

Формуємо послідовність виходу:
 $D_1, D_2, M_1, M_2, P_1, P_2, P_3, P_4$
 Маємо:

1, 3, 0, 1, 2, 0, 0, 1

Формуємо сигнал виходу:

$$x[k] = [(D_1 + D_2 + 5), -(M_1 + M_2 + 3), -(M_2 + 2), (P_4 + M_1 + D_1), (M_1 + M_2 + D_2)]$$

Маємо:

$$x[k] = [9, -4, -3, 2, 4]$$

Розділ 1

"Дослідження проходження сигналів через лінійні системи"
 1. Навести вихідну послідовність системи осереднення зі зсувом при передачі на вхід сигналу $x[k]$ для значень $M_1 = \min(3, (M_1 + D_2 + 1))$, $N_2 = \min(4, (D_1 + D_2 + M_2 + 1))$, де $\min(A, B)$ — мінімум з двох чисел. Розрахувати всі ненульові відбитки вихідного сигналу.

Система осереднення зі зсувом описується наступним чином:

$$y[k] = \frac{1}{N_1 + N_2 + 1} \sum_{k=-N_1}^{N_2} x[k-k]; \text{ де } N_1 = 3, N_2 = 4$$

тоді

$$y[0] = \frac{1}{8} \sum_{k=-3}^4 x[-k] = \frac{1}{8} (x[3] + x[2] + x[1] + x[0] + x[-1] + x[-2] + x[-3] + x[-4]) =$$

$$= \frac{1}{8} (2 + (-3) + (-4) + 9) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

аналогічно

$$y[1] = \frac{1}{8} (4 + 2 - 3 - 4 + 9) = \frac{8}{8} = 1$$

$$y[2] = \frac{1}{8} (4 + 2 - 3 - 4 + 9) = 1$$

$$y[3] = \frac{1}{8} (4 + 2 - 3 - 4 + 9) = 1$$

$$y[4] = \frac{1}{8} (4 + 2 - 3 - 4 + 9) = 1$$

$$y[5] = \frac{1}{8} (4 + 2 - 3 - 4) = -\frac{1}{8}$$

$$y[6] = \frac{1}{8} (4 + 2 - 3) = \frac{3}{8}$$

$$y[7] = \frac{1}{8} (4 + 2) = \frac{3}{4}$$

$$y[8] = \frac{1}{8} (4) = \frac{1}{2}$$

Відповідь: $y[k] = [\frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$

2. Розглядаючи послідовність $h = [(D_1 + D_2), (M_1 + M_2), -P_1, P_4]$ як імпульсну характеристику стаціонарної дискретної системи, розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу $x[k]$.

Відповідно до моїх даних: $h = [4, 1, -2, 1]$

Вихідний сигнал можна розрахувати за формулою:

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-1} x[m] h[k-m], \text{ де } N_1=3, N_2=4$$

тоді

$$y[0] = \sum_{m=0}^7 x[m] h[-m] = x[0] h[0] + x[1] h[-1] + x[2] h[-2] + x[3] h[-3] +$$

$$+ x[4] h[-4] + x[5] h[-5] + x[6] h[-6] + x[7] h[-7] = 36$$

$$y[1] = \sum_{m=0}^7 x[m] h[1-m] = x[0] h[1] + x[1] h[0] + x[2] h[-1] + \dots +$$

$$+ x[7] h[-6] = 9 + (-16) = -7$$

аналогічно

$$y[2] = -18 + (-4) + (-12) = -34$$

$$y[3] = 9 + 8 + (-3) + 8 = 22$$

$$y[4] = -4 + 6 + 2 + 16 = 20$$

$$y[5] = -3 + (-4) + 4 = -3$$

$$y[6] = 2 + (-8) = -6$$

$$y[7] = 4$$

$$y[k] = 0 \quad k > 7$$

Відповідь: $y[k] = [36, -7, -34, 22, 20, -3, -6, 4]$

3. Розглядаючи послідовності $h_1 = [P_4, (M_2 + D_2 + 1), M_1]$, $h_2 = [P_1, D_1, (D_1 + D_2)]$ як імпульсні характеристики двох стаціонарних дискретних систем, розрахувати вихідний сигнал при поданні на вхід сигналу $x[k]$ при паралельному з'єднанні цих систем.

Відповідно до моїх даних: $h_1 = [1, 5, 0]$, $h_2 = [2, 1, 4]$

$$h[k] = h_1[k] + h_2[k]$$

$$h[k] = [3, 6, 4]$$

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-1} x[m] h[k-m]$$

$$y[0] = \sum_{m=0}^7 x[m] h[-m] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + \dots = 27$$

аналогічно

$$y[1] = 54 + (-12) = 42$$

$$y[2] = 36 + (-24) + (-9) = 3$$

$$y[3] = -16 + (-18) + 6 = -28$$

$$y[4] = -12 + 12 + 12 = 12$$

$$y[5] = 8 + 24 = 32$$

$$y[6] = 16$$

$$y[7] = 0$$

$$\text{Відповідь: } y[k] = [27, 42, 3, -28, 12, 32, 16]$$

4. Вважаючи послідовності $h_1 = [P_4, (M_2 + D_2 + 1), M_1]$, $h_2 = [P_1, D_1, (D_1 + D_2)]$ як імпульсні характеристики двох стаціонарних дискретних систем, розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу $x[n]$ при послідовному з'єднанні цих систем.

Відповідно до моїх даних: $h_1 = [1, 5, 0]$, $h_2 = [2, 1, 4]$

Спочатку треба знайти $h_{\text{екв}}$, тобто вираз для охарактеризування імпульсної характеристики еквівалентної системи за такою формулою:

$$h_{\text{екв}}[n] = \sum_{k=0}^5 h_1[k] h_2[n-k]$$

$$h_{\text{екв}}[0] = \sum_{k=0}^5 h_1[k] h_2[-k] = h_1[0] h_2[0] + h_1[1] h_2[-1] + \dots = 2$$

$$h_{\text{екв}}[1] = \sum_{k=0}^5 h_1[k] h_2[1-k] = h_1[0] h_2[-1] + h_1[1] h_2[0] +$$

$$+ h_1[2] h_2[-1] + \dots = 1 + 10 = 11$$

аналогічно

$$h_{\text{екв}}[2] = 4 + 5 + 0 = 9$$

$$h_{\text{екв}}[3] = 20 + 0 = 20$$

$$h_{\text{екв}}[4] = 0$$

$$h_{\text{екв}}[n] = [2, 11, 9, 20]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^8 h_{\text{екв}}[k] x[n-k]$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^8 h_{\text{екв}}[k] x[-k] = h_{\text{екв}}[0] x[0] + h_{\text{екв}}[1] x[-1] + \dots = 18$$

$$y[1] = \sum_{k=0}^8 h_{\text{екв}}[k] x[1-k] = h_{\text{екв}}[0] x[1] + h_{\text{екв}}[1] x[0] + \dots =$$

$$= -8 + 99 = 91$$

аналогічно

$$y[2] = -6 + (-44) + 81 = 31$$

$$y[3] = 4 + (-33) + (-36) + 180 = 115$$

$$y[4] = 8 + 22 + (-27) + (-80) = -77$$

$$y[5] = 44 + 18 + (-60) = 2$$

$$y[6] = 36 + 40 = 76$$

$$y[7] = 80$$

$$y[8] = 0$$

$$\text{при } n > 8 \quad y[n] = 0$$

$$\text{Відповідь: } y[n] = [18, 91, 31, 115, -77, 2, 76, 80, 0]$$

Лінійна стаціонарна дискретна система описується таким різницевим рівнянням:

$$y[n] + y[n-1] - 2y[n-2] + 4y[n-3] = 2x[n] - 2x[n-1] - x[n-2] + 4x[n-3] + 5x[n-4]$$

5. Записати математичний вираз характеристичної функції системи та комплексної частотної характеристики системи. З використанням Python побудувати графік АЧХ системи, для випадку частоти дискретизації 1 кГц. Визначити, в якій частотній діапазоні система підсилює сигнал.

Спочатку запишемо формулу для знаходження характеристичної функції системи з коефіцієнтами різнищевих рівняння a_k та b_k :

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}$$

Підставляємо коэф. різнищевих рівняння a_k і b_k :

$$H(z) = \frac{2z^0 - 2z^{-1} - 1z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}}{1z^0 + 1z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-3} + 0z^{-4}} \quad (1)$$

Для знаходження АЧХ виконуємо заміну в рівнянні (1)

$$z = e^{j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{2e^0 - 2e^{-j\omega} - e^{-2j\omega} + 4e^{-3j\omega} + 5e^{-4j\omega}}{e^0 + e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega} + 4e^{-3j\omega}}$$

$$|H(j\omega)| = K(\omega) = \frac{\sqrt{2^2 + 1 - 2e^{-\omega} - e^{-2\omega} + 4e^{-3\omega} + 5e^{-4\omega}}}{\sqrt{1^2 + 1e^{-\omega} - 2e^{-2\omega} + 4e^{-3\omega}}}$$

Подбудуємо АЧХ з частотою дискретизації 1кГц.
застосовували Python.

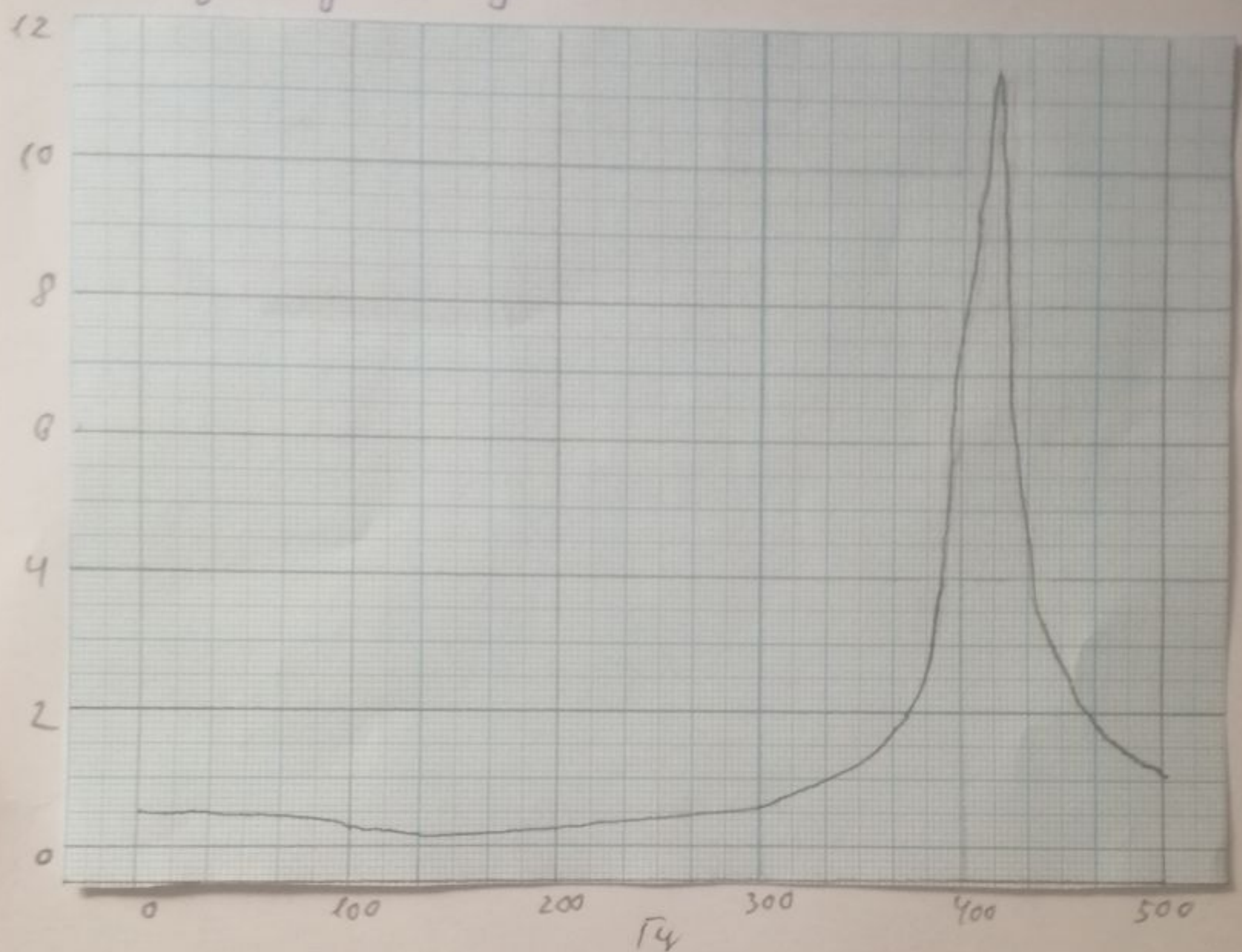


Рис. 1. Графік АЧХ

Мені дуже легко визначити підсилення сигналу на графіку, оскільки там де АЧХ більше за 1-ма і буде підсилення в $(0,332)$

6.3 Використанням різницевого рівняння розрахувати перші 4 відбитки імпульсної характеристики системи.

$$h[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 5\delta[n-4] - h[n-1] + 2h[n-2] - 4h[n-3]$$

при $n=0$, $h[0] = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 2$
аналогічно

при $n=1$, $h[1] = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

при $n=2$, $h[2] = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = -5$

при $n=3$, $h[3] = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 7$

Відповідь: $h[n] = [2, 0, -5, 7]$

7. З використанням різницевого рівняння розрахувати перші 5 відгуків реакції системи на вхідний сигнал $x[n]$, побудувати графік.

$$y[0] = 2x[0] - 2x[-1] - x[-2] + 4x[-3] + 5x[-4] - y[-1] + 2y[-2] - 4y[-3] = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 18$$

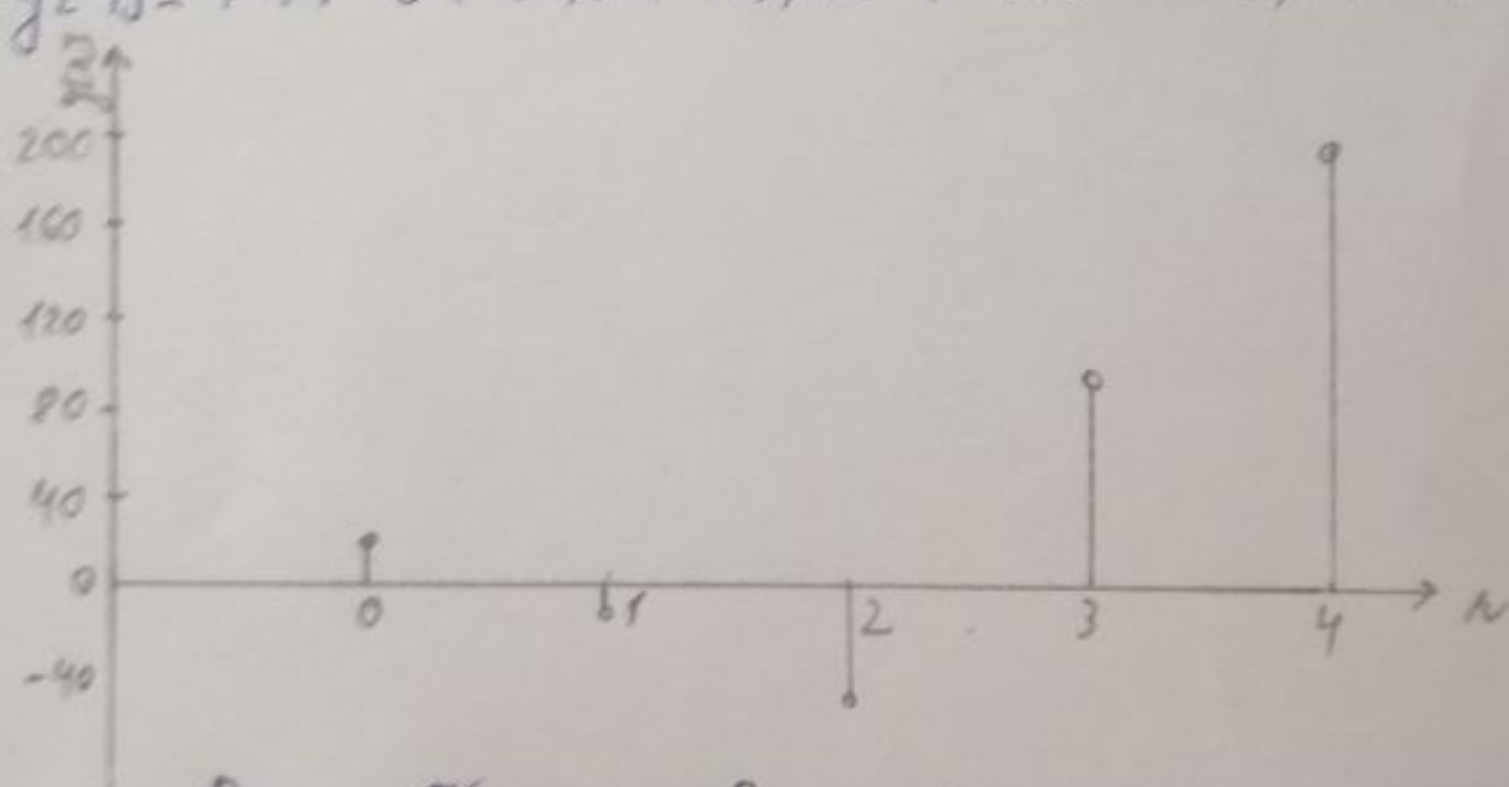
аналогічно

$$y[1] = 1 \cdot 18 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) - 2 \cdot 9 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = -8$$

$$y[2] = 1 \cdot (-8) - 2 \cdot 18 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 9 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = -51$$

$$y[3] = 1 \cdot (-51) - 2 \cdot (-8) + 4 \cdot 18 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 87$$

$$y[4] = 1 \cdot 87 - 2 \cdot (-51) + 4 \cdot (-8) + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) + 4 \cdot (-4) + 5 \cdot 9 = 193$$



Вис. 2 Перші 5 відгуків реакції системи на вхідний сигнал $x[n]$:

8. З використанням отриманої імпульсної характеристики розрахувати перші 5 відгуків реакції системи на вхідний сигнал $x[k]$.

$$h[k] = [2, 0, -5, 7]$$

$$x[k] = [9, -4, -3, 2, 4]$$

$$y[k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] h[k-k]$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] h[k-k] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + \dots = 18$$

аналогічно

$$y[1] = 0 + (-8) = -8$$

$$y[2] = -45 + 0 + (-6) = -51$$

$$y[3] = 63 + 20 + 0 + 4 = 87$$

$$y[4] = -28 + 15 + 0 + 8 = -5$$

$$y[5] = -21 + (-10) + 0 = -31$$

$$y[6] = 14 + (-20) = -6$$

$$y[7] = 28$$

$$y[8] = 0$$

Відповідь: $y[k] = [18, -8, -51, 87, -5, -31, -6, 28, 0]$

9. Порівняти результати п.п. 7 та 8, зробити висновки.

Результати п.7 та п.8 абсолютно співпадають до утЗЗ, це можна пояснити тим, що імпульсна характеристика $h(t)$ залежить від своїх попередніх значень, тому вона прямує до нескінченності, а у всіх пункті було розраховано лише перші чотири значення, тому п.7 та п.8 співпадають від нульового елемента до третього.