Estimadores Suficientes

Solução de exemplos e exercícios

Ana Caroline Alexandre P.

2025-01-17

Exercício 11 :

Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ. Vamos verificar se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Solução 11:

Temos pelo Critério da Fatoração que,

$$L(\theta|x) = h(x_1, ..., x_n) \times g_\theta[T(x_1, ..., x_n)]$$

A função de probabilidade da Poisson é

$$P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3...$$

A função de verossimilhança aplicada a Poisson será:

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \times \frac{e^{-\theta}\theta^{x_2}}{x_2!}, ..., \frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!} =$$

$$= \frac{e^{-n\theta} \times \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \times e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

1. Onde $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$ é função que depende apenas da amostra $h(x_1, ...x_n)$.
2. E $e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ é a função g_θ que depende de θ e de x_i somente através da *estatística* T.

Nota-se que $T(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Logo, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ é uma estatística suficiente para θ.

Exercício (aplicação em sala) 1:

Sendo $X \sim Ber(\theta)$, com:

$$P(X = x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3...$$

Solução:

A função de verossimilhança aplicada a Bernoulli:

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{xi}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \times \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2}, ..., \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n} =$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

1. Temos que a função $h(x_1, ..x_n) = 1$.
2. E a $g_\theta[T(x_1, x_2, ..., x_n)] = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

Logo $T = \sum x_i$ é uma estatística suficiente para θ.

Exercício 12:

Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim U(0, \theta)$.

A função densidade da Uniforme contínua é:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta - 0} = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]} x$$

1. $x \in [0, \theta]$, aqui temos um parâmetro no suporte de x. A onde não se pode calcular a equação de regulariadade do Li.

Solução 12:

Aplicado a função de verossimilhança:

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot I(x_i)_{[0,\theta]} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot I(x_1)_{[0,\theta]} \times \frac{1}{\theta} \cdot I(x_2)_{[0,\theta]}, ... \frac{1}{\theta} \cdot I(x_n)_{[0,\theta]} =$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I(x_i)_{[0,\theta]}$$

- Quem seria a estatística suficiente?

  $\rightarrow$ Existe uma relação de dependencia de θ no suporte de x_i.

  $\rightarrow$ Para encontrar a estatística, teremos que verificar os intervalos do suporte.

Observe:

$$0 < x_i < \theta, \quad i = 1, ...n.$$

Logo, podemos expandir da seguinte forma:

$$0 < x_1 < \theta$$

$$0 < x_2 < \theta$$

$$\vdots$$

$$0 < x_n < \theta$$

Podemos ter a seguinte relação, baseado nos conceitos anteriores sobre as **Estatísticas de Ordem(mínimos, máximos)**:

$$0 < x_{(1)} < \underbrace{x_{(n)} < \theta < \infty}_{intervalo \quad de \quad \theta}$$

Reescrevendo a função Indicadora para o intervalo de θ, temos:

$$L(\theta|x) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I(x_i)_{[x_n,\infty]} =$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \cdot I(\theta)_{[x_{(n)},\infty)}$$

Pelo Critério da Fatoração, temos:

1. Temos que a função $h(x_1, ..x_n) = 1(x_{(1)})_{[0,x_{(n)}]}$.
2. E a $g_\theta[T(x_1, x_2, ..., x_n)] = \frac{1}{\theta^n} \cdot I(\theta)_{[x_{(n)},\infty)}$.

A partir da função indicadora de uma variável x, ao manipular os intervalos, podemos obter a função de θ, de modo que g_θ seja uma estatística suficiente.

Assim, a estatística suficiente $T(x_1, ..., x_n) = x_{(n)}$ é dada pelo máximo $x_{(n)}$, que depende de θ.

Exercício (aplicação em sala) 2:

Sendo $X \sim U(\theta, 1)$.

$$f(x) = \frac{1}{1-\theta} \cdot I(x)_{[\theta,1]}$$

Solução:

Aplicando a função de verossimilhança:

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\theta} \cdot I(x_i)_{[\theta,1]} =$$

$$= \frac{1}{1-\theta} \cdot I(x_1)_{[\theta,1]} \times \frac{1}{1-\theta} \cdot I(x_2)_{[\theta,1]} \times, ..., \times \frac{1}{1-\theta} \cdot I(x_n)_{[\theta,1]} =$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I(x_i)_{[\theta,1]}$$

Novamente, temos que:

$$0 < x_i < \theta, \quad i = 1, ...n.$$

$$\begin{gathered} \theta < x_1 < 1 \\ \theta < x_2 < 1 \\ . \\ . \\ . \\ \theta < x_n < 1 \end{gathered}$$

Logo, o intervalo em que θ está contido, será:

$$\underbrace{0 < \theta < x_{(1)}}_{intervalo \quad de \quad \theta} < x_{(n)} < 1$$

Reescrevendo a função indicadora para θ:

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\theta} \cdot I(x_i)_{[\theta,1]} =$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^n} \cdot I(\theta)_{[0,x_{(1)}]} \cdot I(x_{(n)})_{[x_{(1)},1]}$$

1. Temos que a função $h(x_1, ..x_n) = 1I(x_{(n)})_{[x_{(1)},1]}$.
2. E a $g_\theta[T(x_1, x_2, ..., x_n)] = \frac{1}{(1-\theta)^n} \cdot I(\theta)_{[0,x_{(1)}]}$.

Portanto, pelo Critério da Fatoração, $T(x_1, ..., x_n) = x_{(1)}$ é uma estatística suficiente para θ.