Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Informática

Estructuras Discretas

“*Algoritmo de* Karatsuba*”*

**Estudiantes:**

Braslyn Rodríguez Ramírez

Andres Zuñiga Calderon

**Profesor:**

Carlos Loría Sáenz

I Ciclo, 2019

**Índice**

**Pag**

**Introduccion\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_3**

**Marco Teorico\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_4**

**-Complemento\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_7**

**Conclusión\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_8**

**Bibliografia\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_9**

**Introducción**

Anatolii Alexeevich Karatsuba el diseñador del algoritmo que lleva parte de su nombre karatsuba , es un algoritmo destinado a mejorar la forma de multiplicar número grandes. Nace en 1937 fue un ruso matemático especializado en la teoría analítica de los números, este mismo fue jefe del Departamento de Teoría de Números, Instituto Steklov de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Rusia, también Profesor del Departamento de "Análisis Matemático", Facultad de Mecánica y Matemáticas, M. V. Lomonosov Universidad Estatal de Moscú (MSU).

Escribió un libro de texto sobre una teoría analítica de números en 1975, de este campo de estudio encontró un algoritmo al que llamó Karatsuba, El primer método general y algoritmo para la multiplicación rápida de números Grandes: el método de "dividir y vencer" que sirvió como fuente de una nueva dirección de investigaciones relacionadas con cálculos rápidos. Es para calcular la multiplicación de dos números enteros, también reduce el número de cálculos de multiplicación de coeficientes. Este algoritmo es más eficiente que la multiplicación estándar porque los costos totales de uso son menores que el costo total de la multiplicación computacional. La forma estándar en que esto se logra es porque los cálculos de suma toman menos tiempo que los cálculos de multiplicación, el algoritmo recibe dos grandes números X y Z para ser multiplicados juntos usando tres multiplicaciones de números más pequeños derivados de X y Z que tienen la mitad de los dígitos de X y Z.

El objetivo de este reporte es demostrar que el Algoritmo de Antolii Karatsuba es más eficiente que el algoritmo clásico de multiplicación, mediante el uso de tiempos de corrida teorico y empirico.

**Marco Teórico**

¿Cuál es la utilidad de un Algoritmo como el de Karatsuba? Pues este algoritmo reduce la multiplicación de dos números de n dígitos, como máximo, multiplicaciones de un digito en general.

¿Cuál es la técnica utilizada en este algoritmo?

La técnica utilizada es “Divide y vencerás”: Se descompone el problema en cierto número de subproblemas obviamente más pequeñas del mismo tipo además resolverlos de forma independiente para que al final se combinen las soluciones obtenidas y se obtenga la solución del problema original.

Como resolver una multiplicación usando Karatsuba:

Algoritmo divide y vencerás simple

Como primer paso tenemos el de dividir:

Z = 56781234 = zi \* 10\*\*4 + zd // Donde zi es 5678 y zd es 1234

W = 11352468 = wi \* 10\*\*4 + wd // Donde wi es1135 y wd es 2468

Como segundo paso tenemos el de combinar:

Recordemos zi = 5678, zd = 1234, wi = 1135, wd = 2468

Z \* W = (zi \* 10\*\*4 + zd) \* (wi \* 10\*\*4 + wd)

= zi \* wi \* 10\*\*8 + (xi \* wd + xd \* wi) \* 10\*\*4 + zd \* wd

Todo lo anterior, pero de una forma más general puede ser representado de esta forma:

Donde n = cantidad de dígitos

Z = 56781234 = zi \* 10\*\*n/2 + zd

W = 11352468 = wi \* 10\*\*n/2 + wd

Z \* W = (zi \* 10\*\*n/2 + zd) \* (wi \* 10\*\*n/2 + wd)

= zi \* wi \* 10\*\*n + (xi \* wd + xd \* wi) \* 10\*\*n/2 + zd \* wd

Dando un ejemplo a lo anterior dicho:

X = 8765                                                a = 87, b = 65

Y = 4321                                                c = 43, d = 21

n = 4

Paso 1: a \* c = 87 \* 43 = 3741

Paso 2: b \* d = 65 \* 21 = 1365

Paso 3: (a + b) \* (c + d) = 152 \* 64 = 9728

Paso 4: paso 3 – paso 2 – paso 1= 9728 - 1365 - 3741 = 4622

Finalmente, se realiza la siguiente suma:

paso 1 \* 10\*\*n + paso 2 + paso 4 \* 10\*\*n/2

Al realizar las anteriores operaciones obtenemos esto:

                37410000

                       1365

                   462200

            +--------------------

                    37873565

Que aprendemos de esto que si X y Y son números suficientemente grandes se utiliza el algoritmo de Karatsuba, de lo contrario es mejor realizar la multiplicación clásica.

Cuando realizamos una multiplicación con el método de la escuela muchas veces resulta fácil si son números pequeños, pero pasaría todo lo contrario si tomamos dos números grandes y los intentamos multiplicar, para dar una idea de porqué es más rápido Karatsuba que una multiplicación natural, Utilizaremos el ejemplo bastante grande:

Tenemos a X = 56781234 y W = 11352468, el resultado de multiplicarlos sería:

                56781234

                       11352468

            \*--------------------

                     454249872

340687404-

227124936--

113562468---

283906170‬----

170343702‬-----

  56781234------

  56781234------

+--------------------

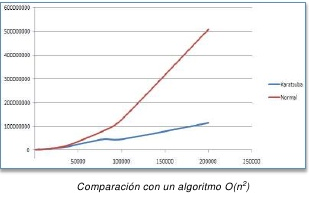
644607141985512

En este punto se mostrará la gráfica obtenida por nuestro sistema con respecto a la multiplicación natural y el método “divide y conquiste” de karatsuba

Gráfico Tiempos\_Natural\_Karatsuba.csv

El grafico muestra datos erróneos ya que karatsuba debería ser menor que una multiplicación natural y en nuestro sistema ocurre lo contrario.

Pero en este otro grafico podemos ver como la línea roja que va creciendo es la multiplicación natural O(n²) y la otra la de forma logarítmica O(**nlog23**) siendo esta la de la función de Karatsuba



(slideshare,2019)

Complemento

Enel trabajo programada de Karatsuba había que implementar el complemento para tomar un numero

A y restárselo a C de esta forma C + ~A, Pero cómo realiza lo del complemento:

Tenemos que se quiere complementar a la Base una cifra de n dígitos, entonces se toma el máximo numero posible para ese sistema numérico con tamaño n.

Por ejemplo:

Numero = 333 Base = 10, ese número tiene un tamaño 3 que seria cada uno de los dígitos que conforman a Numero.

El máximo numero en base 10 con tamaño n, en este caso n = 3, sería el 999, para obtener el complemento todo se coloca de esta forma:

1. -> máximo numero posible

333 -> Cifra original

- -----------------------

666 ->Complemento de la cifra original

Conclusión

Finalmente, la tarea programada nos trae muchos conocimientos que al inicio de este curso no teníamos, implementar suma, multiplicación, resta, división entre otras funcionalidades en una clase fue algo que en lo personal fue un reto ya que era el primer curso donde se veía como programar en Python, de este trabajo se aprendió que siempre habrá la forma de mejorar un algoritmo como por

ejemplo Karatsuba con la multiplicación natural, es interesante que al dividir ciertos datos y

combinarlos sea más fácil y eficiente resolver el problema de la multiplicación y mejorar el

tiempo al pasar de n² a **nlog23**

Otros algoritmos vuelven más eficientes la multiplicación siendo mejores que hasta el mismo karatsuba en tiempo, pero el enriquecimiento de aprender sobre este algoritmo nos hace poner en práctica muchos de los temas vistos en clase.

Bibliografía

Karatsuba Anatolii Alexeevich (s.f).Recuperado 10 abril 2019, de <http://www.miras.ru/%7Ekaratsuba/index_e.html>

Karatsuba Multiplication -- from Wolfram MathWorld. (s.f.). Recuperado 15 abril, 2019, de <http://mathworld.wolfram.com/KaratsubaMultiplication.html>

Vega,C.(2014,7 abril).Algoritmo Karatsuba Recuperado 12 abril, 2019 de https://prezi.com/esoyizyljwpr/algoritmo\_karatsuba/

Restar usando la suma (método de los complementos). (s.f.). Recuperado 9 junio, 2019, de https://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/restar-usando-suma.html

Colaboradores de Wikipedia. (2019, 14 febrero). Algoritmo de Karatsuba - Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado 1 junio, 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo\_de\_Karatsuba