

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з дисципліни «ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ»

Частина 2: **«РЕАКТИВНІ СХЕМИ»**

для студентів напрямку 6.050801 – «Мікро- та наноелектроніка»

Київ НТУУ-КПІ - 2015

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія електронних кіл», частина 2 «Реактивні схеми» для студентів напряму підготовки 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за спеціальностями «Фізична та біомедична електроніка» і «Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої»/ О.О. Витязь, В.І. Тимофєєв, Т.А. Саурова, – К.: НТУУ«КПІ», 2015. – 98 с.

Гриф затверджений Вченою радою ФЕЛ НТУУ «КПІ»
протокол № ____ від _____ 2015 р.

Затверджено
на засіданні кафедри
фізичної та біомедичної електроніки
Протокол №_26_ від 16 червня 2015 р.

Укладачі: к.т.н., доцент Витязь Олег Олексійович
д.т.н., професор Тимофєєв Володимир Іванович
к.т.н., ст. викладач Саурова Тетяна Асадівна

Відповідальний редактор

В.О. Москалюк, к.т.н.,
професор кафедри ФБМЕ
ФЕЛ НТУУ «КПІ»

Видання виправлене та доповнене.

ЗМІСТ

Передмова	4
1. Реактивні схеми першого порядку	5
2. Метод змінних стану	17
3. Аналіз періодичних режимів	29
4. Спектральний аналіз сигналів	42
5. Частотні характеристики	49
6. Операторний метод	57
7. Апроксимація частотних характеристик	65
8. Зворотний зв'язок	72
9. Курсова робота	80
10. Інформаційно-довідковий додаток	88
Бібліографічний список	97

Методичні настанови призначені для набуття студентом навичок та практичного досвіду застосування знань, отриманих під час вивчення теоретичних положень другого розділу «Реактивні схеми» дисципліни «Теорія електронних кіл». Студенту необхідно заздалегідь вивчити відповідні лекції, що дозволить йому успішно виконувати рекомендовані вправи та розв'язувати задачі.

У методичних настановах розглянуто вісім тем відповідно до тематичного розподілу теоретичного матеріалу згідно з навчальною програмою. Коротко наведена інформація щодо призначення методів та області їх застосування. Описані практичні аспекти застосування формул та алгоритмів, можливі труднощі та способи їх подолання.

Набути навичок застосування теоретичних положень дисципліни для вирішення практичних завдань допоможе виконання курсової роботи, кількість варіантів якої достатнє для отримання кожним студентом індивідуального завдання.

Необхідний для виконання завдань довідковий матеріал наведено у таблицях, які знаходяться в інформаційно-довідковому додатку. Посилання на відповідні таблиці наведені у тексті у разі необхідності. Додаткову інформацію за потреби можна отримати у літературних джерелах, перелік яких наведений у кінці методичних настанов.

1. РЕАКТИВНІ СХЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

До реактивних схем першого порядку відносяться схеми, які окрім резистивних компонентів та залежних чи незалежних джерел струму або напруги містять також один реактивний двохполюсник (ємність або індуктивність). Якщо схема містить кілька ємностей або кілька індуктивностей, але вони з'єднані так, що їх можна замінити однією еквівалентною ємністю або однією еквівалентною індуктивністю, то така схема також відноситься до схем першого порядку.

Обчислювати струми та напруги у реактивних схемах першого порядку можна на основі методів, які викладаються у розділі “Резистивні схеми” дисципліни «Теорія електронних кіл» [3,4]. Так, наприклад, якщо резистивна частина схеми першого порядку лінійна, то її можна за теоремою про еквівалентне джерело замінити відносно вузлів підключення реактивного двохполюсника еквівалентним джерелом напруги (схемою Тевенена) або еквівалентним джерелом струму (схемою Нортонна) (див. рис.1.1).

Для додатніх значень часу t математична модель еквівалентних джерел з реактивним навантаженням (див. рис. 1.1) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку:

$$a \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = v; \quad x(0) = X_0; \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

де $a=R_3C$; $x(t)=U_C(t)$; $v=e_3=j_3R_3$ для схем, які містять ємність C , або $a=G_3L$; $x(t)=i_L(t)$; $v=j_3=G_3e_3$; для схем, які містять індуктивність L .

Коефіцієнт a є сталою часу реактивної схеми першого порядку і має розмірність часу, $x(0)$ – значення електричної змінної $u_C(t)$ або $i_L(t)$ при $t=0$, тобто початкове значення. Параметри еквівалентного

джерела e_e , R_e , j_e визначаються за теоремою про еквівалентне джерело.

Розв'язок рівняння (1.1), незважаючи на те, що сигнал джерела v незмінний (постійний), є наступною функцією часу:

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{t}{a}} + v(1 - e^{-\frac{t}{a}}); \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

яку можна розглядати як суму вільної (перший доданок) та вимушеної (другий доданок) складових:

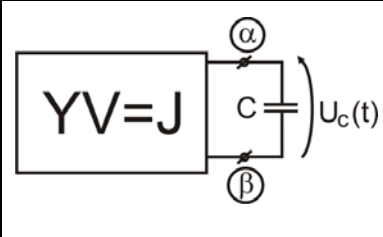
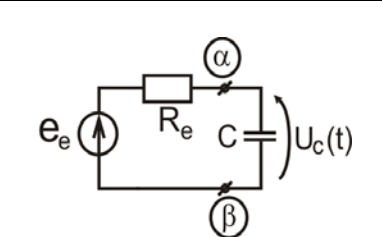
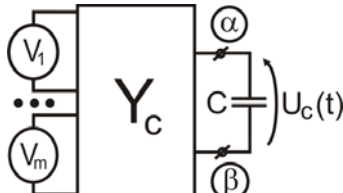
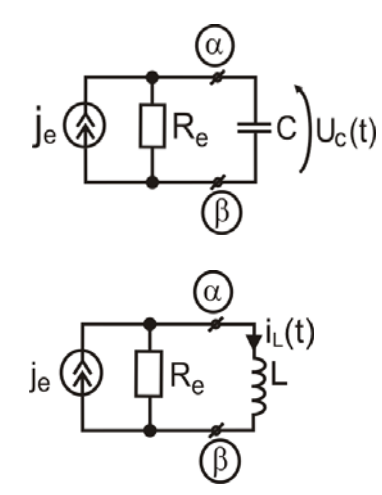
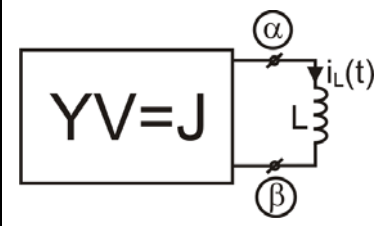
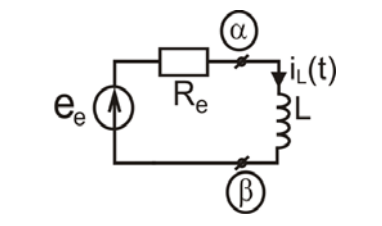
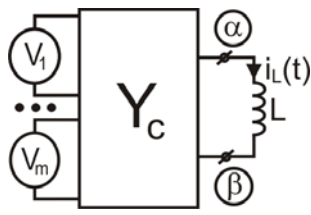
Резистивна частина схеми представлена вузловою моделлю	Еквівалентні схемні моделі реактивних схем першого порядку	Резистивна частина схеми представлена як система з багатьма входами
		
Обчислення параметрів еквівалентних джерел $e_e = u_{\alpha\beta}^{xx} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^n \Delta_{s(\alpha+\beta)} J_s;$ $R_e = R_{\alpha\beta} = \frac{\Delta_{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}}{\Delta};$ $j_e = i_{\alpha\beta}^{k3} = \frac{\sum_{s=1}^n \Delta_{s(\alpha+\beta)} J_s}{\Delta_{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}}.$		Обчислення параметрів еквівалентних джерел $e_e = u_{\alpha\beta}^{xx} = \sum_{s=1}^m K_{s\alpha\beta}^{xx} v_s;$ $R_e = R_{\alpha\beta}, \quad (v_s = 0);$ $j_e = i_{\alpha\beta}^{k3} = \sum_{s=1}^m K_{s\alpha\beta}^{k3} v_s.$
		

Рис. 1.1. Заміна реактивної схеми першого порядку еквівалентною схемною моделлю з реальним джерелом струму (схемою Нортон) або реальним джерелом напруги (схемою Тевенена).

$$x(t) = x_e(t) + x_{np}(t). \quad (1.3)$$

Якщо сигнал еквівалентного джерела змінюється у часі, тобто $v = v(t) = e_e(t)$ або $v = v(t) = j_e(t)$, то математична модель (1.1) приймає такий вигляд:

$$a \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = v(t); \quad x(0) = X_0; \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Розв'язок рівняння (1.4) $x(t)$ у такому разі визначається за наступною формулою:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{a}} + \frac{1}{a} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{a}} v(\tau) d\tau, \quad (1.5)$$

де τ - змінна інтегрування.

Знайшовши напругу $u_C(t)$ або струм $i_L(t)$ за формулою (1.2) або (1.5), можна визначити будь-який струм та напругу у резистивній частині вихідного кола. Для цього можна скористатися теоремою компенсації та замінити ємність ідеальним джерелом напруги E_C з напругою $u_C(t)$, а індуктивність – ідеальним джерелом струму J_L зі струму $i_L(t)$ (див. рис. 1.2). Струм ємності $i_C(t)$ та напругу на індуктивності можна визначити за відповідним компонентним рівнянням у диференціальній формі (див. табл. П1 у додатку). Після заміни реактивного двополюсника відповідним ідеальним джерелом отримаємо резистивну схему, яку можна проаналізувати будь-яким методом аналізу лінійних реактивних схем (методом еквівалентних

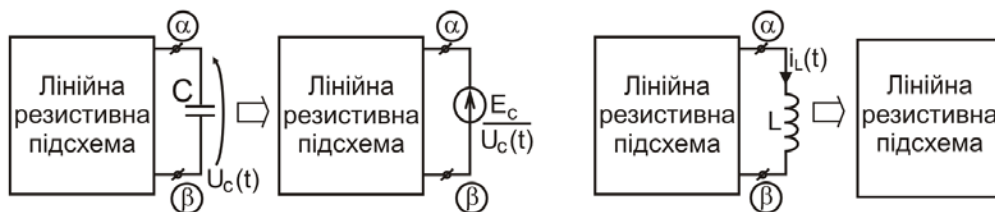


Рис. 1.2. Заміна за теоремою компенсації реактивної схеми першого порядку лінійною резистивною схемою.

перетворень, вузловим методом та ін.).

Якщо сигнал еквівалентного джерела має постійне значення, то для перевірки правильності знайдених струмів і напруг необхідно порівняти їх значення в усталеному стані (тобто коли час прямує до нескінченості: $t \rightarrow \infty$) із значеннями цих же струмів і напруг у резистивній схемі, отриманій із вихідної схеми наступним чином: усі ємності видалені зі схеми (розірвані), а індуктивності замінені на провідники (закорочені).

Якщо у реактивній схемі потрібно знайти один струм або одну напругу $y(t)$, що виникає під дією довільного сигналу $v(t)$ незалежного джерела, то таку схему зручно представити у вигляді системи з двома сторонами (див. рис. 1.3а).

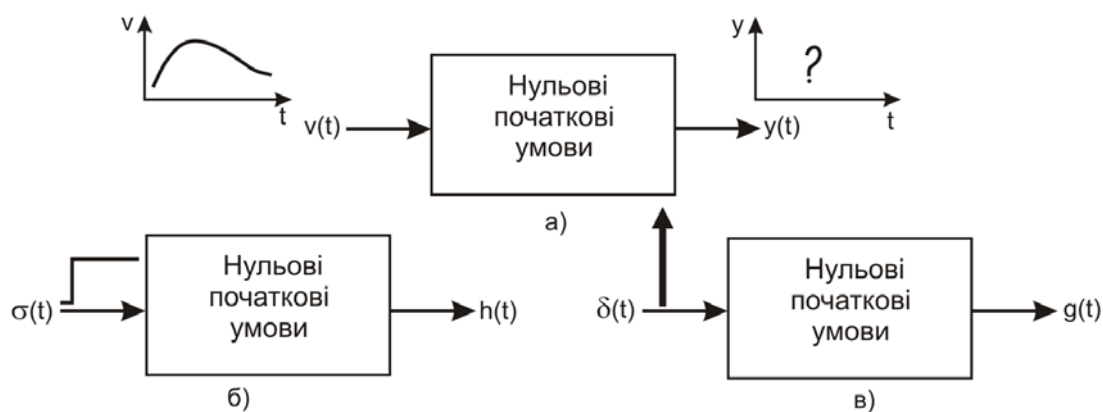


Рис. 1.3. Реактивна схема як система з двома сторонами:
 а) $y(t)$ - реакція на довільний вплив; б) схема визначення перехідної характеристики $h(t)$; в) схема визначення імпульсної характеристики $g(t)$.

Для визначення реакції $y(t)$ на вплив $v(t)$ необхідно спочатку визначити перехідну характеристику $h(t)$ (рис. 1.3б) або імпульсну характеристику $g(t)$ (рис. 1.3в), а потім скористатися інтегралом суперпозиції (інтегралом Дюамеля) або інтегралом-згортокою відповідно (див. рис.1.4).

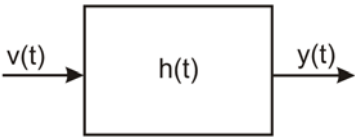
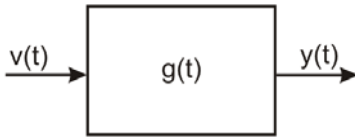
 <p><i>Інтеграл суперпозиції (пов'язує реакцію з сигналом джерела та перехідною характеристикою):</i></p> $ \begin{aligned} y(t) &= \\ &= v(0)h(t) + \int_0^t v'(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\ &= h(0)v(t) + \int_0^t v(\tau)h'(t-\tau)d\tau = \\ &= v(0)h(t) + \int_0^t v'(t-\tau)h(\tau)d\tau = \\ &= h(0)v(t) + \int_0^t v(t-\tau)h'(\tau)d\tau. \end{aligned} $	 <p><i>Інтеграл-згортка (пов'язує реакцію з сигналом джерела та імпульсною характеристикою):</i></p> $ \begin{aligned} y(t) &= \\ &= \int_0^t v(\tau)g(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t v(t-\tau)g(\tau)d\tau = \\ &= v(t) * g(t). \end{aligned} $
---	--

Рис. 1.4. Визначення реакції системи на довільний сигнал впливу $v(t)$.

Перехідну $h(t)$ та імпульсну $g(t)$ характеристики системи з двома сторонами визначають наступним чином (див. рис. 1.3): на вхід системи за нульових початкових умов $x(0)=0$ діють сигналом у вигляді функції Хевісайда (одиничний ступінчатий сигнал) при визначенні перехідної характеристики $h(t)$, або сигналом у вигляді функцій Дірака (одиничний імпульсний сигнал) - при визначенні імпульсної характеристики $g(t)$. За таких умов зазначені характеристики будуть спостерігатися на виході системи, а за своїм фізичним змістом це буде струм або напруга на навантаженні системи.

При визначенні перехідною або імпульсною характеристики тип впливу (струм або напруга) визначається типом незалежного

джерела, підключеного до входу системи, а тип реакції (струм або напруга) – типом сигналу $y(t)$.

Визначивши відповідну перехідну (імпульсну) характеристику, можна знайти реакцію на довільне вплив $v(t)$ (див. рис.1.4), де функції $h(\tau)$ і $v(\tau)$ – це функції $h(t)$ і $v(t)$, у яких час t замінений на підінтегральну змінну τ , функція $h(t - \tau)$ – заміною t на $t - \tau$ і т.д.

Якщо схема першого порядку містить декілька незалежних джерел сигналів впливу, то її можна представити як систему з багатьма входами. У такому випадку для визначення реакції $y(t)$ такої системи можна скористатися принципом суперпозиції відповідно до якого реакція системи з багатьма сторонами (входами та виходом) знаходиться як сума реакцій m систем з двома сторонами, де m – кількість входів у вихідній системі. Визначення реакції у кожній з m систем з двома сторонами виконується таким же чином, як було зазначено раніше (див. рис. 1.3, 1.4). Шукана реакція $y(t)$ визначається як сума окремих знайдених реакцій (див. рис. 1.5).

Необхідно запам'ятати наступні співвідношення:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t); h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau; \delta(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t); \sigma(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau.$$

Еквівалентні перетворення різних з'єднань ємностей та індуктивностей наведені у додатку у табл. П.1 та П.2.

Якщо початкові умови для ємності ненульові ($u_C(0) \neq 0$) то для додатніх моментів часу її замінюють схемною моделлю, утвореною такою ж ємністю та послідовно підключеним джерелом постійної напруги, напруга якого дорівнює напрузі на ємності у початковий момент часу (початкова напруга на ємності моделі дорівнює нулю, див. табл. П.1).

Аналогічно, якщо початкові умови для індуктивності ненульові ($i_L(0) \neq 0$), то для додатніх моментів часу її замінюють схемною моделлю, утвореною такою ж індуктивністю та підключеним паралельно джерелом постійного струму, струм якого дорівнює струму через індуктивність у початковий момент часу (початковий струм через індуктивність *моделі* дорівнює нулю, див. табл. П.2).

У випадку, якщо резистивна частина схеми замінюється еквівалентним джерелом, джерела моделей також приймають участь у визначенні номіналів e_s або j_s (див. рис. 1.1) .

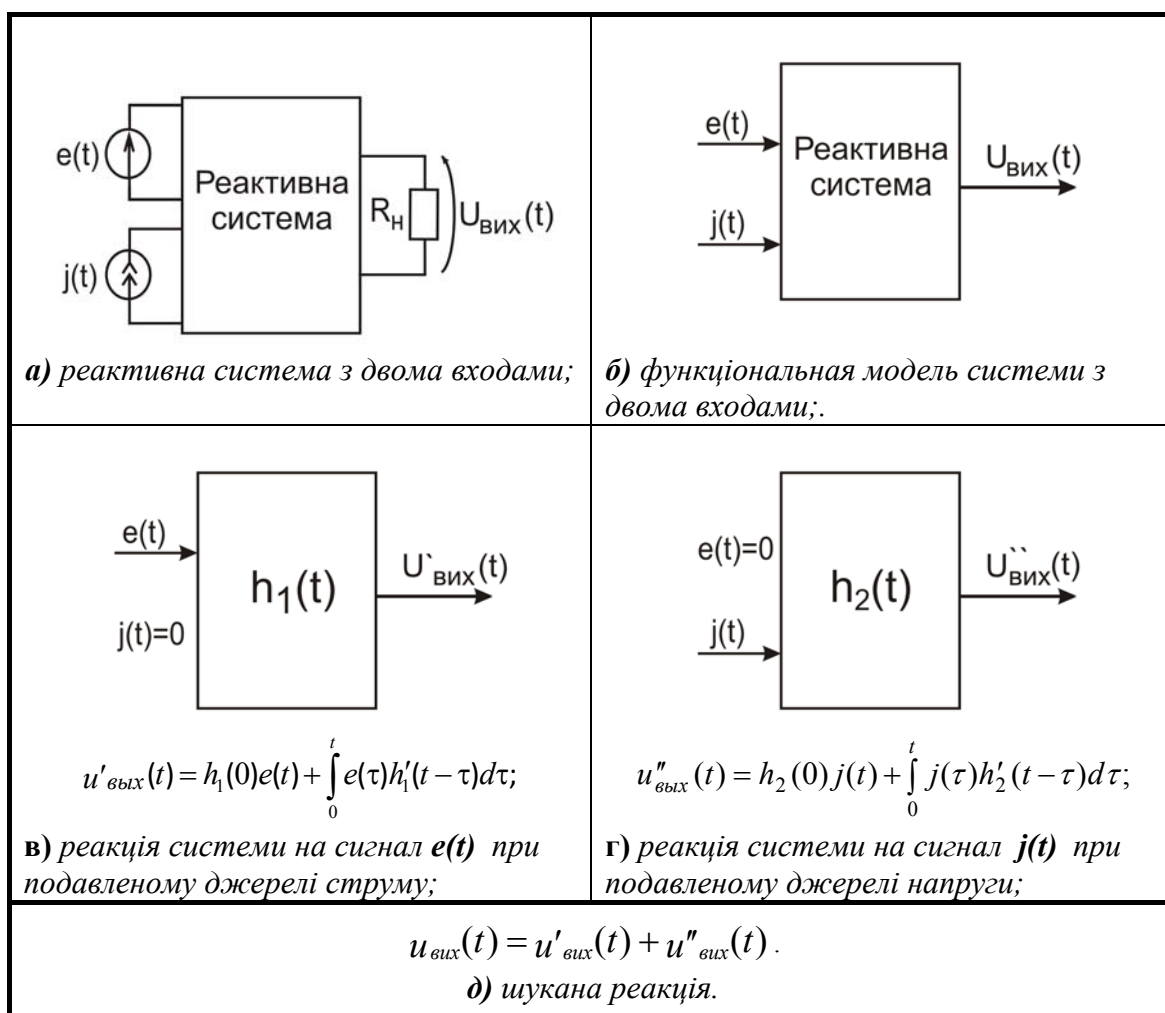


Рис. 1.5. Обчислення реакції системи з багатьма входами за принципом суперпозиції

Задачі та вправи

- 1.1. Визначити у схемі рис.1.6 струми $i_{R1}(t)$ та $i_{R2}(t)$. У момент комутації $t=0$ ємність C не заряджена.
- 1.2. У схемі рис. 1.7 визначити струми $i_{R1}(t)$ та $i_{R2}(t)$.
- 1.3. Визначити напругу $u_{ab}(t)$ у схемі рис.1.8.
- 1.4. У схемі рис. 1.9 визначити $u_{\text{блх}}(t)$, якщо $e(t)=\sigma(t)$ і $u_C(0)=0$.
- 1.5. Визначити $u_{\text{блх}}(t)$ у схемі рис.1.10 при $j(t)=\sigma(t)$ та $i_L(0)=0$.
- 1.6. Визначити аналітичний вираз для струму $i_L(t)$ у схемі рис.1.11.
- 1.7. У схемі рис. 1.12 визначити струми $i_{R1}(t)$, $i_{R2}(t)$ та $i_C(t)$.
- 1.8. Визначити напругу $u_C(t)$ і струми $i_{R1}(t)$, $i_{R2}(t)$ у схемі рис.1.6, вважаючи, що ключ був спочатку замкнутий, а у момент комутації $t=0$ він розмикається.
- 1.9. У схемі рис. 1.13 визначити напругу $u_L(t)$.
- 1.10. Визначити струми $i_{R1}(t)$ та $i_{R2}(t)$ у схемі рис. 1.14.
- 1.11. Визначити напруги $u_C(t)$ і $u_{R2}(t)$ у схемі рис.1.15.
- 1.12. У схемі рис.1.16 визначити струми $i_L(t)$ та $i_{R2}(t)$.
- 1.13. Визначити струм $i_C(t)$ та напругу $u_C(t)$ у схемі рис.1.17.
- 1.14. Визначити $i_e(t)$ у схемі рис.1.18.
- 1.15. У схемі рис. 1.19. визначити струм $i_e(t)$.
- 1.16. Визначити струм $i_e(t)$ у схемі рис.1.20.
- 1.17. Визначити напругу $u_{\text{блх}}(t)$ у схемі рис.1.21.
- 1.18. У схемі рис. 1.22 визначити напругу $U_{\text{блх}}(t)$.
- 1.19. Визначити аналітичний вираз для струму $i_L(t)$ у схемі рис. 1.23, якщо $e(t) = E_m e^{\alpha t} \sigma(t)$.
- 1.20. У схемі рис. 1.24 визначити аналітичний вираз для напруги $u_C(t)$, якщо $e(t)=e^{-\alpha t} \sigma(t)$.
- 1.21. Визначити напругу у схемі рис.1.25 при $e(t)=3t\sigma(t)$.
- 1.22. Визначити напругу $u_{\text{блх}}(t)$ у схемі рис.1.21, якщо $j(t)=e^t \sigma(t)$.

- 1.23.** У схемі рис. 1.10 визначити напругу $u_{\text{блх}}(t)$, якщо $j(t) = t \sigma(t)$.
- 1.24.** Визначити напругу $u_{\text{блх}}(t)$ у схемі рис. 1.22, якщо $e(t) = (1-3t) \sigma(t)$.
- 1.25.** Визначити у схемі рис. 1.24 напругу $u_R(t)$, якщо вплив $e(t)$ зображено на рис. 1.26.
- 1.26.** У схемі рис. 1.23 визначити аналітично струм $i_R(t)$, якщо сигнал $e(t)$ зображений на рис. 1.27.
- 1.27.** Визначити напругу $i_C(t)$ у схемі рис. 1.24, якщо сигнал $e(t)$ зображений на рис. 1.28.

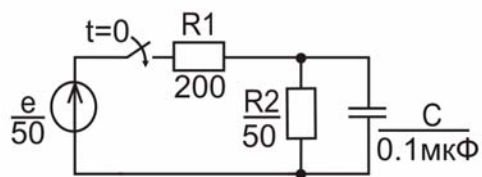


Рис. 1.6. Задача 1.1.

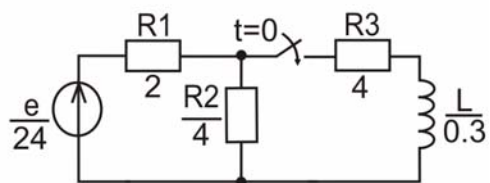


Рис. 1.7. Задача 1.2.

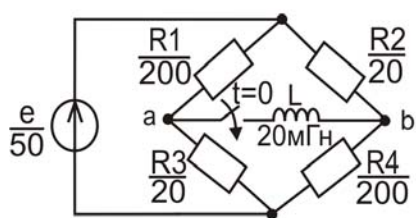


Рис. 1.8. Задача 1.3.

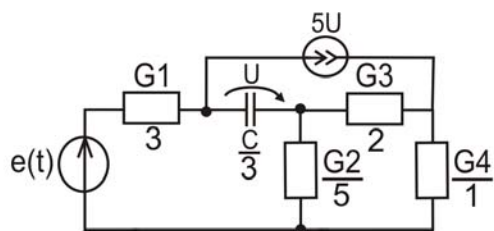


Рис. 1.9. Задача 1.4.

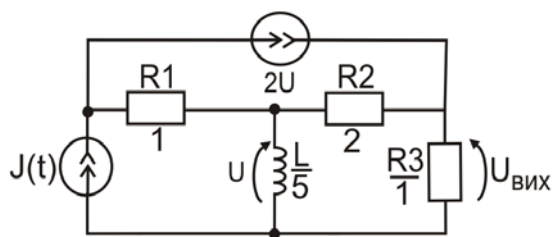


Рис. 1.10. Задача 1.5.

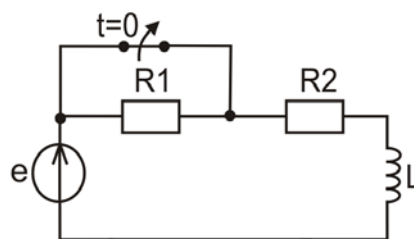


Рис. 1.11. Задача 1.6.

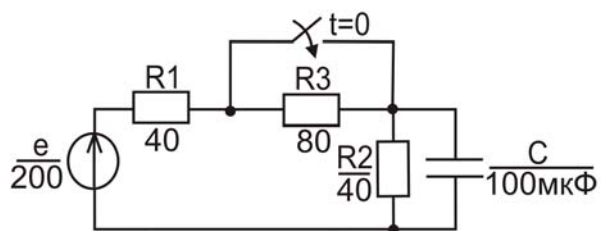


Рис. 1.12. Задача 1.7.

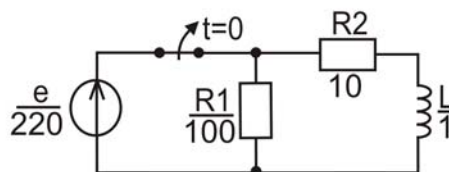


Рис. 1.13. Задача 1.9.

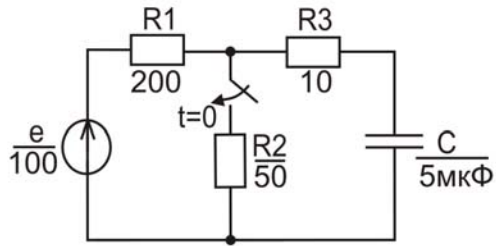


Рис. 1.14. Задача 1.10.

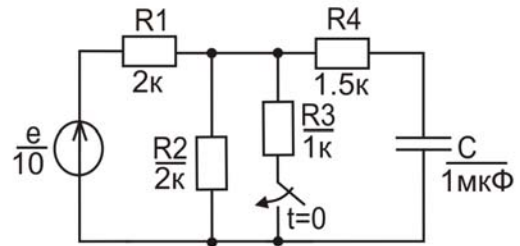


Рис. 1.15. Задача 1.11.

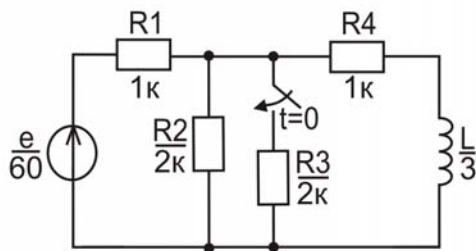


Рис. 1.16. Задача 1.12.

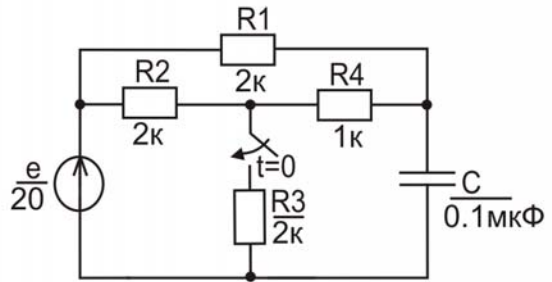


Рис. 1.17. Задача 1.13.

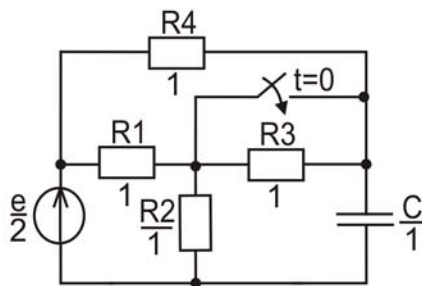


Рис. 1.18. Задача 1.14.

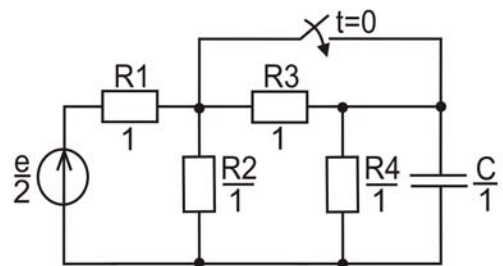


Рис. 1.19. Задача 1.15.

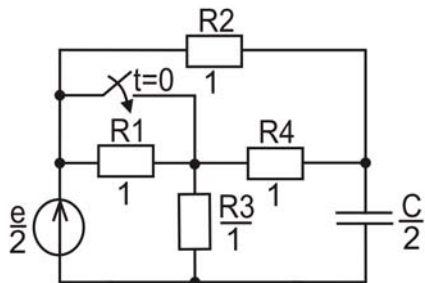


Рис. 1.20. Задача 1.16.

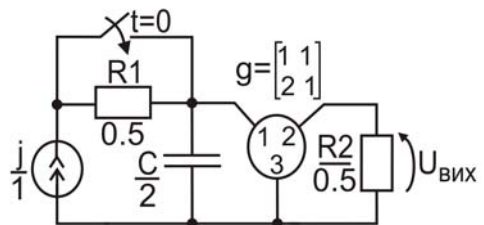


Рис. 1.21. Задача 1.17.

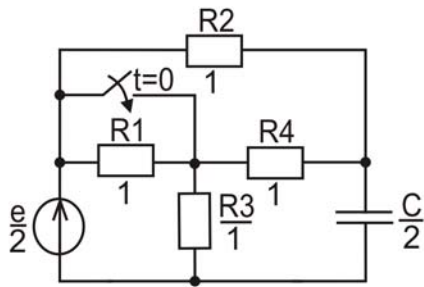


Рис. 1.20. Задача 1.16.

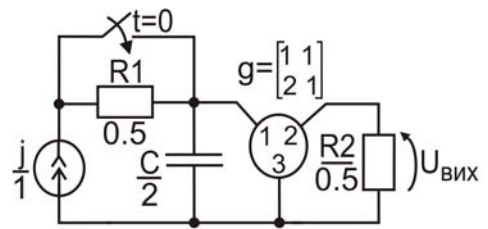


Рис. 1.21. Задача 1.17.

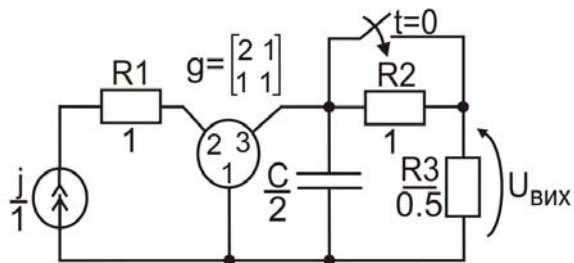


Рис. 1.22. Задача 1.18.

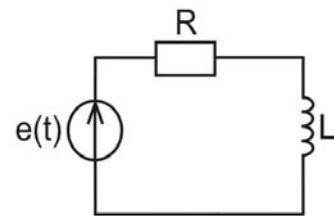


Рис. 1.23. Задача 1.19.

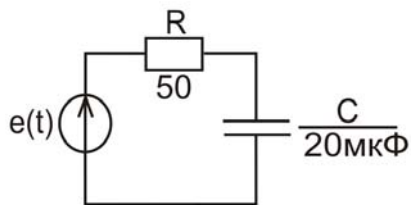


Рис. 1.24. Задача 1.20.

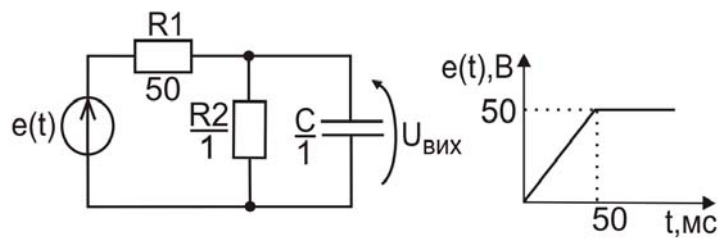


Рис. 1.25. Задача 1.21.

Рис. 1.26. Задача 1.25.

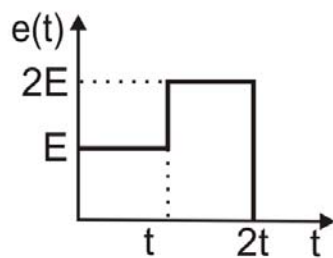


Рис. 1.27. Задача 1.26.

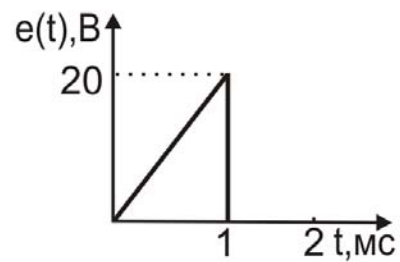


Рис. 1.28. Задача 1.27.

2. МЕТОД ЗМІННИХ СТАНУ

Обчислення струмів та напруг у реактивних схемах n -го порядку (на рис. 2.1 реактивна схема n -го порядку представлена як система) можна виконати, наприклад, методом змінних стану. На

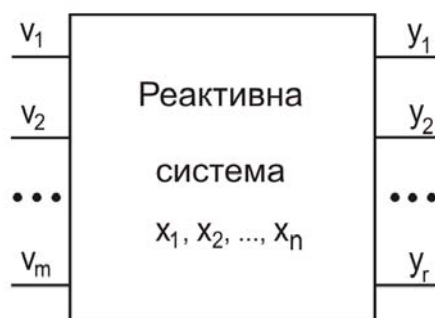


Рис. 2.1. Реактивна система n -го порядку з багатьма входами та виходами.

відміну від схем першого порядку реактивні схеми n -го порядку описуються не одним диференціальним рівнянням, а системою із n рівнянь.

Лінійні стаціонарні реактивні схеми n -го порядку описуються системою із n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами (2.1a). Ці рівняння називаються рівняннями змінних стану:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot v(t); x(0) = X_0, \quad (2.1a)$$

Рівняння (2.1б) називаються вихідними рівняннями

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot v(t). \quad (2.1b)$$

Вектор невідомих величин $x(t)$ називається вектором змінних стану. Його координати є напругами на ємностях та струмами через

індуктивності схемної моделі кола. Кількість координат вектора змінних стану $x(t)$ визначається за наступною формулою:

$$n = n_C + n_L - n_{EC} - n_{JL}, \quad (2.2)$$

де n_C , n_L – кількість ємностей та індуктивностей у схемі відповідно; n_{EC} , n_{JL} – кількість особливих контурів (ємнісних хорд) і особливих перетинів (індуктивних гілок) відповідно у структурному графі схеми.

Вектор $y(t)$, координати якого є шуканими струмами та напругами, знаходиться за формулами (2.1б), $v(t)$ – вектор сигналів незалежних джерел.

У формулах (2.1а) та (2.1б) матричні параметри мають такі назви: A – (nxn) матриця системи; B – (nxm) матриця взаємодії; C – (rnx) матриця виходу; D – (rxm) матриця входу. Усі елементи матриць є дійсними числами, а координати усіх векторів – дійсні функції часу t .

Для визначення вектору $y(t)$ по формулі (2.1б) необхідно знайти вектор змінних стану $x(t)$, розв'язавши диференціальне рівняння (2.1а) з матричними коефіцієнтами. Розв'язок знаходиться за наступною формулою:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B v(\tau) d\tau; \quad (2.3)$$

де перший доданок називається вільною складовою вектора змінних стану $x(t)$, а другий доданок – примусовою складовою, тобто $x(t) = x_e(t) + x_{np}(t)$; e^{At} – фундаментальна матриця (матрична експонента); τ – змінна інтегрування; $e^{A(t-\tau)}$ отримуються з e^{At} заміною t на $t-\tau$.

Фундаментальна матриця e^{At} має розмірність (nxn), а її елементи представляють собою деякі функції часу t . Проблема

визначення вектора змінних стану $\mathbf{x}(t)$ за формулою (2.3), а значить і вихідного вектора $\mathbf{y}(t)$ (за формулою (2.1б)), полягає у визначенні фундаментальної матриці e^{At} . Добутки, які стоять у формулі (2.3) під інтегралом, являють собою вектор, кожна координата якого - функція підінтегральної змінної τ , тому інтегрування виконується для кожної координати вектора окремо.

Рівняння змінних стану (2.1а) і вихідні рівняння (2.1б) укладаються за таким алгоритмом:

1. По заданій електронній схемі та за умовою задачі визначається координатний склад векторів $\mathbf{v}(t)$ і $\mathbf{y}(t)$, тобто ті електричні змінні (струми і напруги), які входять до складу цих векторів.

2. Від електронної схеми переходять до її структурного графа (напрямок дуги графа співпадає з вибраним напрямом струму відповідного двохполюсника схеми).

3. Розподіляють дуги графа на дві підмножини, які не перетинаються: гілки, які утворюють дерево, і хорди, які утворюють доповнення. Гілки дерева вибираються із дуг графа у такій послідовності (ієрархії): $E, S, D_U, R, D_I, L, O, J$. Кожна нова дуга дерева не повинна утворювати контур з іншими гілками дерева, тобто у дереві не може бути контурів. Дерево вважається побудованим, якщо його гілки з'єднують усі вершини структурного графа. Якщо у графі є ν вершин і l дуг, то кількість гілок n_B у дереві і хорд n_X у доповненні визначається наступним чином:

$$n_B = \nu - 1; \quad n_X = l - n_B = l - \nu + 1$$

4. Проводять на графі головні перетини (їх кількість дорівнює n_B) і визначають головні контури (їх кількість дорівнює n_X). Для головних перетинів записують рівняння за першим законом

Кірхгофа, а для головних контурів - за другим законом Кірхгофа. При цьому додатнім вважається напрямок гілки у головному перетині і напрямок хорди - у головному контурі.

5. Визначають довжину n вектора змінних стану $\mathbf{x}(t)$ як сумарну кількість ємнісних гілок та індуктивних хорд у графі. Координатами вектора $\mathbf{x}(t)$ будуть тільки напруги ємнісних гілок та струми індуктивних хорд.

6. Знючи довжини векторів $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ записуємо рівняння змінних стану (2.1а) та вихідні рівняння (2.1б) у наступному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{v}(t); \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{v}(t), \quad (2.4б)$$

залишаючи матриці коефіцієнтів \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} і \mathbf{D} незаповненими, а вектори $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ містять струми та напруги, вибрані на попередніх кроках.

7. У топологічних рівняннях для ємнісних перетинів та індуктивних контурів виключаємо усі "зайві" змінні, тобто ті, котрі не входять у жоден з векторів $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ або $\mathbf{v}(t)$. Виключення здійснюється на основі решти топологічних рівнянь (див. п.4) та компонентних рівнянь двохполюсників, струми та/або напруги яких не увійшли до даних топологічних рівнянь. При взаємній залежності змінних, які виключаються (тобто, якщо їх не можна виразити через координати векторів $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ по топологічним рівнянням), необхідно укласти та розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, невідомими у якій будуть змінні, які необхідно виключити, а решта змінних належитиме до координат векторів $\mathbf{x}(t)$ та $\mathbf{v}(t)$. Знайдені таким способом "зайві" змінні

підставляються у топологічні рівняння для ємнісних перетинів та індуктивних контурів.

8. Знайдені після виключення "зайвих" змінних рівняння для ємнісних перетинів та індуктивних контурів представляються у матричній формі (2.4а), тобто визначаються елементи матриць A та B .

9. Матриці C і D визначаються аналогічно, але в якості вихідних топологічних рівнянь вибираються ті, що містять вихідні змінні, тобто координати вектора $y(t)$.

Топологічні рівняння для головних перетинів та головних контурів можна записати у матричній формі так:

$$I_B + \pi \cdot I_X = 0, \quad (2.5)$$

де I_B - вектор струмів гілок дерева; π - матриця головних перетинів для хорд, розмірність якої $[n_g \times n_x]$; I_X - вектор струмів хорд доповнення.

Топологічні рівняння для головних контурів можна також записати через топологічні рівняння для головних перетинів наступним чином:

$$U_X - \pi^T \cdot U_B = 0, \quad (2.6)$$

де U_X - вектор напруг хорд доповнення; $\rho = -\pi^T$ - матриця головних контурів для гілок; T - знак транспонування матриці; U_B - вектор напруг гілок дерева.

Для визначення фундаментальної матриці e^{At} (матричної експоненти) можна використати один із методів теорії функцій від матриць. Усі вони вимагають визначення власних чисел λ_k , $k=1,2,...,n$ матриці A , або так званих власних частот системи, які визначаються як корені характеристичного рівняння

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (2.7)$$

Корені характеристичного рівняння при $n=3$ визначаються за формулою Кардано; при $n=4$ – за формулою Декарта-Ейлера; при $n>4$ – числовими методами.

Якщо матриця A має q власних чисел λ_k , кожне з яких має кратність m_k , $k=1,2,\dots,q$ (у такому випадку $\sum_{k=1}^q m_k = n$), то фундаментальну матрицю можна знайти за формулою Сільвестра:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} t^{j-1} e^{\lambda_k t} \cdot Z_{kj}, \quad (2.8)$$

де Z_{kj} називаються компонентами матриці A , кожен з яких є $[n \times n]$ матрицею дійсних чисел та визначається за наступною формулою:

$$Z_{kj} = \frac{1}{(m_k - j)!(j-1)!} \left[\frac{Q(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k - j)}. \quad (2.9)$$

Верхній індекс $(m_k - j)$ означає порядок похідної по λ , яку необхідно узяти від виразу, що стоїть у квадратних дужках; $Q(\lambda)$ – приєднана матриця для A , для якої справедливе наступне співвідношення: $(\lambda E - A) \cdot Q(\lambda) = D(\lambda) \cdot E$. (E – одинична матриця порядку n).

Похідна порядку (j) приєднаної матриці $Q(\lambda)$ знаходиться за наступною формулою:

$$Q^{(j)}(\lambda_k) = j!(A - \lambda_k \cdot E)^{m_k - j - 1} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^q (A - \lambda_i \cdot E)^{m_i}. \quad (2.10)$$

У формулі (2.9) $\psi_k(\lambda)$ – мінімальний многочлен, який визначається за наступною формулою:

$$\psi_k(\lambda) = \Delta(\lambda) / (\lambda - \lambda_k)^{m_k}. \quad (2.11)$$

Якщо кратність усіх власних чисел дорівнює одиниці, тобто $m_k=1$, $q=n$, $k=1,2,\dots,n$, то формула Сільвестра (2.8) значно спрощується і приймає наступний вигляд:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \cdot \frac{\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n (A - \lambda_i E)}{\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_i)} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \cdot Z_k. \quad (2.12)$$

Визначивши фундаментальну матрицю e^{At} за формулою (2.8) або (2.12), можна знайти вектор змінних стану $\mathbf{x}(t)$ за формулою (2.3), а потім і вектор вихідних змінних $\mathbf{y}(t)$ за формулою (2.16). За аналогією з реактивними системами першого порядку реактивні системи n -го порядку характеризуються матричною перехідною характеристикою $\mathbf{H}(t)$ і матричною імпульсною характеристикою $\mathbf{G}(t)$, які знаходяться наступним чином:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{e}^{At} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \sigma(t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \delta(t) = \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt}. \quad (2.14)$$

де $\sigma(t)$, $\delta(t)$ - скалярні множники, які є відповідно одиничною ступінчатою функцією (функцією Хевісайда) та одинично імпульсною функцією (функцією Дірака). Розмірність обох матриць $\mathbf{H}(t)$ і $\mathbf{G}(t)$ дорівнює $(r \times m)$ (див. рис. 2.1).

Кожен з елементів матриць $\mathbf{H}(t)$ і $\mathbf{G}(t)$ є функцією часу t , яку можна визначити експериментально (або обчислити), як показано на рис. 2.2 і 2.3 (див. також рис. 2.1).

Наприклад: $h_{ij}(t)$ - представляє собою перехідну характеристику на i -му виході системи, знайдену при дії одиничної ступінчатої функції на j -й вхід при подавлених джерелах на решті входів (початкові умови мають бути нульовими : $\mathbf{x}(0)=0$).

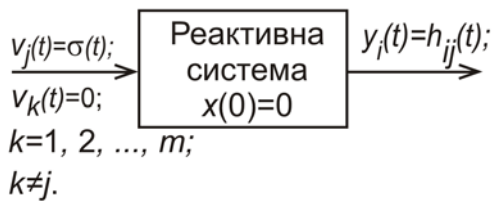


Рис.2.2. Визначення елементів $h_{ij}(t)$ матричної перехідної характеристики $H(t)$

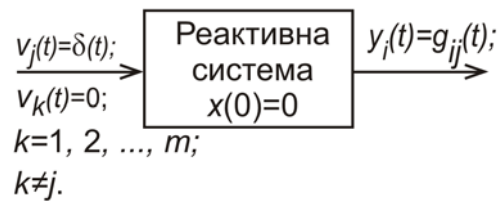


Рис.2.3. Визначення елементів $g_{ij}(t)$ матричної імпульсної характеристики $G(t)$

Матричну перехідну характеристику $H(t)$ і матричну імпульсну характеристику $G(t)$ використовують для визначення вектора вихідних величин $y(t)$ відповідно через інтеграл суперпозиції та інтеграл-згортку так, як показано у розділі 1 (див. рис. 1.4, 1.5).

Наприклад:

$$y(t) = H(0) \cdot v(t) + \int_{0+}^t H'(t-\tau) \cdot v(\tau) d\tau; \quad (2.15)$$

$$y(t) = \int_0^t G(\tau) \cdot v(t-\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Якщо використовувати кусочно-постійну апроксимацію координат вектора сигналів $v(t)$ незалежних джерел, розбивши інтервал $(0, t)$ на рівні відрізки T , то вектор змінних стану $x(t)$ можна визначити числовим способом за наступною рекуррентною формулою:

$$x[(k+1)T] = e^{AT} \cdot x(kT) + (e^{AT} - E) \cdot A^{-1} \cdot B \cdot v(kT), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Фундаментальну матрицю можна також знайти наближено через ступеневий ряд, який не потребує визначення власних значень λ_k :

$$e^{At} \cong \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \cdot (A \cdot T)^i, \quad (2.18)$$

де кількість доданків N вибирається з міркувань необхідної точності визначення e^{At} .

Для визначення стійкості реактивної системи за визначенням Ляпунова необхідно знайти власні числа λ_k , $k=1,2,\dots,n$ матриці системи A . Система асимптотично стійка, коли дійсні частини усіх власних чисел λ_k від'ємні.

Якщо визначити власні числа λ_k складно, то можна скористатися алгебраїчним критерієм стійкості Рауса-Гурвіца, згідно з яким необхідно укласти матрицю D з коефіцієнтів характеристичного рівняння (2.7) так, як показано нижче. У матриці D по головній діагоналі записуються коефіцієнти характеристичного рівняння в порядку зростання індексів, починаючи з a_1 і закінчуючи a_n . У кожному рядку зліва від головної діагоналі записуються коефіцієнти зі зростаючими індексами, а праворуч - коефіцієнти з індексами, які зменшуються. Місця коефіцієнтів, яких бракує, заповнюються нулями. Реактивна система буде стійкою, коли всі головні мінори матриці D задовольняють наступним нерівностям:

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D_0 & D_1 & D_2 & D_3 & \dots & D_{n-1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \right] \end{array}$$

$$\det D_0 > 0 ; \quad \det D_1 > 0 ; \quad \dots ; \quad \det D_{n-1} > 0 ; \quad (a_0 > 0),$$

Задачі та вправи

- 2.1.** Для схеми рис.2.4 укласти у символьному вигляді рівняння змінних стану.
- 2.2.** Укласти рівняння змінних стану та вихідні рівняння для схеми рис.2.5, вважаючи вихідними змінними струм i_{R3} і напругу U_{R1} .
- 2.3.** Для схеми рис. 2.6 отримати матриці $G(t)$ і $H(t)$.
- 2.4.** Визначити в символьному вигляді матрицю A схеми, зображеної на рис.2.7.
- 2.5.** Визначити в схемі рис.2.8 напругу $U_R(t)$, якщо $e(t)=20\sigma(t)$.
- 2.6.** В схемі рис. 2.9 визначити струм $i_L(t)$ і напругу $U_C(t)$, якщо $j(t)=10\sigma(t)$.
- 2.7.** Визначити струм $i_L(t)$ і напругу $U_C(t)$ у схемі рис. 2.10, якщо $e(t)=10\sigma(t)$.
- 2.8.** Визначити напруги $U_{R1}(t)$ і $U_{R2}(t)$ у схемі рис. 2.11, якщо $e(t)=30\sigma(t)$.
- 2.9.** У схемі рис. 2.12 визначити напруги $U_{C2}(t)$ і $U_{R2}(t)$, якщо $e(t)=\sigma(t)$.
- 2.10.** Визначити напруги $U_{R1}(t)$ і $U_{R2}(t)$ у схемі рис. 2.13, якщо $e(t)=\sigma(t)$.
- 2.11.** У схемі рис. 2.14 визначити струм $i_C(t)$ і напругу $U_L(t)$, якщо $e(t)=5\sigma(t)$ і $j(t)=2\sigma(t)$.
- 2.12.** Визначити у схемі рис. 2.15 напругу $U_C(t)$ при $j(t)=\sigma(t)$ і $j(t)=e^{-0.5t}\sigma(t)$.
- 2.13.** У схемі рис. 2.16 визначити струм $i_L(t)$ і напругу $U_C(t)$.
- 2.14.** Знайти змінні $I_{R2}(t)$, $U_{R1}(t)$ у схемі рис. 2.17.

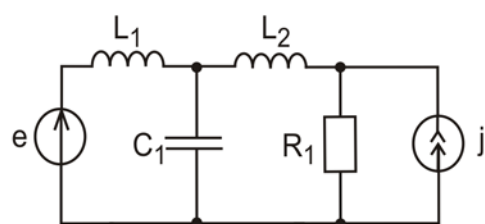


Рис.2.4. Задача 2.1

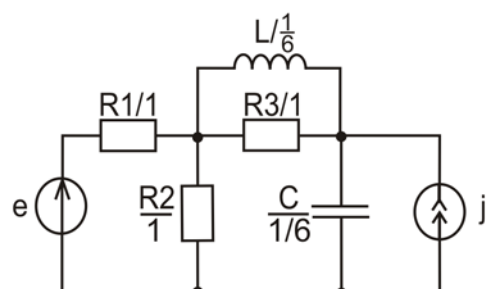


Рис.2.5. Задача 2.2

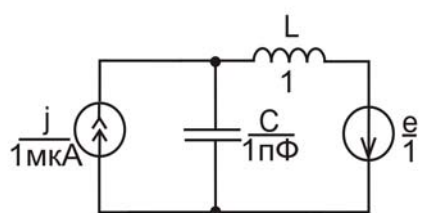


Рис. 2.6. Задача 2.3

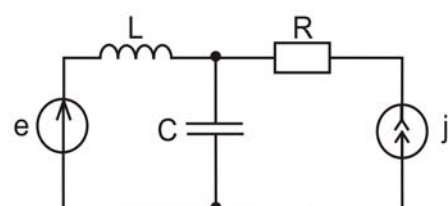


Рис. 2.7. Задача 2.4

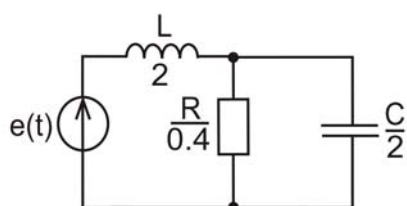


Рис.2.8. Задача 2.5

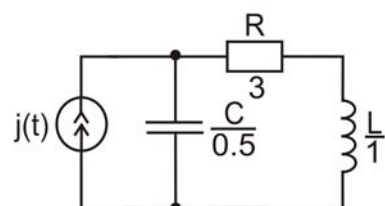


Рис.2.9. Задача 2.6

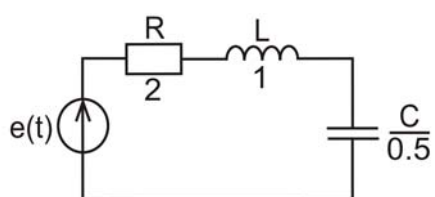


Рис.2.10. Задача 2.7

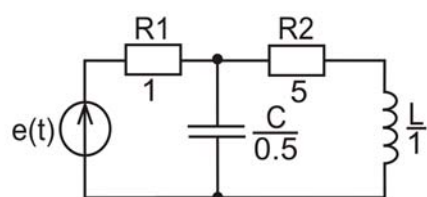


Рис.2.11. Задача 2.8

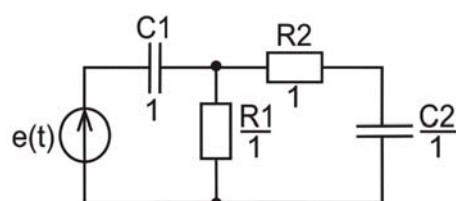


Рис.2.12. Задача 2.9

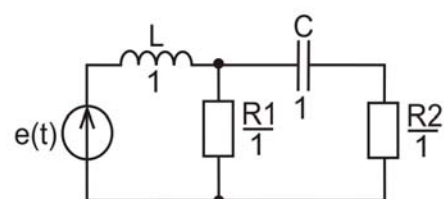


Рис.2.13. Задача 2.10

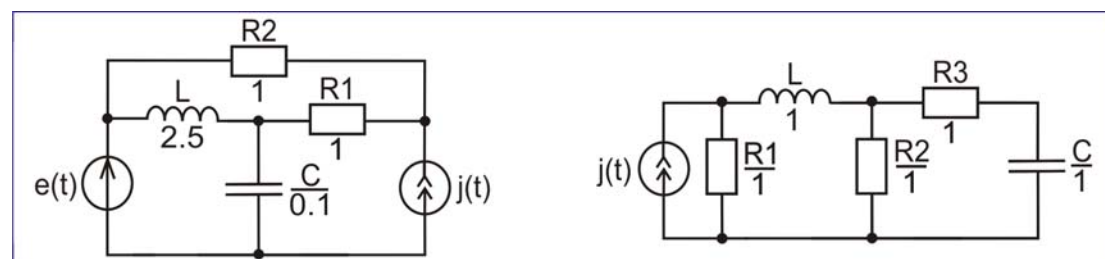


Рис.2.14. Задача 2.11

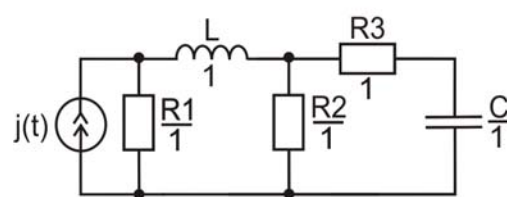


Рис.2.15. Задача 2.12

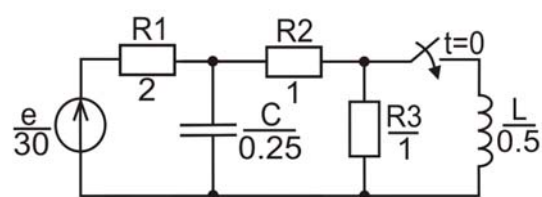


Рис.2.16. Задача 2.13

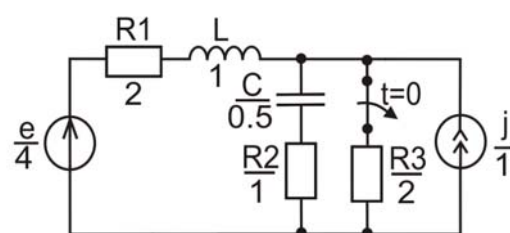


Рис.2.17. Задача 2.14

3. АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ

Для розрахунку параметрів струмів і напруг у стаціонарному стані в лінійних реактивних схемах, що знаходяться під дією джерел періодичних сигналів $f(t) = f(t \pm nT)$, $n=1,2, \dots, T$, T - період сигналу, використовують метод комплексних амплітуд. Метод комплексних амплітуд дозволяє для визначення шуканих величин замість системи диференціальних рівнянь першого порядку (2.1а) використовувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Однак коефіцієнти і невідомі цієї системи являють собою не дійсні, а комплексні числа. Для визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно перейти в область комплексної частоти $j\omega$

Найпростішим періодичним сигналом є гармонічний сигнал $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$. Перехід з часової області t в область комплексної частоти $j\omega$ здійснюється заміною усіх гармонічних сигналів $f(t)$ їх комплексними амплітудами \dot{F}_m . Струми $i_J(t)$ і напруги $u_E(t)$ замінюються відповідно їх комплексними амплітудами \dot{I}_J і \dot{U}_E . Опори R , ємності C та індуктивності L замінюються комплексними опорами (імпедансами) $Z(j\omega)$ і/або комплексними провідностями (адмітансами) $Y(j\omega)$ відповідно до табл. П.3. У цьому випадку компонентні рівняння двохполіусників мають алгебраїчний вигляд для будь-якого двохполіусника: $\dot{U} = Z(j\omega)\dot{I}$ або $\dot{I} = Y(j\omega)\dot{U}$ і, отже, для аналізу схеми в області комплексної частоти $j\omega$ придатні будь-які методи аналізу лінійних резистивних схем (линейных резистивных схем (метод еквівалентних перетворень, вузловий метод, схемні функції і т.д.).

На рис. 3.1 зображений гармонічний сигнал $f(t)$ деякого незалежного джерела,

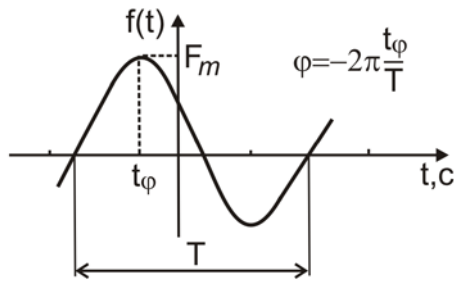


Рис. 3.1. Гармонічний сигнал і його параметри

$$\begin{aligned}
 f(t) &= F_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \\
 &= F_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi + \pi/2) = \\
 &= a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t),
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

де F_m - амплітуда сигналу у вольтах або амперах в залежності від типу джерела; ω - кутова частота, яка вимірюється у рад/с або град/с; t - час [с]; φ - початкова фаза [рад або град]. Кутову частоту можна виразити через період сигналу T [с]: $\omega = 2\pi/T$, а початкову фазу - через координату t_φ точки максимуму сигналу $f(t)$, наближеної до вертикальної осі (див. рис.3.1); $\varphi_s = \varphi + \pi/2$ - початкова фаза сигналу, представленого в синусній формі. Надалі ми будемо використовувати косинусне представлення гармонічного сигналу $f(t)$.

Діюче значення гармонічного сигналу визначається за такою формулою:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 F_m \tag{3.2}$$

Гармонічний сигнал можна представити за формулою Ейлера наступним чином:

$$f(t) = F_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{F_m}{2} (e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} + e^{-j(\omega \cdot t + \varphi)}). \tag{3.3}$$

Комплексна функція

$$\dot{F}(t) = F_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = \dot{F} e^{j\omega \cdot t}$$

називається комплексним зображенням гармонічного сигналу $f(t)$, а комплексне число $\dot{F} = F_m e^{j\varphi}$ - комплексною амплітудою

гармонічного сигналу $f(t)$. Очевидно, що сам сигнал являє собою дійсну частину комплексного зображення $\dot{F}(t)$:

$$f(t) = a(t) = \text{Re}[\dot{F}(t)]. \quad (3.4.)$$

На рис. 3.2а представлено комплексне зображення гармонічного сигналу $\dot{F}(t)$ у вигляді вектора \dot{F} , який обертається проти часової стрілки з постійною кутовою швидкістю ω , а на рис. 3.2б – графічне зображення комплексної амплітуди \dot{F} .

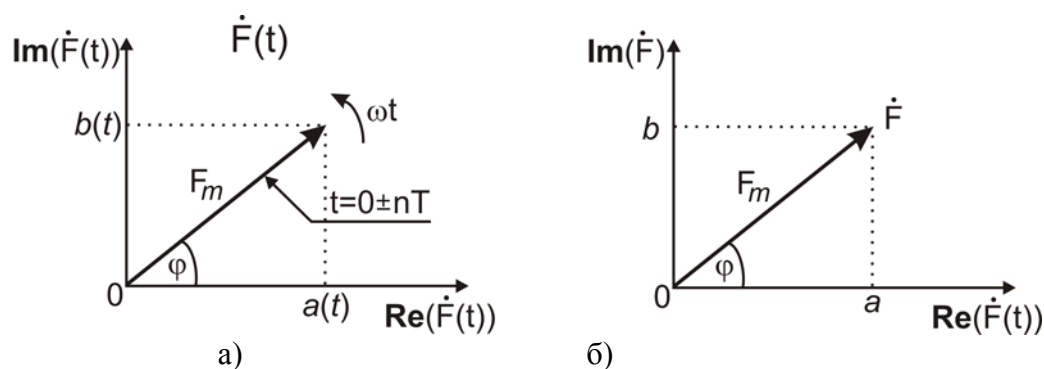


Рис. 3.2. Графічне представлення а) комплексного зображення гармонічного сигналу; б) комплексної амплітуди гармонічного сигналу.

Комплексні амплітуди можна записувати у показниковій $F_m e^{j\varphi}$, алгебраїчній $a+jb$ або тригонометричній $F_m \cos \varphi + j F_m \sin \varphi$ формах. Перехід від однієї форми до іншої виконується за наступними формулами:

$$\begin{aligned} F_m &= \sqrt{a^2 + b^2}; \\ \varphi &= \arctg \frac{b}{a} \pm \begin{cases} 0; & a \geq 0; \\ \pi; & a < 0; \end{cases} \\ a &= F_m \cdot \cos \varphi; \\ b &= F_m \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Лінійну пасивну реактивну двохполюсну підсхему в області комплексної частоти $j\omega$ можна замінити еквівалентним комплексним опором $Z_{\Sigma}(j\omega)$ (еквівалентним імпедансом) або еквівалентною комплексною провідністю $Y_{\Sigma}(j\omega)$ (еквівалентним адмітансом) (див.

рис.3.3). Їх величини можна знайти через комплексні амплітуди полюсних струму та напруги наступним чином:

$$Z_{\Sigma}(j\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{Y_{\Sigma}(j\omega)} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = ze^{j\varphi} = r_{\Sigma} + jx_{\Sigma}. \quad (3.6)$$

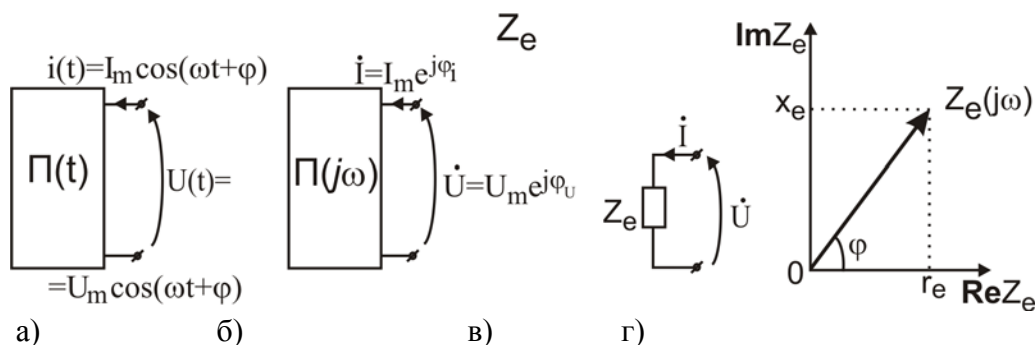


Рис.3.3. а) вихідний реактивний двохполюсник; б) двохполюсник в області $j\omega$; в) еквівалентний імпеданс двохполюсника; г) векторне зображення імпеданса.

Імпеданс $Z_{\Sigma}(j\omega)$ можна обчислити і через комплексні параметри компонентів, що утворюють двохполюсник. Для цього можна застосувати ті ж методи, які використовуються для визначення еквівалентного опору лінійного резистивного двохполюсника: метод еквівалентних перетворень, матричний метод вузлових напруг і т.д.

Якщо в імпедансі, розрахованому за формулою (3.6), величина x_{Σ} виявиться позитивною, то відповідний двохполюсник має резистивної-індуктивні властивості, тобто $x_{\Sigma} = x_L = \omega L_{\Sigma}$. Якщо величина x_{Σ} виявиться від'ємною, то двохполюсник має резистивної-ємнісні властивості, тобто $x_{\Sigma} = x_C = -1/\omega C_{\Sigma}$. У першому випадку схемна модель еквівалентного двохполюсника являє собою послідовне з'єднання опору r_{Σ} та індуктивності L_{Σ} , у другому випадку - послідовне з'єднання опору r_{Σ} і ємності C_{Σ} . Розглядаючи еквівалентний адмітанс $Y_{\Sigma}(j\omega)$ того ж двохполюсника можна отримати результати, дуальні по відношенню до результатів для $Z_{\Sigma}(j\omega)$.

Якщо виявиться, що $Z_{\mathfrak{z}}(j\omega)=r_{\mathfrak{z}}$ на деякій частоті ω_0 , тобто еквівалентний імпеданс являє собою дійсне число, а двухполіусник поводить як опір, незважаючи на наявність у ньому реактивних компонентів, то в такій двухполіусній підсхемі має місце явище електричного резонансу. Таку підсхему називають коливальним контуром.

У послідовному коливальному контурі (його вхідний імпеданс $Z_{\mathfrak{z}}(j\omega)=r_{\mathfrak{z}}+j(x_L+x_C)=r_{\mathfrak{z}}+j(\omega L_{\mathfrak{z}}-1/\omega C_{\mathfrak{z}}))$ резонансна частота ω_0 , характеристичний опір ρ і добротність Q знаходяться наступним чином:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathfrak{z}} C_{\mathfrak{z}}}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L_{\mathfrak{z}}}{C_{\mathfrak{z}}}}, \quad Q = \frac{\rho}{r_{\mathfrak{z}}} \quad (3.7)$$

У паралельному коливальному контурі (його вхідний адмітанс $Y_{\mathfrak{z}}(j\omega)=g_{\mathfrak{z}}+j(b_C+b_L)=g_{\mathfrak{z}}+j(\omega \tilde{C}_{\mathfrak{z}}-1/\omega \tilde{L}_{\mathfrak{z}}))$ резонансна частота ω_0 , характеристична провідність ν і добротність Q визначаються наступним чином:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}_{\mathfrak{z}} \tilde{C}_{\mathfrak{z}}}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\tilde{C}_{\mathfrak{z}}}{\tilde{L}_{\mathfrak{z}}}}, \quad Q = \frac{\nu}{g_{\mathfrak{z}}} \quad (3.8)$$

За теоремою про еквівалентне джерело активний двухполіусник з реактивними компонентами (рис. 3.4а) можна замінити схемою Тевенена (рис. 3.4б) або схемою Нортонна (рис. 3.4в).

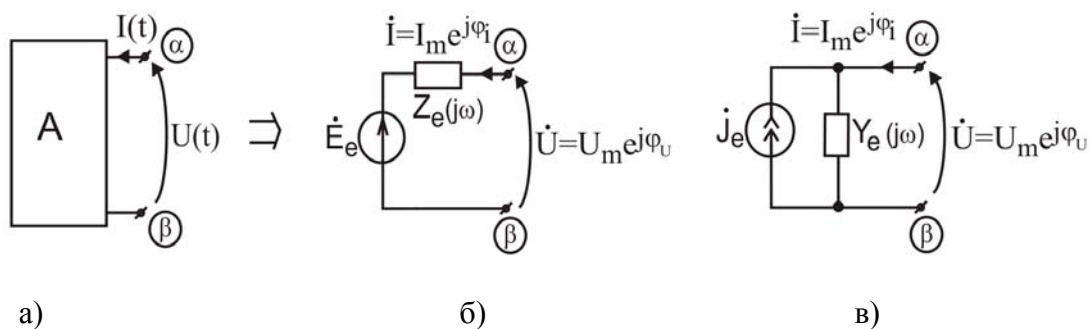


Рис.3.4. а) вихідний активний двохполюсник; б) еквівалентна схема Тевенена; в) еквівалентна схема Нортон.

Параметри еквівалентних схем пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\dot{E}_\vartheta &= \dot{U}_{\alpha\beta}^{xx} = J_\vartheta \cdot Z_\vartheta(j\omega); \\ J_\vartheta &= \dot{I}_{\alpha\beta}^{K3} = \dot{E}_\vartheta \cdot Y_\vartheta(j\omega); \\ Z_\vartheta(j\omega) &= Y_\vartheta^{-1}(j\omega).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Лінійна реактивна система з двома сторонами в області комплексної частоти $j\omega$ характеризується комплексними схемними функціями. наприклад:

$$K_U = \frac{\dot{U}_{m\text{ вих}}}{\dot{U}_{m\text{ вх}}} = \frac{U_{m\text{ вих}} e^{j\varphi_{\text{вих}}}}{U_{m\text{ вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}}} = \frac{U_{m\text{ вих}}}{U_{m\text{ вх}}} e^{j(\varphi_{\text{вих}} - \varphi_{\text{вх}})} = |K_U| e^{j\varphi_K}$$

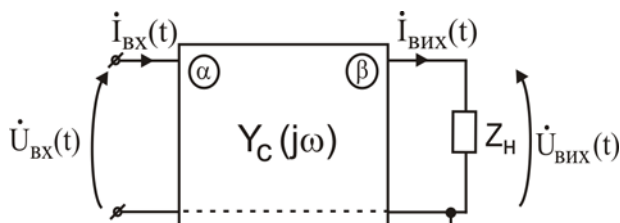


Рис. 3.5. Реактивна система з двома сторонами.

і т.д. (див. рис. 3.5).

Всі схемні функції можна обчислити через комплексну матрицю провідності $Y_C(j\omega)$ внутрішньої частини системи. Для обчислень використовують ті ж формули, що і для розрахунку схемних функцій лінійних резистивних схем (див. Табл. П.14). Наприклад:

$$K_U = \frac{Z_H \cdot \Delta_{\alpha\beta}}{Z_H \cdot \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}},$$

де $\Delta_{\alpha\beta}$ - алгебраїчне доповнення комплексної матриці провідності $Y_C(j\omega)$, і т.д.

Миттєва потужність $p(t)$, що виділяється на реактивному двохполюснику (див. рис. 3.3а), визначається таким чином:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \cdot \cos \phi [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_u)] + UI \cdot \sin \phi [\sin(2\omega t + 2\phi_u)], \quad (3.10)$$

де $U = U_m / \sqrt{2}$; $I = I_m / \sqrt{2}$ - діючі значення відповідно напруги $u(t)$ і струму $i(t)$ (див. формулу (3.2)); $\phi = \phi_U - \phi_I$; $\cos \phi$ - коефіцієнт використання потужності; $P = UI \cos \phi$ - активна потужність (тобто середнє значення миттєвої потужності $p(t)$ за період T , яка вимірюється у ватах [Вт]; $Q = UI \sin \phi$ - реактивна потужність, вимірюється у вольт-амперах реактивних [вар]. Якщо $\phi = 0$, то $P = P_{max} = UI$; $Q = 0$. Повна потужність S визначається таким чином: $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [ВА].

В області комплексної частоти $j\omega$ використовується поняття комплексної потужності \dot{S} , пов'язаної з P і Q наступним чином:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U} \dot{I}^* = U \cdot e^{j\phi_u} \cdot I \cdot e^{-j\phi_i} = S \cdot e^{j\phi} = P + jQ, \quad (3.11)$$

де $S=UI$ - повна потужність, що виділяється на двохполюснику (див. рис. 3.3б), вимірюється у вольт-амперах [ВА]; I^* - спряжене значення комплексної амплітуди струму, $\cos\varphi=P/S$.

Зробивши всі необхідні розрахунки в області $j\omega$, можна перейти у часову область t , використовуючи (3.4), (3.10).

Якщо періодичний сигнал $f(t)=f(t\pm nT)$, $n=1,2,3\dots$ не є гармонічним і задовольняє умові Діріхле, то його розкладають в ряд Фур'є ($\omega_1=2\pi/T$ - частота першої гармоніки ряду):

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \quad (3.12)$$

$$= F_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{mk} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k), \quad (3.13)$$

коефіцієнти a_k і b_k якого визначаються наступним чином:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

а амплітуду k -ї гармоніки F_{mk} і початкову фазу $-\varphi_k$ тригонометричної форми ряду Фур'є (3.13) знаходять за такими формулами:

$$F_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} \pm \begin{cases} 0; & a_k \geq 0; \\ \pi; & a_k < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Набір F_{mk} і $-\varphi_k$ утворює амплітудний і фазовий спектри періодичного сигналу $f(t)$.

Перехід від форми ряду Фур'є (3.13) до форми (3.12) проводиться таким чином:

$$a_k = F_{mk} \cos \varphi_k; b_k = F_{mk} \sin \varphi_k \quad (3.17)$$

Для парних сигналів $f(t)=f(-t)$ усі $b_k=0$, а для непарних сигналів $f(t)=-f(-t)$ усі $a_k=0$.

Оскільки відповідно до формули (3.13) вихідний сигнал $f(t)$ представляється сумою гармонічних сигналів, то за принципом суперпозиції сигнал реакції $y(t)$ буде також складатися з суми гармонічних сигналів, причому кожна k -а гармоніка $y(t)$ буде являти собою реакцію на k -у гармоніку вхідного сигналу $f(t)$. Кількість гармонік в сумі вибирається з міркувань точності.

Для того, щоб не виконувати розрахунки окремо для кожної гармоніки вхідного сигналу $f(t)$, роблять розрахунок у загальному вигляді для гармоніки $k\omega_1$, а потім визначають значення реакції підстановкою $k=0,1,2$ і т.д., і наступним підсумовуванням отриманих гармонік.

У комплексній формі ряд Фур'є представляється наступним чином:

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{F}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (3.18)$$

де комплексні амплітуди \dot{F}_k дорівнюють

$$\begin{aligned} \dot{F}_k &= F_{mk} \cdot e^{-j\varphi_k} = a_k - jb_k; \quad k > 0; \\ \dot{F}_k &= F_{mk} \cdot e^{j\varphi_k} = a_k + jb_k; \quad k < 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

і їх можна також визначити безпосередньо через вихідний сигнал $f(t)$:

$$\dot{F}_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (3.20)$$

Діюче (середньоквадратичне) значення періодичного негармоніческого сигналу $f(t)$ визначається за формулою

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\left(\frac{F_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F_{mk}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}. \quad (3.21)$$

Середнє значення потужності P (активна потужність) періодичних сигналів $U(t)=U(t \pm nT)$; $i(t)=i(t \pm nT)$; $n=1,2,\dots$ можна знайти наступним чином:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (3.22)$$

де U_0, I_0 - постійні складові періодичних сигналів $U(t)$ та $i(t)$ відповідно; U_k, I_k - діюче значення відповідно напруги і струму k -ї гармоніки; φ_k - різниця їх початкових фаз (див. формули (3.1), (3.2)).

Реактивна потужність Q цих же сигналів визначається за формулою

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k, \quad (3.23)$$

а повна потужність S визначається як

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} + D, \quad (3.24)$$

де U, I - діюче значення відповідно напруги $u(t)$ і струму $i(t)$ (див. формулу (3.2)); D - добавка, значення якої залежить від форми сигналів $u(t)$ и $i(t)$.

У табл. П.4 наведені формули, які дозволяють розрахувати різні коефіцієнти, що характеризують форму періодичного сигналу $f(t)$.

Задачі та вправи

3.1. Записать аналитические выражения для \dot{E}_9 и Z_9 при представлении схемы, изображенной на рис. 3.6, схемой Тевенена, если $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

3.2. В схеме рис. 3.7 определить ток $i_C(t)$ и напряжение $U_{R2}(t)$, если

$$e(t) = 5 \cos(100t + 97^\circ) B.$$

3.3. Визначити всі струми в схемі рис. 3.8, якщо $e(t) = 2 \cos 10^6 t$ і

$$j(t) = 4 \cos 10^6 t \text{ мА}.$$

3.4. В схемі рис. 3.9 визначити струми всіх компонентів, якщо

$$e(t) = 5 \cos 10t \text{ В}.$$

3.5. Визначити струми пасивних компонентів у схемі рис. 3.10, якщо

$$e(t) = 5 \cos(100t + 30^\circ) B.$$

3.6. У схемі рис. 3.11 визначити напругу $U_{C2}(t)$, якщо

$$e(t) = 10 \cos(100t + 20^\circ) B, \text{ використавши значення } K_U.$$

3.7. Визначити у схемі рис. 3.12 струм $i_{R4}(t)$, якщо

$$j(t) = 10 \cos(2t + 30^\circ)$$

3.8. При якому значенні опору R_3 струм, що протікає через кожен з

опорів $Z_I = R_I + jX_I = 10 + j80^\circ$ у схемі рис. 3.13 буде зміщений по

відношенню до вектора напруги $\dot{U} = 154V$ на кут $\varphi = 90^\circ$. $R_2 = 40 \text{ Ом}$.

3.9. Розкласти в ряд Фур'є сигнал, зображений на рис.3.14.

3.10. У схемі рис 3.15 визначити напругу $U_{RH}(t)$, якщо джерелом

напруги $e(t)$ подається сигнал, зображений на рис. 3.16.

Обмежитися першими трьома гармоніками.

3.11. Визначити струм $i_H(t)$ у схемі рис. 3.17(сигнал джерела $e(t)$

зображений на рис. 3.18.) Визначити струм у схемі рис. 3.17, якщо

діє сигнал джерела $e(t)$, зображений на рис. 3.18.

3.12. У схемі рис. 3.19 визначити напругу $U_{RH}(t)$, за умови, що

напруга джерела $e(t)$: а)дорівнює $10 \cos(2\pi \cdot 50t)$; б)зображена на рис.

3.20.

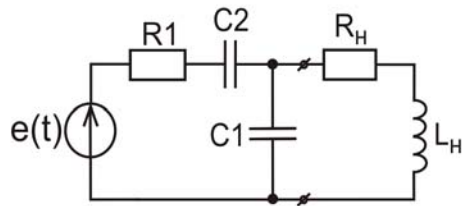


Рис. 3.6. Задача 3.1.

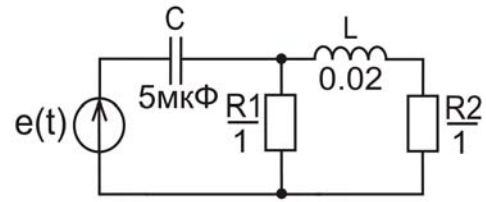


Рис.3.7. Задача 3.2.

МК

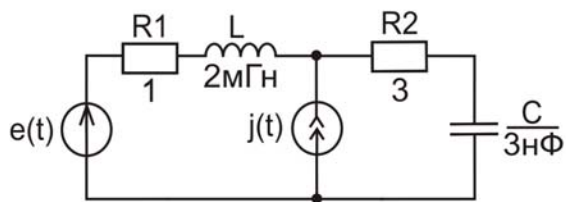


Рис.3.8. Задача 3.3.

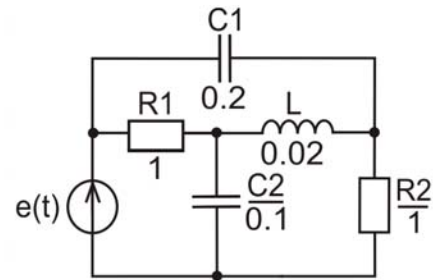


Рис.3.9. Задача 3.4.

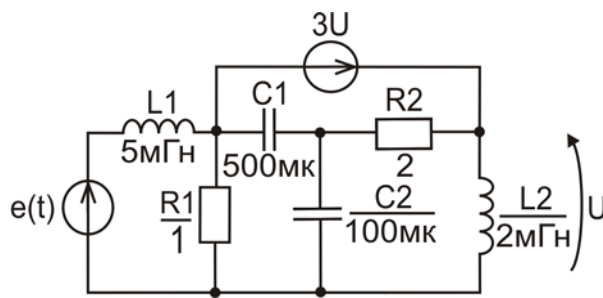


Рис.3.10. Задача 3.5.

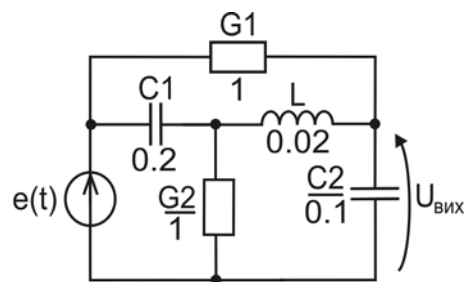


Рис.3.11. Задача 3.6.

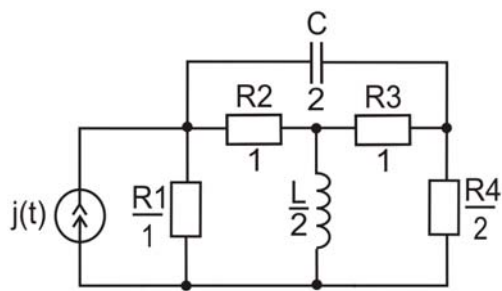


Рис.3.12. Задача 3.7.

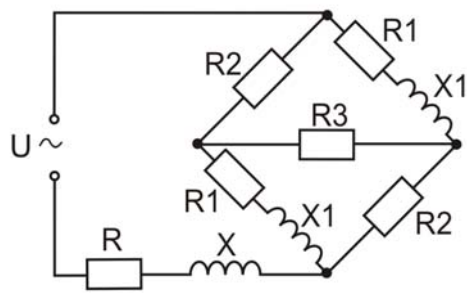


Рис.3.13. Задача 3.8

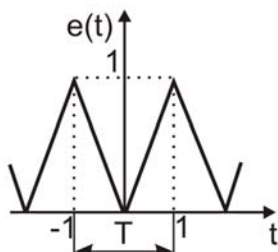


Рис.3.14. Задача 3.9.

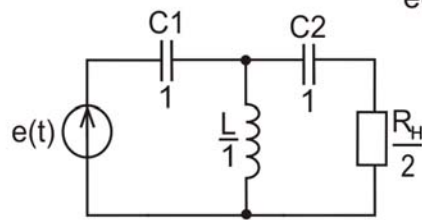


Рис.3.15. Задача 3.10

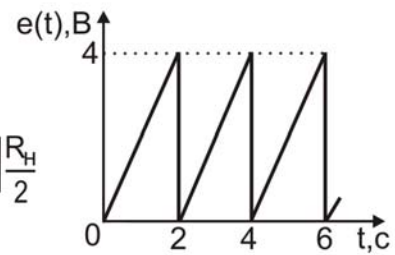


Рис.3.16. Сигнал к зад. 3.10

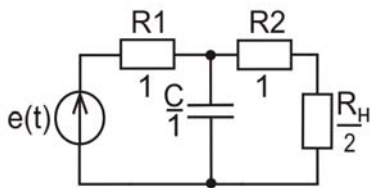


Рис.3.17. Задача 3.11.

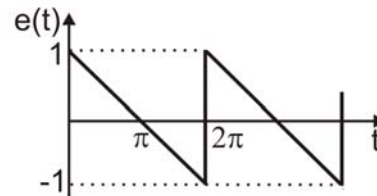


Рис.3.18. Сигнал к задаче 3.11

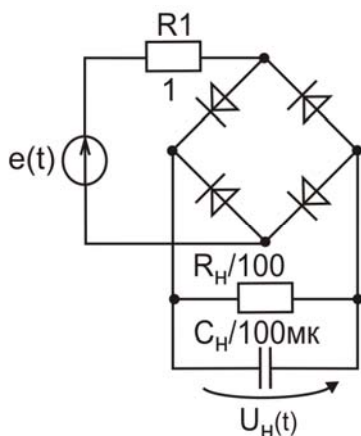


Рис.3.19. Задача 3.12.

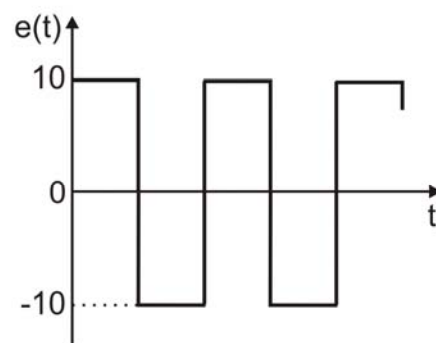


Рис.3.20. Сигнал к задаче 3.12.

4. СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

Якщо в лінійних реактивних схемах сигнали незалежних джерел являють собою неперіодичні функції часу $f(t)$, то розрахунок шуканих струмів і напруг можна зробити, перейшовши в область комплексної частоти $j\omega$. Перехід у частотну область полягає в заміні неперіодичних сигналів $f(t)$ їх спектральними густинами $F(j\omega)$, які знаходяться шляхом прямого перетворення Фур'є $F[f(t)]$:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = F[f(t)] . \quad (4.1)$$

Пряме перетворення Фур'є можна виконати лише для абсолютно інтегрованих функцій $f(t)$, тобто функцій, що задовольняють наступній нерівності: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.

Одночасно з сигналами джерел параметри двохполюсних компонентів замінюються імпедансами $Z(j\omega)$ або адмітансами $Y(j\omega)$ (див. табл. П.1, П.2). У результаті вихідна реактивна схема замінюється на лінійну резистивну схему, в якій спектральні густини струмів $I(j\omega)$ і напруг $U(j\omega)$ пов'язані між собою лінійними алгебраїчними співвідношеннями. Тому для визначення спектральних густин шуканих струмів і напруг можна використовувати будь-який з методів розрахунку лінійних резистивних схем. Перехід від спектральної густини $F(j\omega)$ до відповідного сигналу $f(t)$ проводиться за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[f(t)] . \quad (4.2)$$

У табл. П.5 наведені спектральні густини $F(j\omega)$ різних функцій часу $f(t)$, а в табл. П.6 - деякі властивості прямого і зворотного

перетворення Фур'є, знання яких в окремих випадках дозволяє спростити перехід з частотної області t у частотну $j\omega$ і назад. Спектральну густину $F(j\omega)$ як і будь-яку функцію комплексної змінної $j\omega$ можна представити у алгебраїчній, показниковій і тригонометричній формах:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot [\cos(\omega \cdot t) - j \sin(\omega \cdot t)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt + j \left[- \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega \cdot t) dt \right] = F_R(\omega) + j F_I(\omega) = \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$= \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)} \cdot e^{j \cdot \left[\arctg \frac{F_I(\omega)}{F_R(\omega)} \pm \begin{cases} 0; & F_R(\omega) \geq 0 \\ \pi; & F_R(\omega) < 0 \end{cases} \right]} = F(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \quad (4.4)$$

$$= F(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega) + j \cdot F(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega), \quad (4.5)$$

де $F_R(\omega), F_I(\omega)$ – відповідно дійсна і уявна частини спектральної густини; $F(\omega), \varphi(\omega)$ - відповідно спектральна густина амплітуд і спектральна густина фаз сигналу $f(t)$.

Окрім застосування формули (4.2) зворотне перетворення Фур'є можна виконати також за наступною формулою:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_R(\omega) \cos(\omega \cdot t) - F_I(\omega) \sin(\omega \cdot t)] d\omega . \quad (4.6)$$

Для парних функцій $f(t) = f(-t)$ уявна частина спектральної густини дорівнює нулю ($F_I(\omega) = 0$; див. ф-лу (4.3)). Тоді формули прямого перетворення Фур'є таких функцій і зворотного перетворення Фур'є їх спектральних густин приймають наступний вигляд:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega \cdot t) dt = F_R(\omega) = |F_R(\omega)| \cdot e^{j\alpha}, \quad (4.7)$$

$$\text{де } \alpha = \begin{cases} 0; & F_R(\omega) > 0; \\ \pi; & F_R(\omega) < 0. \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) d\omega. \quad (4.8)$$

Дійсна частина спектральної густини непарних функцій $f(t) = -f(-t)$ дорівнює нулю ($F_R(\omega) = 0$; див.. ф-лу (4.3)). Тоді пряме перетворення Фур'є таких функцій і зворотне перетворення Фур'є їх спектральних густин виконується за наступними формулами:

$$F(j\omega) = -j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = F_I(\omega) = |F_I(\omega)| \cdot e^{j\beta}, \quad (4.9)$$

$$\text{де } \beta = \begin{cases} \pi/2; & F_I(\omega) > 0; \\ -\pi/2; & F_I(\omega) < 0. \end{cases}$$

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_I(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t) d\omega. \quad (4.10)$$

Якщо функція $f(t)$ обертається в нуль при від'ємних t , тобто $f(t) = 0, t < 0$, то зворотне перетворення Фур'є її спектральної густини виконується за наступною формулою:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_I(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t) d\omega. \quad (4.11)$$

Спектральна густина енергії $W(\omega)$ неперіодичного сигналу $f(t)$ визначається через спектральну густину $F(j\omega)$ сигналу наступним чином:

$$W(\omega) = F(j\omega) \cdot F^*(j\omega) = F^2(\omega), \quad (4.12)$$

а повна енергія сигналу W дорівнює:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) d\omega. \quad (4.13)$$

Спектральна густина взаємної енергії $W_{12}(\omega)$ сигналів $f_1(t)$ и $f_2(t)$ визначається через спектральні густини $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$ сигналів наступним чином:

$$W_{12} = \text{Re} [F_1(j\omega) \cdot F_2^*(j\omega)] \quad (4.14)$$

Взаємна енергія сигналів $f_1(t)$ і $f_2(t)$ знаходиться наступним чином:

$$W_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) \cdot F_2^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega \quad (4.15)$$

Взаємна енергія сигналу $f(t)$ і такого ж сигналу, але який запізнюється $f(t-\tau)$, тобто сигналу $f(t)$, зміщеного по осі часу вправо на величину τ , визначається автокореляційною функцією (АКФ) $\psi(\tau)$ (див. рис. 4.1а):

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t-\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot F^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \psi(-\tau). \quad (4.16)$$

Спектральна густина енергії $W(\omega)$ сигналу $f(t)$ і АКФ $\psi(\tau)$ сигналу $f(t)$ пов'язані між собою прямим і зворотним перетворенням Фур'є:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.17)$$

$$\psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.18)$$

Взаємна енергія сигналів $f_1(t)$ і сигналу $f_2(t-\tau)$, який запізнюється на час τ , визначається взаємною кореляційною функцією (ВКФ) $\psi_{12}(\tau)$ (див. рис. 4.1б):

$$\begin{aligned}\psi_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t-\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) \cdot F_2^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \psi_{21}(-\tau),\end{aligned}\quad (4.19)$$

де це ВКФ сигналі $f_2(t)$ і $f_1(t+\tau)$, тобто сигналу $f_1(t)$, зміщеного по осі часу вліво на τ (див. рис. 4.1в). ВКФ у загальному випадку не є парною:

$$\psi_{12}(\tau) \neq \psi_{12}(-\tau).$$

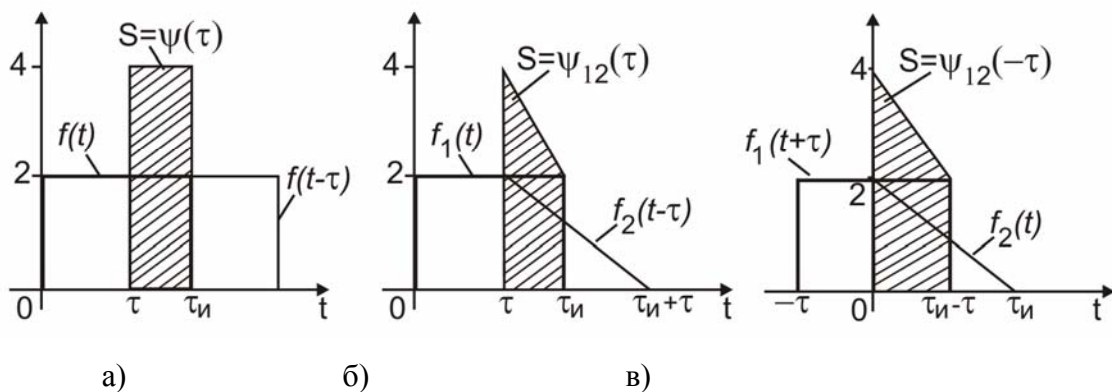


Рис. 4.1. Площа заштрихованої фігури дорівнює: а) автокореляційній функції сигналу $f(t)$ і сигналу, який запізнюється $f(t-\tau)$; б) взаємній кореляційній функції сигналу $f_1(t)$ і сигналу $f_2(t-\tau)$, який запізнюється на τ ; в) взаємній кореляційній функції сигналу $f_2(t)$ і випереджаючого сигналу $f_1(t+\tau)$.

Задачі та вправи

- 4.1.** Визначити і зобразити графічно спектральні густини амплітуд і фаз сигналу, представленого на рис. 4.2.
- 4.2.** Визначити спектральну густину сигналу (рис 4.3) і спектральну густину його енергії.
- 4.3.** Визначити енергію сигналу, зображеного на рис. 4.4.
- 4.4.** Знайти спектральну густину імпульсу $u(t) = 10 e^{-2,3 \cdot 10^{-6} t} \sigma(t)$ В.

- 4.5.** Визначити спектральну густину амплітуд, фаз, енергії і повну енергію сигналу, зображеного на рис. 4.5. Знайти ці ж характеристики для вихідної напруги $U_{\text{вих}}(t)$ схеми на рис. 4.6, якщо на вхід подати напругу $e_{\text{вх}}(t)$ рис. 4.5.
- 4.6.** Визначити спектральну густину амплітуд і фаз вхідного (рис. 4.6) і вихідного сигналів схеми (рис. 4.8).
- 4.7.** На вхід схеми (рис. 4.10) надходить сигнал (рис. 4.9). Визначити енергію вихідного сигналу.
- 4.8.** Визначити, на якій частоті $\omega_{\text{в}}$ значення модуля спектральної густини сигналу $u(t) = 10 e^{-1000t} \sigma(t)$ зменшиться у 10 разів у порівнянні зі значенням спектральної густини на частоті $\omega = 0$. Визначити, яка частина енергії сигналу знаходиться у полосі частот від $\omega = 0$ до $\omega_{\text{в}}$.
- 4.9.** Радіолокаційна станція випромінює імпульс $u_1(t)$ (див. рис. 4.11) і приймає відбитий від літака імпульс $u_2(t)$. Визначити відстань до літака, якщо взаємно-кореляційна функція сигналів $u_1(t)$ і $u_2(t)$ дорівнює 0,01 від її максимального значення.
- 4.10.** Визначити взаємно-кореляційну функцію сигналів $u_1(t) = 10[\sigma(t) - \sigma(t - \tau)]$ і $u_2(t) = 13 \cdot e^{-0,25 \cdot (t - \tau)} \cdot \sigma(t - \tau)$ при додатніх та від'ємних значеннях τ .

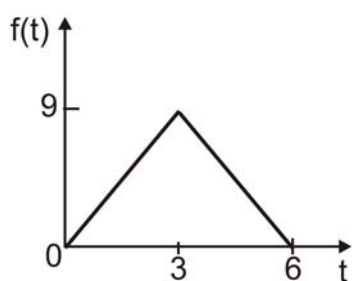


Рис. 4.2. Задача 4.1.

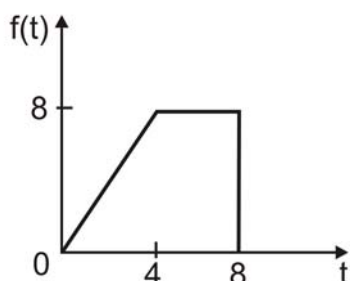


Рис. 4.3. Задача 4.2

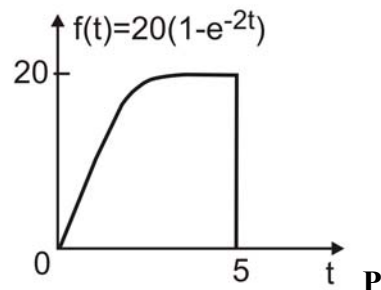


Рис. 4.4. Задача 4.3.

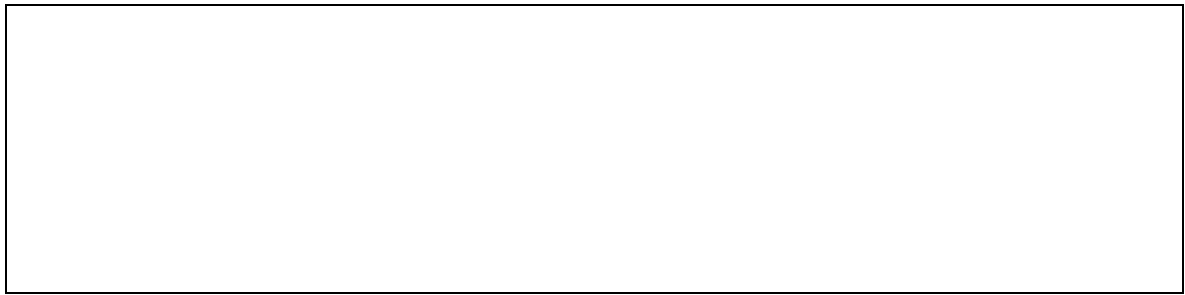


Рис.4.5. Задача 4.5.

Рис. 4.6. Задача 4.5.

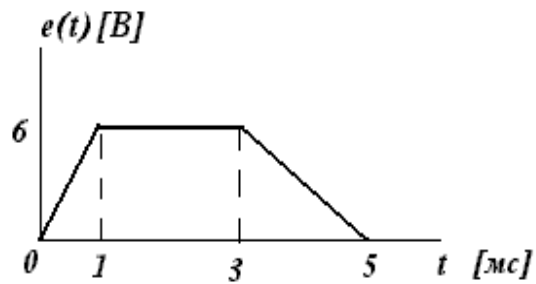


Рис. 4.7. Задача 4.6.

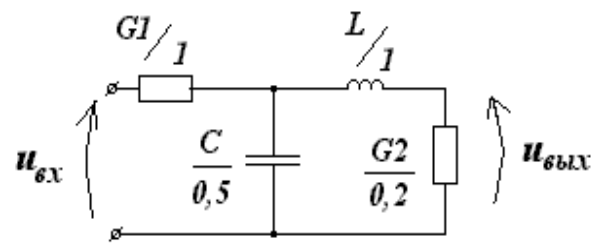


Рис. 4.8. Задача 4.7.

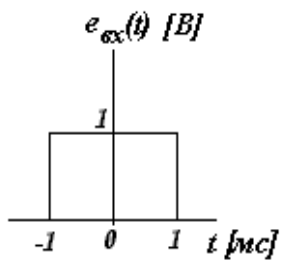


Рис. 4.9. Задача 4.7.

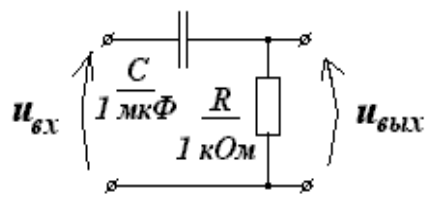


Рис. 4.9. Задача 4.7.

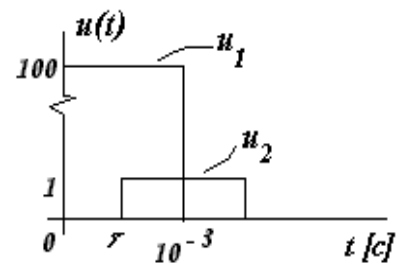


Рис. 4.11. Задача 4.9.

5. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Властивості лінійних реактивних схем в частотній області, знання яких дозволяє встановити зв'язок шуканого струму або напруги з сигналом джерела, зручно визначати, представивши вихідну схему як систему з двома сторонами. Спектральну характеристику реакції системи $Y(j\omega)$ (тобто шуканого струму $I_{вих}(j\omega)$ або шуканої напруги $U_{вих}(j\omega)$ на виході системи) можна виразити через спектральну характеристику дії на вході системи $V(j\omega)$ (тобто через спектральну густину вхідної напруги $U_{вх}(j\omega)$ або спектральну густину вхідного струму $I_{вх}(j\omega)$), якщо відомі частотозалежні схемні функції $K(j\omega)$ (тобто $K_U(j\omega)$; $K_I(j\omega)$; $Z_{пер}(j\omega)$ і т.п.). Схемні функції передачі $K(j\omega)$ є частотними характеристиками реактивної схеми, яка представлена як система з двома сторонами. Формула, що зв'язує спектральні густини дії і реакції в загальному випадку має наступний вигляд:

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)} \quad (5.1)$$

Для визначення частотозалежних схемних функцій $K(j\omega)$ необхідно вихідну схему замінити схемою, що представлена в частотній області. Реактивну схему в частотній області представляють шляхом заміни двополюсних компонентів R , C , L комплексними опорами, частотні імпеданси $Z(j\omega)$ або адмітанси $Y(j\omega)$ яких наведені в табл. П.3.

Перетворенням піддаються і сигнали $f(t)$ незалежних джерел струму і напруги. Неперіодичні сигнали $f(t)$ незалежних джерел вихідної схеми замінюються їх спектральними густинами $F(j\omega)$.

Спектральні густини $F(j\omega)$ сигналів знаходяться прямим перетворенням Фур'є сигналу $f(t)$.

Періодичні негармонічні сигнали $f(t)=f(t\pm nT)$, $n=1,2,\dots$ замінюються дискретними спектральними щільностями $F(jk\omega_1)=\dot{F}_k = F_{mk} e^{j\varphi_k}$, $\omega_1=2\pi/T$, $k=0,1,2,\dots$ (тобто спектрами амплітуд F_{mk} і спектрами початкових фаз φ_k). Спектри амплітуд і початкових фаз отримують розкладанням періодичного сигналу $f(t)=f(t\pm nT)$ в ряд Фур'є. Гармонічні сигнали джерел $f(t)=F_m \cos(\omega t + \varphi)$ замінюються їх комплексними амплітудами $\dot{F} = F_m e^{j\varphi}$.

Результатом таких заміन є схема, в якій спектральні щільності всіх струмів $I(j\omega)$ і напруг $U(j\omega)$ пов'язані між собою лінійними алгебраїчними співвідношеннями. Тому для визначення спектральних густин шуканих напруг і струмів можна застосувати будь-який метод аналізу лінійних резистивних схем (метод еквівалентних перетворень, вузловий метод і т.п.), але замість опорів, провідностей і сигналів незалежних джерел використовуються відповідно імпеданси $Z(j\omega)$, адмітанси $Y(j\omega)$ і спектральні щільності сигналів $F(j\omega)$.

Потрібна схемна функція визначається як відношення спектральних густин відповідних струмів і/або напруг. Наприклад, для схемної функції передачі напруги маємо:

$$K_U(j\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(j\omega)}{U_{\text{вх}}(j\omega)}$$

Інший підхід при визначенні частотних характеристик системи заснований на зв'язку схемних функцій з матрицею провідності $Y_C(j\omega)$ внутрішньої частини системи. Матриця $Y_C(j\omega)$ укладається за такими ж алгоритмами, що і для лінійних резистивних систем, але замість провідностей використовуються адмітанси $Y(j\omega)$. Схемні

функції $K(j\omega)$ знаходяться за тими ж формулами, що і схемні функції лінійних резистивних систем (див. табл П.14).

Невідомі спектральні густини струмів і напруг на сторонах системи знаходяться через відповідні схемні функції $K(j\omega)$ за формулою (5.1). Наприклад: на рис.5.1а зображена лінійна реактивна

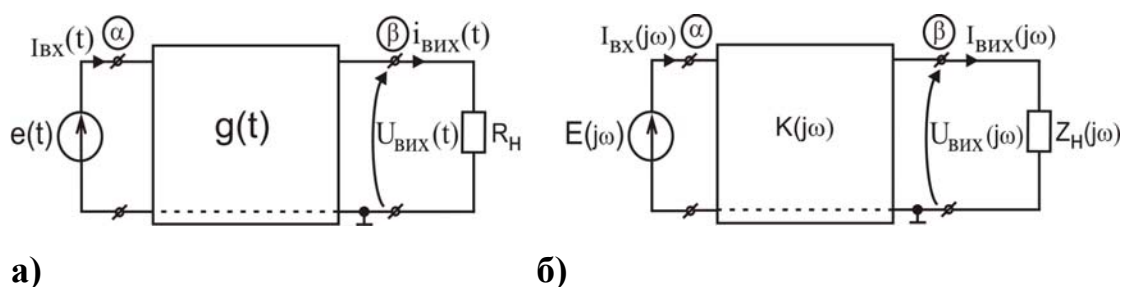


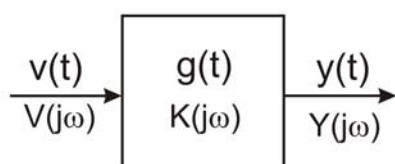
Рис. 5.1. Система з двома сторонами: а) у часовій області; б) у частотній області.

система у часовій області t і потрібно визначити вихідний струм $i_{\text{вих}}(t)$. На рис. 5.1б дана система зображена в частотній області $j\omega$, де $I_{\text{вих}}(j\omega)$ – спектральна густина шуканого струму. Тоді спектральну густину вихідного струму $I_{\text{вих}}(j\omega)$ можна визначити через провідність передачі $Y_{\text{пер}}(j\omega)$ системи наступним чином (див. табл. П14):

$$I_{\text{вих}}(j\omega) = Y_{\text{пер}} \cdot E(j\omega) = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(j\omega) \cdot E(j\omega)}{\Delta_{\alpha\alpha}(j\omega)Z_H(j\omega) + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}(j\omega)} \quad (5.2)$$

де $\Delta_{\alpha\beta}(j\omega)$, $\Delta_{\alpha\alpha}(j\omega)$, $\Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}(j\omega)$ – алгебраїчні доповнення матриці $Y_C(j\omega)$; $E(j\omega)$ – спектральна густина вхідної напруги $e(t)$. Шуканий сигнал $i_{\text{вих}}(t)$ знаходиться виконанням зворотного перетворення Фур'є спектральної густини $I_{\text{вих}}(j\omega)$, яка обчислюється за формулою (5.2).

Частотні характеристики $K(j\omega)$ системи можна використовувати для визначення часових характеристик. Так, імпульсна $g(t)$ характеристика системи (рис. 5.2) і частотна характеристика $K(j\omega)$ пов'язані прямим і зворотним перетворенням



$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt; \quad (5.3)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \cdot e^{j\omega \cdot t} dt. \quad (5.4)$$

Рис. 5.2. До визначення зв'язку між часовими і частотними характеристиками

Фур'є:

Потрібна схемна функція вибирається виходячи з фізичного змісту дії і реакції, які позначені на рис. 5.2 як $v(t)$ і $y(t)$ відповідно. Якщо $v(t)$ – струм і $y(t)$ – струм, то для визначення імпульсної характеристики схеми необхідно використати коефіцієнт передачі струму(див. табл. П14) :

$$K(j\omega) = K_I(j\omega) = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(j\omega)}{Z_n(j\omega) \cdot \Delta(j\omega) + \Delta_{\beta\beta}(j\omega)}$$

і т.п.

Враховуючи те, що $g(t) = 0$ при $t < 0$, формулу (5.4) можна представити у наступному вигляді:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) d\omega = -\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} K_I(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t) d\omega, \quad (5.5)$$

де $K_R(\omega)$, $K_I(\omega)$ відповідно дійсна і уявна частини частотної характеристики $K(j\omega)$, представленої в алгебраїчній формі.

Перехідна характеристика $h(t)$ пов'язана з частотними характеристиками реактивної схеми наступним чином:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_R(\omega)}{\omega} \sin(\omega \cdot t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_I(\omega)}{\omega} \cos(\omega \cdot t) d\omega. \quad (5.6)$$

У показниковій формі частотна характеристика має наступний вигляд: $K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Модуль $K(\omega)$ схемної функції називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ). Згідно формули (5.1) значення АЧХ на деякій частоті ω_1 являє собою відношення амплітуд реакції $y(t)$ і дії $v(t)$, які, у свою чергу, являють собою гармонічні сигнали такої ж частоти ω_1 :

$$K(\omega_1) = \frac{Y_m(\omega_1)}{V_m(\omega_1)}. \quad (5.7)$$

Амплітудно-частотну характеристику використовують для визначення смуги пропускання системи $\Delta\omega = \omega_B - \omega_H$. На рис. 5.3 показано, як визначити смугу пропускання, коли АЧХ наведена в графічній формі.

Величина $M_{\text{доп}}$ зазвичай вибирається рівною $1/\sqrt{2}$ і являє собою нижнє допустиме значення коефіцієнта нерівномірності амплітудно-частотної характеристики $K(\omega)/K_0$ в смузі пропускання

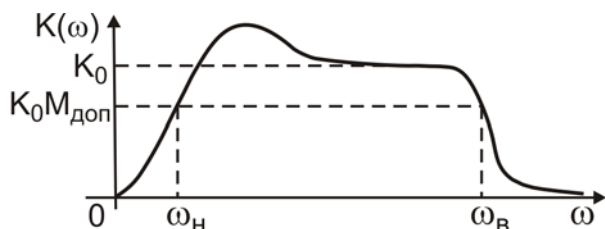


Рис.5.3. Визначення смуги пропускання реактивної схеми за амплітудно-частотною хараткеристикою (АЧХ).

$\Delta\omega$. Величина K_0 , як правило, вибирається на такій ділянці кривої, де АЧХ $K(\omega)$ мало змінюється при зміні ω .

Аргумент $\varphi(\omega)$ схемної функції $K(j\omega)$ називається фазо-частотною характеристикою (ФЧХ). Фазо-частотна характеристика на деякій частоті ω_1 (див. ф-лу 5.1) являє собою різницю початкових фаз реакції $y(t)$ і дії $v(t)$, які представляють собою гармонічні сигнали такої ж частоти ω_1 :

$$\varphi(\omega_1) = \varphi_y(\omega_1) - \varphi_v(\omega_1) \quad (5.7)$$

Схемна функція $K(j\omega)$ як функція комплексної змінної $j\omega$ графічно зображується на комплексній площині з осями $Re[K(j\omega)]$ і $Im[K(j\omega)]$ і називається амплітудно-фазовою характеристикою (АФХ). Це зображення називається також годографом схемної функції (годографом АФХ).

Задачи и упражнения

5.1. Визначити амплітудно-частотну і фазочастотну характеристики $K_U(j\omega)$ схеми рис. 5.4.

5.2. Визначити і побудувати $K_U(\omega)$ і $\varphi_U(\omega)$ схеми рис. 5.5. При якій частоті $K_U(\omega)$ досягає максимального значення $K_{U\max}$? Чому дорівнює величина $K_{U\max}$? Визначити і побудувати залежність $K_{U\max}(R)$.

5.3. Визначити резонансну частоту коефіцієнта передачі напруги $K_{U\max}$ схеми рис. 5.6. Чому дорівнює смуга пропускання схеми ($M_{\text{доп}}=1/\sqrt{2}$)?

5.4. Зобразити амплітудно-фазову характеристику вхідного імпедансу схеми рис. 5.7. Чому дорівнює максимальне значення його дійсної складової?

5.5. Визначити амплітудно-частотну і фазочастотну характеристики $K_U(j\omega)$ схеми рис. 5.8.

5.6. Визначити і побудувати залежності $K_U(\omega)$ і $\varphi_U(\omega)$ схеми рис. 5.9.

5.7. Визначити і зобразити графічно АЧХ і ФЧХ коефіцієнта передачі напруги $K_U(j\omega)$ схеми рис. 5.10.

5.8. Визначити $K_U(\omega)$ і $\varphi_U(\omega)$ схеми рис. 5.11.

5.9. Визначити АЧХ і ФЧХ коефіцієнта передачі напруги схеми рис. 5.12.

5.10. Визначити граничні частоти і смугу пропускання $K_U(\omega)$ підсилювача рис. 5.13, якщо лінійна динамічна модель транзистора має наступні параметри: $C_{BE} = 10n\Phi$, $C_{KB} = 20n\Phi$, $h_E = \begin{bmatrix} 500 & 5 \cdot 10^{-4} \\ 50 & 0,8 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$.

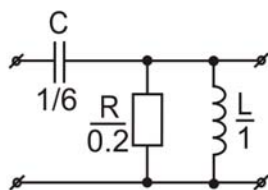


Рис. 5.4. Задача 5.1.

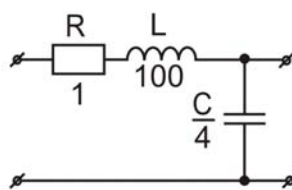


Рис. 5.5. Задача 5.2.

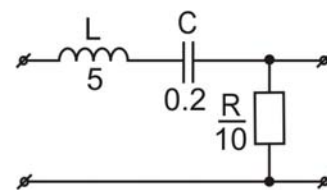


Рис. 5.6. Задача 5.3.

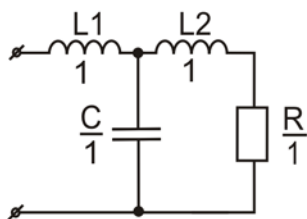


Рис. 5.7. Задача 5.4.

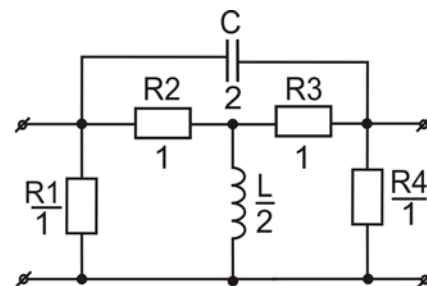


Рис. 5.8. Задача 5.5.

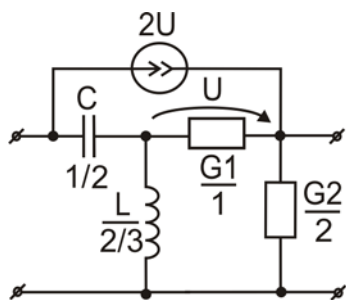


Рис. 5.9. Задача 5.6

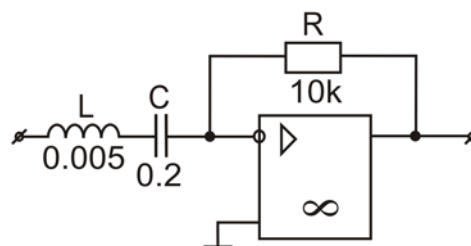


Рис. 5.10. Задача 5.7

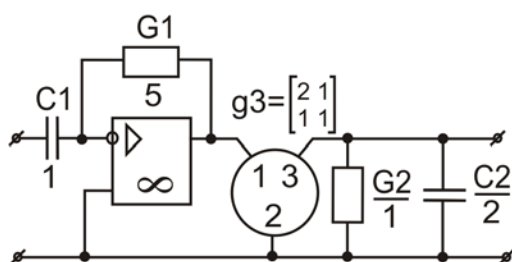


Рис.5.11. Задача 5.8.

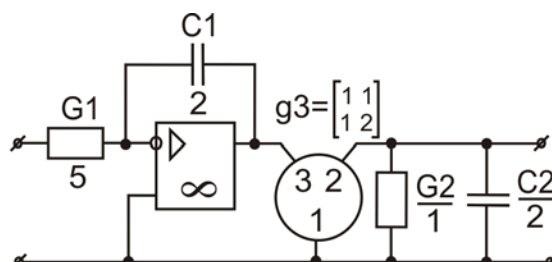


Рис.5.12. Задача 5.9.

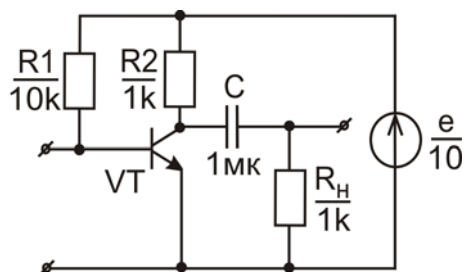


Рис.5.13. Задача 5.10.

6. ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД

Операторний метод використовується для розрахунку струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ в лінійних реактивних схемах і заснований на інтегральному перетворенні Лапласа функції часу $f(t)$ у функцію комплексної змінної $F(s) = F(\sigma + j\omega)$. Пряме перетворення Лапласа виконується для таких функцій $f(t)$, які дорівнюють нулю за від'ємних значень часу ($t < 0$) і задовольняють наступній умові:

$$\int_0^{\infty} |f(t)| \cdot e^{-\sigma_0 t} dt < \infty,$$

де σ_0 – деяке дійсне додатне число.

Пряме перетворення Лапласа $\mathcal{L}[f(t)]$ виконується таким чином:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)], \quad (6.1)$$

де $F(s)$ – операторне зображення функції $f(t)$.

Зворотний перехід у часову область в загальному випадку здійснюється за формулою зворотного перетворення Лапласа $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$:

$$f(t) = \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}[F(s)], \quad (6.2)$$

де $f(t)$ – оригінал зображення $F(s)$.

У табл. П.7 наведені операторні зображення функцій часу, які можуть описувати сигнали джерел, струми і напруги на компонентах схеми і т.п., а в табл. П.8 – властивості перетворення Лапласа. Завдяки властивості 3 всі компонентні рівняння двополюсників мають вигляд лінійних алгебраїчних співвідношень (див. табл. П.1, П.2).

Подання (представлення) схеми в операторній області проводиться наступним чином:

1. Параметри двохполюсних компонентів замінюють імпедансами $Z(s)$ або адмітансами $Y(s)$, причому імпеданс опору R і в операторній області дорівнює R відповідно до властивості 2 табл. П.8. Початкові умови враховуються так, як наведено в табл. П.1, П.2;
3. Сигнали незалежних джерел $v(t)$ замінюються їх операторними зображеннями $V(s)$ за формулою (6.1) або за табл. П.7;
4. Аналіз отриманої операторної схеми виконується одним з методів аналізу лінійних резистивних схем (методом еквівалентних перетворень, вузловим методом і т.п.). Відмінність полягає у тому, що замість опорів використовуються імпеданси $Z(s)$, замість провідностей – адмітанси $Y(s)$, замість струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ – операторні зображення струмів $I(s)$ і напруг $U(s)$;
5. Перехід від знайдених операторних зображень струмів $I(s)$ і напруг $U(s)$ до шуканих струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ здійснюється за формулою (6.2), або по табл. П.7.
6. Якщо операторне зображення шуканої функції струму або напруги являє собою дробно-раціональну функцію $F(s) = A_m(s) / B_n(s)$, де m, n – порядок поліномів ($m < n$), що має прості полюси s_1, s_2, \dots, s_n ; (полюси – це корені рівняння $B_n(s)=0$), то її можна розкласти на прості дроби

$$F(s) = \frac{A_m(s)}{b_n(s-s_1)\dots(s-s_n)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n}. \quad (6.3)$$

Коефіцієнти розкладання K_i визначаються наступним чином:

$$K_i = [(s - s_i) F(s)]_{s=s_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.4)$$

тоді оригінал $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ являє собою суму наступних експонент:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot e^{s_i t}, \quad (6.5)$$

Якщо операторне зображення шуканої функції струму або напруги $F(s) = A_m(s) / B_n(s)$ має q полюсів s_1, s_2, \dots, s_q , кратність кожного з яких дорівнює m_k , $k = 1, 2, \dots, q$ (в цьому випадку $\sum_{k=1}^q m_k = n$, де n – порядок поліному $B_n(s)$), то його можна представити у наступному вигляді:

$$F(s) = \frac{A_m(s)}{(s - s_1)^{m_1} \dots (s - s_q)^{m_q}} = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(s - s_k)^{m_k - j + 1}}, \quad (6.6)$$

де коефіцієнти розкладання K_{kj} визначаються за такою формулою:

$$K_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{(j-1)}}{ds^{(j-1)}} [(s - s_k)^{m_k} F(s)] \right\}_{s=s_k}; \quad (6.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, q; \quad j = 1, 2, \dots, m_k$$

У цьому випадку оригінал $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ визначається таким чином:

$$f(t) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} \frac{K_{kj}}{(m_k - j)!} \cdot t^{(m_k - j)} \cdot e^{s_k t}, \quad (6.8)$$

Операторну схемну модель при розв'язуванні деяких завдань зручно представити як систему з двома сторонами (рис. 6.1б), яка у цьому випадку буде характеризуватися операторними схемними функціями $K(s)$. Наприклад: $K_U(s) = \frac{U_{\text{вх}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}$.

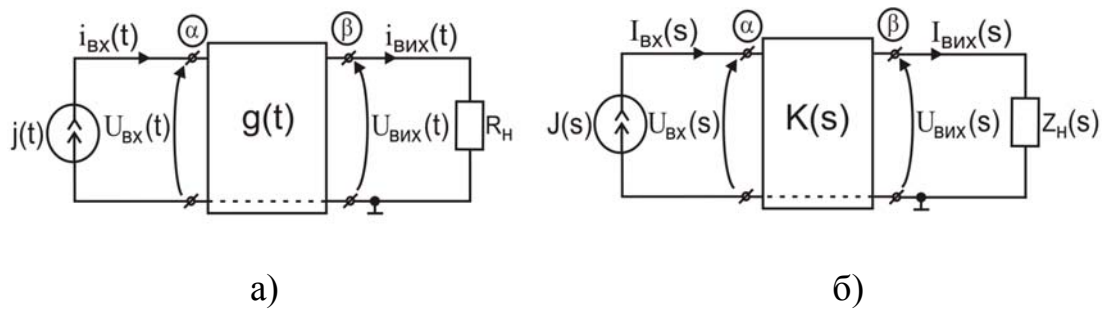


Рис. 6.1. Система з двома сторонами: а) у часовій області t ; б) в операторній області s .

Схемні функції визначаються через матрицю провідності внутрішньої частини системи $Y_c(s)$ за тими ж формулами, що і схемні функції лінійних резистивних систем (див. табл. П.14). Наприклад:

$$K_u(s) = \frac{Z_H(s) \cdot \Delta_{\alpha\beta}(s)}{Z_H(s) \cdot \Delta_{\alpha\alpha}(s) + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}(s)},$$

де $\Delta_{\alpha\alpha}(s)$ – алгебраїчне доповнення матриці $Y_c(s)$ і т. п.

Від операторних схемних функцій $K(s)$ легко перейти до частотних характеристик системи $K(j\omega)$ (див. (5.1)), просто замінивши s на $j\omega$. Наприклад:

$$K_U(s) = \frac{s}{1+s} \Big|_{s=j\omega} \rightarrow K_U(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}.$$

Операторні схемні функції $K(s)$ можна використовувати для визначення часових характеристик реактивної схеми. Перехідна $h(t)$ і імпульсна $g(t)$ характеристики (див. рис. 2.2; 2.3) визначаються через відповідні схемні функції $K(s)$ наступним чином:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)/s]; \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] \quad (6.9)$$

Наприклад: якщо на вході системи діє джерело струму $j(t)$ (рис. 6.1a) та на виході потрібно визначити напругу на навантаженні $U_{\text{вих}}(t)$, тоді перехідна характеристика $h(t)$ такої системи визначається як оригінал функції $Z_{\text{nep}}(s)/s$, а імпульсна характеристика $g(t)$ – як оригінал схемної функції $Z_{\text{nep}}(s)$. У цьому прикладі вибір опору передачі $Z_{\text{nep}}(s)$ як необхідної схемної функції обумовлений типом діючого на вході системи сигналу (тобто $j(t)$) і типом шуканої величини на виході (тобто $U_{\text{вих}}(t)$).

Шукана величина $U_{\text{вих}}(t)$ може бути знайдена через інтеграл суперпозиції з використанням $h(t)$, або через інтеграл-згортку з використанням $g(t)$, або як оригінал функції $U_{\text{вих}}(s) = Z_{\text{nep}}(s)J(s)$ з використанням зворотного перетворення Лапласа.

Рівняння змінних стану і вихідні рівняння реактивної схеми n -го порядку (див. формули 2.1) в операторній формі мають наступний вигляд:

$$sX(s) - X(0) = A \cdot X(s) + B \cdot V(s); \quad (6.10a)$$

$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot V(s); \quad (6.10б)$$

де $X(s)$, $V(s)$, $Y(s)$ – операторні зображення відповідно векторів змінних стану $x(t)$, сигналів незалежних джерел $v(t)$, вихідних величин $y(t)$. Зображення $X(s)$ вектора змінних стану дорівнює

$$X(s) = \Phi(s) \cdot X(0) + \Phi(s) \cdot B \cdot V(s), \quad (6.11)$$

де операторне зображення $\Phi(s)$ фундаментальної матриці e^{At} визначається наступним чином:

$$\Phi(s) = (sE - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sE - A)} Q(s), \quad (6.12)$$

У формулі (6.12) $Q(s)$ – приєднана матриця, елементи якої – алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці $(sE - A)^T$.

При нульових початкових умовах ($X(0) = 0$) вектор $Y(s)$ можна знайти через зображення $G(s)$ матричної імпульсної характеристики $G(t)$ (див. формулу (2.14)):

$$Y(s) = G(s) \cdot V(s) = [C \cdot \Phi(s) + D] \cdot V(s) \quad (6.13)$$

Оскільки матриця $(sE - A)$ (див. формулу (6.12)) містить оператор s лише на головній діагоналі, її обернення можна виконати за рекурентним алгоритмом Фаддєєва. При цьому визначник матриці $(sE - A)$ і матрицю $Q(s)$ (див. формулу (6.12)) представляють у наступному вигляді:

$$\det(sE - A) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n, \quad (6.14)$$

$$Q(s) = Q_1 s^{n-1} + Q_2 s^{n-2} + \dots + Q_{n-1} s + Q_n, \quad (6.15)$$

де матриці Q_i і дійсні коефіцієнти d_i знаходяться за наступними рекурентними формулами:

$$Q_i = Q_{i-1} \cdot A + d_{i-1} E; \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad (Q_1 = E), \quad (6.16)$$

$$d_i = -\frac{1}{i} \text{tr}(Q_i \cdot A); \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.17)$$

У формулі (6.17) $\text{tr}(Q_i A)$ – це так званий слід матриці $Q_i A$, який дорівнює сумі діагональних елементів).

Зображення $\Phi(s)$ фундаментальної матриці e^{At} знаходиться за формулою (6.12) з використанням формул (6.14) - (6.17); $X(s)$ – за формулою (6.11), а $Y(s)$ – за формулою (6.10б).

Задачі і вправи

- 6.1. Визначити перехідну характеристику схеми рис. 6.2.
- 6.2. Для схеми рис. 6.3 визначити перехідну характеристику.
- 6.3. Визначити напругу $U_c(t)$ в схемі рис. 2.10, якщо $e(t) = \sigma(t)$.
- 6.4. Визначити перехідну і імпульсну характеристики схеми рис. 5.9.
- 6.5. Визначити напругу $U_c(t)$ в схемі рис. 2.15, якщо $j(t) = \sigma(t)$ і $j(t) = e^{-0.5t} \sigma(t)$.
- 6.6. Визначити перехідну і імпульсну характеристики схеми рис. 5.11.
- 6.7. Визначити перехідну і імпульсну характеристики схеми рис. 5.12.
- 6.8. Чи залежить стійкість схеми рис 6.4 від величини μ ? Якщо так, то як?
- 6.9. Визначити часові та частотні характеристики схеми рис. 6.6.
- 6.10. Визначити струм навантаження $i_n(t)$, якщо на вході схеми рис. 6.7 при нульових початкових умовах діє джерело струму $j(t) = 5[\sigma(t) - \sigma(t-10)]$.
- 6.11. Визначити перехідну характеристику підсилювача (рис. 6.5), якщо лінійна модель транзистора має наступні параметри
- $$C_{KB} = 10 \text{ нФ}, g_s = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-3} & -1 \cdot 10^{-7} \\ 0.25 & 0.2 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$
- 6.12. Розв'язати операторним методом завдання 2.11, 2.13, 2.14.

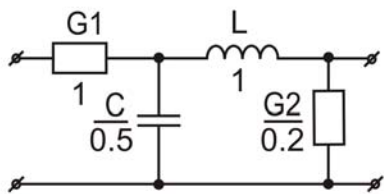


Рис. 6.2. Задача 6.1.

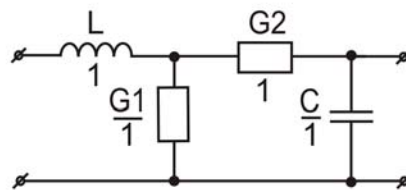


Рис. 6.3. Задача 6.2.

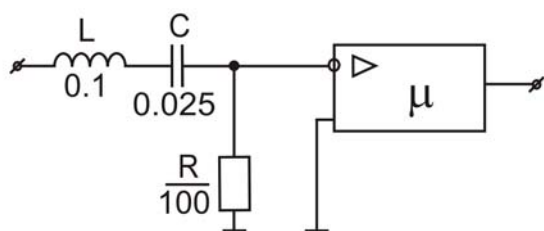


Рис. 6.4. Задача 6.8

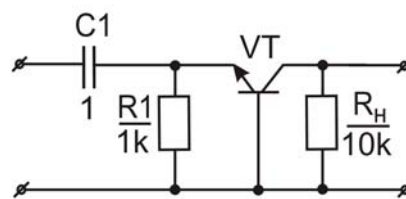


Рис. 6.5. Задача 6.11.

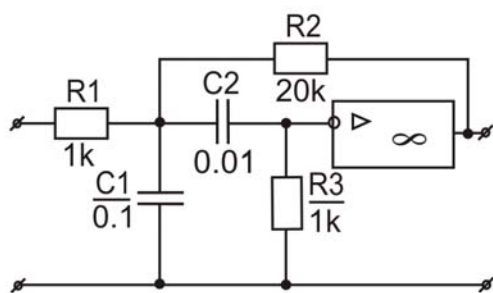


Рис. 6.6. Задача 6.9

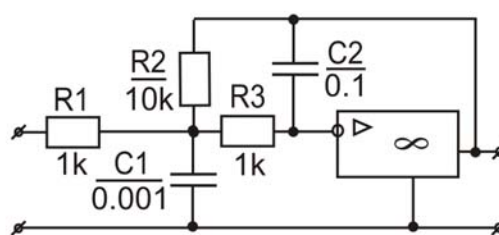


Рис. 6.7. Задача 6.10

6. АПРОКСИМАЦІЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Мета апроксимації частотної характеристики полягає у визначенні такої структури схеми і таких значень номіналів компонентів, за яких зазначена у вихідних даних схемна функція мала б необхідну амплітудно-частотну характеристику $K(\omega)$.

Це завдання вирішується у декілька етапів:

1. Вибирається аналітичний вираз (в загальному вигляді) апроксимуючої функції:

$$K^2(\omega) = K(j\omega) \cdot K(-j\omega) = \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)}$$

2. Проводиться перехід від функції кругової частоти ω до функції комплексної змінної s :

$$K^2(s) = K(s) \cdot K(-s) = \frac{M(-s^2)}{N(-s^2)}$$

3. Визначаються нулі і полюси функції $K^2(s)$, які на комплексній площині розташовані в центральній симетрії.
4. Записується шукана схемна функція $K(s)$ в операторній формі

$$K(s) = \frac{A_m(s)}{b_n(s-s_1) \dots (s-s_n)}, \quad (7.1)$$

де s_k , $k=1,2,\dots,n$ – полюси функції, що лежать в лівій напівплощині; $A_m(s)$ – поліном ступеня m , утворений за теоремою Вієта з половини нулів функції $K^2(s)$.

5. Визначається структура і склад синтезованої схеми таким чином, щоб її схемна функція $\bar{K}(s)$ являла собою відношення

поліному від s порядку m до поліному від s порядку n (див. формулу (7.1)) з коефіцієнтами, що виражені через невідомі номінали R, L, C .

6. З вимоги виконання рівності

$$K(s) = \bar{K}(s) \quad (7.2)$$

знаходяться значення параметрів R, L, C синтезованої схеми.

Як правило, рівняння (7.2) має незліченну множину рішень. Для вибору оптимального рішення використовуються додаткові умови.

Апроксимація частотних характеристик проводиться, наприклад, при синтезі фільтрів. На рис. 7.1 наведені амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) фільтра нижніх частот (ФНЧ), фільтра верхніх частот (ФВЧ), смугового фільтра (СФ) і загороджувального фільтра (ЗФ).

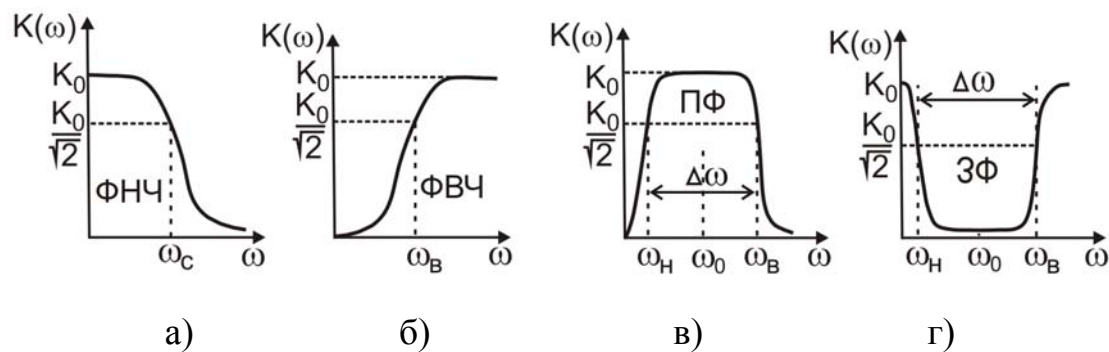


Рис. 7.1. Амплітудно-частотні характеристики: а) фільтра нижніх частот; б) фільтра верхніх частот; в) смугового фільтра; г) загороджувального фільтра.

Фільтри нижніх частот синтезуються в області нормованої частоти $\tilde{\omega} = \omega / \omega_c$, тобто нормована частота зрізу $\tilde{\omega}_c$ завжди дорівнює одиниці. Величина K_0 береться рівною одиниці, оскільки необхідне значення K можна отримати подальшим підсиленням

сигналу, що пройшов через фільтр. Комплексну змінну $j\tilde{\omega}$ будемо надалі позначати \tilde{s} .

В якості максимально плоскої функції для апроксимації АЧХ можна використовувати функцію

$$K^2(\tilde{\omega}) = \frac{1}{1 + \tilde{\omega}^{2n}}, \quad (7.3)$$

Натуральне число n вибирається таким, щоб забезпечити необхідне затухання за межами смуги пропускання, і дорівнює порядку фільтра. Апроксимації (7.3) відповідає схемна функція

$$K(s) = \frac{1}{B_n(\tilde{s})}, \quad (7.4)$$

де $B_n(\tilde{s})$ – поліноми Баттерворса (див. табл. П.9). Полюси функції (7.3) можна визначити геометрично: вони розташовані на одиничному колі на однаковій відстані один від одного (див. рис. 7.2а, тут $n = 2$).

Рівнохвильова апроксимація АЧХ заснована на використанні поліномів Чебишева $T_n = \cos[n \cdot \arccos(\tilde{\omega})]$:

$$K^2(\tilde{\omega}) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\tilde{\omega})}, \quad (7.5)$$

де ε – коефіцієнт нерівномірності в смузі пропускання ФНЧ. Полюси s_k схемної функції $K(j\tilde{\omega})$, що відповідають апроксимації (7.5), знаходяться за такими формулами:

$$S_k = \sin \alpha_k \cdot \mathbf{sh} \alpha_1 + j \cos \alpha_k \cdot \mathbf{ch} \alpha_1, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad (7.6)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \mathbf{arcsch} \frac{1}{\varepsilon} \cong \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right);$$

$$\alpha_k = (2k+1) \frac{\pi}{2n}; \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1;$$

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{1}{2}(e^{\alpha_1} + e^{-\alpha_1}); \quad \operatorname{sh} \alpha_1 = \frac{1}{2}(e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1}),$$

причому з усіх полюсів s_k вибираються лише ті n полюсів, дійсні частини яких від'ємні. У табл. П.10 наведені поліноми Чебишева, а на рис. 7.2б – геометричне розташування полюсів s_k при $n = 2$.

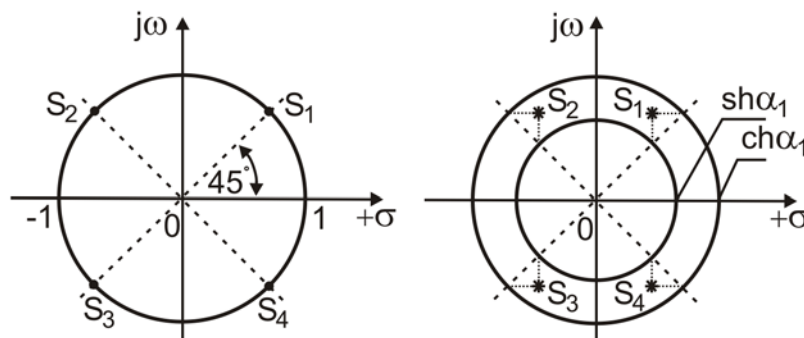


Рис. 7.2. Розташування полюсів апроксимуючих поліномів

а) Баттерворса, б) Чебишева на комплексній площині ($n = 2$).

У наведеному прикладі шукана функція $K(\tilde{s})$ має вигляд:

$$K(\tilde{s}) = \frac{1}{(\tilde{s} - s_2)(\tilde{s} - s_3)}. \quad (7.7)$$

Вона може бути реалізована ланкою другого порядку (див. «порядок системи» у розділі «Метод змінних стану»).

При більшій кількості полюсів (тобто при більшому значенні n в апроксимуючій функції (7.3) або (7.5)) необхідна схемна функція може бути реалізована каскадним з'єднанням різних ланок. Наприклад, функція (7.7) може бути реалізована каскадним з'єднанням двох НЧ ланок першого порядку. З'єднання ланок проводиться через розділяючий елемент, який в ідеальному випадку має нескінченно великий вхідний і нескінченно малий вихідний опори.

Визначивши у загальному вигляді схемну функцію $K(\tilde{\omega})$ з'єднаних ланок (див. етап 5), знаходимо нормовані значення R , \tilde{C} , \tilde{L} нормованого фільтра нижніх частот з частотою зрізу $\tilde{\omega}_c = 1$ (див. етап 6). Для того щоб знайти параметри C , L , що відповідають ненормованому ФНЧ з частотою зрізу ω_c , необхідно виконати їх денормування так, як показано у табл. П.11.

Використовуючи результати синтезу нормованого фільтра нижніх частот, що характеризується числовими значеннями індуктивностей \tilde{L} і ємностей \tilde{C} , можна здійснити синтез будь-якого фільтра: ФВЧ, СФ, ЗФ (див. табл. П.11).

Наприклад, щоб перейти від нормованого ФНЧ до фільтра верхніх частот з частотою зрізу ω_c , необхідно в ФНЧ замінити індуктивність \tilde{L} ємністю C , а ємність \tilde{C} індуктивністю L . Значення C і L обчислюються за формулами, наведеними у табл. П.11. Аналогічним чином відповідно до табл. П.11 можна синтезувати смугові і загороджувальні фільтри, де $\Delta\omega$ – смуга пропускання, ω_0 – центральна частота синтезованого фільтра (див. рис. 7.1).

Задачі і вправи

- 7.1. Визначити порядок фільтра Баттерворса з частотою зрізу $f_B = 10^5$ Гц, який забезпечував би послаблення сигналу не гірше ніж -26 дБ по відношенню до рівня при $f = 0$.
- 7.2. Спроектувати рівнохвильовий фільтр нижніх частот, що задовольняє вимогам: максимальна нерівномірність в смузі пропускання дорівнює 1 дБ, частота зрізу $\omega_B \leq 1,2$ рад/с, загасання не менше 40 дБ при $\omega \geq 4$ рад/с.
- 7.3. Синтезувати смуговий фільтр третього порядку, використовуючи апроксимацію Чебишева зі смугою пропускання $\Delta f = 12$ кГц; центральною частотою $f_0 = 100$ кГц і коефіцієнтом нерівномірності ε в смузі пропускання не гірше 0,01.
- 7.4. Синтезувати загороджувальний фільтр третього порядку з рівнохвильовою апроксимацією частотної характеристики. Смуга пропускання $\Delta f = 20$ кГц, центральна частота $f_0 = 1$ МГц.
- 7.5. Фільтр з чебишевською характеристикою третього порядку на частоті зрізу $\omega_3 = 1$ забезпечує послаблення потужності сигналу в два рази. Визначити послаблення потужності, що внесено цим фільтром на частоті $\omega = 3\omega_3$.
- 7.6. Реалізувати чебишевський фільтр нижніх частот другого порядку, що працює на резистивне навантаження $R_H = 1$ кОм з частотою зрізу $f_3 = 10^5$ Гц і коефіцієнтом нерівномірності $\varepsilon = 1$.
- 7.7. Знайти координати полюсів передаточної (передавальної, передатної) функції чебишевського ФНЧ третього порядку з параметрами $f_3 = 4 \cdot 10^4$ Гц, $\varepsilon = 0,5$.

7.8. За допомогою наведеної на рис. 7.3 схеми можна реалізувати різні типи фільтрів (ФНЧ, ФВЧ, смуговий). У схемі $Y_1 - Y_4$

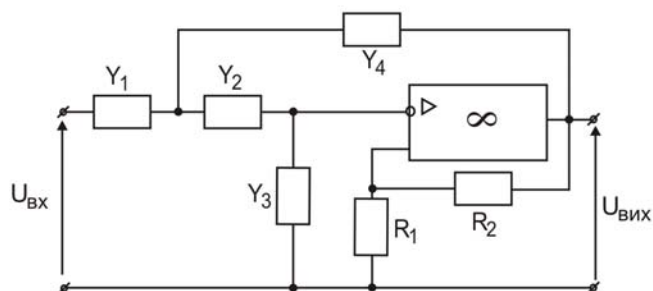


Рис. 7.3. Задача 7.8.

можуть бути або ємностями, або провідностями. Визначити, чому повинні відповідати $Y_1 - Y_4$ для перерахованих типів фільтрів.

7.9. Спроектувати трьохканальний блок активних фільтрів для кольоромузичної установки зі смугами пропускання 0...200 Гц; 300...800 Гц; 800... ∞ Гц. Фільтри повинні мати максимально пласку характеристику.

8. ЗВОРОТНИЙ ЗВ'ЯЗОК

Зворотний зв'язок означає передачу сигналу з виходу системи на її вхід, де він діє спільно з вхідним сигналом. Зворотний зв'язок скрізь зустрічається

у природі як складова частина процесу адаптації (приспосовування) до змін навколишнього середовища. У

техніці він широко використовується у різних регуляторах і

системах управління, для підвищення якості та надійності функціонування електронних пристроїв.

Передача сигналу з виходу системи на її вхід може здійснюватися як через спеціально введені компоненти (зовнішній зворотний зв'язок), так і через компоненти, що входять до складу самої системи (внутрішній зворотний зв'язок).

Функціональна модель лінійної реактивної системи із зовнішнім зворотним зв'язком (рис. 8.1) являє собою з'єднання каналу прямої передачі і каналу зворотного зв'язку, які характеризуються відповідно схемними функціями K і β .

Кружок зі знаком "плюс" всередині вказує на алгебраїчне підсумовування інцидентних йому сигналів:

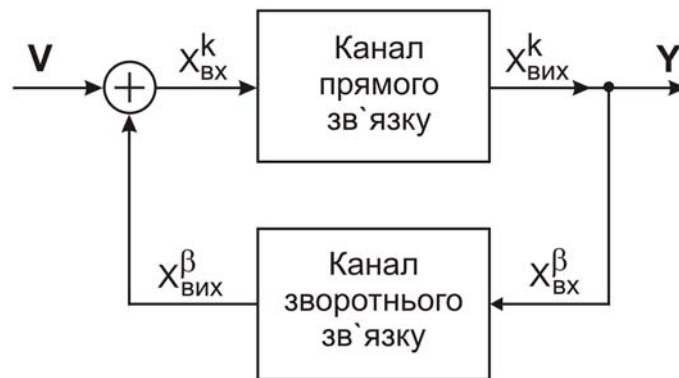


Рис. 8.1. Функціональна модель системи с

$$X_{ex}^K = V + X_{vix}^\beta \quad (8.1)$$

Стрілки, що виходять з однієї точки, позначають той самий сигнал, що і стрілка, що входить в цю ж точку:

$$Y = X_{\text{вих}}^K = X_{\text{вх}}^\beta. \quad (8.2)$$

Зворотній зв'язок в системах досліджується з метою визначення його впливу на схемні функції, часові характеристики, частотні властивості і т.п. Тому необхідно вміти знаходити схемну функцію $W(s)$ систем зі зворотним зв'язком (ЗЗ) та схемні функції $K(s)$ каналу прямої передачі і $\beta(s)$ каналу зворотного зв'язку. Так, для системи зі зворотним зв'язком, яка зображена на рис. 8.1, основна схемна функція $W_0(s)$ визначається таким чином:

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K(s)}{1 - \beta(s) \cdot K(s)} = \frac{K(s)}{1 - T(s)} = \frac{K(s)}{F(s)}. \quad (8.3)$$

Порівнюючи $W_0(s)$ і $K(s)$, можна оцінити вплив зворотного зв'язку $\beta(s)$ на досліджувану схемну функцію. За модулем зворотної різниці $F(j\omega)$, який знаходиться заміною s на $j\omega$, можна судити про знак (тип) зворотного зв'язку на частоті ω . Якщо, $|F(j\omega)| < 1$, тоді зворотній зв'язок позитивний (ПЗЗ), якщо $|F(j\omega)| > 1$, тоді ЗЗ негативний (НЗЗ).

Якщо при розмиканні контуру зворотного зв'язку функціонування системи не порушиться катастрофічно, тоді зворотне відношення $T(s)$ можна розрахувати як схемну функцію системи, що отримана при розриві контуру зворотного зв'язку (див. рис. 8.2):

$$T(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{V}(s)}. \quad (8.4)$$

Часто канали прямої і зворотної передачі сигналу виділити

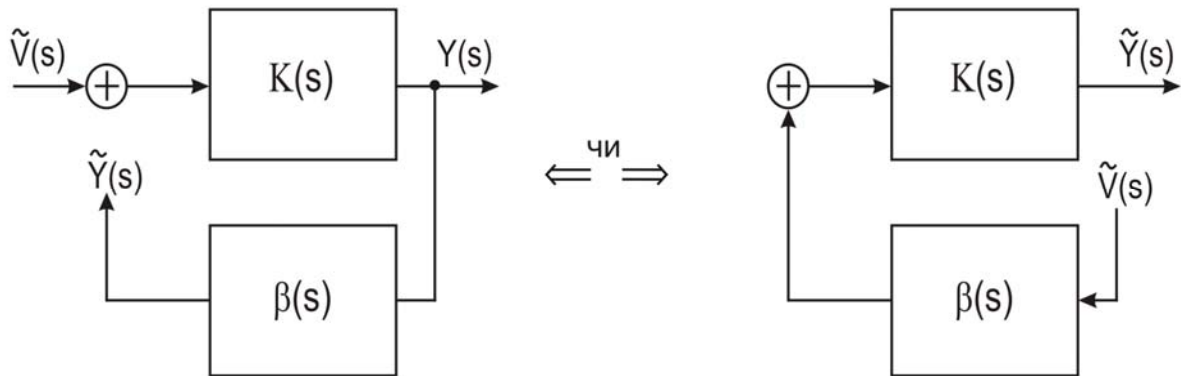


Рис. 8.2. Визначення зворотного відношення $T(s)$ у системі з розімкненим контуром зворотного зв'язку.

складно або навіть неможливо. Тоді вирішується обернена задача: знаходиться схемна функція $W_0(s)$ через матрицю провідності $Y_c(s)$ системи зі зворотним зв'язком і за її виразом визначається $K(s)$ і $\beta(s)$. Таке виділення каналів має суто формальний характер і не завжди пов'язане з фактичним розподілом системи зі зворотним зв'язком на канал прямої передачі і канал зворотного зв'язку.

Цю ж задачу можна вирішити, якщо попередньо визначити матрицю параметрів v системи зі зворотним зв'язком. Параметри системи v знаходяться через матрицю провідності системи $Y_c(s)$, що сформована з урахуванням адмітанса джерела $Y_d(s)$ і адмітанса навантаження $Y_n(s)$. Далі через знайдені параметри визначається основна схемна функція $W_0(s)$ системи зі зворотним зв'язком:

$$W_0 = \frac{-v_{21}}{v_{11} \cdot v_{22} - v_{12} \cdot v_{21}} = \frac{-v_{21}}{|v|}. \quad (8.5)$$

Тип параметрів v (y або z , або h , ...) вибирається залежно від способу з'єднання каналів прямої передачі і зворотного зв'язку, тобто від структури системи зі зворотним зв'язком (див. табл. П.12). Наприклад, якщо канали з'єднані паралельно, тоді v - це матриця y -параметрів системи зі зворотним зв'язком, якщо послідовно, тоді v - це матриця z -параметрів і т.п.

Решта схемних функцій $W(s)$ визначається через основну схемну функцію $W_0(s)$ за формулою:

$$W(s) = \mu W_0(s), \quad (8.6)$$

де коефіцієнт μ вибирається з табл. П.13. Схемні функції $W_{ex}(s)$ і $W_{вх}(s)$, що не увійшли в цю таблицю, визначаються за наступними формулами:

$$W_{ex}(s) = \tilde{v}_{11} - \frac{\tilde{v}_{12} \cdot \tilde{v}_{21}}{\tilde{v}_{22} - v_n}; \quad (8.7)$$

$$W_{вх}(s) = -\tilde{v}_{22} + \frac{\tilde{v}_{12} \cdot \tilde{v}_{21}}{\tilde{v}_{11} + v_d}.$$

де \tilde{v}_{ij} - елементи матриці v , що знайдені через матрицю провідності $Y_c(s)$ системи зі зворотним зв'язком, яка укладена без урахування $Y_n(s)$ і $Y_d(s)$; v_n - це $Y_n(s)$ або $Z_n(s)$, а v_d - це $Y_d(s)$ або $Z_d(s)$ залежно від фізичної розмірності відповідно \tilde{v}_{22} і \tilde{v}_{11} (див. табл. П.12).

Схемні функції $K(s)$ і $\beta(s)$ (див. формулу 8.3) знаходяться через параметри v системи зі зворотним зв'язком наступним чином:

$$K(s) = \frac{-V_{21}}{V_{11} \cdot V_{22}}; \quad (8.8)$$

$$\beta(s) = -v_{12}. \quad (8.9)$$

Якщо параметр системи $v_{12} = 0$, то це вказує на відсутність зворотного зв'язку в даній системі.

Зворотнє відношення $T(s)$ несе в собі інформацію про стійкість системи зі зворотним зв'язком. Для визначення стійкості необхідно в площині $T_R(\omega)$, $jT_I(\omega)$ зобразити годограф зворотного відношення $T(j\omega)|_{s=j\omega}$ і визначити, скільки разів він охоплює критичну точку з координатами $(-1; j0)$ при негативному зворотному зв'язку в системі або критичну точку $(1; j0)$ при позитивному зворотному зв'язку.

При визначенні кількості охоплень критичної точки "рух" по годографу проводиться в напрямку зміни частоти від $-\infty$ до $+\infty$. Якщо крива зворотного відношення $T(j\omega)$ має складну форму, тоді можна скористатися "правилом заштрихованої площі": при проходженні за кривою в напрямку зростання частоти штрихується площа праворуч від кривої. Якщо точка лежить в заштрихованій області, тоді вона охоплюється годографом $T(j\omega)$.

Нехай годограф $T(j\omega)$ охоплює критичну точку m_1 разів. Нехай зворотнє відношення $T(s)$ має n_1 полюсів у правій напівплощині, що можна визначити за критерієм Рауса - Гурвіца. Порівняння величин m_1 і n_1 дозволяє відповісти на питання про стійкість системи зі зворотним зв'язком (частотний критерій стійкості Найквіста):

$m_1 = 0; n_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ система стійка;

$m_1 = n_1; n_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ система стійка;

Інші випадки \Rightarrow система нестійка.

Про стійкість системи зі зворотним зв'язком можна судити також за зворотною різницею $F(s)$, користуючись критерієм Михайлова. У частотній області ($s = j\omega$) зворотню різницю представляють в алгебраїчній формі. Далі розв'язується рівняння для уявної частини

$$I_m[F(j\omega)] = F_I(\omega) = 0, \quad (8.10)$$

і знаходяться корені $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$. Потім розв'язується рівняння для дійсної частини

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = F_R(\omega) = 0 \quad (8.11)$$

і знаходяться корені $\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots$. Якщо отримані корені задовольняють нерівності

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots, \quad (8.12)$$

тоді система зі зворотним зв'язком стійка.

Про стійкість системи можна судити також за критерієм кореневого годографу, іммітансному критерію, логарифмічному частотному критерію стійкості Боде і т.п. [1].

Завдання і вправи

- 8.1.** У системі зі ЗЗ канал прямої передачі має коефіцієнт підсилення $K_0 = 1000$, що не залежить від частоти. У ланцюг зворотнього зв'язку включено ланку з функцією передачі $\beta = 5 \cdot 10^{-4} e^{-j45^\circ}$. Визначити тип ЗЗ (ПЗЗ або НЗЗ).
- 8.2.** У системі зі ЗЗ коефіцієнт передачі основної ланки $K_0 = 10000$ і не залежить від частоти. Однак є залежність K_0 від температури така, що $(\Delta K_0 / K_0) = 0,2$. Стабілізація K_0 здійснюється за допомогою НЗЗ. Яким має бути β , щоб нестабільність зменшилася в 10 разів. Яка при цьому буде величина W_0 ?
- 8.3.** Для схеми на рис. 8.3 визначити вираз для коефіцієнта зворотного зв'язку β , вважаючи, що внутрішній зворотний зв'язок відсутній.
- 8.4.** Визначити і побудувати АЧХ і ФЧХ схеми зі запізнюючим ЗЗ, що зображено на рис. 8.4.
- 8.5.** Дослідити стійкість за критерію Найквіста для схеми, що зображено на рис. 8.5, при двох значеннях крутизни польового транзистора $s = 2$ мА/В і $s = 8$ мА/В.
- 8.6.** Для схеми, що зображена на рис. 8.6, дослідити питання стійкості. Визначити умови генерації та генеровану частоту.

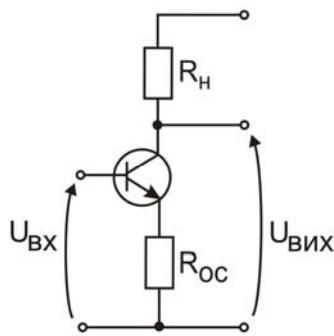


Рис. 8.3. Задача 8.3

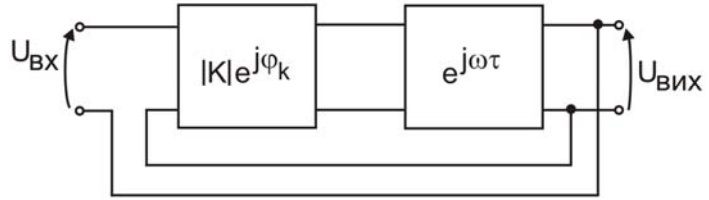


Рис. 8.4. Задача 8.4.

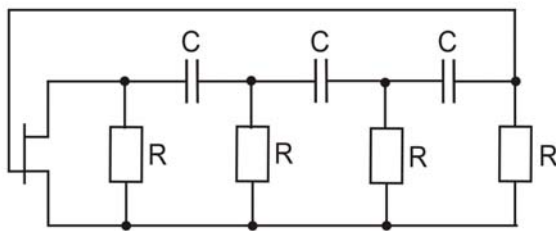


Рис. 8.5. Задача 8.5.

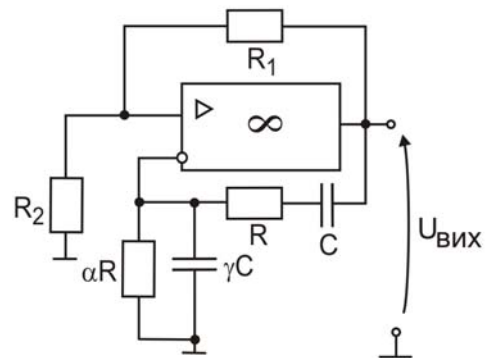


Рис. 8.6. Задача 8.6.

9. КУРСОВА РОБОТА

Курсова робота призначена для придбання навичок практичного застосування теоретичних положень розділу "Реактивні схеми" теорії електронних кіл. Її рекомендується виконувати тільки після вивчення відповідного теоретичного матеріалу.

На відміну від розрахунково-графічної роботи курсова робота пов'язана з виконанням завдання, яке має більш системний характер і вимагає дотримання державних та міждержавних стандартів при оформленні пояснювальної записки. Таким стандартом є ДСТУ 3008-95. Пояснювальна записка виконується на білих аркушах формату А4. Титульний аркуш містить таку саму інформацію, що і у розрахунково-графічній роботі, окрім назви – повинно бути «Курсова робота». Виконуючи курсову роботу студент повинен продемонструвати навички виконання дослідницької роботи та уміння аналізувати отримані результати і пов'язувати їх з особливостями структури та компонентного складу схеми, яка досліджується, їх впливом на часові та частотні характеристики.

Запорукою успішного виконання курсової роботи є успішне поточне навчання, тобто належне виконання аудиторної роботи та різних видів самостійної роботи. Оцінка за курсову роботу виставляється за сукупністю наступних показників:

- зміст виконаної роботи;
- якість оформлення пояснювальної записки;
- результати захисту

Захист відбувається наприкінці четвертого семестру у день, оголошений викладачем на початку семестру. Студент, який незадовільно виконав або не виконав курсову роботу, не допускається до захисту. Незадовільний захист курсової роботи має

наслідком заміну завдання і проведення повторного захисту після його виконання. Оцінка за курсову роботу виставляється в окрему відомість за п'ятибальною шкалою та шкалою ECTS.

Кожен студент отримує свій номер варіанта N , який є ключем для вибору вихідних даних за відповідними таблицями.

Вихідні дані:

– Схему, що аналізується взяти з табл. 9.1. Номер схеми N_1 розраховується за формулою¹¹:

$$N_1 = 1 + N_{(\text{mod } 20)};$$

– Номінали компонентів аналізованої (досліджуваної) схеми визначити з рядку N_2 таблиці 9.2:

$$N_2 = 1 + N_{(\text{mod } 9)};$$

– Періодичний негармонічний сигнал $U_{\text{вх}}(t)$ взяти з табл. 9.3. Номер сигналу N_3 визначається за формулою:

$$N_3 = 1 + (N_1 + N_2)_{(\text{mod } 10)}$$

Операційний підсилювач вважається доконаним, тобто його вхідний опір нескінченно великий, вихідний опір дорівнює нулю, а значення коефіцієнта передачі напруги **K кінцеве** і вибирається таким, щоб схема була А-стійкою. Вхідний і вихідний полюси операційного підсилювача, що не показані на схемі, заземлені.

¹¹ $N_{(\text{mod } 20)}$ (читається: N з модулю 20) дорівнює залишку від цілочисельного ділення числа N на модуль - число 20 в даному випадку. Якщо $N < 20$, тоді $N_{(\text{mod } 20)} = N$. Наприклад:

$19_{(\text{mod } 20)} = 19$; $24_{(\text{mod } 20)} = 4$; $20_{(\text{mod } 20)} = 0$.

² Тут і далі шуканою (вихідною) величиною вважати напругу $U_{\text{вих}}$, що визначено в режимі холостого ходу.

Завдання

1. Виконати аналіз схеми методом змінних стану.

1.1. Навести схему як систему з багатьма сторонами та сформулювати рівняння змінних стану і вихідне рівняння.

1.2. Сформулювати рівняння змінних стану схеми і вихідне рівняння топологічним методом. Порівняти з п.1.1.

1.3. Визначити і зобразити графічно перехідну характеристику схеми $H(t)$. Чому дорівнюють сталі часу схеми τ_{\min} і τ_{\max} ?

1.4. Визначити і зобразити графічно імпульсну характеристику схеми $G(t)$. Перевірити співвідношення: $G(t) = [H(t)]'$.

2. Виконати аналіз усталеного режиму методом комплексних амплітуд.

Амплітуду A і початкову фазу ϕ гармонійного сигналу $U_{\text{вх}}(t)$ взяти з рядку N_2 табл. 9.2. Період T гармонійного сигналу вибрати в інтервалі $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$

2.1. Знайти вихідну напругу $U_{\text{вих}}(t)$. Напругу $U_{\text{вих}}(t)$ навести у формі комплексної амплітуди і в часовій формі; зобразити комплексну амплітуду і напругу $U_{\text{вих}}(t)$ графічно.

2.2. Представити схему, що підключено до джерела вхідної напруги $U_{\text{вх}}(t)$, у вигляді реактивного двухполосника і визначити параметри його схемної моделі на частоті вхідного сигналу. Визначити активну, реактивну і повну потужності, що виділяються в двухполоснику. Параметри вхідної напруги ті ж самі, що і в пункті 2.1.

2.3. Визначити аналітично і зобразити графічно амплітудний і фазовий спектри періодичного негармонічної напруги $U_{\text{вх}}(t)$ (див. табл. 9.3, амплітуду напруги A і період T взяти такими ж, як і в п.2.1).

2.4. За знайденими чотирьом значущим гармоникам побудувати графік вхідної напруги $U_{\text{вх}}(t)$.

3. Виконати аналіз схеми в частотній області.

3.1. Визначити і зобразити графічно амплітудно-частотну і фазо-частотну характеристики коефіцієнта передачі напруги схеми.

3.2. Визначити граничні частоти і смугу пропускання схеми.

3.3. Визначити аналітично і зобразити графічно амплітудний і фазовий спектри періодичної негармонічної напруги $U_{\text{вих}}(t)$ ($U_{\text{вх}}(t)$ - див. п.2.3).

3.4. За знайденими чотирьом значущим гармоникам побудувати графік вихідної напруги $U_{\text{вих}}(t)$.

4. Виконати аналіз схеми операторним методом.

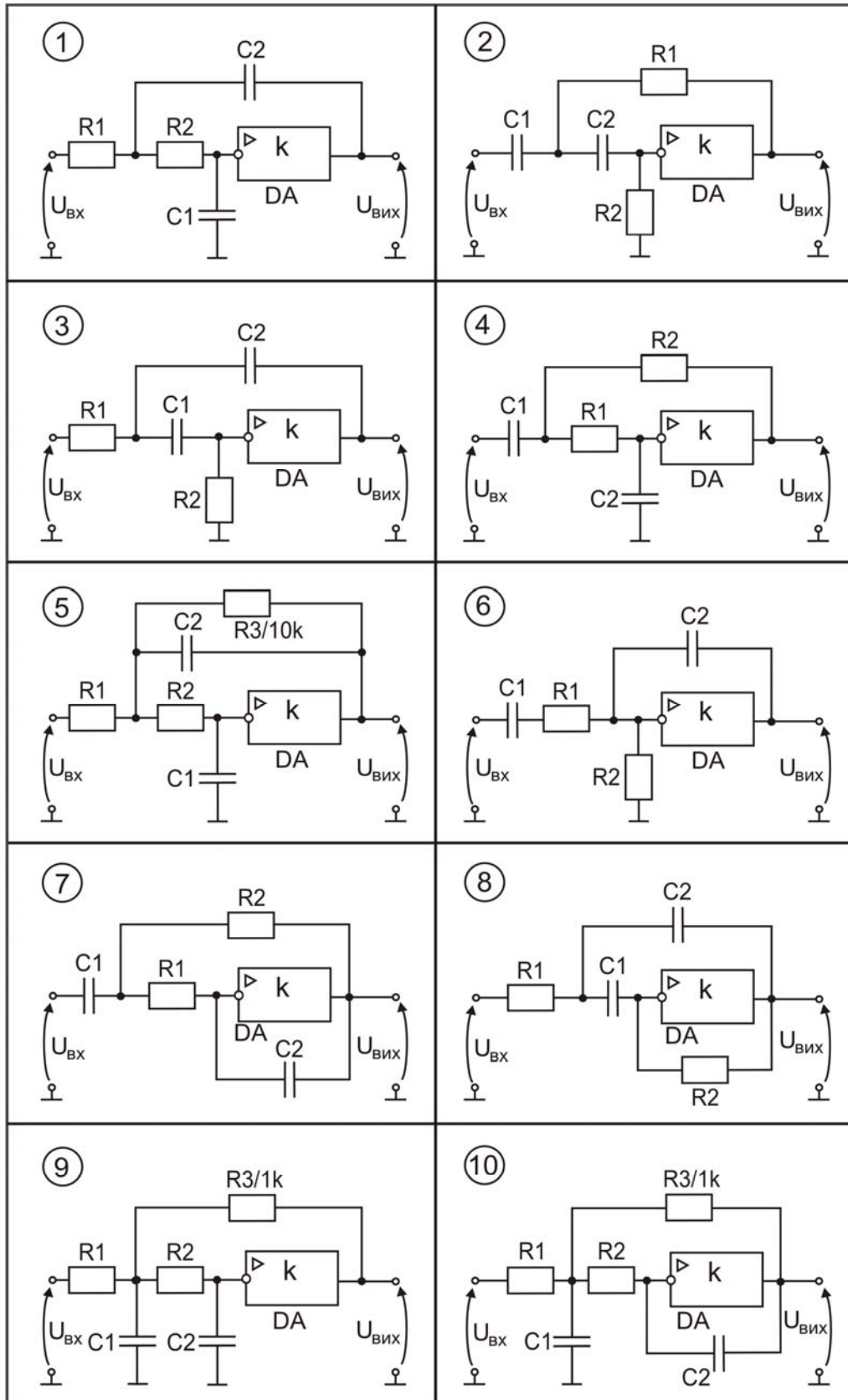
4.1. Визначити у загальному й чисельному вигляді операторну функцію передачі напруги схеми.

4.2. Визначити перехідну та імпульсну характеристики схеми. Порівняти з п.п. 1.3, 1.4.

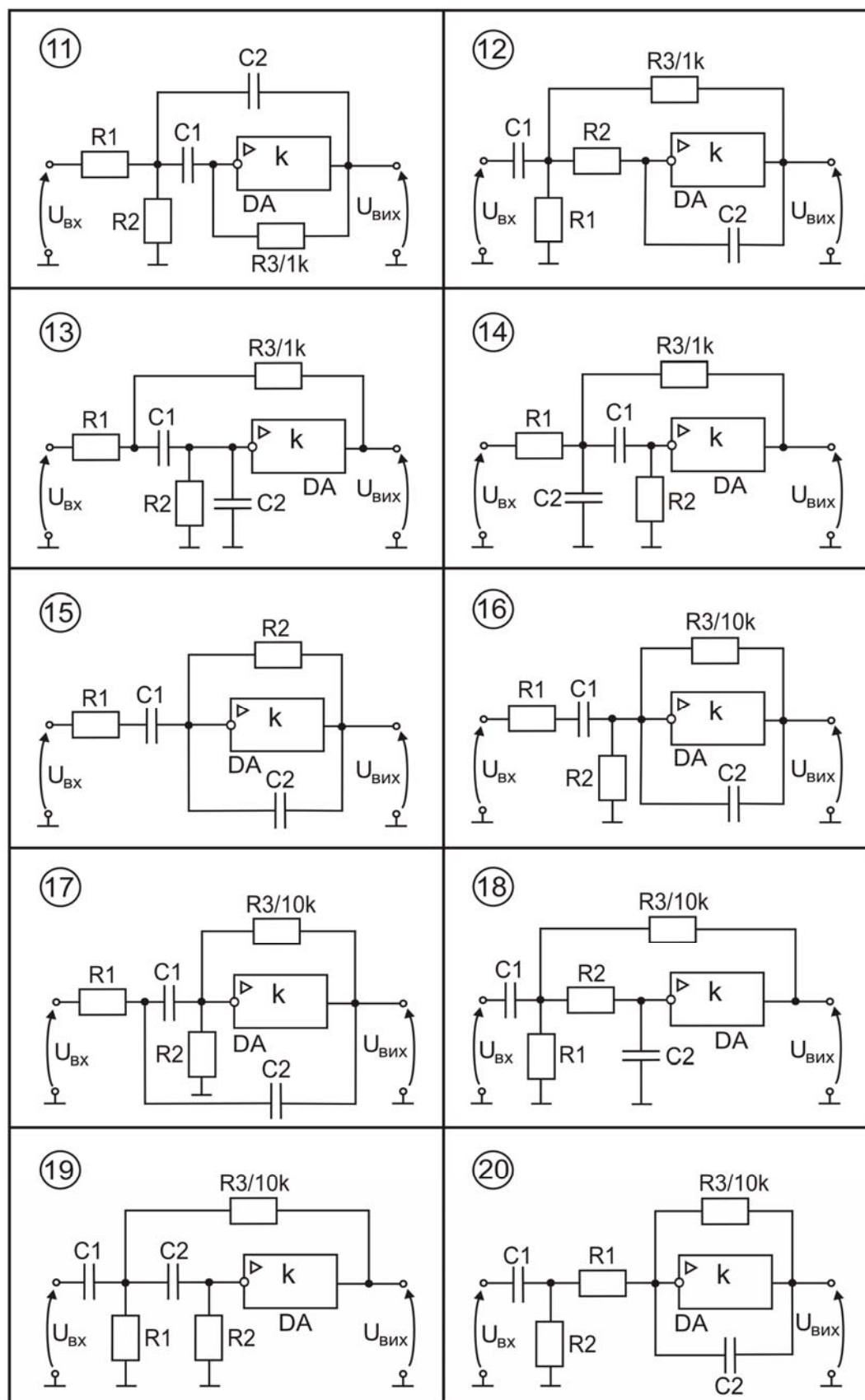
4.3. Визначити амплітудно-частотну і фазо-частотну характеристики схеми. Порівняти з п. 3.1.

4.4. Визначити і побудувати реакцію схеми на напругу у формі ідеального прямокутного імпульсу амплітудою 2 вольт і тривалістю $5\tau_{\text{max}}$, де τ_{max} - максимальна стала часу схеми.

Таблиця 9.1. *Схеми на операційних підсилювачах*



Таблиця 9.1 (продовження). *Схеми на операційних підсилювачах*

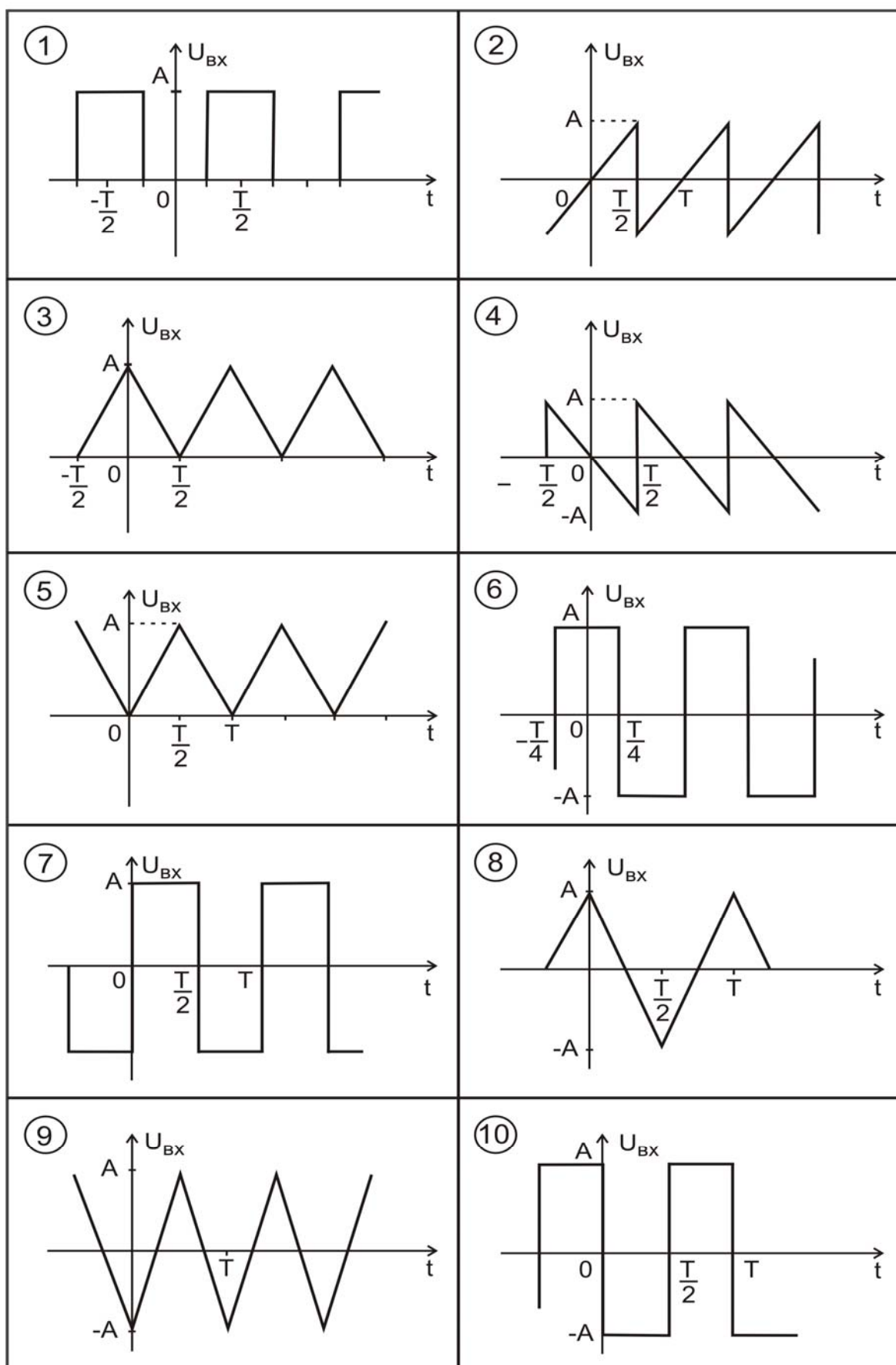


Таблиця 9.2.

Номінали компонентів і параметри вхідної гармонічної напруги

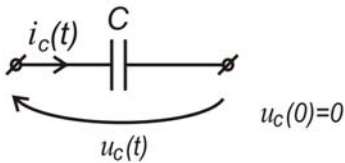
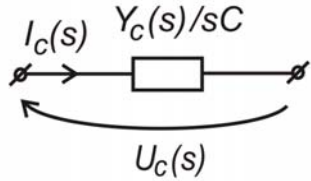
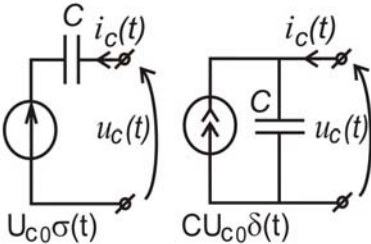
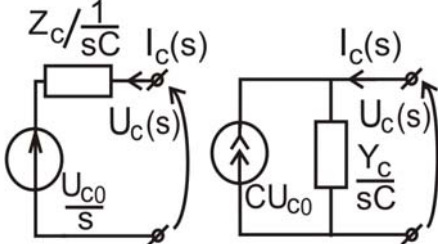
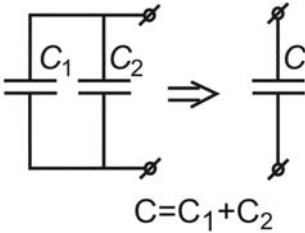
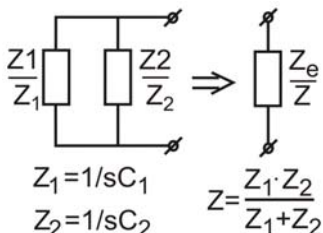
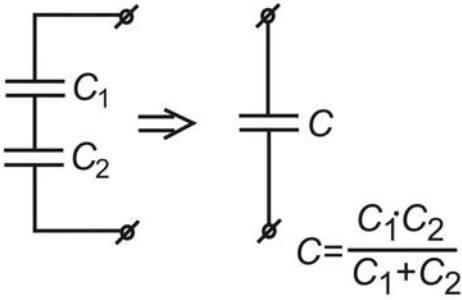
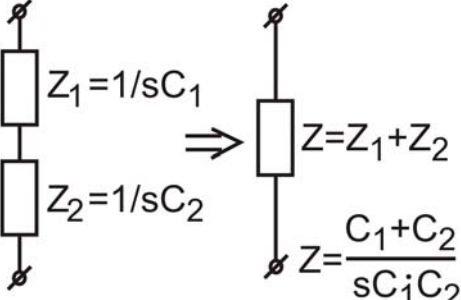
N ₂	R1 [Ом]	R2 [Ом]	C1 [мФ]	C2 [мкФ]	A [В]	φ [град]
1	1.0	0.5	2	4	2	30
2	0.5	1.0	4	2	4	60
3	0.2	1.0	1	3	5	0
4	1.0	0.2	3	1	2	60
5	0.25	1.0	2	5	2	0
6	1.0	0.25	5	2	5	30
7	1.0	0.5	1	4	4	60
8	0.5	1.0	4	1	2	60
9	1.0	0.2	4	6	5	30

Таблиця 9.3. *Періодичні негармонічні сигнали $U_{BX}(t)$.*



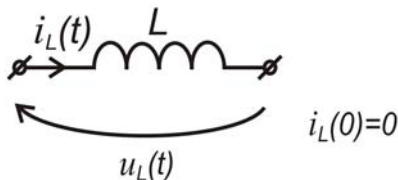
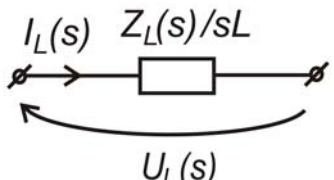
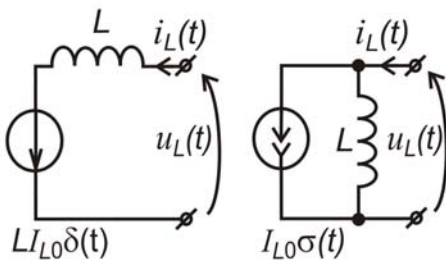
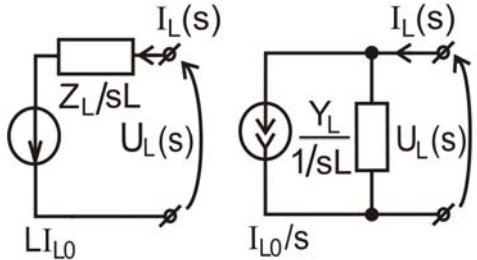
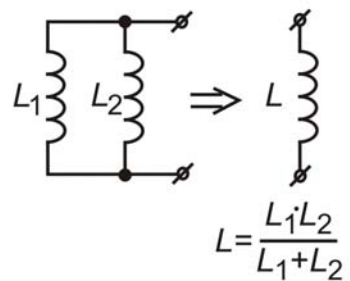
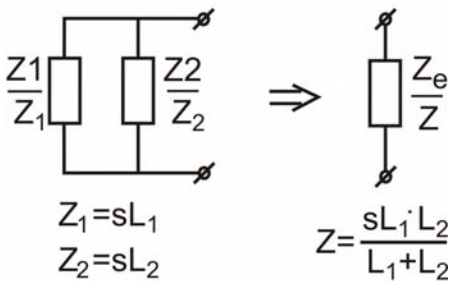
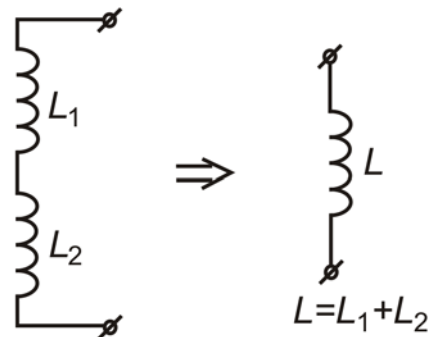
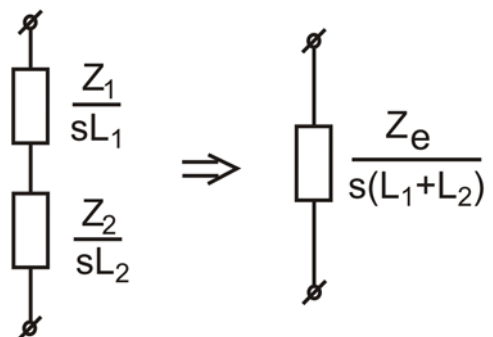
10. ІНФОРМАЦІЙНО-ДОВІДКОВИЙ ДОДАТОК

Таблиця П.1 Схемна модель конденсатора - лінійна ємність

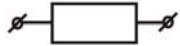


	Область часу t	Область оператора Лапласа s
Схемне позначення		
Компонентне рівняння	$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} - C \cdot U_{C0} \cdot \delta(t); \quad t \geq 0$	$I_c(s) = sC \cdot U_c(s) - C \cdot U_{C0}$
	$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) d\tau + U_{C0} \cdot \sigma(t); \quad t \geq 0$	$U_c(s) = \frac{1}{sC} I_c(s) + \frac{1}{s} U_{C0}$
Приведення до нульових початкових умов		
Еквівалентне перетворення: паралельне з'єднання		
Еквівалентне перетворення: послідовне з'єднання		

Таблиця П.2

Схемна модель котушки індуктивності - лінійна індуктивність

	Область часу t	Область оператора Лапласа s
Схемне позначення		
Компонентне рівняння	$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} - L \cdot I_{L0} \cdot \delta(t); \quad t \geq 0$	$U_L(s) = sL \cdot I_L(s) - L \cdot I_{L0}$
	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau + I_{L0} \cdot \sigma(t); \quad t \geq 0$	$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} I_{L0}$
Приведення до нульових початкових умов		
Еквівалентне перетворення: паралельне з'єднання		
Еквівалентне перетворення: послідовне з'єднання		

Таблиця П.3 Частотні імпеданси і адмітанси лінійних
двохполюсників

Лінійний двухполюсник		Імпеданс $Z(j\omega)$		Адмітанс $Y(j\omega)$	
Схемне позначення	Номинал	Показова форма	Алгебраїчна форма	Показова форма	Алгебраїчна форма
	R	$R \cdot e^{j0}$	R	$G \cdot e^{j0}$	G
	C	$\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-j \frac{1}{\omega C}$	$\omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$	$j\omega C$
	L	$\omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$	$j\omega L$	$\frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-j \frac{1}{\omega L}$

Таблиця П.4. Коефіцієнти, що характеризують форму
періодичного сигналу $f(t)$

Коефіцієнт і його визначення	Визначальна формула	Зв'язок з періодичним сигналом $f(t)=f(t \pm nT)$
Коефіцієнт форми k_F – відношення діючого значення F до середнього значення сигналу $f(t)$ за період T	$k_F = \frac{F}{F_{cp}}$	$k_F = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt}$
Коефіцієнт амплітуди k_A – відношення максимального значення сигналу до діючого значення F	$k_A = \frac{F_{max}}{F}$	$k_A = \frac{F_{max}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}$
Коефіцієнт спотворення k_H – відношення діючого значення F_1 першої гармоніки до діючого значення F сигналу $f(t)$	$k_H = \frac{F_1}{F}$	$k_H = \frac{F_1}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}$
Коефіцієнт гармонік k_G – відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значенням F_1 першої гармоніки	$k_G = \frac{F_{2+...}}{F_1}$	$k_G = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} F_k^2}}{F_1}$

Таблиця П.5. Спектральні щільності $F(j\omega)$ сигналів $f(t)$

№	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
3	t	$2\pi\delta'(\omega)$
4	$ t $	$-2/\omega^2$
5	$e^{-at}\sigma(t)$	$1/(a+j\omega)$
6	$e^{-a/t}/t$	$2a/(a^2+\omega^2)$
7	$te^{-at}\sigma(t)$	$1/(a+j\omega)^2$
8	$(\sin\omega_0 t)\sigma(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
9	$(\cos\omega_0 t)\sigma(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
10	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
11	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
12	$(e^{-at}\sin\omega_0 t)\sigma(t)$	$\omega_0/[(a+j\omega)^2+\omega_0^2]$

Таблиця П.6. Властивості перетворення Фур'є

№	$f(t)$ -сигнал	$F(j\omega)$ - спектральна густина	Властивість
1	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(j\omega) \pm F_2(j\omega)$	Суперпозиції
2	$k f(t)$	$k F(j\omega)$	Лінійності
3	$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(j\omega)$	Диференціювання
4	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$F(j\omega)/(j\omega)$	Інтегрування
5	$f(t-\tau)$	$F(j\omega)e^{-j\omega\tau}$	Зміщення в часовій області
6	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F[j(\omega-\omega_0)]$	Зміщення в частотній області
7	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(j\frac{\omega}{a})$	Масштабування
8	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$	Згортка в часовій області

Таблиця П.7

Операторні зображення Лапласа $F(s)$ функцій $f(t)$

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
3	$\sigma(t)$	$1/s$
4	t	$1/s^2$
5	t^n	$n! / s^{n+1}$
6	$e^{-at}; a>0$	$1 / (s+a)$
7	$te^{-at}; a>0$	$1 / (s+a)^2$
8	$\sin(\omega t)$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
9	$\cos(\omega t)$	$s / (s^2 + \omega^2)$
10	$\sin(\omega t + \varphi)$	$(s \cdot \sin \varphi + \omega \cdot \cos \varphi) / (s^2 + \omega^2)$
11	$\cos(\omega t + \varphi)$	$(s \cdot \cos \varphi + \omega \cdot \sin \varphi) / (s^2 + \omega^2)$
12	$e^{-at} \sin(\omega t); a>0$	$\omega / [(s+a)^2 + \omega^2]$
13	$e^{-at} \cos(\omega t); a>0$	$(s+a) / [(s+a)^2 + \omega^2]$
14	$e^{-at} \sin(\omega t + \varphi); a>0$	$\frac{(s+a) \cdot \sin \varphi + \omega \cdot \cos \varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$e^{-at} \cos(\omega t + \varphi); a>0$	$\frac{(s+a) \cdot \cos \varphi - \omega \cdot \sin \varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
16	$2 / K / e^{-at} \cos(\omega t + \varphi); a>0$	$\frac{\dot{K}}{s+a-j\omega} + \frac{K^*}{s+a+j\omega}; \dot{K} = K \cdot e^{j\varphi}$
17	$t \cos(\omega t)$	$(s^2 - \omega^2) / (s^2 + \omega^2)^2$
18	$\frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{s \cdot (s+a)}$
19	$\frac{1 - e^{-at}}{t}$	$\ln(1 + \frac{1}{s})$

Таблиця П.8

Властивості перетворення Лапласа

№	Оригінал $f(t)$	зображення $F(s)$
1	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
2	$kf(t)$	$kF(s)$
3	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
4	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$
5	$\frac{d^3}{dt^3} f(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0) - s \frac{df}{dt}(0) - \frac{d^2 f}{dt^2}(0)$
6	$x(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + x(0)$	$X(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{x(0)}{s}$
7	$\sigma(t - \tau)$	$e^{-s\tau} \cdot \frac{1}{s}$
8	$f(t - \tau) \sigma(t - \tau)$	$e^{-s\tau} \cdot F(s)$
9	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
10	$f(at)$	$\frac{1}{a} F(s/a)$
11	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
12	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
13	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
14	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Таблиця П.9

Поліноми Баттерворса

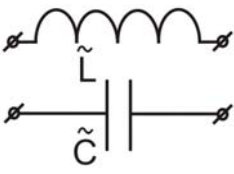
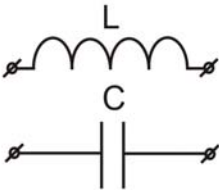

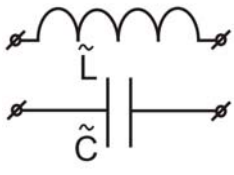
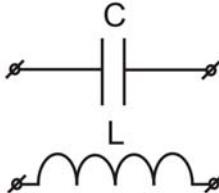
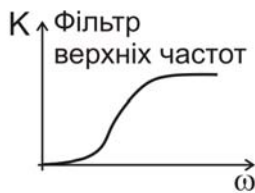
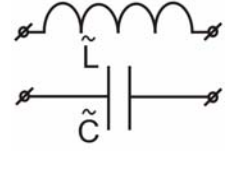
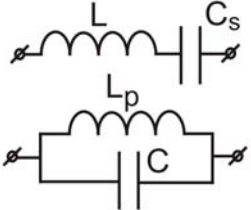
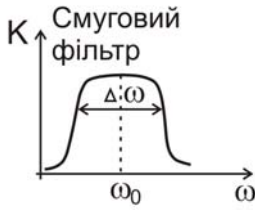
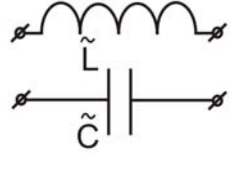
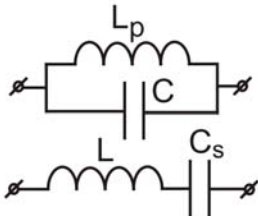
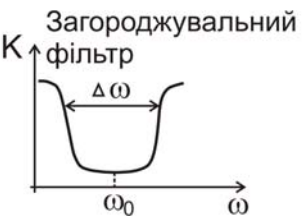
n	$B_n(s)$
1	$s+1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0,7654s+1)(s^2+1,8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0,618s+1)$ $(s^2+1,618s+1)$

Таблиця П.10

Поліноми Чебишева

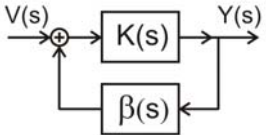
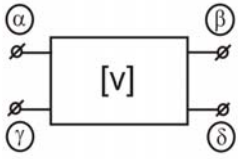
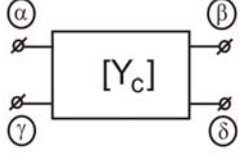
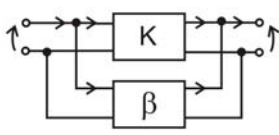
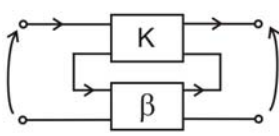
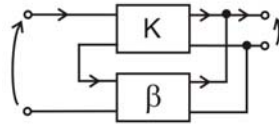
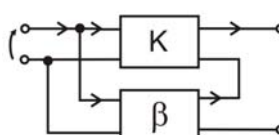
n	$T_n(\varpi)$
1	ϖ
2	$2\varpi^2 - 1$
3	$4\varpi^3 - 3\varpi$
4	$8\varpi^4 - 8\varpi^2 + 1$
5	$16\varpi^5 - 20\varpi^3 + 5\varpi$
6	$T_n(\varpi) = 2\varpi T_{n-1}(\varpi) - T_{n-2}(\varpi)$

Таблиця П.11. Синтез фільтрів

Нормований ФНЧ	Зв'язок між елементами і параметрами ФНЧ і денормованими елементами і параметрами		
		$L = \tilde{L} / \omega_c$ $C = \tilde{C} / \omega_c$	
		$C = 1 / \tilde{L} \omega_c$ $L = 1 / \tilde{C} \omega_c$	
		$L = \tilde{L} / \Delta\omega$ $C_s = 1 / L \omega_0^2$ $C = \tilde{C} / \Delta\omega$ $L_p = 1 / C \omega_0^2$	
		$C = 1 / \tilde{L} \Delta\omega$ $L_p = 1 / C \omega_0^2$ $L = 1 / \tilde{C} \Delta\omega$ $C_s = 1 / L \omega_0^2$	

Таблиця П.12

Визначення основних схемних функцій W_0 систем зі зворотним зв'язком¹

<p>Функціональна модель системи зі зворотним зв'язком</p> 	<p>Основна схемна функція W_0</p> $W_0 = \frac{Y(s)}{V(s)};$ $W_0 = \frac{k(s)}{1 - \beta(s)k(s)}$	<p>Зв'язок основної схемної функції W_0 з основними параметрами в системі: Y_D, Y_H віднесені до внутрішньої частини системи</p> 	<p>Зв'язок основних параметрів в системі зі 33 з матрицею провідності Y_C: Y_D і Y_H враховані в матриці Y_C</p> 
<p>Паралельне з'єднання каналів</p> 	$Z_{nep} = \frac{U_{вых}(s)}{I_{ex}(s)}$	$Z_{nep} = \frac{-y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} = \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$	$[y] = \frac{1}{\Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}} \begin{bmatrix} \Delta_{\beta\beta} & -\Delta_{\beta\alpha} \\ \Delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}$
<p>Послідовне з'єднання каналів</p> 	$Y_{nep} = \frac{I_{вых}(s)}{U_{ex}(s)}$	$Y_{nep} = \frac{-z_{11}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} = Y_H Y_H \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$	$[z] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{\alpha\alpha} & -\Delta_{\beta\alpha} \\ \Delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\beta\beta} \end{bmatrix}$
<p>Послідовно-паралельне з'єднання каналів</p> 	$K_U = \frac{U_{вых}(s)}{U_{ex}(s)}$	$K_U = \frac{-h_{21}}{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}} = Y_H \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$	$[h] = \frac{1}{\Delta_{\beta\beta}} \begin{bmatrix} \Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta} & \Delta_{\beta\alpha} \\ \Delta_{\alpha\beta} & -\Delta \end{bmatrix}$
<p>Паралельно-послідовне з'єднання каналів</p> 	$K_I = \frac{I_{вых}(s)}{I_{ex}(s)}$	$K_I = \frac{-f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} = Y_H \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$	$[f] = \frac{1}{\Delta_{\alpha\alpha}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{\beta\alpha} \\ \Delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta} \end{bmatrix}$

Таблиця П.13. Зв'язок схемних функцій системи зі зворотним зв'язком W з основною схемною функцією W_0 : $W = \mu W_0$ (Опір джерела сигналу віднесено до внутрішньої частини ситеми).

Значення коефіцієнта μ :

Основні параметри системи зі зворотним зв'язком	Від W до W_0	$Z_{\text{пер}}$	$Y_{\text{пер}}$	K_U	K_I	$W = \mu W_0$
$[y]$	$Z_{\text{пер}}$	I	$Y_D Y_H$	Y_D	Y_H	μ
$[z]$	$Y_{\text{пер}}$	$Z_D Z_H$	I	Z_H	Z_D	μ
$[h]$	K_U	Z_D	Y_H	I	$Z_D Y_H$	μ
$[f]$	K_I	Z_H	Y_D	$Y_D Z_H$	I	μ

Таблиця П.14. Визначення схемних функцій через матрицю провідності внутрішньої частини системи з двома сторонами $Y_C(s)$

Назва схемної функції	Визначаюча формула	Загальна формула для врівноваженої системи з двома сторонами	Режим холостого ходу на виході	Режим короткого замикання на виході
Коефіцієнт передачі напруги	$K_U = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}$	$\frac{Z_H \Delta_{\alpha\beta}}{Z_H \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}}$	$\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta_{\alpha\alpha}}$	0
Коефіцієнт передачі струму	$K_I = \frac{I_{\text{вых}}(s)}{I_{\text{вх}}(s)}$	$\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{Z_H \Delta + \Delta_{\beta\beta}}$	0	$\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta_{\beta\beta}}$
Опір передачі	$Z_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{I_{\text{вх}}(s)}$	$\frac{Z_H \Delta_{\alpha\beta}}{Z_H \Delta + \Delta_{\beta\beta}}$	$\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$	0
Провідність передачі	$Y_{\text{пер}} = \frac{I_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}$	$\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{Z_H \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}}$	0	$\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}}$
Вхідний опір	$Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}(s)}{I_{\text{вх}}(s)}$	$\frac{Z_H \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}}{Z_H \Delta + \Delta_{\beta\beta}}$	$\frac{\Delta_{\alpha\alpha}}{\Delta}$	$\frac{\Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}}{\Delta_{\beta\beta}}$



Формули для схемних функцій прохідної системи отримують з формул для врівноваженої системи шляхом наступної заміни індексів:

$\alpha \rightarrow (\alpha + \gamma); \quad \beta \rightarrow (\beta + \delta).$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Сигорський В.П., Петренко А.І. Основи теорії електронних схем. Київ: Вища шк., 1971, 610 с.
2. Сигорський В.П., Петренко А.І. Алгоритми аналізу електронних схем. - М.: Сов. радіо, 1976,.
3. Сигорський В.П., Витязь О.А., Мінаков В.В. Алгоритми моделювання резистивних ланцюгів. - Київ: УМК ВО, 1988. - 114 с.
4. Витязь О.А., Чайковский А.С. Лабораторный практикум по теории электронных цепей. Киев: 2008, - 100с.
5. О.О. Витязь, В.І. Тимофеев, В.Л. Самотовка, Т.А. Саурова Методичні настанови для практичних занять з дисципліни «Теорія електронних кіл», ч. І "Резистивні кола", Київ, КПІ, 2012. - 89 с.
6. Теорія електронних схем. Частина І. Резистивні схеми. / Упоряд. О.А.Вітязь, В.П.Сігорскій, В.І.Тімофеев. Київ; КПІ, 1995, 68с.
7. Сигорський В.П. Математичний апарат інженера. - Київ.: Техніка, 1977. - 766 с.
8. Матханов П.Н. Основи аналізу електричних ланцюгів. Лінійні ланцюга. - М.,: Висш.шк., 1976, 333с.
9. Бакалов В.П., Ігнатов О.М., Крук Б.І. Основи теорії електричних ланцюгів і електроніки- М.: Радио и связь, 1989, 526с.
- 10.Лосєв А.К. Теорія лінійних електричних цепей- М.: Вища школа, 1987, 511с.
- 11.Васильєв Д.В., Вітол Ю.Н. Радіотехнічні ланцюги і сигнали. - М.: Радио и связь, 1982,.

- 12.Баскаков С.І. Радіотехнічні ланцюги і сигнали. - М.: Вища. шк., 1983,. 536с.
- 13.Сиберт У.М. Ланцюги, сигнали, системи, ч.1- М .: Мир, 1988, 336с.
- 14.Сиберт У.М. Ланцюги, сигнали, системи, ч.2- М .: Мир, 1988, 359с.
- 15.Збірник завдань з теорії електричних ланцюгів: Учеб.пособие для вузів / Данилов Л.В., Матханов П.Н. та ін .; під ред. Матханова П.М., Данилова Л.В.- М .: Вища школа, 1980, 224с.
- 16.Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики- Львів, Вища школа, 1982, 378с.
- 17.Шебес М.Р. Задачник з теорії лінійних електричних цепей- М .: Вища школа, 1982, 488с.
- 18.Двайт Г.Б. Таблиці інтегралів та інші математичні формули. - М.: Наука, 1973, 228.
- 19.Картавих С.А. Математичні терміни.- К .: Вища школа, 1988, 295с.