

MATEMÁTICAS II

PROGRAMA ADMINISTRACIÓN PÚBLICA TERRITORIAL

**JOSÉ MIGUEL CUBILLOS MUNCA
LUIS MIGUEL CABRERA**



ESCUELA SUPERIOR DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA

ESCUELA SUPERIOR DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA



Director

HONORIO MIGUEL HENRIQUEZ PINEDO

Subdirector académico

CARLOS ROBERTO CUBIDES OLARTE

Decano de pregrado

JAIME ANTONIO QUICENO GUERRERO

Coordinador Nacional de A.P.T

JOSE PLACIDO SILVA RUIZ

ESCUELA SUPERIOR DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA

JOSÉ MIGUEL CUBILLOS MUNCA

LUIS MIGUEL CABRERA

Bogotá D.C., Noviembre de 2008

CONTENIDO

Unidad 1. Integración Indefinida

Introducción a la Unidad	5
Objetivos	6
Ideas Clave	7
Mapa Conceptual	8
1.1 Historia del cálculo integral	9
1.2 Antiderivada e integral indefinida	12
1.3 Técnicas de integración: estándar y sustitución	13
1.4 Aplicaciones de la integración indefinida	17
1.5 Práctica con Derive	21
Actividades de aprendizaje	23
Autoevaluación	26
Síntesis	29
Bibliografía y Webgrafía	30
Glosario	31

Unidad 2. Integral Definida

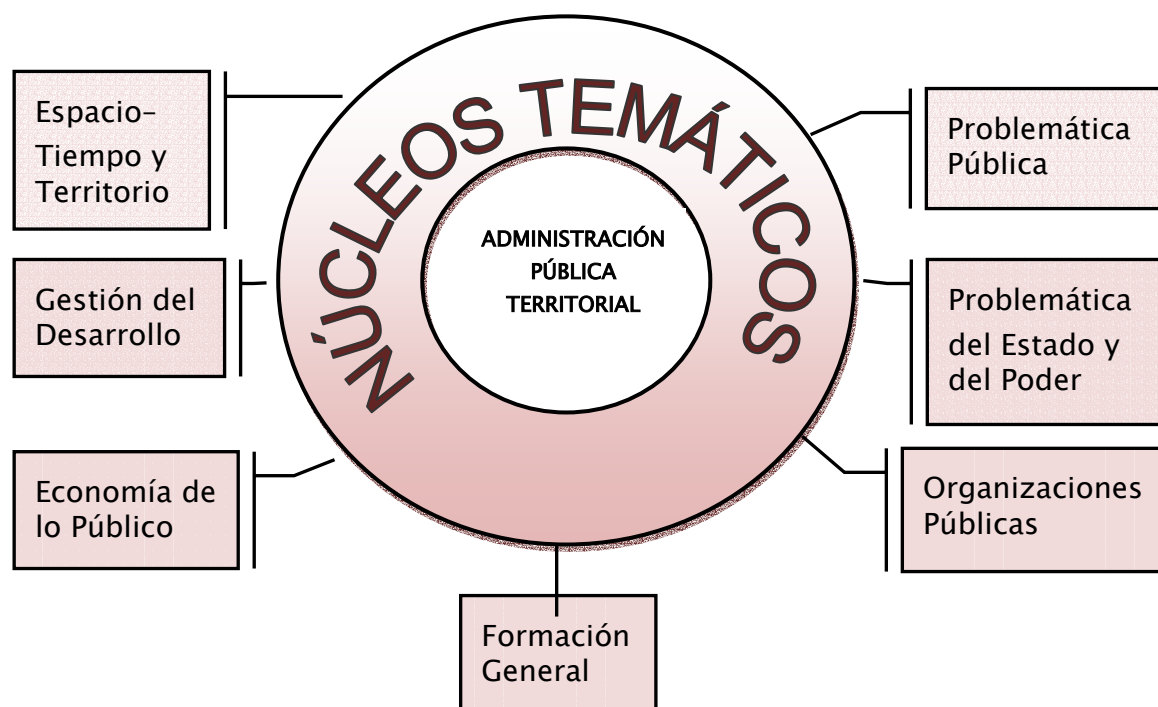
Introducción a la Unidad	34
Objetivos	35
Ideas Clave	36
Mapa Conceptual	37
2.1 Cálculo del área mediante rectángulos y trapecios	38

2.2 Integración definida	42
2.3 Aplicaciones de la integración definida	44
2.4 Práctica con Integral y derive	56
Actividades de aprendizaje	60
Autoevaluación	64
Síntesis	67
Bibliografía y Webgrafía	68
Glosario	69
Unidad 3. Matrices	
Introducción a la Unidad	72
Objetivos	73
Ideas Clave	74
Mapa Conceptual	75
3.1 Matrices para representar sistemas sociales	76
3.2 Operaciones con matrices	86
3.3 Práctica con Derive	96
Actividades de aprendizaje	98
Autoevaluación	100
Síntesis	101
Bibliografía y Webgrafía	102
Glosario	103

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Introducción a la Unidad	106
Objetivos	107
Ideas Clave	108
Mapa Conceptual	109
4.1 Solución matricial de sistemas de ecuaciones lineales	110
4.2 Matriz de insumo - producto	114
4.3 Práctica con Derive	124
Actividades de aprendizaje	125
Autoevaluación	129
Síntesis	131
Bibliografía y Webgrafía	132
Glosario	133

DE LOS NÚCLEOS TEMÁTICOS Y PROBLEMÁTICOS



El plan de estudios del Programa de Administración Pública Territorial, modalidad a distancia, se encuentra estructurado en siete núcleos temáticos. Éstos, a su vez, se constituyen en los contenidos nucleares del plan de formación que, en la exposición didáctica del conocimiento, se acompañan de contenidos complementarios específicos.

Cada uno de los siete núcleos temáticos que componen el programa tiene una valoración relativa en número de créditos y, en consecuencia, varía también en el número de asignaturas que lo conjugan. El primer momento en cualquier proceso de formación ha de establecer las particularidades del programa, de ahí que sea necesario dar a conocer los núcleos temáticos con su respectiva valoración en número de créditos: Problemática pública, once (11) créditos; Problemática del estado y del poder, 23 créditos; Organizaciones públicas, 24 créditos; Espacio-tiempo y territorio, 22 créditos; Gestión del desarrollo, 16 créditos; Economía de lo público, 18 créditos; y Formación general, 21 créditos.

De igual manera, se debe reconocer que el plan de estudios se cimienta en el principio de la problematización. En otras palabras, la formación en Administración Pública Territorial parte del hecho de que la disciplina se encuentra en constante cambio teórico y práctico; lo cual genera, a su vez, problemas multifacéticos que implican la formación de profesionales con capacidad de comprender, explicar y resolver los distintos textos y contextos que conforman la administración pública.

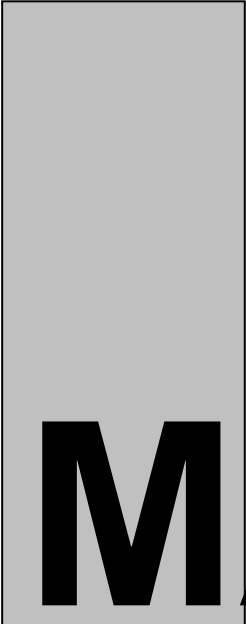
EL TRABAJO DEL TUTOR

El tutor tendrá libertad de cátedra en cuanto a su posición teórica o ideológica frente a los contenidos del módulo, pero el desarrollo de los contenidos de los módulos son de

obligatorio cumplimiento por parte de los tutores. Los Tutores podrán complementar los módulos con lecturas adicionales, pero lo obligatorio para el estudiante frente a la evaluación del aprendizaje son los contenidos de los módulos; es decir, la evaluación del aprendizaje deberá contemplar únicamente los contenidos de los módulos. Así mismo, la evaluación del Tutor deberá diseñarse para dar cuenta del cubrimiento de los contenidos del módulo.

El Tutor debe diseñar, planear y programar con suficiente anticipación las actividades de aprendizaje y los contenidos a desarrollar en cada sesión de tutoría (incluyendo la primera), y diseñar las actividades para todas las sesiones (una sesión es de cuatro horas tutoriales). También debe diseñar las estrategias de evaluación del trabajo estudiante que le permita hacer seguimiento del proceso de autoaprendizaje del estudiante. Los módulos (asignaturas) de APT son de dos créditos (16 horas de tutoría grupal presencial por crédito para un total de 32 horas), tres créditos (48 horas de tutoría grupal presencial) y de 4 créditos (64 horas de tutoría grupal presencial, distribuidas así:

MÓDULO DE MATEMÁTICAS II (3 créditos)						
No. Créditos	Horas por crédito	Total horas Tutoría Grupal	No. de sesiones	Horas por sesión	No. mínimo de encuentros tutoriales*	No. max. sesiones por encuentro
2	16	32	8	4	2	8
3	16	48	12	4	3	12
4	16	64	16	4	4	16
<p>* El número de encuentros se programara de acuerdo con las distancias y costos de transporte de la Sede Territorial al CETAP, por ejemplo para los casos de los CETAP de Leticia, San Andrés, Mitú, Puerto Inírida y Puerto Carreño, se podrán programar un mínimo de dos encuentros para un módulo de 2 Créditos (16 horas por encuentro), tres encuentros para un módulo de 3 créditos y cuatro encuentros para un módulo de 4 créditos.</p> <p>Encuentro: número de veces que se desplaza un Tutor a un CETAP para desarrollar un módulo.</p> <p>Sesión: número de horas por cada actividad tutorial, por ejemplo: 8-12 a.m., 2-6 p.m., 6-10 p.m.</p>						



MATEMÁTICAS II

INTRODUCCIÓN

El módulo Matemática II, hace parte del núcleo de Fundamentación cuantitativa. Busca el desarrollo del razonamiento matemático algorítmico necesario para la planificación y toma de decisiones, lo mismo que la apropiación de herramientas matemáticas necesarias para los procesos de formación y aprendizaje del programa.

Para el estudio del módulo con un nivel de aprovechamiento óptimo, es necesario el apoyo de un software educativo de libre uso, el cual puede ser copiado e instalado en el computador que disponga el estudiante en su casa o trabajo, lo mismo que en la ESAP y que se encuentra en el CD-ROM de apoyo. Otro software es el DERIVE el cual sólo puede ser utilizado en los equipos de la escuela, dadas las limitaciones de licenciamiento del programa.

El contenido básico del módulo abarca los elementos principales del cálculo integral, el álgebra matricial y lineal, sin embargo no se centra solo en el desarrollo de los conceptos matemáticos, sino en las aplicaciones a las áreas pertenecientes al campo de la administración pública; por ello, se presentan las ideas y definiciones básicas sin ahondar en demostraciones, centrándose principalmente en los ejemplos de aplicación. Por esta razón también se omiten algunas funciones como las trigonométricas, por su escasa aplicabilidad en este campo.

La estructura de estos módulos fue desarrollada siguiendo la pauta de autoría para la elaboración de las unidades del programa de fortalecimiento institucional de la ESAP promovido por Vrije Universiteit (Amsterdam), NUFFIC y la Universitat de Barcelona.

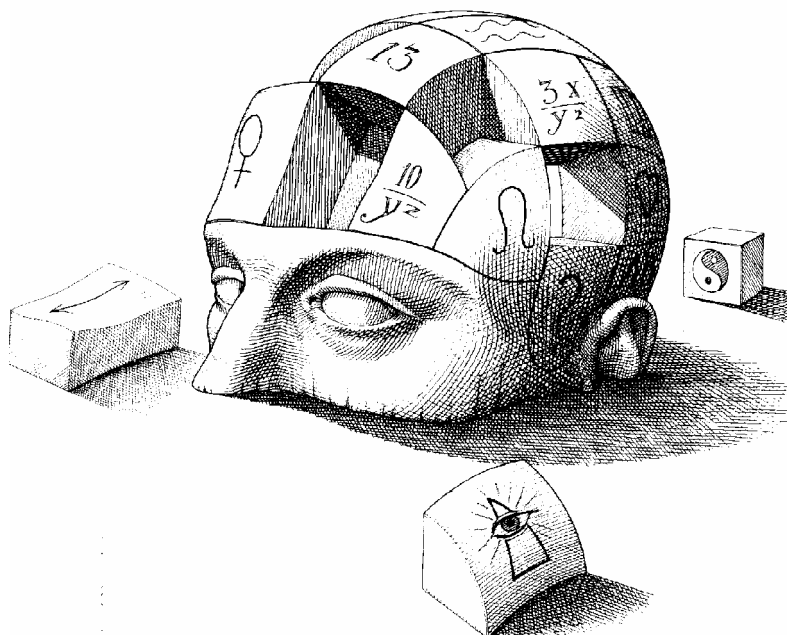
Es importante contemplar que cada unidad debe ser considerada como un objeto de aprendizaje revisable y mejorable de manera permanente, teniendo en cuenta la rapidez del cambio tecnológico ligado a la temática y capitalizando las sugerencias, críticas y recomendaciones de los tutores de los programas, así como de los estudiantes. Para ello habrá un buzón permanente de recolección de sugerencias, activo durante toda la vida de los módulos. Apreciados docentes/tutores y estudiantes de este módulo: nunca dejen la crítica a este módulo solamente en su pensamiento o en su discusión local, háganla llegar al autor. Aunque sólo se les puede prometer el reconocimiento dentro de los agradecimientos de las siguientes versiones de este módulo, su impacto en el aprendizaje de muchos colombianos si será notorio. Favor enviar sus comentarios a miguel.cubillos@esap.edu.co y si sus sugerencias son acogidas recibirá una versión PDF actualizada de todo el módulo a vuelta de correo electrónico.

Unidad 1. Integración Indefinida

Introducción a la Unidad

En el módulo de Matemática I se estudiaron las aplicaciones del cálculo diferencial a las áreas relacionadas con la Administración Pública. Ahora estudiaremos el proceso de integración orientado al estudio de las aplicaciones del mismo tipo, es decir: Costo, renta nacional, consumo y ahorro, excedentes del productor y consumidor y relación Ingreso Vs. Costo. Esta unidad se centrará en el proceso de integración indefinida y sus aplicaciones, mientras el próximo se dedicará a la integración definida.

Al igual que para el módulo de Matemática I, este módulo exige unos conocimientos previos que se deben haber logrado durante el bachillerato; para este capítulo y el siguiente son: manejo básico de las operaciones algebraicas, derivación e integración. Como parte del objeto del curso son las aplicaciones del cálculo integral y no la enseñanza del proceso de integración, entonces este último se abordará tangencialmente, centrando el análisis en las aplicaciones. Igual criterio será tenido en cuenta para la evaluación del curso.



Unidad 1. Integración Indefinida

Objetivo general

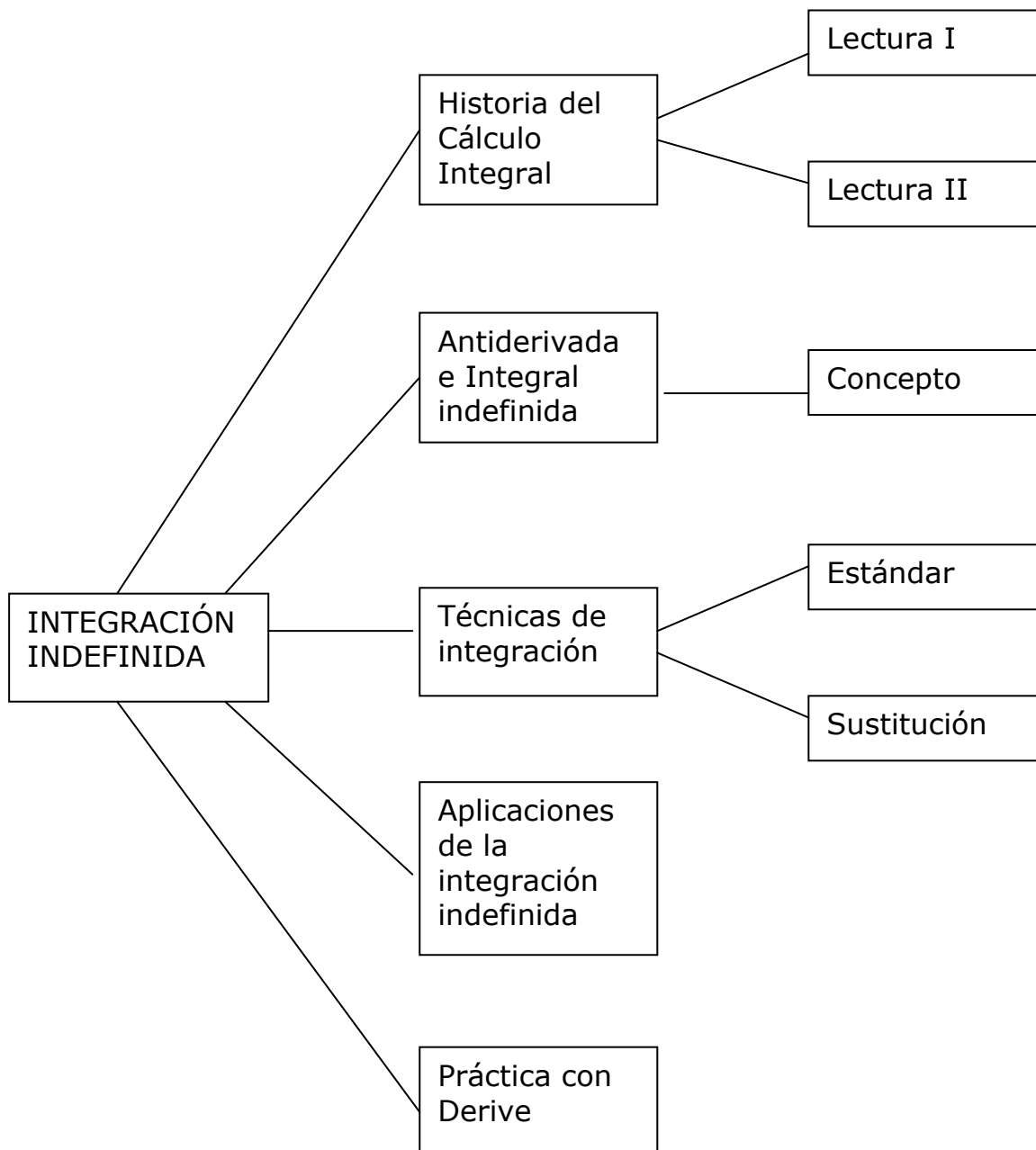
El estudiante aplicará el proceso de integración indefinida para resolver problemas relacionados con el costo, la renta nacional, el consumo y el ahorro, para ello se apoyará en un software de matemática.

Ideas clave

- El proceso de determinar una función cuya derivada se conoce se llama integración y la función que se busca se llama integral indefinida o antiderivada de la función propuesta.
- El cálculo integral es una herramienta invaluable en el estudio de la naturaleza que ha logrado un aporte significativo al desarrollo de la humanidad, por su aplicabilidad y por su antigüedad. (Lectura 1).
- El proceso de calcular una integral lleva a dos caminos: a encontrar las antiderivadas y al cálculo de áreas bajo una curva. (Lectura 2).
- Cuando pretendemos simplemente encontrar la antiderivada estamos abordando la integración indefinida. (Explicación 1).
- Del proceso general de integración usando las antiderivadas conocidas podemos conformar unas tablas de integrales que nos proporcionan las fórmulas para encontrar la integral de las funciones más comunes. Véase la tabla 1.
- Además del proceso general de integración, el cálculo nos proporciona otros métodos como: sustitución, partes, fracciones parciales y el método de aproximaciones que se estudia en el próximo capítulo.
- La integral indefinida proporciona algunas aplicaciones útiles al Administrador Público, especialmente en el campo de la economía, como son: el costo, la renta nacional, el consumo y el ahorro. (Véanse los tres últimos en la explicación 2)
- En el módulo de Matemática I se explicó el enfoque marginal con el cual se obtiene el nivel de producción que maximiza las utilidades. Se señaló que una expresión del ingreso marginal (MR) es la derivada de la función del ingreso total, donde la variable independiente es el nivel de producción. De manera semejante, se afirmó que una expresión del costo marginal (CM) es la derivada de la función del costo total. Si se tiene una expresión del ingreso o del costo marginal, las antiderivadas respectivas serán las funciones de ingreso y costo totales. Véanse los ejemplos 3 al 6.

Unidad 1. Integración Indefinida

Mapa conceptual



Unidad 1. Integración Indefinida

Contenidos

1.1 Historia del cálculo integral

Lectura 1. El Legado de las Matemáticas¹

“Del legado de las matemáticas, el cálculo infinitesimal es, sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza. El cálculo infinitesimal tiene dos caras: diferencial e integral; y un oscuro interior donde, como demonios, moran los infinitos: grandes y pequeños. Los orígenes del cálculo integral se remontan, como no, al mundo griego; concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes calculó en el siglo III a.c.. Aunque hubo que esperar mucho tiempo hasta el siglo XVII -¡2000 años! para que apareciera -o mejor, como Platón afirmaba para que se descubriera- el cálculo. Varias son las causas de semejante retraso. Entre ellas debemos destacar la inexistencia de un sistema de numeración adecuado - en este caso el decimal- así como del desarrollo del álgebra simbólica y la geometría analítica que permitieron el tratamiento algebraico -y no geométrico- de las curvas posibilitando enormemente los cálculos de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, entre otros. Todo ello ocurrió esencialmente en el siglo XVII. Comenzaremos por tanto desde el principio.

Para los griegos el infinito aparece de dos maneras distintas: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Ya apareció de algún modo en la inconmensurabilidad de la diagonal de cuadrado; también, claro está, lo tenemos en la famosa paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga, por ello no es de extrañar que alguien intentara regularlos. Ese alguien fue nada más y nada menos que Aristóteles. Lo que hizo fue prohibir el infinito en acto «no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una sustancia y un principio», escribió, pero añadió «es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles» de manera que el infinito «existe potencialmente [...] es por adición o división». Así, la regulación aristotélica del infinito no permite considerar un segmento como una colección de puntos alineados pero sí permite dividir este segmento por la mitad tantas veces como queramos. Fue Eudoxo, discípulo de Platón y contemporáneo de Aristóteles quien hizo el primer uso "racional" del infinito en las matemáticas. Eudoxo postuló que «toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada». Es el famoso principio de Arquímedes que éste toma prestado a Eudoxo y que sirvió a aquel para superar la primera crisis de las Matemáticas -debida al descubrimiento de los irracionales-

No obstante, fue obviamente Arquímedes el precursor del cálculo integral aunque desgraciadamente -o quizá por suerte, quién sabe- su método se perdió y por tanto no tuvo ninguna repercusión en el descubrimiento del cálculo -recordemos que su original método "mecánico" donde además se saltaba la prohibición aristotélica de

¹ Apartes de la exposición El Legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton: Los genios a través de sus libros. “De Cómo de Gestó y vino al Mundo el Cálculo Infinitesimal”. Exposición realizada en Los Reales Alcázares de Sevilla, 2000.

usar el infinito in acto se perdió y solo fue recuperado en 1906 como ya hemos tenido ocasión de contar en la sección dedicada a los griegos-. La genial idea de siracusano fue considerar las áreas como una colección -necesariamente infinita- de segmentos. Habrá que esperar 2000 años hasta que otro matemático -en este caso Cavalieri- volviera a usar de esa manera los infinitos. De hecho Leibniz descubrió la clave de su cálculo al ver un trabajo de Pascal donde éste usaba un método semejante.

Newton en su célebre frase «Si he llegado a ver más lejos que otros es por que me subí a hombros de gigantes» se refiere entre otros a su maestro y mentor Isaac Barrow. Barrow fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo. Llegó a las matemáticas en su afán de comprender la teología -de hecho se marchó de su cátedra en Cambridge, cediéndosela a Newton para continuar sus estudios teológicos-. En la lección X de su obra *Lectiones opticae & geometricae* Barrow demuestra su versión geométrica del Teorema fundamental del cálculo.

En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada -reglas de derivación-y mostraron que ambos conceptos eran inversos- teorema fundamental del cálculo-: acababa de nacer el cálculo infinitesimal. Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc que habían ocupado a sus predecesores bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo

<http://euler.us.es/~libros/images/newton254.jpg>El primero en descubrirlo fue Newton, pero su fobia a publicar le hizo guardar casi en secreto su descubrimiento. Newton gestó el cálculo en sus *annimirabilis* (1665-1666) cuando se refugiaba en su casa materna de la epidemia de peste que asolaba Inglaterra.

Leibniz, más conocido como filósofo, fue el otro inventor del cálculo. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibniz fue el primero en publicar el invento. Lo hizo además usando una vía ciertamente novedosa en aquella época: para facilitar la difusión de sus resultados los publicó en una de las recién creadas revistas científico filosóficas el *Acta Eroditorum* que el mismo había ayudado a fundar -eran ciertamente momentos importantes para la ciencia donde empezaron a aparecer las revistas científicas que permitirían luego y hasta nuestro días la difusión del conocimiento y los descubrimientos científicos-. Durante una estancia en París -ya que era un afamado diplomático- Leibniz conoce a Huygens quien le induce a estudiar matemáticas. En 1673, luego de estudiar los tratados de Pascal, Leibniz se convence que los problemas inversos de tangentes y los de cuadraturas eran equivalentes.

<http://euler.us.es/~libros/images/leibnitz264.jpg>Alejándose de estos problemas, a partir de sumas y diferencias de sucesiones comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales que acabarían en la gestación de su cálculo por el año 1680 y a diferencia de Newton si lo publica en las mencionadas Actas con el título 'Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas'.

Lectura 2. Concepto de integración²

“La integración tiene dos interpretaciones distintas; es un procedimiento inverso de la diferenciación o derivación y es un método de determinar el área debajo de una curva. Cada una de estas interpretaciones tiene numerosas aplicaciones a la economía y la administración.

Como una operación, la integración es la inversa de la derivación. Así, si una función es derivada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original. Esto es verdadero sólo si se especifica en alguna forma la constante de integración; de otra manera el resultado puede diferir de la función original por una constante. En este contexto, la integración es un proceso de hallar una función cuando se conoce su derivada (o razón de cambio). En economía puede usarse la integración para hallar la función de costo total cuando se da una función de costo marginal, para hallar la función de ingreso total cuando se da la función de ingreso marginal, etc.

También puede definirse la integración como el proceso de hallar el valor límite de una suma de términos cuando el número de términos crece infinitamente y el valor numérico de cada término se aproxima a cero. Este es el contexto en que la integración se interpreta como la determinación del área bajo una curva. En efecto, el cálculo integral se desarrolló con el propósito de evaluar áreas, suponiéndolas divididas en un número infinito de partes infinitesimalmente pequeñas cuya suma es el área requerida. El signo integral es una S alargada \int que usaron los primeros autores para indicar la suma. En economía puede evaluarse el ingreso total como el área bajo la curva de ingreso marginal; el superávit del consumidor y el superávit del productor pueden evaluarse como áreas bajo las curvas de demanda y de oferta, y así sucesivamente.

Para una u otra aplicación, la integración requiere operacionalmente que se determine una función cuando se ha dado su derivada. Desafortunadamente, las técnicas de integración son de por sí más difíciles que las de derivación y existen funciones, algunas de ellas con engañosa apariencia simple, cuyas integrales no pueden expresarse en términos de funciones elementales. Los casos más sencillos de integración se llevan a cabo invirtiendo las correspondientes fórmulas de la derivación; los casos más complicados se manejan utilizando tablas de las formas estándar, con varios procesos de sustitución y, si es necesario, con métodos numéricos (aproximación).”

² Draper Jean E. & Klingman Jane S. « Matemáticas para la Administración y la Economía.» Editorial HARLA. México, 1967.

1.2 Antiderivada e integral indefinida

Explicación 1. Integral indefinida

Si tenemos una función $F(x)$ que tiene la siguiente derivada: $F'(x) = 3x^2$.

¿Cuál es esa función $F(x)$? Como ya sabemos derivar y conocemos esas derivadas triviales, entonces podemos deducir que la función $F(x) = x^3$.

Verifiquemos:

$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$. Entonces decimos que $F(x)$ es la antiderivada de $F'(x)$, o que x^3 es la antiderivada de $3x^2$, ya que $3x^2$ es la derivada de x^3 .

Hay además un elemento adicional en este proceso de pasar de función a derivada, y de derivada a antiderivada, es decir el proceso inverso. Veamos el ejemplo 1. En ese ejemplo se verifica que varias funciones distintas pueden tener la misma derivada, lo cual implica que una función tiene múltiples antiderivadas. ¿Pero que es lo que cambia en la antiderivada de un caso a otro?. Revise el ejemplo 1 nuevamente y responda.

En efecto, lo que cambia es la constante de la antiderivada, lo cual nos lleva a que si de alguna forma conservamos la constante que tenía la función inicial $F(x)$ o tenemos una forma de conocerla, entonces al hallar la antiderivada de $F'(x)$ podemos llegar a $F(x)$, en caso contrario llegaremos a una función $f(x)$ similar a $F(x)$ pero que puede variar en un valor constante. Es decir:

$F(x) = f(x) + K$, donde K la llamaremos posteriormente constante de integración.

Notación para las antiderivadas.

Si $y = F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces se dice que $F(x)$ es una solución de la ecuación:

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, ahora escribimos esta ecuación en la forma llamada diferencial equivalente así: $dy = f(x)dx$.

La operación de encontrar todas las soluciones (la antiderivada general de f) de esta ecuación se llama integración y se simboliza con la S alargada \int .

Para solucionar $dy = f(x)dx$ aplicamos derivada así:

$\int dy = \int f(x) dx$, de donde: $y = \int f(x) dx = F(x) + K$

donde x es la variable de integración, $f(x)$ es el integrando y K es la constante de integración.

Ejemplo 1. Derivada y múltiples antiderivadas.

Antiderivada $F(x)$	Derivada $F'(x)$
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.

1.3 Técnicas de integración: estándar y sustitución

Integración estándar

Tabla 1. Reglas básicas de integración

	FÓRMULA DE INTEGRACIÓN	FÓRMULA DE DERIVACIÓN
1. Función constante	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. , donde k = constante	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.

2. Constante por una función	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. donde $k = \text{constante}$	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
3. Regla de la potencia	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. donde $n \neq -1$	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
4. Potencia de una función	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. donde $n \neq -1$	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
5. Suma o diferencia de funciones	si las integrales de $f(x)$ y $g(x)$ existen, entonces: ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
6. Excepción de la regla de la potencia	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
7. Cociente especial	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
8. Función Exponencial	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
9. Exponencial de una función	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.

Explicación 2. Como aplicar las reglas de integración estándar.

De forma similar como se aplican las reglas de derivación. (Recuerde que este proceso lo estudió durante el bachillerato). Explicaremos uno de los casos y corresponderá a usted recordar y volver a practicar los otros casos con ejercicios que invente o con los de la práctica de entrenamiento.

Apliquemos la regla de la potencia de una función en conjunto con la de constante por una función (véase la tabla 1), en el siguiente ejercicio:

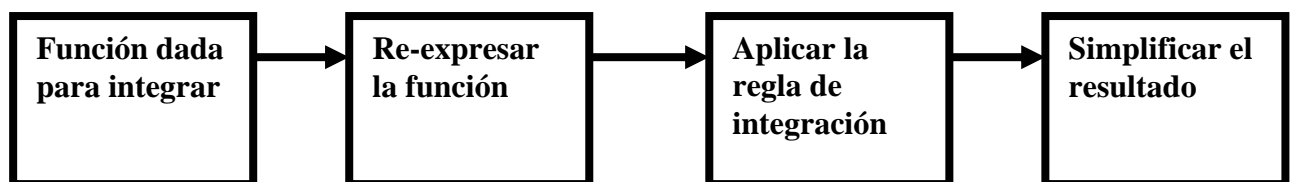
Evaluar $\int 7x \, dx$

Aplicando la regla de la constante por una función tenemos: $\int 7x \, dx = 7 \int x \, dx$. Teniendo en cuenta que x está elevado a la potencia 1, es decir ($x=x^1$) reexpresamos: $= 7 \int x^1 \, dx$

Aplicando la regla de la potencia de una función **¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.** tenemos:

$$7 \int x^1 \, dx = \frac{7}{2} x^2 + K$$

El siguiente esquema³ muestra el procedimiento que se ha seguido y que se puede generalizar como se ve en el ejemplo 2.



Ejemplo 2. Aplicando las reglas de integración

Función a integrar	Función re-expresada	Integración	Respuesta simplificada
$\int \frac{1}{x^3} \, dx =$	$\int x^{-3} \, dx$	$= \frac{x^{-2}}{-2} + K$	$= -\frac{1}{2x^2} + K$
$\int \sqrt{x} \, dx =$	$\int x^{\frac{1}{2}} \, dx$	$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K$	$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + K$
$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \, dx =$	$\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx$	$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + K$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + K = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + K$

Integración por sustitución

Explicación 3. Integración por substitución

³ Tomado de Larson Roland E. Y Hostetler Robert P. Matemáticas 11º. Cálculo. McGraw-Hill. Bogotá, 1989. Pág. 189.

En razón a que muchos ejercicios de integración no se pueden resolver con las reglas estándar, recurrimos a otros métodos, uno de ellos es la integración por sustitución, en donde usamos un truco consistente en hacer una sustitución de un factor sustituyente por un símbolo que la representa logrando simplificar el problema. Para aplicar el método de sustitución es necesario que se pueda identificar dentro de la función a integrar una parte que corresponde a otra función más fácil de derivar o factor sustituyente y la parte restante coincida con la derivada de esta última función o factor.

Si bien la integración por sustitución y la integración por partes no logran una participación significativa dentro de las aplicaciones de la derivada, abordamos aquí la primera de la cual se presentan los casos mas notorios.

El proceso de integración por sustitución se descompone en cuatro partes: identificación del factor sustituyente y su derivada, realización de la sustitución simbólica, aplicación de la regla estándar de derivación, y aplicación de la sustitución a la inversa. Véanse los ejemplos 3 y 4.

Ejemplo 3. Integración por sustitución.

Integrar $\int (x^3 + 5)^6 3x^2 dx$

No es necesario reexpresar la expresión inicial.

En esta el factor sustituyente es $u = (x^3 + 5)$ y su derivada es $\frac{du}{dx} = 3x^2$, de

manera que al hacer la sustitución inicial nos queda $\int (x^3 + 5)^6 3x^2 dx = \int u^6 du$.

Ahora si podemos integrar fácilmente por la regla de la potencia y tenemos:

$$\int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C$$

Haciendo la sustitución final llegamos a la respuesta:

$$\frac{u^7}{7} + C = \frac{(x^3 + 5)^7}{7} + C. \text{ En este caso no se puede simplificar más la respuesta.}$$

Ejemplo 4. Integración por sustitución.

Integre: $\int \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 3)^3} dx$

Primero re-expresamos así:

$$\int \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 3)^3} dx = \int (x^2 - 2x + 3)^{-3} (x-1) dx$$

Si se hace el factor sustituyente $u = x^2 - 2x + 3$, entonces
 $du = (2x - 2)dx = 2(x - 1)dx$.

En el integrando hace falta un factor 2. Se introduce este factor para que se pueda aplicar la regla de la potencia, así:

$$\int (x^2 - 2x + 3)^{-3} (x - 1)dx = \int (x^2 - 2x + 3)^{-3} \frac{2}{2} (x - 1)dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 2x + 3)^{-3} 2(x - 1)dx$$

hacemos la sustitución inicial y luego integramos por la regla de la potencia:

$$= \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-2}}{(-2)} + C$$

Haciendo la sustitución final tenemos:

$$- \frac{1}{4} u^{-2} + C = - \frac{1}{4} (x^2 - 2x + 3)^{-2} + C$$

Tabla 2. Métodos de Integración y Aproximación

Donde " n " = número de partes en que se divide el intervalo [a , b]

Integración por sustitución – Regla general	Si se hace $u=u(x)$ y $du=u'(x)dx$, entonces: $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(u(x)) + C$
Integración por sustitución – potencia de la regla general	$\int [u(x)]^n u'(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$, con $n \neq -1$
Integración por partes	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
Aproximación por Rectángulo	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. donde x_i es punto medio de los intervalos.
Aproximación por Trapecio	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. donde x_i son los puntos finales de los subintervalos.
Aproximación por Simpson	¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. donde "n" es par.

1.4 Aplicaciones de la integración indefinida

Ejemplo 5. Ingreso Marginal

La función de ingreso marginal (**MR**) del producto de una compañía es:
MR=50.000 – q

Donde q es el número de unidades producidas y vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se vende ninguna unidad, determine la función de ingreso total del producto.

Dado que la función de ingreso marginal es la derivada de la función de ingreso total, esta última será la antiderivada del ingreso marginal. Al aplicar el proceso de integración indefinida se obtiene:

$R(q) = 50.000q - \frac{q^2}{2} + C$, puesto que sabemos que el ingreso cuando no se coloca en el mercado algún producto es cero, es decir $R(0)=0$, entonces $C=0$. Por lo tanto, la función de ingreso total del producto de la compañía es: $R(q) = 50.000q - \frac{q^2}{2}$.

Ejemplo 6. Costo Marginal

La función que describe el costo marginal de fabricar un producto es $MC = q + 100$,

Donde q es el número de unidades producidas. Se sabe también que el costo total es de \$40.000, cuando $q=100$. Determinar la función de costo total.

Para determinar la función de costo total, primero se encuentra la antiderivada de la función de costo marginal, es decir, $C(x) = \frac{q^2}{2} + 100q + C$

Dado que $C(100)=40.000$, podemos despejar el valor de C , que resulta representar el costo fijo.

$$40.000 = \frac{(100)^2}{2} + 100(100) + C$$

$$40.000 = 5.000 + 10.000 + C$$

$25.000 = C$, es decir cuando la producción es cero el costo es de 25.000, entonces la función específica que representa el costo total de fabricar un

producto es: $C(x) = \frac{q^2}{2} + 100q + 25.000$.

Ejemplo 7. Función de Demanda

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es $MR = \frac{dR}{dq} = 2.000 - 20q - 3q^2$, encontrar la función de demanda.

Estrategia: Integrando $\frac{dR}{dq}$ y usando una condición inicial, podemos encontrar la función de ingreso $R(q)$. Pero el ingreso está dado también por

la relación general $R(q)=pq$, donde p es el precio por unidad. Así, $p = \frac{R(q)}{q}$.

Reemplazando $R(q)$ en esta ecuación por la función de ingreso obtenemos la función de demanda.

Como $\frac{dR}{dq}$ es la derivada del ingreso total $R(q)$,

$$R(q) = \int (2.000 - 20q - 3q^2) dq$$

$$R(q) = 2.000q - (20) \frac{q^2}{2} - (3) \frac{q^3}{3} + C$$

$$R(q) = 2.000q - 10q^2 - q^3 + C$$

El ingreso es cero cuando $q=0$. Suponemos que cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0; esto es, $R(0)=0$ cuando $q=0$. Esta es nuestra condición inicial. Sustituyendo esos valores en la ecuación de costo resulta:

$$0 = 2.000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C, \text{ por lo tanto } C=0, \text{ y } R(q) = 2.000q - 10q^2 - q^3.$$

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que $p = \frac{R(q)}{q}$ y

sustituimos el valor de $R(q)$:

$$p = \frac{R(q)}{q} = \frac{2.000q - 10q^2 - q^3}{q}, \text{ sacando factor común } q \text{ en el numerador y}$$

simplificando tenemos:

$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

Ejemplo 8. Costo Promedio

Si el costo total y de producir y comercializar q unidades de una mercancía está dado por la función $C(q)$, el costo promedio por unidad es $\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$ y

el costo marginal es $MC = \frac{dC}{dq} = C'(q)$. De lo anterior llegamos a que podemos

encontrar la función de costo promedio si tenemos la de costo marginal, ya que al integrar el costo marginal obtenemos el costo total, y al dividir el costo total por la cantidad obtenemos el costo promedio.

El costo marginal MC como función de las unidades producidas q , está dado por:

$$MC = \frac{dC}{dq} = 1.064 - 0,005q. \text{ Si el costo fijo es } \$16,3, \text{ hallar las funciones de costo}$$

total y costo promedio.

$$C(x) = \int dC = \int (1.064 - 0,005q) dq = 1.064q - 0,0025q^2 + C$$

Si $q=0$, $C=16,3$ se deduce $C=16,3$ y se tiene:

$$C(q) = 16,3 + 1.064q - 0,0025q^2 : \text{ Costo total}$$

$$\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{16,3}{q} + 1.064 - 0,0025q : \text{Costo promedio.}$$

Explicación 4. Renta Nacional, Consumo y Ahorro

Si la función consumo esta dada por $c=f(x)$, en la cual c es el consumo nacional total y x es la renta nacional total, entonces la propensión marginal a consumir es la derivada de la función consumo con respecto a x .

$\frac{dc}{dx} = f'(x)$, y suponiendo que $x=c+s$, en donde s son los ahorros, la

propensión marginal a ahorrar es: $\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$

El consumo nacional total es la integral con respecto a x de la propensión marginal a consumir,

$$c = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Debe especificarse una condición inicial para obtener una única función de consumo al integrar la correspondiente propensión marginal a consumir. Véanse los ejemplos 9 y 10.

Ejemplo 9. Propensión marginal al consumo

La propensión marginal a consumir (en billones de dólares) es:

$$\frac{dc}{dx} = 0,7 + \frac{0,2}{\sqrt{x}}$$

Cuando la renta es cero, el consumo es 8 billones de dólares. Hallar la función de consumo..

$$c = \int \left(0,7 + \frac{0,2}{\sqrt{x}} \right) dx = 0,7x + 0,4\sqrt{x} + C$$

Sí $x=0$, $c=8$, se deduce $C=8$ y se tiene $c = 8 + 0,7x + 0,4\sqrt{x}$

Ejemplo 10. Propensión Marginal al Ahorro.

La propensión marginal a ahorrar es $1/3$. Cuando la renta es cero el consumo es de 11 millones de dólares. Hallar la función de consumo.

$$\frac{dc}{dx} = 1 - \frac{ds}{dx} = \frac{2}{3} \quad c = \int \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}x + C$$

Si $x=0$, $c=11$, se deduce $C=11$, y $c = \frac{2}{3}x + 11$

Nota. Errores frecuentes

1. Aplicar el proceso de integración en lugar del de derivación.
2. Decir que la integral de una constante respecto a x es cero y no la constante por x .
3. Realizar mal las operaciones con fracciones.
4. Eliminar el símbolo de integral al momento de reexpresar y no al momento de integrar.


1.5 Práctica con derive

Ingresa al programa Derive.


Digite la ecuación $MR=50000-q$, donde MR es el ingreso marginal. Observe que Derive la ha interpretado como $m \cdot r = 50000 - q$, es decir no toma a MR como un solo símbolo sino como el producto de m por r. Por lo que debemos abreviar la expresión.

Digite ahora la ecuación $M = 50000 - q$, pulse Enter.


Haga clic en el ícono Ventana 2D  y luego en el ícono Representar

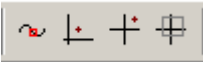
Expresión . Note que los dos íconos son iguales pero cumplen funciones diferentes, el primero aparece cuando está activada la ventana de ecuaciones y el segundo cuando está activada la ventana de gráficos en dos dimensiones.

Lo más probable es que en este momento no vea nada representado en el

plano, entonces debe hacer clic en el ícono Zoom hacia fuera  o pulsar repetidamente la tecla F10 hasta que la gráfica sea visible dentro del rango en pantalla.

Cuando la gráfica sea visible, optimice la presentación de la gráfica con los

íconos  o con las teclas: F10 Zoom hacia fuera, F8 Reducción vertical, F6 Reducción horizontal, F9 Zoom hacia dentro, F7 Ampliación vertical y F5 Ampliación horizontal.

Con los íconos  puede centrar y demarcar el área a visualizar, hasta obtener un resultado como el de la figura 1.

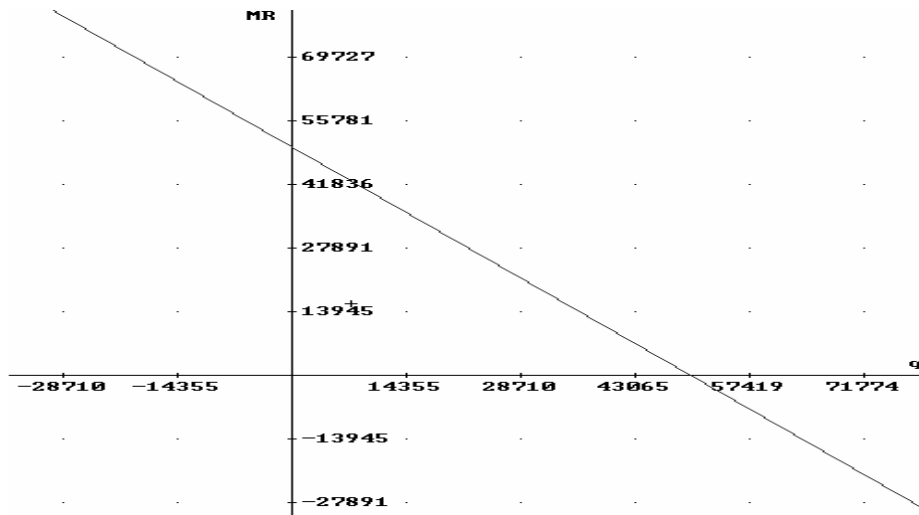


Figura 1. Gráfica de ingreso marginal.

Note que en la figura 1 se han reemplazado los valores x y y que usted tiene en pantalla por MR y q, lo cual se logra seleccionando Opciones – Pantalla – Ejes – Títulos, donde usted hace la sustitución respectiva. Véase la figura 2. Para ver simultáneamente la ventana de ecuaciones y la de gráficos seleccione Ventana – Mosaico vertical. Tenga en cuenta que son distintas las funciones que están disponibles cuando se activa una u otra ventana.



Ahora posicionado en la ventana de ecuaciones y con la formula que introducimos activa, hacemos clic en el ícono integrar o seleccionamos Cálculo – Integrales, o pulsamos Control+Shift+I, nos aparecerá la ventana de la figura 3, en la que seleccionamos la variable q, integral indefinida, supongamos que el costo fijo es de 10.000 y anotémoslo como constante.

Figura 2. Títulos de los ejes de la gráfica



Figura 3. Ventana de parámetros de integración.

Haga clic en simplificar y obtendrá como resultado la integración de ambos términos de la ecuación, sin embargo nos interesa sólo el término de la derecha.

Pruebe ahora ingresando solamente la expresión $50.000 \cdot q$ y luego repita el proceso de integración indefinida. Derive dará como resultado:

$$-\frac{q^2}{2} + 50.000 \cdot q + 10.000$$

Unidad 1. Integración Indefinida

Actividades de aprendizaje

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

Resuelva los siguientes ejercicios de integración indefinida y compare con las respuestas proporcionadas y compruébelas mediante derivación.

REGLAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int 7dx$, Rta: $7x + C$
2. $\int x^6 dx$, Rta: $\frac{x^7}{7} + C$
3. $\int 8t^3 dt$, Rta: $2t^4 + C$
4. $\int (3x^2 + 2x - 5)dx$, Rta: $x^3 + x^2 - 5x + C$
5. $\int 6x^{1/2} dx$, Rta: $4x^{3/2} + C$
6. $\int 8x^{-3} dx$, Rta: $-4x^{-2} + C$

$$7. \int \frac{du}{\sqrt{u}}, \text{ Rta: } 2\sqrt{u} + C$$

$$8. \int (10x^{2/3} - 8x^{1/3} - 2)dx, \text{ Rta: } 6x^{5/3} - 6x^{4/3} - 2x + C$$

$$9. \int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx, \text{ Rta: } \frac{3}{5} x^{5/3} 2x^{-2} + C$$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

$$10. \int (x^2 - 4)^5 2x dx, \text{ Rta: } \frac{(x^2 - 4)^6}{6} + C$$

$$11. \int (3x - 2)^7 dx, \text{ Rta: } \frac{(3x - 2)^8}{24} + C$$

$$12. \int \frac{x^3}{\sqrt{2x^4 + 3}} dx, \text{ Rta: } \frac{(2x^4 + 3)^{1/2}}{4} + C$$

$$13. \int \frac{t}{(3t^2 + 1)^4} dt, \text{ Rta: } \frac{-1}{18} (3t^2 + 1)^{-3} + C$$

$$14. \int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2 + 1)^4} dx, \text{ Rta: } \frac{-1}{12(x^4 + 2x^2 + 1)^3} + C$$

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

- Costo marginal. La función de costo marginal para la producción es $CM = 10 + 24q - 3q^2$; si el costo total para producir una unidad es 25, hallar la función costo total y la función costo promedio.
- Propensión al ahorro. La propensión marginal a ahorrar es $\frac{1}{2}$. Cuando la renta es cero, el consumo es 6 billones de dólares. Hallar la función consumo.
- Ingreso marginal. Si el ingreso marginal es $MR = 15 - 9q - 3q^2$, hallar las funciones de ingreso y demanda.
- Ingreso marginal. Si el ingreso marginal es $MR = 10 - 5q$, hallar las funciones de ingreso y demanda.
- Propensión al consumo. La propensión marginal a consumir (en billones de dólares) es $\frac{dc}{dx} = 0,5 + \frac{1}{3x^{2/3}}$. Cuando la renta es cero, el consumo es 6 billones de dólares, hallar la función de consumo.

6. Cobertura educativa. La rapidez de incremento proyectada en la inscripción de una universidad pública se estima mediante la ecuación: $\frac{dE}{dt} = 5.000(t + 1)^{-3/2}$, con $t \geq 0$, donde $E(t)$ es la inscripción proyectada en t años. Si la inscripción cuando $t=0$ es 2.000, calcule la inscripción que debe proyectarse para 15 años.
7. Salud pública. Una epidemia de gripe azota a una ciudad y se estima que la razón de cambio de las personas sin gripe con respecto al tiempo se calcula de $\frac{dW}{dt} = 400t - 12.000$. Encuentre $W(t)$, o sea el número de personas que no padecen gripe en t días, si $W(0)=500.000$. Después, calcule el número de personas que no padecen gripe 30 días después de haber empezado al epidemia.
8. Función de Utilidad. Si la utilidad marginal por producir q unidades se calcula mediante $U(q) = 50 - 0,04q$, $U(0)=0$. Donde $P(x)$ es la utilidad en dólares, encuentre la función de utilidad P y la utilidad sobre 100 unidades de producción.
9. Valor de reventa. El municipio de Mitú cuyo único medio de transporte hacia el interior del país es el aéreo, compró un aeroplano en U\$300.000 para el uso oficial. El valor de reventa se espera que disminuya en un periodo de 16 años con una rapidez que varía con el tiempo, y se estima que es $v'(t) = \frac{-25}{\sqrt{t}}$, donde $v(t)$ es el valor de reventa del aeroplano en millones de dólares después de t años. Observe que $v(0)=300.000$ y encuentre $v(t)$. También, calcule $v(15)$, o sea el valor de reventa en miles de dólares después de 15 años.
10. Crecimiento urbano. Un área suburbana de Medellín se incorpora a la ciudad. La rapidez de crecimiento t años después de haberse incorporado se estima que es $\frac{dN}{dt} = 400 + 600\sqrt{t}$, con $0 \leq t \leq 9$. Si normalmente la población es de 5.000, ¿Cuál será la población dentro de 9 años?

RESPUESTAS

1. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.,
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
2. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. en
billones de dólares.
3. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.,
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.

4. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.,
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
5. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.
6. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.;
 $E(15)=9.500$ estudiantes.
7. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.,
 $W(30)=320.000$
8. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de
campo.; $P(100)=4.800$
9. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.;
 $v(15)=106.000$
10. 19.400

Unidad 1. Integración Indefinida

Autoevaluación

1. La integración tiene dos interpretaciones distintas; es un procedimiento inverso de la diferenciación o derivación y:
 - a. Es un proceso similar al del cálculo de los límites a infinito.
 - b. Es un proceso inverso de los límites cuando x tiende a cero.
 - c. Es un método para determinar el área debajo de una curva.
 - d. Es un método para calcular máximos y mínimos relativos.
 - e. Es un proceso sistémico integrador de relaciones y elementos.
2. Los siguientes son métodos para calcular integrales indefinidas excepto uno. ¿Cuál?
 - a. Integración por fracciones parciales.
 - b. Integración por substitución.
 - c. Integración por partes
 - d. Integración sistémica u holística.
 - e. Proceso general usando antiderivadas.

3. La función del costo promedio puede hallarse como:
 - a. La derivada del costo dividida por el número de productos.
 - b. La integral del costo marginal dividida por el número de productos.
 - c. La antiderivada del ingreso marginal dividida por el número de productos.
 - d. La integral del costo marginal dividida por el costo total.
 - e. La antiderivada del costo marginal por el número de productos.
4. La función de demanda puede obtenerse como:
 - a. La integral indefinida del ingreso marginal dividida por la cantidad producida.
 - b. La integral indefinida del costo marginal dividida por la cantidad producida.
 - c. La integral indefinida del costo promedio dividida por la cantidad producida.
 - d. La integral indefinida del ingreso promedio dividida por la cantidad producida.
 - e. La diferencia entre el costo marginal y el ingreso marginal.
5. La propensión marginal al consumo se entiende como:
 - a. La relación entre la variación en el ahorro y la variación del ingreso.
 - b. La relación entre la variación en el consumo y la variación del ingreso.
 - c. La variación de la demanda que se presenta cuando varía la oferta.
 - d. La derivada de la propensión marginal al ahorro.
 - e. La integral indefinida de la propensión marginal al ahorro.
6. El valor de reventa es el valor monetario que posee un cierto bien después de determinado tiempo, ese tiempo debe:
 - a. Ser mayor al de la vida útil.
 - b. Ser igual al de la vida útil.
 - c. Ser menor al de la vida útil.
 - d. Ser igual al valor neto.
 - e. Ser igual a la depreciación acumulada.
7. La porción que se ahorra de un peso adicional de renta se conoce como:
 - a. Ahorro nacional per-cápita.
 - b. Propensión marginal al ahorro.

- c. Propensión marginal al consumo.
 - d. Ahorro marginal neto.
 - e. Excedente del consumidor.
8. El proceso de integración por sustitución se descompone en cuatro partes, excepto:
- a. Identificación del factor sustituyente y su derivada.
 - b. Realización de la sustitución simbólica.
 - c. Aplicación de la regla estándar de derivación.
 - d. Racionalización de las expresiones.
 - e. Aplicación de la sustitución a la inversa.
9. Una de las siguientes derivadas tiene siempre como resultado cero:
- a. De una función constante.
 - b. De una constante por una función.
 - c. De la excepción de la regla de la potencia.
 - d. De la función exponencial.
 - e. De la potencia de una función.
10. Una de las siguientes funciones es igual a una de sus antiderivadas.
- a. $f(x) = \ln x$.
 - b. $f(x) = e^x$.
 - c. $f(x) = x$.
 - d. $f(x) = \sin x$.
 - e. $f(x) = \log x$.

Unidad 1. Integración Indefinida

Síntesis

La antiderivada es el proceso inverso a la deriva y su aplicación conlleva a dos posibilidades:

- Hallar la antiderivada (integral indefinida)
- El área bajo la curva (integral definida)

Al aplicar la integración indefinida tenemos dos posibilidades:

- Integración estándar (utilizamos la tabla 1)
- Integración por sustitución (utilizamos la tabla 2)

La integral indefinida proporciona algunas aplicaciones útiles al Administrador Público, especialmente en el campo de la economía, como son: el costo, la renta nacional, el consumo y el ahorro.

El ingreso marginal (MR) es la derivada de la función del ingreso total, donde la variable independiente es el nivel de producción. De manera semejante, una expresión del costo marginal (CM) es la derivada de la función del costo total. Si se tiene una expresión del ingreso o del costo marginal, las antiderivadas respectivas serán las funciones de ingreso y costo totales

La herramienta derive nos facilita el cálculo de las integrales (proceso operativo), pero es nuestra responsabilidad desarrollar competencias entorno a la interpretación de los resultados.

Unidad 1. Integración Indefinida

Bibliografía y Webgrafía

BARNETT R.(1983). "Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales" 2ª Edición. Nueva Editorial Interamericana. México.

DRAPER, J.; KLINGMAN, J. (1972)."Matemáticas para Administración y Economía" Editorial Harla. México.

KUTZLER B; KOKOL-VOLJC V. (2000). "Introducción a Derive 5. La Herramienta de Matemáticas para su PC". Texas Instruments. Traducción José Luis Llorens Fuster. Valencia.

www.zweigmedia.com/MundoReal/tutorials4/frames6_1.html

interactivo para aprender y practicar la integral indefinida

Tutorial

Unidad 1. Integración Indefinida

Glosario

Propensión marginal al ahorro. La propensión marginal al ahorro (PMS) es la proporción que se ahorra de un peso adicional de renta. ($PMS = \text{variación de la cantidad ahorrada} / \text{variación de la renta}$). La suma de la PMC y la PMS es la unidad, ya que la renta se consume o se ahorra.

Propensión marginal al consumo. La relación entre la variación en el consumo y la variación de la renta, expresada mediante la propensión marginal a consumir (PMC), determina cómo varía el consumo cuando la renta aumenta o disminuye ligeramente. La propensión marginal a consumir es la proporción de un peso en que aumenta el consumo cuando aumenta la renta en un peso. ($PMC = \text{variación de la cantidad consumida} / \text{variación de la renta}$). Una de las hipótesis keynesianas básicas sostiene que la PMC es siempre positiva y menor que la unidad.

Renta Nacional. El PIB, o si se prefiere la "renta nacional", es la suma de lo que una economía ha gastado que es igual a lo que ha ingresado y que es igual a lo que ha producido. El PIB es "lo que da de sí" una economía, lo que "renta" una economía, al igual que decimos la "renta" de una casa. Lo que paga el inquilino es lo que ingresa el propietario.

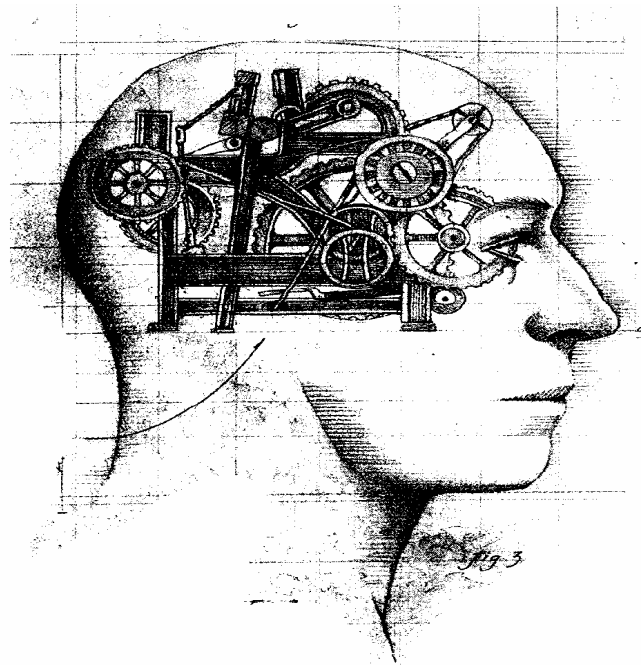
Valor de reventa. es el valor monetario que posee un cierto bien después de determinado tiempo, este tiempo debe ser menor al de la vida útil, ya

que se supone que un bien u objeto después de cumplir con su vida útil, se desecha. ($\text{Valor Residual} = \text{Valor Neto} - \text{Depreciación Acumulada}$)

Unidad 2. Integral Definida

Introducción a la Unidad

En la unidad anterior estudiamos la integral indefinida, la cual permitía a través de un proceso inverso a la derivación, llegar a una función primitiva que se llamó antiderivada. Este proceso permitió partir de funciones como el ingreso marginal, el costo marginal y la utilidad marginal respectivamente a las funciones de ingreso total, costo total y utilidad total. En esta unidad se estudiará el proceso de integración definida el cual nos lleva a determinar un área limitada por curvas, que nos servirá para estudiar otras aplicaciones como el excedente del consumidor y del productor



Objetivo general

El estudiante podrá desarrollar problemas sencillos de aplicación de la integral definida en el campo de la economía y la administración, apoyado en el uso de un software de matemáticas

Unidad 2. Integral Definida

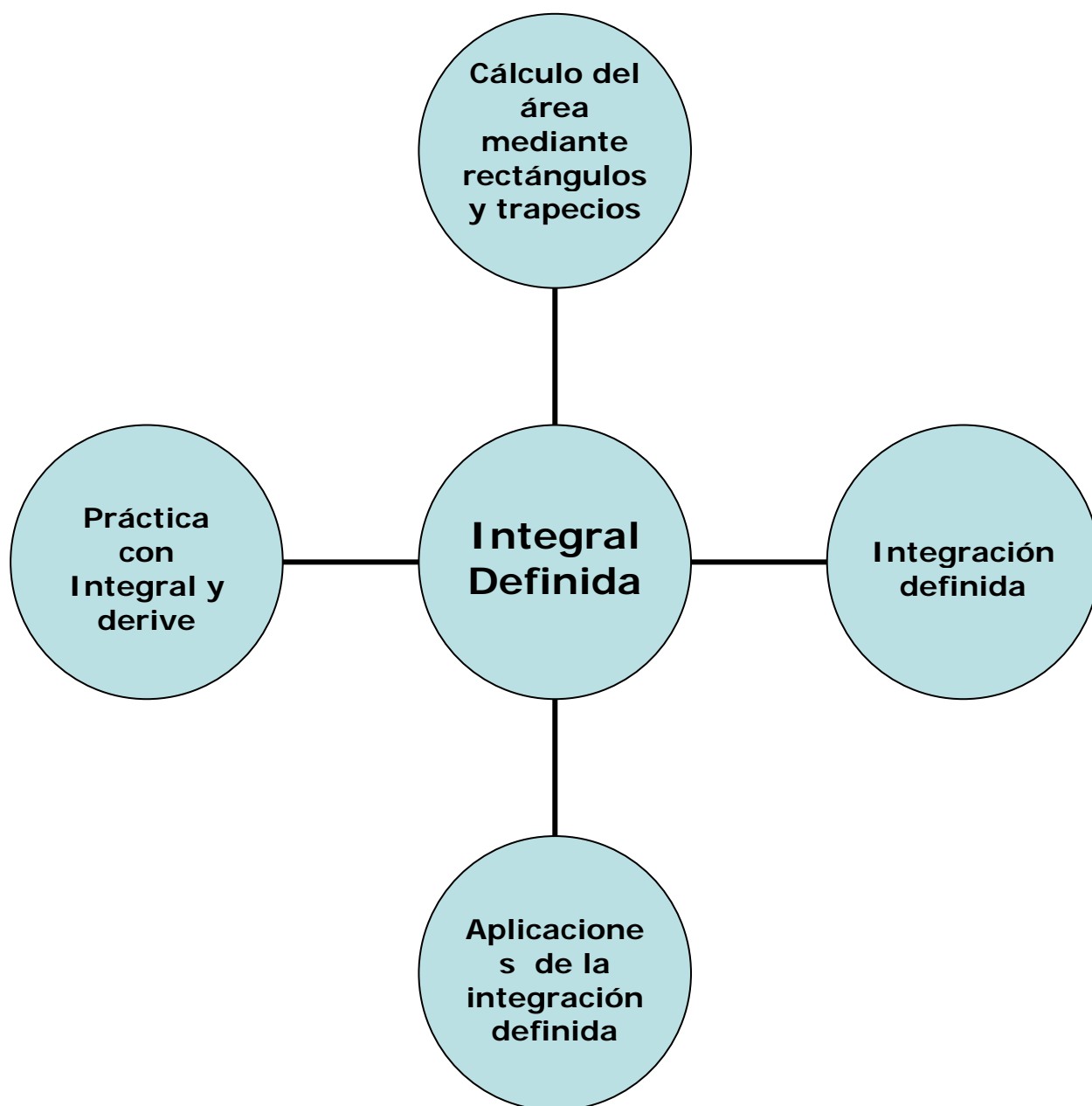
Ideas clave

- El desarrollo del cálculo integral se origina a partir de la necesidad de evaluar el área de figuras
- La integral definida nos indica un área entre curvas, y esta área sirve como modelo para representar fenómenos administrativos (gastos de mantenimiento y recaudo de fondos) y económicos (la relación ingreso – costo, el excedente del consumidor y el productor).
- Una función de demanda representa las cantidades de un artículo que podrían comprarse a varios precios

- Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que podrían venderse a varios precios
- El excedente del consumidor mide la riqueza económica desde el lado del comprador
- El excedente del productor es la diferencia entre el precio que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto
- El excedente del productor mide la riqueza económica desde el lado del productor.

Unidad 2. Integral Definida

Mapa conceptual



Unidad 2. Integral Definida

Contenidos

2.1 Cálculo del área mediante rectángulos y trapecios

La necesidad de evaluar las áreas de figuras fue uno de los factores que motivó hacia el desarrollo del cálculo integral. En la geometría euclidiana o plana existen fórmulas que nos permiten determinar las áreas respectivas, tal es el caso de rectángulos, triángulos, cuadrados, etc. Sin embargo, no hay fórmulas para calcular el área de figuras limitadas por curvas. Podemos lograr una aproximación por métodos gráficos convirtiendo el área en múltiples rectángulos o trapecios, y haciendo la suma de las áreas de estos. Esto último nos lleva a la interpretación de la integral definida como el área entre curvas.

Básicamente la integral definida nos indica un área entre unas curvas, aunque esta área nos sirva como modelo para representar otros fenómenos. Partiremos del estudio de la obtención de la derivada por métodos gráficos. Los métodos gráficos incluyen aproximación por rectángulos, (Véase el **ejemplo 1**), los cuales se pueden aplicar como rectángulos de un ancho determinado y como altura el valor de la función en el punto medio, o como el promedio entre el área entre el rectángulo conformado por la altura máxima de la función en el subintervalo y el conformado por la altura con el valor mínimo; y la aproximación por trapecios. (véase el **ejemplo 2**).

La integración a partir de métodos gráficos nos proporciona una clara idea del área que estamos calculando, sin embargo resulta ser imprecisa y si queremos un alto grado de precisión el proceso se hace muy largo. Frente a esto existe el proceso de integración indefinida por medio de reglas algebraicas, a través del uso de unos teoremas conocidos como el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Barrow. No nos detendremos en lo específico de estos teoremas sino que veremos en que consiste el proceso de hallar la integral definida en la **explicación 1** y el **ejemplo 3**.

La idea de estudiar el proceso de integración en esta unidad apunta a su aplicación en el estudio de algunos fenómenos administrativos como gastos de mantenimiento y recaudo de fondos, y económicos como el excedente del consumidor (véanse la **explicación 2** y los **ejemplos 4 al 6**), del productor (véanse la **explicación 3** y los **ejemplos 7 al 9**) y la relación ingreso – costo. En tales casos puede determinarse el punto, en el tiempo, donde el ingreso producido se iguale con el costo del factor. Véanse la **explicación 4** y los **ejemplos 10** (utilidad máxima), **11** (valor de salvamento) y **12** (ingreso total).

Ejemplo 1. Cálculo mediante rectángulos

Supongamos que se necesita saber el área que hay bajo la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$, y entre los valores $x=5$ y $x=10$. Se entiende entonces que nos referimos al área encerrada entre la recta indicada y el eje horizontal x , que por los lados

está limitada por rectas verticales que cortan los valores de x : 5 y 10. Véase la figura 1.

Cuente cuantas cuadrículas quedaron sombreadas: 31 completas, más otros fragmentos que podrían sumar entre dos y tres. Intuitivamente diremos que el área que intentamos medir tiene un valor entre 33 y 34.

Como no siempre es posible construir cuadrículas con altura entera, entonces podemos hacerlo calculando rectángulos de un ancho determinado y de altura correspondiente al valor medio de la función para obtener una aproximación. Así, tomemos esta vez un ancho de rectángulo de uno. El primer rectángulo irá de cinco a seis y tendrá como ancho el valor de y para el promedio entre 5 y 6 es decir para 5,5 será $y = \frac{1}{2}(5,5) + 3 = 5,75$. Así, el valor del área del primer rectángulo es $(5,75) \cdot 1 = 5,75$;

El área para $x = 6,5$: $y = \frac{1}{2}(6,5) + 3 = 6,25$, será $(6,25) \cdot (1) = 6,25$

El área para $x = 7,5$: $y = \frac{1}{2}(7,5) + 3 = 6,75$, será $(6,75) \cdot (1) = 6,75$

y así sucesivamente:

$$\text{Área} = 5,75 + 6,25 + 6,75 + 7,25 + 7,75 = 33,75$$

Revise el ejemplo y compare con la figura 2. Este tipo de aproximación con rectángulos resulta ser exacta para el trabajo con funciones lineales como la del ejemplo, sin embargo, en áreas delimitadas por curvas, presenta un considerable grado de error.

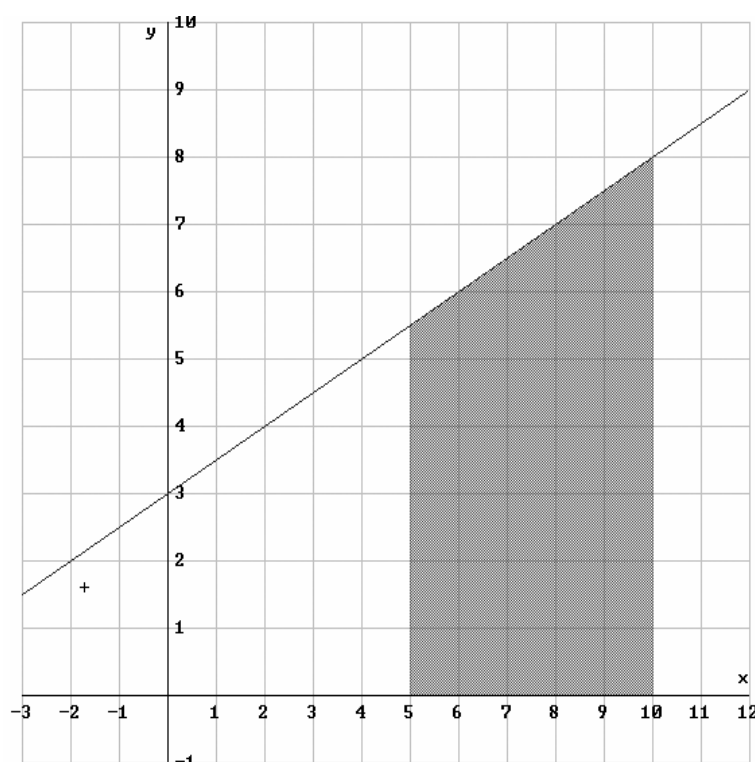


Figura 1. Área bajo la recta $y=0.5x+3$

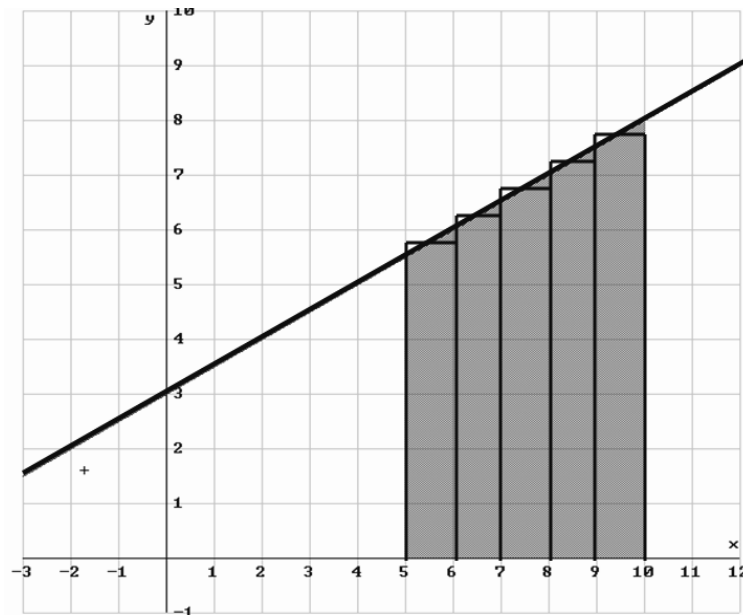


Figura 2. Aproximación usando rectángulos.

Ejemplo 2. Cálculo del área usando trapecios

Intentemos calcular ahora el área entre la curva $y = 5\sqrt{x}$, el eje x y los valores de x: 2 y 8.

Podemos formar rectángulos, como en el ejemplo 1, sin embargo para lograr una mejor aproximación, usaremos ahora los trapecios. Recordemos que la fórmula para hallar el área del trapecio es $A = \frac{(B + b)h}{2}$. Revise la gráfica de la

figura 3 y verifique además que uno de los lados del trapecio corresponde con uno de los lados del trapecio siguiente. Si contamos las cuadrículas, podemos aproximar que el área esté entre 62 y 66 unidades cuadradas. En la parte izquierda del eje y se ha aclarado los valores que toma la función a los lados de cada trapecio.

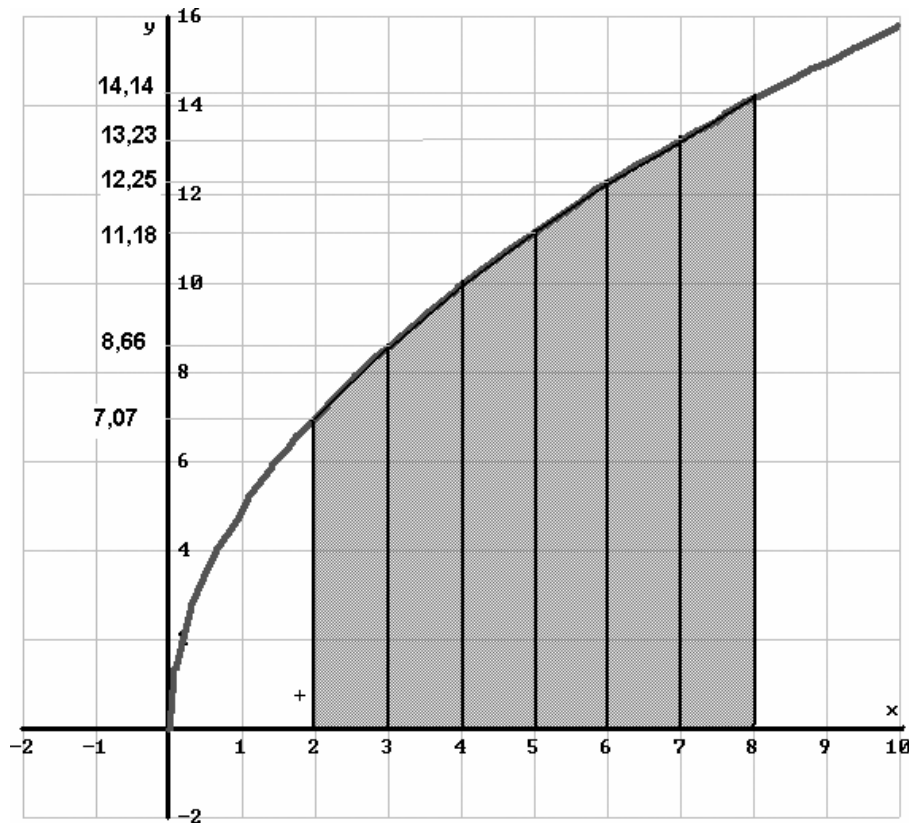


Figura 3. Área bajo la curva $y = 5\sqrt{x}$, la recta x y los valores 2 y 8.

Para calcular el área del primer trapecio, tenemos que la base menor $b = 5\sqrt{2} + 3 = 7,07$ es decir el valor de la función calculada en $X = 2$; la base mayor $B = 5\sqrt{3} + 3 = 8,66$ o el valor de la función calculado en $X = 3$. Esta base mayor corresponde con la base menor del siguiente trapecio, y como se vio cada base de trapecio se calcula encontrando el valor de la componente y para el valor x correspondiente al límite de cada intervalo tomado.

El primer trapecio tiene como área $A_1 = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(7,07 + 8,66) \cdot 1}{2} = 7,87$

Para el siguiente trapecio la base menor es 8,66 y la mayor $B = 5\sqrt{4} + 3 = 10$.

El segundo trapecio tiene como área $A_2 = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(8,66 + 10) \cdot 1}{2} = 9,33$

El tercer trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{5} + 3 = 11,18$, y área $A_3 = \frac{(10 + 11,18) \cdot 1}{2} = 10,59$

El cuarto trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{6} + 3 = 12,25$, y área $A_4 = \frac{(11,18 + 12,25) \cdot 1}{2} = 11,71$

El quinto trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{7} + 3 = 13,23$, y área $A_5 = \frac{(12,25 + 13,23) \cdot 1}{2} = 12,74$

El sexto trapecio tiene como base mayor $B = 5\sqrt{8} + 3 = 14,14$, y área $A_2 = \frac{(13,23 + 14,14) \cdot 1}{2} = 13,69$

Por tanto el área total a medir es $A = 7,87 + 9,33 + 10,59 + 11,71 + 12,74 + 13,69 = 65,93$. Lo cual es una buena aproximación ya que el valor real es muy cercano a 66.

Conclusión: La integral definida de $y = 5\sqrt{x}$ entre 2 y 8 es 66, ó $\int_2^8 5\sqrt{x} dx = 66$.

Una mejor aproximación se logra si se toma un mayor número de trapecios ya que logramos delimitar mejor el área a medir. En este caso hemos tomado 6 pero podríamos tomar 32 por ejemplo y para no demorar en el procedimiento usamos un programa de computador y obtenemos un área de 65,99 que constituye una mejor aproximación. La actividad 1, le permitirá verificar también esta forma de aproximación con el apoyo del software.

2.2 Integración definida

Explicación 1. Integral Definida

La integral definida de una función continua f en un intervalo desde $x=a$ hasta $x=b$ es el cambio neto de una antiderivada de f en ese intervalo. En forma simbólica, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, donde $F'(x)=f(x)$, el integrando es $f(x)$, el límite superior es b y el límite inferior es a .

En palabras más coloquiales, la integral definida la obtenemos ejecutando el proceso de integración usando la regla que aplique al caso, luego reemplazamos en el resultado el límite superior, y por otro lado reemplazamos también el límite inferior. Por ultimo restamos estos últimos valores y obtendremos la integral definida.

Tenga en cuenta que no puede haber integral definida si no hay unos límites de integración superior e inferior.

Nota

No se debe confundir una integral definida con una integral indefinida. La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ es un número real; la integral indefinida $\int f(x) dx$ es un conjunto de funciones, todas antiderivadas de $f(x)$ que entre ellas sólo se diferencian en el valor de la constante de integración.

Ejemplo 3. Integración Definida

Volvamos a los casos de los ejemplos uno y dos. En el primero se calculó gráficamente la integral definida correspondiente al área bajo la curva $y=0,5x+3$ entre los valores de x : 5 y 10 es decir $\int_5^{10} (\frac{1}{2}x + 3)dx$.

Siguiendo el proceso indicado en la definición 1, tenemos que aplicando la regla de integración de la potencia llegamos a:

$$\int_5^{10} (\frac{1}{2}x + 3)dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + K \right]_5^{10} = \left[\frac{x^2}{4} + 3x + K \right]_5^{10}, \quad \text{Ahora reemplazamos los}$$

valores extremos:

$$\left(\frac{10^2}{4} + 3 \cdot 10 + K \right) - \left(\frac{5^2}{4} + 3 \cdot 5 + K \right) = 55 - 21,25 = 33,75, \quad \text{por otro camino hemos}$$

$$\text{llegado a que } \int_5^{10} (\frac{1}{2}x + 3)dx = 33,75.$$

En el ejemplo 2 se calculó gráficamente la integral definida que corresponde al área bajo la curva de $y = 5\sqrt{x}$ entre 2 y 8 es 66, ó $\int_2^8 5\sqrt{x}dx$. Incorporando a este ejercicio nuestro nuevo método, tenemos que:

$$\int_2^8 5\sqrt{x}dx = \int_2^8 5x^{\frac{1}{2}}dx, \quad \text{re-expresando según la definición de raíz. Ahora aplicando}$$

$$\text{la regla de la integral de una potencia tenemos } \int_2^8 5x^{\frac{1}{2}}dx = \left[5 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^8 = \left[5 \cdot 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_2^8.$$

Ahora reemplazamos los límites superior e inferior y tenemos:

$$\left[10 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_2^8 = 10 \frac{8^{\frac{3}{2}}}{3} - 10 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} = 75,93 - 9,43 = 66$$

Es decir: $\int_2^8 5\sqrt{x}dx = 66$. En este caso se nota que el segundo proceso resulta más sencillo.

2.3 Aplicaciones de la integración definida

Explicación 2. Excedente del Consumidor.⁴

⁴ Adaptado de DRAPER Jean E. "Matemáticas para la Administración y Economía", obra citada. Págs. 426-428.

Una función de demanda representa las cantidades de un artículo que podrían comprarse a varios precios. Si el precio en el mercado es p_o y la correspondiente demanda en el mercado es q_o , entonces aquellos consumidores que estuviesen dispuestos a pagar un precio mayor que el de este mercado, ganan, por el hecho de que el precio es solamente p_o . Véase la figura 4.

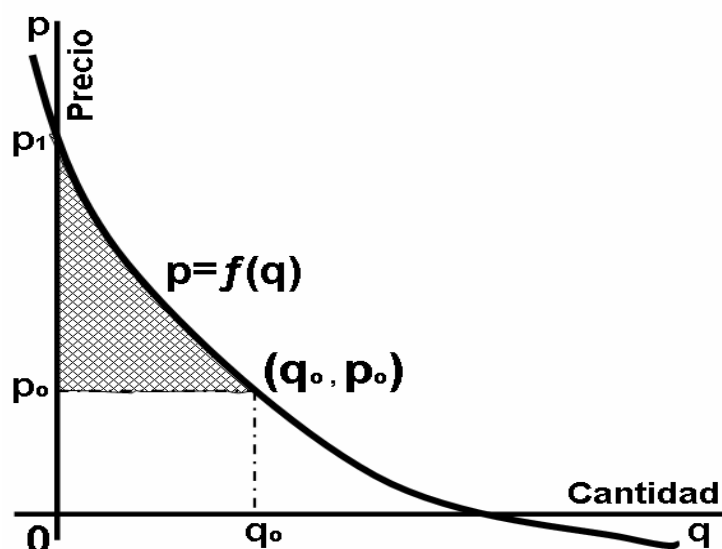


Figura 4. Excedente del consumidor.

El excedente del consumidor mide la riqueza económica desde el lado del comprador.

Bajo ciertas hipótesis económicas la ganancia del consumidor se representa por el área situada debajo de la curva de demanda y por encima de la recta $p=p_o$. Marshall denomina a esta área Excedente del consumidor y se evalúa como:

Excedente del consumidor = $\int_0^{q_o} f(q) dq - q_o p_o$, donde la función de demanda

es $p=f(q)$, o también como: $\int_{p_o}^{p_1} g(p) dp$, donde la función de demanda es $q=g(p)$ y p_1 es el valor de p cuando $q=0$, es decir, p_1 es la ordenada del intercepto con el eje y , de la función de demanda:

Excedente del consumidor = $\int_0^{q_o} f(q) dq - q_o p_o = \int_{p_o}^{p_1} g(p) dp$. Véanse los ejemplos 4 al 6.

Ejemplo 4. Excedente del consumidor

Si la función de demanda es $p = 85 - 4q - q^2$, hallar el excedente del consumidor (a) si $q_0=5$, (b) si $p_0=64$. Véase la figura 5.

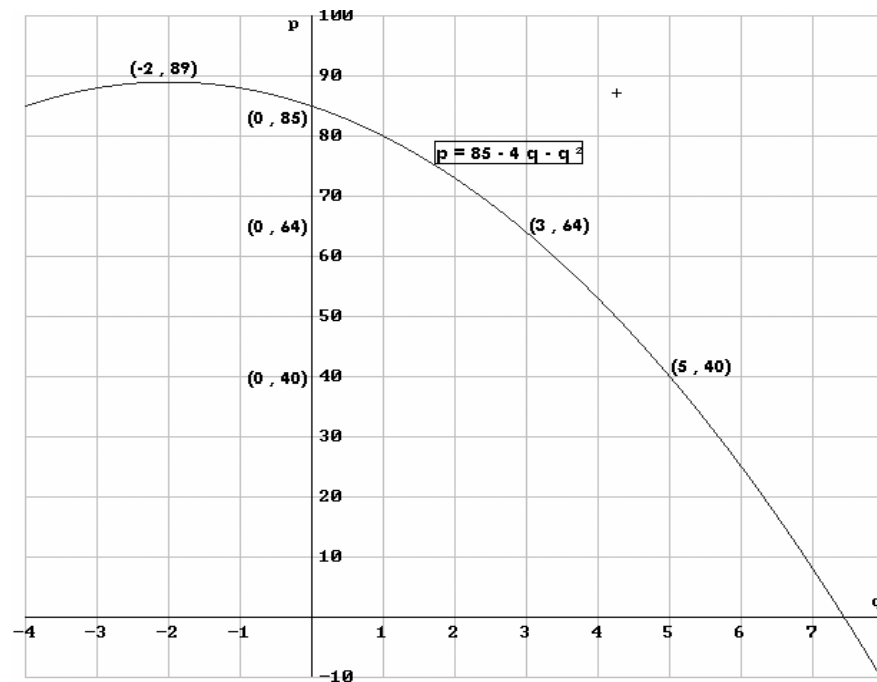


Figura 5. Gráfica de la demanda para el ejemplo 4

$$(a) \quad \text{Excedente del consumidor} = \int_0^5 (85 - 4q - q^2) dq - (5)(40) = \left[85q - 2q^2 - \frac{q^3}{3} \right]_0^5 - 200 = 333,33 - 200 = 133,33$$

$$(b) \quad \text{Excedente del consumidor} = \int_0^3 (85 - 4q - q^2) dq - (3)(64) = \left[85q - 2q^2 - \frac{q^3}{3} \right]_0^3 - 192 = 228 - 192 = 36$$

Ejemplo 5. Excedente del Consumidor

Si la función de demanda es $p = \sqrt{9 - q}$, y $q_0=5$, hallar el excedente del consumidor por dos métodos. Véase la Figura 6.

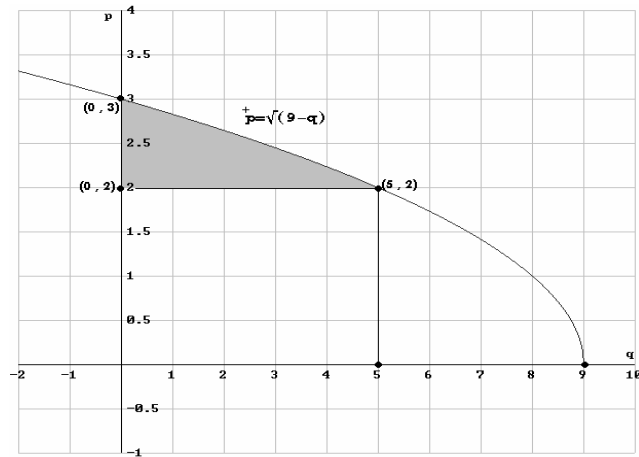


Figura 6. Gráfica de la demanda para el ejemplo 5.

Excedente del consumidor =

$$\int_0^5 (9 - q)^{\frac{1}{2}} dq - (5)(2) = \left[-\frac{2}{3} (9 - q)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 - 10 = -\frac{16}{3} + 18 - 10 = \frac{8}{3}$$

O también, Excedente del consumidor =

$$\int_2^3 (9 - p^2) dp = \left[9p - \frac{p^3}{3} \right]_2^3 = 27 - 9 - 18 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}, \text{ igual que por el otro procedimiento.}$$

Ejemplo 6. Demanda en situación de monopolio

La cantidad vendida y el correspondiente precio, en situación de monopolio, se determinan por medio de la función de demanda $p = 16 - q^2$ y por el costo marginal $MC = \frac{dC}{dq} = 6 + q$ de tal manera que se maximice la ganancia. Determinar el correspondiente excedente del consumidor. Véase la figura 7.

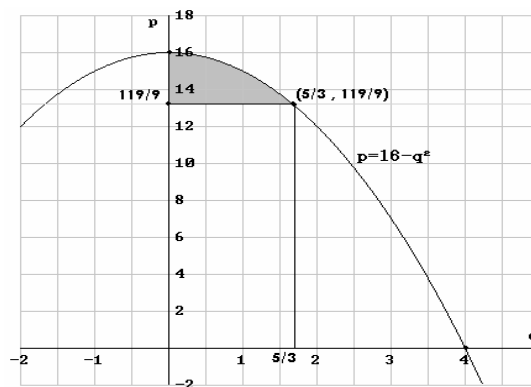


Figura 7. Gráfica del excedente del consumidor para el ejemplo 6.

$$\text{Ingreso} = 16q - q^3$$

$$\text{Ingreso Marginal} = 16 - 3q^2$$

La ganancia se maximiza cuando el ingreso marginal se hace igual al costo marginal, es decir $16 - 3q^2 = 6 + q$, transponemos los términos hacia la izquierda:

$$3q^2 + q - 10 = 0$$

$(3q - 5)(q + 2) = 0$, los valores para q son -2 y $5/3$, sin embargo el que tiene sentido para nuestro fin es $5/3$.

$$P(5/3) = 16 - (5/3)^2 = 119/9, \text{ entonces } q_0 = 5/3, p_0 = 119/9.$$

$$\begin{aligned} \text{Excedente} & \quad \text{para} & \quad \text{el} & \quad \text{consumidor} & \quad = \\ \int_0^{5/3} (16 - q^2) dq - \left(\frac{5}{3} \right) \left(\frac{119}{9} \right) & = \left[16q - \frac{q^3}{3} \right]_0^{5/3} - \frac{595}{27} = \frac{80}{3} - \frac{125}{81} - \frac{595}{27} = \frac{250}{81} \approx 3,09 \end{aligned}$$

Explicación 3. Excedente del Productor.⁵

Cuando se establece un precio de mercado, todos los productores ofrecen ese producto al precio del mercado; pero hay n productores que estarían dispuestos a ofrecer el producto a un precio menor. El excedente del productor es la diferencia entre el precio que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto. El excedente del productor mide la riqueza económica desde el lado del productor.

Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que podrían venderse a varios precios. Si el precio en el mercado es p_0 y la correspondiente oferta en dicho mercado es q_0 , entonces aquellos productores que estuviesen dispuestos a vender el artículo a un precio inferior al de este mercado, ganan, por el hecho de que el precio es p_0 .

Bajo ciertas hipótesis económicas la ganancia total del productor se representa por el área situada encima de la curva de oferta y debajo de la recta $p=p_0$, llamándose esta área el excedente del productor (véase la figura 8) cuya evaluación se hace como:

$$\text{Excedente del productor} = q_0 p_0 - \int_0^{q_0} f(q) dq, \text{ donde la función de oferta es}$$

$p=f(q)$, o también como

$$\text{Excedente del productor} = \int_{p_0}^{p_1} g(p) dp, \text{ donde la función de oferta es } q=g(p) \text{ y}$$

p_1 es el valor de y cuando $x=0$ (es decir, p_1 es el intercepto con p de la función de oferta)

⁵ Adaptado de DRAPER obra citada.

$$\text{Excedente del productor } q_o p_o - \int_0^{q_o} f(q) dq = \int_{p_o}^{p_1} g(p) dp .$$

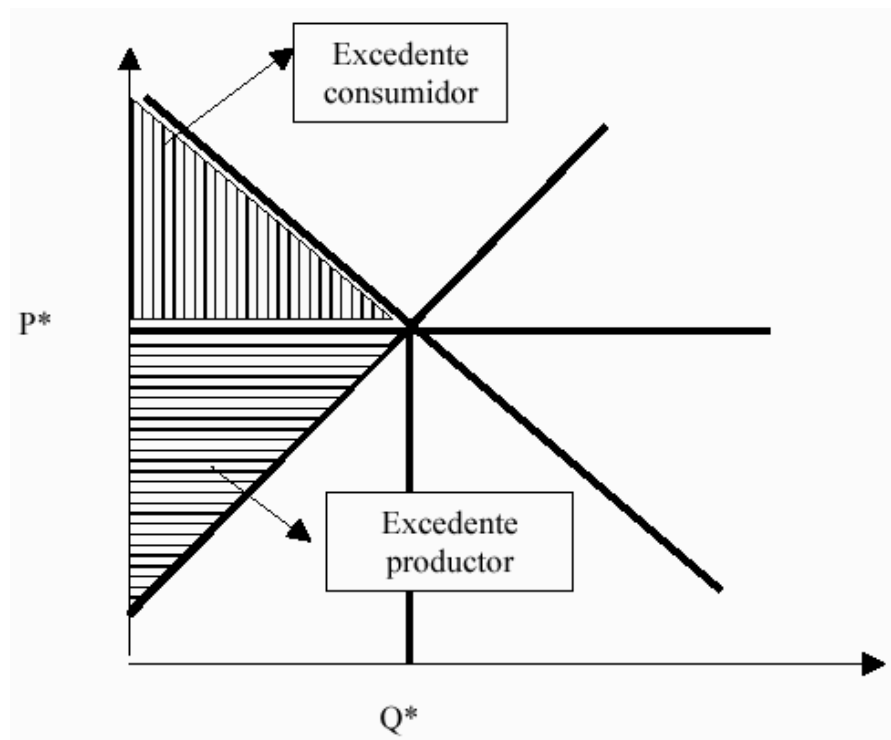


Figura 8. Excedentes del productor y del consumidor.

La suma de los excedentes constituye la contribución que el mercado hace al bienestar general. En competencia perfecta, dicha contribución es máxima. De esta forma, el punto A es un punto de eficiencia pero no un criterio de equidad.

El área del triángulo inferior a las áreas rayadas representa a los recursos productivos empleados en la producción de equilibrio. De esta forma, los recursos productivos están medidos en costos, ya que representan la integral del costo marginal. Por otra parte, si se multiplica base por altura de esa área, se obtiene el costo de los consumidores, o sea, el precio pagado por la cantidad consumida.

Ejemplo 7. Excedente del productor

Si la ecuación de oferta es $p = (q + 2)^2$ y el precio se fija en $p_1 = 25$ hallar el excedente del productor por dos métodos. Véase la figura 9.

$$\text{Excedente del productor} = (3)(25) - \int_0^3 (q + 2)^2 dq = \int_4^{25} (p^{1/2} - 2) dp$$

$$= 75 - \int_0^3 (q + 2)^2 dq = 75 - \left[\frac{(q + 2)^3}{3} \right]_0^3 = 75 - \frac{125}{3} + \frac{8}{3} = 36$$

Como alternativa,

$$\int_4^{25} (p^{\frac{1}{2}} - 2) dp = \left[\frac{2p^{\frac{3}{2}}}{3} - 2p \right]_4^{25} = \frac{250}{3} - 50 - \frac{16}{3} + 8 = 36$$

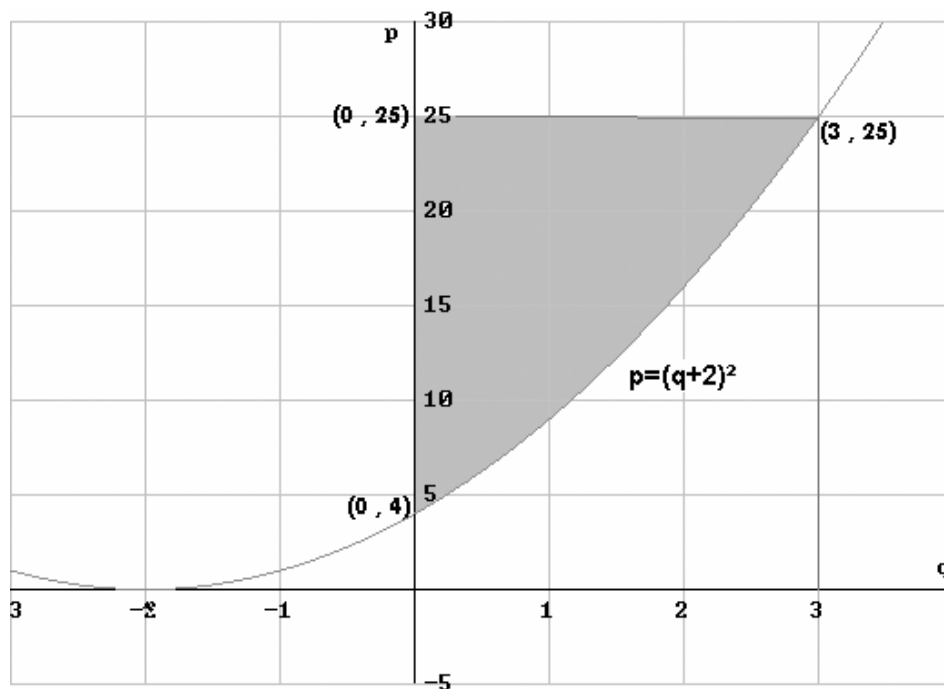


Figura 9. Excedente del productor para el ejemplo 7.

Ejemplo 8. Excedente del productor en el punto de equilibrio

La cantidad demandada y el precio correspondiente, en situación de competencia pura se determinan por medio de las funciones de demanda y de oferta, $p = 16 - q^2$ y $P = 4 + q$, respectivamente. Determinar el correspondiente excedente del productor (véase la figura 10).

$$p = 16 - q^2 = 4 + q$$

$$q^2 + q - 12 = 0$$

$$(q + 4)(q - 3) = 0$$

$q=3$ y $q=-4$, sólo nos interesa el valor que aplica es decir $q=3$.

$q_1=3$ reemplazando en una de las ecuaciones de oferta o de demanda: $p_1=7$.

$$\text{Excedente del productor} = (3)(7) - \int_0^3 (4 + q) dq = 21 - \left[4q + \frac{q^2}{2} \right]_0^3 = 21 - 12 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

El área representada por $\int_0^3 (4 + q) dq$ habría podido evaluarse también como

$$\text{por la fórmula del área del trapecio, } A = \frac{(b + B)h}{2} = \frac{(4 + 7)3}{2} = \frac{33}{2}.$$

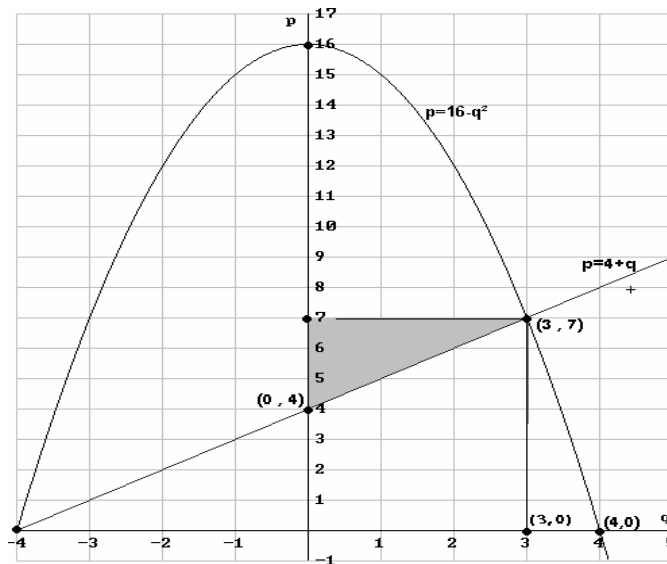


Figura 10. Excedente del productor para el ejemplo 8.

Ejemplo 9. Ambos excedentes

La cantidad demandada y el correspondiente precio, en situación de competencia pura, se determinan con las funciones de demanda y oferta, $p = 36 - q^2$ y $p = 6 + \frac{q^2}{4}$, respectivamente. Determinar el correspondiente excedente del consumidor y el excedente del productor. (Véase la figura 11).

$p = 36 - q^2 = 6 + \frac{q^2}{4}$, dado que el equilibrio se registra cuando demanda y oferta son iguales, entonces igualamos las dos fórmulas y luego despejamos el valor de q .

$$5q^2 = 120$$

$$q^2 = 24$$

$$q = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Excedente del consumidor} = \int_0^{2\sqrt{6}} (36 - q^2) dq - (2\sqrt{6})(12) = \left[36q - \frac{q^3}{3} \right]_0^{2\sqrt{6}} - 24\sqrt{6} =$$

$$72\sqrt{6} - 16\sqrt{6} - 24\sqrt{6} = 32\sqrt{6} \approx 78,4$$

$$\text{Excedente del productor} = (2\sqrt{6})(12) - \int_0^{2\sqrt{6}} \left(6 + \frac{q^2}{4} \right) dq =$$

$$24\sqrt{6} - 12\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6} \approx 19,6$$

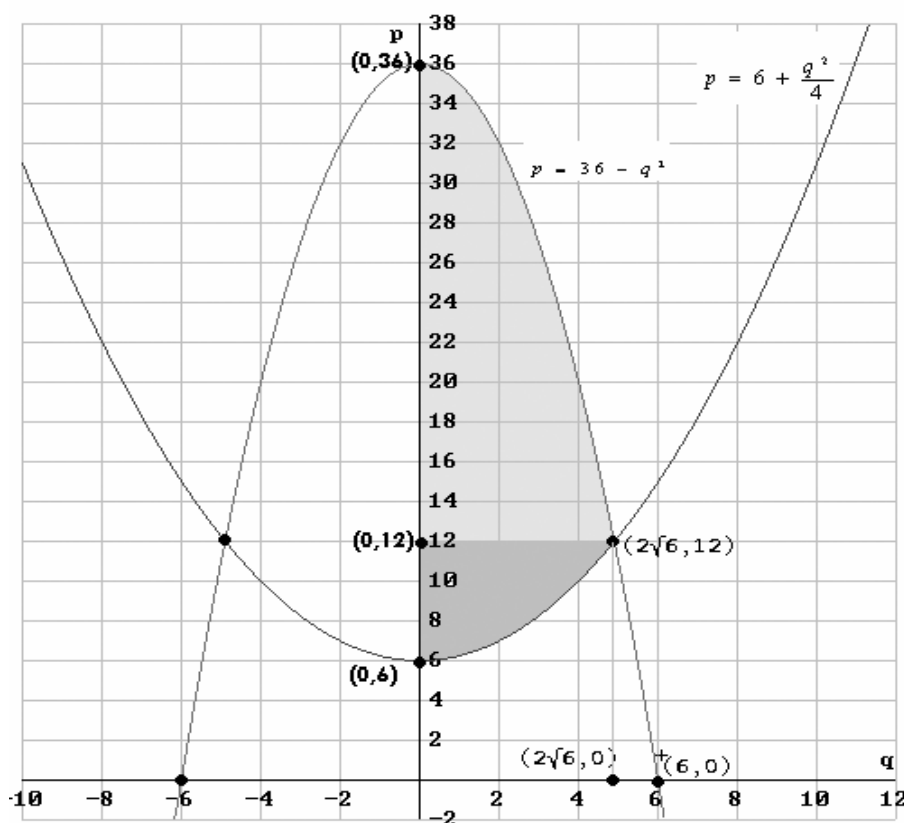


Figura 11. Excedentes del consumidor y del productor para el ejemplo 9.

Explicación 4. Ingreso Vs. Costo

La integración puede utilizarse en economía para determinar la utilidad total o las ganancias netas totales en varios contextos. En general la utilidad se maximiza (suponiendo que es un modelo de competencia perfecta) cuando el ingreso marginal se iguala con el costo marginal y la ganancia total es la integral de la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal desde una cantidad cero hasta la cantidad para la cual la utilidad se maximiza.

Recuerde del módulo de Matemática 1, que el ingreso marginal es el recibido por la venta de un artículo más y se obtiene matemáticamente como la derivada del ingreso total, mientras que el costo marginal es la variación en el costo por producir un artículo adicional y se obtiene matemáticamente como la derivada del costo total.

De acuerdo con lo anterior, podemos también encontrar la función de costo total cuando conocemos la variación en el costo que se presenta al producir un artículo adicional, integrando la función costo marginal llegamos a la función de costo total, donde la constante de integración es el costo de producir cero artículos es decir el costo fijo.

Para el ingreso total tenemos un proceso similar. El ingreso total se obtiene como la integral del ingreso marginal, teniendo como constante de

integración el valor cero, ya que se sabe que si no hay producción y venta, entonces no hay ingreso; a no ser que la actividad se encontrara subsidiada por el Estado, caso en el cual la constante de integración correspondería a dicho monto.

Ejemplo 10. Utilidad Máxima

Hallar la cantidad producida que maximice la utilidad y determinar la utilidad total en dicho punto si las funciones de ingreso marginal y de costo marginal están dadas por:

$$MR = 25 - 5q - 2q^2$$

$$MC = 10 - 3q - q^2$$

Haciendo $MR - MC = 0$

$$25 - 5q - 2q^2 - 10 + 3q + q^2 = 0$$

$$15 - 2q - q^2 = 0$$

$$(5 + q)(3 - q) = 0$$

$q = -5$ y $q = 3$. No nos interesa el valor -5 por que no hay producciones negativas, por lo que el valor que nos sirve es $q = 3$.

La primera derivada de $MR - MC$ es la segunda derivada de la utilidad total y, por lo tanto, su signo indica si la utilidad se maximiza o se minimiza para un valor particular de q .

$$\frac{d}{dq}(MR - MC) = \frac{d^2U}{dq^2} = -2 - 2q = -8, \text{ así la utilidad se maximiza para } q = 3.$$

$$\text{Utilidad total} = \int_0^3 (15 - 2q - q^2) dq = \left[15q - q^2 - \frac{q^3}{3} \right]_0^3 = 45 - 9 - 9 = 27.$$

Ejemplo 11. Valor de salvamento

Una compañía manufacturera de la cual el Estado es socio, ha comprado una máquina cuya producción representa ganancias adicionales (ingreso adicional menos costo adicional de mano de obra y materiales) en un tiempo t , de $E(t) = 225 - \frac{1}{4}t^2$, donde $E(t)$ está en unidades de 10.000 dólares y t está en años. El costo adicional de reparación y mantenimiento en el tiempo t es $R(t) = 2t^2$ donde $R(t)$ está en unidades de 10.000 dólares y t está en años.

Primeramente supóngase que se puede eliminar la máquina en cualquier tiempo sin costo alguno o valor de salvamento. Entonces debe retirarse la máquina en el momento en que las ganancias adicionales se igualan con el costo adicional de reparación y mantenimiento. Véase la figura 12.

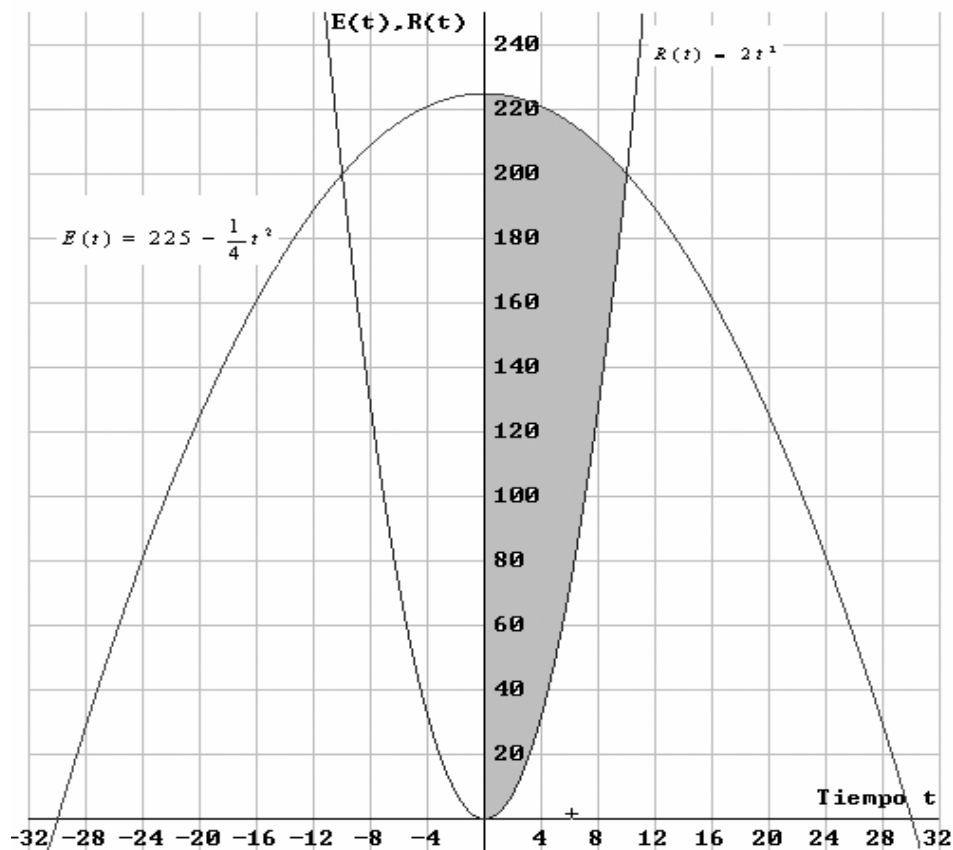


Figura 12. Cuando las ganancias adicionales se igualan con el costo de mantenimiento.

Las ganancias adicionales se igualan con el costo de reparación y mantenimiento cuando

$$225 - \frac{1}{4}t^2 = 2t^2$$

$$225 = \frac{9}{4}t^2$$

$$t^2 = 100$$

$$t = 10.$$

Por lo tanto, debe retirarse la máquina después de 10 años. Las ganancias netas totales (ganancias menos costo de reparación y mantenimiento) después de 10 años son

$$\int_0^{10} [E(t) - R(t)] dt = \int_0^{10} (225 - \frac{9}{4}t^2) dt = \left[225t - \frac{3}{4}t^3 \right]_0^{10} = 2.250 - 750 = 1.500 \quad \text{ó}$$

U\$1.500.000.

Ahora, agreguemos que la máquina tiene un valor de salvamento en un tiempo t de $S(t) = \frac{6480}{6+t}$, donde $S(t)$ está en unidades de 10.000 dólares y t está en años. Entonces la compañía maximizará sus ganancias netas si suprime la máquina dentro de un tiempo t cuando las ganancias netas después de T igualen el valor del salvamento en T (Véase la figura 13).

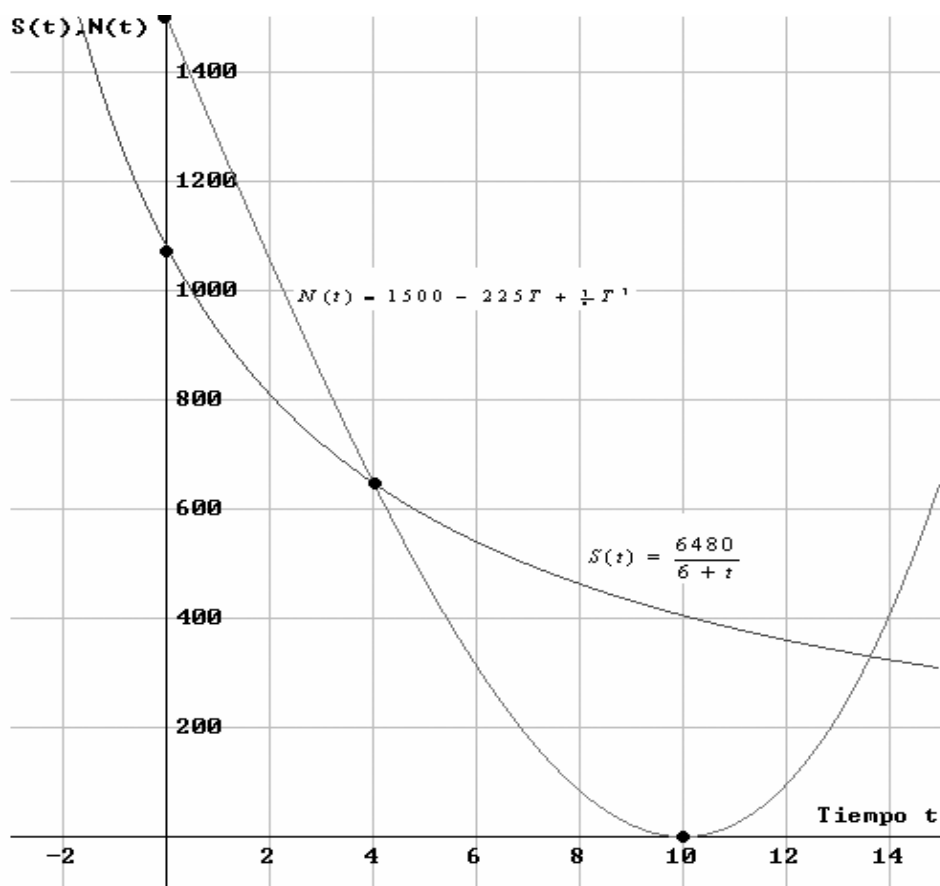


Figura 13. Gráfica para el ejemplo 11.

Las ganancias netas después de T igualan al valor de salvamento en T cuando

$$\frac{6.480}{6+T} = \int_T^{10} (225 - \frac{9}{4}t^2) dt$$

$$\frac{6.480}{6+T} = 1500 - 225T + \frac{3}{4}T^3, \text{ de donde } N(t) = 1500 - 225T + \frac{3}{4}T^3. \text{ Pero, sigamos:}$$

$$6.480 = 9.000 - 1.350T + \frac{9}{2}T^3 + 1.500T - 225T^2 + \frac{3}{4}T^4$$

$$0 = 2.520 + 150T - 225T^2 + \frac{9}{2}T^3 + \frac{3}{4}T^4 = (T-4)(\frac{3}{4}T^3 + \frac{15}{2}T^2 - 195T - 630), \quad \text{si este}$$

producto es igual a cero entonces $T - 4 = 0$, o el otro factor es cero. Con la primera hipótesis llegamos a una respuesta coherente. Por lo tanto, debe retirarse la máquina después de cuatro años.

Ejemplo 12. Ingreso Total

Una Entidad Promotora de Salud EPS está considerando la adición a su nómina de vendedores de planes complementarios. El costo del empleo de vendedores adicionales es: $5y^2 = 48x$ donde y representa el costo en unidades de 10.000 dólares y x es el número de vendedores adicionales empleados, y el ingreso adicional es $(R-2)^2 = 4(x+10)$, donde R es el ingreso en unidades de 10.000 dólares y x es el número de vendedores adicionales empleados.

(Supóngase que las funciones de costo y de ingreso son continuas, aunque realmente ellas tienen significado solamente para valores enteros de x). La entidad empleará vendedores adicionales hasta cuando el costo de esta adición iguale al ingreso adicional obtenido (véase la figura 12).

El costo de empleo de vendedores adicionales se iguala con el ingreso adicional obtenido si $R=y$:

$$(R - 2)^2 = 4(x + 10)$$

$$R^2 - 4R + 4 = 4x + 40$$

$$R^2 - 4R - 36 = 4x$$

Por lo tanto, $R=y$ cuando

$$y^2 - 4y - 36 = \frac{5y^2}{12}$$

$$7y^2 - 48y - 432 = 0$$

$$(7y + 36)(y - 12) = 0$$

$$y=12, y=-36/7$$

y deben emplearse 12 vendedores adicionales. El ingreso neto total resultante (ingreso total menos costo) es

$$\int_0^{12} \left[\frac{5}{48} y^2 - \frac{1}{4} y^2 + y + 9 \right] dy = \int_0^{12} \left[y + 9 - \frac{7}{48} y^2 \right] dy = \left[\frac{y^2}{2} + 9y - \frac{7}{144} y^3 \right]_0^{12} = 72 + 108 - 84 = 96$$

unidades o 96.000.

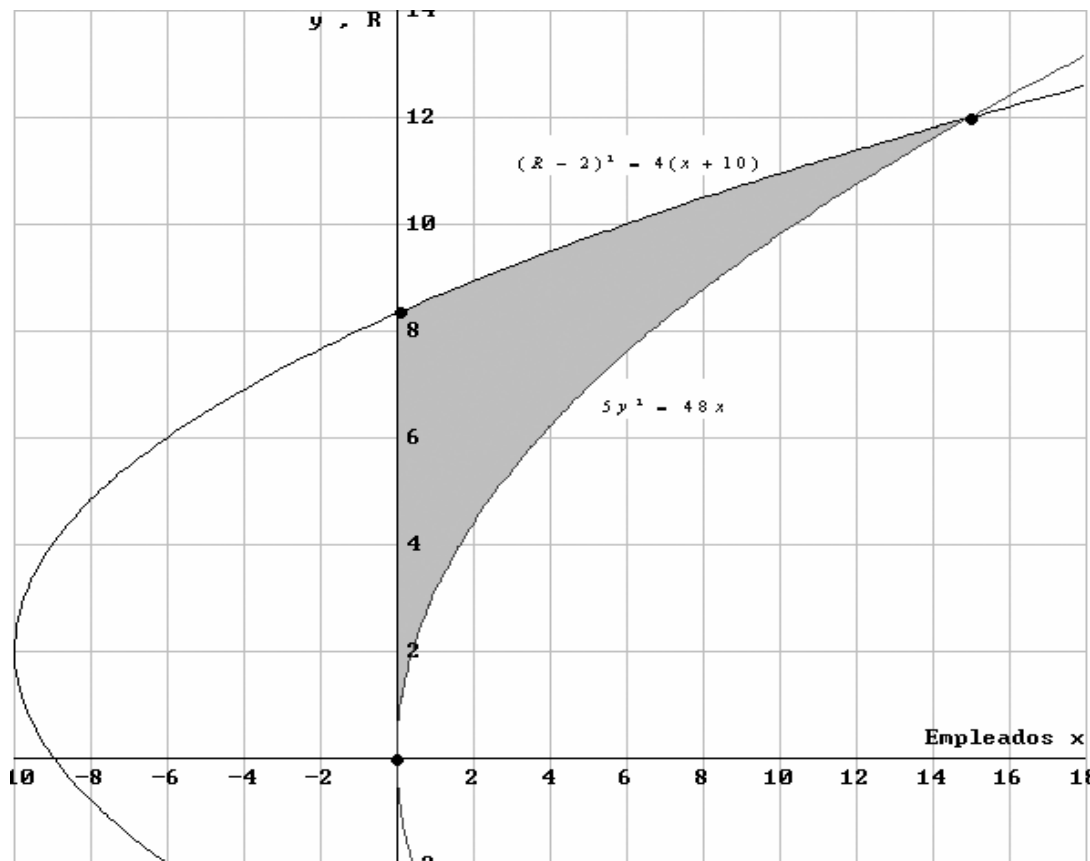


Figura 14. Relación Ingreso Vs. Costo.

2.4 Práctica con Integral y derive

Actividad 1. Integración por trapecios

En el CD-ROM de fundamentación está el software "Integral" instálelo en el computador en una carpeta independiente y ejecute el programa "RUNME.BAT" de esa carpeta. Elija la opción 2 de monitor a color. A la pregunta de ver instrucciones "would you like some instrucciones?" responda "Yes" la primera vez que abra el programa. Para salir de la ayuda pulse ESC.

En el menú "Create Integrals" haga clic en la opción "Create Integral" como se indica la figura 15. Use las teclas de flechas para desplazarse por los menús ya que el Mouse puede presentarle problemas.

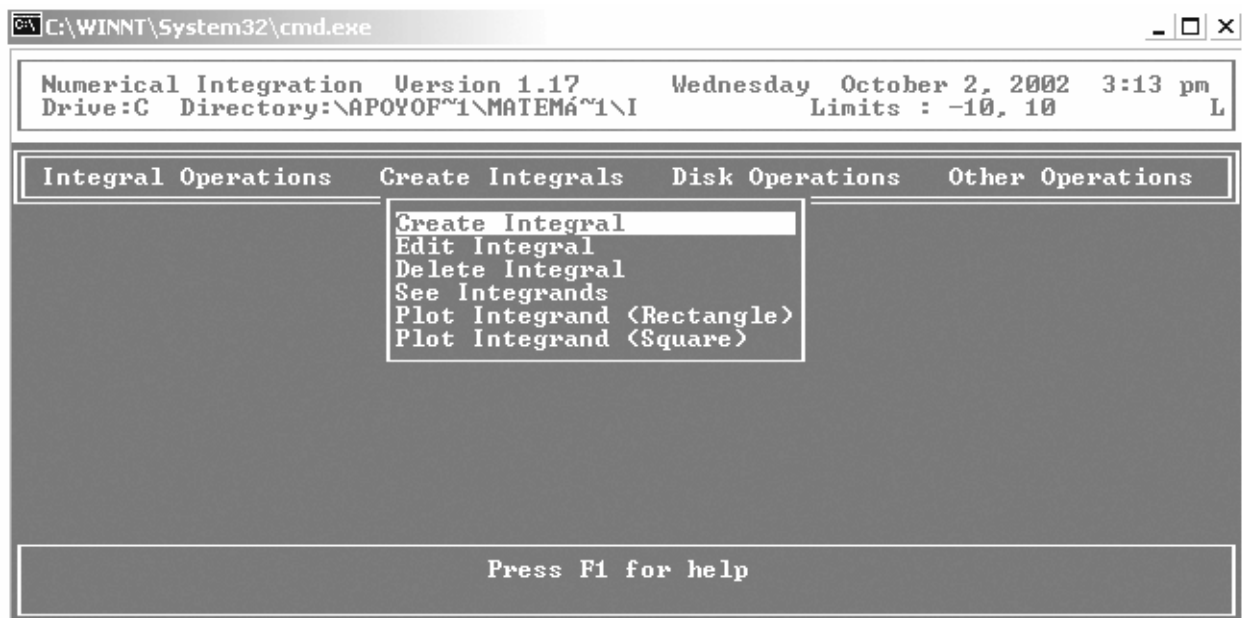


Figura 15. Software "Integral".

En la ventana escriba la siguiente ecuación: $5 * \text{SQRT}(X)$ y pulse ENTER.

El programa solicitará el límite inferior de la integral "Lower x limit:", escriba 2 y pulse ENTER. Luego solicitará el límite superior de la integral "Upper x limit:", escriba 8 y pulse ENTER.

En el menú "Integral Operations" escoja la opción "Trapezoidal Rule" y pulse ENTER unas seis veces, entonces aparecerá una tabla que va mostrando a la izquierda el número de trapecios y a la derecha el valor de la integral obtenida con ese número de trapecios. Véase la figura 16. Revise el ejemplo 2 y compare. ¿Qué conclusión tiene usted respecto del número de trapecios? ¿A que valor se aproxima el valor del área cuando aumenta el número de trapecios?

Intervals : Integral by trapezoidal rule	
1	63.6396103067893
2	65.3608248158915
4	65.832950784321
8	65.9553380416985
16	65.9862836553266
32	65.9940439585395
64	65.9959855695852
128	65.996471068999
256	65.9965924499044
512	65.9966227955092
1024	65.9966303819341
2048	65.9966322785417

Figura 16. Aproximación a la integral definida usando trapecios.

Actividad 2. Integración definida Usando Derive

En el computador, ingrese al programa Derive.

Digite la ecuación x^2+3 en la ventana de ecuaciones como: x^2+3 y pulse Enter.

El objeto de esta actividad es representar y obtener con Derive $\int_1^5 (x^2 + 3)dx$ que representa el área limitada por $y=x^2+3$, $y=0$, $x=1$, y $x=5$, como se ilustra en la figura 18 generada por derive.

Genere la gráfica correspondiente, siguiendo el mismo procedimiento de la actividad con Derive del capítulo anterior. Seleccione del menú "Seleccionar" la opción "Rango de la gráfica" o simplemente pulse *Control + R*. Como rango de la gráfica los siguientes: Horizontal desde -1 hasta 6 con 7 divisiones, vertical desde -2 hasta 30 con 16 divisiones.

Ahora posicionado en la ventana de ecuaciones de Derive seleccione del menú "Cálculo" la opción "Integrales" o pulse *Control + Shift + I*. Seleccione la opción integral definida y digite los límites del intervalo de integración como se muestra en la figura 17 y haga clic en el botón "Simplificar", debe obtener el valor $160/3$ y al hacer clic en el ícono \approx obtendrá el valor 53,33.



Figura 17. Parámetros de integración indefinida.

Ahora, desde la ventana de ecuaciones introduzca la orden ***PlotInt(x^2 + 3, x, 1, 5)*** y pulse *Enter*, luego grafique esa expresión, y deberá obtener un resultado similar al de la figura 18.

Las gráficas de las figuras de este capítulo fueron generadas con Derive, repase el capítulo generando las gráficas usted mismo.

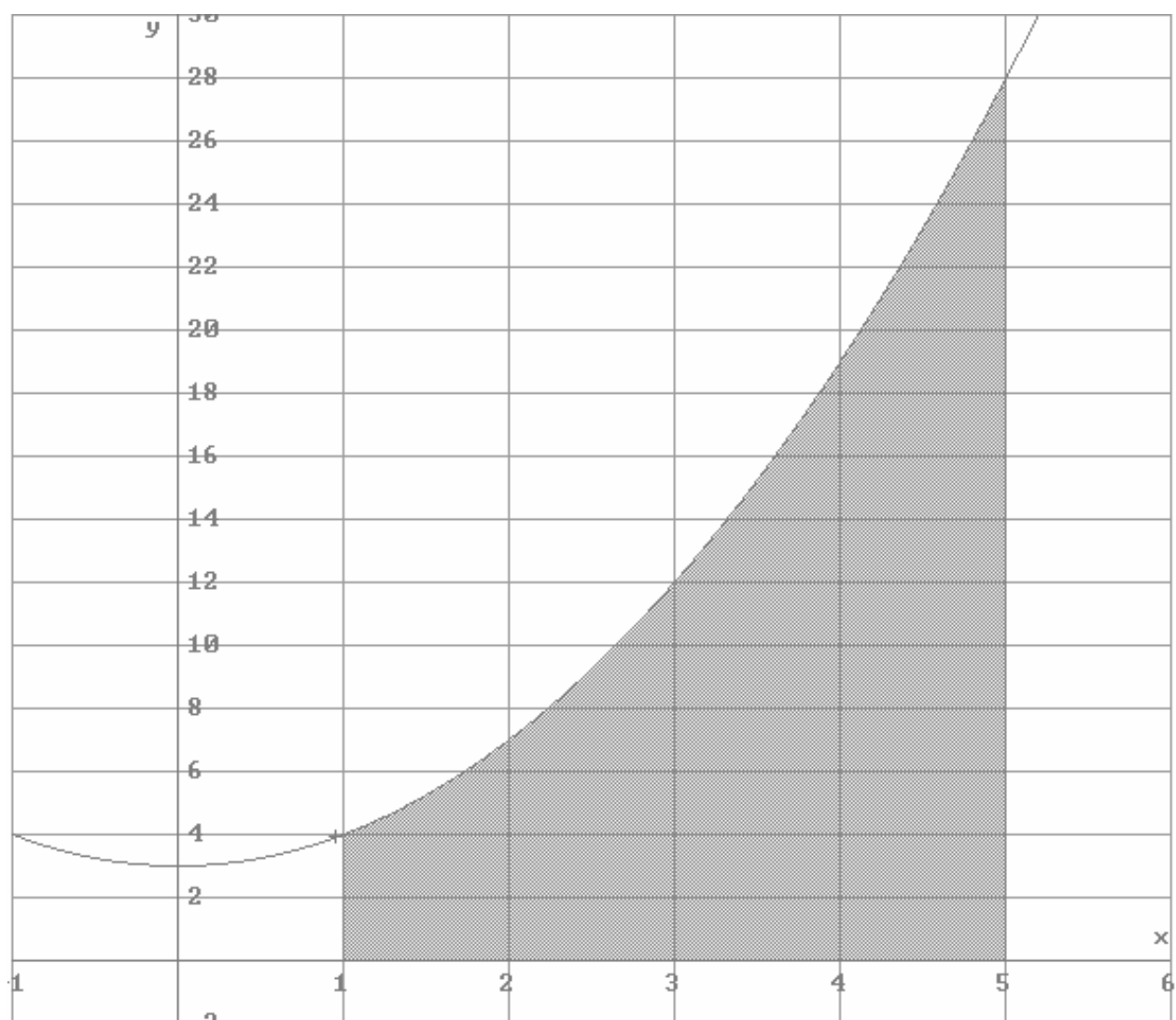


Figura 18. Grafica de un área generada por Derive.

Unidad 2. Integral Definida

Actividades de aprendizaje

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

Calcular cada una de las siguientes integrales definidas y verificar la respuesta

1. $\int_2^3 2x dx$, Rta. 5

2. $\int_3^4 5dx$, Rta. 5

3. $\int_0^4 (3x^2 - 4)dx$, Rta. 48

4. $\int_0^1 24x^{11} dx$, Rta. 2

5. $\int_1^2 (2x^{-2} - 3)dx$, Rta. -2

6. $\int_1^4 3\sqrt{x} dx$, Rta. 14

7. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo., Rta. 15.625

8. ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo., Rta. 7.82

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

1. **Determinación de excedentes.** La función de demanda para un producto es $p = f(q) = 100 - 0,05q$, donde p es el precio por unidad (en dólares) de q unidades. La función de oferta es $p = g(q) = 10 + 0,1q$. Determinar los excedentes de consumidores y productores bajo el equilibrio del mercado. Usar derive para generar el gráfico respectivo.

2. **Determinación de Excedentes.** La ecuación de demanda para un producto es $q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$ y la ecuación de oferta es $q = g(p) = P - 1$. Determinar el excedente de los consumidores y el de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

3. **Excedentes bajo equilibrio.** En los siguientes casos la primera ecuación es la de demanda y la segunda es la ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de consumidores y el excedente de productores bajo equilibrio del mercado.

a. $p = 20 - 0,8q$, $p = 4 + 1,2q$.

b. $p = \frac{50}{q + 5}$, $p = \frac{q}{10} + 4,5$.

c. $q = 100(10 - p)$, $q = 80(p - 1)$.

4. **Excedente de consumidores.** La ecuación de demanda de un producto es $q = 10\sqrt{100 - p}$. Calcule el excedente de consumidores bajo el equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.
5. **Excedente de consumidores.** La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{11-q}$, y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+1}$, donde p es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando q unidades se demandan o se ofrecen. Determine a las 1.000 unidades más cercanas el excedente de consumidores bajo equilibrio del mercado.
6. **Excedentes bajo equilibrio.** La ecuación de demanda para un producto es $p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3.600}}$ y la ecuación de oferta es $p = 10 \ln(q + 20) - 26$. Determine el excedente de consumidores y el de productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.
7. **Distribución de Ingresos.** El economista Wilfredo Pareto⁶ estableció una ley empírica de distribución de ingresos superiores que da el número N de personas que reciben x o más dólares. Si $\frac{dN}{dx} = -ax^{-b}$, donde a y b son constantes, obtenga una integral definida que de el número total de personas con ingresos entre a y b , siendo $a < b$.
8. **Flujo continuo de ingreso.** El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2.000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente esta dado por $\int_0^5 2.000e^{-0,06t} dt$. Evalúe el valor actual al dólar más cercano.
9. **Demografía.** Para cierta población, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama función de la tabla de vida. Bajo condiciones apropiadas, la integral $\int_n^{x+n} l(t) dt$ da el número esperado de gente en la población que tiene entre exactamente x y $x+n$ años, inclusive. Si $l(x) = 10.000\sqrt{100 - x}$ determine el número de gente que tiene exactamente entre 36 y 34 años inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano ya que respuestas fraccionarias no tienen sentido.

⁶ Véase el módulo Matemática 1. Páginas 124 y 125.

10. **Costo marginal.** La función de costo marginal de un fabricante es $\frac{dc}{dq} = 0,2q + 3$. Si c está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 60 a 70 unidades.
11. **Ingreso marginal.** La función de ingreso marginal de un fabricante es $\frac{dr}{dq} = MR = \frac{1.000}{\sqrt{100q}}$. Si r está en dólares, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 400 a 900 unidades.
12. **Curva de Lorentz.** Una curva de Lorentz se usa para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de los receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de los ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la línea $y=x$ en la figura 19, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, el 10% de la gente recibe el 10% de los ingresos totales, el 20% recibe el 20% de los ingresos, etc. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorentz definida por $y = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x$. Observe, por ejemplo, que el 30% de la gente recibe sólo el 10% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el coeficiente de desigualdad para una curva de Lorentz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal: $\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}$. Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz definida antes.

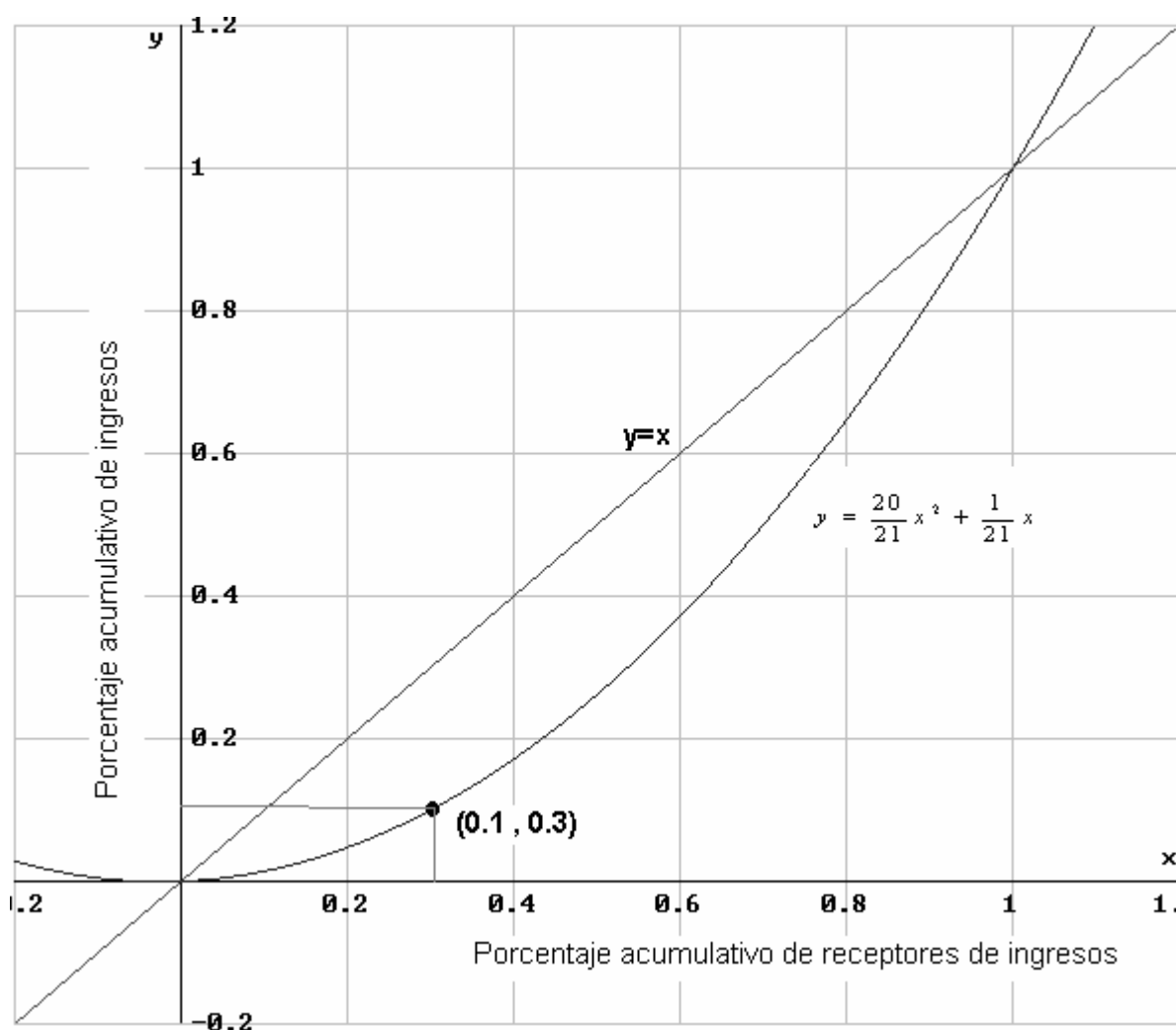


Figura 19. Curva de Lorentz para el problema 12

RESPUESTAS

1. CS=9.000 y PS=18.000
2. CS=72,85 y PS=32.
3. (a) CS=25,6 y PS=38,4; (b) CS=50 LN(2)-25 y PS=1,25; (c) CS=800 y PS=1.000.
4. CS= \$426,67.
5. CS= \$254.000.
6. CS=1.197 y PS=477.
7. $\int_a^b -ax^{-b} dx$.
8. \$8.639.
9. 1.973.333.
10. \$160.
11. \$2.000.
12. 20/63.

Unidad 2. Integral Definida

Autoevaluación

1. Al introducir un impuesto, el precio que paga el consumidor es distinto del que percibe el productor. Esa diferencia representa, justamente, el impuesto. Cuando se introduce o se incrementa un impuesto, se desplaza hacia arriba el costo marginal de la empresa; por lo tanto,
 - a. Se desplaza hacia abajo la curva de oferta.
 - b. Se desplaza hacia arriba la curva de oferta.
 - c. No se logra un punto de equilibrio de mercado.
 - d. Aumenta el excedente del consumidor
 - e. Aumentan las cantidades ofrecidas.
2. Las siguientes afirmaciones son verdaderas excepto una. ¿Cual?
 - a. Con el impuesto se produce una apropiación del Estado de los excedentes del consumidor y del productor.
 - b. La parte que es transferida al Estado no representa una pérdida a nivel global.
 - c. Con el impuesto, hay una parte que constituye una pérdida que no la gana nadie.
 - d. La incidencia del impuesto depende de sobre quién recaiga el mismo y no de la elasticidad de las curvas.
 - e. Los productores trasladan la totalidad del impuesto a los consumidores cuando la curva de demanda es perfectamente inelástica.
3. La función de gasto del consumidor representa el gasto mínimo para lograr un nivel de utilidad determinado. La diferencia entre lo que estarían dispuestos a pagar los consumidores para una determinada cantidad de producto y lo que efectivamente pagan, se llama:
 - a. Propensión marginal al consumo.
 - b. Propensión marginal al ahorro.
 - c. Costo marginal.
 - d. Excedente del consumidor.
 - e. Excedente del productor.

4. La diferencia entre lo que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto, se llama:
 - a. Propensión marginal al consumo.
 - b. Propensión marginal al ahorro.
 - c. Costo marginal.
 - d. Excedente del consumidor.
 - e. Excedente del productor.
5. La función del ingreso total se puede obtener como la integral indefinida de:
 - a. El costo marginal.
 - b. La utilidad marginal.
 - c. El ingreso marginal.
 - d. El costo total.
 - e. El ingreso promedio.
6. Podemos llegar a la función de utilidad total usando el proceso de integración indefinida, contando con la siguiente información:
 - a. La función de oferta y el costo fijo.
 - b. La ecuación de demanda y el ingreso promedio.
 - c. Las funciones de costo fijo y costo variable.
 - d. El ingreso marginal y el costo marginal.
 - e. Los excedentes del productor y del consumidor.
7. La antiderivada de la utilidad marginal es lo mismo que:
 - a. La derivada de la utilidad total.
 - b. La derivada de la utilidad media.
 - c. El Ingreso Marginal menos el Costo Marginal.
 - d. La integral indefinida de la utilidad total.
 - e. La integral indefinida de la utilidad marginal.

8. La integral definida entre dos valores a y b de x para una función se define como:
- El área bajo la curva entre $x=a$ y $x=b$.
 - La variación marginal entre $x=a$ y $x=b$.
 - La antiderivada de dicha función.
 - La derivada de dicha función en los puntos a y b .
 - El área entre la curva y el eje y desde $y=a$ hasta $y=b$.
9. La curva de Lorentz se usa para estudiar:
- Las distribuciones de ingresos.
 - La producción máxima.
 - El óptimo de Pareto.
 - Las distribuciones de utilidades.
 - El análisis marginal.
10. Para calcular la integral definida debemos seguir el procedimiento siguiente:
- Calcular la antiderivada de la función y luego reemplazar esta función en el límite superior e inferior. Luego hallar la diferencia de esos dos valores obtenidos.
 - Hallar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ de $[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$. El resultado obtenido es nuestra integral buscada.
 - Hallamos la derivada de la función y luego reemplazamos en ella la diferencia entre los dos límites del intervalo.
 - Hallamos primero la integral indefinida y luego reemplazamos en ella la diferencia entre los límites superior e inferior de la integral.
 - Simplificamos la expresión, aplicamos la regla de integración indefinida y simplificamos el resultado.

Unidad 2. Integral Definida

Síntesis

- El desarrollo del cálculo integral se origina a partir de la necesidad de evaluar el área de figuras irregulares bajo curvas, las cuales representan diferentes fenómenos administrativos y económicos entre otros
- La integral definida nos indica un área entre curvas, y esta área sirve como modelo para representar fenómenos administrativos (gastos de mantenimiento y recaudo de fondos) y económicos (la relación ingreso – costo, el excedente del consumidor y el productor).
- Una función de demanda representa las cantidades de un artículo que podrían comprarse a varios precios
- Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que podrían venderse a varios precios
- El excedente del consumidor mide la riqueza económica desde el lado del comprador
- El excedente del productor es la diferencia entre el precio que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto
- El excedente del productor mide la riqueza económica desde el lado del productor.

Unidad 2. Integral Definida

Bibliografía y Webgrafía

BARNETT R.(1983). "Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales" 2ª Edición. Nueva Editorial Interamericana. México.

DRAPER, J.; KLINGMAN, J. (1976). "Matemáticas para Administración y Economía" Editorial Harla. México.

HAEUSSLER JR E. & PAUL R. (1997). "Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida". 8ª Edición. Editorial Prentice Hall. México

HOFFMAN L.(1980). "Cálculo para Ciencias Sociales y Administrativas". Editorial McGrawHill. Bogotá.

www.xtec.es/~jlagares/integral.esp/integral.htm página WEB que lleva incorporada APPLETs de JAVA para explicar la **integral definida**.

Unidad 2. Integral Definida

Glosario

Propensión marginal al ahorro. La propensión marginal al ahorro (PMS) es la proporción que se ahorra de un peso adicional de renta. ($PMS = \text{variación de la cantidad ahorrada} / \text{variación de la renta}$). La suma de la PMC y la PMS es la unidad, ya que la renta se consume o se ahorra.

Propensión marginal al consumo. La relación entre la variación en el consumo y la variación de la renta, expresada mediante la propensión marginal a consumir (PMC), determina cómo varía el consumo cuando la renta aumenta o disminuye ligeramente. La propensión marginal a consumir es la proporción de un peso en que aumenta el consumo cuando aumenta la renta en un peso. ($PMC = \text{variación de la cantidad consumida} / \text{variación de la renta}$). Una de las hipótesis keynesianas básicas sostiene que la PMC es siempre positiva y menor que la unidad.

Renta Nacional. El PIB, o si se prefiere la "renta nacional", es la suma de lo que una economía ha gastado que es igual a lo que ha ingresado y que es igual a lo que ha producido. El PIB es "lo que da de sí" una economía, lo que "renta" una economía, al igual que decimos la "renta" de una casa. Lo que paga el inquilino es lo que ingresa el propietario.

Valor de reventa. Es el valor monetario que posee un cierto bien después de determinado tiempo, este tiempo debe ser menor al de la vida útil, ya que se supone que un bien u objeto después de cumplir con su vida útil, se desecha. ($\text{Valor Residual} = \text{Valor Neto} - \text{Depreciación Acumulada}$)

Unidad 3. Matrices

Introducción a la Unidad

El objeto de este capítulo será el estudio de los elementos básicos del álgebra matricial, la cual tiene múltiples aplicaciones a la Administración Pública en campos como las finanzas públicas, la prospectiva y los proyectos de desarrollo principalmente.

Para abordar este capítulo, buscando hacer más aplicada la enseñanza de la matemática en aras de un aprendizaje significativo, se estudiarán las matrices orientándolas al análisis de redes sociales. Sin embargo, ello no quiere decir que esta sea la única aplicación de las matrices a lo público o la única que se estudie en el módulo, ya que las próximas unidades abordarán otras aplicaciones en otros campos como son las matrices de impacto cruzado y las matrices de entrada – salida de Leontief entre otras.



Unidad 3. Matrices

Objetivo general

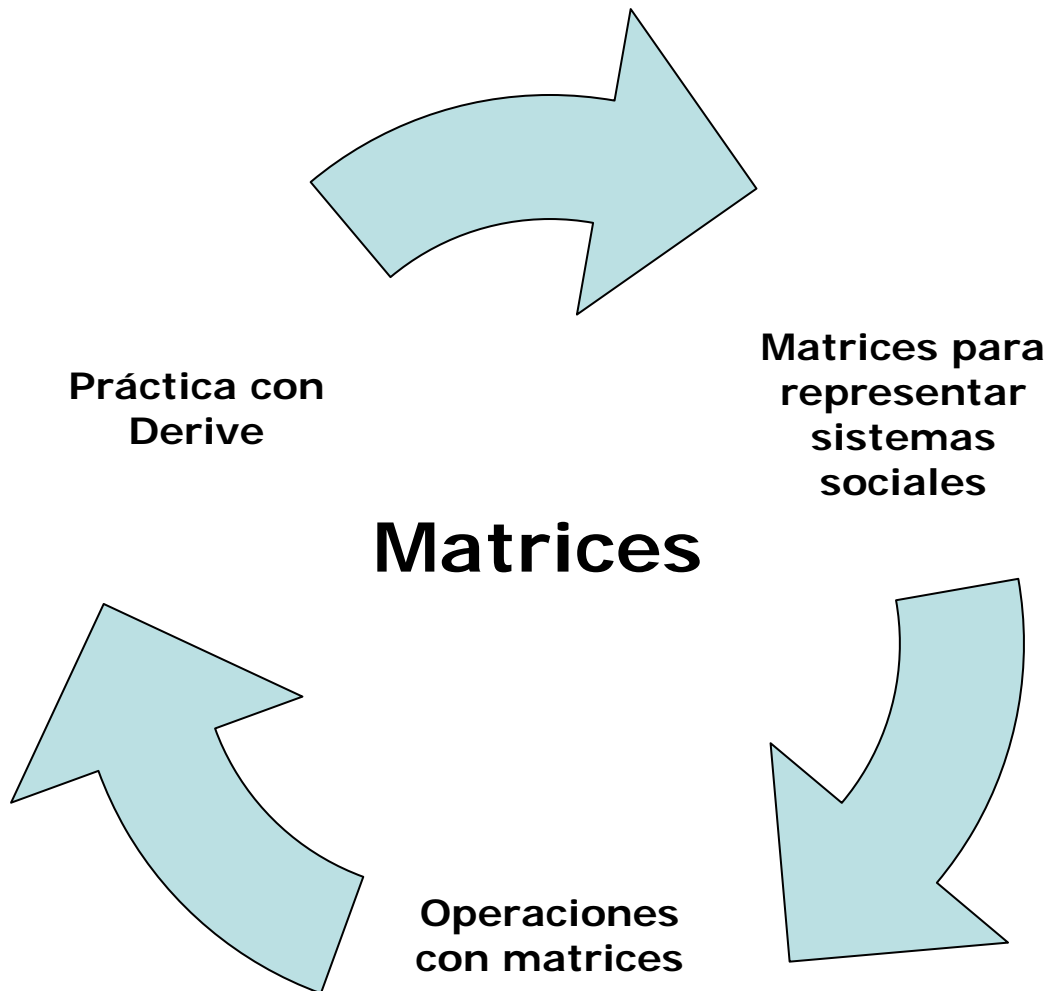
A partir del estudio de los conceptos elementales del álgebra matricial y del desarrollo de ejercicios, adquirir habilidad en el manejo de éstos para luego aplicarlos en situaciones relacionadas con las áreas de dominio de la Administración Pública

Ideas clave

- Las matrices se utilizan en general para representar información asociada a diferentes fenómenos y situaciones como es el caso de las redes sociales
- Matemáticamente las matrices son arreglos de números en filas y columnas que se colocan entre llaves
- Para las matrices entre las operaciones tenemos: suma, resta, producto por un escalar, producto entre matrices y potenciación entre otras. No hay división
- Las matrices permiten representar sistemas de ecuaciones lineales

Unidad 3. Matrices

Mapa conceptual



Unidad 3. Matrices

Contenidos

3.1 Matrices para representar sistemas sociales

La forma más elemental de representar información sobre redes sociales, son los grafos. Sin embargo, cuando existen muchos actores y/o muchas clases de relaciones, éstos pueden hacerse tan visualmente complicados que se hace muy difícil identificar estructuras. En su lugar, también es posible representar la información sobre redes sociales en forma de matrices. De esta forma, la representación de la información permite la utilización de herramientas matemáticas y de computación para identificar estructuras. Los analistas de redes sociales utilizan las matrices de una variedad de formas.⁷

Matemáticamente las matrices son arreglos de números en filas y columnas que se colocan entre llaves. Sin embargo, en las aplicaciones reales no las encontramos de la misma forma, ya que predominan las formas de tabla de doble entrada, entre otras presentaciones. (Véase el **documento 1**).

Extraer la información de un evento o conjunto de eventos para convertirla en una matriz es una de las tareas de mayor cuidado ya que el posterior procesamiento matemático lo hacen las computadoras.

Las matrices pueden representar una situación de mercado, la relación entre los insumos y los productos, las relaciones en una red social, etc. Estas últimas conforman las matrices de adyacencia. (Véase el **documento 2**).

Conformadas las matrices, podemos manipularlas sin alterar su información, intercambiando filas o columnas. Esto nos permite identificar algunas divisiones significativas como bloques, facilitando así el análisis sobre estas. (Véase el **documento 3**).

Para cerrar la unidad, terminamos viendo otro campo de aplicación de las matrices como es la planeación prospectiva de largo plazo, donde las matrices representan las probabilidades relativas de ocurrencia de cada evento dentro de cada escenario. (Véase el **documento 4**).

⁷ Esta unidad es una adaptación de los capítulos dos y cinco del texto de HANNEMAN Robert "Introducción a los Métodos de Análisis en Redes Sociales" traducido por René Ríos del Departamento de Sociología de la Universidad de Chile, para la revista electrónica Redes. 2002.

Documento 1. ¿Qué es una Matriz?

Para comenzar, una matriz es simplemente la disposición rectangular de un conjunto de elementos (de hecho, es un poco más complicado que eso, pero las matrices de más de dos dimensiones no se incluyen aquí). El tamaño de los rectángulos viene dado por el número de filas y columnas de elementos que contienen. Una matriz de "3 por 6" tiene tres filas y seis columnas; una matriz de "*i* por *j*" tiene *i* líneas y *j* columnas. A continuación se muestran una matriz de 2 por 4 y una de 4 por 2.

2 * 4

1,1	1,2	1,3	1,4
2,1	2,2	2,3	2,4

4 * 2

1,1	1,2
2,1	2,2
3,1	3,2
4,1	4,2

Los elementos de una matriz, se identifican por sus "ubicaciones". El elemento 1,1 es el elemento ubicado en la primera fila y la primera columna; el elemento 13,2 está en la treceava fila y la segunda columna. Las ubicaciones de las celdas han sido utilizadas como elementos constitutivos de las matrices en los dos ejemplos anteriores. A menudo, las matrices se presentan como ordenaciones de elementos limitados por líneas verticales a su derecha e izquierda, o corchetes a la izquierda y derecha. En el lenguaje HTML (utilizado para preparar páginas Web), es muy fácil utilizar "tablas" para representar matrices. Las matrices pueden ser nombres dados; estos nombres a menudo se muestran en letras capitales en negrita.

Los científicos sociales que utilizan matrices para representar redes sociales a menudo no utilizan las convenciones matemáticas y simplemente muestran sus datos como una ordenación de filas y columnas etiquetadas. Las etiquetas no son realmente parte de la matriz, sino que son utilizadas sólo para clarificar la presentación. La matriz que se muestra en seguida, por ejemplo, es una matriz de 4 por 4, con etiquetas adicionales. Supongamos que estamos describiendo la estructura de la red de amistad en un grupo de cuatro personas: Luís, Carol, Pedro y Alicia. Es sencillo hacerlo usando palabras. Supongamos que a Luís le agradan Carol y Pedro, pero no Alicia, a Carol le agrada Pedro, pero ni Luís ni Alice, a Pedro le agradan las tres personas del grupo y a Alicia únicamente Pedro (quizás esto suene a la descripción de una estructura social muy poco frecuente).

Podríamos también describir este patrón de lazos vinculantes con un matriz, donde las filas representen las elecciones realizadas por cada actor. Pondremos "1" si a un actor le gusta otro y "0" si no. Este sería el resultado:

	Luis	Carol	Pedro	Alicia
Luis	-	1	0	0
Carol	1	-	1	0
Pedro	1	1	-	1
Alicia	0	0	1	-

Documento 2. LA MATRIZ DE "ADYACENCIA"

La forma más común de matriz en el análisis de redes sociales es una matriz simple compuesta por tantas filas y columnas como actores existan en el conjunto de datos y dónde los elementos representan los vínculos entre los actores. La más simple y común de las matrices es la matriz binaria. Es decir, si existe un vínculo, se coloca un 1 en la celda, si no lo hay se escribe un cero.

Este tipo de matriz es el punto de partida de casi todos los análisis de redes y se llama "matriz de adyacencia" porque representa quién está cerca de quién, o adyacente a quién en el "espacio social" mostrado por las relaciones que hemos medido. Por convención, en un grafo dirigido el origen de un vínculo es la fila y el objeto es la columna. Veamos un ejemplo simple. El grafo dirigido de las preferencias de amistad entre Luis, Carol, Pedro y Alicia sería como sigue:

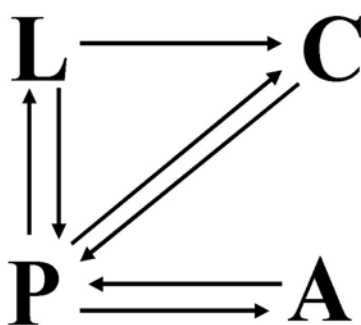


Figura 1. Grafo para una red social.

Ya que los vínculos se miden en el nivel nominal (es decir, los datos son datos binarios de preferencias), se puede representar la misma información en una matriz como la siguiente:

	L	C	P	A
L	-	1	0	0
C	1	-	1	0
P	1	1	-	1
A	0	0	1	-

Es necesario tener presente que las filas representan el origen de los vínculos dirigidos y las columnas los destinos: Luis escogió a Carol, pero Carol no lo escogió a él. Éste es un ejemplo de una matriz “asimétrica” que representa vínculos dirigidos (vínculos que van de un origen a un receptor). Es decir, el elemento i,j no necesariamente es igual que el elemento j,i . Si los vínculos que representamos en nuestra matriz fueran “vínculos recíprocos” (por ejemplo, vínculos que representan la relación “es compañero de negocios de ...”), o de “co-presencia o concurrencia”, (dónde los vínculos representan una relación como “trabaja en el mismo grupo de directores que...”) la matriz necesariamente sería simétrica; es decir, el elemento i,j sería igual al elemento j,i .

Los datos de preferencias binarias a menudo se representan con ceros y unos, indicando la presencia o ausencia de cada relación lógica posible entre pares de actores. Los grafos dirigidos se representan a menudo en forma de matriz con -1, 0 y +1 para indicar relaciones negativas, nulas o neutrales y relaciones positivas. Cuando se miden los vínculos de forma ordinal o de intervalo, la magnitud numérica del vínculo medido se coloca como un elemento de la matriz. Hay otras formas posibles de datos (multicategoría nominal, ordinales con más de tres rangos, nominales con orden de rangos totales). Estas otras formas, sin embargo, raramente se utilizan en estudios sociológicos y no les prestaremos mucha atención.

En la representación de datos de redes sociales como matrices, la pregunta que siempre surge es: ¿qué hago con los elementos de la matriz donde $i=j$? Es decir, por ejemplo, ¿Luis se ha considerado como amigo cercano de él mismo? A esta parte de la matriz se le conoce como la *diagonal principal*. A veces, el valor de la diagonal principal carece de significado y se ignora (se deja en blanco). A veces, sin embargo, la diagonal principal puede ser de gran importancia, y puede tomar valores muy significativos. Esto es particularmente cierto cuando las líneas y las columnas en nuestra matriz son “supernodos” o “bloques”.

A menudo es conveniente hacer referencia a ciertas partes de una matriz utilizando una terminología resumida. Si se toman todos los elementos de una fila (por ejemplo, a quiénes escoge a Luis como amigos: 1,1,1,0), se examina el “*vector fila*” para Luis. Si sólo se observa quién escoge a Luis como amigo (la primera columna o 1,0,1,0), se examina el “*vector columna*” para Luis. A veces es útil hacer ciertas operaciones con los vectores fila o los vectores columna.

Por ejemplo, si se suman los elementos de los vectores columnas en este ejemplo, puede obtenerse la medida de cuán “popular” es cada nodo (en términos de con cuánta frecuencia fueron objeto de un vínculo dirigido de amistad).

Documento 3. Permutación, Bloques e Imágenes de Matrices

También es útil, a veces, reorganizar las filas y columnas de una matriz de forma tal que pueda observarse los patrones de manera más clara. Al intercambio de filas y columnas (si se quiere reagrupar las filas, se deberá reagrupar las columnas de la misma forma o la matriz no tendrá sentido para la mayoría de operaciones), se le conoce como “permutación” de la matriz.

Nuestros datos originales serían:

	Luis	Carol	Pedro	Alicia
Luis	-	1	0	0
Carol	1	-	1	0
Pedro	1	1	-	1
Alicia	0	0	1	-

Reorganicemos (permutemos) la matriz de forma tal que los dos hombres y las dos mujeres sean adyacentes en la matriz. La *permutación de la matriz* simplemente significa el cambio del orden de las líneas y columnas. En tanto que la matriz es simétrica, si se cambia la posición de una línea, se debe cambiar la posición de su columna correspondiente.

	Luis	Carol	Pedro	Alicia
Luis	-	1	1	0
Pedro	1	-	1	1
Carol	0	1	-	0
Alicia	0	0	1	-

Ninguno de los elementos ha visto cambiar sus valores a través de esta operación o reorganizado las filas y las columnas, sólo se han cambiado las cosas de sitio. También se han resaltado algunas zonas de la matriz. Cada sección sombreada se denominada *bloque*. Los bloques se forman trazando líneas de división a través de las filas y columnas de la matriz (por ejemplo, entre Pedro y Carol). El trazado de estas líneas divisorias a través de la matriz suele llamarse *partición de la matriz*. Esta matriz la hemos dividido en función del sexo de los actores. La partición a veces es conocida como el proceso de “hacer bloques en una matriz” ya que la partición produce bloques.

Este tipo de agrupamiento de celdas con frecuencia se hace en análisis de redes para entender cómo algunos conjuntos de actores se encuentran “inmersos” en roles sociales o en entidades grandes. Aquí, por ejemplo,

puede verse que todos los ocupantes del rol social conocido como "mujer" escoge a los demás como su amigo; que ninguna mujer escoge a otra como su amiga, y que los hombres son más propensos a escoger mujeres (se han seleccionado 3 de cuatro posibilidades), que las mujeres a escoger hombres (se han seleccionado sólo 2 de las cuatro posibles combinaciones). Se ha agrupado a las mujeres juntas para crear una "partición", "supernodo", "rol social" o "bloque". A menudo se dividen matrices de redes sociales de esta forma para identificar y probar ideas acerca de la forma en que los actores se encuentran "involucrados" en roles sociales u otros "contextos".

Puede quererse evitar el análisis de los nodos individuales y examinar sólo posiciones o roles. Si se calcula la proporción de todos los vínculos que están presentes en un bloque, se puede crear una matriz de bloques de densidad. Haciendo esto se ignoran los vínculos reflexivos de nuestro ejemplo:

Matriz de bloques de densidad		
	Hombre	Mujer
Hombre	1.00	0.75
Mujer	0.50	0.00

Se puede querer agrupar la información aún más, utilizando una *imagen de bloque* o *matriz Imagen*. Si la densidad en un bloque es mayor que una cantidad dada (a menudo se utiliza la densidad promedio para la totalidad de la matriz como una puntuación de corte, en el actual ejemplo la densidad es .58), se introduce un "1" en una celda de la matriz de bloques, y un "0" en caso contrario. Este tipo de simplificación se llama "imagen" de la matriz de bloques.

Matriz Imagen		
	Hombre	Mujer
Hombre	1	1
Mujer	0	0

Las imágenes de matrices de bloques son herramientas muy útiles en la simplificación de estructuras complejas de datos. Como cualquier procedimiento de simplificación, debe utilizarse el buen juicio en la decisión de cómo identificar los bloques y qué cortes utilizar en la creación de imágenes –o se podría perder información importante.

Documento 4. Matriz de Impactos Cruzados

La matriz de impacto cruzado es otro ejemplo de la aplicación de las matrices en un método de planificación prospectiva desde el análisis de

sistemas conocido como el método de los impactos cruzados. Este método parte de la aplicación del método Delphi basado en la consulta de expertos, al que agrega nuevos componentes permitiendo superar el defecto del método predecesor de no tener en cuenta la interrelación entre sucesos.

El método de los impactos cruzados se utiliza en el campo de la prospectiva o largo plazo, se basa en información subjetiva ya que utiliza la opinión de expertos como punto de partida, su objetivo es dar información probabilística sobre los futuros sucesos y futuros escenarios, toma como consideración la realidad sistémica de la existencia de relaciones entre sucesos (impactos), de tal forma que la ocurrencia de cualquiera de ellos puede aumentar o disminuir la probabilidad de los demás.

Después de depurar estas probabilidades relativas entre pares de eventos, frente a las absolutas de cada suceso, se organizan en una tabla o arreglo conocida como la matriz de impactos cruzados. En el ejemplo 1 se representa una de ellas, y aunque se presenta con todos los detalles del estudio prospectivo para que se entienda su sentido, en lo que debemos fijarnos es el uso y aplicación de las matrices.

Ejemplo 1.⁸

Consideremos un ejemplo de orden práctico de la aplicación de la técnica; como es el caso de tratar de visualizar a futuro el sistema de educación superior en los países latinoamericanos.

Supóngase que se consideran los siguientes EVENTOS "CARACTERIZADORES" DEL FUTURO EXPLORADO:

Caracterización de LOS SISTEMAS DE EDUCACIÓN SUPERIOR de los países latinoamericanos a futuro, dentro de un horizonte temporal de 10 años.

E1:	Predominio de la educación a distancia a través del uso del INTERNET.
E2:	Crecimiento vertiginoso de los programas de EDUCACIÓN CONTINUA.
E3:	Desarrollo de altos vínculos entre las universidades y los sectores industriales.
E4:	Cambios Radicales en los esquemas de ENSEÑANZA-APRENDIZAJE (desaparición progresiva de la enseñanza basada en clases magistrales).
E5:	Incremento sustancial de la matrícula de educación superior (aumento sustantivo de la población estudiantil).

⁸ ARAPE Jesús E. "Programa de Prospectiva Tecnológica para Latinoamérica y el Caribe" MANUAL DE METODOLOGÍAS. TÉCNICA DE LAS MATRICES DE IMPACTO CRUZADO Caracas, 2.000.

HORIZONTE TEMPORAL "PROSPECTIVO": 10 AÑOS

Para establecer LOS INSUMOS se elabora la MATRIZ DE IMPACTOS CRUZADOS de los eventos considerados como "relevantes" para la caracterización del futuro explorado, con relación a los sistemas de educación superior en los países latinoamericanos:

$E_i \backslash E_j$	E1	E2	E3	E4	E5
E1		↑ (+)	↑ (+)	—	—
E2	↑ (+)		↑ (+)	—	—
E3	↑ (+)	↑ (+)		↑ (+)	↑ (+)
E4	—	—	—		—
E5	—	—	—	—	

MATRIZ DE IMPACTOS CRUZADOS DE LOS EVENTOS CARACTERIZADORES DEL FUTURO DEL SISTEMA DE EDUCACIÓN SUPERIOR EN LOS PAÍSES LATINOAMERICANOS EN UN HORIZONTE TEMPORAL DE (10) AÑOS.

De acuerdo a "la opinión de este grupo de expertos":

- (a) El predominio de la educación a distancia a través del uso masificado del internet, contribuye positivamente a:
 - (i) El apuntalamiento de los programas de educación continua.
 - (ii) El estímulo a desarrollar mayores vínculos entre el sector industrial y las universidades.
- (b) El crecimiento vertiginoso de los programas de educación continua, contribuye a:
 - (i) Al uso de internet como plataforma expedita del proceso educativo.
 - (ii) Mayor vinculación entre universidades y el sector industrial.
- (c) El desarrollo de altos vínculos entre el sector industrial y las universidades contribuirá a:
 - (i) Impulsar los programas de educación a distancia, mediante el uso de internet.
 - (ii) Impulsar los programas de educación continua (orientación no académica).
 - (iii) Modificación sustantiva de los esquemas de enseñanza – aprendizaje, para poder así dar respuestas mas ágiles, en la formación del recurso humano que absorbe la industria.
 - (iv) El hecho de un mayor vinculo con el sector industrial, abrirá mayor oportunidad a fuentes de trabajo y demandas del capital humano que egresa de las universidades; por lo que ello incidirá en una mayor demanda por formación en estas casas de estudio aumentando en consecuencia la matricula universitaria.

NOTA: Esto es solo un ejemplo hipotético, para entender la lógica subyacente en la técnica.

De acuerdo a ésta matriz de impactos cruzados, los INSUMOS requeridos para la realización del EJERCICIO DE PROSPECTIVA son:

- a. Las probabilidades simples de ocurrencia de cada uno de los EVENTOS (caracterizadores) del futuro, esto es:

$$P^0(E_1), P^0(E_2), P^0(E_3), P^0(E_4), \text{ y } P^0(E_5).$$

- b. Las probabilidades condicionadas entre tales eventos; ellas son:

$$P^0\left(\frac{E_2}{E_1}\right), P^0\left(\frac{E_3}{E_1}\right), P^0\left(\frac{E_1}{E_2}\right), P^0\left(\frac{E_3}{E_2}\right), P^0\left(\frac{E_1}{E_3}\right), P^0\left(\frac{E_2}{E_3}\right), P^0\left(\frac{E_4}{E_3}\right), P^0\left(\frac{E_5}{E_3}\right) \text{ y.}$$

Los resultados que a continuación aparecen son producto de un ejercicio hipotético realizado con la participación de diez (10) personas altamente calificadas en esa materia:

Para las probabilidades simples (iniciales) se obtuvieron los siguientes resultados:

TABLA DE $P^0(E_i)$'s : probabilidades simples.

$P^0(E_i)$ Nº. DE EXPERTO	$P^0(E_1)$	$P^0(E_2)$	$P^0(E_3)$	$P^0(E_4)$	$P^0(E_5)$
E_1	0.80	0.60	0.99	0.60	0.40
E_2	0.90	0.80	0.80	0.50	0.45
E_3	0.95	0.50	0.90	0.65	0.70
E_4	0.70	0.70	0.99	0.55	0.50
E_5	0.99	0.80	0.80	0.90	0.40
E_6	0.99	0.75	0.99	0.50	0.80
E_7	0.85	0.75	0.99	0.80	0.75
E_8	0.99	0.99	0.99	0.75	0.30
E_9	0.85	0.99	0.85	0.55	0.40
E_{10}	0.99	0.60	0.95	0.40	0.60
$P^0(E_i):$	0.90	0.75	0.93	0.62	0.50

De acuerdo a estos resultados de LAS PROBABILIDADES SIMPLES (INICIALES) asignadas por el grupo de expertos:

- (a) Los EVENTOS: E_1 – Predominio de la educación a distancia con el uso de internet; y E_3 : Desarrollo de altos vínculos universidad y sector industrial, serían eventos CUASI-CIERTOS, ya que sus probabilidades superan el 90%.
- (b) El EVENTO: E_2 – Crecimiento vertiginoso de la educación continua; se considera como un evento de MUY ALTA PROBABILIDAD, ya que se le asignó 75%.
- (c) El EVENTO: E_4 – Cambios radicales en los esquemas ENSEÑANZA – APRENDIZAJE; se le asignó una probabilidad del orden del 60%, lo que indica una probabilidad dominante de que pueda ocurrir; pero muy cercana al umbral de la incertidumbre total; como ocurre con el EVENTO E_5 –, al

cual se le asignó una probabilidad simple del 50%, o sea, incertidumbre total de que ello pueda o no pueda ocurrir.

Para las probabilidades condicionadas (iniciales) se obtuvieron los siguientes resultados:

TABLA DE $P^0\left(\frac{E_i}{E_j}\right)$'s : Probabilidades condicionadas

Nº. EXPERTO	$P^0\left(\frac{E_i}{E_j}\right)$ DE	$P^0\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$	$P^0\left(\frac{E_3}{E_1}\right)$	$P^0\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$	$P^0\left(\frac{E_3}{E_2}\right)$	$P^0\left(\frac{E_1}{E_3}\right)$	$P^0\left(\frac{E_2}{E_3}\right)$	$P^0\left(\frac{E_4}{E_3}\right)$	$P^0\left(\frac{E_5}{E_3}\right)$
E ₁		0.70	0.99	0.85	0.99	0.90	0.75	0.70	0.60
E ₂		0.90	0.90	0.95	0.85	0.95	0.85	0.65	0.60
E ₃		0.65	0.95	0.98	0.95	0.90	0.70	0.75	0.85
E ₄		0.80	0.99	0.75	0.99	0.75	0.80	0.65	0.70
E ₅		0.85	0.85	0.99	0.85	0.99	0.85	0.95	0.60
E ₆		0.80	0.99	0.99	0.99	0.99	0.85	0.70	0.85
E ₇		0.85	0.99	0.90	0.99	0.90	0.80	0.85	0.80
E ₈		0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.80	0.60
E ₉		0.99	0.95	0.90	0.90	0.90	0.99	0.75	0.60
E ₁₀		0.70	0.99	0.99	0.99	0.99	0.70	0.60	0.70
$P^0\left(\frac{E_i}{E_j}\right)$		0.82	0.96	0.93	0.95	0.93	0.83	0.74	0.69

3.2 Operaciones con matrices

La representación de los vínculos entre los actores a través de matrices puede ser de ayuda para observar estructuras de relaciones mediante la realización de manipulaciones simples como la suma de vectores fila o la partición de una matriz en bloques. Los analistas de redes sociales utilizan una gran cantidad de operaciones matemáticas adicionales que pueden desarrollarse con matrices para una gran variedad de propósitos (suma y resta de matrices, transposiciones, inversas, multiplicación de matrices y otras exóticas como determinantes, autovalores y autovectores). Igualmente son muy útiles en otras materias, pero en este capítulo hemos tomado como problema las redes sociales y seguiremos con ellas.

En la lección anterior vimos que las matrices son conjuntos de elementos dispuestos en filas y columnas. A menudo se utilizan en análisis de redes

para representar la adyacencia de cada actor a cada uno de los demás en una red. Una matriz de adyacencia es una matriz cuadrada de actor por actor ($i=j$), donde la presencia de vínculos se registran como elementos. La diagonal principal, o "vínculo reflexivo" de una matriz de adyacencia, a menudo se ignora en el análisis de redes.

Los sociogramas, o grafos de redes pueden representarse en forma de matriz, y pueden hacerse operaciones matemáticas para resumir la información en el grafo. Operaciones con vectores, formación de bloques y particiones; matemáticas de matrices como: producto por escalar(véase el **documento 1**), traspuestas(Véase el **documento 2**), determinantes(Véase el **documento 3**), adjuntas(Véase el **documento 4**), inversas(véase el **documento 5**), adición, sustracción(Véase el **documento 6**), multiplicación y multiplicación booleana(véase el **documento 8**). Todas estas son operaciones matemáticas que resultan en ocasiones útiles para permitirnos observar ciertas cosas en relación con las estructuras de relaciones en redes sociales.

Los datos de redes sociales son, a menudo, múltiples (por ejemplo, hay múltiples tipos de vínculos entre los actores). Tales datos se representan como series de matrices de igual dimensión con los actores en igual posición en cada matriz. Muchas de las mismas herramientas que se utilizan para trabajar con una matriz individual (suma y correlación de matrices, formación de bloques, etc.), son útiles para intentar resumirlas y observar los patrones en datos múltiples.(Véase el **documento 7**)

Una vez que un patrón de relaciones sociales, o un vínculo entre un conjunto de actores se ha representado de una manera formal (grafos o matrices), podemos definir algunas ideas importantes sobre la estructura social en formas más precisas valiéndonos para ello de la matemática.

Como las operaciones matemáticas se tornan a veces tediosas por su volumen, es necesario encomendarlas al computador. En la práctica con Derive, se verá como apoyar el trabajo con el Software.

Documento 1. Producto por Escalar

Es simplemente multiplicar una matriz por un número real y se lleva a cabo multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar y obtendremos como resultado una nueva matriz. Esta operación es útil cuando queremos ajustar una equivalencia en los valores de una matriz, por ejemplo una matriz expresada en dólares que nosotros queremos ver en pesos, la multiplicaríamos por el escalar correspondiente al valor del dólar a la tasa representativa del mercado.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } c=4, \text{ entonces } cA = 4.A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 12 \\ 0 & 20 & 4 \end{pmatrix}.$$

Documento 2. Transposición de una matriz

Esto es, simplemente, el intercambio de filas y columnas de forma tal que i se convierte en j y viceversa. Si se toma la matriz traspuesta de una matriz de adyacencia directa y se examinan sus vectores fila, se estará observando los orígenes de los vínculos dirigidos a un actor. El grado de similitud entre una matriz de adyacencia y esta matriz traspuesta, es una forma de resumir el grado de simetría en el patrón de relaciones entre los actores. Es decir, la correlación entre una matriz de adyacencia y la traspuesta de esa matriz es la medida del grado de reciprocidad de los vínculos. La reciprocidad de los vínculos puede ser una propiedad muy importante de una estructura social ya que se refiere tanto al equilibrio como al grado y forma de la jerarquía de una red.

Ejemplo 1. Transposición de una matriz

Vamos a mostrar dos matrices y sus traspuestas. Fíjese en el uso del apóstrofo para simbolizar la matriz traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y su traspuesta es } A' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$B = (5 \quad 9 \quad 1) \text{ y su traspuesta es } B' = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Documento 3. Determinante de una Matriz

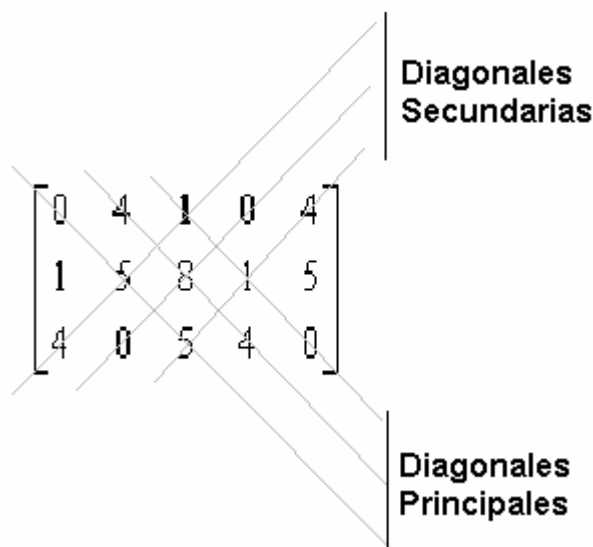
Un determinante es una función cuyo dominio son las matrices cuadradas y cuyo codominio es el conjunto de los números reales. Los determinantes son de gran utilidad para la solución de sistemas de ecuaciones lineales y para facilitar el cálculo de las matrices inversas. El cálculo de los determinantes es una operación sencilla para matrices 2x2 o 3x3, pero para matrices de mayor tamaño se torna dispendioso el proceso, por lo que es recomendable el uso de un software especializado como Derive o Demat. Para simbolizar los determinantes de forma diferente a las matrices, se usan las llaves cuadradas.

El siguiente procedimiento funciona sólo para matrices 2x2 y 3x3, para el cual identificaremos las diagonales principales y las secundarias. Para el determinante de la siguiente matriz 2x2: $\text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, la diagonal principal esta formada por los elementos 5 y 2, mientras que la diagonal secundaria esta formada por los elementos 7 y 9. Igual de sencillo es identificar las

diagonales en cualquier matriz 2x2. Recuerde siempre que las matrices 2x2 tienen sólo una diagonal principal y una secundaria. Ahora que ya se han identificado las diagonales, el valor del determinante resulta de multiplicar los elementos de la diagonal principal y a este producto se le resta el producto de la diagonal secundaria. $(5 \times 2) - (7 \times 9) = 10 - 63 = -53$.

Ahora, para el determinante de la siguiente matriz 3x3: $\text{Det} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

podemos facilitar la identificación de las diagonales con un artificio que consiste en repetir a la derecha las columnas de la matriz a excepción de la última como se muestra a continuación:



$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, en este caso y el de todas las matrices 3x3 tenemos tres

diagonales principales y tres secundarias. El determinante se obtiene entonces, como la suma de los productos de los elementos de cada diagonal principal menos la suma de los productos de los elementos de cada diagonal secundaria, así:

$$\begin{aligned} & (0 \times 5 \times 5) + (4 \times 8 \times 4) + (1 \times 1 \times 0) - [(4 \times 5 \times 1) + (0 \times 8 \times 0) + (5 \times 1 \times 4)] = \\ & (0 \times 5 \times 5) + (4 \times 8 \times 4) + (1 \times 1 \times 0) - (4 \times 5 \times 1) - (0 \times 8 \times 0) - (5 \times 1 \times 4) = \\ & 0 + 128 + 0 - 20 - 0 - 20 = 88 \end{aligned}$$

Infortunadamente el procedimiento no sirve para matrices cuadradas de mayor tamaño. Ahora se explicará el proceso que se sigue para hallar el determinante de cualquier matriz cuadrada. Aunque resulta ser un poco más dispendioso que el anterior para matrices 3x3, permite calcular determinantes de matrices más grandes.

Trabajemos con la misma matriz 3x3 anterior, para ver el procedimiento. Siempre elegimos una fila o una columna a nuestro gusto (por lo general la que tenga más elementos de valor cero), la cual nos servirá para elaborar una ecuación con determinantes de menor grado:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - 1 \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 4 \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 0 - 1(20 - 0) + 4(32 - 5) = -20 + 108 = 88$$

El procedimiento que se siguió fue: primero se escogió la primera columna de la matriz de forma más bien arbitraria pues hubiera sido lo mismo escoger la primera fila, la tercera fila o la segunda columna, ya que todas contenían un cero el cual simplifica la operación de multiplicación.

Tomando el primer termino de la columna uno elegida es decir el cero (0), lo multiplicamos por un determinante llamado cofactor y que aparece de omitir la fila y la columna donde está el cero (puede usar dos cintas de papel u otro material para ir tapando dichas fila y columna). Luego hacemos lo mismo con el segundo término de la columna elegida, pero en este caso restamos dicho producto, y así sucesivamente. De tal manera que para matrices de mayor tamaño al hallar el determinante se irá iterando sucesivamente la suma y la resta hasta el final, esto se da por que los cofactores van tomando tales valores de acuerdo con un subfactor que llevan implícito. La siguiente tabla facilita el procedimiento sin importar la columna o fila escogida.

+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	+	-	+

Resulta sencillo entender por que se escogen filas o columnas que contengan ceros ya que el producto de cero por cualquier determinante es cero, ya con eso se reduce el procedimiento en un determinante menos.

Notemos que el ejercicio de hallar un determinante de una matriz 3x3 quedó convertido en el de hallar los cofactores o determinantes de 3 matrices 2x2. Cuando nos enfrentemos a un determinante de una matriz 5x5 por ejemplo, lo podemos convertir de este modo en el ejercicio con determinantes 4x4 y luego 3x3, los cuales ya sabemos calcular fácilmente.

Documento 4. Matriz de Cofactores y Matriz Adjunta

De acuerdo con el procedimiento para calcular los determinantes, encontramos unos cofactores, los cuales correspondían al determinante de la matriz conformada por los elementos que no pertenecen ni a la fila ni a la columna del factor respectivo. Si calculamos el valor de los cofactores de cada elemento de una matriz obtendremos otra matriz llamada la matriz de cofactores. Cuando trasponemos la matriz de cofactores obtenemos la matriz adjunta.

Si tenemos como ejemplo la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ y necesitamos

calcular la matriz adjunta $adj(A)$, comenzamos a calcular cofactores:

Elem ento de A	Cofactor	Elem ento de A	Cofactor	Elem ento de A	Cofactor
1	$Det \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = 12$	3	$(-1)Det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = 20$	2	$Det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = 10$
0	$(-1)Det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = 10$	- 2	$Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = -14$	4	$(-1)Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = 16$
5	$Det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 16$	- 1	$(-1)Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -4$	- 4	$Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2$

Revise cuidadosamente la obtención de los cofactores, si este cuadro le aclaro dudas es por que aún no le quedan cosas claras en el cálculo del determinante por el último método, y se le aconseja por lo tanto, revisar de nuevo el tema.

Apóyese en la tabla anterior y calcule el determinante de la matriz A , luego lo va a necesitar.

Ahora conformamos la matriz de cofactores $B = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 10 \\ 10 & -14 & 16 \\ 16 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, a partir de

la transposición de esta obtenemos la matriz adjunta $Adj(A) = B' = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 16 \\ 20 & -14 & -4 \\ 10 & 16 & -2 \end{pmatrix}$

Documento 5. Inversa de una matriz

Se trata de una operación matemática que origina una matriz tal que al multiplicarla por la matriz original, produce una matriz nueva I con números 1 en la diagonal principal y cero en las demás posiciones (esto recibe el nombre de matriz de identidad, véase el ejemplo 2). Sin ahondar en este tema, puede pensarse que la inversa de una matriz es un tipo "opuesto" de la matriz original. Las matrices inversas se utilizan para hacer otros cálculos en el análisis de redes sociales. Sin embargo, a veces también es interesante estudiarlas en sí mismas. Es algo similar a mirar un rótulo negro sobre un papel blanco en contraste con un rótulo en blanco sobre un papel negro: a veces pueden observarse cosas diferentes.

Refiriéndonos a las redes sociales encontramos que se trabaja sólo con matrices cuadradas, es decir que tienen igual número de filas que de columnas. Sin embargo, en otros casos se debe tener en cuenta que las matrices que no son cuadradas no tienen una matriz inversa.

La matriz inversa de A se simboliza como A^{-1} .

Ejemplo 2. Matriz Identidad

Las siguientes son matrices identidad para sus respectivos conjuntos de matrices cuadradas:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3. Cálculo de la Matriz Inversa

Para el cálculo de la matriz inversa hay dos métodos muy conocidos, sin embargo sólo estudiaremos uno por razones de tiempo y necesidad de otros conocimientos previos. El método que se usará se basa en un teorema que dice:

$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A)$, es decir que, para hallar la inversa de una matriz necesitamos calcular su determinante y su matriz adjunta.

Regresemos a la matriz A de un ejemplo anterior:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \text{ ya sabemos que } \mathbf{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 16 \\ 20 & -14 & -4 \\ 10 & 16 & -2 \end{pmatrix} \text{ y adem\'as usted}$$

ya calcul\'o el determinante de \mathbf{A} que es $\mathbf{Det}(\mathbf{A}) = 92$, por lo tanto:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{92} \begin{pmatrix} 12 & 10 & 16 \\ 20 & -14 & -4 \\ 10 & 16 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} & \frac{5}{46} & \frac{4}{23} \\ \frac{5}{23} & -\frac{7}{46} & -\frac{1}{23} \\ \frac{5}{46} & \frac{4}{23} & -\frac{1}{46} \end{pmatrix}. \text{ Haga usted mismo el ejercicio, le}$$

servir\'a para repasar producto por escalar, multiplicaci\'on de fracciones y simplificaci\'on.

Documento 6. Suma y Resta de Matrices

\'Estas son las operaciones matem\'aticas con matrices m\'as f\'aciles. Simplemente se suma o resta cada elemento correspondiente i, j de dos (o m\'as) matrices. Por supuesto, para realizar esto, las matrices deben tener el mismo n\'umero de elementos i y j (a esto se le llama matrices "compatibles" con la adici\'on y la sustracci\'on) -y los valores de i y j deben estar en el mismo orden en cada matriz. A menudo, la suma y la resta de matrices se utilizan en an\'alisis de redes cuando se intenta simplificar o reducir la complejidad de m\'ultiples datos a formas simples.

Si se tiene una matriz sim\'etrica que representa el v\'inculo "intercambio de dinero" y otra que representa la relaci\'on "intercambio de bienes", puede sumarse las dos matrices para indicar la intensidad de la relaci\'on de intercambio. Las parejas con una puntuaci\'on cero no tendr\'an ninguna relaci\'on, aquellas con un "1" estar\'an vinculadas bien por el trueque o bien por un intercambio de productos; y aquellos con una puntuaci\'on de "2" podr\'ian estar vinculados tanto por relaciones de trueque como por intercambio de productos.

Si se sustrae la matriz de "intercambio de bienes" de aqu\'ella de "intercambio de dinero", una puntuaci\'on de -1 indicaría parejas con una relaci\'on de trueque; una puntuaci\'on de cero indicaría o bien ninguna relaci\'on o una relaci\'on de trueque o intercambio de productos y una puntuaci\'on de +1 indicaría parejas que s\'olo poseen una relaci\'on de intercambio de productos.

Uno u otro enfoque son \'utiles seg\'un las preguntas de investigaci\'on planteadas.

Documento 7. Correlaci\'on y Regresi\'on de Matrices

La correlaci\'on y regresi\'on de matrices son maneras de describir la asociaci\'on o similitud entre las matrices. La correlaci\'on interroga a dos matrices acerca de "cu\'an similares son". La regresi\'on utiliza las

puntuaciones de una matriz para predecir las puntuaciones en la otra. Si queremos saber cuán similar es la matriz A a la B, se toma cada elemento i,j de la matriz A, se compara con el mismo elemento i,j de la matriz B, y se calcula la medida de asociación (qué medida se utilice depende del nivel de medida de los vínculos en las dos matrices).

La regresión de matrices realiza esta misma operación con los elementos de una matriz definidos como las observaciones de la variable dependiente y los correspondientes elementos i,j de otra matriz que se han definido como las observaciones de las variables independientes. Estas herramientas son utilizadas por los analistas de redes sociales para el mismo propósito que persiguen aquellos que no lo son: evaluar la similitud o correspondencia entre dos distribuciones de puntuaciones. Podemos, por ejemplo, preguntar qué tan similar es el patrón de vínculos de amistad entre actores a su patrón de parentesco. Podemos querer ver hasta qué punto es posible predecir qué naciones tienen buenas relaciones diplomáticas con otras sobre la base de la importancia de los flujos comerciales entre ellas.

Documento 8. Multiplicación y multiplicación Booleana de matrices

La multiplicación de matrices es una operación poco frecuente en el análisis de redes, pero puede ser muy útil para el analista de redes. Es necesario tener un poco de paciencia en este apartado. Primero, necesitamos mostrar cómo hacer una multiplicación de matrices y unos pocos resultados importantes (como qué sucede si se multiplica una matriz de adyacencia por sí misma, o si se eleva a una potencia). Intentaremos, entonces explicar la utilidad de éstas operaciones.

Para multiplicar dos matrices, éstas deben ser “compatibles” con la multiplicación. Esto significa que el número de filas en la primera matriz debe ser igual al número de columnas en la segunda. Con frecuencia, los analistas de redes utilizan matrices de adyacencia, que son cuadradas y, por tanto, compatibles con la multiplicación. Para multiplicar dos matrices, se comienza en la esquina superior izquierda de la primera matriz, y se multiplica cada celda en la primera fila de la primera matriz por el valor en cada celda de la primera columna de la segunda matriz, y luego se suman los resultados. Se procede de igual forma para cada celda en cada fila de la primera matriz, multiplicada por la columna en la segunda. Para realizar una multiplicación booleana de matrices, el proceso es el mismo, pero se introduce un cero en la celda si el producto de la multiplicación es cero y un uno si el producto es diferente de cero.

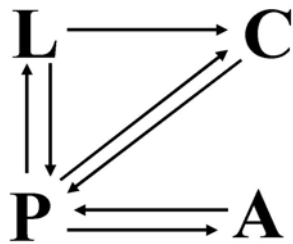
Supongamos que queremos multiplicar estas dos matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

El resultado es:

$$\begin{pmatrix} (0 \times 6) + (1 \times 9) & (0 \times 7) + (1 \times 10) & (0 \times 8) + (1 \times 11) \\ (2 \times 6) + (3 \times 9) & (2 \times 7) + (3 \times 10) & (2 \times 8) + (3 \times 11) \\ (4 \times 6) + (5 \times 9) & (4 \times 7) + (5 \times 10) & (4 \times 8) + (5 \times 11) \end{pmatrix}$$

La operación matemática en sí misma no nos resulta de mucho interés



(muchas aplicaciones como Mathematica, Excel, Derive y Demat pueden ejecutar una multiplicación de matrices). Sin embargo, la operación es útil cuando se aplica a una matriz de adyacencia. Volvamos al ejemplo del capítulo:

La matriz de adyacencia para los cuatro actores L, C, P y A (en ese orden) es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma de pensar en esta matriz, es advertir qué nos dice si hay un camino de un actor a otro. Un 1 representa la presencia de un camino, un cero representa la ausencia de éste. La matriz de adyacencia es exactamente lo que su nombre sugiere – nos dice cuáles actores son cercanos o tienen un camino directo de uno a otro.

Ahora, supongamos que multiplicamos esta matriz de adyacencia por sí misma (por ejemplo elevando la matriz a 2, o al cuadrado).

$$\begin{pmatrix} (0 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (0 \times 1) + (1 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (0 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times 1) & (0 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) \\ (0 \times 0) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (0 \times 1) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (0 \times 1) + (0 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times 1) & (0 \times 0) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) \\ (1 \times 0) + (1 \times 0) + (0 \times 1) + (1 \times 0) & (1 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times 1) + (1 \times 0) & (1 \times 1) + (1 \times 1) + (0 \times 0) + (1 \times 1) & (1 \times 0) + (1 \times 0) + (0 \times 1) + (1 \times 0) \\ (0 \times 0) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (0 \times 1) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (0 \times 1) + (0 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times 1) & (0 \times 0) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz (por ejemplo, la matriz cuadrada de adyacencia) cuenta el número de caminos entre dos nodos que tienen longitud dos. Detengámonos por un minuto y verifiquemos esta afirmación. Por ejemplo, nótese que el actor "B" está conectado con cada uno de los demás actores por un camino de longitud dos; y que no hay más que un camino como ese a ningún otro actor. El actor T está tres veces conectado a sí mismo por caminos de longitud dos. Esto es porque el actor T tiene vínculos recíprocos con cada uno de los otros tres actores. No hay camino de longitud dos de T a B (aunque hay un camino de longitud uno).

Entonces, la matriz de adyacencia nos dice cuántos caminos de longitud uno hay de cada actor a los demás. La matriz cuadrada de adyacencia, nos dice cuántos caminos de longitud dos hay de cada actor a los demás. También es cierto (pero ahora no lo demostraremos) que la matriz de adyacencia elevada al cubo indica el número de caminos de longitud tres de cada actor a los demás, y así sucesivamente...

Si calculamos el producto booleano, además del simple producto de la matriz, la matriz cuadrada de adyacencia nos dirá dónde hay un camino de longitud dos entre dos actores (no cuántos caminos de este tipo hay). Si tomamos la matriz booleana cuadrada y la multiplicamos por la matriz de adyacencia utilizando una multiplicación booleana, el resultado nos indicará qué actores estaban conectados por uno o más caminos de longitud tres, y así sucesivamente...

Finalmente, ¿a qué debe prestarse atención?

Algunas de las propiedades fundamentales de una red social tienen que ver con cómo están conectados los actores a los demás. Las redes que tienen pocas o débiles conexiones o actores conectados sólo por caminos de gran longitud, pueden mostrar baja solidaridad, una tendencia a quedar apartados, lentitud de respuesta a estímulos y otras características similares. Las redes que poseen conexiones más fuertes con caminos pequeños entre los actores pueden ser más robustas y más capaces de responder con rapidez y efectividad. La medición del número y longitud de los caminos entre los actores en una red nos permite catalogar estas tendencias importantes en toda red.

Las posiciones de los actores individuales en las redes son también descritas muy útilmente por el número y la longitud de los caminos que poseen con otros actores. Los actores que tienen muchos caminos hacia otros actores pueden ser más influyentes sobre ellos. Los actores que tienen caminos cortos a muchos otros actores pueden ser figuras influyentes o centrales. Entonces, el número y la longitud de los caminos en una red son muy importantes para entender tanto las limitaciones individuales como las oportunidades y para entender el comportamiento y potenciales de la red en su totalidad.

3.3 Práctica con derive

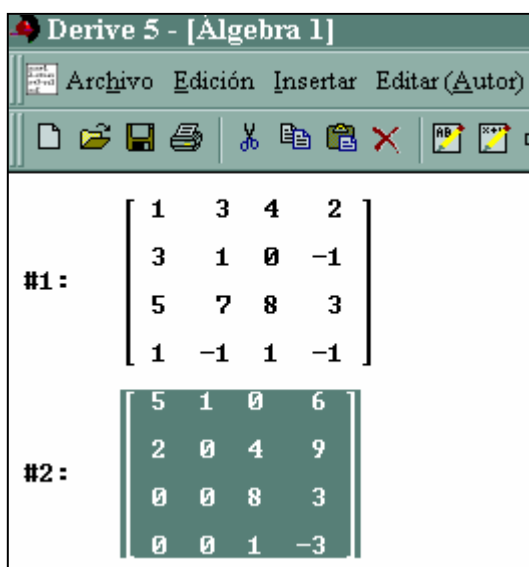
Ingrese al programa Derive.

Ingrese lo siguiente: [1,3,4,2;3,1,0,-1;5,7,8,3;1,-1,1,-1]

Con la anterior instrucción habrá ingresado una matriz 3x3, cuyos elementos de fila fueron ingresados separados por comas y las filas separadas entre sí por columnas. Después de pulsar Enter, aparecerá en la pantalla la matriz en su formato tradicional frente a la etiqueta de ecuación #1:. Esta etiqueta sirve para hacer referencia a la ecuación y en este caso a la matriz sin necesidad de volver a escribirla. Si usted ingresó otra expresión antes, la etiqueta de la matriz no será #1: sino una similar con otro número, por lo que deberá tener en cuenta ello para el desarrollo del ejercicio.

Otra forma de ingresar la matriz es usando la opción Matriz del menú desplegable Editar(Autor), el cual le presentará un cuadro de diálogo preguntándole por el número de filas y columnas, a partir de ello presenta otra ventana en la que aparecen las casillas de la matriz en forma de tabla para ser llenadas.

Ingrese ahora la matriz siguiente: [5,1,0,6;2,0,4,9;0,0,8,3;0,0,1,-3] y pulse Enter. Aparecerá la matriz en pantalla con la etiqueta #2:.



Ahora ingrese la instrucción #1+#2 y pulse el ícono \approx aproximar. Habrá entonces obtenido en pantalla otra matriz que representa la suma de las dos matrices anteriores.

Ahora practique las siguientes actividades:

1. Resta de matrices: #1 - #2 y pulse el ícono \approx aproximar.
 2. Producto de Matrices: #1*#2 y pulse el ícono \approx aproximar.
 3. Determinantes: DET (#1) + DET (#2) y pulse el ícono \approx aproximar.
 4. Transpuesta: #1` y pulse el ícono \approx aproximar.
 5. Inversa de una matriz: #1^-1 y pulse el ícono $=$ simplificar. Note que esta matriz no tiene inversa. Podrá verificar que su determinante es cero. Pruebe entonces ahora con #2^-1.
 6. Bloques de una matriz: #1 ROW [3,4] y pulse el ícono $=$ simplificar.
 7. Bloques de una matriz: #1 COL [1,3] y pulse el ícono $=$ simplificar.
- Siga probando con Derive hasta que domine estas funciones.

Unidad 3. Matrices

Actividades de aprendizaje

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

1. Si una matriz es "3 por 2", ¿cuántas columnas y cuántas filas tiene?
2. Las matrices de adyacencia son "cuadradas", ¿por qué?
3. Si hay un "1" en la celda 3,2 de una matriz de adyacencia que representa un sociograma, ¿qué nos indica?
4. ¿Qué quiere decir "permutar" una matriz y "hacer bloques" con una matriz?
5. A las siguientes matrices, calcúlele el determinante, la transpuesta, la adjunta, la inversa si la tienen, multiplique cada una por si misma si es posible, halle el producto por el escalar - 5. Si no tiene el software o la calculadora, debe hacerlo manualmente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

6. A partir de las matrices del ejercicio 5 calcular: $(-5)A$, AxD , $B'+C$, $C-B$, DxE , ExD , BxE .
7. Explicar por que con las matrices del ejercicio 5 no se pueden hacer cada una de las siguientes operaciones, e indicar 5 operaciones más que no se pueden hacer: D^{-1} , $C+D$, $E+A$, ExB , DxD , CxD y BxE' .

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

1. Pensar en algún grupo pequeño del que se sea miembro (quizás un club, un grupo de amigos, o gente que vive en el mismo complejo de apartamentos, etc.). ¿Qué clase de relaciones entre ellos nos diría algo sobre las estructuras sociales de esta población? Intentar preparar una matriz que represente uno de los tipos de relaciones escogido. ¿Puede aplicarse esta matriz también para describir un segundo tipo de relación? (por ejemplo, una puede comenzar con "¿Quién le agrada a quién?" y luego añadir "¿Quién está más tiempo con quién?")
2. Utilizando las matrices creadas en el punto anterior ¿tiene sentido dejar la diagonal "en blanco" o no?. Intentar permutar y hacer bloques con la matriz.

3. ¿Es posible hacer una matriz de adyacencia para representar una red "estrella"? Qué sucede con la "línea" y el "círculo". Observar los unos y ceros en estas matrices –a veces podemos reconocer la presencia de ciertos tipos de relaciones sociales por estas representaciones "digitales". ¿A qué se parece una jerarquía estricta? ¿A qué se parece una población que está segregada en dos grupos?

Unidad 3. Matrices

Autoevaluación

11. Para realizar la suma entre dos matrices se debe tener en cuenta:
- Que sean de diferente tamaño
 - Una cuadrada y la otra de cualquier tamaño
 - Que ambas sean cuadradas
 - Que sean del mismo tamaño
12. Para realizar el producto por escalar, se debe tener en cuenta:
- Dos matrices del mismo tamaño
 - Dos escalares
 - Una matriz y un escalar
 - Una matriz cuadrada y un escalar
13. Que condiciones se deben tener en cuenta para multiplicar dos matrices:
- Que sean cuadradas
 - Un escalar y una matriz
 - Que una sea cuadrada y la otra de cualquier tamaño
 - Que la cantidad de columnas de la primera sea igual a la cantidad de filas de la segunda
14. Con las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, Qué operación puede realizar?
- $A + D$
 - $2.A - 3.B$
 - $D.A$
 - $A.D$

Unidad 3. Matrices

Síntesis

Una forma elemental de representar información sobre redes sociales, es mediante el uso de matrices. De esta forma, la representación de la información permite la utilización de herramientas matemáticas y de computación para identificar estructuras.

Matemáticamente las matrices son arreglos de números en filas y columnas que se colocan entre llaves. Sin embargo, en las aplicaciones reales no las encontramos de la misma forma, ya que predominan las formas de tabla de doble entrada, entre otras presentaciones.

Extraer la información de un evento o conjunto de eventos para convertirla en una matriz es una de las tareas de mayor cuidado ya que el posterior procesamiento matemático lo hacen las computadoras.

Las matrices pueden representar una situación de mercado, la relación entre los insumos y los productos, las relaciones en una red social, etc. Estas últimas conforman las matrices de adyacencia.

Conformadas las matrices, podemos manipularlas sin alterar su información, intercambiando filas o columnas. Esto nos permite identificar algunas divisiones significativas como bloques, facilitando así el análisis sobre estas.

Otro campo de aplicación de las matrices, es la planeación prospectiva de largo plazo, donde las matrices representan las probabilidades relativas de ocurrencia de cada evento dentro de cada escenario.

Unidad 3. Matrices

Bibliografía y Webgrafía

HANNEMAN, R.(2002). "Introducción a los Métodos de Análisis en Redes Sociales" Traducido por René Ríos, Universidad Católica de Chile. Santiago.

GERVER H. (1992). "Álgebra Lineal". Grupo Editorial Iberoamérica. Título original "Elementary Linear Algebra" Traductor: Eduardo Ojeda Peña. México.

KLEIMAN, A & DE KLEIMAN, E.(1973). "Matrices: Aplicaciones Matemáticas a la Economía y la Administración." Editorial Limusa. México.

ALAN BEER, G. (1984). "Matemáticas Aplicadas para Economía y Negocios con una introducción a matrices" Editorial Prentice Hall Internacional. Traducción: Guillermo Jaramillo Recio Universidad del Valle (Cali). Madrid.

ARAPE, J.(2000). "Programa de Prospectiva Tecnológica para Latinoamérica y el Caribe" Manual de metodologías. Técnica de las matrices de impacto cruzado Caracas.

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/matrices/index.htm

Portal interactivo del ministerio de educación español para el aprendizaje de las matemáticas

<http://descartes.cnice.mec.es/enlaces/enlaces.htm> Página de enlaces a portales interactivos para el aprendizaje de las matemáticas en español

Unidad 3. Matrices

Glosario

Red Social. Es un sistema formado por actores sociales que constituyen nodos los cuales se conectan entre sí, a través de unas relaciones o vínculos.

Escenario. Conjunto posible de eventos que se presentaría en una situación futura.

Prospectiva. Disciplina que explora futuros posibles, considerando que el futuro no es ignorado, simplemente es incierto, no nos adaptamos al futuro sino que ideamos un proyecto de futuro y trabajamos para llegar a él. Implica el largo plazo, se apoya en el enfoque sistémico logrando una visión amplia y en el empleo de criterios y métodos racionales que con base científica la alejan de la adivinación. Supone también el uso fructífero y creativo de la imaginación.

Matriz de afiliación: matriz con una serie de actores en las filas y una serie de eventos en las columnas.

Matriz de incidencia: matriz binaria resultante de transformar una matriz de actores x actores que muestra los actores en las filas y las relaciones en las columnas, señalando la presencia o ausencia de una relación para cada actor.

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Introducción a la Unidad

Esta unidad se centra en dos aplicaciones de las matrices como son:

- **Solución matricial de sistemas de ecuaciones lineales**

Los sistemas de ecuaciones se pueden resolver por varios métodos (gráfico, igualación, sustitución y determinantes, entre otros), pero el de mayor uso es el sistema de eliminación de Gauss – Jordan, el cual se apoya en las matrices.

- **Matriz de insumo - producto**

Modelo matemático desarrollado por el economista norteamericano Leontief en 1936 y por su desarrollo recibió el premio novel de economía en 1973. Sus aplicaciones en el campo macroeconómico son invaluable, sin embargo, sólo le estudiaremos de manera muy simplificada ya que un abordaje más profundo requeriría haber estudiado las cuentas nacionales, lo cual escapa a los propósitos de este módulo.



Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Objetivo general

Mediante la aplicación de las operaciones con matrices el estudiante logrará:

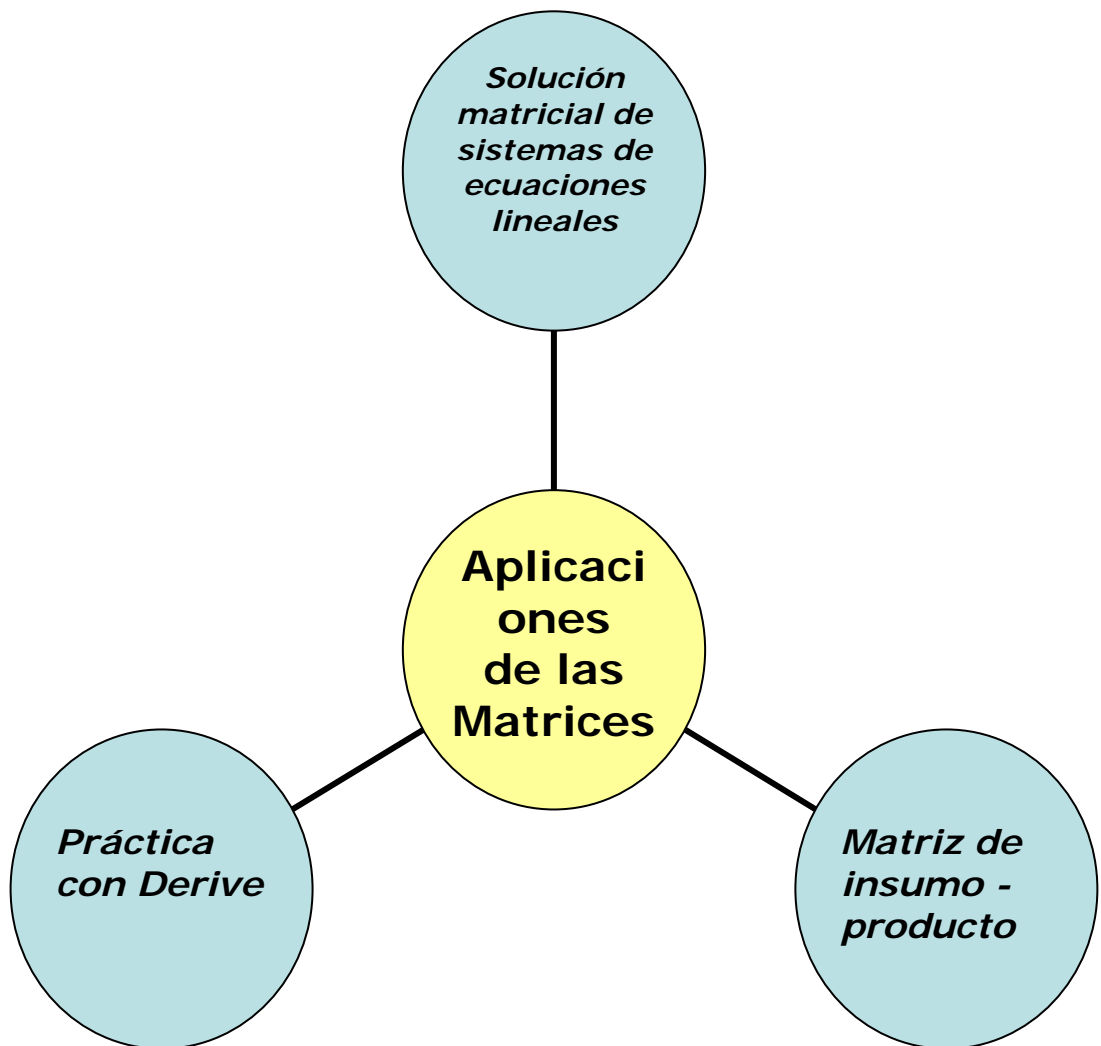
- Construir un sistema de ecuaciones que modele un problema aplicable a comportamientos lineales, y encontrar la solución a dicho sistema por el método de Gauss – Jordan
- Usar el modelo de Leontief para analizar algunas situaciones de planeación de la producción en macroeconomía.

Ideas clave

- Lo que se busca principalmente con un sistema de ecuaciones es modelar un escenario o situación real, y es ahí donde debe recaer la fortaleza del Administrador Público, ya que el procedimiento algorítmico matemático puede seguirse por diversos caminos con igual resultado e incluso puede y debe ser apoyado por el computador. Sin embargo, es necesario reconocer el procedimiento para hacer significativo lo que se está estudiando.
- Las ecuaciones lineales son representaciones de funciones lineales ya estudiadas en el módulo de matemática 1, y que pueden representar ecuaciones de demanda, oferta, ingreso, etc. La solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar las coordenadas del punto en el cual se cortan las rectas de dicho sistema.
- Con el uso de matrices se pueden solucionar sistemas de ecuaciones lineales, de hecho es el método mas aceptado para sistemas de gran tamaño. Hay dos variantes para el trabajo con matrices: una es el método del pivote y otra la eliminación de Gauss-Jordan a través de operaciones con filas. Este último se trabajará en esta unidad.
- La matriz de Leontief sirve para presentar el sistema de cuentas y producción de bienes y servicios, del sistema de cuentas nacionales, principalmente describe las transacciones intersectoriales relacionadas con la producción y sirve también como herramienta de programación y análisis económico a fin de determinar los niveles de producción que deben alcanzar los diferentes sectores para satisfacer las demandas de consumo o inversión de los diferentes productos.

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Mapa conceptual



Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Contenidos

4.1 Solución matricial de sistemas de ecuaciones lineales

Lo que se busca principalmente con un sistema de ecuaciones es modelar un escenario o situación real, y es ahí donde debe recaer la fortaleza del Administrador Público, ya que el procedimiento algorítmico matemático puede seguirse por diversos caminos con igual resultado e incluso puede y debe ser apoyado por el computador. Sin embargo, es necesario reconocer el procedimiento para hacer significativo lo que se está estudiando

Las ecuaciones lineales permiten representar: ecuaciones de demanda, oferta e ingreso, entre otras.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar las coordenadas del punto en el cual se cortan las rectas de dicho sistema.

Para problemas con más de dos variables, se pueden solucionar eficientemente utilizando matrices.

Método con operaciones de filas entre Matrices

Emplea el sistema de eliminación de Gauss-Jordan y resulta aconsejable para sistemas de ecuaciones 3x3 y superiores. Cuando el número de variables se hace muy grande, lo aconsejable es recurrir al uso de un programa de computador.

Las operaciones que podemos llevar a cabo son:

- Intercambiar filas,
- Multiplicar una fila por un número,
- Sumar o restar una fila de otra,
- multiplicar una fila por un número y sumarla al producto de otra fila por otro número.

El procedimiento es el siguiente:

Si tenemos el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 7 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Escribimos la matriz aumentada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ a esta matriz le

aplicaremos operaciones de filas hasta que quede en su forma reducida, es decir, que la parte de la matriz que está a la izquierda quede como la matriz identidad, las operaciones efectuadas las vamos mostrando al frente de la matriz con el único propósito de guiar la operación.

2. Se escoge la primera columna diferente de cero y se obtiene 1 en la parte superior. Si la columna vale cero en la parte superior se debe intercambiar la primera fila con otra que no tenga cero en su primer elemento. En este caso lo más fácil para obtener uno en el primer término de la diagonal. La operación $F_1 \leftrightarrow F_3$ quiere decir que se

intercambió la fila 1 con la fila 3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_3.$

3. Se usan los múltiplos del primer renglón para obtener los ceros debajo del 1 que se obtuvo en el paso 1. La operación $F_2 + (-3)F_1 \rightarrow F_2$ quiere decir que multiplicamos la fila 1 por (-3) y se la sumamos a la fila 2, además colocamos ese resultado en el puesto de la fila 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 + (-3)R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$

4. Ahora que la primera columna ya está como la primera columna de la matriz identidad 3x3, entonces, pasamos a buscar la estrategia para obtener el 1 en el segundo elemento de la segunda fila. Para ello debemos ahora usar un procedo diferente al del paso 2, pero que es el proceso más común para obtener los unos y es el dividir la fila por el elemento que está en el lugar donde necesitamos obtener el 1 en este caso 10, o lo que es lo mismo: multiplicar por (1/10) la fila 2 y el resultado colocarlo en el puesto de dicha fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right) \frac{1}{10} F_2 \rightarrow F_2$$

5. Ahora debemos conseguir ceros arriba y abajo del 1 obtenido en el paso anterior. Para ello aprovechamos que esos elementos de la columna son múltiplos de uno y por tanto se le puede restar o sumar tantas veces la fila que tiene el 1 como sea necesario para obtener el

cero. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{21}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 + 3F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 - 4F_2 \rightarrow F_3 \end{array}.$

6. Ya vamos llegando a la meta. Ahora necesitamos el último 1 de la diagonal y usamos una estrategia similar al anterior 1, con la diferencia que tenemos ahora un elemento negativo. Si multiplicamos la fila 3 por (- 5) entonces obtendremos el anhelado 1. (¡Nunca antes se había

buscado tanto un uno o un cero!). Veamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & : & \frac{21}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & : & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} (-5)F_3$$

7. Ya tenemos todos los unos y también ya tenemos completa la tercera fila de la matriz identidad, por lo que ya sabemos que el valor de z es (- 1). Si ahora obtenemos los ceros, encima del último 1 calculado entonces el proceso de Gauss-Jordan habrá terminado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 + \frac{1}{10}F_3 \rightarrow F_1 \\ F_2 + \frac{7}{10}F_3 \rightarrow F_2 \end{matrix}.$$

8. Finalmente escribimos los valores de la solución que se obtienen convirtiendo la matriz reducida obtenida en ecuación nuevamente es decir: $x=2$, $y=0$, $z=-1$. Tenga en cuenta que en este caso como se trata de un ejemplo, las operaciones de fila y columna se indicaron al frente de la matriz en que ya se hicieron. Pero, cuando usted vaya a realizar un ejercicio, se le recomienda escribir las operaciones con filas al frente de la matriz sobre la cual las va a aplicar, así resulta más práctico.

Como convertir un problema en un sistema de ecuaciones

El ejercicio de modelar un problema con un sistema de ecuaciones simultáneas es de particular importancia, ya que abre la posibilidad de que el problema se pueda resolver. Una inadecuada interpretación del problema conduce a una inadecuada solución, aunque una adecuada interpretación tampoco es garantía de una solución consistente. Esto por que la solución depende además, de un conjunto de procedimientos que se deben seguir para llegar a la respuesta, estos son: la construcción de unas ecuaciones que modelan el problema y que son el fruto de la interpretación del problema, la aplicación de un método de solución a las ecuaciones y la interpretación de la respuesta matemática del modelo como una respuesta viable para el problema.

Para elaborar el modelo es necesario saber con que valores contamos, es decir cuales conocemos y cuales desconocemos, es decir las incógnitas. Hay que identificar los valores constantes y los variables, además, cómo un cambio en un valor provoca un cambio en otro y de que magnitud. La destreza en estos procedimientos sólo se logra con la práctica activa de estos. Intentemos la interpretación y modelación del siguiente problema:

Una empresa que produce por una concesión, uniformes para las dotaciones de empleados públicos que ganan menos de dos salarios mínimos. En esta temporada se están produciendo sólo camisas, las cuales son de tres estilos. Cada estilo requiere de los servicios de tres departamentos, como se ve en la siguiente tabla. Los departamentos de corte, costura y empaque disponen de un máximo de 1.160, 1.560 y 480 horas de trabajo por semana, respectivamente. ¿Cuántas camisas de cada estilo debe producir la planta cada semana para que funcione a plena capacidad?.

	Estilo A	Estilo B	Estilo C
<i>Corte</i>	0,2 h	0,4 h	0,3 h
Costura	0,3 h	0,5 h	0,4 h
Empaque	0,1 h	0,2 h	0,1 h

En este problema, la tabla ya aporta una parte del modelo, sin embargo en otras situaciones los datos se encuentran menos sistematizados. Vamos a bautizar las variables para poderlas representar en el modelo:

x = Número de camisas del estilo A producidas por semana.

y = Número de camisas del estilo B producidas por semana.

z = Número de camisas del estilo C producidas por semana.

Ahora construiremos una ecuación para cada departamento teniendo en cuenta la disponibilidad de horas y la proporción de servicio que cada estilo requiere:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,4y + 0,3z = 1.160 & \text{Corte} \\ 0,3x + 0,5y + 0,4z = 1.560 & \text{Costura} \\ 0,1x + 0,2y + 0,1z = 480 & \text{Empaque} \end{cases}$$

Usando uno de los métodos indicados en el capítulo o con ayuda del Derive llegamos a que $x=1.200$, $y=800$ y $z=2.000$. La parte final del ejercicio, consiste en concluir gracias al resultado del modelo que: cada semana la empresa puede producir 1.200 camisas del estilo A, 800 del estilo B y 2.000 camisas del estilo C para funcionar a plena capacidad.

Una última cosa que notar es que no toda la información que se nos proporciona para un problema, es necesariamente útil. Vea como el hecho del número de salarios de los trabajadores que van a recibir los uniformes sea dos, resulta totalmente irrelevante para la solución del problema.

4.2 Matriz de insumo - producto

Análisis de Insumo – Producto

La matriz de Leontief sirve para presentar el sistema de cuentas y producción de bienes y servicios, del sistema de cuentas nacionales, principalmente describe las transacciones intersectoriales relacionadas con la producción y sirve también como herramienta de programación y análisis económico a fin de determinar los niveles de producción que deben alcanzar los diferentes sectores para satisfacer las demandas de consumo o inversión de los diferentes productos. Puede utilizarse para estudiar la composición del valor agregado de los productos y efectuar análisis de precios, calcular requerimientos de importaciones, etc., para responder a preguntas como: ¿Cuál es la intensidad de uso de los factores requeridos para la producción de los diferentes artículos? ¿Cómo se afecta la participación de los salarios o las ganancias en el producto a medida que este crece? ¿Cuáles son los requerimientos de importaciones para mantener o elevar el producto? ¿Cómo cambian los precios de las mercancías cuando se elevan los salarios o las ganancias?.

Sin embargo, no será posible lograr en este curso un aprovechamiento tan espectacular del estudio de esta matriz, ya que para ello se requiere haber abordado muchos conceptos económicos, mas específicamente del área de la macroeconomía y las finanzas públicas, que sólo serán estudiadas en próximas asignaturas. El estudio que se hará del modelo insumo - producto o entrada - salida es una simplificación aplicada a otros casos más manejables (la matriz que se usa en la Subdivisión de Política Macroeconómica del Ministerio de Hacienda es del orden 500x500), que sin embargo le darán la idea de la utilización del modelo.

Modelo de Leontief

La idea básica del modelo de Leontief es analizar sistemas en los cuales cada elemento es productor y a la vez consumidor tanto de sus propios productos como de los de los otros elementos del sistema. La necesidad de producir para los elementos del sistema se llama demanda interna y la de producir para vender por fuera del sistema se llama demanda externa. (Véase el **ejemplo 1**).

Diferenciadas las demandas el modelo de Leontief permite interpretar las necesidades de producción de un elemento dentro del sistema y hacer algunas predicciones. (Véase la **explicación 2** y el **ejemplo 2**).

El objetivo de la matriz de Leontief es servir de herramienta para el análisis macroeconómico, y aunque tal temática aún no ha sido abordada, se adelantan algunos conceptos que permitan trabajar este modelo,

mientras se estudia la parte económica en el núcleo de producción y distribución. (Véase el **ejemplo 3**).

Las economías de los países se analizan con matrices de cientos e incluso miles de productos, que influyen unos en otros. Piensen en el número de productos afectados por un alza de la gasolina del 10%. Estos modelos resultan inmanejables para efectos académicos, por ello se busca estudiar modelos para una empresa o un poblado, o modelos simplificados por sectores consolidados. (Véase el **ejemplo 4**).

Ejemplo 1. Demanda Interna y Externa

Considérese un modelo muy simplificado de una economía en la que se producen dos artículos: Automóviles (incluyendo camiones) y acero. Cada año se da una demanda externa de 360.000 toneladas de acero y de 110.000 automóviles. Aquí la palabra externa significa que la demanda proviene de fuera de la economía. Por ejemplo, si fuera un modelo de una porción de la economía de un país X, la demanda podría venir de otros países (de tal manera que el acero y los automóviles se exportarían), de otras industrias en el país X y de empresas privadas.

Pero la demanda externa no es la única que se da en las dos industrias consideradas. Se requiere acero para producir automóviles. También se requieren automóviles para producir automóviles, por que las plantas manufactureras de estos vehículos requieren autos y camiones para transportar los materiales y los empleados. De igual manera, la industria del acero requiere acero (para su maquinaria) y automóviles (para el transporte del producto y de los trabajadores) en su operación. Así que cada una de las dos industrias en el sistema impone demandas a sí misma y a la otra industria. Estas acciones se llaman demandas internas.

En nuestro modelo simplificado, se puede suponer que la industria del acero requiere $\frac{1}{4}=0,25$ tonelada de acero y $\frac{1}{2}=0,5$ automóvil (o camión) para producir una tonelada de acero (es decir, se usa un automóvil o un camión en la producción de 12 toneladas de acero). También la industria automotriz requiere de $\frac{1}{2}=0,5$ toneladas de acero y $\frac{1}{9}$ de vehículo para producir un automóvil. La pregunta planteada por el modelo de Leontief de entradas y salidas es entonces: ¿Cuántas toneladas de acero y cuántos automóviles se deben producir cada año para que la disponibilidad de cada uno sea igual a la demanda total?

Solución. Sean x y y el número total de toneladas de acero y el número de automóviles, respectivamente, en cierto año. Esto constituye la oferta (o lo disponible). Si, por ejemplo se requiere $\frac{1}{4}$ de tonelada de acero para producir una tonelada de ese metal, se necesita entonces $\frac{1}{4}x$ toneladas de acero para producir x toneladas de acero. Similarmente, se requiere $\frac{1}{2}y$ toneladas de acero para producir y automóviles. Entonces, el total de la demanda interna en la industria productora del acero es de $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$, y la

demanda total (sumando la demanda externa) es de $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 360.000$. De manera semejante, la demanda total en la industria automotriz es de $\frac{1}{12}x + \frac{1}{9}y + 110.000$. Igualando la oferta con la demanda, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 360.000 \\ y = \frac{1}{12}x + \frac{1}{9}y + 110.000 \end{cases}$$

Como $x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$ y $y - \frac{1}{9}y = \frac{8}{9}y$, se puede escribir el sistema anterior de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 360.000 \\ -\frac{1}{12}x + \frac{8}{9}y = 110.000 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema usando la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 360.000 \\ -\frac{1}{12} & \frac{8}{9} & 110.000 \end{array} \right) \frac{4}{3}F_1 \rightarrow F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 480.000 \\ -\frac{1}{12} & \frac{8}{9} & 110.000 \end{array} \right) \frac{1}{12}F_1 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 480.000 \\ 0 & \frac{5}{6} & 150.000 \end{array} \right) \frac{6}{5}F_2 \rightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 480.000 \\ 0 & 1 & 180.000 \end{array} \right) \frac{2}{3}F_2 + F_1 \rightarrow F_1$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 600.000 \\ 0 & 1 & 180.000 \end{array} \right)$. Entonces, para que la oferta sea exactamente igual a la demanda, se deben producir 600.000 toneladas de acero y 180.000 automóviles (o camiones).

Explicación 1. Modelo general de Leontief

Supóngase que un sistema económico tiene n industrias. Otra vez, hay dos clases de demanda en cada industria. Primero está la demanda externa de fuera de sistema. Si el sistema es un país, por ejemplo, la demanda externa podría ser de otro país. En segundo lugar está la demanda de una industria sobre otra, dentro del mismo sistema. Como se planteó, en el país X del ejemplo 1 se da una demanda en la producción de acero por parte de la industria automotriz.

Así llegamos al siguiente sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar la demanda total con la producción de cada industria.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + e_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + e_2 = x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + e_n = x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 & \dots - a_{1n}x_n = e_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 & \dots - a_{2n}x_n = e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 & \dots + (1-a_{nn})x_n = e_n \end{cases}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}$$

113

donde el vector de demanda externa $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ y el vector de producción

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La matriz $I-A$ en este modelo se llama matriz de Leontief. Suponiendo que dicha matriz de Leontief es invertible, el vector de producción x puede expresarse como:

$$x = (I - A)^{-1} e$$

Hay una ventaja de escribir el vector de producción en esta forma. La matriz de tecnología A es la matriz de las demandas internas, que en periodos relativamente largos permanecen fijas. Sin embargo, el vector e de la demanda externa puede cambiar con cierta frecuencia. Ordinariamente se requieren muchos cálculos para obtener $(I-A)^{-1}$. Pero una vez calculada esta matriz, se puede encontrar el vector de producción x correspondiente a cualquier vector e de demanda para una simple multiplicación de matrices. Si no se determina $(I-A)^{-1}$, se tendría que resolver el problema por eliminación de Gauss – Jordan cada vez que cambiara el vector e . Afortunadamente el computador puede apoyarnos en esa tarea.

EJEMPLO 2. MATRIZ DE LEONTIEF

En un sistema económico con tres industrias, supóngase que la matriz A de tecnología está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,15 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,25 & 0,5 & 0,15 \end{pmatrix}$$

Encontrar la producción total correspondiente a cada uno de los siguientes vectores de demanda.

$$\text{a) } e = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}, \text{ b) } e = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}, \text{ c) } e = \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

La matriz de Leontief es

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,15 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,25 & 0,5 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,15 \\ -0,4 & 0,9 & -0,3 \\ -0,25 & -0,5 & 0,15 \end{pmatrix}, \text{ usamos Derive para}$$

calcular la inversa:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,78594 & 2,26497 & 1,29103 \\ 1,87992 & 2,91048 & 1,35896 \\ 1,92521 & 2,37818 & 2,35555 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos resolver los problemas en cuestión:

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,78594 & 2,26497 & 1,29103 \\ 1,87992 & 2,91048 & 1,35896 \\ 1,92521 & 2,37818 & 2,35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110,30 \\ 118,74 \\ 125,82 \end{pmatrix}$, de donde $x_1 \approx 110$, $x_2 \approx 119$
y $x_3 \approx 126$.

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,78594 & 2,26497 & 1,29103 \\ 1,87992 & 2,91048 & 1,35896 \\ 1,92521 & 2,37818 & 2,35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138,73 \\ 140,77 \\ 170,66 \end{pmatrix}$, de donde $x_1 \approx 139$, $x_2 \approx 141$
y $x_3 \approx 171$.

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,78594 & 2,26497 & 1,29103 \\ 1,87992 & 2,91048 & 1,35896 \\ 1,92521 & 2,37818 & 2,35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 374,63 \\ 415,39 \\ 413,35 \end{pmatrix}$, donde $x_1 \approx 375$, $x_2 \approx 415$ y
 $x_3 \approx 413$.

Observe que todas estas respuestas se pueden verificar insertando los valores calculados x_1 , x_2 y x_3 en la ecuación original, $(I - A)x = e$.

Ejemplo 3. La matriz Insumo – Producto del Sistema de Cuentas Nacionales.⁹

“Las diferentes cuentas nacionales de producción de bienes y servicios están relacionadas entre sí mediante el consumo intermedio, el cual aparece como un componente del costo en las cuentas de producción y como uno de los destinos del producto en las cuentas de oferta utilización. Tales interrelaciones pueden presentarse en forma matricial, como se hace en cualquier sistema de cuentas. A este arreglo se le da el nombre de

⁹ LORA EDUARDO. “Técnicas de Medición Económica” Capítulo 9. El sistema de cuentas nacionales del DANE: Tratamiento de la producción. Páginas 252 – 255.

matriz de consumo intermedio. Las columnas corresponden a las diferentes ramas de producción y las filas a los productos. Si la nomenclatura utilizada para unas y otras, guarda perfecta correspondencia, se tendrá una matriz cuadrada, que en sentido vertical indicará compras intermedias y en sentido horizontal ventas intermedias de un mismo bien para cada columna y fila correspondiente.

Puesto que en el sentido vertical se registran las compras intermedias como un elemento del costo de cada rama de producción, esta matriz puede ampliarse hacia abajo para presentar a los demás componentes del costo, a saber, remuneración a los asalariados, impuestos indirectos netos de subsidios y excedentes brutos de explotación. El total de cada columna indicará ahora lo mismo que la respectiva cuenta de la rama de actividad: El valor bruto correspondiente. La parte que hemos agregado a la matriz de consumo intermedio puede denominarse cuadrante de valor agregado, pues en ella aparecen todos sus componentes.

De igual forma, cada una de las filas de la matriz de consumo intermedio registra los usos intermedios de cada producto. Puede entonces ampliarse a la derecha con los demás usos de cada producto, o sea, los consumos finales, las inversiones y las exportaciones. Este tercer cuadrante, que aparece como resultado de la ampliación de la matriz de consumo intermedio, se denomina cuadrante de demanda final. El total de las demandas finales y los consumos intermedios de cada producto es el mismo total de utilizaciones o demandas del lado derecho de las cuentas de oferta utilización.

Para que el equilibrio entre estas demandas y las ofertas de cada producto aparezcan también en el sistema matricial, puede ahora adicionarse un último cuadrante a la izquierda de la matriz de consumo intermedio para registrar los componentes de la oferta. Agregando la producción característica y las secundarias de otras ramas para cada producto, la oferta total puede descomponerse simplemente en el valor bruto de la producción doméstica e importaciones, como se muestra en la tabla 1. Esta última parte puede denominarse cuadrante de recursos u ofertas y su total será igual a las demandas totales en el cuadrante derecho para cada fila.

El sistema matricial compuesto por los cuatro cuadrantes descritos recibe el nombre de matriz de insumo. Producto. En el proceso de la elaboración de las cuentas de bienes y servicios suele construirse otra matriz con el mismo número de ramas y de productos que la matriz insumo - producto y la cual se descompone por columnas el valor bruto de producción de cada rama según productos, los cuales aparecen en las filas. Esta matriz denominada matriz de producción, no debe confundirse con la matriz insumo - producto de las cuentas nacionales."

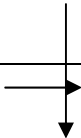
A partir de esta matriz de insumo – producto, hay dos valores claves que es necesario tener claro su origen: El valor Bruto de Producción de cada producto que se obtiene como la suma de lo vendido a consumidores, mas lo que se deja para inversión, más la sumatoria de los consumos intermedios. El segundo es la matriz de coeficientes técnicos que se obtiene con los cocientes respectivos entre los consumos intermedios de cada producto respecto del valor bruto de la producción. (Véase el ejemplo 4).

Tabla 1. Matriz de Insumo – Producto del sistema de cuentas nacionales.

Cuadrante de Recursos
finales

Cuadrante de consumos intermedios

Cuadrante de demandas

			Ventas		RAMAS DE LA ACTIVIDAD							Total ventas intermedias VI	Consumo C	Inversión I	Exportaciones X	Total demandas finales C+I+X	Total demandas C+I+X+VI		
Valor bruto productos	Importaciones M	Oferta Total	Compras		1	2	3	4	5	...									
			PRODUCTOS	1															
				2															
				3															
				4															
				5															
				:															
			Total compras intermedias, CI																
Cuadrante de Valores Agregados			Remuneración de asalariados RA																
			Impuestos indirectos II-Subsidios SS																
			Excedente bruto de explotación EBE																
			Total valor agregado, $VA=RA+II-SS+EBE$																
			Valor bruto producción: $VBP=CI+VA$																

EJEMPLO 4. PLANEACIÓN DE LA PRODUCCIÓN

Obtener la matriz de insumo producto completa para la economía de tres sectores que se describe enseguida.

En el año de actividad observado, el sector primario obtuvo una producción bruta de \$500, de la cual vendió solamente 400, así: \$200 al sector industrial y \$200 a los consumidores, ingresos con los cuales cubrió totalmente sus costos antes de ganancias. El sector industrial efectuó compras intermedias por un total de \$300 y vendió la totalidad de su producción por un valor bruto de \$600, obteniendo ganancias por \$150. Dichas ventas se distribuyeron así: \$300 a la agricultura, \$100 al sector terciario y el resto a consumidores. Por su parte el sector terciario obtuvo

una producción total por un valor de \$200, en la que no hizo ganancia alguna. Por último, el consumo total de bienes finales durante el periodo analizado fue de \$500.

Llevamos la información a la siguiente matriz, la que esta en negrilla se ha colocado allí directamente a partir de la información suministrada, el resto se calcula a partir de la anterior.

Tabla 2. Matriz resumida por sectores de Insumo – Producto

Compras Ventas		RAMAS DE PRODUCCION			Ventas Intermedias VI	Consumo C	Inversión I	Producto Final PIB	Valor bruto de producción
		Primaria	Secundaria	Terciaria					
PRODU	Primarios	-	200	-	200	200	100	300	500
	Secundarios	300	-	100	400	200	-	200	600
	Terciarios	-	100	-	100	100	-	100	200
Compras Intermedias		300	300	100	700	500	100	600	1300
Salarios S		100	150	100	350				
Ganancias G		100	150	0	250				
Valor Agregado (Ingreso) VA		200	300	100	600				
Valor bruto de producción		500	600	200	1300				

Al saber que el sector primario (agricultura) vendió sólo a sector secundario (industria) y consumidores, sabemos que no vendió nada al sector terciario, por lo que el total de ventas intermedias de 200. El excedente no vendido se considera como inversión, es decir 100. Por tanto, ya sabemos que el producto final PIB consumo mas inversión es de 300. De otro lado se tiene que después de comprar 300 al sector secundario y pagar salarios cubre sus costos gracias a unas ventas de 400, entonces el pago de salarios fue por 100. Por residuo entonces las ganancias corresponden con la inversión es decir 100.

El sector secundario ya tiene definidas sus ventas intermedias en un total de 400 y si ha vendido 600 se entiende que las otras 200 fueron vendidos a los consumidores, no hay nada para inversión. Si hizo ventas por 300 a los otros sectores, incluidos 200 que le vendió al sector primario, se entiende que los otros 100 los vendió al sector terciario. Además de los 300 que vendió a los otros sectores recibió 150 de ganancias, entonces los otros 150 para completar 600 corresponden a salarios. De ello también se deduce que el valor agregado para el sector es de 300.

Como el sector terciario (servicios) produjo por un valor de 200 sin obtener ganancia y ya habíamos encontrado que vendió 100 al sector secundario entonces se entiende que los otros 100 fueron vendidos a consumidores, pues así se completa el consumo de 500. Igualmente se deduce que 100 corresponden a pago de salarios, para un valor agregado de 100 también.

Ya habiendo llenado toda la tabla, podemos calcular la matriz de coeficientes técnicos, dividiendo cada producción intermedia por el respectivo valor bruto de la producción.

0	200/60 0	0
300/50 0	0	100/20 0
0	100/60 0	0

De donde la matriz de coeficientes técnicos o matriz de tecnología es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de Leontief es $(I-A) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$

Y su inversa $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,279 & 0,465 & 0,233 \\ 0,837 & 1,395 & 0,698 \\ 0,140 & 0,233 & 1,116 \end{pmatrix}$

Los requerimientos de valor bruto de la producción de cada uno de los sectores para satisfacer una demanda de \$500 del sector primario, \$600 del secundario y \$200 del terciario es:

$$\begin{pmatrix} 1,279 & 0,465 & 0,233 \\ 0,837 & 1,395 & 0,698 \\ 0,140 & 0,233 & 1,116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 965,116 \\ 1395,349 \\ 432,558 \end{pmatrix}$$

4.3 PRÁCTICA CON DERIVE

Ingresa al programa Derive

Digite la siguiente instrucción:

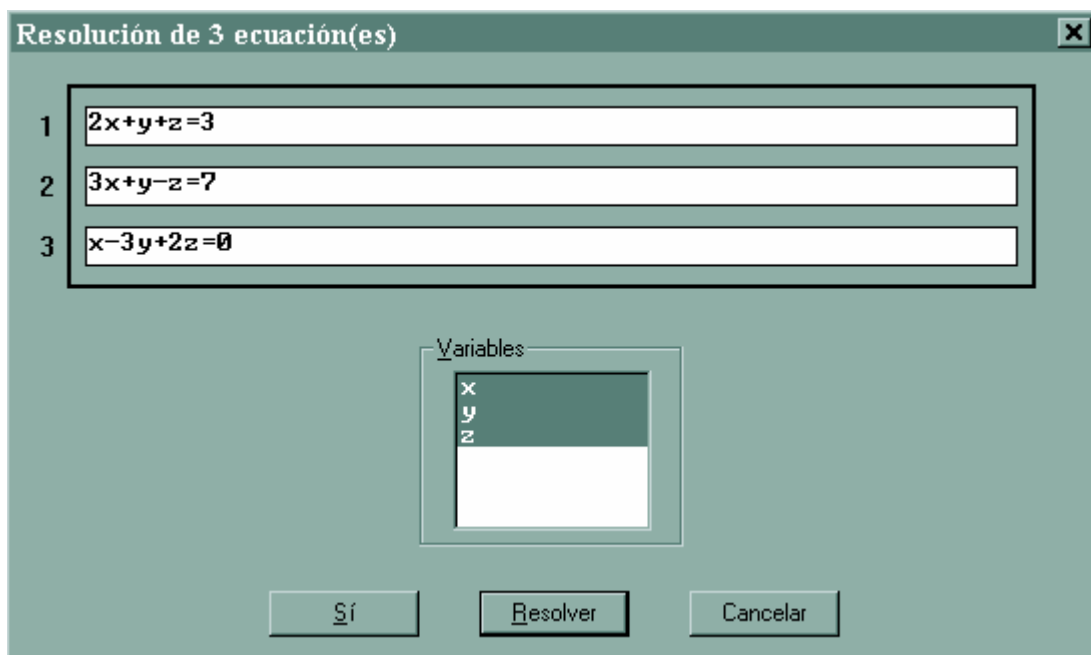
SOLVE([2·x - 2·y + z = 3, 3·x + y - z = 7, x - 3·y + 2·z = 0], [x, y, z])

Otra forma de ingresar al programa este sistema de ecuaciones se da usando la opción Sistema del menú Resolver, o pulsar las teclas Control+Shift+Y. Aparecerá la siguiente ventana que pregunta el número de ecuaciones del sistema:



Luego de que seleccione el número de ecuaciones (3) y haga clic en Sí, aparece una ventana con un campo para cada ecuación.

Si hacemos clic en resolver, Derive, habrá encontrado la solución del



sistema.

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Actividades de aprendizaje

PRÁCTICA DE ENTRENAMIENTO

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, usando el método de Gauss - Jordan. Confirme el resultado usando Derive.

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \begin{cases} x - 4y = 12 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 4x + 12y = 24 \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} 8x - 3y = -34 \\ 2x + 5y = 26 \\ 14x - 11y = -94 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 8 \end{cases} \end{array}$$

PRÁCTICA DE APLICACIÓN

- Solución matricial de sistemas de ecuaciones lineales**

1. Programación de la Producción. Una pequeña planta fabrica tres tipos de botes: modelos para una persona, dos personas y cuatro personas. Cada bote requiere los servicios de tres departamentos. Los departamentos de corte, montaje y empaque disponen de un máximo de 380, 330 y 120 horas de trabajo por semana, respectivamente. ¿Cuántos botes de cada tipo pueden producirse cada semana para que la planta funcione a plena capacidad?.

	Bote person al	Bote de pareja	Bote para 4
Corte	0,5 h	1,0 h	1,5 h
Montaje	0,6 h	0,9 h	1,2 h
Empaqu e	0,2 h	0,3 h	0,5 h

2. Nutrición. Un nutricionista de un hospital regional desea preparar una dieta especial utilizando tres alimentos básicos. La dieta debe contener exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades por onza de cada ingrediente especial, de cada uno de los alimentos se indica en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada alimento deben emplearse para cumplir los requisitos de la dieta?

Unidades por onza	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Calcio	30	10	20

Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

3. Sociología. Dos sociólogos consiguieron dinero para llevar a cabo estudios en una escuela de una ciudad. Desean conducir una encuesta mediante 600 llamadas telefónicas y 400 entrevistas en casas particulares. La empresa A que realizará la investigación cuenta con personal para efectuar treinta llamadas telefónicas y diez entrevistas en casas cada hora; la empresa B puede manejar veinte llamadas telefónicas y veinte entrevistas en casas cada hora. ¿Cuántas horas debe programar cada empresa para producir exactamente el número de entrevistas que se necesita?
4. La agricultura (x), la manufactura (y) y la mano de obra y capital (z) en un pequeño país están relacionados de la siguiente manera: 10% de la producción agrícola se emplea para pagar a las industrias manufactureras y para la mano de obra y capital; la manufacturera y la mano de obra requieren productos agrícolas equivalentes a 30% y 22% de su propia producción, respectivamente; la agricultura vende dentro del país 359 miles de dólares ajenos a la mano de obra y capital y a la manufactura. Las demandas interindustriales totales sobre y y z, junto con sus demandas finales de consumo local (en millones de dólares), son como sigue:

$$\begin{cases} (y) & 0,1x + 0,6y + 0,2z; & 70 \\ (z) & 0,5x + 0,1y + 0,2z; & 1730 \end{cases}$$

5. Una cafetería estudiantil tiene 24 mesas, x mesas con 4 asientos cada una, y mesas con 6 asientos cada una y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad total de asientos de la cafetería es de 148. Con motivo de una reunión estudiantil especial, se emplearán la mitad de las x mesas, un cuarto de las y mesas y una tercera parte de las z mesas, para un total de 9 mesas. Determinar x, y y z.
6. El salón de eventos de la casa de la cultura del municipio de Villanueva tiene 56 mesas, x mesas con 4 asientos cada una, y mesas con 8 asientos cada una, y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad de asientos de la cafetería es de 664. Durante una seminario - taller se ocuparon la mitas de las x mesas, un cuarto de las y mesas y un décimo de las z mesas. ¿Cuántas de cada tipo se usaron en ese evento?
7. Se emitieron tres tipos de bonos de deuda pública de tres tipos, por un total de 79,20 miles de dólares. Si el tipo A le cuesta al público 5, el tipo B cuesta 2,8 y el tipo C cuesta 1,6; todos en miles de dólares. ¿Cuántos bonos de cada tipo fueron vendidos?.
8. Una droguería comunitaria vende 100 unidades de vitamina A, 50 unidades de vitamina C y 25 unidades de vitamina D por un total de U\$17,50; 200 unidades de vitamina A, 100 unidades de vitamina C y 100 unidades de vitamina D por U\$ 45,00; 500 unidades de vitamina A,

80 unidades de vitamina C y 50 unidades de vitamina D por U\$ 64,00.
Encuentre el costo por unidad de cada una de las vitaminas A, C y D.

ALGUNAS RESPUESTAS

1. 20 botes de una persona, 220 botes de dos personas, 100 botes de cuatro personas.
2. 8 onzas de alimento A, 2 onzas de alimento B, 4 onzas de alimento C.
3. La compañía A: 10 horas, la compañía B: 15 horas.
4. $X=1.100$, $y=2.000$, $z=3.100$.
5. $X=10$, $y=8$ y $z=6$.
6. $X=26$, $y=20$, $x=10$.
7. $A=10$, $B=7$, $C=6$.

• *Matriz de insumo - producto*

1. Suponga que, dada la estructura técnica de la economía, la siguiente es la matriz de Leontief:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,078 & 0,334 & 0,107 \\ 0,260 & 1,115 & 0,368 \\ 0,134 & 0,145 & 1,048 \end{pmatrix} \text{ y los siguientes son los vectores de}$$

coeficientes de valor agregado de los sectores.

$$S = \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,67 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,0 \end{pmatrix}. \text{ Calcule el porcentaje de participación de los salarios y}$$

las ganancias por peso de demanda final de cada sector.

2. Obtenga la matriz insumo - producto completa para la economía de tres sectores que se describe: En el año de actividad observado, el sector primario adquirió insumos industriales por \$100 y pagó servicios por \$50. El producto se destinó en su totalidad a la venta, así: \$300 al sector industrial y 200 a los consumidores. Una vez cubiertos los costos, los agricultores obtuvieron ganancias por \$150. El sector secundario compró además servicios por \$100, pagó salarios por \$200 y obtuvo una producción por un valor de \$1.000, de los cuales pudo vender \$100 a los agricultores, \$100 a los productores de servicios y \$600 a los consumidores. En cuanto al sector terciario, produjo y vendió servicios por \$300 a precio de costo, sin obtener pérdida ni ganancia alguna.

3. Obtenga la matriz de coeficientes técnicos para la matriz insumo producto del ejercicio anterior.

4. Obtenga la matriz de Leontief y su inversa a partir del punto anterior.

5. Calcule los requerimientos de valor bruto de producción de cada uno de los sectores para satisfacer una demanda de bienes finales de \$300 del sector primario, \$1.000 del sector secundario y \$200 del terciario.

6. Se supone una economía basada en dos sectores industriales - agricultura (A) y energía (E). La matriz de tecnología M y las matrices de demanda final en millones de dólares son:

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

¿Qué entradas de A y E se requieren para producir un valor en dólares de la salida de A?

¿Qué entradas de A y E se requieren para producir un valor en dólares de la salida de E?

Calcule la matriz de Leontief y su respectiva inversa.

Calcule la salida de cada sector que se necesita para satisfacer la demanda final D_1 .

Repita el problema para D_2 y D_3 .

7. Se supone una economía basada en tres sectores primario (agropecuaria), secundario (industria) y terciario (servicios). La matriz de tecnología M y las matrices de demanda final en millones de dólares son:

$$A = \begin{pmatrix} 0,422 & 0,100 & 0,266 \\ 0,089 & 0,350 & 0,134 \\ 0,134 & 0,100 & 0,334 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

¿Qué entradas de los tres sectores se requieren para producir un valor en dólares de la salida de B? ¿Qué cantidad de cada salida se requiere como entrada para cada uno de los tres sectores?

Ahora resuelva las operaciones de matrices con Derive y compare sus respuestas.

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Autoevaluación

15. Un sistema de ecuaciones facilita:
- a. Describir cualitativamente un escenario o situación real
 - b. Modelar un escenario o situación real**
 - c. Modelar únicamente fenómenos administrativos
 - d. Modelar únicamente fenómenos económicos
16. Las ecuaciones lineales son representaciones de funciones lineales que pueden representar:
- a. Ecuaciones de demanda, oferta, ingreso, costos entre otras**
 - b. Ecuaciones sólo de demanda e ingresos
 - c. Ecuaciones de ingreso marginal
 - d. Ninguna de las anteriores
17. Con el uso de matrices se pueden solucionar sistemas:
- a. Sólo ecuaciones lineales
 - b. De ecuaciones lineales**
 - c. Sólo ecuaciones no lineales
 - d. Ninguna de las anteriores
18. La matriz de Leontief sirve para:
- a. Presentar el sistema de cuentas y producción de bienes y servicios, del sistema de cuentas nacionales
 - b. Describir las transacciones intersectoriales relacionadas con la producción
 - c. Realizar el análisis económico a fin de determinar los niveles de producción que deben alcanzar los diferentes sectores para satisfacer las demandas de consumo o inversión de los diferentes productos
 - d. Todas las anteriores**
19. Se llama demanda interna a:
- a. La necesidad de producir para vender por fuera del sistema

- b. La necesidad de comprar para los elementos del sistema.
- c. La necesidad de producir para los elementos del sistema**
- d. Todas las anteriores

20. Se llama demanda externa a:

- a. La necesidad de comprar para vender por fuera del sistema
- b. La necesidad de producir para vender por dentro del sistema
- c. La necesidad de producir para vender por fuera del sistema**
- d. Ninguna de las anteriores

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Síntesis

Lo que se busca principalmente con un sistema de ecuaciones es modelar un escenario o situación real, y es ahí donde debe recaer la fortaleza del Administrador Público, ya que el procedimiento algorítmico matemático puede seguirse por diversos caminos con igual resultado e incluso puede y debe ser apoyado por el computador. Sin embargo, es necesario reconocer el procedimiento para hacer significativo lo que se está estudiando.

Las ecuaciones lineales son representaciones de funciones lineales y pueden representar ecuaciones de demanda, oferta, ingreso, etc. La solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar las coordenadas del punto en el cual se cortan las rectas de dicho sistema.

Con el uso de matrices se pueden solucionar sistemas de ecuaciones lineales, mediante la eliminación de Gauss-Jordan a través de operaciones con filas. De hecho es el método más aceptado para sistemas de gran tamaño.

La matriz de Leontief sirve para presentar el sistema de cuentas y producción de bienes y servicios, del sistema de cuentas nacionales, principalmente describe las transacciones intersectoriales relacionadas con la producción y sirve también como herramienta de programación y análisis económico a fin de determinar los niveles de producción que deben alcanzar los diferentes sectores para satisfacer las demandas de consumo o inversión de los diferentes productos.

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Bibliografía y Webgrafía

ALAN BEER, G. (1984). "Matemáticas Aplicadas para Economía y Negocios con una introducción a matrices" Editorial Prentice Hall Internacional. Traducción: Guillermo Jaramillo Recio Universidad del Valle (Cali). Madrid.

GERVER, H.(1992). "Álgebra Lineal". Grupo Editorial Iberoamérica. Título original "Elemntary Linear Algebra" Traductor: Eduardo Ojeda Peña. México.

GROSSMAN, S. (1988). "Aplicaciones de Álgebra Lineal". Grupo Editorial Iberoamérica. Traductor: Alfonso Leal Guajardo. México.

KLEIMAN, A. & DE KLEIMAN, E. (1973). "Matrices: Aplicaciones Matemáticas a la Economía y la Administración." Editorial Limusa. México.

LORA, E. (1999). "Técnicas de Medición Económica. Metodología y aplicaciones en Colombia". Tercer Mundo Editores & Fedesarrollo. Segunda Edición. Octava reimpresión. Bogotá D.C.

Unidad 4. Aplicaciones de las Matrices

Glosario

Ecuaciones lineales. Son representaciones de funciones lineales y pueden representar ecuaciones de demanda, oferta, ingreso, etc

Matriz de Leontief. Sirve para presentar el sistema de cuentas y producción de bienes y servicios, del sistema de cuentas nacionales.

Sistema de ecuaciones. Permite modelar un escenario o situación real.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales. Consiste en encontrar las coordenadas del punto en el cual se cortan las rectas de dicho sistema.

JOSÉ MIGUEL CUBILLOS MUNCA

Profesor Catedrático ESAP
Licenciado en Matemática y Física
Administrador Público
Especialista en Computación para la Docencia

miguel.cubillos@esap.edu.co

LUIS MIGUEL CABRERA

Licenciado en Matemáticas y Física
Especialista en Informática y Multimedia
Magister en Educación a Distancia
Doctorando Sociedad de la Información y el Conocimiento

cabreralm@gmail.com