Lösungsvorschläge zu Blatt 5

Aufgabe 5.1. (Berechnung des Subdifferentials)

(a) Berechnen Sie anhand der Definition des Subdifferentials in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Subdifferentiale der Abbildungen aus Beispiel 4.2 der Vorlesung, bzw. der folgenden reellen Abbildungen:

(i) der Betragsfunktion $\quad \text{abs} : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0, +\infty[\,, \\ x \mapsto |x|\,, \end{cases}$

(ii) der Heaviside Stufen-Funktionen:

$$x \mapsto \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x \leq 0\,, \\ 1\,, \text{ falls } x > 0\,, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad x \mapsto \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x < 0\,, \\ 1\,, \text{ falls } x \geq 0\,. \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie die Subdifferentiale folgender reeller Funktionen:

$$x \mapsto x^2\,, \qquad x \mapsto x^3\,, \qquad x \mapsto \sin(x)\,, \qquad x \mapsto \max(0, x^2 - 1)\,.$$

(c) Sei V normierter Raum. Berechnen Sie die Subdifferentiale folgender Funktionen:

$$v \mapsto \|v\|_V\,, \qquad v \mapsto \frac{1}{2}\|v\|_V^2 \qquad v \mapsto \max(0, \|v\|_V^2 - 1)\,.$$

(d) *(Stützfunktionen und Stützfunktionale von Mengen in normierten Räumen)*

(i) Erklären Sie den Unterschied zwischen der Stützfunktion und einem Stützfunktional einer nichtleeren Teilmenge A eines normierten Raumes V.

(ii) Berechnen Sie das Subdifferential der Indikatorfunktion $I_A : V \to \{0\,, +\infty\}$ einer beliebigen nichtleeren Teilmenge eines normierten Raumes V.

(iii) Wie ist der Normalenkegel $N_C(c)$ einer nichtleeren konvexen Teilmenge $C \subset V$ in einem Punkt $c \in C$ definiert? Beschreiben Sie ihn mittels der Indikatorfunktion I_C und mittels der Stützfunktion I_C^*.

(iv) Berechnen Sie die Normalenkegel folgender Mengen in beliebigen Punkten:
die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}$ eines normierten Raumes V,
die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}$ eines Hilbertraumes H,
der positive Orthant $[0, +\infty[^n \subset \mathbb{R}^n$,
der Epigraph einer eigentlichen, konvexen, unterhalbstetigen Funktion $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$.

(v) Wie lässt sich mittels Konjugation die abgeschlossene, konvexe Hülle einer beliebigen Teilmenge $A \subset V$ eines Vektorraumes beschreiben?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.1.

(a) Für reelle Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ das Subdifferential gegeben mittels:

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha \cdot (y - x) \leq \varphi(y) - \varphi(x) \quad \text{für alle } \; y \in \mathbb{R}\}\,, & \text{falls } \; x \in D(\varphi)\,, \\ \emptyset\,, \text{ falls } \; x \notin D(\varphi)\,. \end{cases}$$

(i) Für die Betragsfunktion $\text{abs} = |\cdot| \,:\, \begin{cases} \mathbb{R} \to [0, +\infty[\,, \\ x \mapsto |x|\,, \end{cases}$ gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ damit:

$$\partial\text{abs}(x) = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha \cdot (y - x) \leq |y| - |x| \quad \text{für alle } \; y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $\alpha \in \partial\text{abs}(x)$ damit äquivalent zu:

$$\alpha \cdot (y - x) \leq y - x \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (-y - x) \leq y - x \quad \text{für alle } \; y \geq 0\,,$$

was wiederum äquivalent ist zu:

$$(\alpha - 1) \cdot (y - x) \leq 0 \quad \text{und} \quad (1 - \alpha) \cdot x \leq (1 + \alpha) \cdot y \quad \text{für alle } \; y \geq 0\,.$$

Einsetzen von $y = x/2$ und $y = 2x$ in die erste Ungleichung ergibt insbesondere

$$(\alpha - 1) \cdot x = 0\,,$$

woraus, da x strikt positiv ist, folgt

$$\alpha = 1\,.$$

Die zweite Ungleichung ist für dieses α offenbar auch erfüllt. Daraus folgt also für positive x:

$$\partial\text{abs}(x) = \{1\}\,.$$

Auf analoge Weise ergibt sich für negative x, dass:

$$\partial\text{abs}(x) = \{-1\}\,.$$

Sei nun $x = 0$. Die Aussage $\alpha \in \partial\text{abs}(0)$ ist äquivalent zu:

$$\alpha \cdot y \leq y \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (-y) \leq y \quad \text{für alle } \; y \geq 0\,,$$

was wiederum äquivalent ist zu:

$$(\alpha - 1) \cdot y \leq 0 \quad \text{und} \quad (\alpha + 1) \cdot y \geq 0 \quad \text{für alle } \; y \geq 0\,.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\alpha - 1 \leq 0 \quad \text{und} \quad \alpha + 1 \geq 0 \quad \text{bzw. } x \in [-1, 1]\,.$$

Insgesamt gilt also:

$$\partial\text{abs}(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \; x > 0\,, \\ [-1, 1]\,, & \text{falls } \; x = 0 \; \text{ und} \\ -1\,, & \text{falls } \; x < 0\,. \end{cases}$$

Bemerkung: damit ist das Subdifferential der Betragsfunktion die maximal monotone Erweiterung der Vorzeichenfunktion *sgn* .

(ii) Sei nun $H_1 = \chi_{]0,+\infty[}$ die charakteristische Funktion des offenen Intervalls $]0, +\infty[$:

$$H_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Für alle $x > 0$ ist die Aussage $\alpha \in \partial H_1(x)$ dann äquivalent zu:

$$\alpha \cdot (y - x) \leq H_1(y) - H_1(x) = \chi_{]0,+\infty[}(y) - 1\,,$$

was wiederum äquivalent ist zu:

$$\alpha \cdot (-y - x) \leq 0 - 1 = -1 \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (y - x) \leq 1 - 1 = 0 \quad \text{für alle } \; y > 0\,,$$

sowie $-\alpha x = \alpha \cdot (0 - x) \leq \chi_{]0,+\infty[}(0) - 1 = -1$.
Während nun die letzte Ungleichung ergibt: $\alpha x \geq 1$, ergibt die zweite Ungleichung für $y = 2x > 0$:

$$\alpha x \leq 0\,,$$

ein Widerspruch. Für alle $x \in]0,+\infty[$ gilt damit:

$$\partial H_1(x) = \emptyset\,.$$

Sei nun $x < 0$. Die Aussage $\alpha \in \partial H_1(x)$ ist nun äquivalent zu:

$$\alpha \cdot (-y - x) \leq 0 \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (y - x) \leq 1 \quad \text{für alle } \ y > 0\,,$$

sowie $-\alpha x = \alpha \cdot (0 - x) \leq \chi_{]0,+\infty[}(0) - 0 = 0$.
Aus der letzten Ungleichung folgt, de $x < 0$, auch $\alpha \leq 0$. Aus der ersten Ungleichung folgt z.B. für $y = x/2 < 0$, dass $\alpha \geq 0$ sein muss. Insgesamt also muss gelten $\alpha = 0$, was offenbar alle drei Ungleichungen erfüllt.
Im Punkt $x = 0$ hat die Subgradienten-Bedingung die Form:

$$\alpha \cdot y \leq H_1(y) - H_1(0) = H_1(y) \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,,$$

was offenbar erfüllt ist gdw. $\alpha = 0$.
Insgesamt haben wir damit:

$$\partial H_1(x) = \begin{cases} \emptyset\,, & \text{falls } \ x > 0\,, \\ \{0\}\,, & \text{falls } \ x \leq 0\,. \end{cases}$$

Sei nun $H_2 = \chi_{[0,+\infty[}$ die charakteristische Funktion des abgeschlossenen Intervalls $[0,+\infty[$:

$$H_2(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Analoge Ausführung wie für H_1 ergibt, dass für alle Punkte aus dem abgeschlossenen Intervall $[0,+\infty[$ das Subdifferential leer sein muss, für negative Zahlen ergibt sich wie bisher das Subdifferential $\{0\}$. Insgesamt gilt also in diesem Fall:

$$\partial H_2(x) = \begin{cases} \emptyset\,, & \text{falls } \ x \geq 0\,, \\ \{0\}\,, & \text{falls } \ x < 0\,. \end{cases}$$

(b) Sei $\varphi(x) = x^2$. Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $\alpha \in \partial\varphi(x)$ äquivalent zu:

$$\alpha \cdot (y - x) \leq \varphi(y) - \varphi(x) = y^2 - x^2 \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,,$$

was wiederum äquivalent ist zu:

$$(y - x) \cdot (y + x - \alpha) \geq 0 \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,.$$

Dies ist äquivalent zu zwei Bedingungen:

$$y + x - \alpha \geq 0 \quad \text{für alle } \ y > x \quad \text{und} \quad y + x - \alpha \leq 0 \quad \text{für alle } \ y < x\,.$$

Im Grenzübergang $y \to x + 0$ ergibt die erste Ungleichung:

$$2x - \alpha \geq 0\,.$$

Im Grenzübergang $y \to x - 0$ ergibt die zweite Ungleichung:

$$2x - \alpha \leq 0\,.$$

Insgesamt muss also gelten: $\alpha = 2x$. Da andererseits für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2x \cdot (y - x) = 2xy - 2x^2 \leq x^2 + y^2 - x^2 = y^2 - x^2\,,$$

so folgt letztens für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial\varphi(x) = \{2x\}\,.$$

Sei nun $\varphi(x) = x^3$. Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $\alpha \in \partial\varphi(x)$ äquivalent zu:

$$\alpha \cdot (y - x) \leq \varphi(y) - \varphi(x) = y^3 - x^3 \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,,$$

Da allgemein gilt:

$$y^3 - x^3 = (y - x) \cdot (y^2 + xy + x^2)\,,$$

so ist die obere Bedingung dieses mal äquivalent zu:

$$(y - x) \cdot (y^2 + xy + x^2 - \alpha) \geq 0 \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,.$$

Die Fallunterscheidung von $y > x$ und $y < x$ und die anschließenden einseitigen Grenzwerte ergeben nun, dass der einzige Kandidat für einen Subgradienten die Zahl $\alpha = 3x^2$ ist.
In der Tat gilt $\partial\varphi(x) = \emptyset$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist $x = 0$, so ist $\alpha = 0$ der einzige mögliche Kandidat für den Subgradienten. Für beliebige $y < 0$ gilt aber:

$$0 = 0 \cdot (y - 0) \not\leq \varphi(y) - \varphi(0) = y^3 < 0\,.$$

Sei nun $x \neq 0$. Der einzige Kandidat für den Subgradienten ist $\alpha = 3x^2$. Einsetzen dieses Kandidaten in die Subgradientenungleichung ergibt, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gelten soll:

$$3x^2 \cdot (y - x) \leq y^3 - x^3 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq y^3 - 3x^2 y + 2x^3\,.$$

Einsetzen z.B. von $y = -3|x| < 0$ ergibt aber:

$$-27|x|^3 + 9|x|^3 + 2x^3 \leq (-27 + 9 + 2) \cdot |x|^3 = -16|x|^3 < 0\,.$$

Damit gilt also für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial\varphi(x) = \emptyset\,.$$

Sei nun $\varphi(x) = \sin(x)$. Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $\alpha \in \partial\varphi(x)$ äquivalent zu:

$$\alpha \cdot (y - x) \leq \varphi(y) - \varphi(x) = \sin(y) - \sin(x) \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,,$$

Die Annahme $\alpha > 0$ führt für hinreichend große $y \in \mathbb{R}$ zum Widerspruch, da die linke Seite der Ungleichung beliebig groß gemacht werden kann, die rechte Seite dagegen höchstens $1 - \sin(x) \leq 2$ beträgt.
Analog dazu führt auch die Annahme $\alpha < 0$ zum Widerspruch, da für negative y mit hinreichend großem Betragswert die linke Seite der Ungleichung beliebig groß gemacht werden kann, die rechte Seite dagegen wieder beschränkt ist.
Die Möglichkeit $\alpha = 0$ ergibt als Subgradientenungleichung die Minimumsbedingung:

$$0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \quad \text{für alle } \ y \in \mathbb{R}\,.$$

Diese ist erfüllt in Minimalstellen der Sinus-Funktion, bzw. in allen Punkten aus der Menge

$$M_{\sin} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot \mathbb{Z}\,.$$

Daraus folgt also:

$$\partial \sin(x) = \begin{cases} \{0\}\,, & \text{falls } x \in M_{\sin}\,, \\ \emptyset\,, & \text{sonst }\,. \end{cases}$$

Sei $\varphi(x) = \max(0, x^2 - 1)$, bzw. gelte:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } \ |x| \leq 1\,, \\ x^2 - 1\,, & \text{falls } \ |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, konvex und stetig in ganz $\mathbb{R}$, und auch glatt in allen Punkten außer den Punkten 1 und -1.

Auf alle Punkte der Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ lässt sich damit der Satz 4.6. der Vorlesung, über differenzierbare Stellen einer konvexen Funktion, anwenden und liefert:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \Rightarrow \partial\varphi(x) = \{\varphi'(x)\} = \begin{cases} \{2x\}\,, & \text{falls } |x| > 1\,, \\ \{0\}\,, & \text{falls } |x| < 1\,. \end{cases}$$

Sei nun $x = 1$. Die Subgradientenbedingung liefert die Äquivalenz der Aussage $\alpha \in \partial\varphi(1)$ zu:

$$\alpha \cdot (x-1) \leq \varphi(x) - \varphi(1) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } |x| \leq 1\,, \\ x^2 - 1\,, & \text{falls } |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

Dies ist weiter äquivalent zu den beiden Ungleichungen:

$$\alpha \geq 0 \quad \text{und} \quad (\alpha - (x+1)) \cdot (x-1) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\,.$$

Für beliebige $t > 0$ ergibt das insbesondere mit $x = 1 + t > 1$:

$$(\alpha - (2+t)) \cdot t \leq 0 \qquad \text{bzw. } \alpha \leq 2 + t\,.$$

Da $t > 0$ beliebig ist, ergibt das im Grenzübergang $t \to 0^+$ auch

$$\alpha \leq 2\,.$$

Die zweite Ungleichung ist für alle $\alpha \geq 0$ und alle $x \leq -1$ erfüllt und ergibt keine weitere Information. Damit gilt:

$$\partial\varphi(1) = [0,2]\,.$$

Analog dazu ergibt sich im Punkt $x = -1$:

$$\alpha \in \partial\varphi(-1) \Leftrightarrow \alpha \cdot (x-(-1)) = \alpha \cdot (x+1) \leq \begin{cases} 0\,, & \text{falls } |x| \leq 1\,, \\ x^2 - 1\,, & \text{falls } |x| \geq 1\,, \end{cases}$$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \alpha \leq 0 \quad \text{und} \quad (\alpha - (x-1)) \cdot (x+1) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq 0 \quad \text{und} \quad \alpha - (x-1) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in]-\infty,-1] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq 0 \quad \text{und} \quad \alpha \geq -2\,. \end{aligned}$$

Damit gilt nun:

$$\partial\varphi(-1) = [-2,0]\,,$$

insgesamt haben wir also:

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} 2x\,, & \text{falls } |x| > 1\,, \\ 0\,, & \text{falls } |x| < 0\,, \\ [-2,0]\,, & \text{für } x = -2 \quad \text{und} \\ [0,2]\,, & \text{für } x = 2\,. \end{cases}$$

(c) Im allgemeinen normierten Raum V sind Subgradienten von Abbildungen $\varphi : V \to]-\infty,+\infty]$ angesiedelt im Dualraum V^*. In diesem Fall lautet die Subgradientenbedingung an der Stelle $v \in V$ für das Funktional $v^* \in V^*$:

$$\langle v^*, u - v\rangle_{V^*,V} \leq \varphi(u) - \varphi(v)\,, \qquad \text{für alle } u \in V\,.$$

Sei $\varphi(v) = \|v\|_V$ für $v \in V$.
Die Subgradientenbedingung lautet nun in beliebigem $v \in V$:

$$\langle v^*, u - v\rangle_{V^*,V} \leq \|u\|_V - \|v\|_V\,, \qquad \text{für alle } u \in V\,.$$

Sei zuerst $v \neq 0$ und $v^* \in \partial\varphi(v)$ beliebig. Für beliebige $w \in V$ ergibt das Einsetzen von $u = v + w$ in die Subgradientenungleichung:

$$\langle v^* w \rangle \leq \|v + w\| - \|v\| \leq \|v\| + \|w\| - \|v\| = \|w\| \,,$$

was bedeutet, dass

$$\|v^*\|_{V^*} \leq 1$$

gelten muss. Einsetzen von $u = 2v$ und $u = v/2$ ergibt, dass

$$\langle v^*, v \rangle = \|v\|$$

gelten muss. Insbesondere muss gelten:

$$\|v^*\|_{V^*} = 1 \,.$$

Gelten umgekehrt für ein Funktional $v^* \in V^*$ die beiden Bedingungen

$$\|v^*\|_{V^*} = 1 \quad \text{und} \quad \langle v^*, v \rangle = \|v\|_V \,,$$

so gilt für beliebige $u \in V$:

$$\langle v^*, u - v \rangle = \langle v^*, u \rangle - \langle v^*, v \rangle = \langle v^*, u \rangle - \|v\|_V \leq \|v^*\|_{V^*} \|u\|_V - \|v\|_V = \|u\|_V - \|v\|_V \,,$$

bzw. $v^* \in \partial\varphi(v)$. Insgesamt gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$:

$$\partial\varphi(v) = \{\, v^* \in V^* \,:\, \|v^*\|_{V^*} = 1 \quad \text{und} \quad \langle v^*, v \rangle = \|v\|_V \,\} \,.$$

Dies ist aber genau die Menge $\frac{1}{\|v\|_V} J(v)$, wobei $J : V \rightrightarrows V^*$ die Dualitätsabbildung bezeichnet (siehe Definition 4.16 aus Vorlesung), bzw. die Abbildung, die für beliebige $v \in V$ gegeben ist mittels:

$$J(v) = \{v^* \in V^* \,:\, \|v^*\|_{V^*} = \|v\|_V \quad \text{und} \quad \langle v^*, v \rangle = \|v\|_V^2 \,\} \,.$$

Nach Folgerungen des Satzes von Hahn-Banach, ist die obere Menge in jedem normierten Raum V für beliebige $v \in V$ nichtleer.
Für $v = 0$ lautet die Subgradientenungleichung für $v^* \in V^*$:

$$\langle v^*, u \rangle \leq \|u\|_V \quad \text{für alle } u \in V \,,$$

was bedeutet, dass

$$\partial\varphi(0) = \{\, v^* \in V^* \,:\, \|v^*\|_{V^*} \leq 1 \,\} = \mathrm{cl}\left(\mathbb{B}_{V^*}\right) \,.$$

Insgesamt gilt also:

$$\partial\|v\|_V = \begin{cases} \mathrm{cl}\left(\mathbb{B}_{V^*}\right) \,, & \text{für } \ v = 0 \,, \\ \{\, v^* \in V^* \,:\, \|v^*\|_{V^*} = 1 \quad \text{und} \quad \langle v^*, v \rangle = \|v\|_V \,, \} = \frac{1}{\|v\|_V} J(v) \,, & \text{falls } \ v \neq 0 \,. \end{cases}$$

Sei nun $\varphi(v) = \dfrac{1}{2} \|v\|_V^2$ für $v \in V$.
Für beliebige $v \in V$ ist die Aussage $v^* \in \partial\varphi(v)$ in diesem Fall äquivalent zu:

$$\langle v^*, u - v \rangle \leq \frac{\|u\|_V^2}{2} - \frac{\|v\|_V^2}{2} \quad \text{für alle } u \in V \,.$$

Insbesondere gilt für $t > 0$ beliebig und $u = (1 \pm t) \cdot v$:

$$\langle v^*, (1 + t)\, v - v \rangle = t \, \langle v^*, v \rangle \leq \frac{(1 + t)^2 - 1}{2} \, \|v\|_V^2 = t \left(1 + \frac{t}{2} \right) \|v\|_V^2$$

und

$$\langle v^*, (1-t)\, v - v\rangle = -t\,\langle v^*, v\rangle \leq \frac{(1-t)^2-1}{2}\,\|v\|_V^2 = -t\,\left(1-\frac{t}{2}\right)\,\|v\|_V^2\,.$$

Teilen durch $t>0$ ergibt damit:

$$\left(1-\frac{t}{2}\right)\,\|v\|_V^2 \leq \langle v^*, v\rangle \leq \left(1+\frac{t}{2}\right)\,\|v\|_V^2 \qquad \text{für alle} \;\; t>0\,.$$

Grenzübergang $t\to 0^+$ ergibt damit, dass für jedes Funktional $v^*\in\partial\varphi(v)$ gelten muss:

$$\langle v^*, v\rangle = \|v\|_V^2\,.$$

Setze nun für beliebige $w\in V$ als Testvektor u in der Subgradientenungleichung den Vektor $u=v+tw$ für beliebige $t>0$. Dies ergibt

$$\langle v^*, (v+tw)-v\rangle = t\,\langle v^*, w\rangle \leq \frac{\overbrace{\|v+tw\|_V^2}^{\leq(\|v\|_V+\|tw\|_V)^2}}{2} - \frac{\|v\|_V^2}{2} \leq t\|v\|_V\|w\|_V + \frac{t^2}{2}\|w\|_V^2\,.$$

Teilen durch $t>0$ und der Grenzübergang $t\to 0^+$ ergibt damit für beliebige $v^*\in\partial\varphi(v)$:

$$\langle v^*, w\rangle \leq \|v\|_V\|w\|_V \qquad \text{für alle} \;\; w\in V\,,$$

bzw. es gilt

$$\|v^*\|_{V^*} \leq \|v\|_V \qquad \text{und wegen} \qquad \langle v^*, v\rangle = \|v\|_V^2 \qquad \text{auch}$$
$$\|v^*\|_{V^*} = \|v\|_V\,.$$

Dies bedeutet aber, dass für beliebige $v\in V$ gilt:

$$\partial\varphi(v)\subset J(v)\,,$$

wobei $J: V\rightrightarrows V^*$ die Dualitätsabbildung bezeichnet (siehe Definition 4.16 aus Vorlesung).
Sei nun umgekehrt $v^*\in J(v)$ beliebig, bzw. gelte:

$$v^*\in V^*\,, \qquad \text{mit} \qquad \langle v^*, v\rangle = \|v\|_V^2 \quad \text{und} \quad \|v^*\|_{V^*} = \|v\|_V\,.$$

Dann gilt für beliebige $u\in V$:

$$\begin{aligned}\langle v^*, u-v\rangle &= \langle v^*, u\rangle - \|v\|_V^2 \leq \|v^*\|_{V^*}\cdot\|u\|_V - \|v\|_V^2 = \\ &= \|v\|_V\cdot\|u\|_V - \|v\|_V^2 \leq \frac{\|v\|_V^2+\|u\|_V^2}{2} - \|v\|_V^2 = \frac{\|u\|_V^2}{2} - \frac{\|v\|_V^2}{2} = \\ &= \varphi(u)-\varphi(v)\,,\end{aligned}$$

was aber bedeutet, dass

$$v^*\in\partial\varphi(v) \qquad \text{bzw. auch} \qquad J(v)\subset\partial\varphi(v)\,.$$

Damit ist beweisen, dass für alle $v\in V$ gilt:

$$\partial\left(\frac{1}{2}\,\|v\|_V^2\right) = J(v)\,,$$

wobei $J: V\rightrightarrows V^*$ die Dualitätsabbildung bezeichnet.

Sei nun $\varphi(v) = \max(0, \|v\|_V^2 - 1)$ für $v \in V$.
Sei zunächst $v \in \mathbb{B}_V$, bzw. gelte

$$\|v\|_V < 1\,.$$

Die Subgradientenungleichung hat in diesem Fall, wegen $\varphi(v) = 0$, die Form:

$$\langle v^*, u - v\rangle \le \varphi(u) \qquad \text{für beliebige } \ u \in V\,.$$

Nun gilt für $\varepsilon = 1 - \|v\|_V > 0$, dass

$$v + \varepsilon\, \mathbb{B}_V \subset \mathbb{B}_V\,,$$

da für alle $w \in \mathbb{B}_V$ gilt:

$$\|v + \varepsilon\, w\|_V \le \|v\|_V + \varepsilon\|w\|_V < \|v\|_V + \varepsilon \cdot 1 = \|v\|_V + 1 - \|v\|_V = 1\,.$$

Sei nun $u \in V$ beliebig und $t > 0$ hinreichend klein, so dass $v + tu \in \mathbb{B}_V$ gilt. Dann ergibt die Subgradientenungleichung, dass für alle $v^* \in \partial\varphi(v)$ gelten muss:

$$\langle v^*, (v + tu) - v\rangle = t\langle v^*, u\rangle \le \varphi(v + tu) = 0\,.$$

Teilen durch $t = t(u) > 0$ ergibt, dass für alle $u \in V$ gelten muss:

$$\langle v^*, u\rangle \le 0 \qquad \text{bzw.} \qquad v^* = 0\,,$$

bzw. für alle $v \in \mathbb{B}_V$ gilt die Implikation:

$$v^* \in \partial\varphi(v) \Rightarrow v^* = 0\,.$$

Das Nullfunktional erfüllt andererseits die Subgradientenungleichung in allen Punkten v mit $\varphi(v) = 0$, da die Abbildung φ nichtnegativ ist. Damit gilt insgesamt:

$$\|v\|_V < 1 \Rightarrow \partial\varphi(v) = \{0\}\,.$$

Sei nun $\|v\|_V > 1$, bzw. gelte $v \in V\backslash\mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)$. Die Subgradientenungleichung für beliebige $v^* \in \partial\varphi(v)$ lautet dieses mal:

$$\langle v^*, u - v\rangle \le \varphi(u) - \varphi(v) = \langle v^*, u - v\rangle \le \varphi(u) - (\|v\|_V^2 - 1)\,.$$

Nun gilt für $\varepsilon = \|v\|_V - 1 > 0$ in diesem Fall auch:

$$v + \varepsilon\mathbb{B}_V \subset V \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)\;,$$

da für beliebige $w \in \mathbb{B}_V$ nun gilt:

$$\|v + \varepsilon\, w\|_V \ge \|v\|_V - \|\varepsilon\, w\|_V = \|v\|_V - \varepsilon\, \|w\|_V > \|v\|_V - \varepsilon = 1\,.$$

Für beliebige $u \in V$ gibt es also wieder ein $t = t(u) > 0$ mit $v + t \cdot u \in V \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)$ und überdies auch

$$v + [0, t] \cdot u = \{v + \tau \cdot u \;:\; \tau \in [0, t]\,\} \subset V \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)\;.$$

Die Subgradientenungleichung liefert damit für beliebige $v^* \in \partial\varphi(v)$:

$$\begin{aligned}\langle v^*, (v + \tau \cdot u) - v\rangle = \tau\langle v^*, u\rangle &\le \varphi(v + \tau \cdot u) - (\|v\|_V^2 - 1) = \\ &= \|v + \tau \cdot u\|_V^2 - \|v\|_V^2 \le \tau \cdot \left(2\|v\|_V\|u\|_V + \tau\|u\|_V^2\right)\;,\end{aligned}$$

wobei $u \in V$ und $0 < \tau \in]0, t(u)]$ beliebig sind. Teilen durch $\tau > 0$ und der Grenzübergang $\tau \to 0^+ <$ liefern damit für beliebige $u \in V$:

$$\langle v^*, u\rangle \le 2\|v\|_V\|u\|_V\,,$$

bzw. für alle $v^* \in \partial\varphi(v)$ gilt nun:

$$\|v^*\|_{V^*} \leq 2\|v\|_V \,.$$

Aus $v + \varepsilon\mathbb{B}_V \subset V \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)$ folgt insbesondere nun auch

$$v + \frac{\varepsilon}{\|v\|_V}\,]-1,1[\subset V \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)\;,$$

woraus für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \dfrac{\varepsilon}{\|v\|_V}$ die Subgradientenungleichung liefert:

$$\langle v^*, (1+t)v - v\rangle = t\langle v^*, v\rangle \leq \varphi((1+t)v) - \varphi(v) = ((1+t)^2 - 1)\,\|v\|_V^2 = (2t+1)\,\|v\|_V^2 \,.$$

Teilen durch $t \lesseqgtr 0$ und der beidseitige Grenzübergang $t \to \pm 0$ ergeben damit insgesamt:

$$\langle v^*, v\rangle = 2\|v\|_V^2 \,.$$

Das ergibt die Mengeninklusion:

$$\partial\varphi(v) \subset 2J(v)\,.$$

Andererseits gilt für alle $v^* \in 2J(v)$ und beliebige $u \in V$:

$$\langle v^*, u - v\rangle = \langle v^*, u\rangle - \langle v^*, v\rangle = \langle v^*, u - 2\|v\|_V^2 \,.$$

Mit

$$|\langle v^*, u\rangle| \leq \|v^*\|_{V^*}\|u\|_V = 2\|v\|_V\|u\|_V \leq \|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \,,$$

ergibt das die Ungleichung:

$$\langle v^*, u - v\rangle \leq \|u\|_V^2 - \|v\|_V^2 \,.$$

Ist nun $\|u\|_V \leq 1$, so gilt $\varphi(u) = 0$ und die obere Ungleichung ergibt:

$$\langle v^*, u - v\rangle \leq 1 - \|v\|_V^2 = -\varphi(v) = \varphi(u) - \varphi(v)\,.$$

Ist andererseits $\|u\|_V > 1$, so gilt $\varphi(u) = \|u\|_V^2 - 1$ und die obere Ungleichung ergibt:

$$\langle v^*, u - v\rangle \leq \|u\|_V^2 - 1 + 1 - \|v\|_V^2 = \|u\|_V^2 - 1 - (\|v\|_V^2 - 1) = \varphi(u) - \varphi(v)\,.$$

Dies bedeutet, dass die Subgradientenungleichung erfüllt ist für alle $v^* \in 2J(v)$ und alle $u \in V$, bzw. es gilt auch $2J(v) \subset \partial\varphi(v)$, insgesamt gilt also die Implikation:

$$\|v\|_V > 1 \Rightarrow \partial\varphi(v) = 2J(v)\,.$$

Gelte nun letztendlich $\|v\|_V = 1$. In Analogie zur Teilaufgabe (b)(iv) erwarten wir dass folgende Aussage gilt:

$$\partial\varphi(v) = [0,2]\cdot J(v) = \{t\cdot v^* \;:\; v^* \in J(v) \quad \text{und} \quad t \in [0,2]\,\}\,.$$

Da für alle v mit $\|v\|_V = 1$ gilt:

$$J(v) = \{v^* \in V^* \;:\; \|v^*\|_V^* = \langle v^*, v\rangle = 1\,\}\,,$$

erwarten wir hier also:

$$\partial\varphi(v) = \{v^* \in V^* \;:\; \|v^*\|_V^* = \langle v^*, v\rangle \in [0,2]\,\}\,.$$

Sei $v^* \in \partial\varphi(v)$ beliebig. Mit $\varphi(v) = 0$ ergibt die Subgradientenungleichung für alle $u \in V$ nun:

$$\langle v^*, u - v\rangle \leq \varphi(u)\,.$$

Für $t > 0$ ergibt das mit $\|(1+t)\cdot v\|_V = 1+t > 1$ insbesondere:

$$\langle v^*, (1+t)v - v\rangle = t\langle v^*, v\rangle \leq \varphi((1+t)v) = \|(1+t)v\|_V^2 - 1 = 2t + t^2\,.$$

Teilen durch $t > 0$ und der Grenzübergang $t \to 0^+$ ergeben damit:

$$\langle v^*, v\rangle \leq 2\,.$$

Andererseits gilt für alle $t \in]0,2[$ mit $1-t \in]-1,1[$ auch

$$\|(1-t)\cdot v\|_V = |1-t|\cdot\|v\|_V < 1 \quad \text{woraus folgt} \quad \varphi((1-t)\cdot v) = 0\,.$$

Dies ergibt also für jeden Subgradienten $v^* \in \partial\varphi(v)$:

$$\langle v^*, (1-t)\cdot v - v\rangle = -t\langle v^*, v\rangle \leq \varphi((1-t)\cdot v) - \varphi(v) = 0 - 0 = 0\,,$$

und damit, da $t \in]0,2[$ positiv wählbar,

$$\langle v^*, v\rangle \geq 0\,.$$

Dies liefert die Implikation:

$$v^* \in \partial\varphi(v) \Rightarrow 0 \leq \langle v^*, v\rangle \leq 2\,.$$

Sei nun $u \in \mathbb{B}_V$ beliebig. Mit $\varphi(u) = 0$ folgt aus der Subgradientenungleichung dann:

$$\langle v^*, u - v\rangle \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle v^*, u\rangle \leq \langle v^*, v\rangle\,,$$

was bedeutet, dass gelten muss:

$$\|v^*\|_{V^*} = \sup_{u\in\mathbb{B}_V}\langle v^*, u\rangle \leq \langle v^*, v\rangle\,.$$

Mit $\|v\|_V = 1$ ergibt das aber auch:

$$\|v^*\|_{V^*} = \sup_{u\in\mathrm{cl}(\mathbb{B}_V)}\langle v^*, u\rangle \geq \langle v^*, v\rangle\,,$$

also insgesamt gilt für alle $v \in V$ mit $\|v\|_V = 1$:

$$v^* \in \partial\varphi(v) \Rightarrow \|v^*\|_{V^*} = \langle v^*, v\rangle \in [0,2]\,,$$

bzw. es gilt die Mengeninklusion:

$$\partial\varphi(v) \subset [0,2]\cdot J(v)\,.$$

Ist umgekehrt $v^* \in [0,2]\cdot J(v) = \{v^* \in V^* : \|v^*\|_V^* = \langle v^*, v\rangle \in [0,2]\}$, so gilt für beliebige $u \in V$:

$$\langle v^*, u - v\rangle = \langle v^*, u\rangle - \langle v^*, v\rangle \leq \|v^*\|_{V^*}\cdot\|u\|_V - \langle v^*, v\rangle\,.$$

Ist nun $\|u\|_V \leq 1$, so gilt damit:

$$\langle v^*, u - v\rangle \leq \|v^*\|_{V^*}\cdot 1 - \langle v^*, v\rangle = 0 = \varphi(u) - \varphi(v)\,,$$

bzw. die Subgradientenungleichung ist erfüllt.
Gilt dagegen $\|u\|_V > 1$, so ergibt die obere Ungleichung:

$$\begin{aligned}\langle v^*, u - v\rangle &\leq \|v^*\|_{V^*}\cdot\|u\|_V - \langle v^*, v\rangle = \|v^*\|_{V^*}\cdot\|u\|_V - \|v^*\|_{V^*} = \\ &= \|v^*\|_{V^*}\cdot(\|u\|_V - 1) \leq 2\cdot(\|u\|_V - 1) \leq 2\cdot\left(\frac{\|u\|_V^2 + 1}{2} - 1\right) = \\ &\leq 2\cdot\frac{\|u\|_V^2 - 1}{2} = \|u\|_V^2 - 1 = \varphi(u) = \\ &= \varphi(u) - \varphi(v)\,.\end{aligned}$$

Die Subgradientenungleichung gilt damit auch für alle Vektoren $u \in V \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{B}_V)$, bzw. es gilt auch die Mengeninklusion:

$$[0,2] \cdot J(v) \subset \partial\varphi(v)\,.$$

Insgesamt gilt also in diesem Fall für die Abbildung φ:

$$\partial\varphi(v) = \begin{cases} \{0\} \subset V^*\,, \quad \text{falls } v \in \mathbb{B}_V\,, \\ [0,2] \cdot J(v) = \{v^* \in V^* \,:\, \|v^*\|_V^* = \langle v^*, v\rangle \in [0,2]\,\}\,, \quad \text{falls } \|v\|_V = 1 \quad \text{und} \\ 2 \cdot J(v) = \{v^* \in V^* \,:\, \|v^*\|_V^* = 2\|v\|_V \quad \text{und} \quad \langle v^*, v\rangle = 2\|v\|_V^2\,\}\,, \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(d) (i) Sei $A \subset V$ eine nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes V.
Die Stützfunktion der Menge A ist die konjugierte Abbildung der Indikatorfunktion $I_A : V \to \{0, +\infty\}$, bzw. die Abbildung $I_A^* : V^* \to]-\infty, +\infty]$ die gegeben ist mittels:

$$I_A^*(v^*) = \sup_{v \in V} \langle v^*, v\rangle - I_A(v) = \sup_{a \in A} \langle v^*, a\rangle\,.$$

Die Stützfunktion ist also eine Abbildung, deren Definitionsbereich der Dualraum V^* des Raumes V ist.
Ein Stützfunktional dagegen ist ein singuläres duales Funktional v^*, dass gebunden ist an einen ausgezeichneten Punkt $a \in A$. Ein Element $v^* \in V^*$ heißt Stützfunktional der Menge A im Punkt $a \in A$, falls gilt:

$$\langle v^*, a\rangle = \sup_{b \in A} \langle v^*, b\rangle\,.$$

Zwischen Stützfunktion und Stützfunktional besteht also folgender Bezug:

$$\mathcal{S}(A, a) = \{v^* \in V^* \,:\, I_A^*(v^*) = \langle v^*, a\rangle\,\}\,,$$

wobei $\mathcal{S}(A, a)$ die Menge aller Stützfunktionale auf die Menge A im Punkt $a \in A$ bezeichnet.

(ii) Sei wieder $A \subset V$ eine beliebige nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes V.
Ist $v \in V \setminus A$ beliebig, so gilt mit $I_A(v) = +\infty$, für alle $v^* \in V^*$ und beliebige $a \in A \neq \emptyset$:

$$\mathbb{R} \ni \langle v^*, a - v\rangle \not\leq I_A(a) - I_A(v) = 0 - \infty = -\infty\,,$$

woraus für alle $v \in V \setminus A$ folgt:

$$\partial I_A(v) = \emptyset\,.$$

Ist dagegen $a \in A$ beliebig, so ist die Bedingung $v^* \in \partial I_A(a)$ äquivalent zu

$$\langle v^*, v - a\rangle \leq I_A(v) - I_A(a) = I_A(v) \quad \text{für alle } v \in V\,.$$

Insbesondere muss für alle $b \in A$ gelten:

$$\langle v^*, b - a\rangle \leq I_A(b) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle v^*, b\rangle \leq \langle v^*, a\rangle\,.$$

Dies bedeutet, dass jeder Subgradient der Indikatorfunktion I_A im Punkt $a \in A$ auch ein Stützfunktional an die Menge A im Punkt $a \in A$ sein muss, bzw. es gilt die Mengeninklusion:

$$\partial I_A(a) \subset \mathcal{S}(A, a)\,.$$

Sei umgekehrt $v^* \in \mathcal{S}(A, a)$ ein beliebiges Stützfunktional der Menge A im Punkt $a \in A$. Aus

$$\langle v^*, a\rangle = \sup_{b \in A} \langle v^*, b\rangle$$

folgt damit für alle $b \in A$:

$$\langle v^*, b - a\rangle \leq 0 = I_A(b) - I_A(a)\,.$$

Ist dagegen $v \in V \setminus A$ so beträgt mit $I_A(v) = +\infty$ und $I_A(a) = 0$ die rechte Seite der Subgradientenungleichung immer $+\infty$, bzw. die Subgradientenungleichung ist erfüllt. Daraus folgt auch die Mengeninklusion $\mathcal{S}(A,a) \subset \partial I_A(a)$. Insgesamt gilt also:

$$\partial I_A(v) = \begin{cases} \mathcal{S}(A,v)\,, & \text{falls } \ v \in A\,, \\ \emptyset\,, & \text{falls } \ v \in V \setminus A\,. \end{cases}$$

(iii) Der Normalenkegel $N_C(c)$ einer nichtleeren konvexen Teilmenge $C \subset V$ ist in einem Punkt $c \in C$ ist die Menge aller Stützfunktionale der Menge C im Punkt $c \in C$, bzw. ist definiert mittels:

$$N_C(c) = \{v^* \in V^* \,:\, \langle v^*, d - c\rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \ d \in C\,\}\,.$$

Damit ist die Aussage $v^* \in N_C(c)$ äquivalent zu

$$\langle v^*, c\rangle = \max_{d \in C} \langle v^*, d\rangle\,,$$

was weiter äquivalent ist zu

$$v^* \in \partial I_C(c)\,.$$

Damit gilt:

$$N_C(c) = \partial I_C(c)\,.$$

Mittels der Stützfunktion I_C^* lässt sich der Normalenkegel $N_C(c)$ charakterisieren durch:

$$N_C(c) = \{v^* \in V^* \,:\, I_C^*(v^*) = \langle v^*, c\rangle\,\}\,.$$

(iv) Berechnung von Normalenkegeln:

Für die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}$ eines normierten Raumes V, beliebigen Vektor $v \in \overline{\mathbb{B}}$ und beliebiges Funktional $v^* \in V^*$ gilt:

$$v^* \in N_{\overline{\mathbb{B}}}(v) \Leftrightarrow \langle v^*, w - v\rangle \leq 0 \qquad \text{für alle } \ w \in \overline{\mathbb{B}}\,.$$

Gilt nun $v \in \mathbb{B}_V$, bzw. ist v ein innerer Punkt der Einheitskugel, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $v + \varepsilon\mathbb{B}_V \subset \mathbb{B}_V \subset \overline{\mathbb{B}_V}$. Für beliebige Vektoren $w \in \mathbb{B}_V$ gilt damit:

$$v + \varepsilon w \in \mathbb{B}_V \Rightarrow \varepsilon\langle v^*, w\rangle = \langle v^*, (v + \varepsilon w) - v\rangle \leq 0\,.$$

Dies ist erfüllt nur für das Nullfunktional, dass andererseits immer ein Stützfunktional ist. Damit gilt:

$$v \in \mathbb{B}_V \Rightarrow N_{\overline{\mathbb{B}}}(v) = \{0\} \subset V^*\,.$$

Ist nun $v \in \partial\mathbb{B}$ ein Randpunkt der Einheitskugel, bzw. ein Einheitsvektor, so lautet die Stützfunktional-Bedingung:

$$\langle v^*, w\rangle \leq \langle v^*, v\rangle \qquad \text{für alle } \ w \in \overline{\mathbb{B}_V}\,,$$

woraus folgt:

$$0 \leq \|v^*\|_{V^*} = \langle v^*, v\rangle\,.$$

Dies ergibt aber, dass entweder $\langle v^*, v\rangle = 0$, oder $\langle v^*, v\rangle > 0$ und $\dfrac{1}{\langle v^*, v\rangle}\, v^* \in J(v)$ gelten muss, wobei $J : V \rightrightarrows V^*$ wieder die Dualitätsabbildung bezeichnet.
Andererseits gilt für jedes Funktional $v^* \in J(v)$ und jede Konstante $\alpha \geq 0$:

$$\alpha = \alpha\langle v^*, v\rangle = \alpha\|v^*\|_{V^*} = \|\alpha v^*\|_{V^*} = \sup_{w \in \mathbb{B}_V} \langle \alpha v^*, w\rangle\,,$$

bzw. für alle $w \in \overline{\mathbb{B}_V}$ gilt:

$$\langle \alpha v^*, v - w\rangle \leq 0 \qquad \text{und damit} \qquad \alpha v^* \in N_{\overline{\mathbb{B}}}(v)\,.$$

Insgesamt gilt also:

$$N_{\overline{\mathbb{B}}}(v) = \begin{cases} \{0\} \subset V^*\,, & \text{falls } \ v \in \mathbb{B} = \operatorname{int}(\overline{\mathbb{B}})\,, \\ [0, +\infty[\, \cdot\, J(v)\,, & \text{falls } \ v \in \partial\mathbb{B}_V\,. \end{cases}$$

Sei nun H Hilbertraum und $\overline{\mathbb{B}_H} \subset H$ die abgeschlossene Einheitskugel im Hilbertraum H. Da im Hilbertraum die Dualitätsabbildung die Identität ist:

$$J(v) = \{w \in H \,:\, \|w\|_H^2 = (w, v)_H = \|v\|_H^2\} = \{v\}\,,$$

was daraus folgt, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit Gleichheit gilt genau dann, wenn die in ihr vorkommenden Vektoren linear abhängig sind, so folgt in diesem Fall anhand der vorherigen Teilaufgabe:

$$N_{\overline{\mathbb{B}_H}}(v) = \begin{cases} \{0\} \subset H\,, & \text{falls } \ v \in \mathbb{B}_H = \operatorname{int}(\overline{\mathbb{B}_H})\,, \\ [0, +\infty[\cdot \{v\}\,, & \text{falls } \ v \in \partial\mathbb{B}_H = \{v \in H \,:\, \|v\|_H = 1\}\,. \end{cases}$$

Im $\mathbb{R}^n$ ist der Dualraum identisch zum Raum selbst, die Stützfunktionale sind also identifizierbar mit Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ und die allgemeine Normalen-Bedingung für einen beliebigen Punkt $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ ist:

$$N_A(a) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \,:\, (\alpha, b - a)_{\mathbb{R}^n} \le 0 \quad \text{für alle } \ b \in A\}\,.$$

Betrachte nun den positiven Orthant $O^+ = [0, +\infty[^n \subset \mathbb{R}^n$. Er besteht aus $n-$Tupeln von nichtnegativen reellen Zahlen. Sein Inneres besteht aus $n-$Tupeln von strikt positiven reellen Zahlen.
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ ein solches $n-$Tupel. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt in diesem Fall:

$$y_{k,-} = x - \frac{x_k}{2}\, e_k \in O^+ \quad \text{und} \quad y_{k,+} = x + \frac{x_k}{2}\, e_k \in O^+\,.$$

Testen der Normale $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_{O^+}(x)$ mit diesen Vektoren liefert:

$$-\frac{x_k}{2} \cdot \alpha_k \le 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_k}{2} \cdot \alpha_k \le 0\,,$$

woraus, da alle Einträge x_k von x strikt positiv sind, folgen muss, dass $\alpha = 0$. Da andererseits der Nullvektor immer die Normalen-Bedingung erfüllt, folgt daraus:

$$x \in]0, +\infty[^n = \operatorname{int}(O^+) \Rightarrow N_{O^+}(x) = \{0\}\,.$$

Sei nun x ein Randpunkt von O^+, bzw. habe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ auch Null-Einträge und sei $\alpha \in N_{O^+}(x)$ eine Normale auf O^+ in x.
Ist für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt, dass $x_k > 0$, so folgt wie bisher durch testen mit den Vektoren $y_{k,+} \in O^+$ und $y_{k,-} \in O^+$, dass $\alpha_k = 0$ gelten muss.
Ist dagegen $x_k = 0$, so gilt mit $x + e_k \in O^+$

$$\alpha_k = (\alpha, e_k)_{\mathbb{R}^n} = (\alpha, (x + e_k) - x)_{\mathbb{R}^n} \le 0\,.$$

Insgesamt lässt sich in diesem Fall zusammenfassend für alle Normalen $\alpha \in N_{O^+}(x)$ schließen:

$$\alpha \in -O^+ \quad \text{und} \quad \alpha_k \cdot x_k = 0 \quad \text{für alle } \ k \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{bzw. } (\alpha, x)_{\mathbb{R}^n} = 0\,.$$

Erfülle umgekehrt ein $\alpha \in \mathbb{R}^n$ die Bedingungen:

$$\alpha \in -O^+ \quad \text{und} \quad (\alpha, x)_{\mathbb{R}^n} = 0\,,$$

so gilt für alle $y \in O^+$:

$$(\alpha, y - x)_{\mathbb{R}^n} = (\alpha, y)_{\mathbb{R}^n} - \underbrace{(\alpha, x)_{\mathbb{R}^n}}_{=0} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\alpha_k}_{\le 0} \cdot \underbrace{y_k}_{\ge 0} \le 0\,,$$

bzw. α erfüllt die Normalenbedingung an O^+ im Punkt x. Insgesamt gilt in beiden Fällen, sowohl wenn x innerer Punkt von O^+ ist, als auch wenn x ein Randpunkt ist, damit:

$$N_{O^+}(x) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \,:\, \alpha \in -O^+ \quad \text{und} \quad (\alpha, x)_{\mathbb{R}^n} = 0\}\,.$$

Bedingungen dieser Art kommen in der Optimierungstheorie vor und heißen Komplementaritätsbedingungen.

Sei nun $C = \mathrm{epi}(\varphi) \subset V \times \mathbb{R}$ der Epigraph einer eigentlichen, konvexen, unterhalbstetigen Funktion $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$. Stützfunktionale der Menge $\mathrm{epi}(\varphi)$ befinden sich im Produktraum $V^* \times \mathbb{R}$.
Für einen beliebigen Punkt $(v, \mu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$ ist die Normalen-Bedingung $(v^*, \alpha) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \mu)$ äquivalent zu:

$$0 \geq \langle (v^*, \alpha), (w, \nu) - (v, \mu) \rangle_{V^* \times \mathbb{R}, V \times \mathbb{R}} = \langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V} + \alpha \cdot (\nu - \mu) \quad \text{für alle} \quad (w, \nu) \in \mathrm{epi}(\varphi)\,.$$

Ist $\mu > \varphi(v)$, so liefert das Testen des Stützfunktionals $(v^*, \alpha) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \mu)$ mit Testpunkten $(v, \varphi(v)) \in \mathrm{epi}(\varphi)$ und $(v, 2\mu - \varphi(v)) \in \mathrm{epi}(\varphi)$

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V} \leq 0 \quad \text{für alle} \quad w \in D(\varphi)\,,$$

wobei $D(\varphi) = \varphi^{-1}(\mathbb{R})$ den effizienten Definitionsbereich von φ bezeichnet.
Sei umgekehrt für einen Punkt $(v, \mu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$ mit $\mu > \varphi(v)$ erfüllt, dass $v^* \in N_{D(\varphi)}(v)$ gilt. Dann erfüllt dass Funktional $(v^*, 0) \in V^* \times \mathbb{R}$ die Normalenbedingung an $\mathrm{epi}(\varphi)$ im Punkt (v, μ), da für alle $(w, \nu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$ gilt:

$$\langle (v^*, 0), (w, \nu) - (v, \mu) \rangle_{V^* \times \mathbb{R}, V \times \mathbb{R}} = \underbrace{\langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V}}_{\leq 0 \text{ da } v^* \in N_{D(\varphi)}(v)} + 0 \cdot (\nu - \mu) \leq 0\,.$$

Damit gilt für alle $v \in D(\varphi)$ und alle $\mu > \varphi(v)$:

$$N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \mu) = N_{D(\varphi)}(v) \times \{0\}_{\mathbb{R}}\,.$$

Sei nun $v \in D(\varphi)$ beliebig und betrachten wir den Punkt $(v, \varphi(v)) \in \mathrm{epi}(\varphi)$. In diesem Punkt ist die Normalenbedingung $(v^*, \alpha) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v))$ äquivalent zu:

$$0 \geq \langle (v^*, \alpha), (w, \nu) - (v, \mu) \rangle_{V^* \times \mathbb{R}, V \times \mathbb{R}} = \langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V} + \alpha \cdot (\nu - \varphi(v)) \quad \text{für alle} \quad (w, \nu) \in \mathrm{epi}(\varphi)\,.$$

Testen mit $(v, \varphi(v) + 1) \in \mathrm{epi}(\varphi)$ ergibt $\alpha \leq 0$. Ist $\alpha = 0$, so gilt wie vorhin die Äquivalenz

$$(v^*, 0) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v)) \Leftrightarrow v^* \in N_{D(\varphi)}(v)\,,$$

also gilt auch hier

$$N_{D(\varphi)}(v) \times \{0\}_{\mathbb{R}} \subset N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v))\,.$$

Sei nun $(v^*, \alpha) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v))$ und $\alpha < 0$. Dann liefert die Normalenbedingung für alle $(w, \nu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$:

$$\langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V} \leq -\alpha \cdot (\nu - \varphi(v)) = |\alpha| \cdot (\nu - \varphi(v))\,,$$

und damit insbesondere für alle $w \in D(\varphi)$:

$$\langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V} \leq |\alpha| \cdot (\varphi(w) - \varphi(v)) \to \left\langle \frac{v^*}{|\alpha|}, w - v \right\rangle_{V^*, V} \leq \varphi(w) - \varphi(v)\,.$$

Dies bedeutet, dass das Funktional $\dfrac{v^*}{|\alpha|}$ die Subgradienten-Bedingung für φ im Punkt $v \in D(\varphi)$ erfüllt, bzw. es gilt die Implikation:

$$\big((v^*, \alpha) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v)) \quad \text{und} \quad \alpha < 0\big) \Rightarrow \frac{v^*}{|\alpha|} \in \partial\varphi(v)\,.$$

Sei letztens umgekehrt $v^* \in \partial\varphi(v)$ und $\alpha < 0$ beliebig. Dann gilt für beliebige $w \in D(\varphi)$ und beliebige $\nu \geq \varphi(w)$:

$$\langle v^*, w - v \rangle_{V^*, V} \leq \varphi(w) - \varphi(v) \leq \nu - \varphi(v) \Rightarrow \langle |\alpha| \cdot v^*, w - v \rangle_{V^*, V} - |\alpha| \cdot (\nu - \varphi(v)) \leq 0\,,$$

was bedeutet, dass $(|\alpha| \cdot v^*, -|\alpha|)$ die Normalen-Bedingung an die Menge $\mathrm{epi}(\varphi)$ im Punkt $(v, \varphi(v))$ erfüllt, bzw. für alle $v^* \in \partial\varphi(v)$ und alle $\alpha < 0$ gilt:

$$(|\alpha| \cdot v^*, -|\alpha|) = (|\alpha| \cdot v^*, \alpha) \in N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v)),$$

zusammenfassend also:

$$]0, +\infty[\cdot (\partial\varphi(v) \times \{-1\}_{\mathbb{R}}) \subset N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v)),$$

und vielmehr

$$]0, +\infty[\cdot (\partial\varphi(v) \times \{-1\}_{\mathbb{R}}) = N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \varphi(v)) \cap (V^* \times] - \infty, 0[\,) .$$

Damit gilt insgesamt:

$$N_{\mathrm{epi}(\varphi)}(v, \mu) = \begin{cases} N_{D(\varphi)}(v) \times \{0\}_{\mathbb{R}}, \quad \text{falls } v \in D(\varphi) \text{ und } \mu > \varphi(v), \\ N_{D(\varphi)}(v) \times \{0\}_{\mathbb{R}} \cup]0, +\infty[\cdot (\partial\varphi(v) \times \{-1\}_{\mathbb{R}}), \\ \qquad\qquad \text{falls } v \in D(\varphi) \text{ und } \mu = \varphi(v) \text{ und} \\ \emptyset, \quad \text{falls } v \notin D(\varphi). \end{cases}$$

(v) Sei $\emptyset \neq A \subset V$ eine beliebige nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes V und gelte $D(I_A^*) \neq \emptyset$, sei also die Stützfunktion I_A^* eigentlich, bzw. gelte für mindestens ein Funktional $v^* \in V^*$:

$$I_A^*(v^*) = \sup_{a \in A} \langle v^*, a \rangle < +\infty .$$

Wir wollen folgende Identität zeigen:

$$I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))} = (I_A)^{**} .$$

Laut Satz 3.7 aus Vorlesung, gilt:

$$(I_A)^{**} = \sup\{\, g : V \to \mathbb{R} \;:\; g \text{ affin und stetig }, \; g \leq I_A \,\}.$$

Außerdem ist $(I_A)^{**} : V \to]-\infty, +\infty]$ eine eigentliche, konvexe, unterhalbstetige Funktion mit $(I_A)^{**} \leq I_A$.
Laut Folgerung 3.8 aus Vorlesung, gilt überdies auch:

$$(I_A)^{**} = \sup\{\, g : V \to] - \infty, +\infty] \;:\; g \text{ konvex und unterhalbstetig }, \; g \leq I_A \,\}.$$

Nun ist die Abbildung $I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))} : V \to \{0, +\infty\}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig, da für ihren effizienten Definitionsbereich gilt:

$$D\left(I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))}\right) = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(A)) \supset A \neq \emptyset \quad \text{ist nichtleer, abgeschlossen und konvex} .$$

Aus $A \subset \mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))$ folgt überdies:

$$I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))} \leq I_A \Rightarrow I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))} \in \{\, g : V \to]-\infty, +\infty] \;:\; g \text{ konvex und unterhalbstetig }, \; g \leq I_A \,\}.$$

Daraus folgt die Ungleichung:

$$I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))} \leq (I_A)^{**} = \sup\{\, g : V \to]-\infty, +\infty] \;:\; g \text{ konvex und unterhalbstetig }, \; g \leq I_A \,\}.$$

Nun sollen wir noch zeigen, dass $(I_A)^{**} \leq I_{\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))}$ gilt. Dazu genügt es, aufgrund der vorangegangenen Ungleichung, zu zeigen, dass für alle Punkte $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))$ gilt:

$$(I_A)^{**}(x) = \sup_{v^* \in D(I_A^*)} (\langle v^*, x \rangle - I_A^*(v^*)) \leq 0 .$$

Sei dazu $v^* \in D(I_A^*)$ beliebig. Dann gilt

$$I_A^*(v^*) = \sup_{a \in A} \langle v^*, a \rangle ,$$

woraus die Ungleichung folgt:

$$\langle v^*, a \rangle \le I_A^*(v^*) \quad \text{für alle } a \in A\,.$$

Anhand der Linearität und Stetigkeit von v^* lässt sich diese Ungleichung erweitern auch auf alle Punkte aus den Mengen $\mathrm{co}(A)$ (mittels Linearität von v^*) und $\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))$ (mittels Stetigkeit von v^*). Damit gilt also auch für alle Punkte $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))$:

$$\langle v^*, x \rangle \le I_A^*(v^*) \quad \text{bzw.} \quad \langle v^*, x \rangle - I_A^*(v^*) \le 0\,.$$

Daraus folgt weiter, da $v^* \in D(I_A^*)$ beliebig war, für beliebige Punkte $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))$:

$$(I_A)^{**}(x) = \sup_{v^* \in D(I_A^*)} \underbrace{(\langle v^*, x \rangle - I_A^*(v^*))}_{\le 0} \le 0\,.$$

Bemerkung: Ist die Zusatzvoraussetzung $D(I_A^*) \neq \emptyset$ nicht erfüllt, was z.B. zutrifft für alle Mengen $A \subset V$ die überall dicht sind in V, so gilt für alle stetigen linearen Funktionale $v^* \in V^*$ dann

$$\sup_{a \in A} \langle v^*, a \rangle = +\infty\,,$$

und damit $I_A^* = \text{const.} = +\infty$, sowie auch $(I_A)^{**} = \text{const.} = +\infty$. Dann gilt die obere Charakterisierung der Menge $\mathrm{cl}(\mathrm{co}(A))$ mittels der Bikonjugierten der Indikatorfunktion I_A nicht. Dies ist auch das einfachste Beispiel dafür, dass die Voraussetzung $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ in Satz 3.7 und Folgerungen 3.8 und 3.9 aus der Vorlesung unverzichtbar ist.

Aufgabe 4.3. (Zusammenhang zwischen Subdifferential und Konjugation)

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4.3: siehe Lösungsvorschläge zu Übungsblatt 4.

Aufgabe 5.2. (Eigenschaften des Subdifferentials)

(a) *(Definitionsbereich des Subdifferentials)*
Sei V normierter Raum und $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ konvex. Laut Satz 4.11 aus Vorlesung ist das Subdifferential von φ in jedem Stetigkeitspunkt von φ nichtleer. Wiederholen Sie den Beweis dieses Satzes, beweisen Sie insbesondere, dass $\mathrm{epi}(\varphi)$ nichtleeres Inneres besitzen muss falls φ in mindestens einem Punkt stetig ist.
Zeigen Sie über die Aussage des Satzes 4.11 hinaus, dass, falls u Stetigkeitspunkt von φ ist, ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Menge:

$$\partial\varphi\big(u + \varepsilon \mathbb{B}_V\big) = \bigcup_{v \in \mathbb{B}_V} \partial\varphi(u + \varepsilon v) \quad \text{beschränkt ist}\,.$$

(b) *(Topologische Eigenschaften des Subdifferentials)*
Sei V normierter Raum und $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Zeigen Sie dass das Subdifferential $\partial\varphi(v) \subset V^*$ in jedem Punkt $v \in V$ abgeschlossen und konvex ist.

(c) *(Folgen der Beschränktheit des Subdifferentials im endlichdimensionalen Fall)*
Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Folgern Sie anhand der Teilaufgaben (a) und (b) dass das Subdifferential von φ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt ist.
Zeigen Sie weiter: ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige beschränkte Menge, so ist die Menge

$$\bigcup_{x \in X} \partial\varphi(x) \quad \text{ebenfalls beschränkt}\,.$$

Konvergiert die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ gegen einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}^n$ und gilt

$$d_k \in \partial\varphi(x_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,,$$

so ist die Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und für jeden Häufungspunkt d dieser Folge gilt:

$$d \in \partial\varphi(x)\,.$$

Folgern Sie nun, dass φ auf jeder beschränkten Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist, bzw. das ein $L_X > 0$ existiert, so dass

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L_X \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{gilt für alle } \; x\,, y \in X\,.$$

Überdies gilt für alle $x \in X$ und beliebige Richtungen $h \in \mathbb{R}^n$:

$$|\varphi'(x; h)| \leq L\|x\|_{\mathbb{R}^n}\,.$$

(d) *(Zusammenhang des Subdifferentials und der Richtungsableitungen)*
Sei V normierter Raum und $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt:

$$\partial\varphi(v) = \{v^* \in V^* \;:\; \varphi'(v; h) \geq \langle v^*, h\rangle \text{ für alle } h \in V\,\}\,.$$

Ist φ stetig im Punkt $v \in V$, so gilt für alle Richtungen $h \in V$:

$$\varphi'(v, h) = \sup\{\,\langle v^*, h\rangle \;:\; v^* \in \partial\varphi(v)\,\}\,.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.2. folgt noch.

Aufgabe 5.3. (Rechenregeln für das Subdifferential)

(a) Sei V normierter Raum und $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ konvex. Zeigen Sie dass für alle $u\,, v \in V$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\partial\varphi(u) \cap \partial\varphi(v) \subset \partial\varphi\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)\,.$$

(b) *(Additionsformel für Subdifferentiale)*
Beweisen Sie den Satz 4.13 aus Vorlesung:
sei V normierter Raum und $\varphi_1\,, \varphi_2 \;:\; V \;\to]-\infty\,, +\infty]$ konvex und eigentlich. Gibt es wenigstens einen Punkt $u_0 \in D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2)$ in dem mindestens eine der Abbildungen $\varphi_1\,, \varphi_2$ stetig ist, so gilt:

$$\partial\big(\varphi_1 + \varphi_2\big)(u) = \partial\varphi_1(u) + \partial\varphi_2(u) \quad \text{für alle } \; u \in V\,.$$

(c) *(Kettenregel für das Subdifferential)*
Beweisen Sie den Satz 4.14 aus Vorlesung:
seien V, W Banachräume, $A \in L(V, W)$, $\varphi : W \to]-\infty, +\infty]$ konvex. Gibt es mindestens einen Punkt $u_0 \in V$ so dass φ stetig ist im Punkt Au_0, so gilt:

$$\partial\big(\varphi \circ A\big)(u) = \big(A^*\partial\varphi\big)(Au) \quad \text{für alle } \; u \in V\,.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.3. folgt noch.