Lógica Computacional 1 (2021-2)

Ana Caroline Braz
21/2008482

Denis Silva
14/0136282

Mirella Gomes
20/2033525

30 de abril de 2022

1 Lógica Proposicional

Proposições são sentenças nas quais podemos atribuir um valor verdade (verdadeiro ou falso). Elas podem ser classificadas em simples ou compostas. Proposições simples são indivisíveis (atômicas) e proposições compostas são formadas por uma combinação de proposições simples. Para entender melhor a **Lógica Proposicional Clássica (LPC)** é necessário se familiarizar com a seus conceitos:

- **Conectivos:** negação (¬), disjunção (∧), conjunção (∨), implicação (→) e bicondicional (↔).
- **Proposições:** Utilizados símbolos propocionais (letras minusculas) para expressá-las
- **Fórmulas:** Combinação entre proposição e conectivo. Representada por letras maiúsculas.

1.1 Validade e Satisfatibilidade

Para que uma fórmula seja **satisfazível**, deve existir pelo menos uma validação que a torne VERDADEIRA. Caso todas as validações sejam VERDADEIRAS, então temos um caso de **Tautologia**. Para todos as validações iguais a FALSO, temos uma **Contradição**. Por último, caso a expressão não seja nem uma tautologia nem contradição, temos uma **Contigência**[1].

1.2 Consequência Lógica e Equivalência Lógica

Uma fórmula B é consequência lógica de uma fórmula A, representada por A⊨B, se toda valoração v que satisfaz A também satisfaça B [2]. Além da consequência lógica entre duas fórmulas, é possivel analisar quando uma forma A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ, representada por $\Gamma \models A$. Para que isso ocorra, quando todos os valores das fórmulas em Γ forem VERDADEIRAS, A também deverá ser.

Existe uma relação entre a implicação e a consequência lógica. Essa relação é explicada pelo **Teorema da Dedução**, que nos diz que A→B é consequência lógica das hipóteses Γ se, ao adicionarmos A às hipóteses pudemos inferir logicamente B [2].

Além disso, temos a definição de **Equivalência Lógica** que nos diz que para que duas fórmulas sejam iguais, todos as suas valorações também devem ser.

2 Sistema Dedutivo

Suponha que exista um conjunto de fórmulas ϕ_1, ϕ_2, ... , ϕ_n no qual cada proposição é chamada de premissa ou hipótese e uma fórmula ψ chamada de conclusão. Nesse contexto, as hipóteses e a conclusão formam um **sequente** [3].Para provar esse sequente é aplicado uma série de regras que levam a essa conclusão a partir de suas hipóteses. Dessa forma, um sistema dedutivo nos permite inferir, derivar ou deduzir as consequências lógicas de um conjunto de fórmulas [2].

2.1 Dedução Natural

Dedução natural é um tipo de sistema que permite realizar uma inferência. Ele é baseado nos seguintes principios [2]:

- Hipóteses podem ser introduzidas na prova, mas devem ser posteriormente descartadas para validar a prova.
- Cada conectivo lógico possui duas regras de inferência: uma de introdução e uma de eliminação.

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge E_1) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E_2)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to I)^i \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\ (\to E)$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee I_1) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee I_2) \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^j\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ (\vee E)^{i,j}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}\ (\bot I) \qquad \frac{\bot}{A}\ (\bot E)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\ (\neg I)^i \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\ (\neg E)^i$$

Figura 1: Regras de introdução e eliminação de conectivos em Dedução Natural

Pode-se observar abaixo um exemplo de prova que utiliza dedução natural, no qual queremos provar o sequente: $\neg\varphi \vee \gamma \vdash \varphi \to \gamma$:

$$\cfrac{\cfrac{\neg\varphi \vee \gamma \qquad \cfrac{\cfrac{[\neg\varphi]^v \qquad [\varphi]^u}{\bot}\ (\neg_e)}{\gamma}\ (\bot_e) \qquad [\gamma]^w}{\gamma}\ (\vee_e)\ v, w}{\varphi \to \gamma}\ (\to_i)\ u$$

Figura 2: Prova do sequente

Nota-se que o método de dedução utiliza árvores para provar os sequentes. A conclusão é a raiz da árvore de dedução e as hipóteses os nós.

Apesar de sua importância para lógica computacional, a **Lógica Proposicional** possui algumas limitações. Ela não permite expressar relações sobre os elemento de um conjunto, assim, não é possível utilizar quantificadores, para que seja possivel, devemos utilizar a **Lógica de Predicados**

Referências

[1] Sergio E.; SILVA Cristiane; et al. DA DOS SANTOS, Marcelo da Silva; NUNES. *Lógica computacional.* Grupo A., 2021.

[2] Flávio Soares Corrêa da Silva, Marcelo Finger, and Ana Cristina Vieira de Melo. *Lógica para computação.* Cengage Learning Edições Ltda., 2017.

[3] M. Ayala-Rincon Flavio L.C. de Moura. *Applied Logic for Computer Scientists: Computational Deduction and Formal Proofs.* Springer, 2017.