Розділ 2

„Спектральний аналіз сигналів"

Частота дискретизації для графіків:

$F_S = 1000 \cdot (2+6+0+3) = 11$ кГц.

Завдання:

1. Розрахувати амплітудний та фазовий спектри сигналу за Фурьє, побудувати їх графіки. Виконувати округлення коефіцієнтів до сотих.
2. Виконати обернене перетворення Фурьє за даними п.1. Виконувати округлення результату до сотих. Розрахувати середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом, зробити висновки.
3. Розрахувати спектр сигналу за Уолшем, побудувати його графік.
4. Виконати обернене перетворення Уолша, зробити висновки.
5. Розрахувати автокореляційну функцію сигналу, побудувати її графік.
6. Побудувати структурну схему фільтра:

$$y[n]+3\,y[n-1]-2y[n-2]+8\cdot y[n-3]=4\,x[n]-2\,x[n-1]-3\cdot x[n-2]+7\,x[n-3]+$$
$$+\,5\cdot x[n-4]$$

Розрахунок:

1. Розрахувати амплітудний та фазовий спектри за Фурьє, побудувати їх графіки. Виконати округлення коефіцієнтів до сотих.

$x[n] = [13, -6, -5, 3, 9]$

В нашому випадку кількість відліків послідовності $x[n]$ дорівнює 5, тому загальний вираз для отримання комплексного спектру сигналу буде:

$$C[m] = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n]\, e^{-j2\pi\frac{m}{5}n}$$

Розрахуємо за цією формулою коефіцієнти спектру $C[m]$

$$C[0] = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n]\, e^{-j2\pi\frac{0}{5}n} = \frac{1}{5}\cdot(13-6-5+3+9) = \frac{14}{5} = 2,8$$

$$C[1] = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n]\left(\cos\left(-2\pi\frac{1}{5}n\right)+j\sin\left(-2\pi\frac{1}{5}n\right)\right) = \frac{1}{5}\Big(13\cdot(\cos(0)+j\sin(0))+(-6)\cdot\Big(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+$$
$$+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\Big)+(-5)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\cdot 2\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\cdot 2\right)\right)+3\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\cdot 3\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\cdot 3\right)\right)+$$
$$+9\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\cdot 4\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\cdot 4\right)\right)\Big) = \frac{1}{5}\big(13\cdot 1+(-6)\cdot(0,31-0,95j)+(-5)\cdot(-0,81-0,59j)+$$
$$+3(-0,81+0,59j)+9\cdot(0,31+0,95j)\big) = \frac{1}{5}\cdot(15,55+18,97j)$$

$$C[2]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x[n]\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{2}{5}\cdot n\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{2}{5}n\big)\Big)=\frac{1}{5}\Big(13\cdot(\cos(0)+j\sin(0))+(-6)\cdot$$

$$\cdot\Big(\cos\big(-\tfrac{4\pi}{5}\big)+j\sin\big(-\tfrac{4\pi}{5}\big)\Big)+(-5)\cdot\Big(\cos\big(-\tfrac{2\pi}{5}\cdot4\big)+j\sin\big(-\tfrac{2\pi}{5}\cdot4\big)\Big)+3\cdot\Big(\cos\big(-\tfrac{2\pi}{5}\cdot6\big)+$$

$$+j\sin\big(-\tfrac{2\pi}{5}\cdot6\big)\Big)+9\Big(\cos\big(-\tfrac{2\pi}{5}\cdot8\big)+j\sin\big(-\tfrac{2\pi}{5}\cdot8\big)\Big)\Big)=\frac{1}{5}\big(13\cdot1-6\cdot(-0,81-0,59j)-$$

$$-5(0,31+0,95j)+3(0,31-0,95j)+9(-0,81+0,59j)\big)=\frac{1}{5}\cdot(9,95+1,25j)$$

$$C[3]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x[n]\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{3}{5}n\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{3}{5}n\big)\Big)=\frac{1}{5}\Big(13\cdot(\cos(0)+j\sin(0))+6\cdot\Big(\cos\big(-2\pi\cdot\tfrac{3}{5}\big)+$$

$$+j\sin\big(-2\pi\tfrac{3}{5}\big)\Big)-5\cdot\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{6}{5}\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{6}{5}\big)\Big)+3\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{9}{5}\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{9}{5}\big)\Big)+$$

$$+9\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{12}{5}\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{12}{5}\big)\Big)=\frac{1}{5}\big(13\cdot1-6\cdot(-0,81+0,59j)-5\cdot(0,31-0,95j)+$$

$$+3(0,31+0,95j)+9\cdot(-0,81-0,59j)\big)=\frac{1}{5}(9,95-1,25j)$$

$$C[4]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x[n]\cdot\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{4}{5}n\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{4}{5}n\big)\Big)=\frac{1}{5}\Big(13\cdot(\cos(0)+j\sin(0))-6\cdot\Big(\cos\big(-2\pi\cdot\tfrac{4}{5}\big)+$$

$$+j\sin\big(-2\pi\tfrac{4}{5}\big)\Big)-5\cdot\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{8}{5}\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{8}{5}\big)\Big)+3\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{12}{5}\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{12}{5}\big)\Big)+$$

$$+9\Big(\cos\big(-2\pi\tfrac{16}{5}\big)+j\sin\big(-2\pi\tfrac{16}{5}\big)\Big)\Big)=\frac{1}{5}\big(13\cdot1-6\cdot(0,31+0,95j)-5(-0,81+0,59j)+$$

$$+3(-0,81-0,59j)+9(0,31-0,95j)\big)=\frac{1}{5}(15,55-18,97j)$$

Комплексний спектр сигналу $x[n]$:

$C[m]=[2,8;\ 3,11+3,79j;\ 1,99+0,25j;$ ~~3,11~~ $1,99-0,25j;\ 3,11-3,79j]$

Розрахуємо амплітудний спектр як модуль комплексного спектру:

$$A[m]=|C[m]|=\sqrt{(Re(C[m]))^2+(Im(C[m]))^2}$$

$$A[0]=\sqrt{2,8^2}=2,8$$

$$A[1]=\sqrt{3,11^2+3,79^2}=4,90$$

$$A[2]=\sqrt{1,99^2+0,25^2}=2,01$$

$$A[3]=\sqrt{1,99^2+(-0,25)^2}=2,01$$

$$A[4]=\sqrt{3,11^2+(-3,79)^2}=4,90$$

Амплітудний спектр сигналу $x[n]$:

$A[m]=[2,8;\ 4,90;\ 2,01;\ 2,01;\ 4,90]$

Розрахуємо фазовий спектр як аргумент комплексного спектру:

$$\varphi[m] = \operatorname{arctg} \frac{Im(C[m])}{Re(C[m])}$$

$$\varphi[0] = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{2,8}\right) = 0$$

$$\varphi[1] = \operatorname{arctg}\left(\frac{3,79}{3,11}\right) = 0,88$$

$$\varphi[2] = \operatorname{arctg}\left(\frac{0,25}{1,99}\right) = 0,12$$

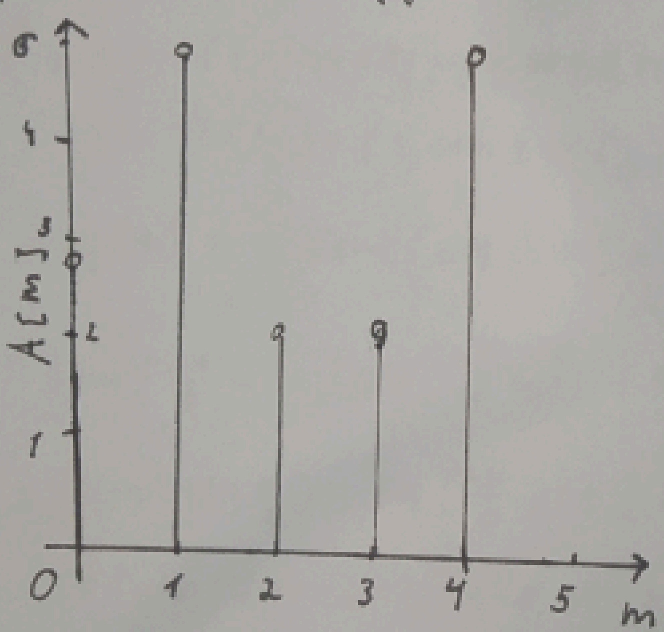
$$\varphi[3] = \operatorname{arctg}\left(\frac{-0,25}{1,99}\right) = -0,12$$

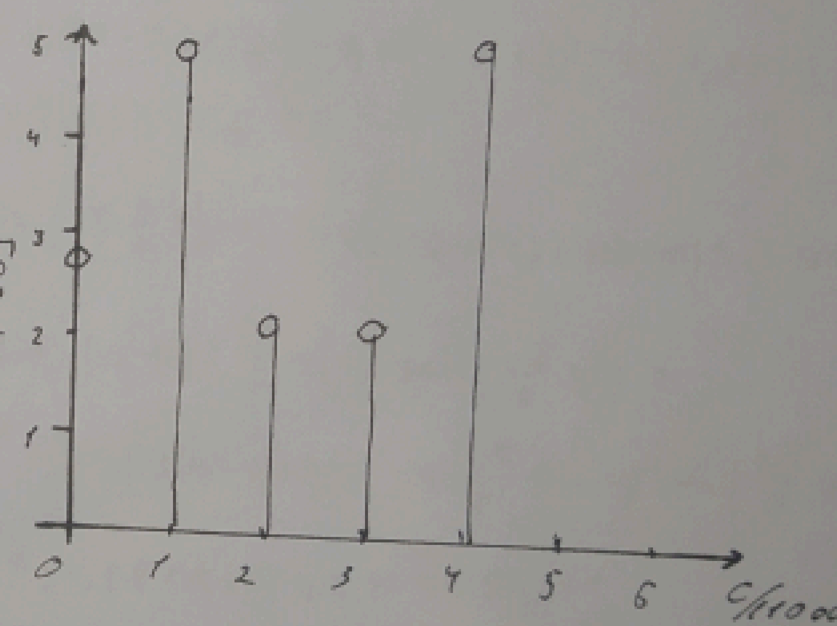
$$\varphi[4] = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3,79}{3,11}\right) = -0,88$$

Фазовий спектр сигналу x[n]:

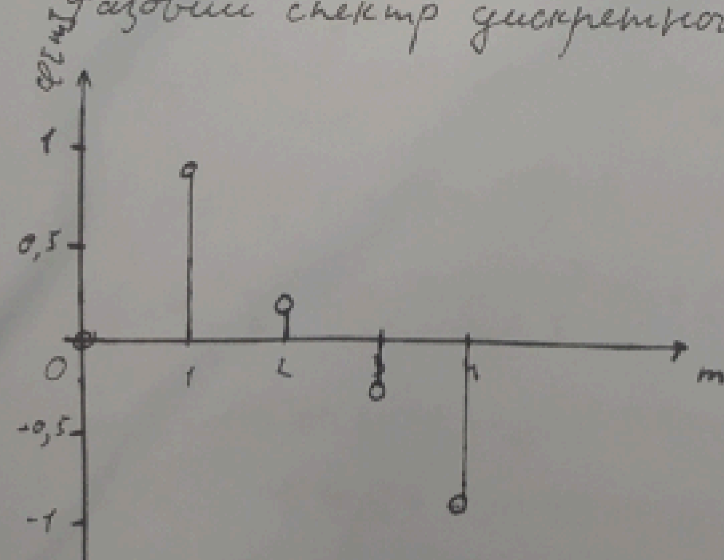
$\varphi[m] = [0; 0,88; 0,12; -0,12; -0,88]$

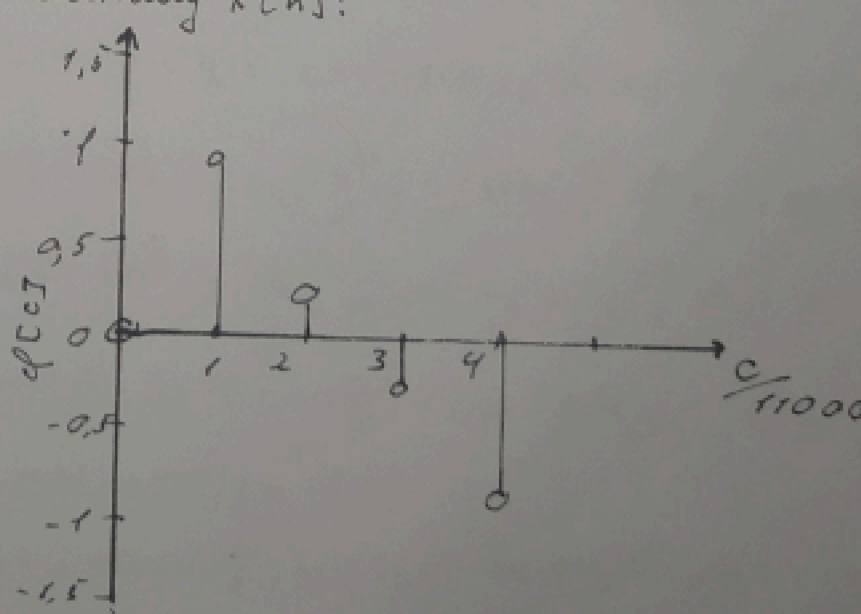
Графік амплітудного спектру сигналу:





Фазовий спектр дискретного сигналу x[n]:





2. Виконати обернене перетворення Фур'є за даними п.1. Виконувати округлення результатів до сотих. Розрахувати середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом, зробити висновки.

Розраховуємо відновлення сигналу за формулою:

$$x_{від}[n] = \sum_{m=0}^{4} c[m]\, e^{j2\pi \frac{m}{N} n}$$

Розрахунки:

$$x_{від}[0] = \sum_{m=0}^{4} c[m]\, e^{j2\pi \frac{m}{N} 0} = \cancel{0,6}\ 2,8 + 3,11 + 3,79j + 1,99 + 0,25j + 1,99 - 0,25j + 3,11 -$$

$$- 3,79j = 13.$$

$$x_{від}[1] = \sum_{m=0}^{4} c[m]\left(\cos\left(2\pi \frac{m}{5} 1\right) + j\sin\left(2\pi \frac{m}{5} 1\right)\right) = 2,8 \cdot (\cos(0) + j\sin(0)) + (3,11 + 3,79j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) + (1,99 + 0,25j) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 2\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 2\right)\right) + (1,99 - 0,25j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 3\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 3\right)\right) + (3,11 - 3,79j)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 4\right)\right) =$$

$$= 2,8 \cdot 1 + (3,11 + 3,79j) \cdot (0,31 + 0,95j) + (1,99 + 0,25j) \cdot (-0,81 + 0,59j) + (1,99 - 0,25j) \cdot$$

$$\cdot (-0,81 - 0,59j) + (3,11 - 3,79j)(0,31 - 0,95j) = -5,99$$

$$x_{від}[2] = \sum_{m=0}^{4} c[m]\left(\cos\left(2\pi \frac{m}{5} 2\right) + j\sin\left(2\pi \frac{m}{5} 2\right)\right) = 2,8\,(\cos(0) + j(\sin(0)) + (3,11 + 3,79j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 2\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 2\right)\right) + (1,99 + 0,25j) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 4\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 4\right)\right) +$$

$$+ (1,99 - 0,25j) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 6\right)\right) + (3,11 - 3,79j)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 8\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 8\right)\right) =$$

$$= 2,8 \cdot (1) + (3,11 + 3,79j) \cdot (-0,81 + 0,59j) + (1,99 + 0,25j)(0,31 - 0,95j) +$$

$$+ (1,99 - 0,25j) \cdot (0,31 + 0,95j) + (3,11 - 3,79j)(-0,81 - 0,59j) = -5,00$$

$$x_{від}[3] = \sum_{m=0}^{4} c[m]\left(\cos\left(2\pi \frac{m}{5} 3\right) + j\sin\left(2\pi \frac{m}{5} 3\right)\right) = 2,8\,(\cos(0) + j\sin(0)) + (3,11 + 3,79j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 3\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 3\right)\right) + (1,99 + 0,25j)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 6\right)\right) + (1,99 - 0,25j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 9\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 9\right)\right) + (3,11 - 3,79j) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 12\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 12\right)\right) =$$

$$= 2,7 \cdot (1) + (3,11 + 3,79j) \cdot (-0,81 - 0,59j) + (1,99 + 0,25j) \cdot (0,31 + 0,95j) + (1,99 - 0,25j) \cdot$$

$$\cdot (0,31 - 0,95j) + (3,11 + 3,79j)(-0,81 + 0,59j) = 2,99$$

$$x_{від}[4] = \sum_{m=0}^{4} c[m]\left(\cos\left(2\pi \frac{m}{5} 4\right) + j\sin\left(2\pi \frac{m}{5} 4\right)\right) = 2,8 \cdot (\cos(0) + j\sin(0)) + (3,11 + 3,79j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 4\right)\right) + (1,99 + 0,25j) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 8\right)\right) + (1,99 - 0,25j) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 12\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 12\right)\right) + (\overset{3,11 - 3,79j}{\cancel{0,55 - 0,5j}})\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} 16\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5} 16\right)\right) =$$

$= 2,8\cdot(1) + (3,11+3,79j)\cdot(0,31-0,95j) + (1,99+0,25j)(-0,81-0,59j) + (1,99-0,25j)\cdot$

$\cdot(-0,81+0,59j) + (\cancel{1,99}\ 3,11-3,79j)(0,31+0,95j) = 9,00$

Відновлений сигнал $x_{від}[n] = [13; -5,99; -5; 2,99; 9]$

Розрахуємо середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n] - x_{відн}[n])^2} = \sqrt{\frac{1}{5}((13-13)^2 + (-6+5,99)^2 + (-5+5)^2 + (3-2,99)^2 + (9-9)^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}(0^2 + 0,01^2 + 0^2 + 0,01^2 + 0^2} \approx 0,003$$

Висновки: Як бачимо середньоквадратичне відхилення досить невелике, що каже про досить хорошу точність відновлення ~~сиг~~ сигналу, і якщо його округлити до сотих, то можна сказати, що відхилення немає, тому можна відновити сигнал майже без втрат.

3. Розрахувати спектр сигналу за Уолшем, побудувати його графік.

$x[n] = [13, -6, -5, 3, 9]$

В загальному випадку базис Уолша при отримані його як рядків матриці Адамара можна задати лише для просторів, розмірність яких є степенем двійки ($N = 2, 4, 8, 16 \ldots$). Оскільки сигнал складається з 5 відліків, то доповнимо його нулями до найближчої степені двійки:

$x[n] = [13, -6, -5, 3, 9, 0, 0, 0]$

Сформуємо матрицю Адамара H_N 8-го порядку ($N = 2^6$, $\ell = 3$):

$$H_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Для отримання спектру сигналу за Уолшем скористаємось виразом:

$W[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, had(k,n)$, та розрахуємо пряме перетворення Уолша в матричній формі:

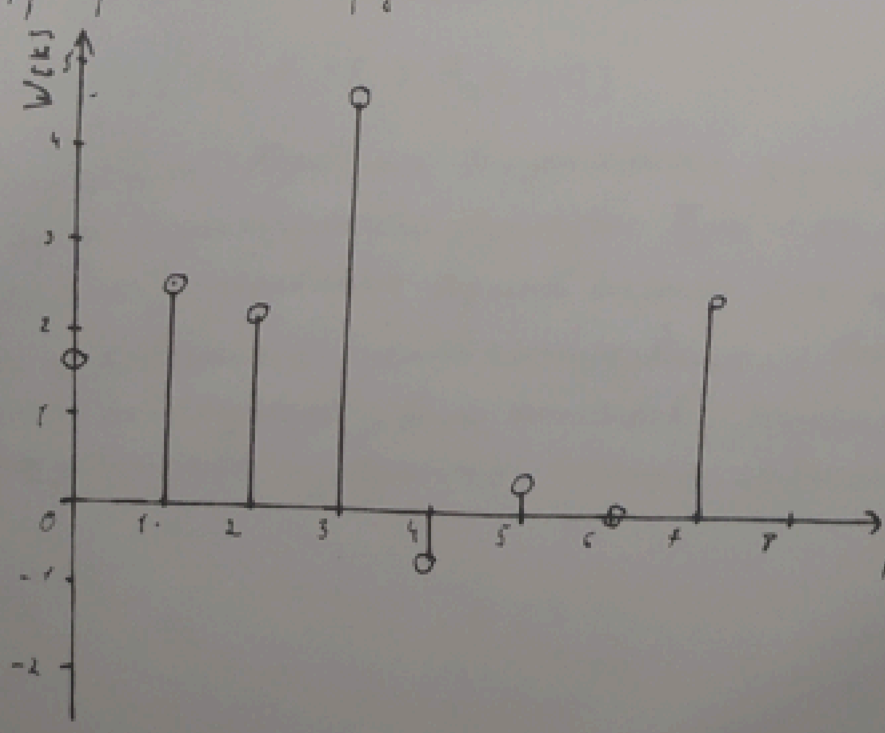
$$W = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ -5 \\ 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

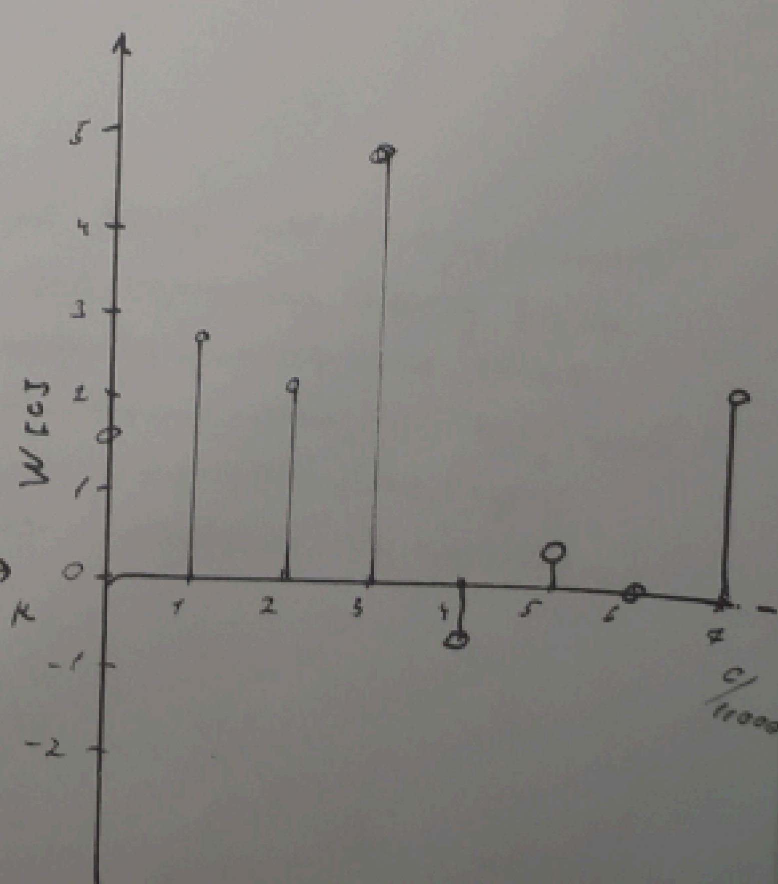
$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1\cdot(13)+1(-6)+1\cdot(-5)+1\cdot 3+1\cdot(9)+1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0 \\ 1(13)-1\cdot(-6)+1\cdot(-5)-1\cdot 3+1\cdot 9-1\cdot 0+1\cdot 0-1\cdot 0 \\ 1\cdot 13+1(-6)-1\cdot(-5)-1(\cdot 3)+1\cdot 9+1\cdot 0-1\cdot 0-1\cdot 0 \\ 1\cdot 13-1\cdot(-6)-1(-5)+1\cdot 3+1\cdot 9-1\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot 0 \\ 1\cdot 13+1\cdot(-6)+1(-5)+1\cdot(3)-1\cdot 9-1\cdot 0-1\cdot 0-1\cdot 0 \\ 1\cdot 13-1\cdot(-6)+1\cdot(-5)-1\cdot 3+1\cdot 9+1\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot 0 \\ 1\cdot 13+1\cdot(-6)-1\cdot(-5)-1\cdot 3-1\cdot 9-1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0 \\ 1\cdot 13-1\cdot(-6)-1(-5)+1\cdot 3-1\cdot 9+1\cdot 0+1\cdot 0-1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{8} \\ \frac{20}{8} \\ \frac{18}{8} \\ \frac{36}{8} \\ -\frac{4}{8} \\ \frac{2}{8} \\ 0 \\ \frac{18}{8} \end{pmatrix}$$

Спектр сигналу за Уолшем дорівнює:

$$W[k] = \left[\frac{14}{8}; \frac{20}{8}; \frac{18}{8}; \frac{36}{8}; -\frac{4}{8}; \frac{2}{8}; 0; \frac{18}{8}\right]$$

Графік спектру:





4. Виконати обернене перетворення Уолша, зробити висновки:

Виконаємо обернене перетворення, проводячи розрахунки в матричній формі за виразом:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} W[k] \cdot had(k,n):$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14/8 \\ 20/8 \\ 18/8 \\ 36/8 \\ -4/8 \\ 2/8 \\ 0 \\ 18/8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(14/8) + 1\cdot 20/8 + 1\cdot 18/8 + 1\cdot 36/8 - 1\cdot 4/8 + 1\cdot 2/8 + 1\cdot 0 + 1\cdot 18/8 \\ 1\cdot 14/8 - 1\cdot 20/8 + 1\cdot 18/8 - 1\cdot 36/8 + 1\cdot 4/8 - 2/8 + 1\cdot 0 - 18/8 \\ 14/8 + 20/8 - 18/8 - 36/8 - 4/8 + 2/8 - 0 - 18/8 \\ 14/8 - 20/8 - 18/8 + 36/8 - 4/8 - 2/8 - 0 + 18/8 \\ 14/8 + 20/8 + 18/8 + 36/8 + 4/8 - 2/8 - 0 - 18/8 \\ 14/8 - 20/8 + 18/8 - 36/8 + 4/8 - 2/8 - 0 + 18/8 \\ 14/8 + 20/8 - 18/8 - 36/8 + 4/8 - 2/8 + 0 + 18/8 \\ 14/8 - 20/8 - 18/8 + 36/8 + 4/8 + 2/8 + 0 - 18/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ -5 \\ 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В результаті отримали сигнал:

$$x[n] = [13, -6, -5, 3, 9, 0, 0, 0]$$

Висновки: Перевагою використання функцій Уолша для розкладу сигналів порівняно з спектральним розкладом Фур'є є те, що у розрахунках спектру Уолша зводиться до додавання відліків сигналу і не потребує комплексних чисел. Функції Уолша є кусково-неперервними і вони оптимальні для представлення імпульсоподібних сигналів з прямими формами. Як видно з результатів 4 завдання сигнал можна відновити без похибки.

5. Розрахувати автокореляційну функцію сигналу, побудувати її графік.

Запишемо формулу для знаходження взаємнокореляційної функції для скінченних дискретних сигналів:

$$B_{12}[j] = \frac{r_{12}[j]}{\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2[n] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2[n]}}$$

де $r_{12}[j] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\, x_2[n-j]$

Якщо $x_1[n] = x_2[n]$, то говорять про автокореляційну функцію.

Для початку розрахуємо знаменник, так як він буде незмінним для кожного із значень відліків.

$$\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2[n] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2[n]} = \frac{1}{5}\cdot\Big((x_1^2[0] + x_1^2[1] + x_1^2[2] + x_1^2[3] + x_1^2[4])\cdot$$

$$\cdot(x_2^2[0] + x_2^2[1] + x_2^2[2] + x_2^2[3] + x_2^2[4])\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\sqrt{(13^2 + (-6)^2 + (-5)^2 + (3)^2 + 9^2)^2} =$$

$= 64$

Далі почергово розрахуємо значення взаємнокореляційної функції для кожного значення зміщення сигналів один від одного. З урахуванням властивостей парності автокореляційної функції достатньо розрахувати її значення лише від'ємних зміщень:

$$r_{12}[0] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\, x_1[n-0] = \frac{1}{5}\,(x_1^2[0] + x_1^2[1] + x_1^2[2] + x_1^2[3] + x_1^2[4]) =$$

$= 64$

Звідси

$$B_{12}[0] = \frac{64}{64} = 1$$

Як і повинно бути, коефіцієнт кореляції сигналу самим з собою рівний одиниці.

$$r_{12}[1] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\cdot x_1[n-1] = \frac{1}{5}(x_1[0]\cdot x_1[-1] + x_1[1]\, x_1[0] + x_1[2]\cdot x_1[1] +$$

$$+ x_1[3]\, x_1[2] + x_1[4]\cdot x_1[3]) = \frac{1}{5}(13\cdot 0 + (-6)\cdot 13 + (-5)\cdot(-6) + 3\cdot(-5) + 9\cdot 3) =$$

$= -\frac{36}{5}$

Звідси

$$B_{12}[1] = \frac{-36}{64\cdot 5} = \frac{-9}{16\cdot 5} = \frac{-9}{80}$$

$$r_{12}[2] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\,x_1[n-2] = \frac{1}{5}\left(x_1[0]\cdot x_1[-2] + x_1[1]\cdot x_1[-1] + x_1[2]\cdot x_1[0] + x_1[3]\cdot x_1[1]\right.$$

$$\left.+ x_1[4]\cdot x_1[2]\right) = \frac{1}{5}\left(0 + 0 + (-5)\cdot(13) + 3\cdot(-6) + 9\cdot(-5)\right) = -128/5$$

Звідси

$$B_{12}[2] = \frac{-128}{64} = -\frac{2}{5}$$

$$r_{12}[3] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\cdot x_1[n-3] = \frac{1}{5}\left(x_1[0]\cdot x_1[-3] + x_1[1]\cdot x_1[-2] + x_1[2]\cdot x_1[-1] +\right.$$

$$\left.+ x_1[3]\cdot x_1[0] + x_1[4]\cdot x_1[1]\right) = \frac{1}{5}\left(0 + 0 + 0 + 3\cdot 13 + 9\cdot(-6)\right) = -15/5 = -3$$

$$B_{12}[3] = \frac{-15}{64\cdot 5} = -\frac{3}{64}$$

$$r_{12}[4] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\,x_1[n-4] = \frac{1}{5}\left(x_1[0]\,x_1[-4] + x_1[1]\,x_1[-3] + x_1[2]\,x_1[-2] +\right.$$

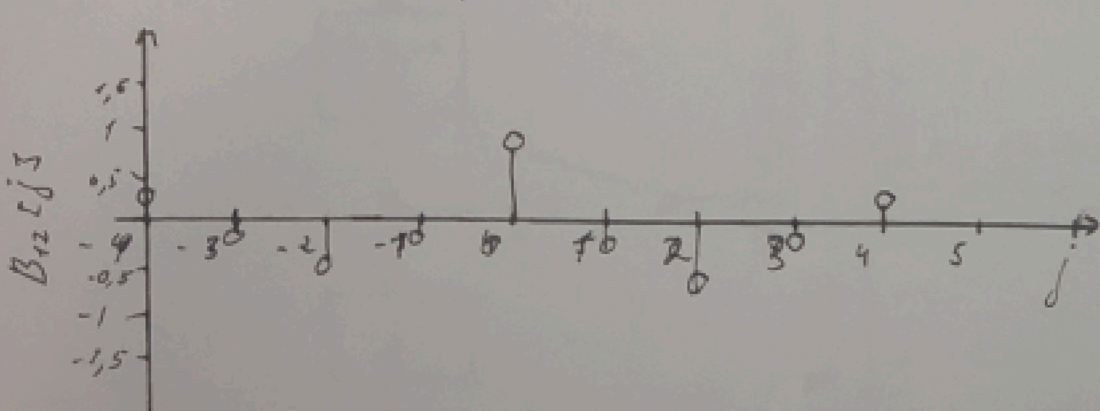
$$\left.+ x_1[3]\,x_1[-1] + x_1[4]\,x_1[0]\right) = \frac{1}{5}\left(0 + 0 + 0 + 0 + 9\cdot 13\right) = 23{,}4$$

$$B_{12}[4] = \frac{23{,}4}{64}$$

Всі інші відліки АКФ будуть рівними нулю. Симетрично відобразивши отримані відліки відносно значення $j = 0$, отримаємо автокореляційну функцію сигналу.

$$B_{12} = \left[\frac{23{,}4}{64};\ -\frac{3}{64};\ -\frac{2}{5};\ -\frac{9}{80};\ 1;\ -\frac{9}{80};\ -\frac{2}{5};\ -\frac{3}{64};\ \frac{23{,}4}{64}\right]$$

Побудуємо графік отриманої функції:



6. Побудувати структурну схему фільтра:

$$y[n] = 4x[n] - 2x[n-1] - 3\cdot x[n-2] + 7x[n-3] + 5x[n-4] - 3y[n-1] + 2\cdot y[n-2] - 8\cdot y[n-3]$$

Побудова структури фільтра за заданим різницевим рівнянням зводиться до відображення кожної дії над відліками вхідного та вихідного сигналів за допомогою відповідних блоків.

У випадку, коли фільтр рекурсивний, на суматор подаються не тільки затримані і помножені на константи відліки вхідного сигналу, а також затримані відліки вихідного сигналу.

Тепер побудуємо структурну схему фільтра для даного різницевого рівняння:

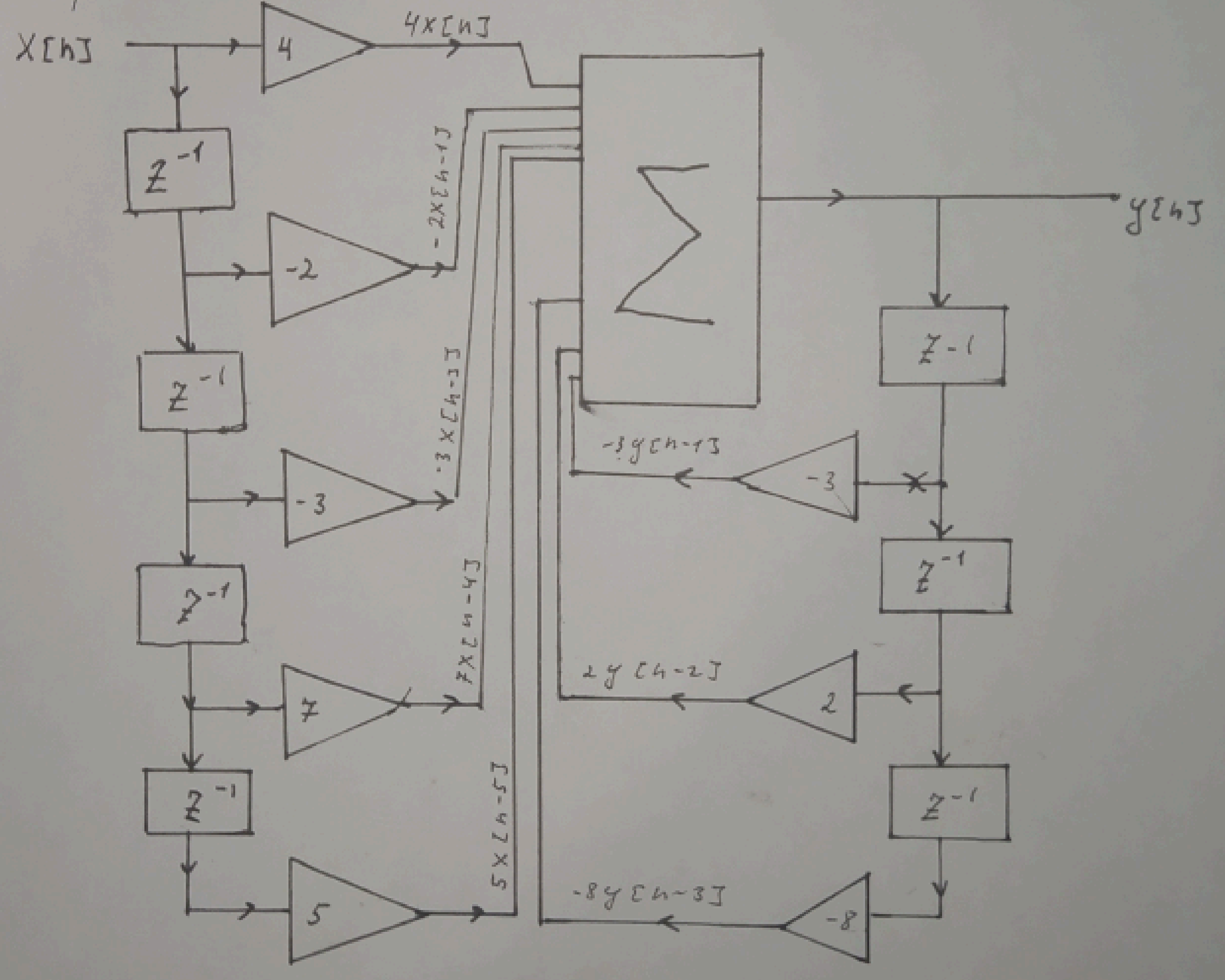


Рис 5. Структурна схема фільтра.