

基于图像的三维模型重建

——相机模型与对极几何



主讲人 隋博士



✓ 针孔相机模型

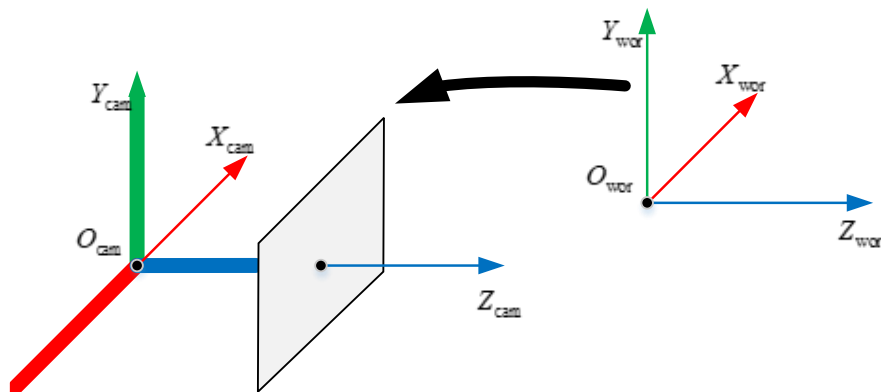
- ✓ 针孔相机模型
- ✓ 径向畸变

✓ 2D-2D:对极几何

- ✓ 对极约束
- ✓ 本质/单应矩阵
- ✓ 直接线性变换法

针孔相机模型-外参数矩阵

1. 世界坐标系到相机坐标系



$$\mathbf{X}_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

点的相机坐标

$$\mathbf{X}_w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

点的世界坐标

刚体变换

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{R}\mathbf{X}_w + \mathbf{t}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

逆变换

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{R}^T \mathbf{X}_c - \mathbf{R}^T \mathbf{t}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

针孔相机模型-外参数矩阵

1.1 相机中心在世界坐标系中的位置

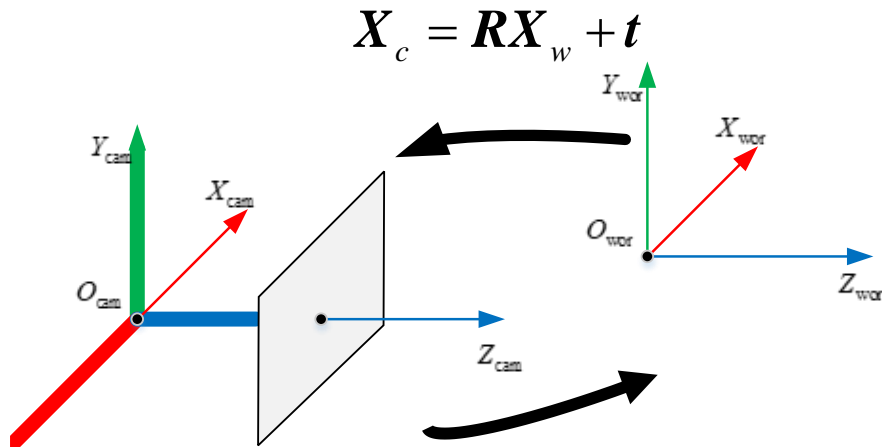
$$O_{cam}^c = 0$$



$$O_{cam}^w = R^T O_{cam}^c - R^T t = -R^T t$$

O_{cam}^c --- 相机中心在相机坐标系中的坐标

O_{cam}^w --- 相机中心在世界坐标系中的坐标



$$X_w = R^T X_c - R^T t$$

针孔相机模型-外参数矩阵

1.2 相机朝向(Z轴)在世界坐标系中的方向

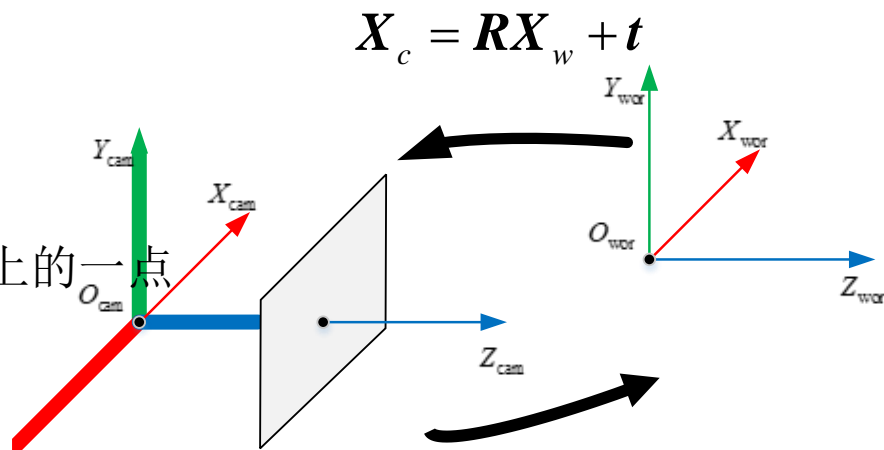
$$\mathbf{r}^c = \mathbf{Z}^c - \mathbf{O}_{\text{cam}}^c \quad \mathbf{Z}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O}_{\text{cam}}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



\mathbf{Z}^c --- 相机坐标系中Z轴上的一点

$$\mathbf{r}^w = (\mathbf{R}^T \mathbf{Z}^c - \mathbf{R}^T \mathbf{t}) - (\mathbf{R}^T \mathbf{O}_{\text{cam}}^c - \mathbf{R}^T \mathbf{t})$$

$$= \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(2,:) \text{ 旋转矩阵的第3行?}$$

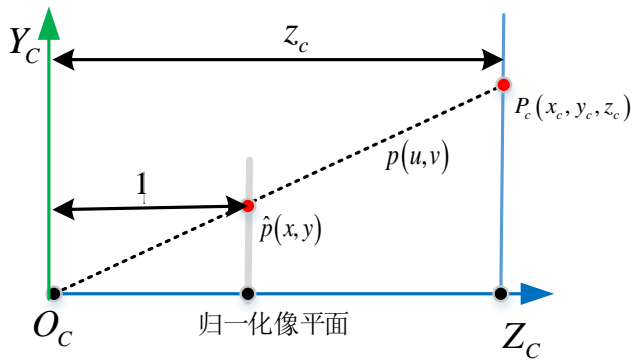
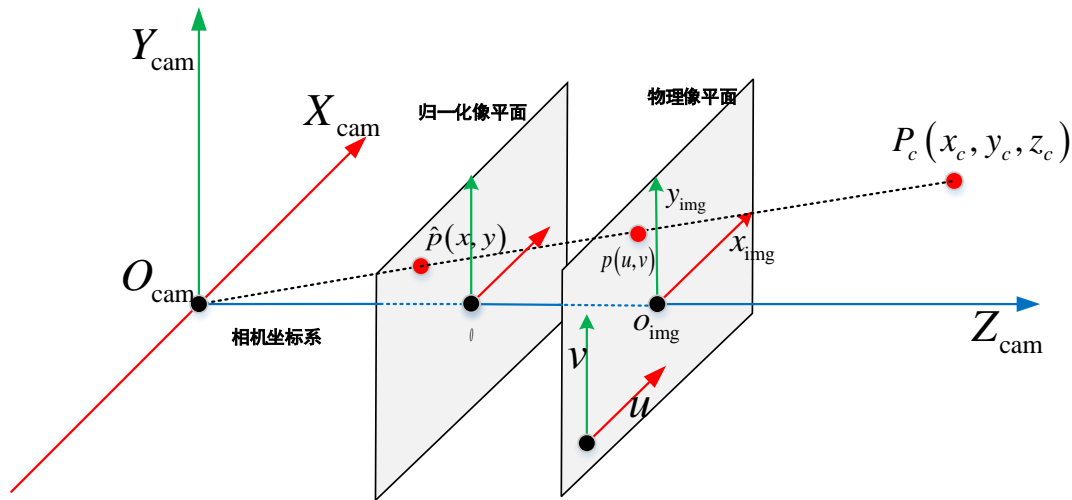


$$\mathbf{X}_w = \mathbf{R}^T \mathbf{X}_c - \mathbf{R}^T \mathbf{t}$$

针孔相机模型-内参数矩阵

相机坐标系到归一化像平面坐标系

归一化像平面是虚拟的平面坐标，它与物理像平面平行，且距离相机光心距离为1



针孔成像模型

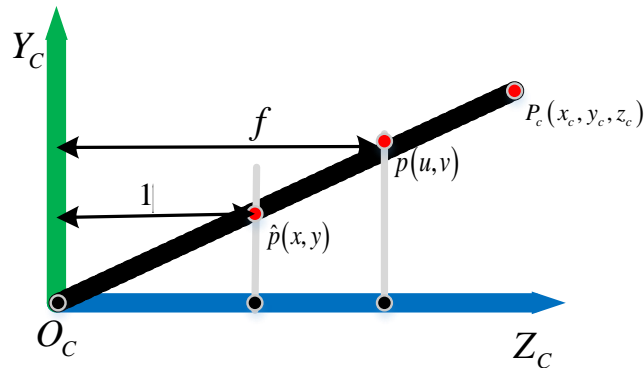
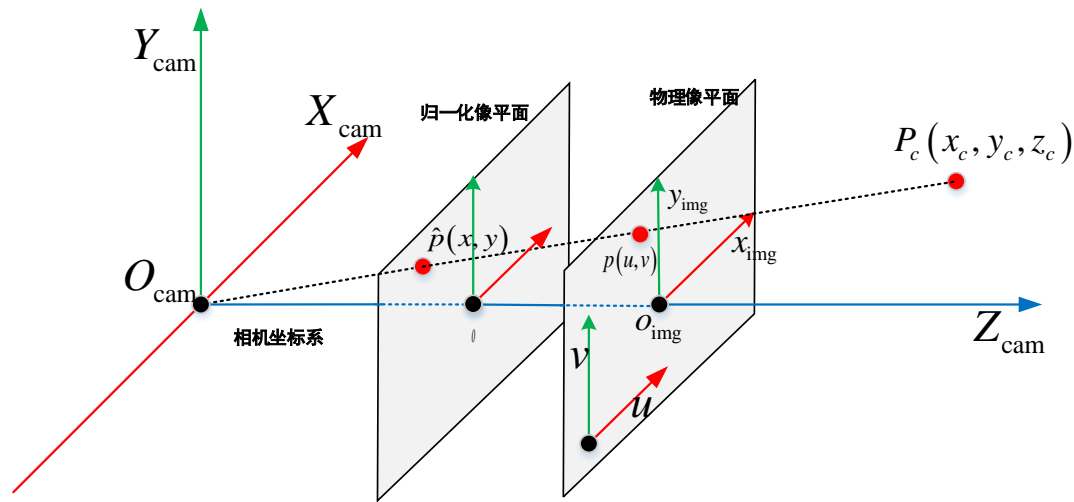
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_c}{z_c} \\ \frac{y_c}{z_c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

针孔相机模型-内参数矩阵

归一化像平面标系到物理像平面坐标系

物理像平面是实际存在的平面，它是相机CCD阵列所在的平面



针孔成像模型

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \alpha x \\ f \beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha x \\ f_\beta y \end{pmatrix}$$

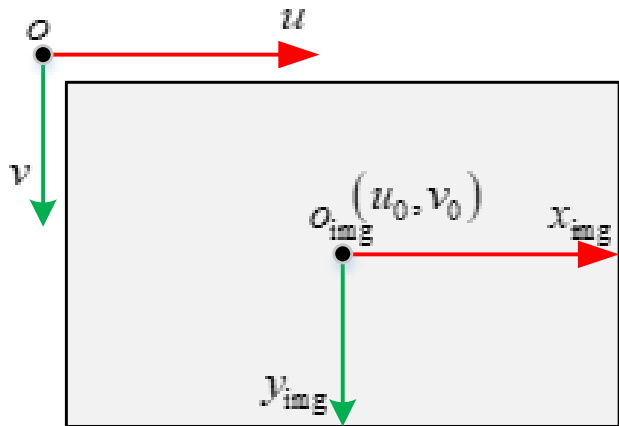
α, β ---单位是像素/毫米

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & f_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

针孔相机模型-内参数矩阵

物理像平面坐标系

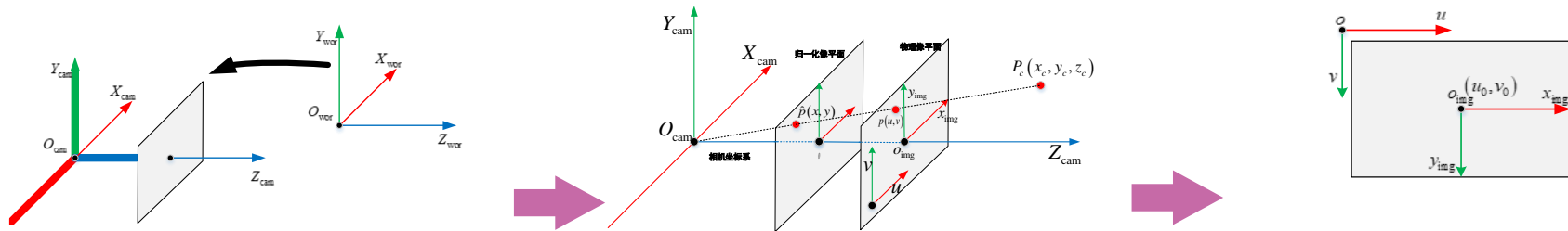
一般以左上角为坐标原点，需要进行坐标系平移



$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\alpha}x + u_0 \\ f_{\beta}y + v_0 \\ z_c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_{\alpha} & 0 & u_0 \\ 0 & f_{\beta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

一般情况下 $f = f_{\alpha} = f_{\beta}$

针孔相机模型-透视矩阵



$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

6个外参数 \mathbf{R}, \mathbf{t}

姿态估计

5个内参数 $f_\alpha = f_\beta, k_1, k_2, u_0, v_0$ 相机标定

$$\mathbf{P}^{3 \times 4} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}]$$

径向畸变系
数后面介绍

针孔相机模型-径向畸变

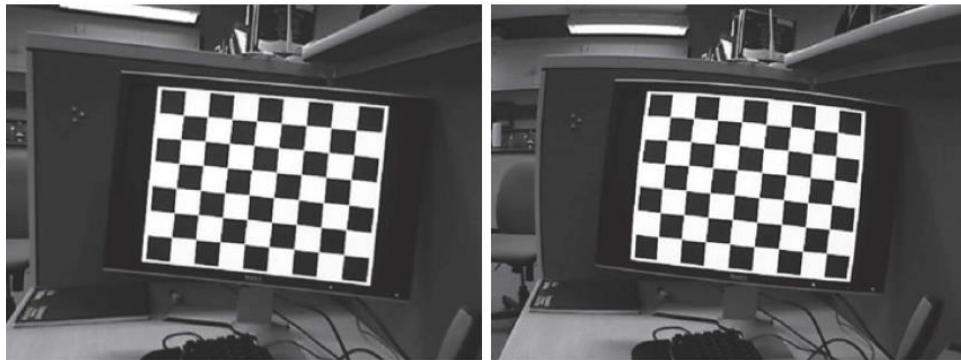
成因：透镜不能完全满足针孔模型假设

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, r^2 = x^2 + y^2$$

k_1, k_2 为径向畸变系数



$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$



直线变弯曲，由图像中心往外畸变程度越来越大

针孔相机模型-径向畸变

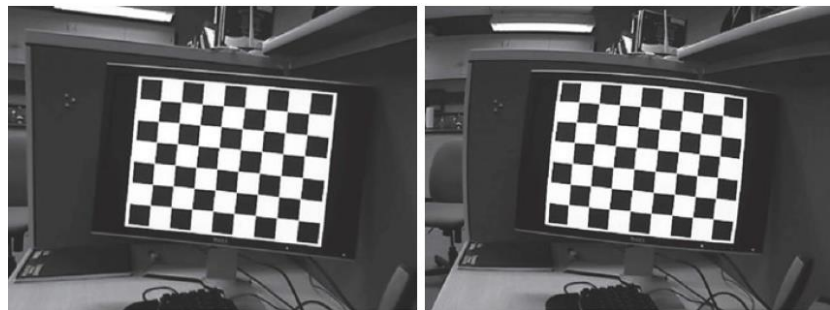
径向畸变系数的最小乘估计

理想情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$$

畸变情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u} - u_0 \\ \tilde{v} - v_0 \end{bmatrix}$$



$$f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

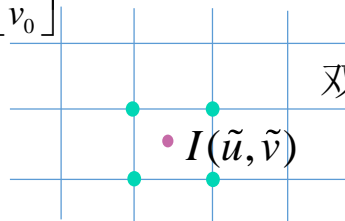
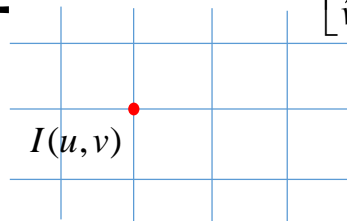
$$\begin{bmatrix} (u - u_0) r^2 & (u - u_0) r^4 \\ (v - v_0) r^2 & (v - v_0) r^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u} - u \\ \tilde{v} - v \end{bmatrix}$$

提供理想点 $[u \ v]^T$ 与畸变点 $[\tilde{u} \ \tilde{v}]^T$ 的对应关系
通过最小二乘进行估计

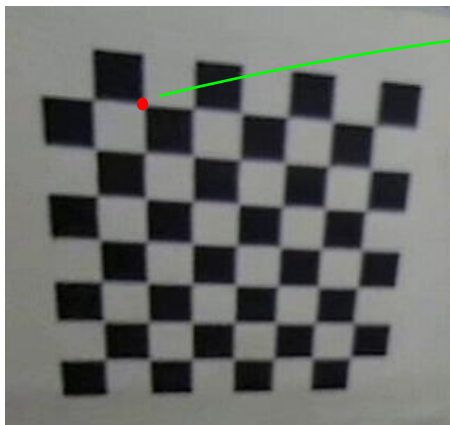
针孔相机模型-径向畸变

径向畸变矫正

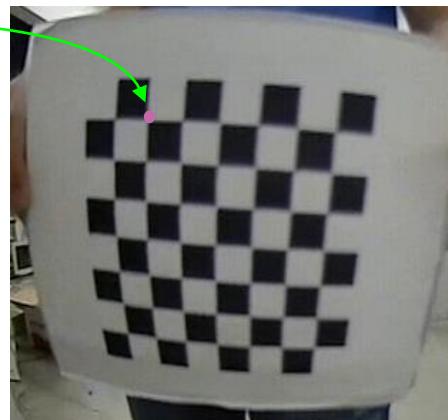
$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$



双线性/三线性插值



矫正后的图像



矫正前的图像

针孔相机模型-透视矩阵

Coding1

实现简单的相机C++类，完成相机投影过程的代码

✓ 针孔相机模型

- ✓ 针孔相机模型
- ✓ 径向畸变

✓ 2D-2D:对极几何

- ✓ 对极约束
- ✓ 本质/单应矩阵
- ✓ 直接线性变换法

2D-2D:对极几何-对极约束

对极约束 $x_2^T F x_1 = 0$ $\hat{x}_2^T E \hat{x}_1 = 0$

其中 $E = K_2^{-T} F K_1$ $\hat{x}_1 = K_1^{-1} x_1$ $\hat{x}_2 = K_2^{-1} x_2$

公式推导

$$P_1 = K_1 [I, 0] \quad P_2 = K_2 [R, t]$$

$$d_1 x_1 = K_1 X \quad \Rightarrow \quad d_1 K_1^{-1} x_1 = X = d_1 \hat{x}_1$$

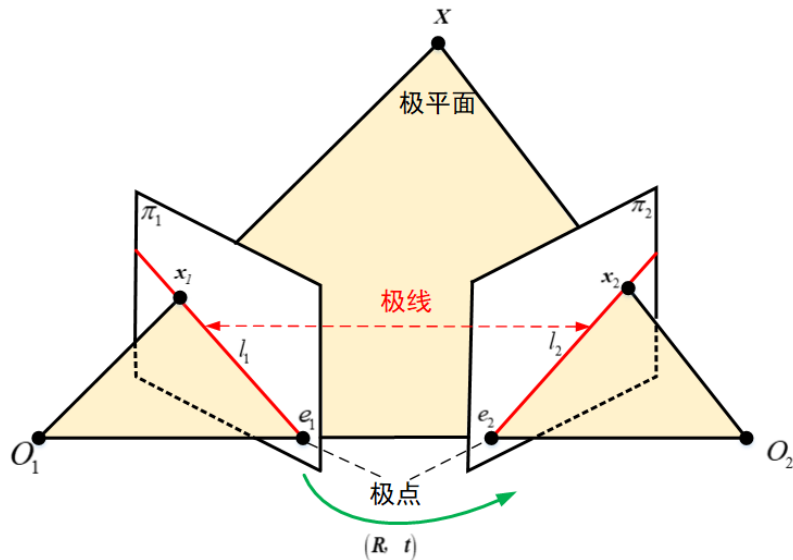
$$d_2 x_2 = K_2 (RX + t) \quad \Rightarrow \quad d_2 K_2^{-1} x_2 = RX + t = d_1 R \hat{x}_1 + t$$

$$\Rightarrow d_2 [t]_{\times} \hat{x}_2 = d_1 [t]_{\times} R \hat{x}_1 + [t]_{\times} t$$

$$\Rightarrow d_2 \hat{x}_2^T [t]_{\times} \hat{x}_2 = d_1 \hat{x}_2^T [t]_{\times} R \hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_2^T [t]_{\times} R \hat{x}_1 = \hat{x}_2^T E \hat{x}_1 = 0 \quad x_2^T K_2^{-T} [t]_{\times} R K_1^{-1} x_1 = x_2^T F x_1 = 0$$

$$E = [t]_{\times} R \quad F = K_2^{-T} E K_1^{-1}$$



本质矩阵: $E = [t]_{\times} R$

基础矩阵: $F = K_2^{-T} E K_1^{-1}$

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

基础矩阵性质

- ✓ 3×3 的矩阵，秩为2
- ✓ 具有7个自由度
- ✓ 奇异值为 $[\sigma_1, \sigma_2, 0]^T$
- ✓ 极线约束 $l_1 = x_2^T F, l_2 = F x_1$
 $x_2^T F x_1 = 0$

基础矩阵求解方法

- 直接线性变换法
 - 8点法
 - 最小二乘法
- 基于RANSAC的鲁棒方法


2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

直接线性变换法

对于一对匹配点 $\mathbf{x}_1=[u_1, v_1, 1]^T$, $\mathbf{x}_2=[u_2, v_2, 1]^T$ 根据对极约束 $\mathbf{x}_2^T \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = 0$,

$$(u_2 \quad v_2 \quad 1) \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

令 $\mathbf{f}=[F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}]^T$ 则有

$[u_1 u_2, u_2 v_1, u_2, u_1 v_2, v_1 v_2, v_2, u_1, v_1, 1] \mathbf{f} = 0$  每一对匹配点提供一个约束

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

当有 n 对匹配点时 $[u_1u_2, u_2v_1, u_2, u_1v_2, v_1v_2, v_2, u_1, v_1, 1]f = 0$

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}u_2^{(1)} & u_2^{(1)}v_2^{(1)} & u_2^{(1)} & v_2^{(1)}u_1^{(1)} & v_1^{(1)}v_2^{(1)} & v_2^{(1)} & u_1^{(1)} & v_1^{(1)} & 1 \\ u_1^{(2)}u_2^{(2)} & u_2^{(2)}v_2^{(2)} & u_2^{(2)} & v_2^{(2)}u_1^{(2)} & v_1^{(2)}v_2^{(2)} & v_2^{(2)} & u_1^{(2)} & v_1^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n)}u_2^{(n)} & u_2^{(n)}v_2^{(n)} & u_2^{(n)} & v_2^{(n)}u_1^{(n)} & v_1^{(n)}v_2^{(n)} & v_2^{(n)} & u_1^{(n)} & v_1^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Af = 0$$

- 要保证有唯一解至少需要8对匹配点
- $n=8$ 时, 若 A 非奇异, 则有唯一解, 称为8点法
- $n \geq 8$ 时, 可用最小二乘法求解

$A^T A$ 的最小特征值对应的特征向量即为最优解

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

奇异值约束

直接线性变化法无法保证基础矩阵的奇异值约束—有两个非0奇异值

根据奇异值约束对矩阵进行重构:

$$\min \|F - \hat{F}\|, \text{ wrt. } \text{svd}(F) = [\sigma_1, \sigma_2, 0]$$

$$\hat{F} = USV^T \quad \text{with } S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \text{对得到的基础矩阵 } \hat{F} \text{ 进行奇异值分解}$$



$$F = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0) V^T \quad \text{利用奇异值约束对基础矩阵进行重构}$$

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

Coding-2

实现基础矩阵的求解过程

- 1) 直接线性变换法
- 2) 奇异值约束

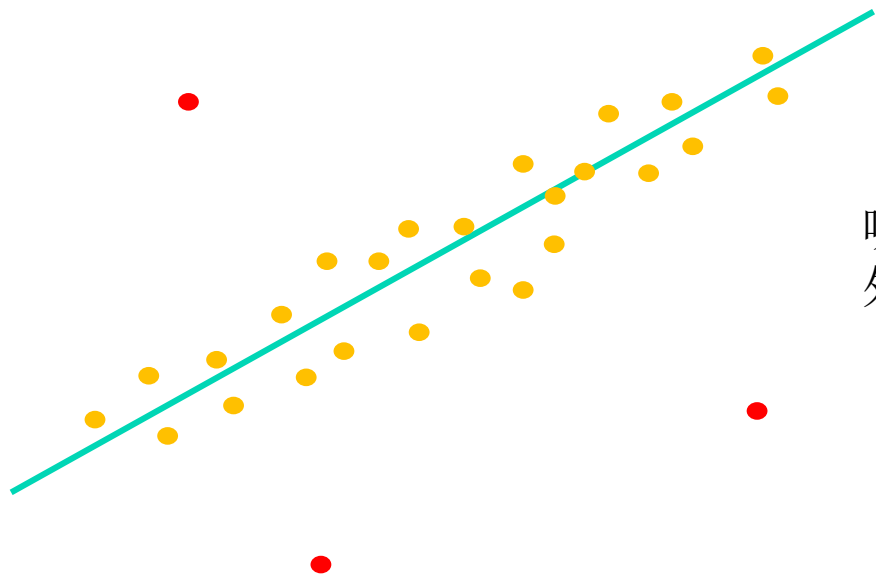
2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-随机一致性采样

解决样本中的外点问题，最多可处理50%的外点情况

● --外点

● --噪声



噪声可建模而外点不可建模
外点对最小二乘影响巨大

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-随机一致性采样

N -样本点个数

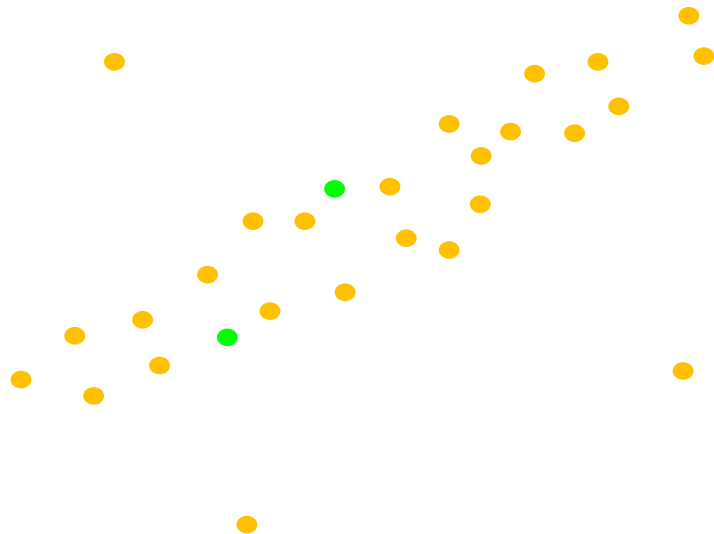
K -求解模型需要最少的点的个数

1. 随机采样 K 个点
2. 对该 K 个点拟合模型
3. 计算其它点到拟合模型的距离
小于一定阈值，当作内点，统计内点个数
4. 重复 M 次，选择内点数最多的模型
5. 利用所有的内点重新估计模型(可选)

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

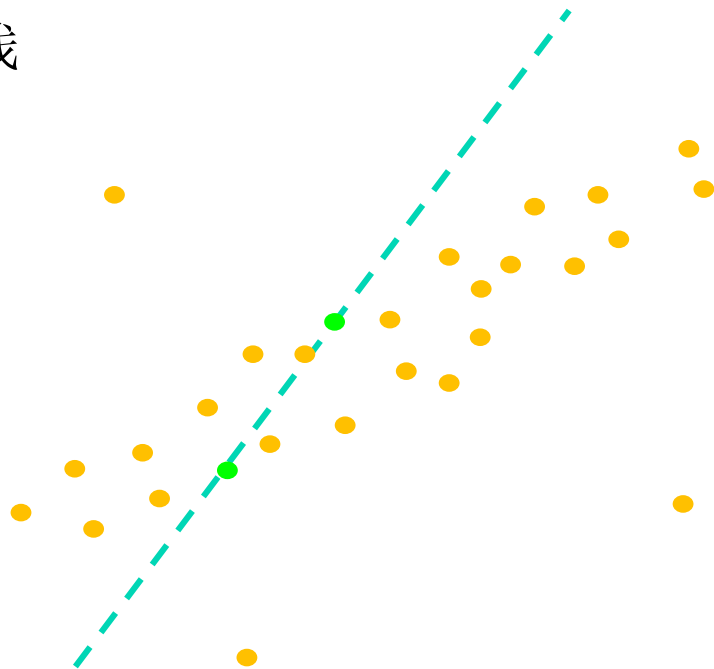
1. 随机选取 $K=2$ 个点



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

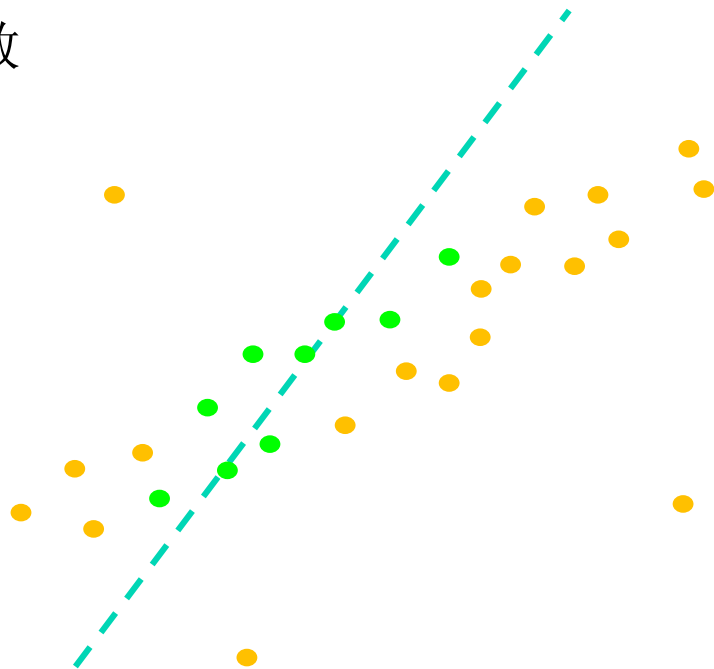
2. 拟合一条直线



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

3. 统计内点个数



● 内点

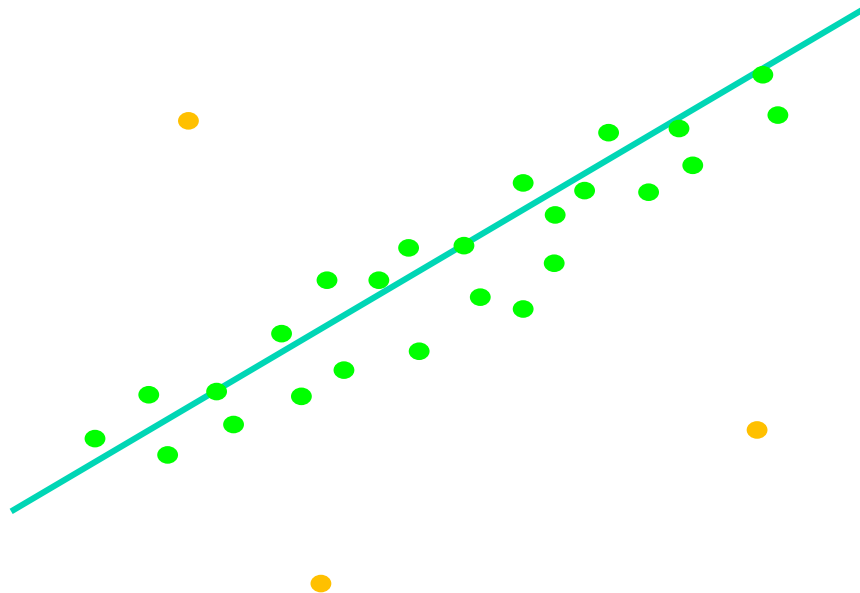
内点个数为9

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

4. 重复上述过程 M 次，找到内点数最大的模型

● —内点

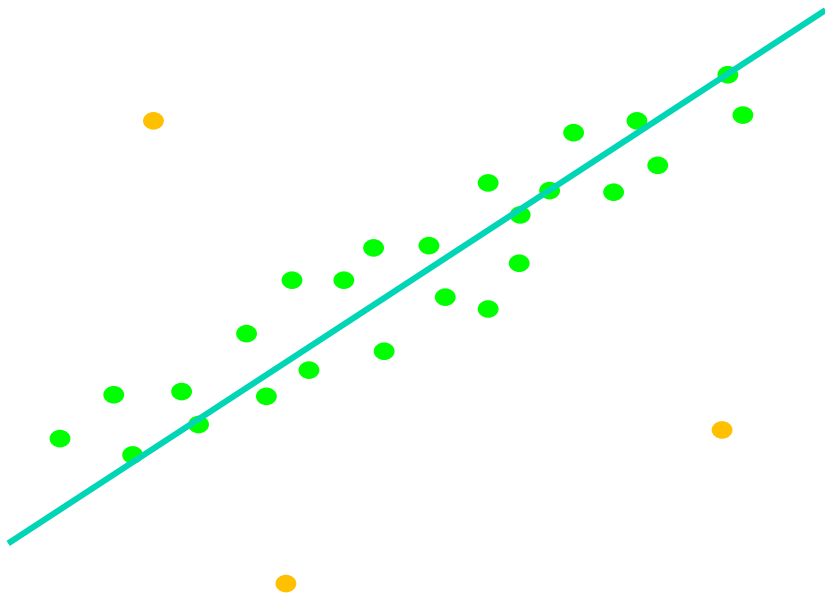


内点个数为25

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

5. 利用所有的内点重新估计直线



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-采样次数的计算

N - 样本点个数

K - 求解模型需要最少的点的个数

p - 表示内点的概率

p^K - K 个点都是内点概率

$1 - p^K$ - K 个至少有一个外点 (采样失败) 的概率

$(1 - p^K)^M$ - M 次采样全部失败的概率

$z = 1 - (1 - p^K)^M$ - M 次采样至少有1次成功的概率

$$M = \frac{\log(1 - z)}{\log(1 - p^K)}$$

计算 $p=0.9$, $K=8$ 时, 想要采样成功率达到 $z \geq 0.99$, 所需要的采样次数 M

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

RANSAC-估计基础矩阵

算法流程

1. 随机采样8对匹配点 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$
2. 8点法求解基础矩阵 \hat{F}
3. 奇异值约束获取基础矩阵 F
4. 计算误差，并统计内点个数
5. 重复上述过程，选择内点数最多的结果
6. 对所有内点执行2, 3, 重新计算 F

内点判断标准-Sampson Distance

$$d(x_1, x_2) = \frac{(x_2^T F x_1)^2}{(F x_1)_x^2 + (F x_1)_y^2 + (x_2^T F)_x^2 + (x_2^T F)_y^2}$$

$$d(x_1, x_2) < \tau$$

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

Coding-3

RANSAC 估计基础矩阵 F

2D-2D:对极几何-本征矩阵 E

本征矩阵性质

- ✓ 3×3 的矩阵, 秩为2
- ✓ 具有5个自由度
- ✓ 奇异值为 $[\sigma, \sigma, 0]^T$

求解基础矩阵 F



$$\hat{E} = K_2^T F K_1$$

$$\hat{E} = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0) V^T$$



$$E = U \text{diag}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right) V^T$$

2D-2D:对极几何-本征矩阵 E

相机姿态的恢复

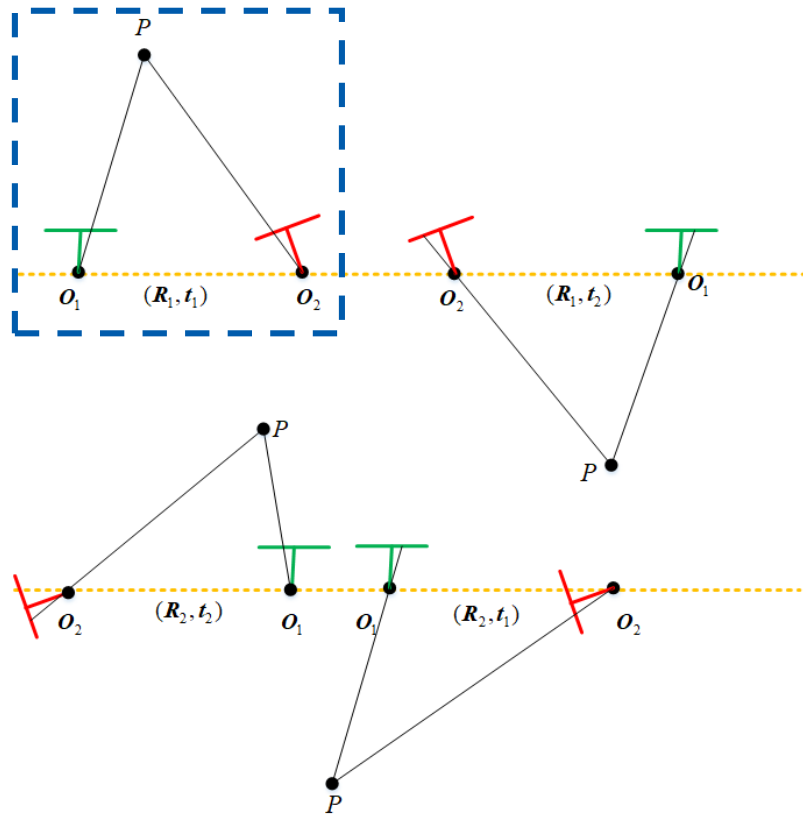
$$E = U \Sigma V^T, \Sigma = \text{diag}(\sigma, \sigma, 0)$$

$$t_1 = U(:, 2) \quad R_1 = UR_z\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$t_2 = -U(:, 2) \quad R_2 = UR_z^T\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_z^T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

共有4种情况 $(R_1, t_1), (R_1, t_2), (R_2, t_1), (R_2, t_2)$



2D-2D:对极几何-本征矩阵 E

相机姿态的恢复-选择正确的相机姿态

相机的世界坐标 O_1, O_2

$$O_1 = -R^T t = 0, \quad O_2 = -R^T t$$

相机的世界坐标中的朝向 d_1, d_2

$$d_1 = [0, 0, 1]^T$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & -R^T t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = r_3^T$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T \end{bmatrix}$$

利用相机姿态 R, t 和匹配点 p_1, p_2 进行三角量测得到三维点 P

P 需满足同时位于两个相机的前方:
方法1:

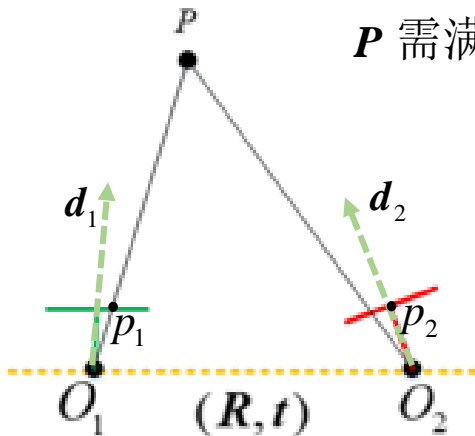
$$(P - O_1)^T d_1 > 0$$

$$(P - O_2)^T d_1 > 0$$

方法2:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = RP + t, \quad z_c > 0$$

对两个相机成立



2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

Coding-3

实现本征矩阵中恢复相机参数

2D-2D:对极几何-单应矩阵 H

空间中特征点位于一平面上

$$n^T X + d = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{n^T X}{d} = 1$$

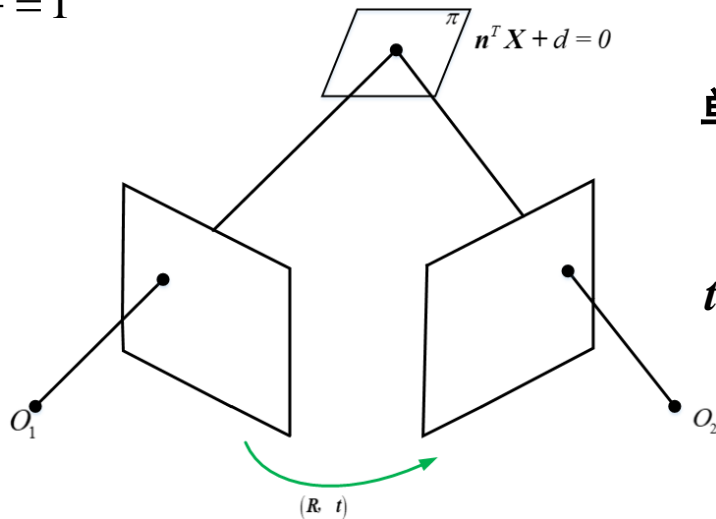
$$x_2 = K_2 (RX + t)$$

$$= K_2 \left(RX + t \cdot \left(-\frac{n^T X}{d} \right) \right)$$

$$= K_2 \left(R - \frac{tn^T}{d} \right) X$$

$$= K_2 \left(R - \frac{tn^T}{d} \right) K_1^{-1} x_1$$

$$x_2 = Hx_1, \quad H = K_2 \left(R - \frac{tn^T}{d} \right) K_1^{-1}$$



单应矩阵是满秩的

$$x_1 = H^{-1} x_2$$

$t = 0$ 时, 对应纯旋转

$$H = K_2 R K_1^{-1}$$

即单应矩阵有两种情况:

1. 空间点位于平面
2. 相机纯旋转

2D-2D:对极几何-单应矩阵 H

直接线性变换法

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$u_2 = \frac{H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$
$$v_2 = \frac{H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$



8个自由度，每对点有两个约束

$$H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13} - H_{31}u_1u_2 - H_{32}u_2v_1 - H_{33}u_2 = 0$$

$$H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23} - H_{31}u_1v_2 - H_{32}v_1v_2 - H_{33}v_2 = 0$$

令 $H_{33}=1$ 总共需要4对特征点

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & v_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^{(1)}u_2^{(1)} & -u_2^{(1)}v_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & u_1^{(1)} & v_1^{(1)} & 1 & -u_1^{(1)}v_2^{(1)} & -v_1^{(1)}v_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(4)} & v_1^{(4)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^{(4)}u_2^{(4)} & -u_2^{(4)}v_1^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & u_1^{(4)} & v_1^{(4)} & 1 & -u_1^{(4)}v_2^{(4)} & -v_1^{(4)}v_2^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_2^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ u_2^{(4)} \\ v_2^{(4)} \end{pmatrix}$$

2D-2D:对极几何-单应矩阵 H

RANSAC-估计单应矩阵

算法流程

1. 随机采样4对匹配点 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$
2. 8点法求解基础矩阵 H
3. 计算误差，并统计内点个数
4. 重复上述过程，选择内点数最多的结果
5. 对所有内点执行3, 4, 重新计算 H

内点判断标准 $E(x_1, x_2, H) < \tau$

$$E(x_1, x_2, H) = d(x_1, H^{-1}x_2)^2 + d(x_2, Hx_1)^2$$



感谢各位聆听!
Thanks for Listening