

Кобзарев Алексей, Тескер Константин, Белозёров Михаил, Рыбаков
Владислав.
410 группа

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИКУМУ НА ЭВМ

1 Постановка задачи

Была поставлена задача написания программы проводящей расчёт течения в каверне разностной схемой. Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа в область Ω размерности два, выглядит следующим образом

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u \right] + \nabla p = Lu + \rho f, \quad p = p(\rho). \quad (1)$$

где L есть линейный симметричный положительно определенный оператор.

В данном случае рассматривалась схема описывающая поведение плотности и скорости газа в каверне.

2 Гладкое решение

Для проверки правильности формул и работы программы были проведены тесты на гладком решении. В качестве гладкого решения для плотности и скорости были выбраны следующие функции:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(2x) \cdot \sin(2y) \cdot e^t \\ u_2 &= \sin(2x) \cdot \sin(2y) \cdot e^{-t} \\ \rho &= (\cos(2x) + 1.5) \cdot (\sin(2y) + 1.5) \cdot e^t \end{aligned}$$

Для проверки решения далее приведены значения норм разности решения и действительного значения для различных сеток, а также таблица времени работы программы.

C -норма ошибки для g : $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$5.713e-03$	$1.271e-02$	$1.522e-02$	$1.564e-02$
0.00005	$3.398e-03$	$1.072e-03$	$1.418e-02$	$1.467e-02$
0.00003	$2.162e-03$	$8.986e-03$	$1.176e-02$	$1.158e-02$
0.00001	$1.784e-03$	$5.674e-03$	$1.022e-02$	$7.961e-03$

L_2 -норма ошибки для g : $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$2.886e-03$	$3.516e-03$	$3.660e-03$	$3.628e-03$
0.00005	$2.165e-03$	$2.221e-03$	$1.984e-03$	$2.094e-03$
0.00003	$1.278e-03$	$1.356e-03$	$1.012e-03$	$1.131e-03$
0.00001	$8.456e-04$	$8.811e-04$	$6.641e-04$	$5.612e-04$

C -норма ошибки для $v1$: $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$1.243e-02$	$1.909e-02$	$3.166e-02$	$5.695e-02$
0.00005	$1.120e-02$	$1.441e-02$	$2.012e-02$	$3.214e-02$
0.00003	$8.829e-03$	$9.822e-03$	$1.313e-02$	$2.101e-02$
0.00001	$8.942e-03$	$5.172e-03$	$1.065e-02$	$1.239e-02$

L_2 -норма ошибки для $v1$: $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$4.312e-03$	$1.944e-03$	$1.580e-03$	$1.494e-03$
0.00005	$2.781e-03$	$1.583e-03$	$1.181e-03$	$1.291e-03$
0.00003	$1.661e-03$	$7.163e-04$	$7.120e-04$	$8.134e-04$
0.00001	$7.127e-04$	$5.041e-04$	$4.981e-04$	$5.828e-04$

C -норма ошибки для $v2$: $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$8.334e-03$	$1.335e-02$	$2.638e-02$	$5.207e-02$
0.00005	$7.124e-03$	$1.002e-02$	$1.932e-02$	$2.321e-02$
0.00003	$3.212e-03$	$7.125e-03$	$1.132e-02$	$1.781e-02$
0.00001	$2.018e-03$	$4.334e-03$	$6.212e-03$	$1.183e-02$

L_2 -норма ошибки для $v2$: $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$5.452e-03$	$4.130e-03$	$3.862e-03$	$4.539e-03$
0.00005	$3.123e-03$	$2.722e-03$	$2.257e-03$	$2.711e-03$
0.00003	$2.320e-03$	$1.938e-03$	$1.201e-03$	$2.121e-03$
0.00001	$1.491e-03$	$1.129e-03$	$7.620e-04$	$1.240e-03$

Время, $p_\rho = 10.000, \mu = 0.010$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.00010	$8.603e-03$	$2.935e-02$	$1.295e-01$	$7.603e-01$
0.00005	$1.550e-02$	$5.310e-02$	$2.467e-01$	$1.341e+00$
0.00003	$3.005e-02$	$9.889e-02$	$4.552e-01$	$2.554e+00$
0.00001	$5.630e-02$	$1.962e-01$	$8.307e-01$	$4.615e+00$

Результаты свидетельствуют о том, что программа реализована верно и имеет место сходимость решения к действительному значению плотности и скорости.

3 Численные эксперименты

Были проведены численные эксперименты, моделирующие реальных условий. Были реализованы четыре версии программы описывающие различные по форме каверны. Начальные условия были установлены следующие:
Белозёров Михаил

- Область $\Omega = \Omega_{02} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{22} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{20}$
- $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = \omega$
- $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-} \cup \Gamma_{20}^{y-}} = 0$

Кобзарев Алексей

- Область $\Omega = \Omega_{00} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{01} \cup \Omega_{11}$
 Γ_{00}^{x+}
- $u_2|_{\Gamma_{00}^{y-}} = \omega$
- $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$

Рыбаков Владислав

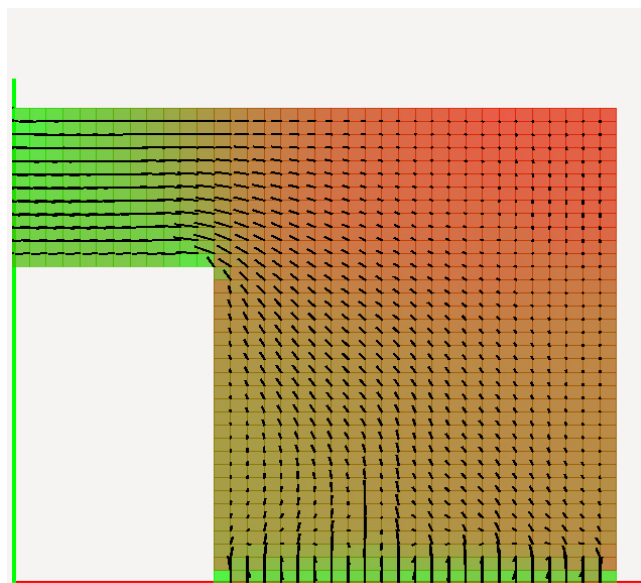
- Область $\Omega = \Omega_{00} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{20}$
- $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = \omega$
- $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$
- $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{11}^{y+}} = 0$

Тескер Константин

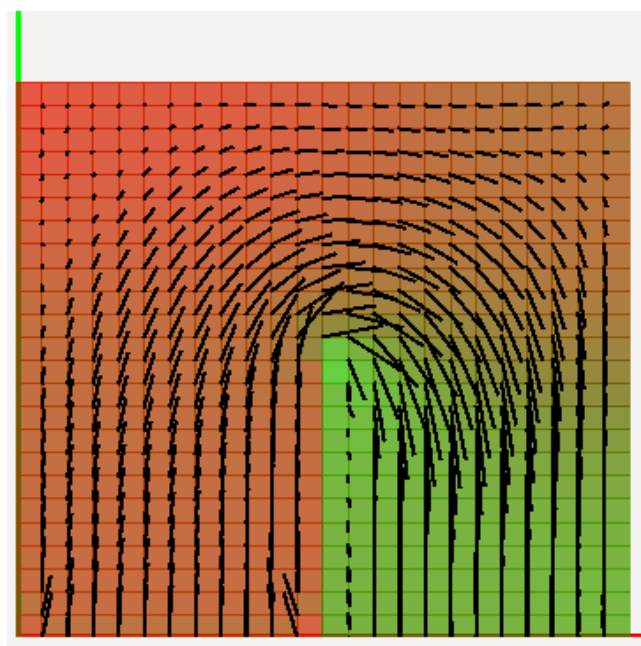
- Область $\Omega = \Omega_{01} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$
- $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = \omega$
- $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{12}^{y+}} = 0$
- $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$

Для выяснения корректности проведенных экспериментов была написана дополнительная программа, визуализирующая результаты проделанных экспериментов. Было замечено, что при увеличении временного параметра решение стабилизируется и результаты для каждой из задач выглядят следующим образом:

Белозёров Михаил:



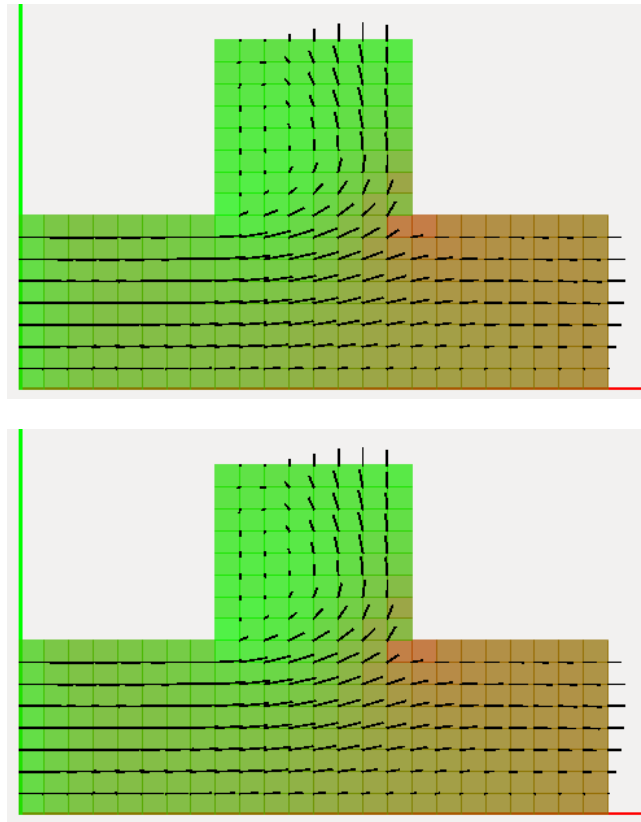
Кобзарев Алексей:



Рыбаков Владислав:

Тескер Константин:

Плотность газа характеризуется цветом ячейки. От зелёного к красному по возрастанию значения плотности. Черные палочки – вектора скорости.



4 Сходимость и собственные функции

Были проведены эксперименты по скорости сходимости для изначального решения. Результаты приведены ниже.

Для матрицы были вычислено время установления стационарного решения и время восстановления его после возмущения. Были вычислены собственные значения и их собственные вектора оператора линеаризации, а также проведены численные эксперименты, использующие полученные возмущения функций плотности и скорости. Ниже приведены результаты (возмущение считалось только для действительных собственных значений):

- $-2.348801e - 01$: время = 187
- $-1.784789e - 01$: время = 315
- $-3.015234e - 01 \pm 1.792826e - 01$
- $-3.168194e - 01 \pm 1.331842e - 01$
- $-1.652393e - 01 \pm 1.205335e - 01$

Отсюда можно сделать вывод, что чем меньше собственное значение, тем быстрее оно сходится при малых возмущениях.

5 Описание реализации

Программа реализована на языке C, опираясь на исходный код выданной программы и используя пакет `lapack`. Для реализации были созданы массивы индексирующие связь плотности и скорости. Массивы называются `left bottom v` - индекс скорости стоящей на пол узла ниже и пол узла левее плотности, `left h index` - индекс плотности на полл узла правее и пол узла выше узла скорости `left top h index` - индекс плотности на полл узла левее и пол узла выше узла скорости

так же для облегчения работы с индексами были введены два массива `hv map` и `vh map` отвечающие за соответствие узлов скорости и плотности.

Для реализации заполнения сетки и начальных данных были написаны функции `set arrays for H`, `reset H index`, `setka for v`.

Схема решения претерпела небольшие изменения. Вместо одного вычисления матрицы размерности $DIM_H + 2 \cdot DIM_V$ теперь используется две матрицы размерности DIM_H для плотности и размерности $2 * DIM_V$ для скорости. На каждом шаге по времени происходит сначала вычисление плотности по данным с предыдущего шага. Затем происходит вычисление скорости по плотности с нового шага и значений скорости с предыдущего шага.

Для вычисления индексов для узла были добавлены функции `fill for H` и `fill for v`. Для заполнения матриц используются функции `cases H` и `case 0 V`, `case 1 8 V`. Так как скорости на границах полагаются известными то разбирать случаи граничных узлов не имеет смысла, для них написан общий случай выставления диагонального элемента значение 1 и правой части с действительным значением скорости в этом узле.

Для запуска программы в режиме расчёта собственных значений необходимо задать переменную `USE_EIGEN` в файле "func.h" равной 1. Для запуска программы в режиме линеаризации по известным собственным значениям необходимо задать эту переменную равной 0.

Для запуска программы в режиме расчёта собственных значений необходимо задать переменную `USE_EIGEN` в файле "func.h" равной 1. Для запуска программы в режиме линеаризации по известным собственным значениям необходимо задать эту переменную равной 0.

Приведем графики скорости падения невязки при малых возмущениях, связанных с двумя действительными собственными значениями:

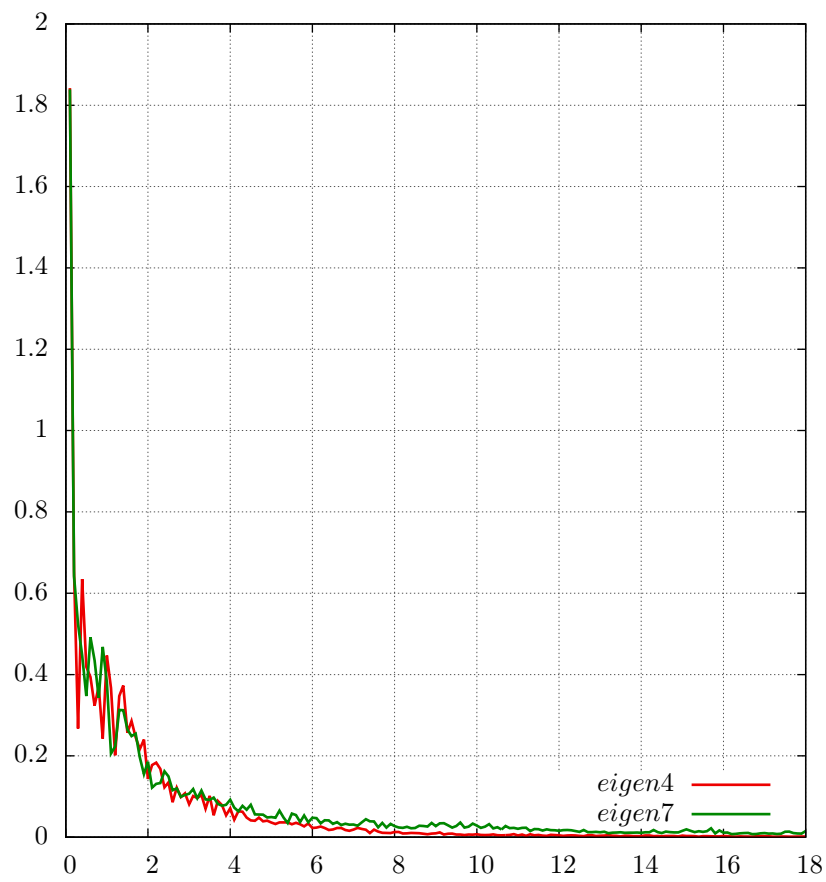


Рис. 1: Графики зависимости скорости падения невязки от собственного значения

6 Заключение

В результате проведенных экспериментов было установлено, что схема даёт правдивые результаты и может быть использована для расчётов реальных моделей течения газов.