Лабораторна робота № 1

Одномірна оптимізація

Завдання одновимірної мінімізації представляють собою просту математичну модель оптимізації, в якій цільова функція залежить від однієї змінної, а допустимими значеннями є відрізок дійсної осі:

$$f(x) \to min,$$

$$x \text{ належить } [a, b].$$

Максимізація цільової функції еквівалента мінімізації (**f(x) → *max***) еквівалентна мінімізації протилежної величини ***(-f(x) → min)***, тому, не применшуючи спільності можна розглядати тільки завдання мінімізації.

До математичним завданням одновимірної мінімізації призводять прикладні задачі оптимізації з однієї керованої змінної. Крім того, необхідність в мінімізації функцій однієї змінної виникає при реалізації деяких методів вирішення більш складних завдань оптимізації.

Для вирішення завдання мінімізації функції ***f (x)*** на відрізку ***[a, b]*** на практиці, як правило, застосовують наближені методи. Вони дозволяють знайти рішення цієї задачі з необхідною точністю в результаті визначення кінцевого числа значень функції ***f (x)*** і її похідних в деяких точках відрізка ***[a, b]***. Методи, які використовують тільки значення функції і які не потребують обчислення її похідних, називаються прямими методами мінімізації.

Великою перевагою прямих методів є те, що від цільової функції не потрібно знаходити похідну і, більш того, вона може бути не задана в аналітичному вигляді. Єдине, на чому гуртуються алгоритми прямих методів мінімізації, це можливість визначення значень ***f (x)*** в заданих точках.

Розглянемо найбільш поширені на практиці прямі методи пошуку точки мінімуму. Найслабшим вимогою на функцію ***f (x),*** що дозволяє використовувати ці методи, є її **унімодальність**. Тому далі будемо вважати функцію $f\ (x)$ унімодальної на відрізку ***[a, b].***

Метод перебору

Метод перебору або рівномірного пошуку є найпростішим з прямих методів мінімізації і складається у наступних діях.

Розіб'ємо відрізок [a, b] на n рівних частин точками ділення:

$$x_i = a + i\ (b - a) / n,\ i = 0, \dots n$$

Обчислюємо значення $F\ (x)$ в точках x_i, шляхом порівняння знайдемо точку x_m, де m - це число від 0 до n, таку, що

$F\ (x_m) = \min F\ (x_i)$ для всіх i від 0 до n.

Погрішність (похибка) визначення точки мінімуму x_m функції $F\ (x)$ методом перебору не перевищує величини

$$\varepsilon = (b-a) / n.$$

Метод послідовного уточнення

Цей метод є розвитком методу перебору. Суть його полягає в перевизначені кордонів (меж) відрізку, на якому обчислюються значення функції в $m = \{0, n\}$ точках, на наступних ітераціях.

Тобто на кожній наступній з ітерацій розглядається відрізок

$[a_k, b_k]$, де k - номер ітерації

$F_k\ (x_m) = \min F\ (x_i)$ *для всіх i від* 0 *до* n.

$a_k = x_l$, де $l = m-1$

$b_k = x_r$, де $r = m + 1$

В цьому випадку можна оцінити похибку

$\varepsilon < 2^{(k-1)} * (b-a) / n^k$

<u>Завдання</u>

досліджувані функції

$F_1(x) = (x - N/2)^2$

$F_2(x) = (x - N/2)^2 + N * x$

$F_3(x) = (x - N/2)^2 + N * x^2$

інтервал

$X_{min} = -N \qquad X_{max} = +N$

N- номер за списком

n = 400** – **для методу перебору

k = 1, 2, …, 20, n = 20 – для методу послідовного уточнення

***Z (k) = | X*opt - Xmin (k) |, де – X*opt* - <u>аналітичний мінімум*</u>,**

***Xmin (k)* - мінімум на *k*- ой ітерації**

**Аналітичний мінімум знаходиться через похідну, яка = 0.*

1. **Побудувати графіки функцій $F_{1,2,3}$ на заданому інтервалі (один графік).**
2. **Визначити *Xopt* для $F_{1,2,3}$ методом перебору і методом послідовних уточнень.**
3. **Для методу послідовних уточнень побудувати:**

   3.1 таблиці і графіки *Xmin (k)* – *на одному графіку для 3-х функцій*,

   3.2 таблиці і графіки функцій *Fmin1,2,3 (Xmin(k))* – *на одному графіку для 3-х функцій*,

   3.3 таблиці і графіки *Z (k)* *– на одному графіку для 3-х функцій*.
4. **Порівняти результати використання методів.**