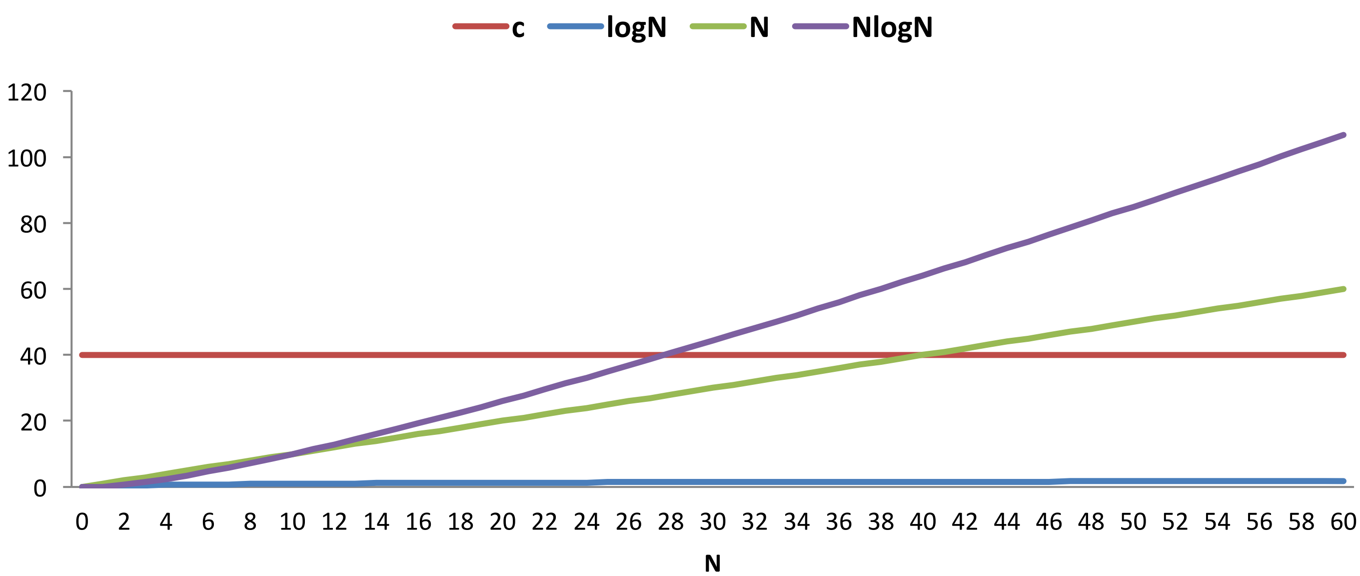
Estrutura de Dados e Algoritmos

Notações Assintóticas

- Motivação: Definir ordem entre funções.
- Avaliação pontual → Não tem sentido:
  - f(N) < g(N) ?

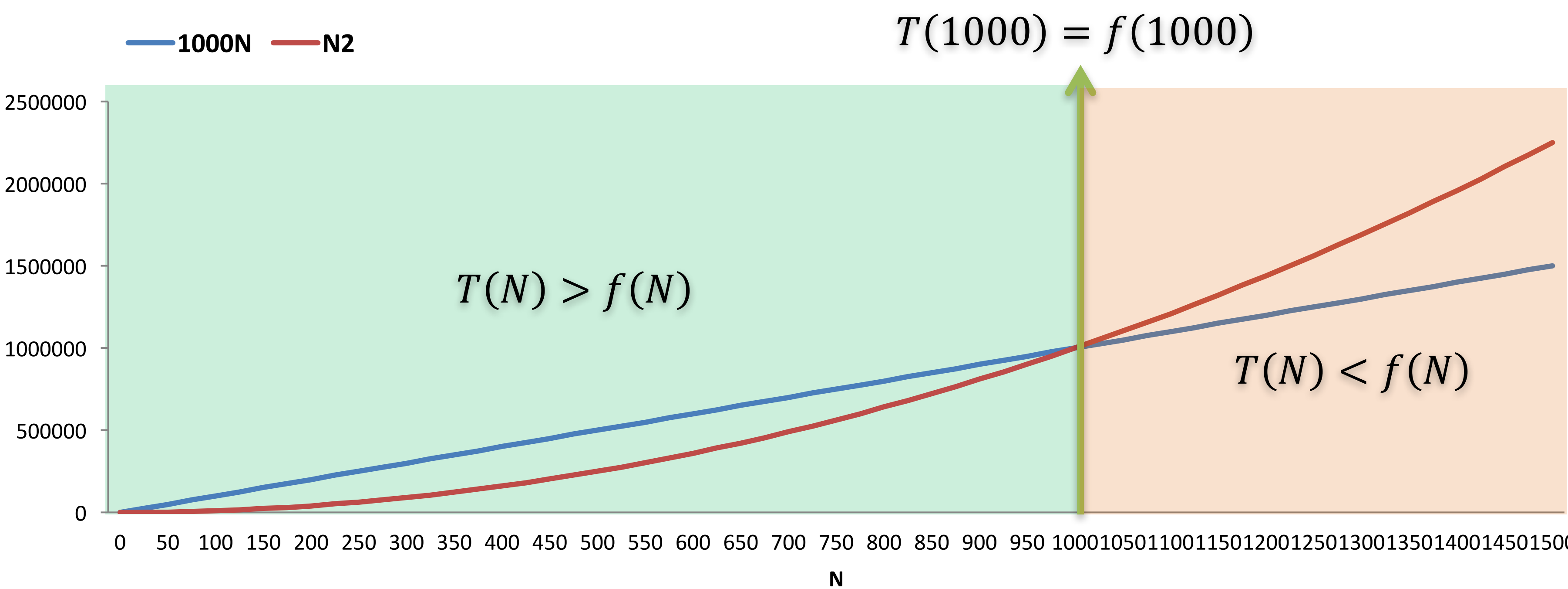


Notações Assintóticas

- Forma de Análise: Taxa de crescimento.

$T(N) = 1000N$

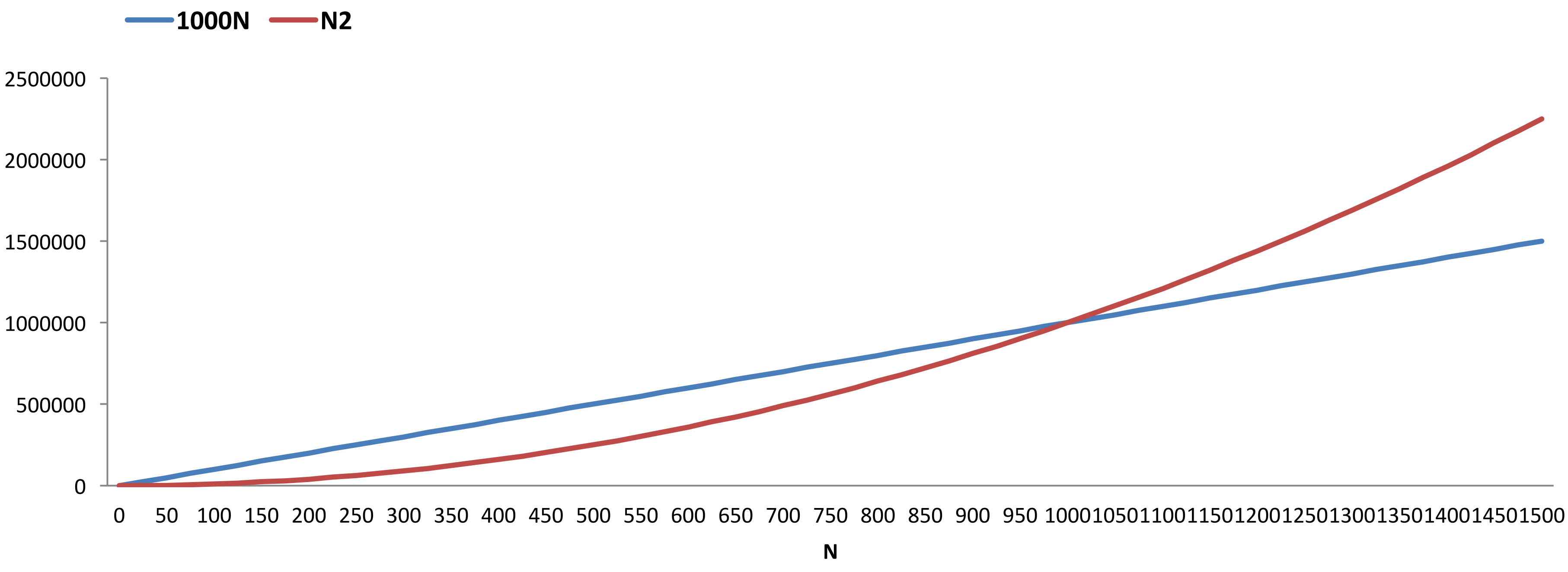
$f(N) = N^2$



Notações Assintóticas

- Apesar de 1000N ser maior que N^2 para N pequenos, a taxa de crescimento de N^2 é maior e ultrapassa 1000N para N>1000. Logo, N^2 é maior que 1000N.
- Há um valor de N (n_0) a partir do qual c.f(N) será sempre, no mínimo, tão grande quanto T(N). Neste caso: n_0=1000 e c=1. Outra possibilidade seria n_0=100 e c=10.

- Concluindo, podemos dizer que a taxa de crescimento de T(N)=1000N é menor ou igual à taxa de crescimento de $f(N)=N^2$.

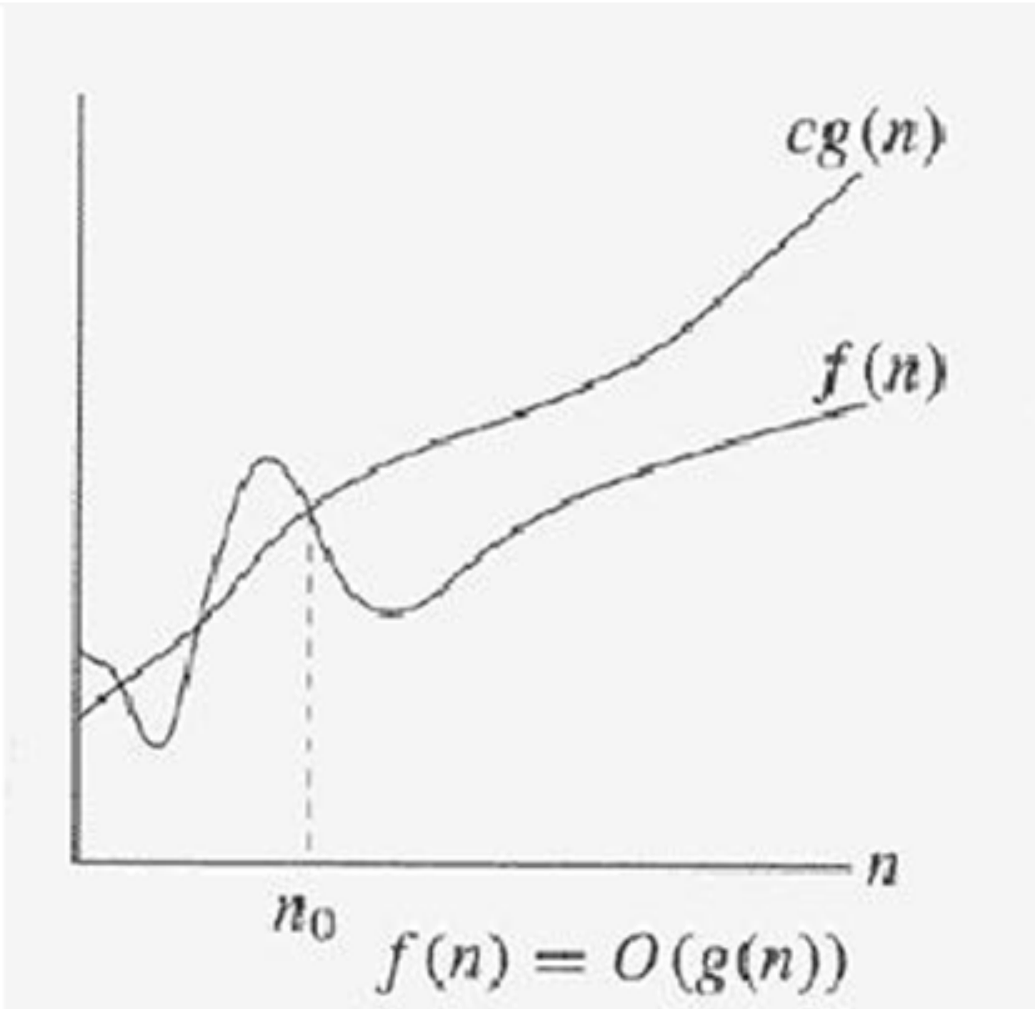


Notação O

$T(N) = O(f(N))$, *se houver as constantes positivas c e* n_o, *tal que* $T(N) \leq cf(N)$, *quando* $N \geq n_o$.

- Se $T(N) = O(f(N))$: estamos guarantindo que a função $T(N)$ cresce a uma taxa igual ou inferior à $f(N)$.
- Ainda, $f(N)$ representa o limite superior de $T(N)$.

Notação O

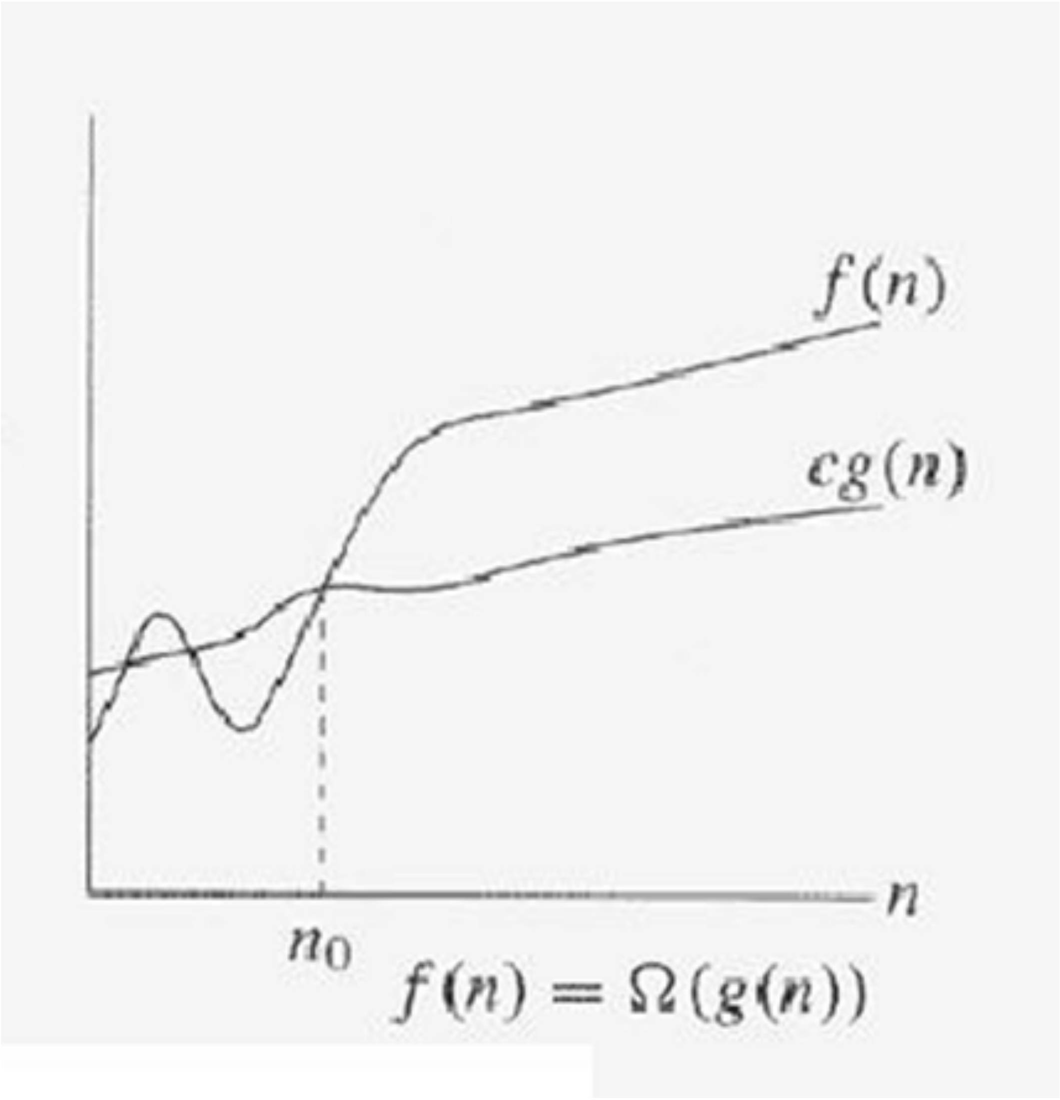


Notação Ω

$T(N) = \Omega(f(N)), se\ houver\ as\ constantes\ positivas\ c\ e\ n_o, tal\ que$
$T(N) \geq cf(N), quando\ N \geq n_o.$

- Se $T(N) = \Omega(g(N))$: estamos guarantindo que a função $T(N)$ cresce a uma taxa igual ou superior à $g(N)$.
- Ainda, $g(N)$ representa o limite inferior de $T(N)$.

Notação Ω

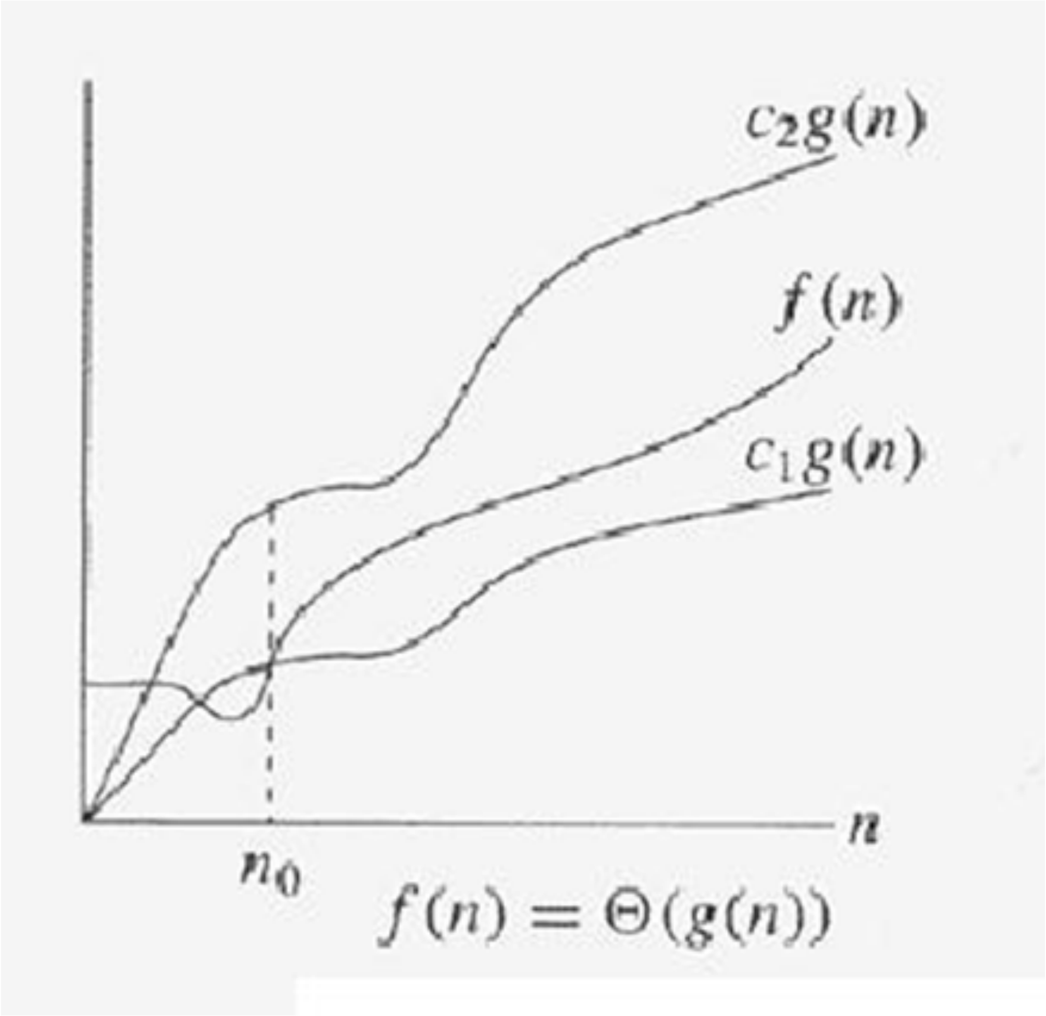


Notação Θ

$$T(N) = \Theta\big(h(N)\big), se\ e\ somente\ se\ T(N) = O\big(h(N)\big)\ e\ T(N) = \Omega\big(h(N)\big).$$

- Se $T(N) = \Theta\big(h(N)\big)$: estamos guarantindo que a função $T(N)$ cresce a uma taxa igual à $h(N)$.

Notação Θ



Notações Assintóticas

$N^2 = O(N^3)$ $N^3 = \Omega(N^2)$

$f(N) = N^2, \quad g(N) = 2N^2 + N$

$f(N) = O(g(N))$ e $f(N) = \Omega(g(N))$ → f(N) = Θ(g(N))

$f(N) = 2N^2 + 3N$

$f(N) = O(N^4), f(N) = O(N^3), \boldsymbol{f(N) = O(N^2)}$

Colocando:

$\boldsymbol{f(N) = \Theta(N^2)}$

Implica não só que $f(N) = O(N^2)$, mas também que N^2 é a ordem de crescimento que melhor se ajusta ao comportamento assintótico de $f(N)$.

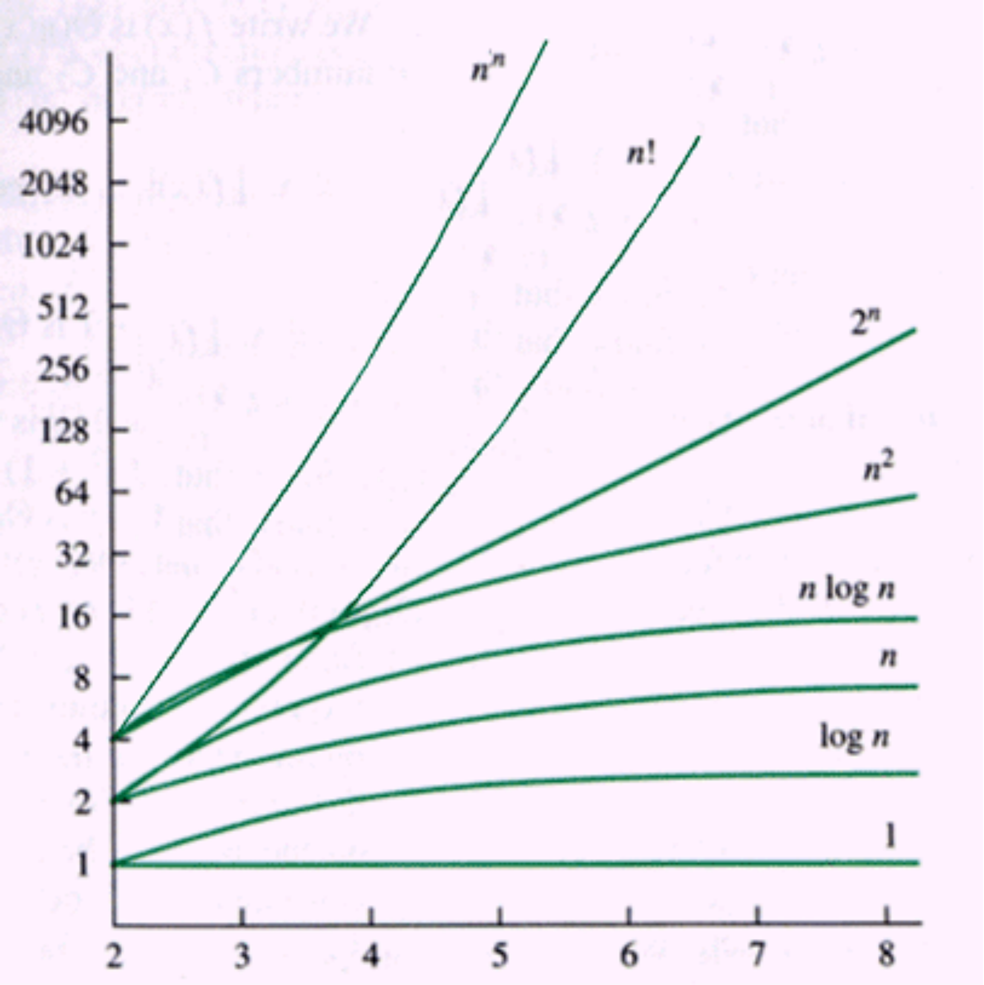
Notações Assintóticas

- Se $T_1(N) = O\big(f(N)\big)$ e $T_2(N) = O\big(g(N)\big)$, então:
  a) $T_1(N) + T_2(N) = O\big(f(N) + g(N)\big);$
  b) $T_1(N) \times T_2(N) = O\big(f(N) \times g(N)\big);$
- Se $T(N)$é um polinômio de ordem k, então:
  a) $\mathrm{T}(N) = \Theta\big(N^k\big)$
- $log^k N = O(N)$ para qualquer constante k. Isto indica que logaritmos crescem muito lentamente.

Notações Assintóticas

- Taxas de Crescimento Típicas:
  - c – *Constante;*
  - $logN$ – *Logarítmica;*
  - log^2N – *Log quadrática;*
  - N – *Linear;*
  - $N.logN$
  - N^2 – *Quadrática;*
  - N^3 – *Cúbica;*
  - 2^N – *Exponencial;*

- Taxas de Crescimento Típicas:



Notações Assintóticas

- Considere quaisquer funções com, por exemplo, uma variável independente n (como n+10 ou n^2+1):
- A análise de algoritmos ignora os valores pequenos e concentra-se em instâncias grandes para n ($n \rightarrow +\infty$).
- Para valores enormes de *n*, as funções n^2, $(3/2)n^2$, $9999n^2$, $n^2/1000$, n^2+100n crescem todas com a mesma velocidade.
- Esse tipo de análise matemática é chamada *assintótica*. Nessa análise, as funções são classificadas em ordens.
- As cinco funções acima, por exemplo, pertencem à mesma ordem e são, portanto, equivalentes.

- Assim, podemos não considerar constantes ou termos de ordens baixas:
  a) $T(N) = O(2N^2)$,
  b) $T(N) = O(N^2 + N)$,
  c) $T(N) = O(N^2 + 7)$,

$$\boxed{T(N) = O(N^2)}$$

- Não faz sentido:
  a) $f(N) \leq O\big(g(N)\big)$,
  b) $f(N) \geq O\big(g(N)\big)$,