

Sommaire

1	Introduction	2
2	Modèle d'Airy - houle infinie	2
3	Discretisation du domaine d'étude	3
4	Problème discret par différences finies en espace	3
5	Introduction d'un schéma différence finie en temps	5
6	Post-traitement des données et affichage	6
6.1	Fonction elevation et pression	7
6.2	Gradient	8
6.3	Trajectoire	9
6.4	Comparaison avec la solution analytique	10
7	Pour aller plus loin	10
8	Conclusion	11

1 Introduction

L'objectif de ce TP est de résoudre par la méthode des différences finies, les équations régissant la propagation de perturbations de l'élévation de la surface d'un fluide dans un champ de pesanteur, c'est à dire les vagues. On s'intéresse ici à un canal, usuellement utilisé pour expérimenter la propagation de vagues. (cf. Figure 1)

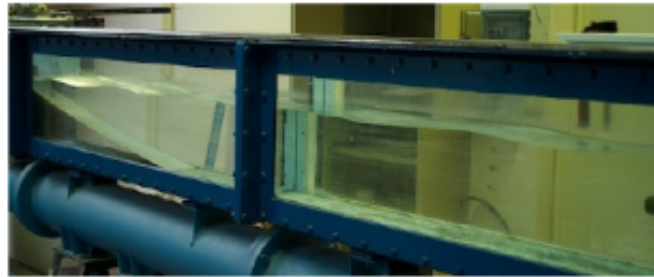


FIGURE 1 – Canal expérimental à houle

2 Modèle d'Airy - houle infinie

La houle est ce train de vagues que l'on observe se propager librement en mer. Différents modèles existent pour modéliser ce phénomène. On retient ici un modèle proposé par Airy en 1845 (cf Figure ci dessous), impliquant des simplifications importantes suivantes :

- le fluide est parfait, incompressible et pesant;
- l'écoulement est irrotationnel dans le champ de pesanteur terrestre;
- la profondeur d'eau est constante, voire infinie;
- la pression au-dessus de la surface libre est constante;
- on suppose que les perturbations sont légères : $a/H \ll 1$

Ce modèle correspond à un cas particulier du modèle de Stokes. Il s'agit du cas d'ordre un. Dans le modèle de houle infinitésimal d'Airy, tous les termes faisant intervenir la hauteur de la houle, a , à des ordres supérieurs ou égaux à deux ont été négligés. Lorsque la hauteur crête à creux croît, cette approximation n'est donc plus correcte. Il serait alors nécessaire de retenir les termes d'ordre supérieurs pour modéliser la houle. On n'étudiera pas ce cas dans ce TP.

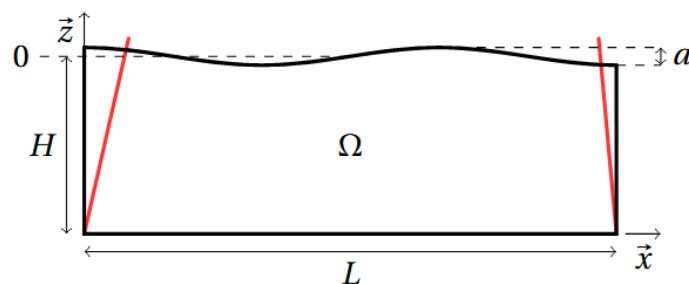


FIGURE 2 – Modèle d'Airy

Le potentiel des vitesses ϕ associé à ce modèle est défini suivant plusieurs équations dont les domaines de validités sont représentés ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 & \text{sur } \Gamma_H, t > 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_g(z, t) & \text{sur } \Gamma_G, t > 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_d(z, t) & \text{sur } \Gamma_D, t > 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 & \text{sur } \Gamma_B, t > 0 \\ \phi = 0, \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 & \text{dans } \Omega, t = 0 \end{cases}$$

3 Discrétisation du domaine d'étude

Afin de résoudre ce problème, on discrétise ces équations dans le but de les implémenter dans un script Matlab. On discrétise alors, la coordonnée temporelle et les deux coordonnées relatives à l'espace :

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)h_x ; \quad h_x = \frac{L}{N_x-1} \quad 1 \leq i \leq N_x \\ z_j &= (j-1)h_z - H ; \quad h_z = \frac{H}{N_z-1} \quad 1 \leq j \leq N_z \\ t_n &= (n-1)h_t ; \quad h_t = \frac{T}{N_t-1} \quad 1 \leq n \leq N_t \end{aligned}$$

On définit aussi k , en s'appuyant sur la figure suivante : $k = j + (i-1) * N_z$

L'indice k nous permettra par la suite de sélectionner en une seule fois tous les indices, notamment grâce à la fonction `index(1:Nx,Nz,[Nz Nx])`.

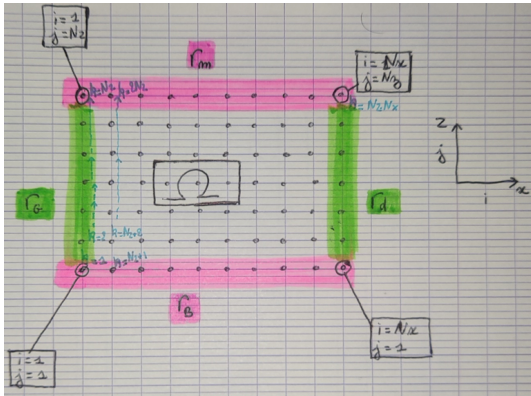


FIGURE 3 – Discrétisation du modèle

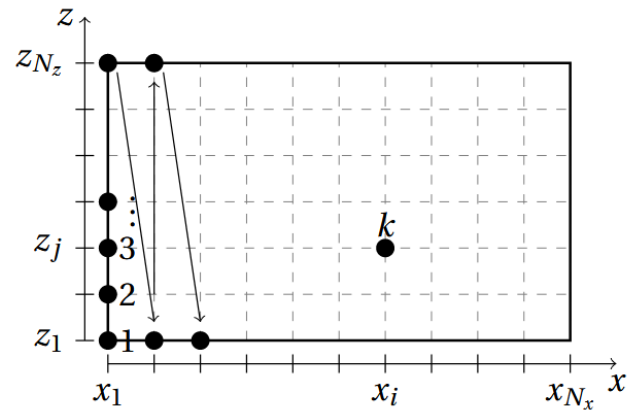


FIGURE 4 – Correspondance des indices (i,j) vers k

4 Problème discret par différences finies en espace

Pour chaque equation (1a), (1b), (1c), (1d) et (1e), on écrit les différents sous-systèmes d'équations discrètes qui découle de l'approximation des dérivées par différences finies. Voici ce que l'on obtient :

On note dans les calculs suivants :

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{1,2} \\ \vdots \\ \phi_{1,Nz} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{2,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{Nx,Nz} \end{bmatrix}$$

$(1a) * M_1 \ddot{\varphi} + K_1 \varphi = F_1$ avec $i \in [2, Nx-1]; j \in [2, Nz-1]$
 $(1b) * M_2 \ddot{\varphi} + K_2 \varphi = F_2$ avec $i \in [1, Nx]; j \neq Nz$
 $(1c) * M_3 \ddot{\varphi} + K_3 \varphi = F_3$ avec $i = 1; j \in [2, Nz-1]$
 $(1d) * M_4 \ddot{\varphi} + K_4 \varphi = F_4$ avec $i = Nx; j \in [2, Nz-1]$
 $(1e) * M_5 \ddot{\varphi} + K_5 \varphi = F_5$ avec $i \in [1, Nx]; j \neq 1$

Equation 1a:

$$* M_1 = [0] \quad * F_1 = [0]_{(Nz \cdot Nx), 1}$$

$$* K_1 = \left(0 \begin{bmatrix} 1/h_x^2 \end{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 1/h_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/h_x^2 & -2/h_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/h_x^2 \end{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 1/h_z^2 \end{bmatrix} \right)$$

avec $\dim(K_1) = \underbrace{[(Nz-2)(Nx-2)]}_{\text{lignes}} \times \underbrace{[Nx \cdot Nz]}_{\text{colonnes}}$

Equation 1b:

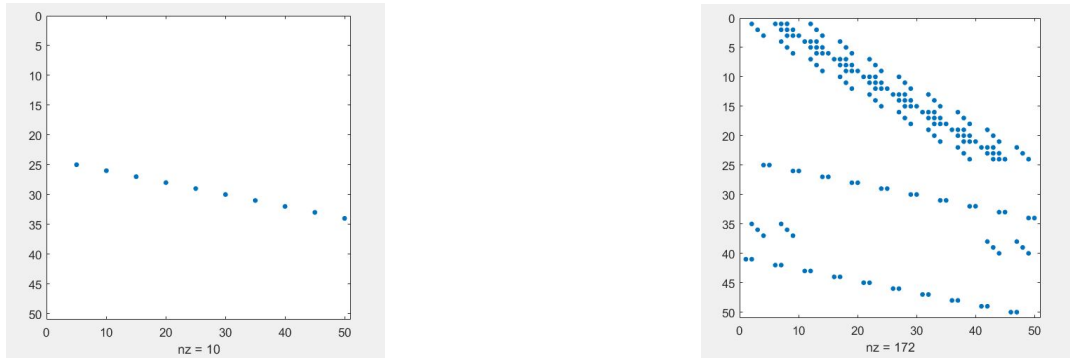
$$* M_2 = [1]_{Nx}$$

$$* F_2 = [0]_{Nx}$$

$$* K_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1/h_z^2 & -1/h_z^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/h_z^2 & 1/h_z^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

$[Nx] \times [Nz \cdot Nx]$

FIGURE 5 – Détermination des différentes matrices du problème (1)

FIGURE 7 – "Spy" des matrices Mh (droite) et Kh (gauche)

Le schéma d'intégration utilisé sur le script Matlab dans le but de résoudre l'équation précédente est un schéma de type Newmark.

Ce schéma est l'équivalent du θ schéma pour les équations dérivées partielles. Les 2 paramètres mis en jeu sont $\beta \in [0, 1/2]$ et $\gamma \in [0, 1]$. Afin de rester dans une situation où le schéma est inconditionnellement stable, on fixera $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$. Les différentes approximations liées à ce schéma d'intégration sont les suivantes :

$$\phi^{n+1} \approx \phi^n + dt \dot{\phi}^{n+1} + dt^2 [(\frac{1}{2} - \beta) \ddot{\phi}^n + \beta \ddot{\phi}^{n+1}]$$

$$\dot{\phi}^{n+1} \approx \dot{\phi}^n + dt [(1 - \gamma) \ddot{\phi}^n + \gamma \ddot{\phi}^{n+1}]$$

$$\ddot{\phi}^{n+1} \approx [\mathbb{M} + dt^2 (\gamma + \beta) \mathbb{K}]^{-1} * [\mathbf{F}^{n+1} - \mathbb{K}(dt^2(\frac{3}{2} - \gamma - \beta)\ddot{\phi}^n + dt\dot{\phi}^n + \phi^n)]$$

6 Post-traitement des données et affichage

Cette partie présente les grandeurs importantes déterminées à l'aide du schéma d'intégration de Newmark. Afin d'exploiter au mieux les résultats une fonction, "visualisation" a été créée. Cette fonction permet la visualisation :

- du potentiel des vitesses ϕ à chaque instant;
- du vecteur vitesse à chaque instant;
- de l'élévation et de la pression dans le milieu à chaque instant;
- de la trajectoire des particules fluides;

6.1 Fonction elevation et pression

La pression est obtenue à partir de son expression tirée de l'équation de Bernoulli. L'équation de l'élévation de la surface libre quant à elle, est obtenue en recherchant les altitudes (x,t) pour lesquelles la pression est nulle dans l'équation de Bernoulli linéarisée. Les fonctions "élévation ou η " et "pression" sont donc décrites de la manière suivante :

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \dot{\phi}(x, z=0, t)$$

$$p(x, z, t) = -\rho \dot{\phi}(x, z, t)$$

Avec $i \in [1;Nx]$ et $j = Nz$ pour les indices associés à la fonction codée " η "

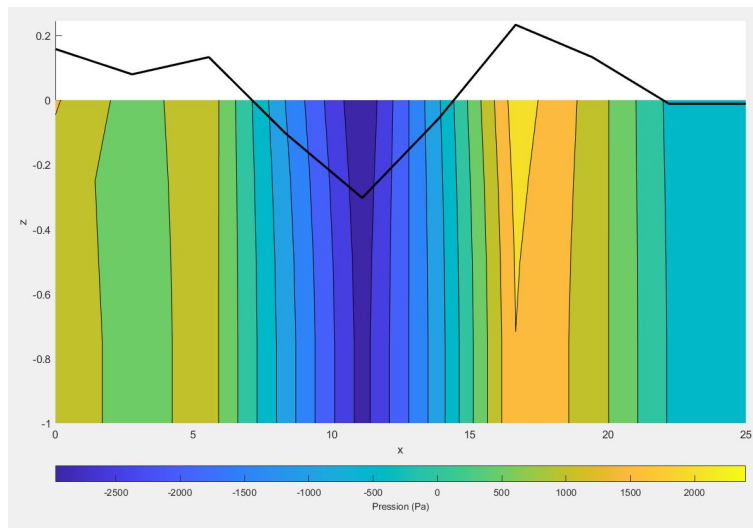


FIGURE 8 – Comportement de la vague et Pression du milieu dans le domaine

On remarque que la pression semble ne pas beaucoup varier selon y , cela peut potentiellement être dû aux hypothèses faites au niveau de la pression (fluide parfait, incompressible, pesant) et au pas de discrétisation plutôt faible rendant le modèle moins précis. À l'aide de la figure précédente on voit que les extrema de la pression correspondent à ceux de la fonction élévation. Ce qui est logique, car ces deux fonctions dépendent d'une, et même fonction, la fonction $\dot{\phi}$.

Par ailleurs, on remarque que les conditions aux limites en pression aux bords sont bien respectées.

De plus, il est flagrant que les pas de discrétisation choisis $(h_x, h_z) = (2.78, 0.25)$ ne sont pas assez fins pour représenter la réelle forme de la fonction "élévation". En effet, on s'attend normalement à observer une courbe sinusoïdale. Cependant, le résultat reste exploitable sachant que le temps de calcul est tout à fait acceptable.

6.2 Gradient

Cette fonction, déjà programmée en amont permet de visualiser le vecteur vitesse à chaque instant. De plus, on remarque, en analysant la fonction, qu'elle ne prend pas en compte le changement de conditions limites.

Il faudra donc la modifier si l'on désire modifier les conditions limites du problème.

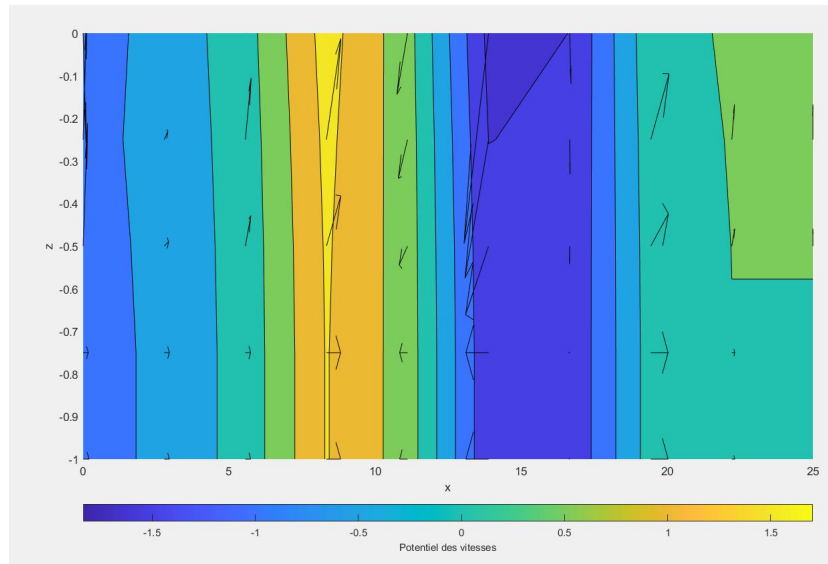


FIGURE 9 – Potentielle de vitesse ϕ associé aux différents vecteurs vitesses dans le milieu

En tout point et à chaque instant, la composante horizontale de la vitesse et l'élévation de la surface libre ($z=0$) serait en phase.

De plus, dans la crête, la vitesse horizontale passe par un maximum dirigé dans le sens de la propagation de la houle, tandis que dans les creux elle atteint son maximum dans le sens inverse.

6.3 Trajectoire

La fonction "trajectoire" est aussi une autre fonction préalablement codée. Elle est déterminée par intégration trapézoïdale. On écrit alors la trajectoire comme la somme cumulée de la vitesse multipliée par l'incrément de temps :

$$x(t_n) = \int_0^{t_n} v(t) dt \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{v_{i+1}\Delta t}{2} + v_i\Delta t \right)$$

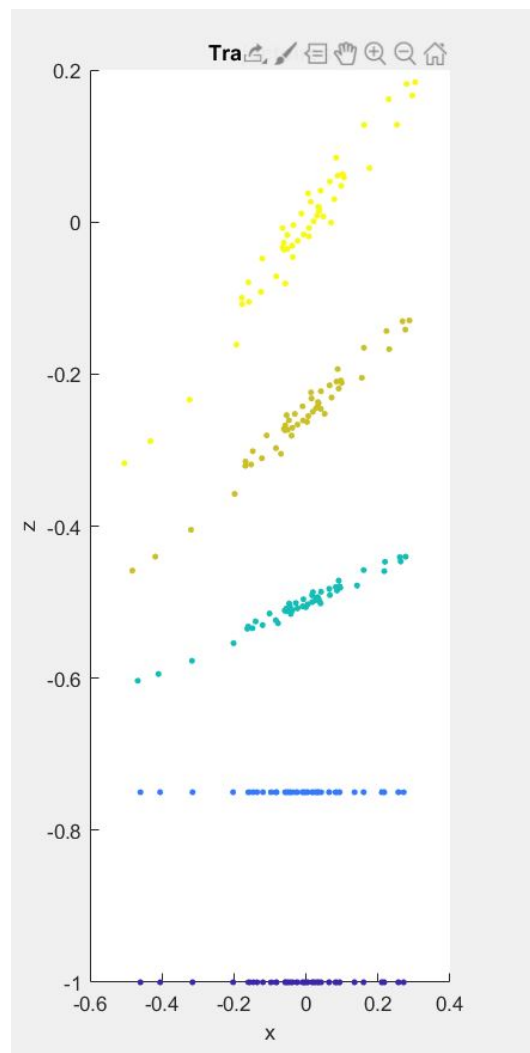


FIGURE 10 – Trajectoire des particules de fluide pour différent z fixé

D'après la figure précédente, les trajectoires des particules de fluides sont des ellipses. Ces ellipses tendent à devenir des cercles dans le plan $(x_{incliné}, y)$ au fur et à mesure que la profondeur diminue. Ce résultat reste cohérent avec les paramètres fixés de notre problème.

6.4 Comparaison avec la solution analytique

On compare à présent la solution obtenue précédemment avec la solution analytique en milieu infini donné dans le fichier tp2ex.m.

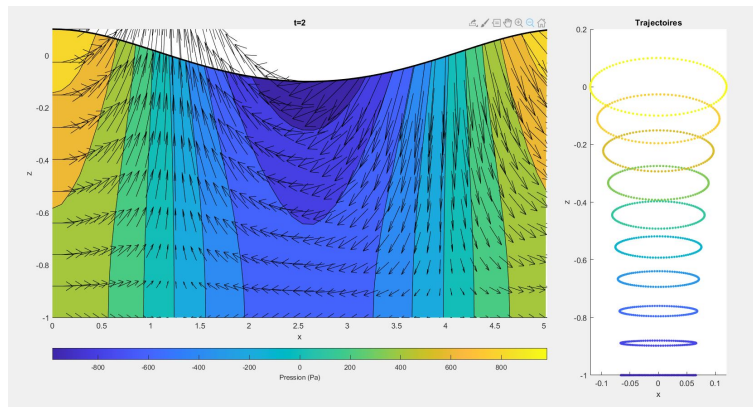


FIGURE 11 – Solution analytique du problème

Contrairement à la solution déterminée, la courbe définissant l'élévation est parfaitement sinusoïdale. Elle représente l'excitation imposée en $(z=0, x=0)$. Les trajectoires quant à elles confirment le fait que, la trajectoire elliptique au niveau de la houle s'estompe avec la profondeur pour devenir un cercle.

Par ailleurs, le modèle analytique réussit à avoir assez d'information pour décrire le champ de vitesses en $z = 0$. Ce qui n'est pas le cas pour notre modèle approximé.

De plus, on observe en début d'excitation des différences entre deux modèles. En effet, l'amplification au début des deux différentes simulations n'est pas la même. L'amplification sur le modèle approximé met un certain temps à exciter la surface libre $(z=0)$. Ce qu'on ne retrouve pas dans le cas du modèle analytique fourni. En effet, le batteur transmet directement son excitation sinusoïdale à la surface libre en $(z=0)$.

Aussi, on remarque que les fortes décroissances de l'amplitude en aval des bosses ne sont pas représentées.

En outre, on se doute bien que les amplitudes de houles générées sont minutieusement choisies afin d'obtenir les profils de houle les plus sinusoïdaux possible et d'éliminer tout risque de déferlement de crête.

7 Pour aller plus loin

8 Conclusion

Le déplacement du fluide au sein d'un canal peut poser encore un certain nombre d'interrogations dans certains cas. Le domaine du génie côtier, la recherche et l'industrie s'unissent pour mettre en évidence l'influence de la propagation de la houle sur des ouvrages ou encore sur les côtes maritimes.

L'approximation numérique des différents problèmes liée à cela présente certes des avantages (gain de temps de calcul, simplicité de mise en oeuvre...) mais participent à la disparition de plusieurs singularités du problème qui peuvent être plus ou moins importante. Si l'analyse du cas analytique n'est pas envisageable, le choix d'un ou deux plusieurs modèles d'approximation numérique doit s'effectuer en connaissance de cause. Un modèle modélisera pourrait modéliser plus un effet qu'un autre et inversement.

Dans le but d'avoir un modèle pour notre problème plus réel, il serait intéressant de s'orienter vers des modèles de Houle mettant en jeu moins d'hypothèses. Le modèle de "houle de Gresner" pourrait être une solution.