

MOVIMIENTO DE CARGAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Ana Gil Molina

Universidad de Alicante.
Práctica I. Física II. 1º Matemáticas.

Índice

I	Introducción	3
II	Problemas	4
1.	Espectrómetro	4
1.1.	Solución analítica	5
1.2.	Solución numérica	7
1.3.	Resultados	8
2.	Selector de velocidades	14
2.1.	Solución analítica	15
2.2.	Solución numérica	17
2.3.	Resultados	18
3.	Relatividad	22
3.1.	Solución analítica	22
3.2.	Solución numérica	23
3.3.	Resultados	24
4.	Ciclotrón	41
4.1.	Solución analítica	42
4.2.	Solución numérica	44
4.3.	Resultados	45

Parte I

Introducción

En esta práctica vamos a estudiar el movimiento de diferentes cargas dentro de campos electromagnéticos, gracias al uso de programas en lenguaje python. Para ello, usaremos algoritmos capaces de resolver las ecuaciones de movimiento.

De esta forma, analizaremos el efecto de los campos electromagnéticos sobre las cargas usando distintos instrumentos como el espectrómetro de masas, el selector de velocidades y el ciclotrón. También estudiaremos el movimiento de partículas relativistas en campos electromagnéticos, es decir, teniendo en cuenta el efecto de la teoría de la relatividad especial sobre el movimiento.

Cada ejercicio se dividirá en dos partes. La primera parte se basará en obtener las soluciones analíticas, mediante manipulación simbólica de las ecuaciones, que nos darán los resultados exactos. La segunda parte consistirá en conseguir las soluciones numéricas, obteniendo las ecuaciones del movimiento y resolviéndolas, de forma que obtendremos unos resultados aproximados por métodos de análisis numérico. Deberemos comparar estos resultados y comprobar su similitud.

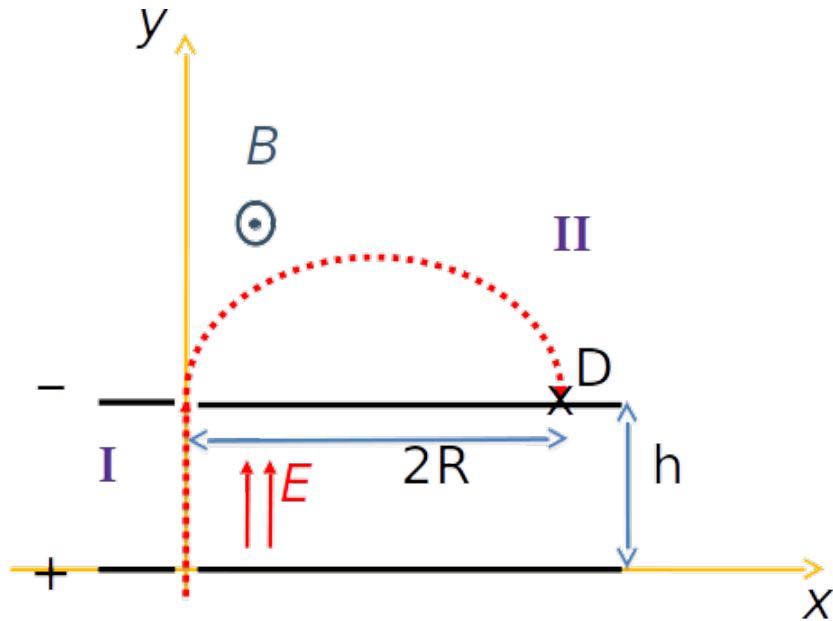
Parte II

Problemas

1. Espectrómetro

En este ejercicio analizaremos el movimiento de distintas cargas en un espectrómetro de masas, el cual es un dispositivo que se utiliza para precisar la composición de diferentes elementos químicos e isótopos atómicos en función de su relación entre masa y carga.

Un espectrómetro está formado por dos zonas, tal y como observamos en la figura. En la zona I se dispone un campo eléctrico que acelera los iones, generados por una fuente y que parten del reposo, hasta la zona II, donde se encuentra un campo magnético perpendicular que los desvía, haciendo que incidan en el punto D, que variará según el tipo de ion.



La finalidad de este ejercicio será calcular el tiempo y la posición de impacto de diferentes isótopos de forma analítica y numérica, tomando valores aleatorios para el potencial de aceleración y el campo magnético. Presentaremos cada uno de los métodos y compararemos los resultados obtenidos.

1.1. Solución analítica

Para obtener la solución analítica, deberemos buscar las ecuaciones que expresen el movimiento de los iones dentro del campo eléctrico y el campo magnético, contenidos en el espectrómetro.

Empecemos con la zona I, en la cual tenemos $y \in [0, h]$. En esta zona tenemos un campo eléctrico que acelera los iones, los cuales parten del reposo, que podemos expresar como:

$$\vec{E} = E\vec{j}$$

En la zona I, el tipo de movimiento que seguirán los iones será del tipo MRUA, debido a que el campo eléctrico ejercerá una fuerza sobre estos, y esta fuerza generará una aceleración sobre los iones. Usando la segunda ley de Newton obtenemos la expresión de la aceleración:

$$F_E = qE = ma \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{q}{m} \frac{dV}{h} \quad (1)$$

Ahora, usando ecuaciones de cinética para el MRUA y sustituyendo la aceleración, obtenemos el tiempo que tarda el ion en cruzar la zona I y llegar a la zona II:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t_I = \sqrt{\frac{2h}{a}} = h \sqrt{\frac{2m}{dVq}} \quad (2)$$

Por último, para obtener la velocidad del ion en h usamos el principio de conservación de la energía:

$$\begin{aligned} U_0 + K_0 &= U_h + K_h \\ qV_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 &= qV_h + \frac{1}{2}mv_h^2 \Rightarrow v_h = \sqrt{\frac{2qdV}{m}} \end{aligned} \quad (3)$$

Ahora estudiaremos la zona II, es decir, estudiaremos el movimiento de los iones para $y > h$. En esta zona aparece un campo magnético que va a causar un movimiento del tipo MCU, tal que:

$$\vec{B} = B\vec{k}$$

Sabemos que el punto D que queremos calcular se encuentra a una distancia $2R$ del punto de partida sobre el eje X . Por lo tanto, para calcular el punto D necesitaremos obtener primero R , que es el radio de la semicircunferencia que recorren los iones debido al campo magnético. Para obtener la expresión de este radio, consideraremos que la fuerza magnética es igual a la centrípeta:

$$F_B = F_C \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv_h}{qB}$$

Ahora, sustituyendo la expresión de la velocidad en h que hemos obtenido anteriormente tenemos:

$$R = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qdV}{m}} = \sqrt{\frac{2dVm}{qB^2}} \Rightarrow D = 2R = \sqrt{\frac{8dVm}{qB^2}} \quad (4)$$

Por último, obtendremos el tiempo que tardan los iones en recorrer la semicircunferencia hasta impactar en el punto D . Para ello, deberemos calcular la mitad del periodo, pues este es el tiempo que tardaría el ion en dar una vuelta completa, pero en este caso únicamente da media vuelta. Para ello, calcularemos la frecuencia a partir de la velocidad angular, obtenida igualando de nuevo la fuerza magnética a la centrípeta:

$$\begin{aligned} F_B = F_C \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow t_{II} = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB} \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora que hemos obtenido todas las ecuaciones, podemos aplicarlas para calcular el tiempo y el punto de impacto de distintos iones de forma analítica, y comparar los resultados con los que obtengamos mediante el método numérico, que estudiaremos a continuación.

1.2. Solución numérica

Para empezar, tengamos en cuenta la expresión del campo magnético, el campo eléctrico y la velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = B\vec{k} \\ \vec{E} = E\vec{j} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \end{array} \right\}$$

Para aplicar el método numérico, deberemos obtener cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden que describan el movimiento de la partícula cargada. En primer lugar, deberemos diferenciar entre las fuerzas ejercidas sobre el eje X y las ejercidas sobre el eje Y , y además, tendremos que tener en cuenta que la fuerza que se ejercerá sobre la partícula vendrá dada por la ecuación de la fuerza de Lorentz, por lo que tendremos:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \right) = qE\vec{j} + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qE\vec{j} + qB(v_y\vec{i} - v_x\vec{j})$$

A partir de esta expresión obtenemos dos ecuaciones de segundo orden, una para las fuerzas en el eje X y otra para el eje Y :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F\vec{i} = qBv_y \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB}{m}v_y$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F\vec{j} = qE - qBv_x \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}v_x$$

Para finalizar, transformamos estas dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en cuatro ecuaciones de primer orden:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}v_yB \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}E - \frac{q}{m}v_xB \end{array} \right\}$$

1.3. Resultados

En esta sección, usaremos programas en lenguaje python para estudiar el movimiento de distintos tipos de iones en un espectrómetro de masas, mediante el método analítico y el método numérico. Para ello, necesitaremos calcular el tiempo y la posición de impacto de los iones y, una vez obtenidos, compararemos los resultados entre distintos isótopos y grupos de iones.

Para empezar, tomaremos una muestra con distintos isótopos del carbono, y recogeremos los resultados en la siguiente tabla:

$B = 10^{-2} T$	Cálculo analítico		Cálculo numérico	
$V = 12V$	$t_a(s)$	$D_a(m)$	$t_n(s)$	$D_n(m)$
$h = 0,1m$				
Elemento	$t_a(s)$	$D_a(m)$	$t_n(s)$	$D_n(m)$
$^{12}C^+$	$5,3541 \cdot 10^{-5}$	0,346	$5,3578455 \cdot 10^{-5}$	$3,4580322 \cdot 10^{-1}$
$^{13}C^+$	$5,7388 \cdot 10^{-5}$	0,360	$5,7428605 \cdot 10^{-5}$	$3,5991640 \cdot 10^{-1}$
$^{14}C^+$	$6,1214 \cdot 10^{-5}$	0,373	$6,1256535 \cdot 10^{-5}$	$3,7349697 \cdot 10^{-1}$

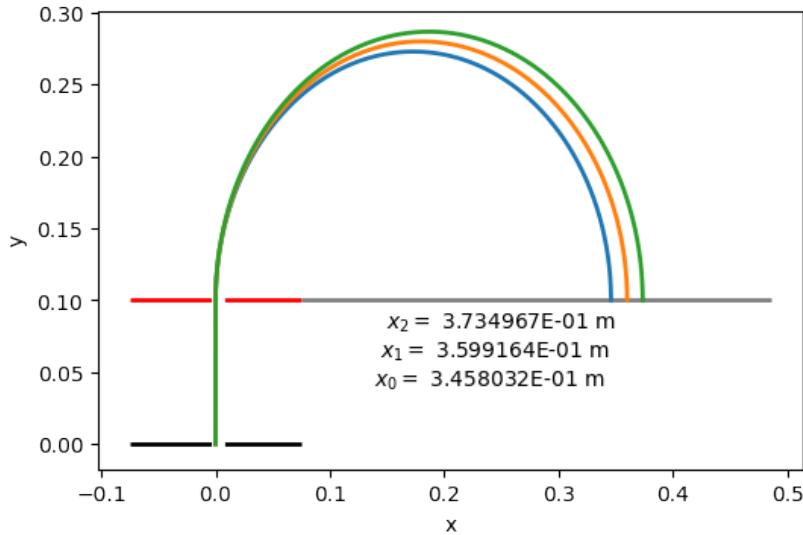
En esta tabla podemos observar que los valores obtenidos mediante el método numérico, a pesar de ser una solución aproximada, son muy similares a los calculados mediante el método analítico, que es el que proporciona las soluciones exactas. Esto ocurrirá a lo largo de todo el ejercicio, como podremos observar en las tablas siguientes.

Dentro del grupo de los isótopos del carbono observamos diferentes valores del tiempo y de la posición de impacto. Conforme aumenta el número másico de los iones, mayores son ambos parámetros. En el caso del tiempo, esto se debe a que, en la zona I, este es mayor cuanto mayor es la masa del ion, según (2), y lo mismo ocurre para el tiempo en la zona II, según (5). En el caso de la posición de impacto, por (4) tenemos que esta es mayor cuanto mayor es la masa del ion.

Además, los valores obtenidos para la aceleración de cada ion proporcionada por la fuerza eléctrica en la zona I del espectrómetro disminuye al aumentar el número de neutrones. Esto se debe a que cuanto mayor sea la masa, menor es la aceleración que adquiere el ion, según (1). De esta forma, hemos obtenido una aceleración de $a = 9,634 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{12}C^+$, una de $a = 8,893 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{13}C^+$ y una de $a = 8,258 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{14}C^+$.

Por otra parte, y como consecuencia del valor de la masa según (3), hemos obtenido mayores valores de velocidad a la salida de las placas del condensador para aquellos iones con menor número másico. De esta forma, las velocidades obtenidas han sido $v = 1,388 \cdot 10^4 m/s$ para $^{12}C^+$, $v = 1,334 \cdot 10^4 m/s$ para $^{13}C^+$ y $v = 1,285 \cdot 10^4 m/s$ para $^{14}C^+$.

En el siguiente gráfico podemos observar la trayectoria de los tres isótopos del carbono considerados. En esta, x_0 se corresponde con $^{12}C^+$ y está representado de color azul, por lo que se aprecia que es el isótopo cuyo diámetro de impacto es menor. Por otra parte, x_1 se corresponde con $^{13}C^+$ y está representado de color amarillo, mientras que x_2 se corresponde con $^{14}C^+$, está representado de color verde y es el de mayor diámetro de impacto.

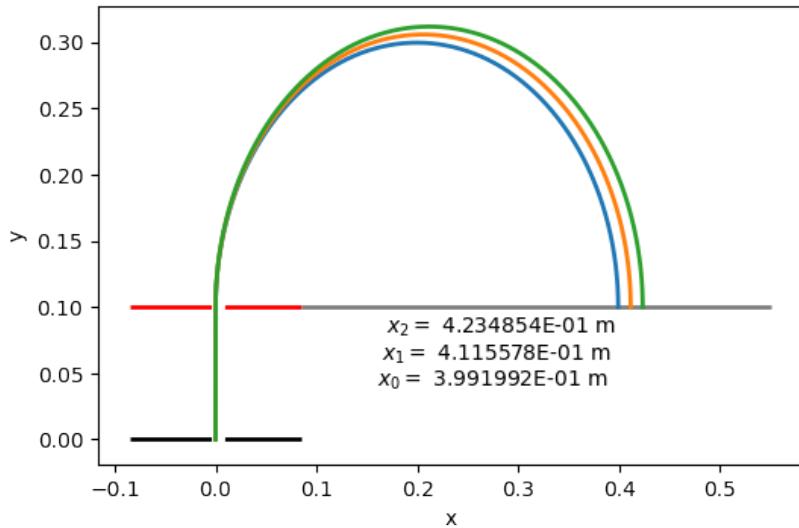


A continuación, tomaremos otra muestra, esta vez formada por isótopos del oxígeno. De esta forma, obtendremos la tabla siguiente:

$B = 10^{-2}T$	Cálculo analítico		Cálculo numérico	
Elemento	$t_a(s)$	$D_a(m)$	$t_n(s)$	$D_n(m)$
$^{16}O^+$	$6,8784 \cdot 10^{-5}$	0,399	$6,8831935 \cdot 10^{-5}$	$3,9919899 \cdot 10^{-1}$
$^{17}O^+$	$7,2578 \cdot 10^{-5}$	0,412	$7,2628581 \cdot 10^{-5}$	$4,1155801 \cdot 10^{-1}$
$^{18}O^+$	$7,6334 \cdot 10^{-5}$	0,423	$7,6387596 \cdot 10^{-5}$	$4,2348502 \cdot 10^{-1}$

De nuevo observamos que al aumentar el número másico, aumenta el tiempo, según (2) y (5), y la posición de impacto, según (4). En cuanto a la aceleración proporcionada por la fuerza eléctrica en la zona I del espectrómetro, vuelve a aumentar cuanto menor es el número másico por (1). En este caso hemos obtenido una aceleración de $a = 7,229 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{16}O^+$, una de $a = 6,801 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{17}O^+$ y una de $a = 6,424 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{18}O^+$. En el caso de la velocidad a la salida de las placas del condensador, nuevamente es mayor cuanto menor es el número de neutrones del ion. Así, hemos obtenido una velocidad de $v = 1,202 \cdot 10^4 m/s$ para $^{16}O^+$, una de $v = 1,166 \cdot 10^4 m/s$ para $^{17}O^+$ y una de $v = 1,133 \cdot 10^4 m/s$ para $^{18}O^+$.

En el siguiente gráfico podemos apreciar la trayectoria de cada uno de los tres isótopos del oxígeno que hemos estudiado. En primer lugar tenemos x_0 refiriéndose a la distancia de impacto de $^{16}O^+$, que es el de menor distancia y está representado con color azul. A continuación, encontramos x_1 haciendo referencia a $^{17}O^+$, representado en color amarillo, y por último tenemos x_2 referido a $^{18}O^+$, que está representado en color verde y es el de mayor distancia de impacto.



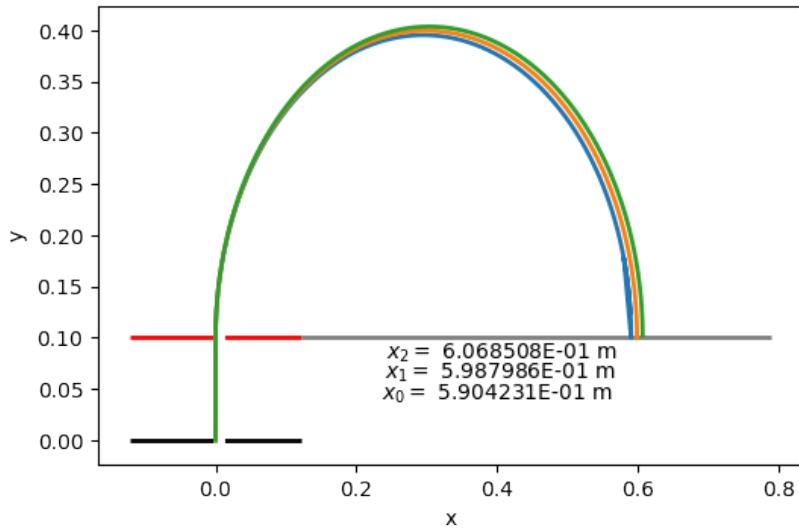
La siguiente muestra que analizaremos estará formada por isótopos del cloro. La tabla obtenida será:

$B = 10^{-2}T$	Cálculo analítico		Cálculo numérico	
Elemento	$t_a(s)$	$D_a(m)$	$t_n(s)$	$D_n(m)$
$^{35}Cl^+$	$1,3868 \cdot 10^{-4}$	0,590	$1,3877724 \cdot 10^{-4}$	$5,9042262 \cdot 10^{-1}$
$^{36}Cl^+$	$1,4229 \cdot 10^{-4}$	0,599	$1,4238814 \cdot 10^{-4}$	$5,9879845 \cdot 10^{-1}$
$^{37}Cl^+$	$1,4581 \cdot 10^{-4}$	0,607	$1,4590738 \cdot 10^{-4}$	$6,0686052 \cdot 10^{-1}$

En la tabla podemos observar que conforme aumenta el número másico de los iones, aumenta también el tiempo por (2) y (5), y la posición de impacto según (4). Respecto a la aceleración proporcionada por la fuerza eléctrica, hemos visto en los anteriores ejemplos que disminuye al aumentar el número másico según (1). En esta ocasión hemos obtenido una aceleración de $a = 3,305 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{35}Cl^+$, una de $a = 3,213 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{36}Cl^+$ y una de $a = 3,128 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{37}Cl^+$. Por último, la velocidad del ion a la salida de las placas del condensador también disminuye al aumentar el número de neutrones según (3), pues hemos

obtenido $v = 8,130 \cdot 10^3 m/s$ para $^{35}Cl^+$, $v = 8,016 \cdot 10^3 m/s$ para $^{36}Cl^+$ y $v = 7,910 \cdot 10^3 m/s$ para $^{37}Cl^+$.

En el siguiente gráfico se representa la trayectoria de los tres isótopos de cloro, de forma que x_0 indica la distancia de impacto del ion de $^{35}Cl^+$, que es la menor de las tres y aparece de color azul; x_1 se refiere a la distancia de impacto del ion de $^{36}Cl^+$, cuya trayectoria aparece de color amarillo; y x_2 indica la distancia de impacto del ion de $^{37}Cl^+$, que es la mayor y está representada de color verde.



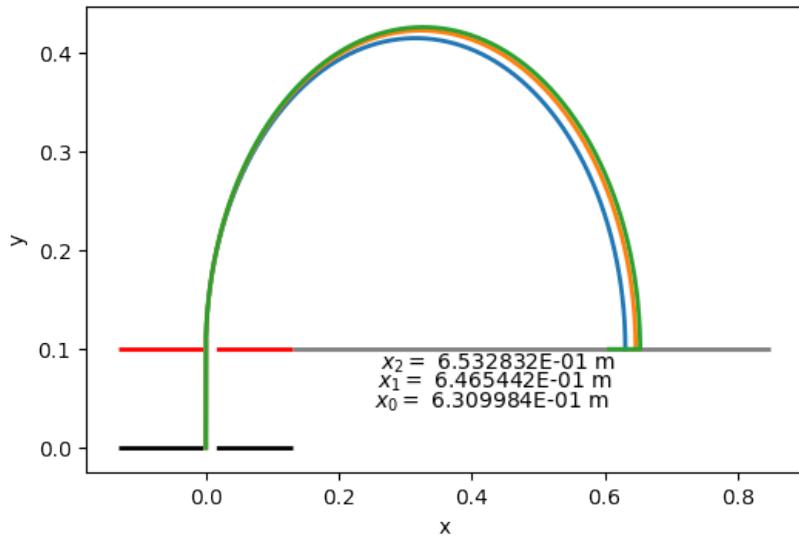
Por último, tomaremos una muestra formada por isótopos del calcio, obteniendo los siguientes resultados:

$B = 10^{-2}T$	Cálculo analítico		Cálculo numérico	
Elemento	$t_a(s)$	$D_a(m)$	$t_n(s)$	$D_n(m)$
$^{40}Ca^+$	$1,5659 \cdot 10^{-4}$	0,631	$1,5669891 \cdot 10^{-4}$	$6,3099838 \cdot 10^{-1}$
$^{42}Ca^+$	$1,6374 \cdot 10^{-4}$	0,647	$1,6385082 \cdot 10^{-4}$	$6,4654408 \cdot 10^{-1}$
$^{43}Ca^+$	$1,6688 \cdot 10^{-4}$	0,653	$1,6700053 \cdot 10^{-4}$	$6,5328317 \cdot 10^{-1}$

Otra vez más, tenemos que a mayor número másico, mayor es el tiempo según (2) y (5), y la posición de impacto según (4). Los valores para la aceleración proporcionada por la fuerza eléctrica disminuyen a mayor número de neutrones según (1), pues hemos obtenido $a = 2,893 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{40}Ca^+$, $a = 2,756 \cdot 10^8 m/s^2$ para $^{42}Ca^+$ y $a = 2,699 \cdot 10^8 m/s^2$ para

$^{43}Ca^+$. Para finalizar, la velocidad a la salida de las placas del condensador es mayor cuanto menor es el número másico del ion, según (3), de manera que hemos obtenido $v = 7,607 \cdot 10^3 m/s$ para $^{40}Ca^+$, $v = 7,424 \cdot 10^3 m/s$ para $^{42}Ca^+$ y $v = 7,347 \cdot 10^3 m/s$ para $^{43}Ca^+$.

En el siguiente gráfico observamos la trayectoria de los tres isótopos del calcio, con x_0 refiriéndose a la distancia de impacto del ion de $^{40}Ca^+$, representado de color azul; x_1 indicando la distancia de impacto del ion de $^{42}Ca^+$, de color amarillo; y x_2 indicando la distancia de impacto del ion de $^{43}Ca^+$, representado de color verde.



Terminaremos hablando de las diferencias que encontramos entre los distintos grupos de isótopos. Observamos que el número másico de cada grupo de isótopos ronda alrededor de un determinado valor, de forma que los isótopos del carbono son los que menor número másico tienen (12, 13 y 14), seguidos de los isótopos del oxígeno (16, 17 y 18), de los del cloro (35, 36 y 37) y por último de los del calcio (40, 42 y 43). Debido a esto, podemos concluir que los isótopos del calcio son los de mayor masa, mientras que los del carbono son los de menor masa. Esto hace que el movimiento efectuado por los iones varíe para cada grupo de isótopos.

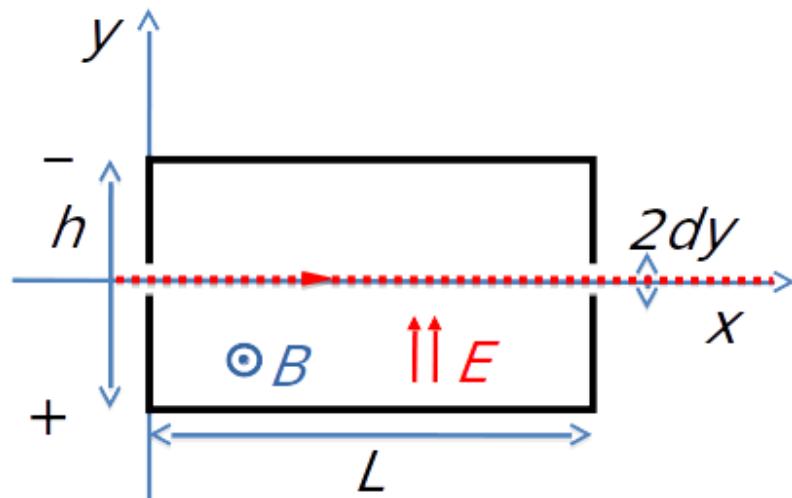
Tal y como hemos deducido gracias a (1), cuanto mayor es la masa menor es la aceleración que adquiere el ion debida a la fuerza eléctrica en la zona I del espectrómetro. De esta forma, las aceleraciones obtenidas para los isótopos del carbono son las mayores, y estas van disminuyendo al aumentar las masas de cada grupo de isótopos hasta llegar al grupo del calcio, que al tener la mayor masa es el que menor aceleración adquiere.

Observamos que lo mismo ocurre para la velocidad de los iones a la salida de las placas del condensador, pues según (3) esta disminuye al aumentar la masa. Así, los isótopos del grupo del carbono serán los de mayor velocidad, seguidos por los del grupo del oxígeno, del cloro y por último del calcio, que son los de menor velocidad.

Por el contrario, para el caso del tiempo y de la posición de impacto, a mayor masa mayores serán estos parámetros, según (2), (5) y (4). De esta forma, si comparamos las tablas de cada grupo de isótopos, podemos apreciar que el grupo de los isótopos del carbono es el de menor tiempo y posición de impacto, pues es el elemento de menor masa. A continuación le sigue el grupo de los isótopos del oxígeno, al tener una masa algo mayor. El siguiente grupo sería el de los isótopos del cloro, con un número másico mayor a los anteriores. Por último, tendríamos el grupo de los isótopos del calcio, que al ser el elemento de mayor masa, sus isótopos tienen el tiempo y la posición de impacto mayor de entre los cuatro grupos.

2. Selector de velocidades

En este ejercicio analizaremos el movimiento de distintas cargas en un selector de velocidades, el cual es una región del espacio con un campo eléctrico y un campo magnético. Para ello, consideraremos diferentes iones procedentes de una fuente con distintas velocidades v , que entrarán en esta región, en la cual habrá un campo eléctrico E perpendicular a la dirección de entrada, y un campo magnético B perpendicular a E y a la dirección de entrada, como se representa en la siguiente imagen:



Fijando un determinado campo eléctrico E y ajustando el campo magnético B , elegiremos una carga q y una masa m e iremos variando la velocidad v hasta conseguir que la partícula considerada realice un movimiento rectilíneo y salga por la abertura en la pared del selector.

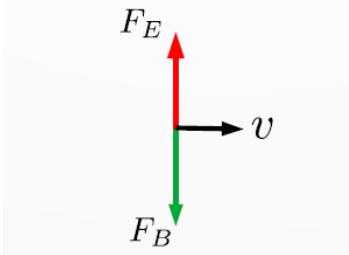
En primer lugar obtendremos los valores teóricos mediante cálculos analíticos y, a continuación, usaremos el método numérico para obtener los datos pedidos, que representaremos en una tabla. Por último, comprobaremos que los resultados coinciden con los valores teóricos obtenidos analíticamente.

2.1. Solución analítica

Al introducirse una carga q en el selector de velocidades, el campo eléctrico E y el campo magnético B actuarán sobre esta ejerciendo una fuerza que vendrá dada por la ecuación de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Nuestro objetivo es que la partícula tenga un movimiento rectilíneo para que salga por el hueco de la pared del selector. Si tenemos:



Deberemos conseguir que $F_y = F_E - F_B = 0$ para que el movimiento sea rectilíneo y se efectúe a lo largo del eje X . Como tenemos:

$$F_E = qE$$

$$F_B = qvB$$

Podemos deducir la velocidad de la partícula:

$$F_y = F_E - F_B = qE - qvB = 0 \Rightarrow qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

Ahora, usando la expresión de la energía cinética E_c y sustituyendo la expresión de la velocidad que acabamos de deducir obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow qE_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{E}{B}\right)^2 \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{E^2}{2E_k B^2}$$

Además a partir de la siguiente expresión del campo eléctrico podemos despejar el campo magnético:

$$E = \frac{dV}{h} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m \frac{dV^2}{B^2 h^2} \Rightarrow B = \frac{dV}{h} \sqrt{\frac{m}{2E_c}} \quad (6)$$

También podemos obtener el tiempo que tarda la partícula en recorrer el selector, considerando que se desplaza una distancia L , a partir de la expresión de E_c :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \Rightarrow \frac{L^2}{t^2} = \frac{2E_c}{m} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{L^2 m}{2E_c}} \quad (7)$$

Habiendo obtenido estas expresiones, podremos utilizarlas para comparar los cálculos realizados usando el método numérico, que explicaremos a continuación, con los valores teóricos obtenidos de forma analítica.

2.2. Solución numérica

De nuevo, tenemos las siguientes expresiones para el campo magnético, el campo eléctrico y la velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = B\vec{k} \\ \vec{E} = E\vec{j} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \end{array} \right\}$$

Ahora, aplicando la ecuación de la fuerza de Lorentz obtenemos:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \right) = qE\vec{j} + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qE\vec{j} + qB(v_y\vec{i} - v_x\vec{j})$$

A partir de esta expresión podemos obtener dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, una para las fuerzas en el eje X y otra para las fuerzas en el eje Y :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F\vec{i} = qBv_y \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} \cdot v_y \cdot B$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F\vec{j} = qE - qBv_x = q \frac{\Delta V}{h} - qBv_x \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\Delta V}{h} - \frac{q}{m} \cdot v_x B$$

Por último, transformamos estas dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en cuatro ecuaciones de primer orden, obteniendo el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} \cdot v_y \cdot B \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\Delta V}{h} - \frac{q}{m} \cdot v_x \cdot B \end{array} \right\}$$

2.3. Resultados

Para empezar, usaremos el método analítico para obtener los valores teóricos para los que distintas partículas consiguen salir por la abertura en la pared del selector. Para ello, deberemos obtener aleatoriamente unos valores para la energía cinética, entre $10eV$ y $50eV$, y para la diferencia de potencial entre las placas, entre $20V$ y $30V$. A continuación representamos en una tabla los datos obtenidos analíticamente para varias partículas:

$V = 21V$ $E_k = 32eV$ $h = 0,2m$	$q/m (C/kg)$	$v_{x0} (m/s)$	$B (T)$	$t (s)$
$1p^+$	95808383,23	$7,835 \cdot 10^4$	$1,34007 \cdot 10^{-3}$	$1,276 \cdot 10^{-5}$
$1e^-$	$-1,7563312 \cdot 10^{11}$	$3,355 \cdot 10^6$	$3,12988 \cdot 10^{-5}$	$2,981 \cdot 10^{-7}$
$1e^+$	$1,7563312 \cdot 10^{11}$	$3,355 \cdot 10^6$	$3,12988 \cdot 10^{-5}$	$2,981 \cdot 10^{-7}$
$1H^+$	96385542,17	$7,859 \cdot 10^4$	$1,33605 \cdot 10^{-3}$	$1,272 \cdot 10^{-5}$

En primer lugar, observamos que tenemos un campo eléctrico fijo, que hemos obtenido mediante la siguiente expresión:

$$E = \frac{dV}{h} = \frac{21V}{0,2m} = 105V/m$$

En la tabla podemos apreciar que todos los datos calculados para $1p^+$ y para $1H^+$ son muy similares, pues ambos tienen la misma carga ($1,6 \cdot 10^{-19}C$) y una masa muy similar ($1,67 \cdot 10^{-27}Kg$ para $1p^+$ y $1,66 \cdot 10^{-27}Kg$ para $1H^+$). Por otra parte, vemos que en el caso de $1e^-$ y $1e^+$ todos los parámetros coinciden excepto la relación q/m , que son opuestas, pues sus cargas también tienen el mismo valor pero con signos opuestos ($-1,6 \cdot 10^{-19}C$ para $1e^-$ y $1,6 \cdot 10^{-19}C$ para $1e^+$), además de tener la misma masa ($9,11 \cdot 10^{-31}Kg$).

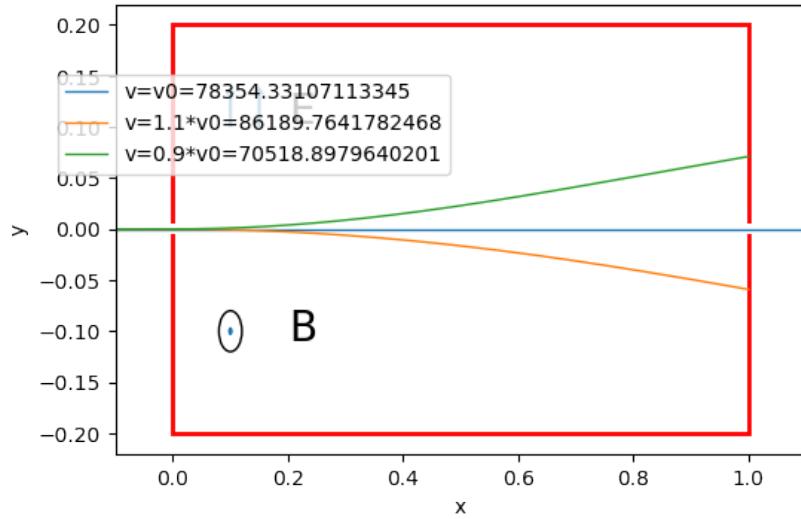
Para el caso de la velocidad, lo anteriormente explicado se debe a que esta depende de la masa según la siguiente expresión:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2E_k \cdot q}{m}}$$

En el caso del campo magnético, tenemos que este también depende de la masa según (6). Lo mismo ocurre para el tiempo, como hemos deducido en (7).

Habiendo obtenido estos valores, ya conocemos el valor de campo magnético que tendremos que utilizar en el método numérico. Debemos comprobar que usando este valor conseguiremos que la partícula considerada siga un movimiento rectilíneo y salga por la abertura en la pared del selector.

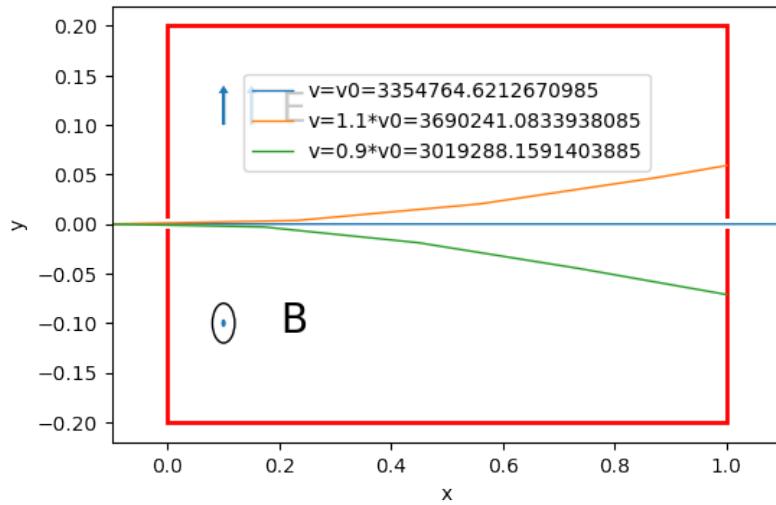
Comenzamos con $1p^+$. Hemos calculado anteriormente que la velocidad con la que parte es $v_{x0} = 7,835 \cdot 10^4 m/s$ y que, con esta velocidad, si consideramos un campo magnético de valor $B = 1,34007 \cdot 10^{-3} T$, la partícula saldrá por la abertura de la pared del selector. Para comprobar que esto es así, tomaremos tres iones $1p^+$, uno con velocidad inicial $v_{x0} = 7,835 \cdot 10^4 m/s$, otro con una velocidad inicial un 10 % superior a v_{x0} , y el último con una velocidad inicial un 10 % inferior a v_{x0} . Si representamos las tres trayectorias en una gráfica obtenemos:



En esta gráfica podemos observar que el protón con la velocidad inicial adecuada ha seguido una trayectoria rectilínea y ha salido por la abertura del selector. Sin embargo, el protón con una velocidad un 10 % superior a v_{x0} se ha desviado hacia valores negativos del eje Y , al aumentar la fuerza ejercida por el campo magnético. Para el protón con una velocidad un 10 % inferior a v_{x0} , la trayectoria se ha desviado hacia valores positivos del eje Y , al disminuir la fuerza ejercida por el campo magnético. Esto se debe a la expresión:

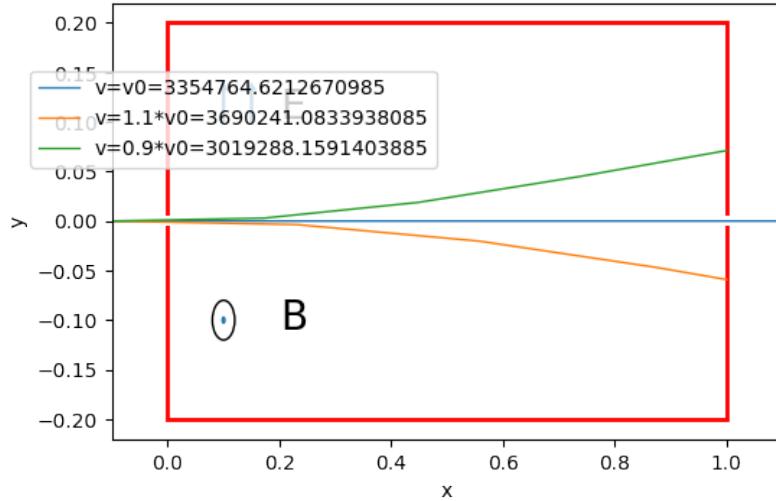
$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qB(v_y \vec{i} - v_x \vec{j}) \quad (8)$$

Ahora haremos lo mismo para $1e^-$. En esta ocasión, la velocidad inicial adecuada para que el electrón salga por la abertura en la pared del selector es $v_{x0} = 3,355 \cdot 10^6 m/s$, siempre y cuando tomemos un campo magnético de valor $B = 3,12988 \cdot 10^{-5} T$. Tomando un electrón con la velocidad adecuada $v_{x0} = 3,355 \cdot 10^6 m/s$, otro con una velocidad un 10 % superior a v_{x0} y un último con una velocidad un 10 % inferior a v_{x0} , obtenemos el siguiente gráfico con las trayectorias:



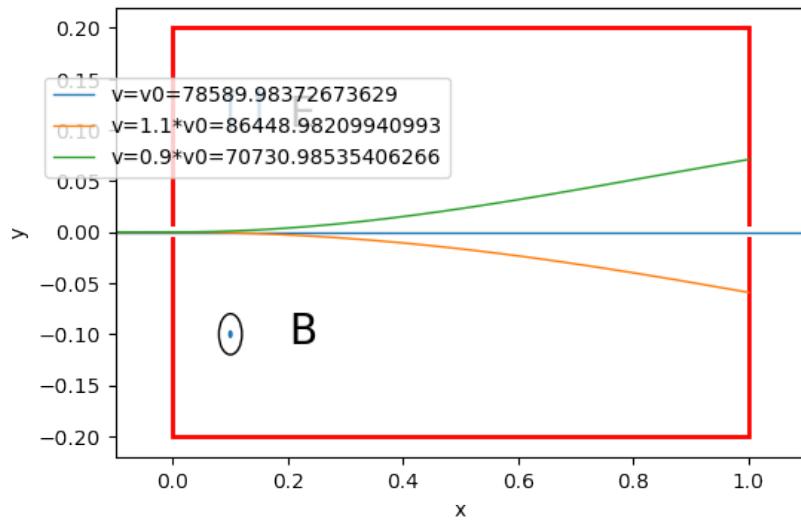
De nuevo, observamos que el electrón con la velocidad inicial adecuada ha seguido una trayectoria rectilínea y ha salido por la abertura del selector, mientras que el electrón con una velocidad un 10 % superior a v_{x0} se ha desviado hacia valores positivos del eje Y , y el electrón con una velocidad un 10 % inferior a v_{x0} se ha desviado hacia valores negativos del eje Y , al contrario de lo que ha ocurrido para $1p^+$. Esto se debe a que, en este caso, la carga de $1e^-$ es negativa, y según (8), al cambiar el signo de la carga cambia el sentido de la trayectoria sobre el eje Y .

En el caso de $1e^+$, la velocidad inicial adecuada es la misma que para $1e^-$, es decir, es $v_{x0} = 3,355 \cdot 10^6 m/s$, y lo mismo ocurre con el campo magnético, que también será $B = 3,12988 \cdot 10^{-5} T$. Representemos las tres trayectorias gráficamente:



La diferencia con respecto a $1e^-$ es que en esta ocasión, el positrón con una velocidad un 10% superior a v_{x0} se desviará hacia valores negativos del eje Y , mientras que el positrón con una velocidad un 10% inferior a v_{x0} se desviará hacia valores positivos del eje Y , según (8), tal como hemos comentado previamente.

Para finalizar, veamos lo que ocurre para el caso de $1H^+$. Hemos calculado analíticamente que si el ion parte con una velocidad inicial $v_{x0} = 7,859 \cdot 10^4 m/s$ y el campo magnético tiene un valor $B = 1,33605 \cdot 10^{-3} T$, la trayectoria será rectilínea y el ion saldrá por la abertura en la pared del selector. Consideraremos un ion $1H^+$ con esta velocidad, otro con una velocidad un 10% superior y otro con una velocidad un 10% inferior. La gráfica obtenida es la siguiente:



Vemos que las trayectorias y las velocidades obtenidas son muy similares a las de $1p^+$ pues, como hemos dicho anteriormente, ambos tienen la misma carga y unas masas muy similares.

3. Relatividad

En este ejercicio estudiaremos el movimiento de partículas relativistas en campos magnéticos. Para ello, deberemos tener en cuenta el efecto de la teoría de la relatividad especial sobre el movimiento. De esta forma, para las partículas relativistas, la ecuación de movimiento pasará a ser:

$$m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}, \text{ donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Estudiaremos la variación de la frecuencia de giro de distintas partículas que se mueven en un campo magnético homogéneo dependiendo de la velocidad. Recogeremos los resultados, tanto analíticos como numéricos, en dos tablas, una para las partículas relativistas y otra para las no relativistas, y compararemos estos datos por medio de gráficos.

La velocidad inicial tendrá un valor aleatorio entre $10^2 m/s$ y $10^8 m/s$. Además, el campo magnético actuará sobre todo el espacio.

3.1. Solución analítica

Consideremos una partícula de carga q y masa m que entra en un campo magnético perpendicular a la dirección de su velocidad. Esta partícula describirá un movimiento circular que tendrá un radio R , una velocidad angular ω y un periodo T . En primer lugar, para calcular el radio R deberemos considerar que la fuerza ejercida por el campo magnético es igual a la centrípeta, de modo que tendremos:

$$F_B = F_C \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow R_{rel} = \frac{m\gamma v}{qB} \quad (9)$$

De nuevo, igualando la fuerza magnética a la centrípeta podemos obtener la velocidad angular:

$$F_B = F_C \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \Rightarrow \omega_{rel} = \frac{qB}{m\gamma}$$

A partir de esta expresión podemos obtener el periodo T y la frecuencia f de la partícula, que serán:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow T_{rel} = \frac{2\pi m\gamma}{qB} \\ f &= \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \Rightarrow f_{rel} = \frac{qB}{2\pi m\gamma} \end{aligned} \quad (10)$$

3.2. Solución numérica

Tenemos las siguientes expresiones para el campo magnético y la velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = B\vec{k} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \end{array} \right\}$$

En primer lugar, para partículas no relativistas que se mueven en un campo magnético homogéneo, tendremos que la fuerza ejercida sobre las partículas será:

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

De donde obtenemos:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \right) = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qB(v_y\vec{i} - v_x\vec{j})$$

Ahora, de esta expresión obtenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, una para las fuerzas en el eje X y otra para el eje Y :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F\vec{i} = qBv_y \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB}{m}v_y$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F\vec{j} = -qBv_x \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB}{m}v_x$$

A continuación, transformamos estas ecuaciones diferenciales de segundo orden en cuatro de primer orden, de forma que obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} \cdot v_y \cdot B \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} \cdot v_x \cdot B \end{array} \right\}$$

Para finalizar, en el caso de que las partículas consideradas sean relativistas, el sistema que tendremos será el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \cdot v_y \cdot B \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m\gamma} \cdot v_x \cdot B \end{array} \right\}$$

3.3. Resultados

A continuación, aplicando el método analítico y el numérico, obtendremos los valores del periodo y del radio tanto para partículas relativistas como para no relativistas, a una determinada velocidad tomada aleatoriamente entre $10^2 m/s$ y $10^8 m/s$.

En primer lugar, los resultados analítico y numérico (el radio numérico lo obtenemos a partir de las gráficas que enseñaremos más adelante) no relativistas para las partículas e^- , e^+ y p^+ obtenidos son:

$v_{x0} = 3,64 \cdot 10^7 m/s$ $B = 1T$	Analítico		Numérico	
	$f_a (Hz)$	$R_a (m)$	$f_n (Hz)$	$R_n (m)$
e^-	$-2,795 \cdot 10^{10}$	$-2,072 \cdot 10^{-4}$	$-2,795 \cdot 10^{10}$	$-2,072 \cdot 10^{-4}$
e^+	$2,795 \cdot 10^{10}$	$2,072 \cdot 10^{-4}$	$2,795 \cdot 10^{10}$	$2,072 \cdot 10^{-4}$
p^+	$1,525 \cdot 10^7$	$3,798 \cdot 10^{-1}$	$1,525 \cdot 10^7$	$3,798 \cdot 10^{-1}$

Por otra parte, los resultados analítico y numérico relativistas para estas tres partículas son:

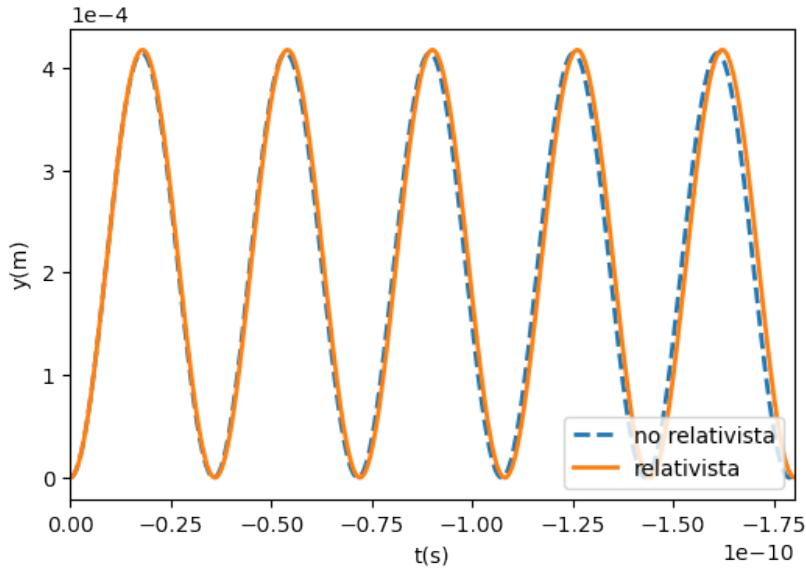
$v_{x0} = 3,64 \cdot 10^7 m/s$ $B = 1T$	γ	Analítico		Numérico	
		$f_a (Hz)$	$R_a (m)$	$f_n (Hz)$	$R_n (m)$
e^-	1,007	$-2,775 \cdot 10^{10}$	$-2,087 \cdot 10^{-4}$	$-2,775 \cdot 10^{10}$	$-2,087 \cdot 10^{-4}$
e^+	1,007	$2,775 \cdot 10^{10}$	$2,087 \cdot 10^{-4}$	$2,775 \cdot 10^{10}$	$2,087 \cdot 10^{-4}$
p^+	1,007	$1,514 \cdot 10^7$	$3,826 \cdot 10^{-1}$	$1,514 \cdot 10^7$	$3,826 \cdot 10^{-1}$

Como podemos observar, no hay una gran diferencia entre los valores relativistas y los no relativistas. Esto se debe a que al calcular $\frac{v^2}{c^2} = \frac{3,64 \cdot 10^7}{3,38} = 0,014722$, nos da un valor muy cercano a 0, luego $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{3,64 \cdot 10^7}{3,38}} = 0,992612$ es muy cercano a 1 y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3,64 \cdot 10^7}{3,38}}} = 1,00744$ es muy cercano a 1, de forma que $m\gamma \approx m$.

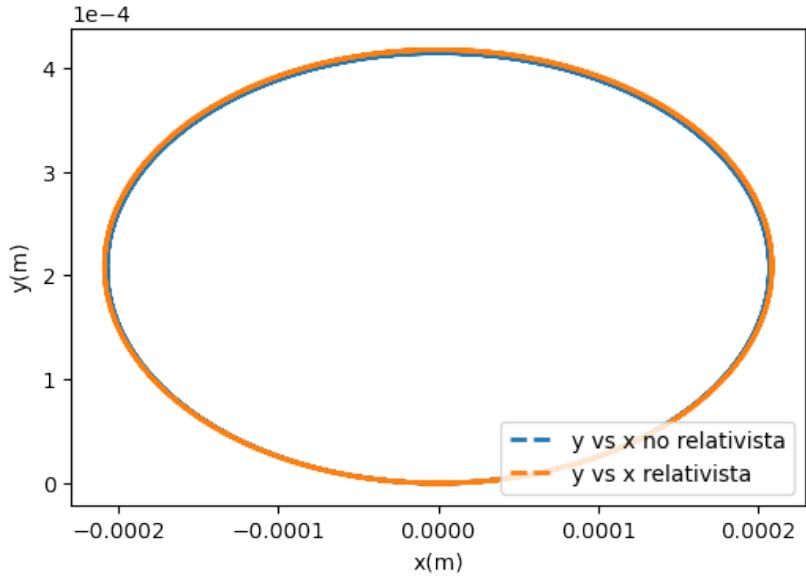
Observamos que la frecuencia no relativista es mayor (en valor absoluto) que la frecuencia relativista. Esto lo podemos deducir a partir de (10), pues tenemos que $\gamma > 1$. Por otra parte, el radio no relativista es menor (en valor absoluto) que el radio relativista, según (9).

A continuación, veremos la representación gráfica de diferentes parámetros para cada una de las tres partículas consideradas, en las que se comparan los valores relativistas con los no relativistas, y seguidamente explicaremos las diferencias apreciadas en los mismos.

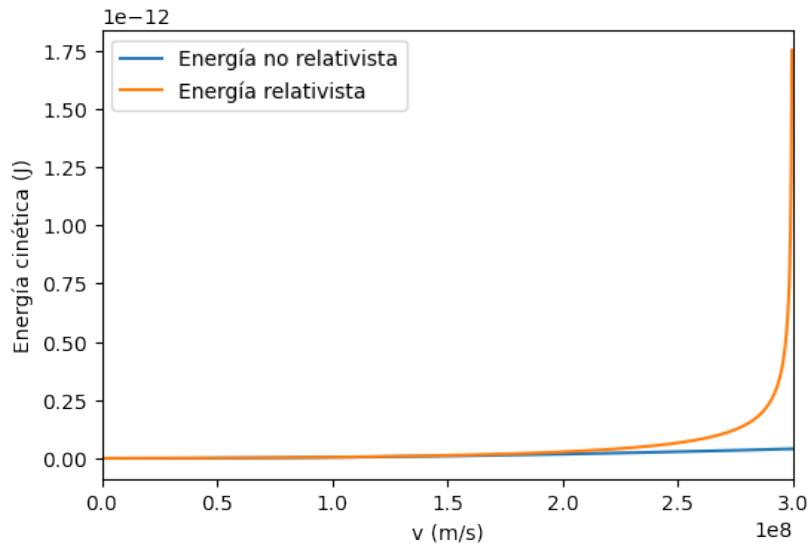
Para empezar, veremos la representación gráfica de distintos parámetros para e^- . Comenzamos por representar la posición sobre el eje Y frente al tiempo, y obtenemos:



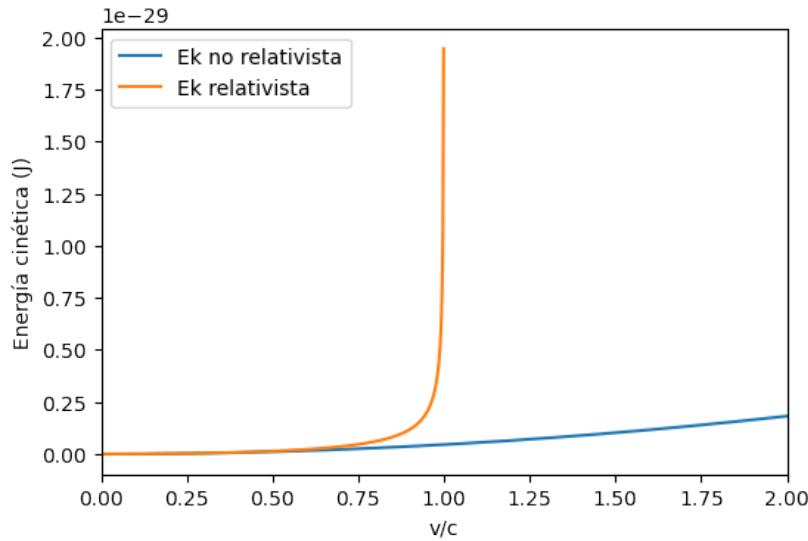
Si esta vez representamos la posición sobre el eje Y frente a la posición sobre el eje X, el gráfico obtenido es:



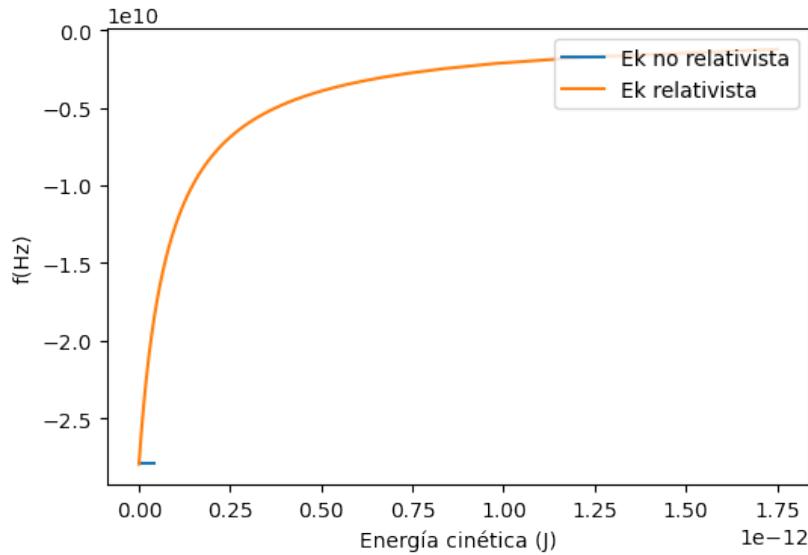
Ahora representaremos la energía cinética, tanto relativista como no relativista, frente a la velocidad, y obtendremos:



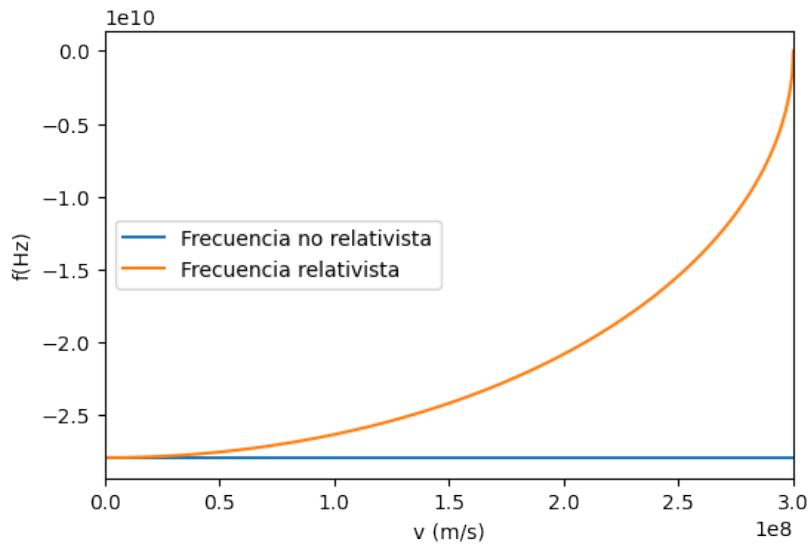
Para el caso de la energía cinética normalizada frente a la velocidad, la gráfica será la siguiente:



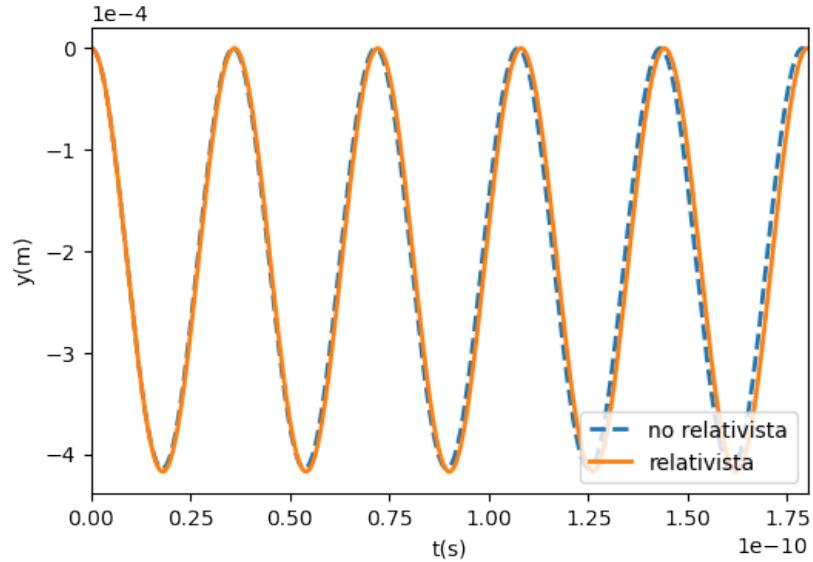
A continuación, representamos la frecuencia del electrón frente a su energía cinética, y obtenemos:



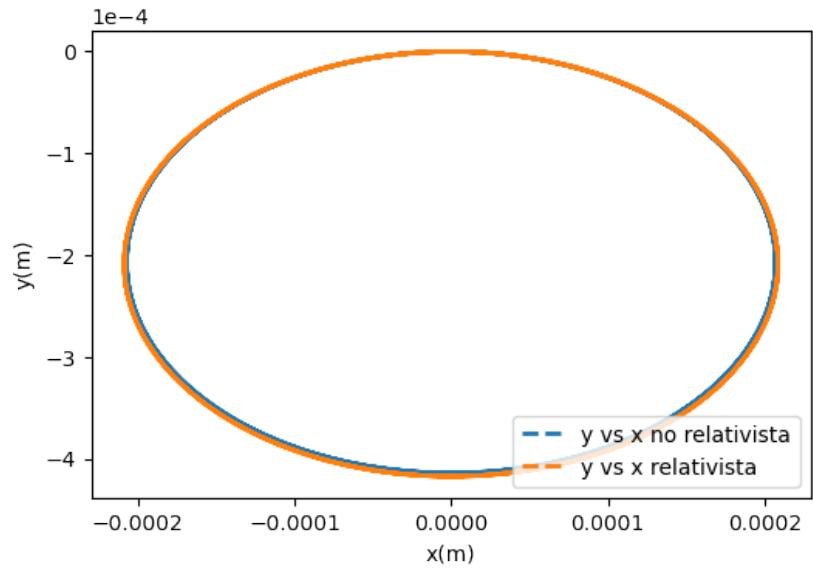
Por último, representaremos la frecuencia de la partícula frente a la velocidad, de manera que la gráfica obtenida es:



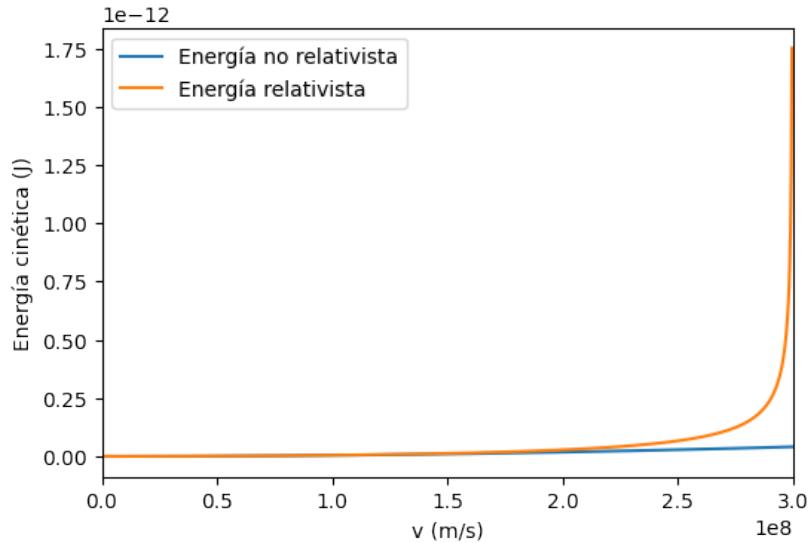
En esta ocasión, veremos la representación gráfica de distintos parámetros para e^+ , comenzando por la posición sobre el eje Y frente al tiempo, con lo que obtenemos:



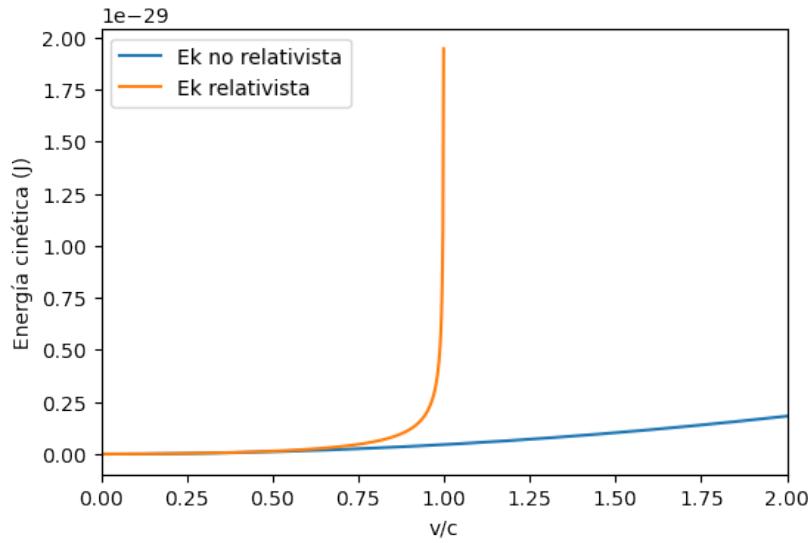
Para la representación de la posición sobre el eje Y frente a la posición sobre el eje X , el gráfico obtenido es:



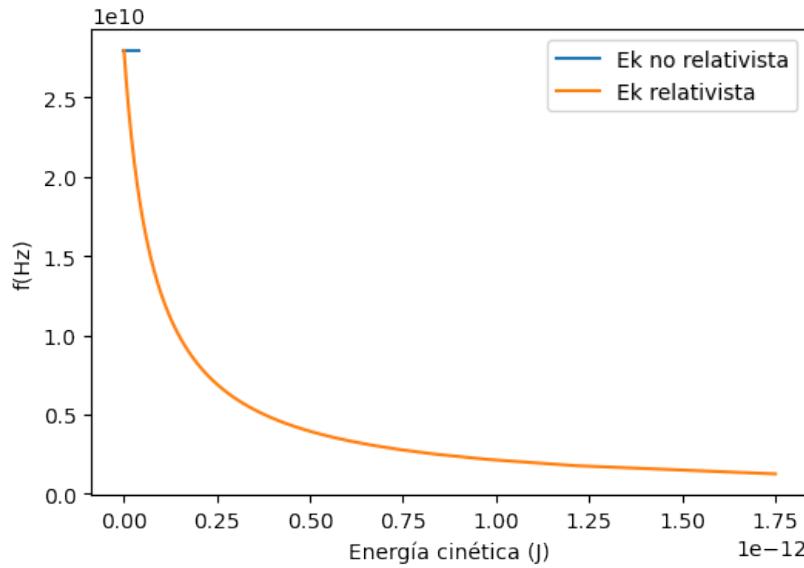
En el caso del gráfico de la energía cinética, tanto relativista como no relativista, frente a la velocidad, tenemos:



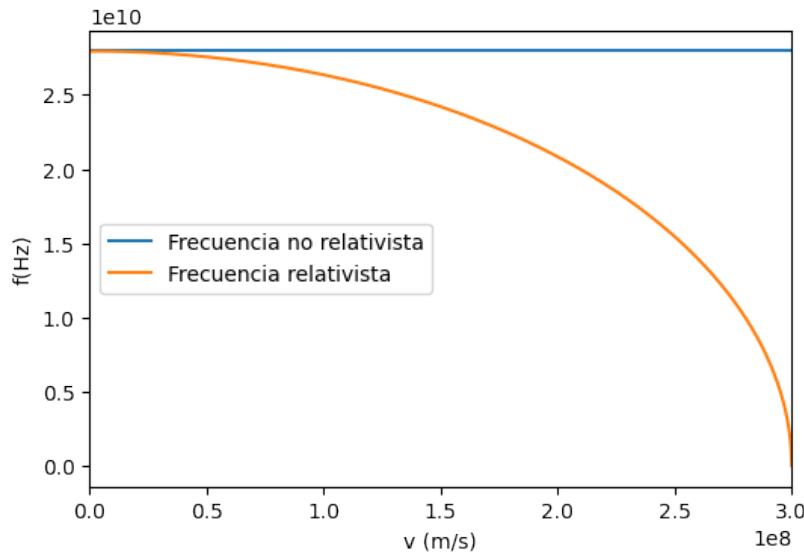
Para la energía cinética normalizada frente a la velocidad, la gráfica será la siguiente:



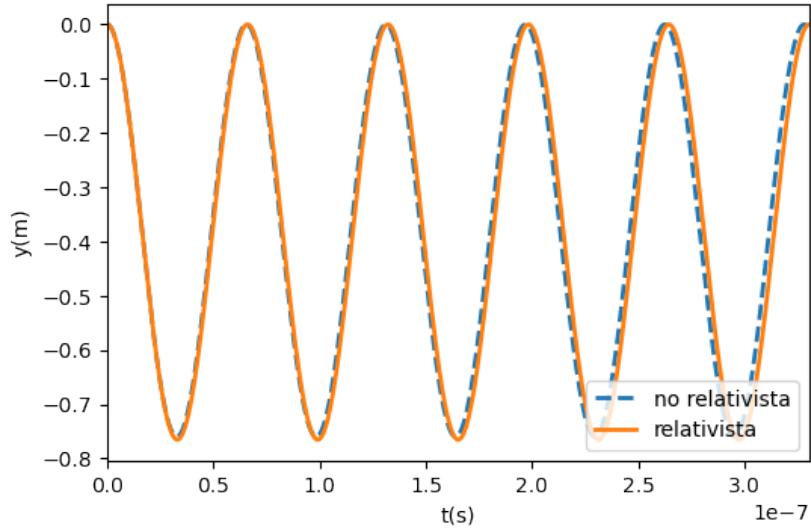
A continuación, representamos la frecuencia del positrón frente a su energía cinética, obteniendo:



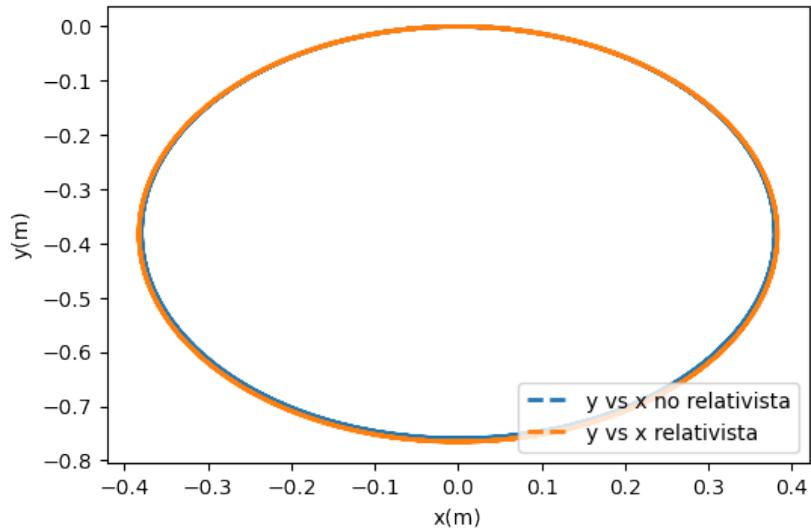
Por último, representamos la frecuencia de la partícula frente a la velocidad, obteniendo la gráfica siguiente:



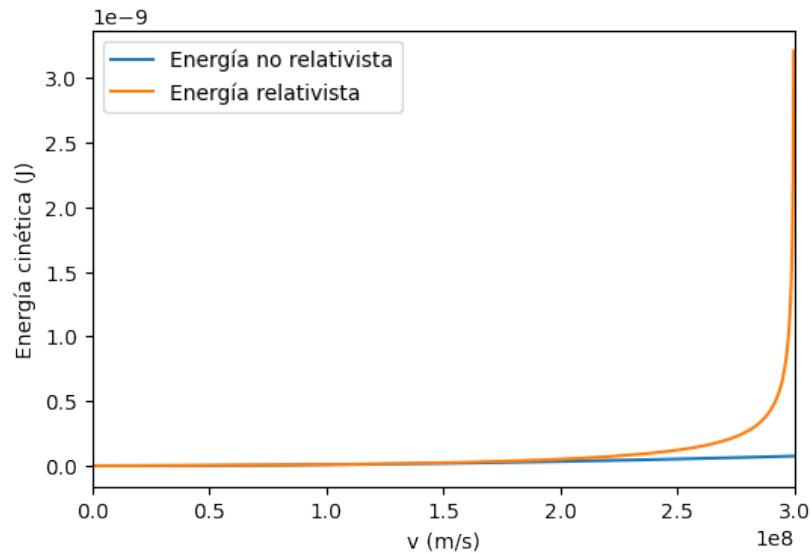
Para finalizar, veremos la representación gráfica de distintos parámetros para p^+ . Si representamos la posición del protón sobre el eje Y frente al tiempo, obtenemos:



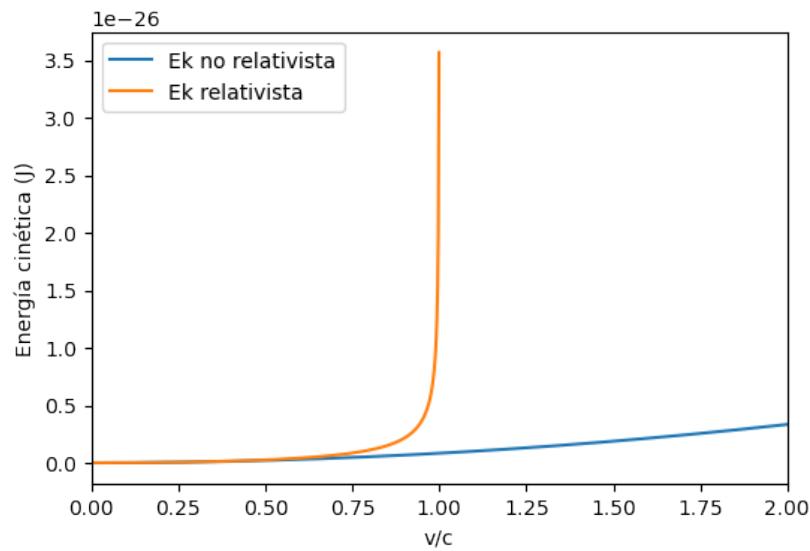
Si representamos la posición sobre el eje Y del protón frente a la posición sobre el eje X, el gráfico obtenido es:



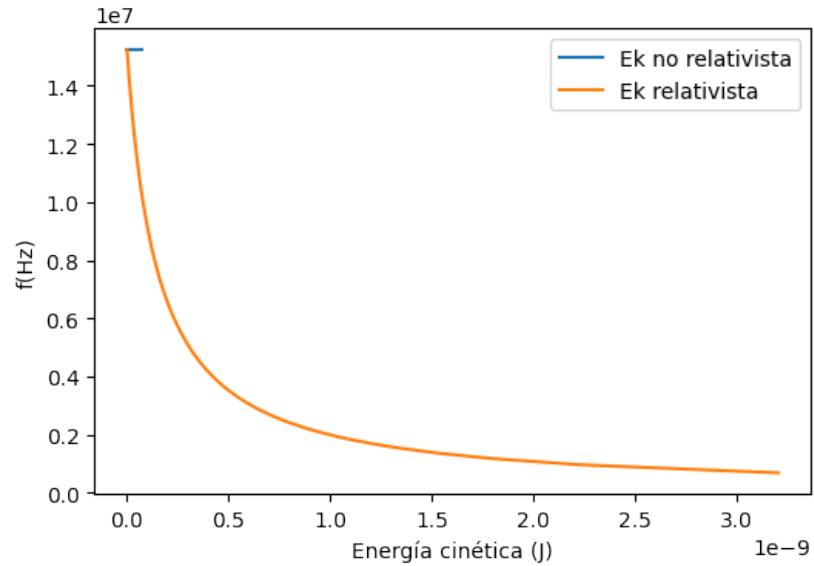
Ahora representamos la energía cinética frente a la velocidad, obteniendo:



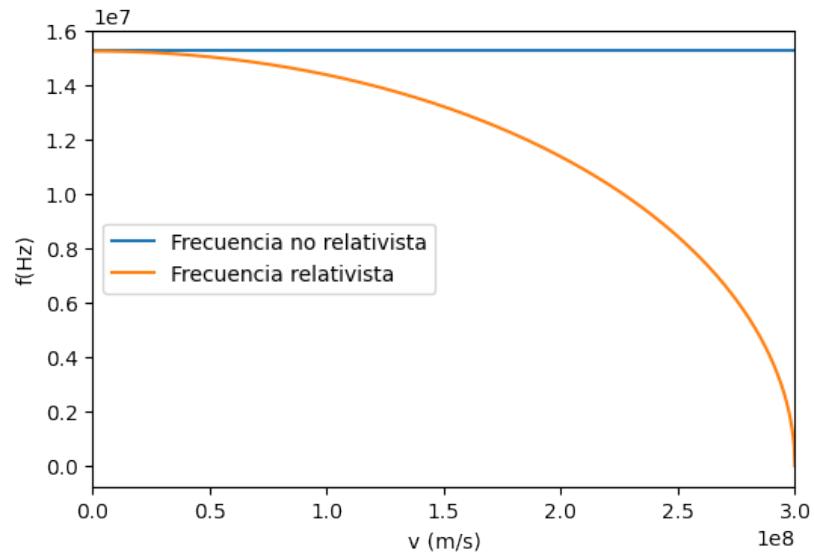
Para la energía cinética normalizada frente a la velocidad, la gráfica obtenida es:



Ahora representamos la frecuencia del protón frente a su energía cinética, obteniendo:



Por último, la representación gráfica de la frecuencia de la partícula frente a la velocidad obtenida es:



En primer lugar, observamos que las gráficas de posición, posición frente al tiempo, frecuencia frente a energía cinética y frecuencia frente a velocidad son iguales pero con signos opuestos para e^- y e^+ . Esto se debe a que estas dos partículas tienen la misma masa pero cargas opuestas. Sin embargo, para la energía cinética frente a la velocidad, estas dos partículas tienen las mismas gráficas, pues la energía cinética solo depende de la masa y de la velocidad según:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \quad E_{Crel} = m \cdot (\gamma - 1) \cdot c^2$$

Por otro lado, en las gráfica de posición frente al tiempo podemos ver que las ondas formadas tienen un mayor periodo para el caso relativista que para el no relativista, pues, como hemos visto en las tablas anteriores, el radio es mayor para el caso relativista que para el no relativista, según (9).

También podemos observar en las gráficas de energía cinética frente a velocidad que para el caso relativista, hay una asíntota vertical para $v = 3 \cdot 10^8 m/s$, es decir, cuando la velocidad de la partícula es igual a la velocidad de la luz. Sin embargo, para el caso no relativista, la energía cinética va aumentando lentamente conforme aumenta la velocidad.

En las gráficas de frecuencia frente a energía cinética vemos que, para el caso relativista, la frecuencia (en valor absoluto) va disminuyendo al aumentar la energía cinética hasta alcanzar una asíntota horizontal en $f = 0 Hz$, formando una curva convexa.

Sin embargo, en las gráficas en las que representamos la frecuencia frente a la velocidad, para el caso relativista la frecuencia (en valor absoluto) disminuye, formando una curva cóncava, hasta que para $v = c = 3 \cdot 10^8 m/s$, la frecuencia (en valor absoluto) alcanza su valor mínimo, pues tenemos $f = 0 Hz$. No obstante, en el caso no relativista, la frecuencia se mantiene constante con respecto a la velocidad, pues según (10), la frecuencia no relativista no depende de la velocidad, mientras que la relativista sí, debido a que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Esta vez tomaremos un valor para la velocidad muy cercano a la velocidad de la luz, de manera que la diferencia entre los valores relativistas y los no relativistas será mucho más notable. De esta forma, la velocidad que tomaremos en esta ocasión será $v_{x0} = 0,9 \cdot c = 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s$.

Los resultados no relativistas con esta nueva velocidad para las tres partículas antes estudiadas son:

$v_{x0} = 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s$ $B = 1T$	Analítico		Numérico	
	$f_a (Hz)$	$R_a (m)$	$f_n (Hz)$	$R_n (m)$
e^-	$-2,795 \cdot 10^{10}$	$-1,537 \cdot 10^{-3}$	$-2,795 \cdot 10^{10}$	$-1,537 \cdot 10^{-3}$
e^+	$2,795 \cdot 10^{10}$	$1,537 \cdot 10^{-3}$	$2,795 \cdot 10^{10}$	$1,537 \cdot 10^{-3}$
p^+	$1,525 \cdot 10^7$	2,818	$1,525 \cdot 10^7$	2,818

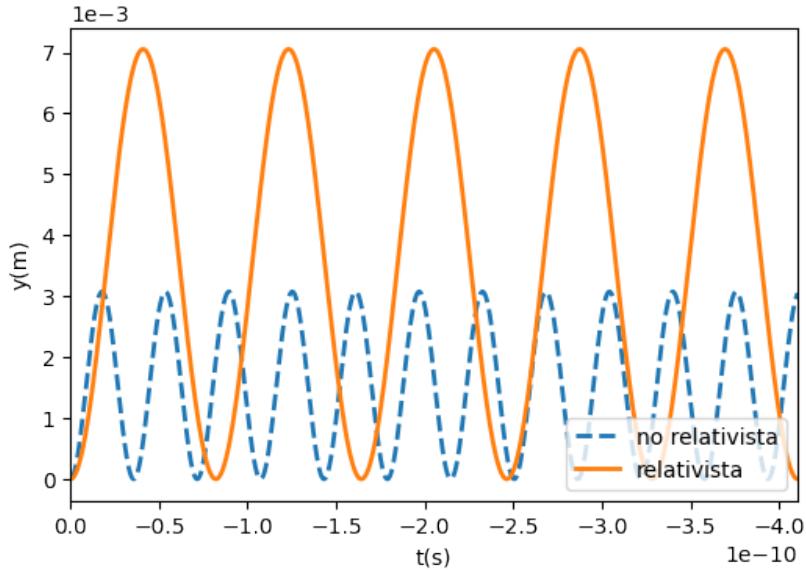
Por otro lado, los resultados relativistas serán:

$v_{x0} = 0,9 \cdot c m/s$ $B = 1T$	γ	Analítico		Numérico	
		$f_a (Hz)$	$R_a (m)$	$f_n (Hz)$	$R_n (m)$
e^-	2,294	$-1,218 \cdot 10^{10}$	$-3,527 \cdot 10^{-3}$	$-1,218 \cdot 10^{10}$	$-3,527 \cdot 10^{-3}$
e^+	2,294	$1,218 \cdot 10^{10}$	$3,527 \cdot 10^{-3}$	$1,219 \cdot 10^{10}$	$3,527 \cdot 10^{-3}$
p^+	2,294	$6,647 \cdot 10^6$	6,465	$6,647 \cdot 10^6$	6,465

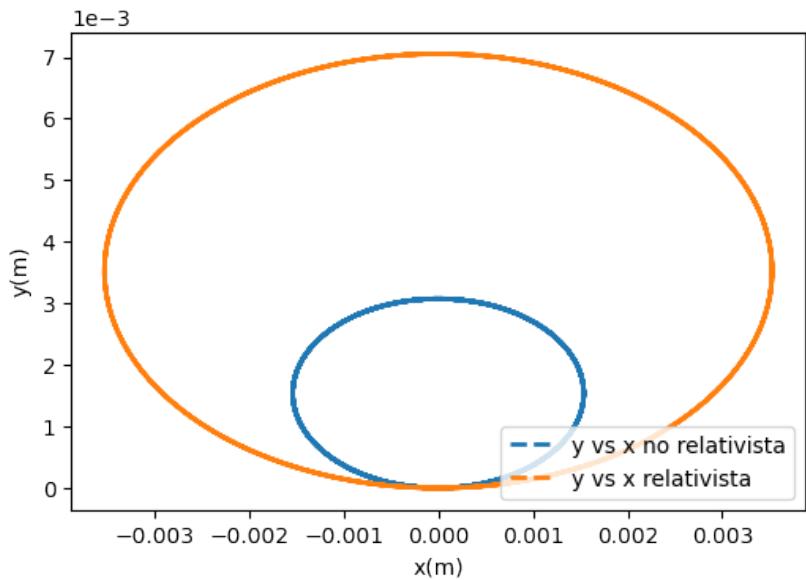
Tal como hemos dicho, al considerar una velocidad cercana a la de la luz, la diferencia entre los valores relativistas y los no relativistas es mayor que para velocidades menores. De esta forma, podemos observar que la frecuencia relativista (en valor absoluto) es considerablemente menor que la frecuencia no relativista (en valor absoluto). Para el radio ocurre lo contrario, pues el radio relativista (en valor absoluto) es notablemente mayor que el radio no relativista (en valor absoluto).

Estas diferencias se apreciarán también si, de nuevo, hacemos la representación gráfica de distintos parámetros para las tres partículas consideradas. Por ello, a continuación representaremos la posición, la posición frente al tiempo, la energía cinética frente a la velocidad, la frecuencia frente a la energía cinética y la frecuencia frente a la velocidad de cada una de las partículas, tanto para el caso relativista como para el no relativista, y explicaremos las diferencias que se observan con respecto al caso en el que la velocidad no era cercana a la de la luz.

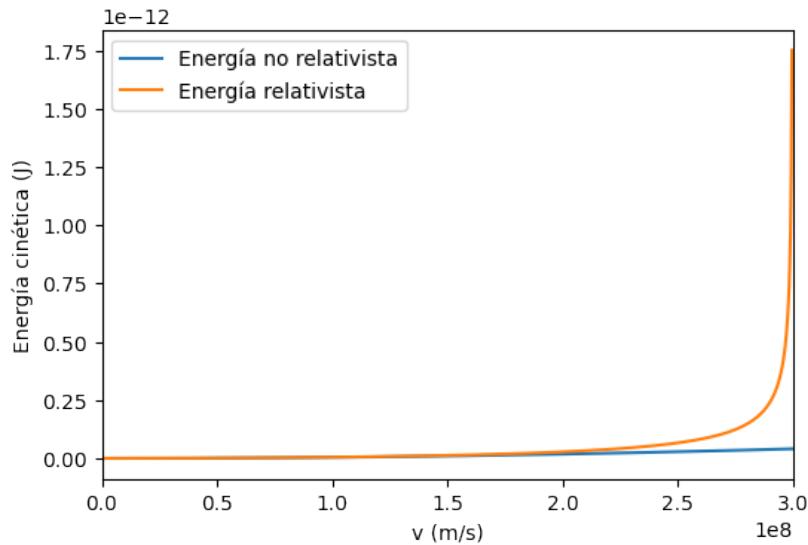
Para empezar, veremos la representación gráfica de estos parámetros para e^- . Comenzamos representando la posición sobre el eje Y frente al tiempo, de manera que obtenemos:



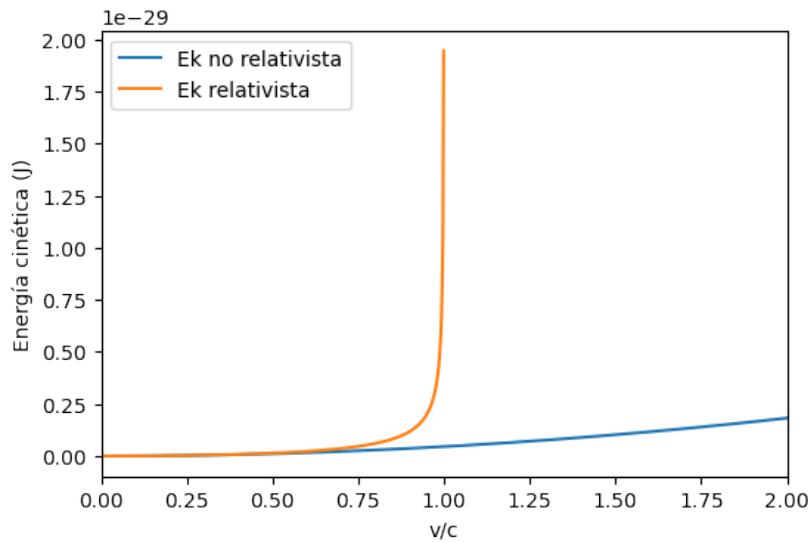
A continuación representamos la posición sobre el eje Y frente a la posición sobre el eje X , y el gráfico obtenido es:



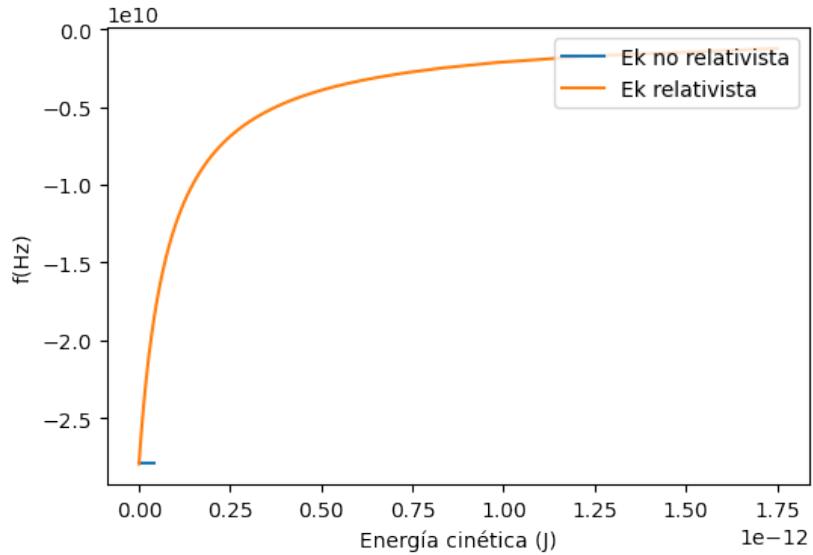
Ahora representamos la energía cinética, tanto relativista como no relativista, frente a la velocidad, y obtenemos:



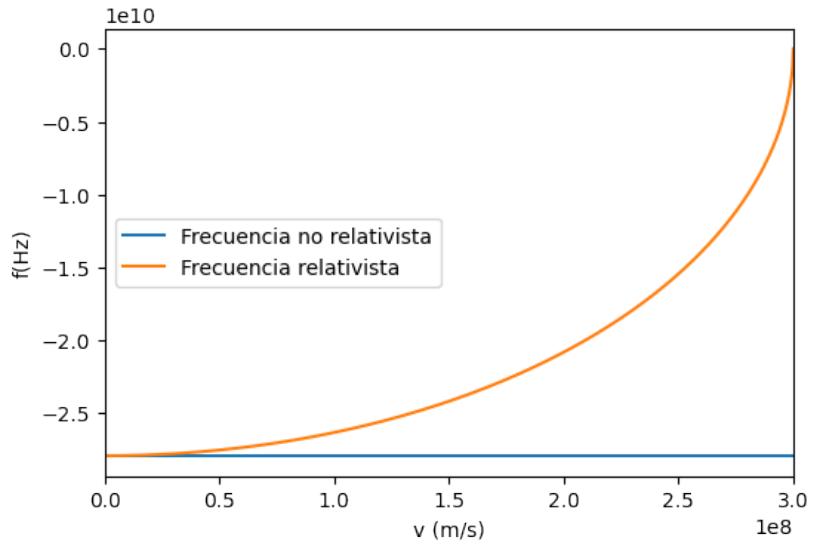
Para el caso de la energía cinética normalizada frente a la velocidad, la gráfica será la siguiente:



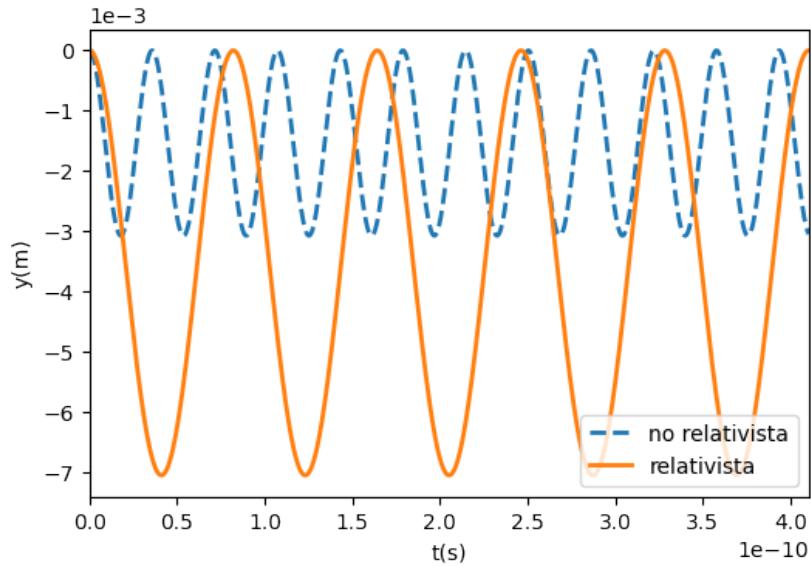
A continuación, representamos la frecuencia del electrón frente a su energía cinética, obteniendo la gráfica siguiente:



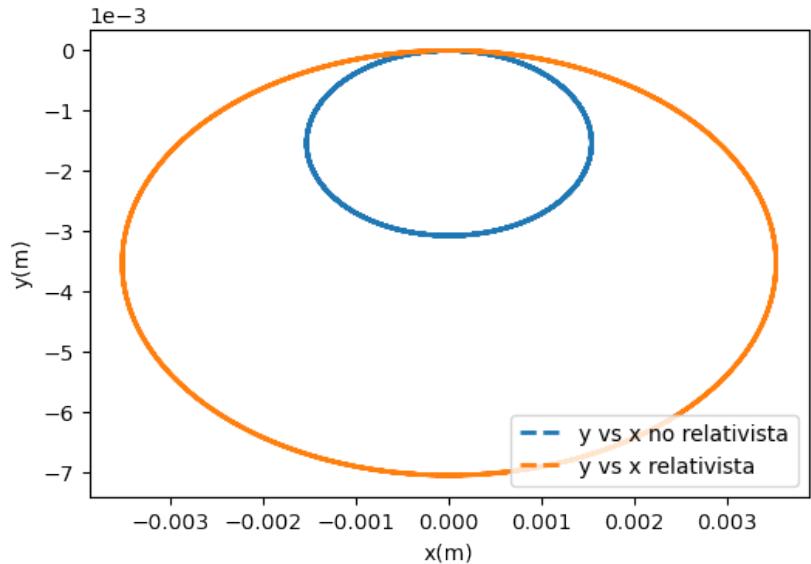
Por último, si representamos la frecuencia de la partícula frente a la velocidad, la gráfica obtenida es:



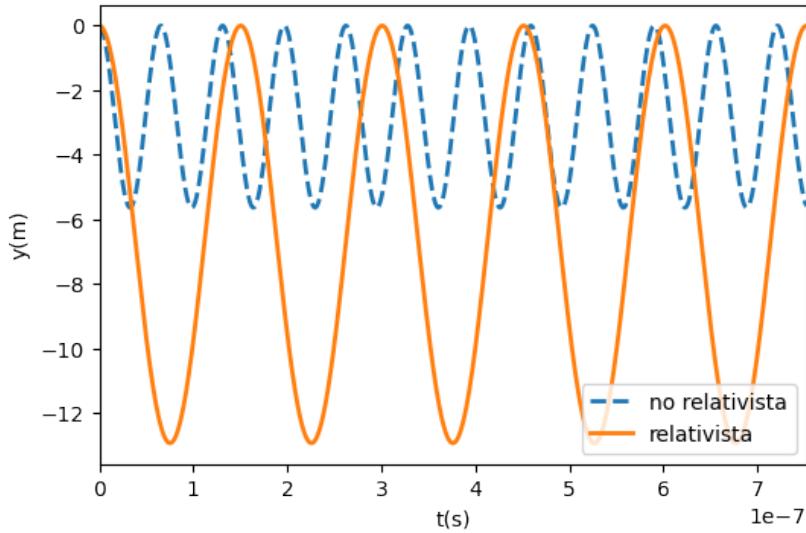
Hemos podido observar que las gráficas de energía cinética frente a velocidad, frecuencia frente a energía cinética y frecuencia frente a velocidad no han variado, por lo que a partir de ahora solo representaremos las de posición, que sí han cambiado. Empezamos por la posición sobre el eje Y frente al tiempo para e^+ , con lo que obtenemos:



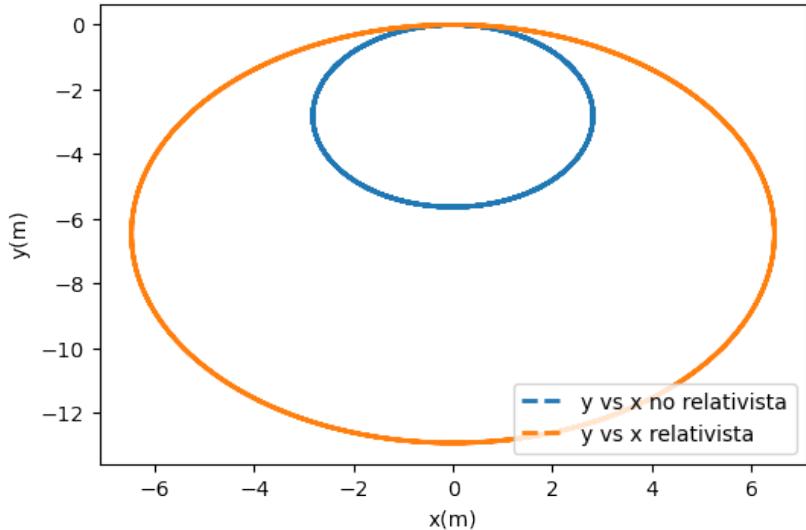
Para la representación de la posición sobre el eje Y frente a la posición sobre el eje X para el positrón, el gráfico obtenido es:



Finalmente, veremos la representación gráfica de estos dos parámetros para p^+ . Si representamos la posición del protón sobre el eje Y frente al tiempo, el gráfico obtenido es:



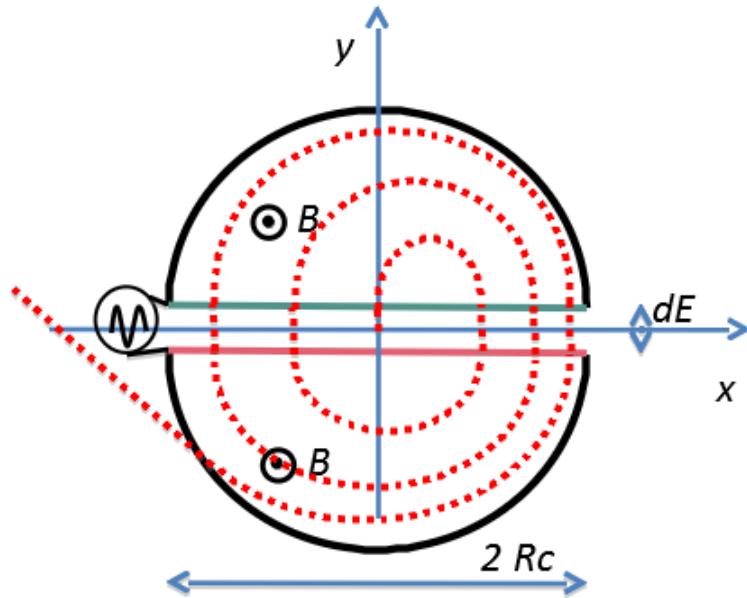
Si representamos la posición sobre el eje Y del protón frente a la posición sobre el eje X, obtenemos:



En estos gráficos podemos apreciar que el periodo y la amplitud de las ondas obtenidas al representar la posición frente al tiempo son mucho menores para el caso relativista que para el caso no relativista, y además vemos que el radio es mucho mayor para el caso relativista que para el no relativista, como ya habíamos concluido gracias a las tablas.

4. Ciclotrón

En este ejercicio estudiaremos el movimiento de una partícula cargada, inicialmente en reposo, en un ciclotrón. Este es un tipo de acelerador de partículas compuesto por dos regiones en forma de D, las cuales contienen un campo magnético perpendicular a un campo eléctrico que se sitúa entre ambas, tal como vemos en la siguiente imagen:



La partícula parte del reposo en el origen, y es acelerada por la acción del campo eléctrico. Por otra parte, el campo magnético le produce un movimiento circular cuyo radio depende de la velocidad de la partícula. El campo eléctrico invierte su dirección periódicamente, de forma que cada vez que la partícula pasa entre las dos regiones en forma de D gana velocidad.

4.1. Solución analítica

Comenzamos estudiando la zona entre las regiones en forma de D, es decir, la zona para la cual $y \in [-h/2, h/2]$, en la que tenemos un campo eléctrico $\vec{E} = E\vec{j}$. El tipo de movimiento que encontramos será MRUA, debido a que el campo eléctrico producirá una aceleración sobre las partículas, por lo que aplicando la segunda ley de Newton podemos obtener la aceleración:

$$F_E = qE = ma \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{q}{m} \frac{dV}{h} \quad (11)$$

Ahora, usando ecuaciones de cinética para el MRUA y sustituyendo la aceleración, obtenemos el tiempo que tarda la partícula en cruzar esta zona:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} a t_I^2 \Rightarrow t_I = \sqrt{\frac{2h}{a}} = h \sqrt{\frac{2m}{dVq}} \quad (12)$$

Por último, aplicando la ley de la conservación de la energía de 0 a h , obtenemos la velocidad de la partícula al salir de esta zona:

$$\begin{aligned} U_0 + K_0 &= U_h + K_h \\ qV_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 &= qV_h + \frac{1}{2} m v_h^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qdV}{m}} \end{aligned} \quad (13)$$

A continuación estudiaremos la zona formada por las dos regiones en forma de D, con $y > |h/2|$, donde encontramos un campo magnético. En primer lugar, igualamos la fuerza magnética y la centrípeta, y después sustituimos la velocidad calculada antes para obtener el radio que describe la partícula, pues sabemos que esta se mueve con MCU debido a la acción del campo magnético:

$$F_B = F_C \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qdV}{m}} = \sqrt{\frac{2dVm}{qB^2}} \quad (14)$$

Para finalizar, volvemos a igualar la fuerza magnética y la centrípeta para obtener la velocidad angular, a partir de la cual calculamos la frecuencia y el periodo. A continuación, usamos el periodo para calcular el tiempo que está la partícula en cada región en forma de D, pues este tiempo será la mitad del periodo:

$$\begin{aligned} F_B = F_C \Rightarrow qvB &= m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow t_D = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB} \end{aligned} \quad (15)$$

Además, debemos tener en cuenta que cuando los iones vuelvan a la zona entre las dos regiones en forma de D, el campo eléctrico habrá cambiado la dirección, y los iones aumentarán su velocidad. La velocidad máxima de salida del ciclotrón ,de radio R_c , será la que hemos obtenido antes igualando la fuerza magnética a la centrípeta:

$$F_B = F_C \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v_{max} = \frac{R_c q B}{m}$$

El incremento de energía cinética cada vez que la partícula pase por la región intermedia se obtendrá por:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2qdV}{m}}\right)^2 = dVq \quad (16)$$

Por último, cuando la partícula salga del ciclotrón, tendrá una energía cinética que calcularemos sustituyendo la expresión de la velocidad que acabamos de obtener:

$$E_{Kmax} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{R_c^2 q^2 B^2}{m} \quad (17)$$

4.2. Solución numérica

Tenemos las siguientes expresiones para el campo magnético, el campo eléctrico y la velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = B\vec{k} \\ \vec{E} = E\vec{j} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \end{array} \right\}$$

De nuevo, se cumplirá la ley de Lorentz, y si la aplicamos podemos obtener la siguiente expresión:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \right) = qE\vec{j} + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qE\vec{j} + qB(v_y\vec{i} - v_x\vec{j})$$

De esta forma, obtenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, una para el eje X y otra para el eje Y :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F\vec{i} = qBv_y \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} \cdot v_y \cdot B$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F\vec{j} = qE - qBv_x \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}v_x$$

Ahora podemos transformar estas dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, obteniendo:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}v_yB \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}E - \frac{q}{m}v_xB \end{array} \right\}$$

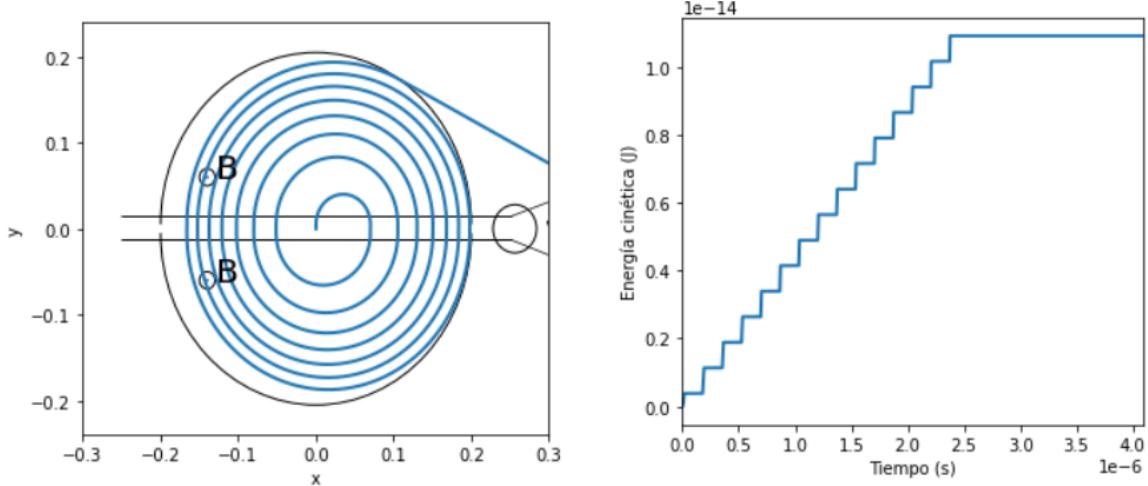
Sin embargo, deberemos tener en cuenta que para $y > |h/2|$ solo actuará el campo magnético, por lo que $E = 0$, y que para $y \in [-h/2, h/2]$ solo actuará el campo eléctrico, de manera que $B = 0$. Además, el signo del campo eléctrico irá cambiando periódicamente cada vez que la partícula vuelva a la zona intermedia.

4.3. Resultados

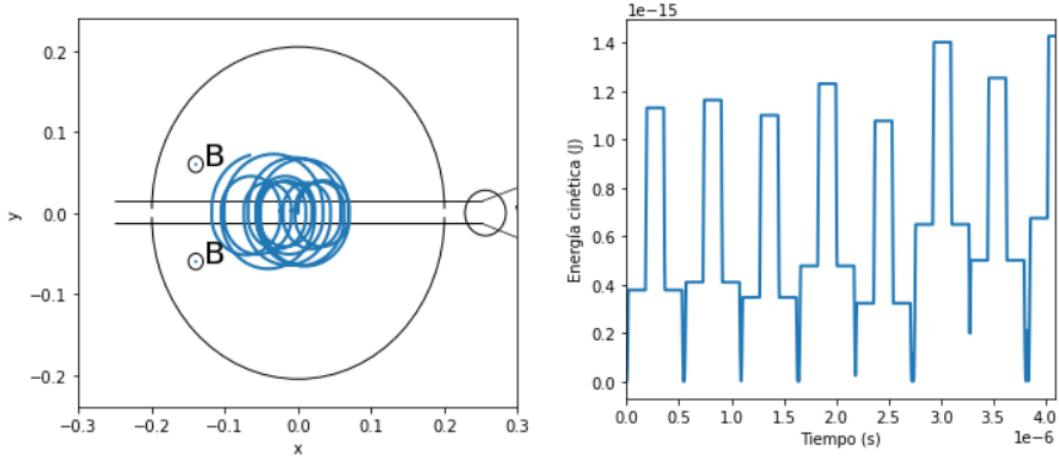
En primer lugar, debemos obtener de manera aleatoria un valor para el voltaje entre las regiones en forma de D que se encuentre entre $4000V$ y $6000V$. En nuestro caso, hemos obtenido $dV = 4710V$. Hemos dicho anteriormente que $\omega = \frac{qB}{m}$ marcará la frecuencia con la que cambie la polaridad de la fuente de alimentación, de manera que cuando la partícula vuelva a la región intermedia, el campo eléctrico habrá invertido su dirección y le proporcionará un aumento de velocidad. Veamos qué ocurre si variamos ω alrededor de este valor.

Para ello, vamos a tomar la partícula p^+ , que tiene $m = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$ y $q = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, también vamos a considerar $B = 0,2T$, $h = 0,01m$ y $R_c = 0,2m$; y con estos datos vamos a ir tomando distintos valores para ω que se encuentren alrededor del valor teórico. Para empezar, vamos a tomar el valor teórico, es decir, $\omega = \frac{qB}{m}$. Los datos y gráficos obtenidos son:

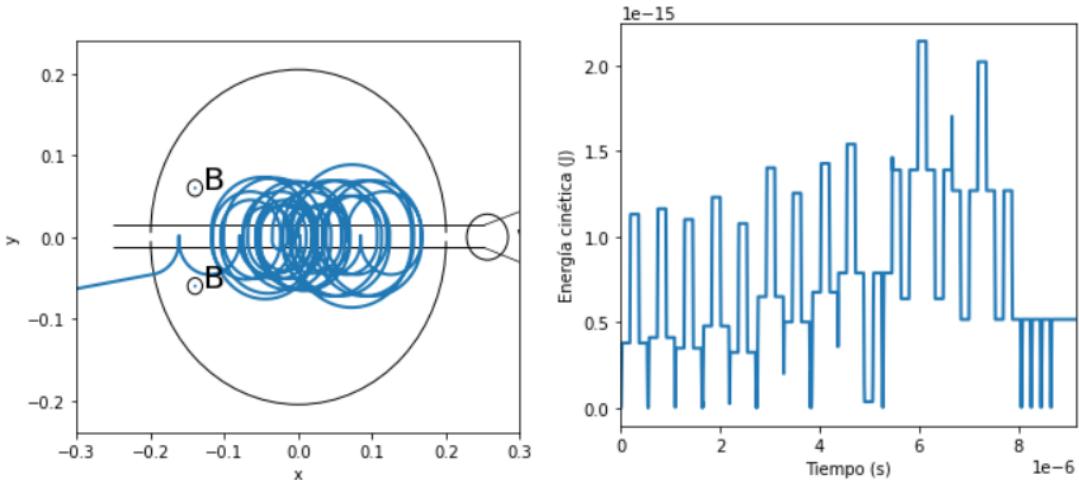
p^+	
$B = 0,2T, h = 0,01m, R_c = 0,2m$	
t_I	$2,105 \cdot 10^{-8}s$
a	$4,513 \cdot 10^{13} m/s^2$
v	$9,500 \cdot 10^5 m/s$
R	$4,958 \cdot 10^{-2} m$
t_D	$1,640 \cdot 10^{-7}s$
f	$6,099 \cdot 10^6 Hz$
ΔE_c	$7,536 \cdot 10^{-16} J$
E_{Kmax}	$1,093 \cdot 10^{-14} J$



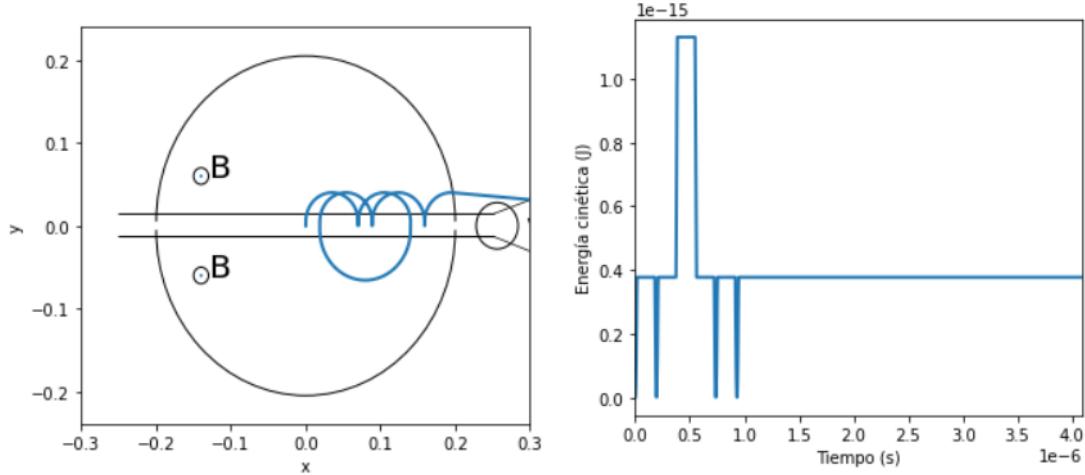
En esta ocasión tomaremos $\omega = 1,5 \cdot \frac{qB}{m}$. Al hacer esto, los valores de la tabla obtenidos son los mismos que para el caso anterior, excepto para E_{Kmax} , que es menor, pues en este caso tenemos $E_{Kmax} = 1,428 \cdot 10^{-15} J$. Además, los gráficos que se obtienen son muy diferentes:



Esto se debe a que el campo eléctrico no cambia de dirección en el momento correcto, de forma que algunas de las veces que el protón atraviesa la región intermedia del ciclotrón, en lugar de sufrir un aumento de la velocidad, experimenta una disminución de esta. Esto se aprecia en el segundo gráfico, donde se observa que la energía cinética aumenta, luego disminuye, a continuación vuelve a aumentar, vuelve a disminuir... Además, podemos ver que la partícula no sale del ciclotrón en el tiempo considerado, es decir, necesita más tiempo para salir del ciclotrón que en el caso en el que ω tomaba el valor teórico. Si tomamos un tiempo mayor de simulación, llega un momento en el que el protón sale del ciclotrón:

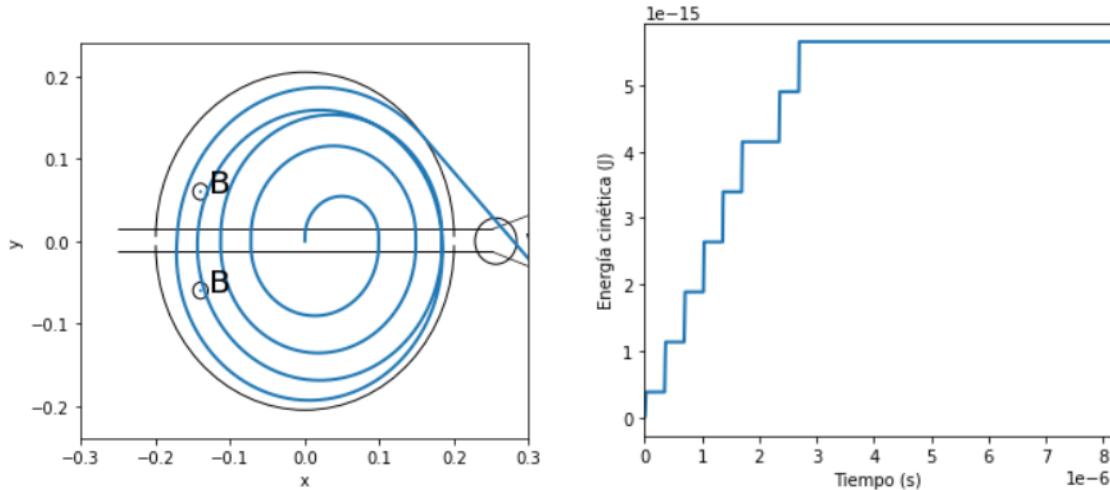


Para finalizar, estudiaremos el caso para $\omega = 0,5 \cdot \frac{qB}{m}$. De nuevo, el único valor que cambia en la tabla es E_{Kmax} , que en este caso vuelve a ser menor que para el caso en el que ω tomaba el valor teórico, pues tenemos $E_{Kmax} = 3,768 \cdot 10^{-16} J$. Por otra parte, los gráficos obtenidos son los siguientes:



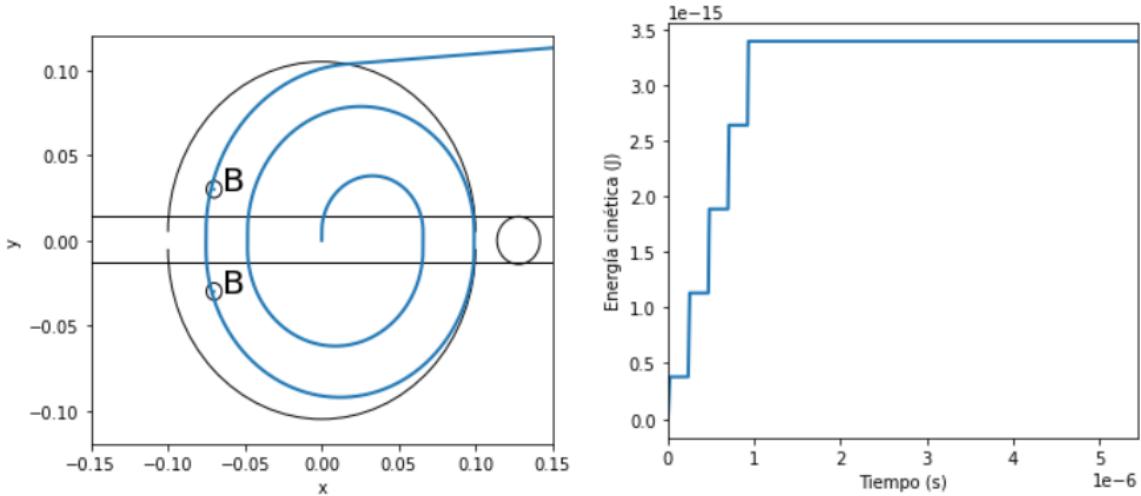
En esta ocasión, se produce un cambio en la dirección del campo eléctrico más rápido que en el caso anterior. Observamos que el protón sale antes del ciclotrón, y que no sigue una trayectoria circular, pues en algunos puntos, al llegar a la región intermedia no la cruza, sino que retrocede.

Habiendo estudiado el caso de p^+ , ahora tomaremos otras partículas. En primer lugar, vamos a estudiar el movimiento de ${}^2H^+$ con $\omega = \frac{qB}{m}$. Si tomamos $B = 0,2T$, $h = 0,01m$ y $R_c = 0,2m$, los gráficos obtenidos son:



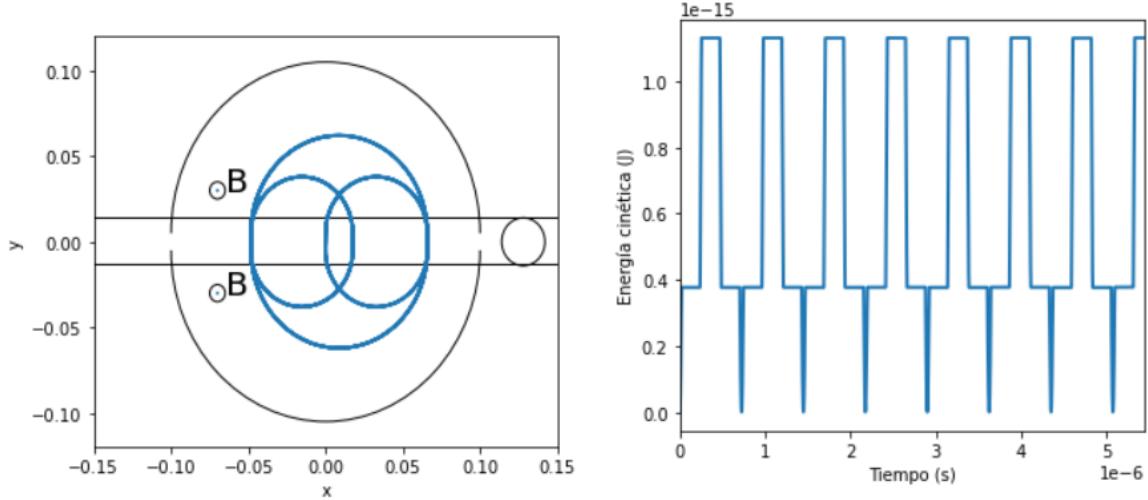
En ellos podemos observar que la velocidad no crece de forma regular, y parte de la trayectoria se solapa. Para que esto no ocurra, debemos tomar $B = 0,3T$ y $R_c = 0,1m$. Los datos y los gráficos obtenidos en este caso son:

$^2H^+$	
$B = 0,3T, h = 0,01m, R_c = 0,1m$	
t_I	$2,968 \cdot 10^{-8}s$
a	$2,270 \cdot 10^{13} m/s^2$
v	$6,738 \cdot 10^5 m/s$
R	$4,660 \cdot 10^{-2}m$
t_D	$2,173 \cdot 10^{-7}s$
f	$4,602 \cdot 10^6 Hz$
ΔE_c	$7,536 \cdot 10^{-16} J$
E_{Kmax}	$3,391 \cdot 10^{-15} J$



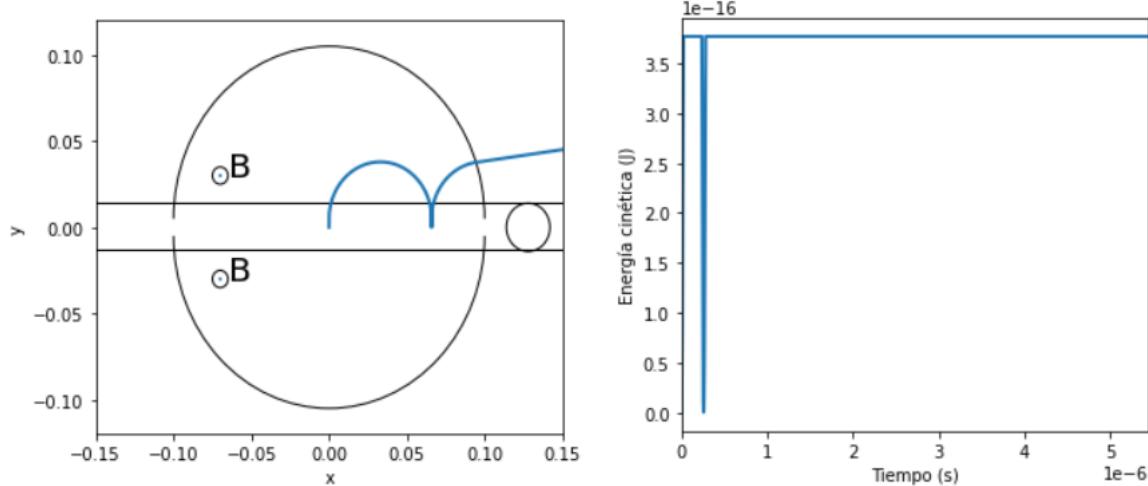
En primer lugar, t_I ha aumentado, pues también lo ha hecho m , y según (12), a mayor masa mayor tiempo t_I . Sin embargo, a ha disminuido al aumentar la masa según (11). Por otra parte, v ha disminuido debido al aumento de masa según (13). También ha disminuido R debido al aumento de B según (14). No obstante, t_D ha aumentado, pues el aumento de m es mayor que el aumento de B , y según (15), a más masa mayor es t_D . Con f ocurre lo contrario, por lo que según (15), la frecuencia ha disminuido. Por otro lado, ΔE_c se ha mantenido igual pues, según (16), esta solo depende de q y de dV , que no han cambiado. Para finalizar, E_{Kmax} ha disminuido debido a la disminución de R_c y al aumento de m , que contrarrestan el aumento de B en (17).

Ahora veremos este mismo caso, pero tomando $\omega = 1,5 \cdot \frac{qB}{m}$. De nuevo, solo cambia E_{Kmax} , que en esta ocasión es $E_{Kmax} = 1,131 \cdot 10^{-15} J$. Además, los gráficos obtenidos son los siguientes:



El deuterio no sale del ciclotrón, pues entra en un bucle infinito, repitiendo una y otra vez la misma trayectoria.

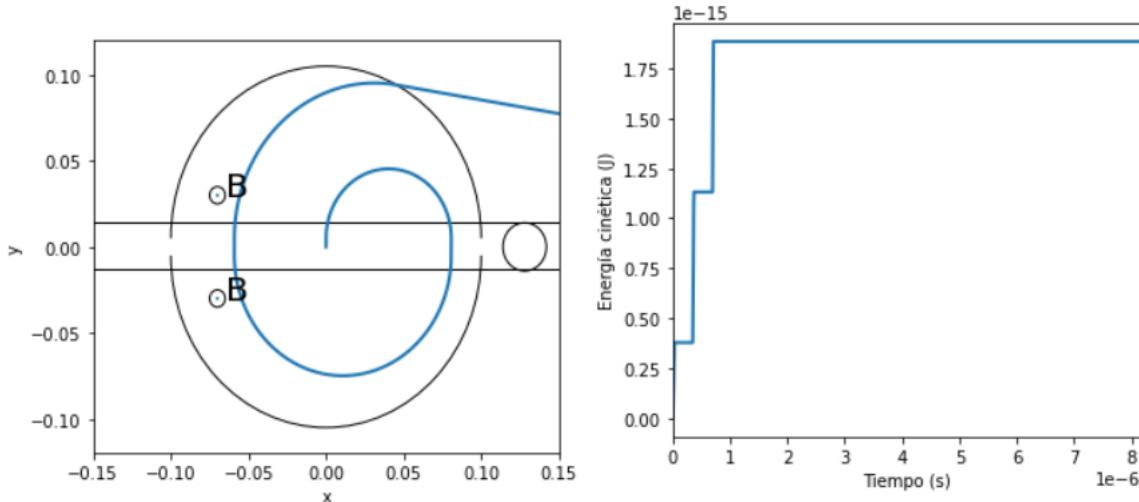
Veamos que ocurre si esta vez tomamos $\omega = 0,5 \cdot \frac{qB}{m}$. Ahora $E_{Kmax} = 3,768 \cdot 10^{-16} J$, y los gráficos son:



En esta ocasión, la partícula no llega a cruzar la región intermedia, pues al llegar a ella retrocede y a continuación sale del ciclotrón.

Ahora estudiaremos el movimiento de ${}^3H^+$. Tomando de nuevo $\omega = \frac{qB}{m}$, los datos y los gráficos obtenidos son:

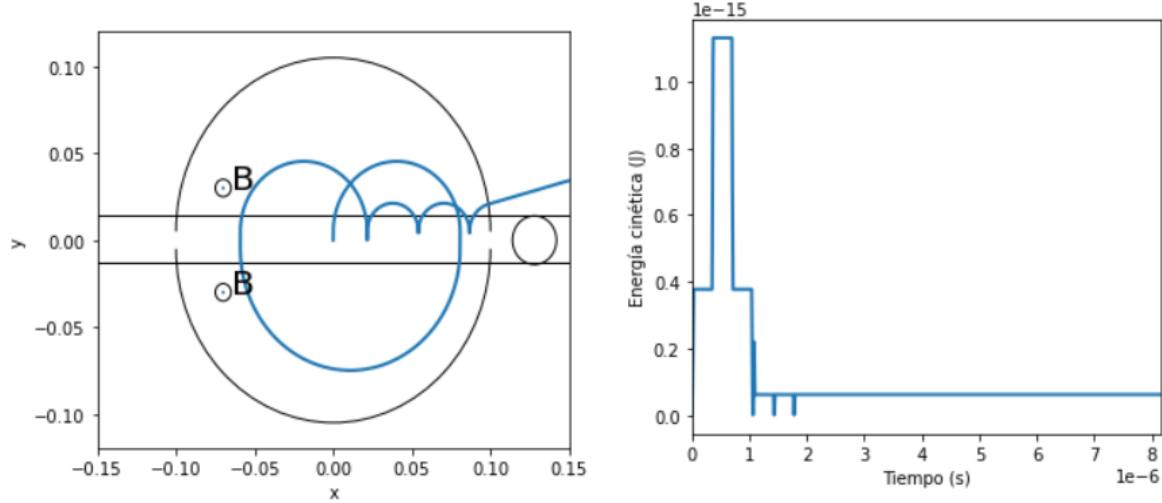
${}^3H^+$	
$B = 0,3T$, $h = 0,01m$, $R_c = 0,1m$	
t_I	$3,635 \cdot 10^{-8}s$
a	$1,513 \cdot 10^{13} m/s^2$
v	$5,501 \cdot 10^5 m/s$
R	$5,708 \cdot 10^{-2}m$
t_D	$3,259 \cdot 10^{-7}s$
f	$3,068 \cdot 10^6 Hz$
ΔE_c	$7,536 \cdot 10^{-16} J$
E_{Kmax}	$1,884 \cdot 10^{-15} J$



Observamos que, con respecto a ${}^2H^+$, al aumentar la masa han aumentado t_I según (12), R según (14) y t_D según (15); y han disminuido a según (11), v según (13), f según (15) y E_{Kmax} según (17).

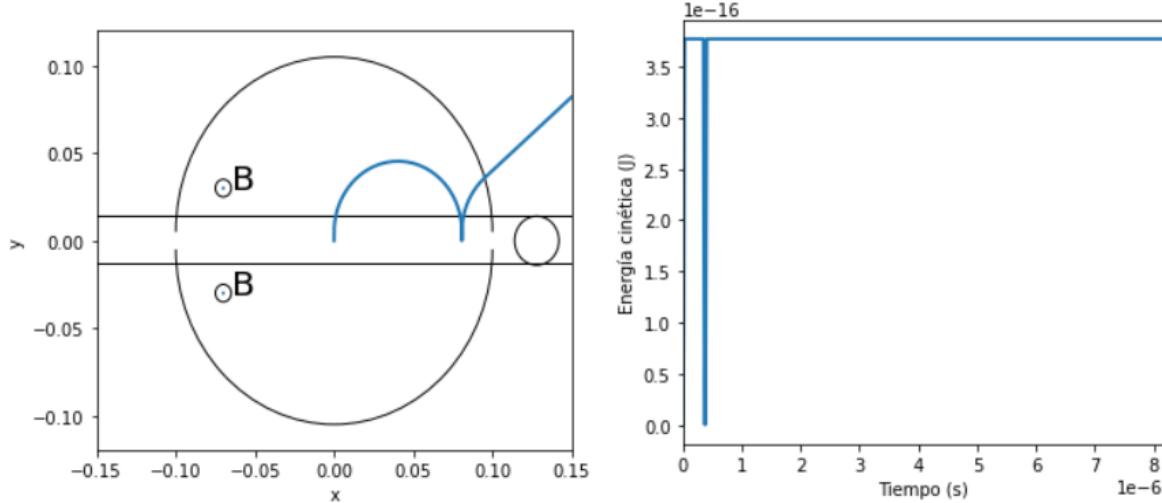
Por otra parte, en los gráficos se aprecia que la energía cinética con la que ha salido el tritio es menor que con la que ha salido el deuterio, pues también ha cruzado menos veces la región intermedia del ciclotrón.

Si ahora tomamos $\omega = 1,5 \cdot \frac{qB}{m}$, obtenemos $E_{Kmax} = 6,115 \cdot 10^{-17} J$, y los gráficos son los siguientes:



Al principio, el tritio consigue atravesar dos veces la región intermedia, pero a partir de ese momento empieza a disminuir su velocidad debido a la dirección incorrecta del campo eléctrico y no la consigue cruzar más. Finalmente sale del ciclotrón.

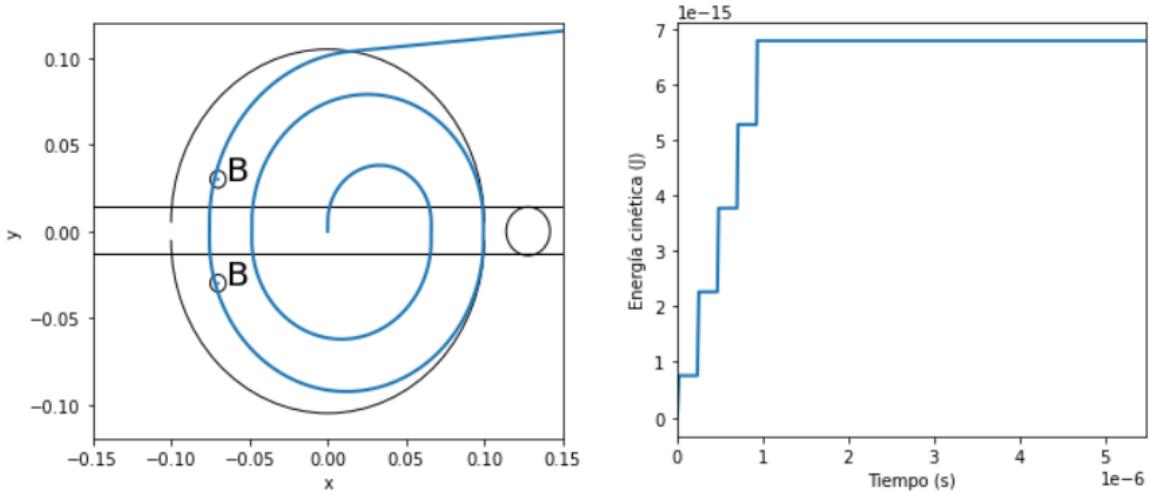
Ahora tomamos $\omega = 0,5 \cdot \frac{qB}{m}$, y obtenemos $E_{Kmax} = 3,768 \cdot 10^{-16} J$. Los gráficos obtenidos son los siguientes:



Al igual que para el caso del deuterio, el tritio no consigue cruzar la región intermedia, pues al llegar a ella retrocede y seguidamente sale del ciclotrón.

A continuación, estudiaremos el movimiento de ${}^4He^{2+}$. Si volvemos a tomar $\omega = \frac{qB}{m}$, obtenemos los siguientes resultados:

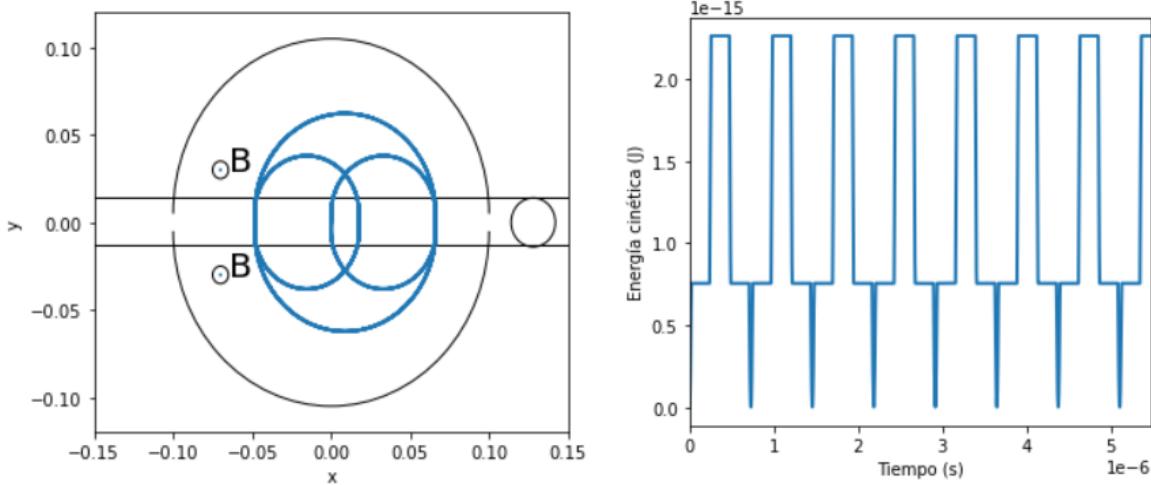
${}^4He^{2+}$	
$B = 0,3T$	$h = 0,01m$, $R_c = 0,1m$
t_I	$2,979 \cdot 10^{-8}s$
a	$2,254 \cdot 10^{13}m/s^2$
v	$6,714 \cdot 10^5m/s$
R	$4,677 \cdot 10^{-2}m$
t_D	$2,189 \cdot 10^{-7}s$
f	$4,569 \cdot 10^6Hz$
ΔE_c	$1,507 \cdot 10^{-15}J$
E_{Kmax}	$6,782 \cdot 10^{-15}J$



En este caso, la carga es el doble que en los anteriores, mientras que la masa también ha aumentado, pero en menor medida con respecto a ${}^3H^+$. Debido a esto, si lo comparamos con ${}^3H^+$, tenemos que han aumentado a según (11), v según (13), f según (15), ΔE_c según (16) y E_{Kmax} según (17), y han disminuido t_I según (12), R según (14) y t_D según (15).

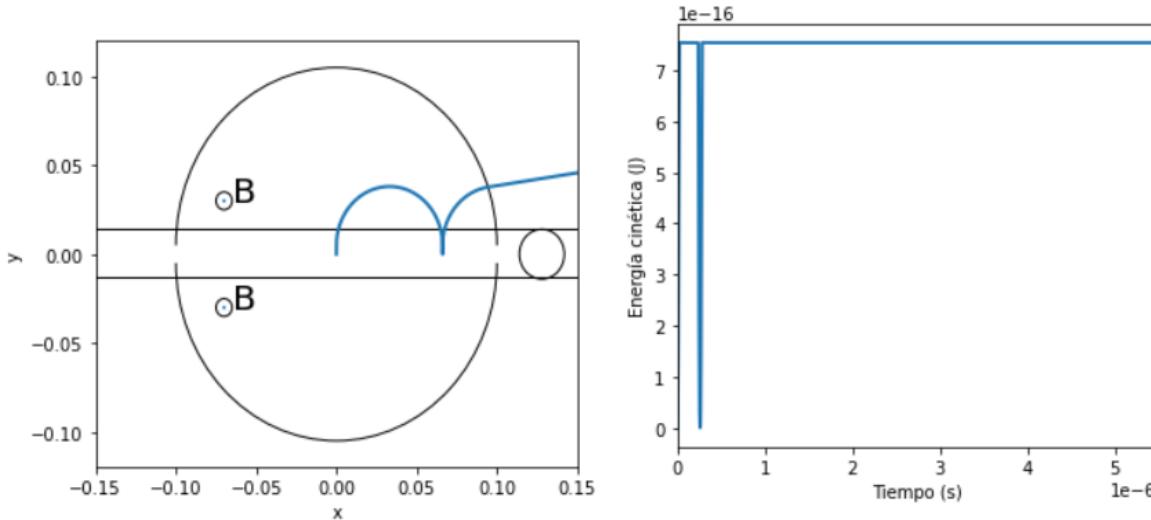
También podemos observar en la segunda gráfica que la energía cinética que alcanza la partícula α antes de salir es mucho mayor que para el tritio y para el deuterio, aunque no lo es para el protón.

Veamos qué ocurre si tomamos $\omega = 1,5 \cdot \frac{qB}{m}$. En primer lugar, tenemos que $E_{Kmax} = 2,261 \cdot 10^{-15} J$. Además, obtenemos los siguientes gráficos:



En ellos podemos apreciar que, al igual que en el caso del deuterio, la partícula α entra en un bucle infinito, de forma que nunca llega a salir del ciclotrón aunque aumentemos el tiempo de simulación.

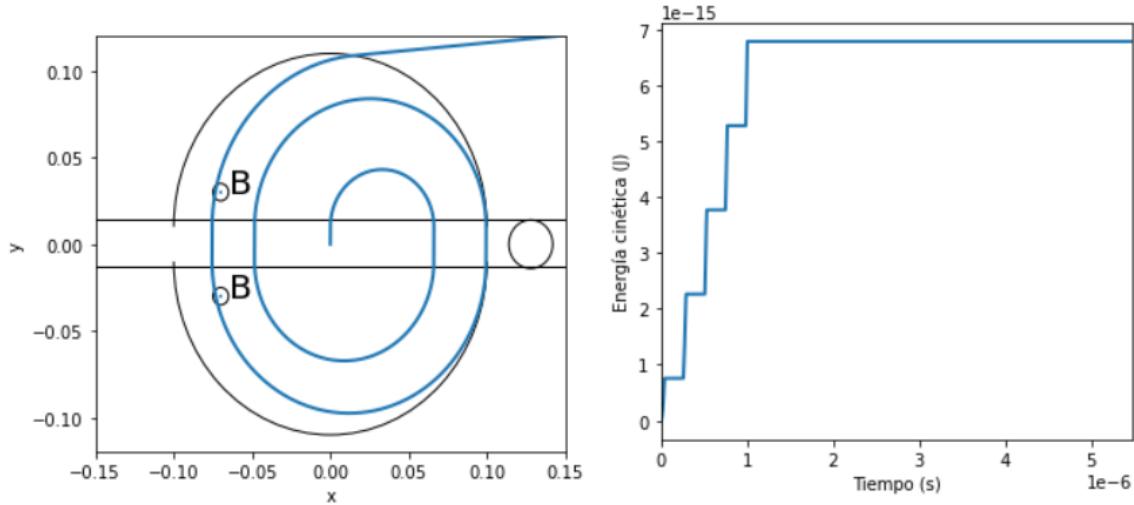
Ahora tomamos $\omega = 0,5 \cdot \frac{qB}{m}$, obteniendo $E_{Kmax} = 7,536 \cdot 10^{-16} J$. Las gráficas que se obtienen son las siguientes:



Al igual que para el deuterio y el tritio, la partícula α no cruza la región intermedia, sino que al llegar a ella retrocede y sale del ciclotrón.

Ahora vamos a analizar cómo afecta la separación entre las regiones en forma de D. Para ello, vamos a volver a considerar la partícula ${}^4He^{2+}$ con $\omega = \frac{qB}{m}$, pero tomando un valor distinto para h . Por ello, vamos a elegir $h = 0,02m$. De esta forma, la tabla y los gráficos obtenidos son:

${}^4He^{2+}$	
$B = 0,3T, h = 0,02m, R_c = 0,1m$	
t_I	$5,958 \cdot 10^{-8}s$
a	$1,127 \cdot 10^{13}m/s^2$
v	$6,714 \cdot 10^5m/s$
R	$4,677 \cdot 10^{-2}m$
t_D	$2,189 \cdot 10^{-7}s$
f	$4,569 \cdot 10^6Hz$
ΔE_c	$1,507 \cdot 10^{-15}J$
E_{Kmax}	$6,782 \cdot 10^{-15}J$



Podemos apreciar que t_I aumenta al aumentar h , tal como habíamos deducido en (12), y que a disminuye cuanto mayor es h , como ya habíamos visto en (11). Sin embargo, todos los demás parámetros permanecen constantes, pues como habíamos dicho anteriormente en (13), (14), (15), (16) y (17), estos son independientes del valor que tome h . Además, en las gráficas vemos que la ganancia de energía cinética se produce de igual forma que para $h = 0,01m$.

Para finalizar, veamos qué ocurre si los iones alcanzan velocidades relativistas. Anteriormente hemos obtenido que para velocidades no relativistas, $\omega = \frac{qB}{m}$, de manera que ω depende únicamente de la carga, el campo magnético y la masa de la partícula. Sin embargo, si consideramos velocidades relativistas, tendremos:

$$\omega = \frac{qB}{m\gamma}, \text{ donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ es el factor de Lorentz}$$

De esta forma, la frecuencia del ciclotrón para velocidades relativistas dependerá de la velocidad. Como la partícula aumenta de velocidad cada vez que cruza la región intermedia del ciclotrón, la frecuencia irá cambiando cada vez que el ion pase por esta zona. Para conseguir que el ciclotrón siga funcionando correctamente para velocidades relativistas, el campo eléctrico no deberá cambiar su dirección de manera periódica, como ocurría en el caso no relativista con el fin de que en cada paso por la región intermedia la partícula experimentara un aumento de velocidad. En su lugar, la frecuencia con la que cambie la dirección del campo eléctrico se deberá calcular teniendo en cuenta la velocidad que la partícula tiene en cada momento. Es decir, el intervalo de tiempo que pasará entre un cambio y otro de dirección deberá ir cambiando conforme vaya aumentando la velocidad del ion.