

Teoría de Redes: Fundamentos y aplicaciones en las Ciencias Climáticas

Ana Gil Molina

Trabajo Fin de Grado en Matemáticas

Universidad de Alicante, 2023-2024

Introducción

Este trabajo explora los fundamentos matemáticos de la Teoría de Redes y su aplicación en la ciencia del clima. Se aborda la historia de la Teoría de Redes, definiciones básicas y métricas clave para caracterizar las estructuras de red. Se examinan modelos de redes aleatorias como Erdős-Rényi, Barabási-Albert y Watts-Strogatz, incluyendo su implementación en Python. También se introducen los mundos pequeños y los coeficientes de agrupamiento de redes. Finalmente, se aplica la teoría para analizar datos de temperatura global, demostrando su utilidad en la identificación de patrones y teleconexiones climáticas.

Conceptos generales de Teoría de Grafos

Definición

Un **grafo**, G , es un par (V, E) , tal que V es un conjunto cuyos elementos son los **nodos** o **vértices** de G , y E es un conjunto de **arcos** o **enlaces** entre los elementos de V [2].

En un **grafo estático**, las propiedades se mantienen en el tiempo, mientras que en un **grafo dinámico** o **red**, ciertas propiedades como el número de nodos y arcos varían con el tiempo [3].

- G es una **red no dirigida** si E es simétrico.
- G es una **red simple** si E es simétrico y antirreflexivo y no contiene arcos duplicados.
- G es un **multigrafo** si E contiene arcos duplicados, es decir, más de un arco relacionando los mismos nodos.
- G es una **red dirigida** o **digrafo** si E es asimétrico [2].

Definición

Sea $e = (v_1, v_2)$ un arco de G . Se dice que v_1 es **incidente** a e , v_2 es **incidente desde** e y v_1 es **adyacente** a v_2 . Además, se denomina **cola** a v_1 y **cabeza** a v_2 . Si G es no dirigido, v_1 adyacente a $v_2 \implies v_2$ adyacente a v_1 .

Definición

El **grado de salida** de un nodo $v \in V$, $\text{out_d}(v)$, es el número de arcos a los que es incidente, y su **grado de entrada**, $\text{in_d}(v)$, es el número de arcos desde los que es incidente. En redes no dirigidas, ambos coinciden y se les llama **grado** del nodo, denotado $d(v)$ [2]. Se llama **hub** al nodo (o nodos) con mayor grado [3]. Un nodo con grado 0 se llama **nodo aislado**, y uno con grado 1 se llama **nodo final**.

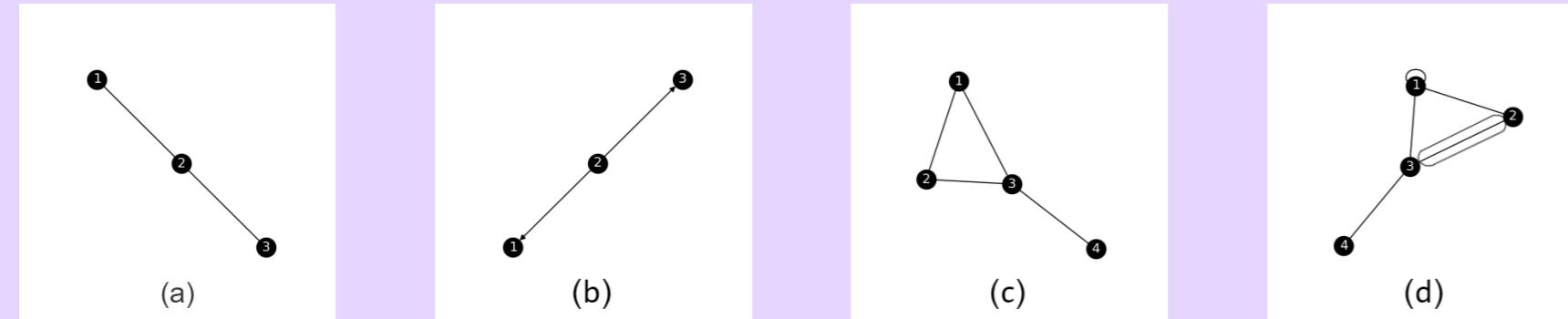


Figura 1: (a) Red no dirigida, (b) red dirigida con dos caminos de longitud 1, (c) red simple con un triángulo y (d) multigrafo.

Caminos y circuitos

Definición

Un **camino** es una secuencia de arcos (no necesariamente distintos):

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_p, v_p)$$

tal que $v_i = u_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, p - 1$). Si $v_p = u_1$ el camino es **cerrado**.

Un **recorrido** es un camino en el que todos los arcos son distintos. Un **camino simple** es un recorrido en el que todos los u_i son distintos. Un camino simple cerrado se llama **ciclo** o **círculo**. Un grafo sin ciclos se llama **acíclico** [2]. Un ciclo de longitud 1 se llama **bucle**, y uno de longitud 3 se llama **triángulo** [3].

La **longitud** de un camino/recorrido/camino simple viene dada por p , y se mide en **saltos** (número de arcos a lo largo del camino) [2].

Definición

El **camino más corto**, también llamado **camino directo** entre dos nodos u y v , es usado como el camino conectando ambos nodos. Su longitud se llama **distancia** entre u y v . La **longitud promedio de camino** de un grafo G es igual a la media de las longitudes de todos los caminos directos [3].

Representación matricial de redes

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Para $1 \leq i, j \leq n$, sea:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E \\ 0, & (i, j) \notin E \end{cases} \quad (1)$$

Entonces la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es la **matriz de adyacencia** de G [2].

Métricas: Medidas de centralidad

Centralidad de grado

Si G es una red simple, el grado de i se puede obtener como:

$$k_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = (e^T A)_i = (Ae)_i \quad (2)$$

Con la centralidad de grado, se dice que el nodo i es más **central** que el nodo j si $k_i > k_j$.

Centralidad de cercanía

La cercanía del nodo i en una red no dirigida G se define como:

$$CC(i) = \frac{n - 1}{s(i)} \quad (3)$$

donde la suma de distancias $s(i)$ se calcula a partir de las distancias de camino más corto $d(i, j)$ como [2]:

$$s(i) = \sum_{j \in V(G)} d(i, j) \quad (4)$$

Redes aleatorias

El modelo de Erdős-Rényi

Según este modelo, llevado a cabo por Pál Erdős y Alfréd Rényi en 1959, para construir una red aleatoria $G_{ER}(n, p)$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se empieza con n nodos aislados, y se fija un $p > 0$.
2. Se selecciona un par de nodos y se genera uniformemente un número aleatorio $r \in [0, 1]$. Si $p > r$ se conecta el par de nodos seleccionado con un arco, y en otro caso se dejan desconectados.
3. Se repite el paso 2) para cada uno de los $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de nodos.

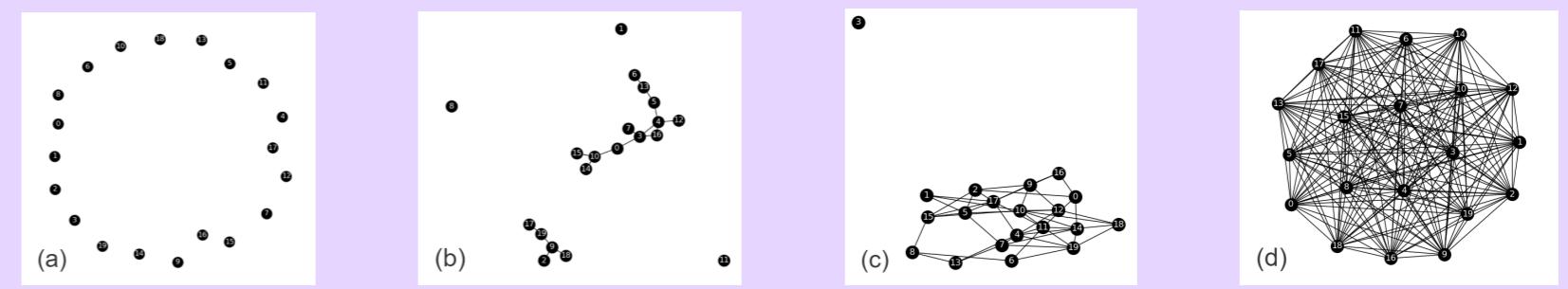


Figura 2: Redes aleatorias de Erdős-Rényi generadas en Python con $n = 20$ nodos y probabilidades de enlace (a) $p = 0$, (b) $p = 0,106$, (c) $p = 0,265$, (d) $p = 1$.

El modelo de Watts-Strogatz

El modelo de Watts-Strogatz se resume de la siguiente manera:

1. Se comienza con un anillo con n nodos, donde cada nodo está conectado a k vecinos inmediatos y siguientes.
2. Se recreenan algunos arcos: cada uno de los arcos originales tiene una probabilidad p de que uno de sus extremos se mueva a un nuevo nodo elegido al azar. Para valores pequeños de p , la red mantiene un alto agrupamiento, aunque los enlaces aleatorios pueden disminuir drásticamente las distancias entre los nodos.
3. Para $p = 1$ todos los arcos se han reconectado, de forma que la red se vuelve una red aleatoria, es decir, nos acercamos al modelo ER [1].

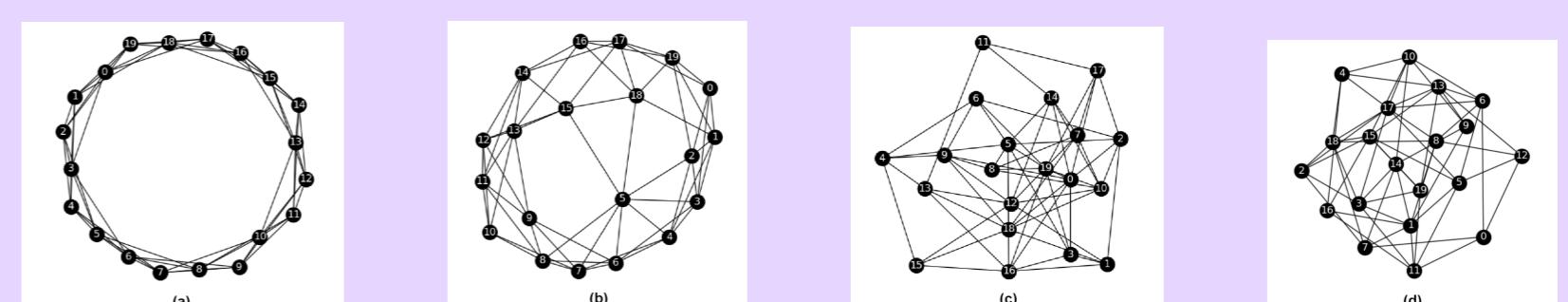


Figura 3: Redes aleatorias de Watts-Strogatz generadas en Python con $n = 20$ nodos, $k = 6$, con probabilidades de reconexión (a) $p = 0$, (b) $p = 0,1$, (c) $p = 0,5$, (d) $p = 0,95$.

Aplicación de la Teoría de Redes al clima

Aplicación de la Teoría de Redes a unos datos de temperatura del aire a 2 metros sobre el nivel del mar (t2m), provenientes de la simulación climática de alta resolución ERA 5, un reanálisis global con una resolución espacial de $0.25^\circ \times 0.25^\circ$.

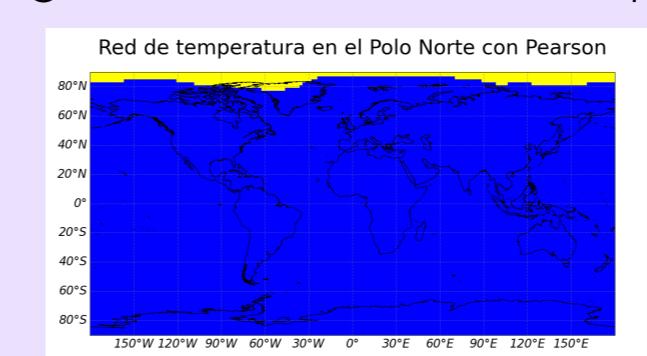


Figura 4: Mapa de la red (a la izquierda), y red (a la derecha) de temperatura en el Polo Norte, con latitud 90° y longitud 0° , usando el coeficiente de correlación de Pearson.

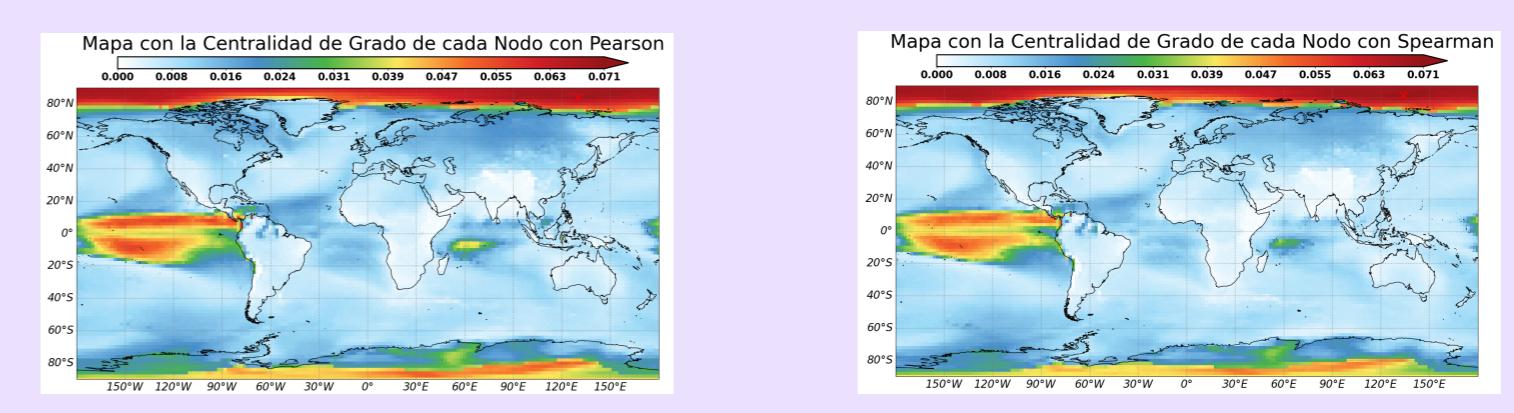


Figura 5: Mapa con la centralidad de grado de cada nodo, marcando con una cruz roja el nodo más central de la red, usando el coeficiente de correlación de Pearson (a la izquierda) y de Spearman (a la derecha).

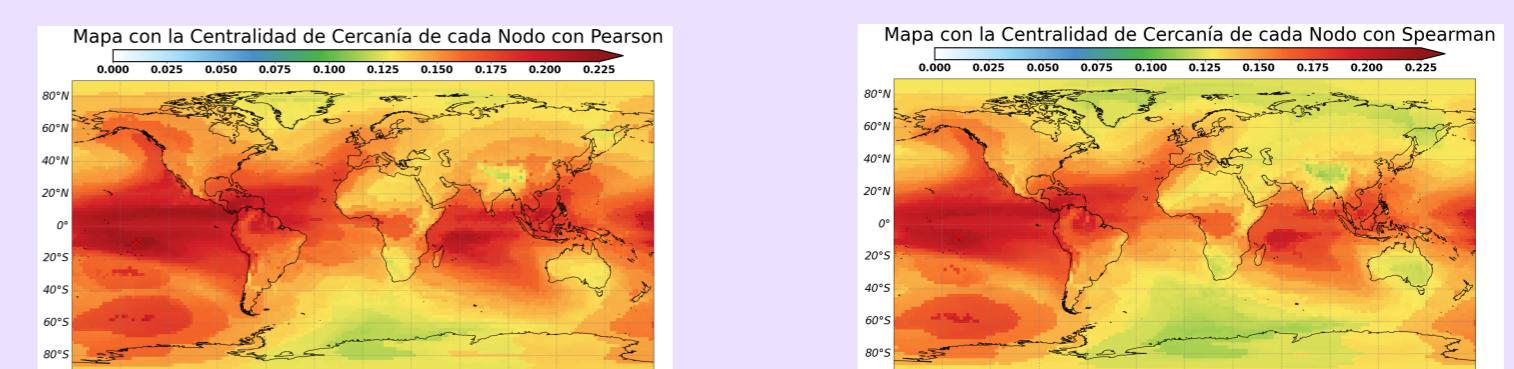


Figura 6: Mapa con la centralidad de cercanía de cada nodo, marcando con una cruz roja el nodo más central de la red, usando el coeficiente de correlación de Pearson (a la izquierda) y de Spearman (a la derecha).

Referencias principales

- [1] Barabási, A.-L. (2016). *Network Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] Estrada, E. and Knight, P. (2015). *A First Course in Network Theory*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- [3] Lewis, T. G. (2009). *Network Science: Theory and Applications*. John Wiley Sons, Hoboken, New Jersey.