\nu_1 + \nu_2)/2 = 1062.5 \pm 0.7$ kHz，計算得到 $g_{85} = 0.365 \pm 0.000417$ 、 $g_{87} = 0.633 \pm 0.000417$ ，可以發現此不準量相當小，應非實驗誤差的主因。

4) 其他：

實驗中的系統誤差、周遭環境干擾、人為誤差都可能會造成實驗結果不準確，包含儀器沒有完全用布屏蔽好而受外在訊號干擾、頻率調整太快導致圖形還未變化完成等等，以及一些可能偶然發生的干擾，可以改善的方法為多取幾組數據做平均。

2. 量測地磁

(1) 實驗結果

以類似上述實驗方法，得到 Rb^{87} 和 Rb^{85} 的兩組共振頻率，將其相減除以 2 ($\nu = (\nu_1 - \nu_2)/2$) 得到消除掃場和水平磁場影響的水平地磁分量：

	ν_1 (kHz)	ν_2 (kHz)	ν (kHz)	$H_{\text{horizontal}}$ (T)
Rb ⁸⁵	327.0	228.0	49.5	1.072×10^{-5}
Rb ⁸⁷	647.0	408.0	119.5	1.708×10^{-5}

可以得到地磁水平分量的平均值為 1.390×10^{-5} T。

而地磁垂直分量則用垂直場電流來計算，因其造成的磁場剛好可以抵銷地磁垂直分量。帶入 $H = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu NI}{R}$ ，垂直場電流為 0.021 A，線圈參數參考講義（N = 100, R = 153.0 mm），可以得到地磁垂直分量大小為 1.234×10^{-5} T。

最後我們可以計算出地球磁場大小為

$$\sqrt{(1.390 \times 10^{-5})^2 + (1.234 \times 10^{-5})^2} = 1.859 \times 10^{-5} \text{ T}, \text{ 磁傾角為 } 41.6^\circ。$$

(2) 誤差討論

1) 誤差傳遞計算：

和前述實驗相似，調整頻率大小的最小間距為 1 kHz，因此 Rb⁸⁵ 的 $\nu = (\nu_1 - \nu_2)/2 = 49.5 \pm 0.7$ kHz，Rb⁸⁷ 的 $\nu = (\nu_1 - \nu_2)/2 = 119.5 \pm 0.7$ kHz，計算地磁水平分量的平均值為 $H_{\text{horizontal}} = (1.390 \pm 0.01) \times 10^{-5}$ T。

2) 其他：

查詢地球磁場大小，台灣的數值約為 4.5×10^{-5} T，我們實驗得到的結果有在同一個數量級，但明顯偏小。可能的誤差來源是校正不準確，在進行測量 g 參數的實驗後，我們沒有重新校正系統（偏振片角度、垂直場大小等等），移動器材時有可能會使原先的校正不準確，應再次進行校正。另外，地磁大小微弱，因此周遭環境的磁場干擾、屏蔽不完全等等都會造成誤差。

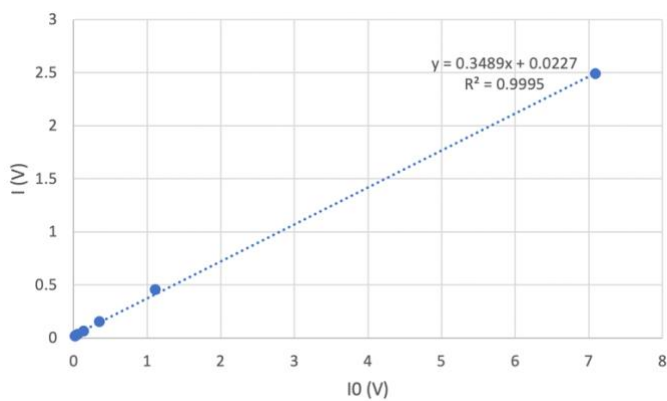
3. Rb 原子之吸收截面積的測量

(1) 實驗結果

測量入射光強度 I_0 和經 Rb 吸收之光強度 I ，我們可以計算出 Rb 的原子的吸收截面積：

I (V)	I_0 (V)	slope	cross section (m^2)
2.490	7.090	0.3512	3.5770E-16
0.453	1.109	0.4085	3.0609E-16
0.151	0.354	0.4266	2.9129E-16
0.064	0.136	0.4706	2.5770E-16
0.033	0.060	0.5500	2.0439E-16
0.022	0.030	0.7333	1.0604E-16
0.017	0.022	0.7727	8.8147E-17

將數據以回歸直線做圖如下：



可以得到斜率 0.3489，帶入公式 $I = I_0 e^{-\sigma \rho t}$ ，可知此斜率即為 $e^{-\sigma \rho t}$ ，其中 Rb 蒸氣密度在 cell 溫度為 55°C 時為 $\rho = 1.170 \times 10^{17} \text{ n/m}^3$ ，cell 的長度 $t = 2.5 \text{ cm}$ ，可以算出 $\sigma = 3.600 \times 10^{-16} \text{ m}^2$ 。

(2) 誤差討論

1) 誤差傳遞計算：

測量光強度時，每筆訊號讀取的誤差估計為 0.002 V，而 natural log

的誤差傳遞公式為 $\sigma_{\ln y} = \frac{\sigma_y}{y}$ ，可以計算出 $\sigma = (3.600 \pm$

$0.002) \times 10^{-16} \text{ m}^2$ 。

2) 其他：

查詢 Rb 原子的吸收截面積理論值，大約為 $2 \times 10^{-16} \text{ m}^2$ 左右，和我們的實驗結果大致相符。其實 Rb 原子的吸收截面積會因不同的 hyperfine transition 而有所不同，實驗中 Rb 氣體的溫度、壓力、成分等等也都會影響其吸收截面積，因此沒有單一固定的理論值可以比較。

五、問題討論

1. In the case that the external magnetic field is zero, what are the atomic energy eigenstates and their energies in the $^2S_{1/2}$ electronic ground state, and also in the $^2P_{1/2}$ and $^2P_{3/2}$ electronic excited states, both for Rb^{85} and for Rb^{87} ? Here, we are just interested in the energies determined from the hyperfine splitting Hamiltonian $H_{hfs} = hAI \cdot J$, i.e., those measured with respect the atomic energy in the absence of hyperfine coupling. You should leave your answer in terms of the hyperfine coupling constants A , which are different for the two isotopes and for the ground and excited states.

答：

$I \cdot J$ 為：

$$F = I + J \rightarrow F^2 = F \cdot F = I^2 + J^2 + 2I \cdot J$$

$$I \cdot J = \frac{1}{2}(F^2 - I^2 - J^2)$$

H_{hfs} 改寫為：

$$H_{hfs} = AI \cdot J = \frac{A}{2}(F^2 - I^2 - J^2)$$

Energy eigenvalue 為：

$$E|i, j, f\rangle = H_{hfs}|i, j, f\rangle = \frac{A}{2}(f(f+1) - i(i+1) - j(j+1))|i, j, f\rangle$$

對 Rb^{85} ($I=5/2$) 來說，在 $^2S_{1/2}$ state， F 有 2 or 3， $L=0$ ， $J=1/2$ ，對應 Eigenstates：

$$|5/2, 1/2, 2\rangle, |5/2, 1/2, 3\rangle$$

$$E(F=2) = \frac{A}{2} \left[2(2+1) - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = -\frac{7}{4}A$$

$$E(F=3) = \frac{A}{2} \left[3(3+1) - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{5}{4}A$$

對 $^2P_{1/2}$, F也是2、3, L=1, 根據定義J=1/2, Eigen energy 同上。

對 $^2P_{3/2}$, F=1、2、3 or 4, L=1, J=3/2:

$$E(F=1) = \frac{A}{2} [1(1+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = -\frac{21}{4}A$$

$$E(F=2) = \frac{A}{2} [2(2+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = -\frac{13}{4}A$$

$$E(F=3) = \frac{A}{2} [3(3+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = -\frac{1}{4}A$$

$$E(F=4) = \frac{A}{2} [4(4+1) - \frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = \frac{15}{4}A$$

接著計算 Rb^{87} (I=3/2), 在 $^2S_{1/2}$ state, F有1 or 2, L=0, J=1/2, 對應 Eigenenergy:

$$E(F=1) = \frac{A}{2} [1(1+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)] = -\frac{5}{4}A$$

$$E(F=2) = \frac{A}{2} [2(2+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)] = \frac{3}{4}A$$

對 $^2P_{1/2}$, F也是1、2, 根據定義J=1/2, Eigenenergy 同上。

對 $^2P_{3/2}$, F=0、1、2、3, L=1, J=3/2:

$$E(F=0) = \frac{A}{2} [0(0+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = -\frac{15}{4}A$$

$$E(F=1) = \frac{A}{2} [1(1+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = -\frac{11}{4}A$$

$$E(F=2) = \frac{A}{2} [2(2+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = -\frac{3}{4}A$$

$$E(F=3) = \frac{A}{2} [3(3+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)] = \frac{9}{4}A$$

- Now look up the accepted values for those hyperfine coupling constants A, and then, using your expression determined above, calculate the hyperfine energy splitting in the ground electronic states of both elements. Compare your answer to known values of this energy splitting; these are found in many places, but let us guide you specifically to Daniel Steck's nice write-ups on Rb^{85} and Rb^{87} , which you can find at <https://steck.us/alkalidata/>.

You should take note also of the magnitude of the excited state hyperfine splitting. For the $^2P_{3/2}$ excited state, these splitting include also effects of the nuclear electric quadrupole moment.

答:

A的因次為能量, 根據能量量子化:

$$\nu = \frac{E}{h}$$

也就是該頻率對應越遷光子的放射頻率，對此，我們能用上題的結果預測 Rb^{85} 和 Rb^{87} 不同state 越遷所放出的光譜頻率：

(1) Rb^{85} :

1. $^2\text{S}_{1/2}$ splitting ($F=2, 3$):

$$A = h \cdot 1.0119108130(20) \text{GHz}$$

$$\nu = \frac{E(F=3)}{h} - \frac{E(F=2)}{h} = \frac{3A}{h} = 3.035\,732\,439\,0 \text{ GHz}$$

與實驗值吻合(3.035 732 439 0(60)GHz)。

2. $^2\text{P}_{1/2}$ splitting ($F=2, 3$):

$$A = h \cdot 120.527(56) \text{MHz}$$

$$\nu = \frac{E(F=3)}{h} - \frac{E(F=2)}{h} = \frac{3A}{h} = 361.581 \text{ MHz}$$

與實驗值吻合(361.58(17) MHz)。

3. $^2\text{S}_{3/2}$ splitting ($F=1, 2, 3, 4$):

$$A = h \cdot 25.0020(99) \text{ MHz}$$

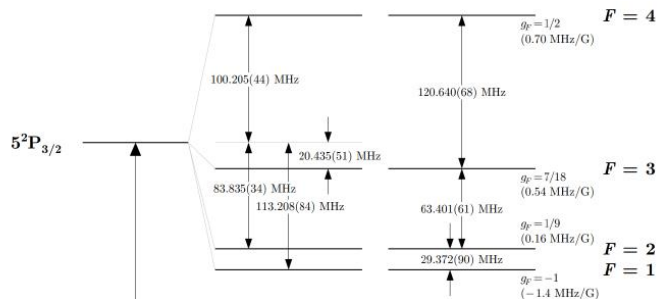
各state的E值的f:

$$\frac{E(F=1)}{h} = -\frac{21}{4} A/h = -131.261 \text{ MHz}$$

$$\frac{E(F=2)}{h} = \frac{-13}{4} A/h = -81.257 \text{ MHz}$$

$$\frac{E(F=3)}{h} = \frac{1}{4} A/h = -6.251 \text{ MHz}$$

$$\frac{E(F=4)}{h} = \frac{15}{4} A/h = 93.757 \text{ MHz}$$



然而該預測與實際值有誤差：

原因是因為在較高能階，quadrupole moment不再能省略，因此要考慮dipole term 與quadrupole term的綜合影響，公式改寫：

$$\Delta E = \frac{A}{2}(f(f+1) - i(i+1) - j(j+1)) +$$

$$B \frac{\frac{3}{2}(f(f+1)-i(i+1)-j(j+1))((f(f+1)-i(i+1)-j(j+1))+1)-2i(i+1)j(j+1)}{4i(2i-1)j(2j-1)}$$

在ground state B term 因為較小省略，修正後算出來的頻率為：

$$B = h \times 25.790\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=1)}{h} = -\frac{21}{4}A/h + \frac{7}{10}B/h = -113.208\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=2)}{h} = \frac{-13}{4}A/h - \frac{1}{10}B/h = -83.836\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=3)}{h} = \frac{1}{4}A/h - \frac{11}{20}B/h = -204.35\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=4)}{h} = \frac{15}{4}A/h + \frac{1}{4}B/h = 100.205\text{MHz}$$

與資料較為吻合。

相同道理也可以套用到Rb⁸⁷上：

(2) Rb⁸⁷:

1. ²S_{1/2} splitting (F=1、2):

$$A = h \cdot 3.417341305452145(45)\text{GHz}$$

$$f = \frac{E(F=2)}{h} - \frac{E(F=1)}{h} = \frac{2A}{h} = 6.834682610904290\text{GHz}$$

與實驗值吻合。

2. ²P_{1/2} splitting (F=1、2):

$$A = h \cdot 407.24(77)\text{MHz}$$

$$f = \frac{E(F=2)}{h} - \frac{E(F=1)}{h} = \frac{2A}{h} = 814.48\text{MHz}$$

與實驗值吻合(實驗值814.50MHz)。

3. ²P_{1/2} splitting (F=0、1、2、3):

$$A = h \cdot 84.7185(20)\text{MHz}$$

$$B = h \cdot 12.4965(37)\text{MHz}$$

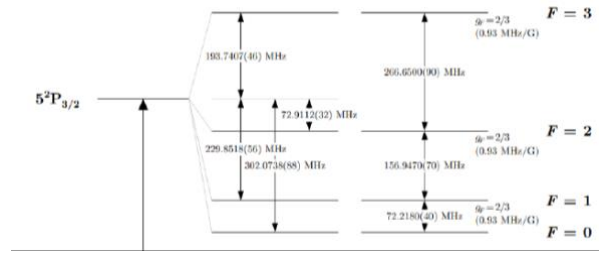
$$\frac{E(F=0)}{h} = -\frac{15}{4}A/h + \frac{5}{4}B/h = -302.07\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=1)}{h} = \frac{-11}{4}A/h - \frac{1}{4}B/h = -229.85\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=2)}{h} = \frac{-3}{4}A/h - \frac{3}{4}B/h = -72.911\text{MHz}$$

$$\frac{E(F=3)}{h} = \frac{9}{4}A/h + \frac{1}{4}B/h = 193.741\text{MHz}$$

與資料較為吻合。



3. Considering an atomic vapor of rubidium atoms at a temperature of 40°C , determine the ratio of the population of atoms in the electronic excited state to that in the electronic ground state. You will find that the fraction of atoms in the electronic excited $5p$ state is very small. This is the reason that light from the rubidium lamp will be absorbed in passing through the vapor cell.

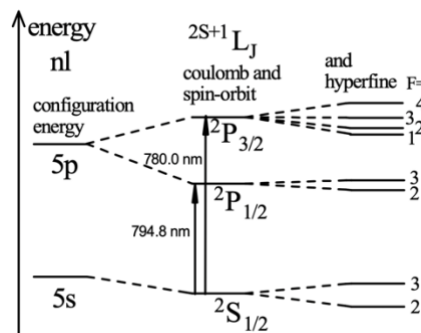
答：根據 Berkeley Optical Pumping 講義資料，原子出現在 state 1 的機率 P_1 和出現在 state 2 的機率 P_2 之間有以下關係式：

$$\frac{P_2}{P_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right)$$

其中 E_1 、 E_2 為該 state 的能量， T 為絕對溫度，因此本題中 $T = 313.15\text{ K}$ 。從參考資料 4 中可知（如下圖），從 $5s$ 躍遷到 $5p$ 需要波長為 794.8 nm 的能量，也就是 $E_2 - E_1 = \frac{ch}{\lambda} = 2.5 \times 10^{-19}\text{ J}$ ，帶入公式可得：

$$\frac{P_2}{P_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{-2.5 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23} \times 313.15}\right) = 7.51 \times 10^{-26}$$

因此可知電子躍遷到 $5p$ state 的機率相較於待在 $5s$ state 是相當小的。



4. Considering the same conditions as in question 3, and focusing now on the hyperfine states of the electronic ground state, what is :

(1) the ratio of the population of atoms in the higher- energy $F = I + \frac{1}{2}$ hyperfine

state to that in the lower-energy $F = I - \frac{1}{2}$ hyperfine state?

(2) the ratio of populations in neighboring Zeeman states?

You will find that these ratios are near unity, meaning that, at thermal equilibrium, there is nearly zero spin polarization in an atomic vapor cell.

(1) UC Berkley optical pumping 講義 4.3 中提到，在絕對溫度 $T(K)$ 下，原子在 E_1 、 E_2 state 的機率為 P_1 、 P_2 ，而兩者的比例可以由以下式子描述：

$$\frac{P_2}{P_1} = \exp\left(-\frac{E_2-E_1}{k_B T}\right)$$

其中 k_B 為波茲曼常數。因此要回答這個問題我們需要 Rb 原子的電子在 ground state 時兩個 hyperfine states 的能量差。

而在問題 2 中我們已經計算出 Rb^{85} 、 Rb^{87} 在這兩個 state 之間能量差所對應的頻率分別為：

Rb^{85} : 3.035 732 439 0 GHz

Rb^{87} : 6.834 682 610 904 290 GHz

因此 Rb 原子在兩能階機率之比例為：

$$\text{Rb}^{85}: \frac{P_2}{P_1} = \exp\left(\frac{-h \times 3.0357324390 \text{ GHz}}{1.380649 \times 10^{-23} \times 313.15}\right) = 0.9995348609528448$$

$$\text{Rb}^{87}: \frac{P_2}{P_1} = \exp\left(\frac{-h \times 6.834682610904290 \text{ GHz}}{1.380649 \times 10^{-23} \times 313.15}\right) = 0.9989530854191202$$

因此原子於兩能階中分佈的機率相當接近。

(2) 同樣的我們需要兩個相鄰 Zeeman states 的能量差，其為

$$\Delta E = g_F \mu_B B$$

其中 $g_F = \frac{1}{2}$ or $\frac{1}{3}$, $\mu_B = 9.2740100783 \times 10^{-24}$ ，而我們實驗中的磁場也

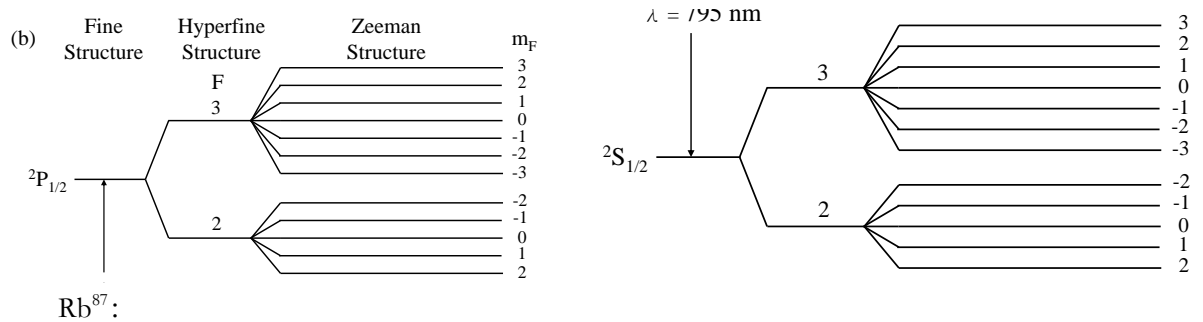
只有大約 10^{-4} T ，所以 ΔE 的 overall order 會落在 10^{-28} ，比上一小題更

小，因此 $\frac{P_2}{P_1}$ 會更趨近於 1。

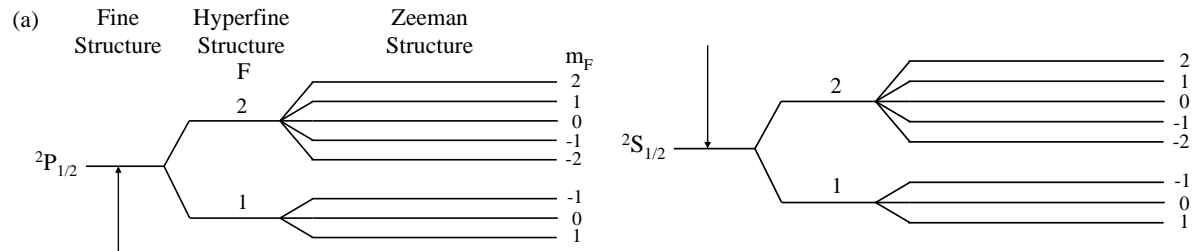
5. The broad spectrum of light emitted by the rubidium lamp spans all transitions on the D1 lines of both rubidium isotopes. Explain why the pumped state is a dark state?

考慮 Rb 原子的能階

Rb⁸⁵:



Rb⁸⁷:



而且 m_F 的數量會來自 $2F + 1$ ，因此 Rb 原子同一種同位素的 $^2S_{1/2}$ 、 $^2P_{1/2}$ 的 m_F 數量都相同。因此當達到 pumped state 時，原子會有 $m_{F,max}$ ，也就是 m_F 沒有辦法再增加。簡而言之，就是當原子被反覆 pumped 之後，會達到基態中的最大能階，而沒辦法再吸收能量，所以 pumped state 為 dark state。

六、實驗總結

本實驗中，我們利用 optical pumping 的原理，以鉀金屬 (Rb) 測量共振磁場並計算 g-factor、地磁大小，以及 Rb 原子的吸收截面積。

關於 Rb⁸⁵ 和 Rb⁸⁷ 的 Lande g-factor，我們的實驗值分別為 0.365、0.633，和理論值 1/3、1/2 的誤差為 +10.51%、+26.52%。地球磁場的部分，我們測量到的水平分量為 $1.390 \times 10^{-5} \text{ T}$ 、垂直分量為 $1.234 \times 10^{-5} \text{ T}$ ，總磁場大小為 $1.859 \times 10^{-5} \text{ T}$ ，磁傾角為 41.6° 。Rb 原子吸收截面積的測量結果為 $\sigma = 3.600 \times 10^{-16} \text{ m}^2$ 。

透過本實驗，我們更了解 optical pumping 在物理學上的重要性，以及實際操作將其應用於測量微小磁場。這個實驗的步驟看似不複雜，背後卻有扎實深厚的理論知識，讓我們學到許多。

七、參考資料

1. 近物實驗講義-光激發原子吸收實驗講義
2. 地磁大小：
<https://swoo.cwb.gov.tw/V2/page/Observation/MagneticField.html>
3. Rb 原子吸收截面積：Theoretical modeling and analysis on the absorption cross section of the two-photon excitation in Rb,
<https://opg.optica.org/oe/fulltext.cfm?uri=oe-26-13-17254&id=392693>
4. Rb: Spin polarization of ^{87}Rb atoms with ultranarrow linewidth diode laser: Numerical simulation,
<https://pubs.aip.org/aip/adv/article/6/8/085110/861906/Spin-polarization-of-87Rb-atoms-with-ultranarrow>
5. Saturated Absorption Spectroscopy,
<file:///Users/shuangshuangchen/Downloads/satabs.pdf>
6. Daniel A. Steck. (revision 2.2.3, 9 July 2021). Rubidium 85 D Line Data
7. Daniel A. Steck. (25 September 2001). Rubidium 87 D Line Data
8. Emily P. Wang. Optical Pumping of Rubidium Vapor
9. Donald A. Glase. OPT-Optical pumping. University of California, Berkeley