

3. **Excedentes bajo equilibrio.** En los siguientes casos la primera ecuación es la de demanda y la segunda es la ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de consumidores y el excedente de productores bajo equilibrio del mercado.

a. $p = 20 - 0,8q$, $p = 4 + 1,2q$.

Ubicamos el punto de equilibrio

$$20 - 0.8q = 4 + 1.2q$$

$$20 - 4 = 1.2q + 0.8q$$

$$16 = 2q \rightarrow q = \frac{16}{2} = 8$$

$$p = 4 + 1.2(8) = 13.6$$

$$\rightarrow (8, 13.6)$$

El excedente del consumidor es

$$\begin{aligned} \int_0^8 20 - 0.8q - (13.6) dq &= \int_0^8 6.4 - 0.8q dq = \left(6.4q - \frac{0.8q^2}{2} \right)_0^8 \\ &= 6.4(8) - 0.4(64) - 0 - 0 = 25.6 \end{aligned}$$

El excedente del productor es

$$\begin{aligned} \int_0^8 13.6 - (4 + 1.2q) dq &= \int_0^8 9.6 - 1.2q dq = \left(9.6q - \frac{1.2q^2}{2} \right)_0^8 \\ &= 9.6(8) - 0.6(64) = 38.4 \end{aligned}$$

b. $p = \frac{50}{q+5}$, $p = \frac{q}{10} + 4,5$.

Ubicamos el punto de equilibrio

$$\frac{50}{q+5} = \frac{q}{10} + 4.5$$

$$\frac{50}{q+5} = \frac{q+45}{10}$$

$$500 = (q+45)(q+5) = q^2 + 45q + 5q + 225$$

$$q^2 + 50q - 275 = 0$$

$$= \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4(1)(-275)}}{2(1)} = \frac{-50 \pm \sqrt{3600}}{2(1)} = \frac{-50 \pm 60}{2}$$

$$q = \frac{-50 + 60}{2} = 5$$

$$p = \frac{50}{10} = 5$$

Punto de equilibrio $\rightarrow (5,5)$

El excedente del consumidor es

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{50}{q+5} - 5 \, dq &= (50 \ln(q+5) - 5q)_0^5 \\ &= 50 \ln(5+5) - 25 - 50 \ln(5) = 50 \ln(10) - 50 \ln(5) - 25 \approx 9.65 \end{aligned}$$

El excedente del productor es

$$\begin{aligned} \int_0^5 5 - \left(\frac{q}{10} + 4.5\right) \, dq &= \int_0^5 0.5 - \frac{q}{10} \, dq = \left(0.5q - \frac{q^2}{20}\right)_0^5 = \\ &= 0.5(5) - \frac{(5)^2}{20} - 0 - 0 = 1.25 \end{aligned}$$

$$c. \quad q = 100(10 - p), \quad q = 80(p - 1).$$

Cambiamos para que queden en funcion de q

$$\frac{q}{100} = 10 - p \rightarrow p_1 = 10 - \frac{q}{100}$$

$$p - 1 = \frac{q}{80} \rightarrow p_2 = \frac{q}{80} + 1$$

Encontramos el punto de equilibrio

$$10 - \frac{q}{100} = \frac{q}{80} + 1$$

$$10 - 1 = \frac{q}{80} + \frac{q}{100}$$

$$9 = \frac{100q + 80q}{8000} = \frac{9q}{400}$$

$$q = 400, p = 10 - \frac{400}{100} = 6$$

$$(400, 6)$$

El excedente del consumidor es

$$\int_0^{400} 10 - \frac{q}{100} - 6 \, dq = \int_0^{400} 4 - \frac{q}{100} \, dq = \left(4q - \frac{q^2}{200} \right)_0^{400} = 4(400) - \frac{400^2}{200}$$

$$= 1600 - 800 = 800$$

El excedente del productor es

$$\int_0^{400} 6 - \left(\frac{q}{80} + 1 \right) \, dq = \int_0^{400} 5 - \frac{q}{80} \, dq = \left(5q - \frac{q^2}{160} \right)_0^{400} = 5(400) - \frac{400^2}{160}$$

$$= 2000 - 1000 = 1000$$