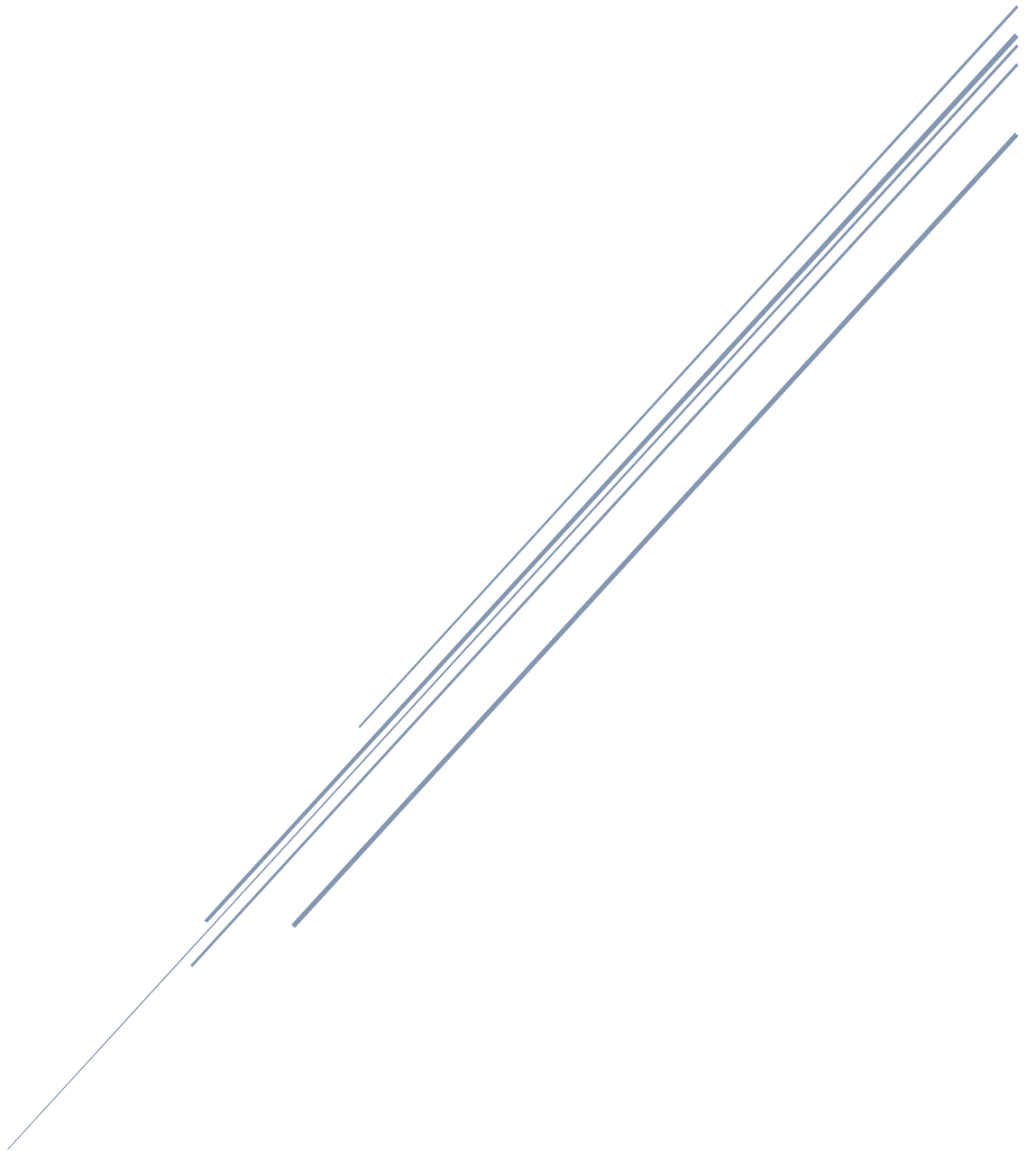


ESTUDIO DE SISTEMAS DINÁMICOS

Ana Gil Molina



Universidad de Alicante.
Práctica I. Física I. 1º Matemáticas.

ÍNDICE:

- INTRODUCCIÓN Pág. 3
- PROBLEMAS:
 - Problema 1 Pág. 4
 - Oscilador armónico simple Pág. 6
 - Oscilador armónico amortiguado Pág. 8
 - Oscilador armónico forzado Pág. 10
 - Oscilador armónico amortiguado y forzado Pág. 11
 - Problema 2 Pág. 12
 - Problema 3 Pág. 17
 - Problema 4 Pág. 21
 - Problema 5 Pág. 26

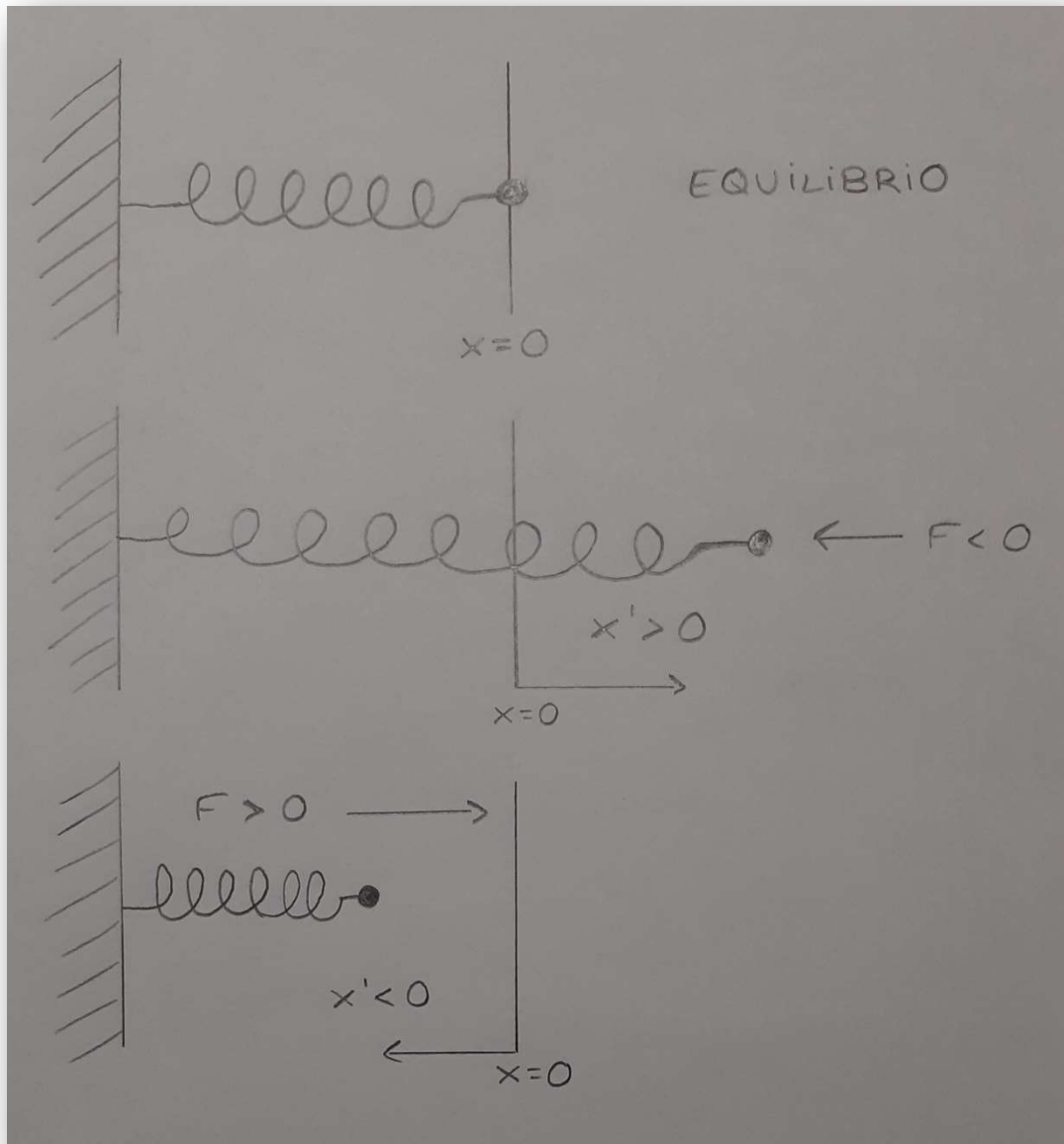
INTRODUCCIÓN:

En esta práctica estudiaremos el movimiento en diferentes sistemas dinámicos. Para ello, a partir de las ecuaciones de movimiento obtenidas en clase, generaremos unas funciones en el programa Octave capaces de resolver estos sistemas de ecuaciones diferenciales, y representaremos los resultados gráficamente.

En primer lugar, plantearemos el problema físico mediante un dibujo básico del sistema y propondremos las ecuaciones de movimiento. A continuación, añadiremos el script de Octave, en el cual aparecerá la función que dará las derivadas de las ecuaciones.

Para finalizar, probaremos diferentes valores de inicio en cada una de las funciones, a partir de las cuales obtendremos diferentes gráficos. Analizaremos estos gráficos y los compararemos, de manera que podremos observar la influencia de cada uno de los valores iniciales considerados. Gracias a este análisis deduciremos unas conclusiones para cada sistema estudiado.

PROBLEMA 1: Oscilador armónico (1D)



Ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(-kx - bv + F_0 \cos(\Omega t))$$

Script:

```
function upunto = oscilador(u,t)
    global m k b Fo omega1;
    upunto(1) = u(2);
    upunto(2) = 1/m*(-k*u(1) - b*u(2) + Fo * cos(omega1*t));
endfunction
```

```
%Programa principal.
global m k b Fo omega1;
m = 1
k = 1
b = 0.5
Fo = 1
omega0 = sqrt(k/m)
omega1 = 2*omega0
```

```
% Condiciones iniciales.
u0 = [10,0];
```

```
% Vector tiempo.
t = linspace(0, 50, 2000);
```

```
% Llamada al integrador de ecuaciones.
u = lsode("oscilador", u0, t);
```

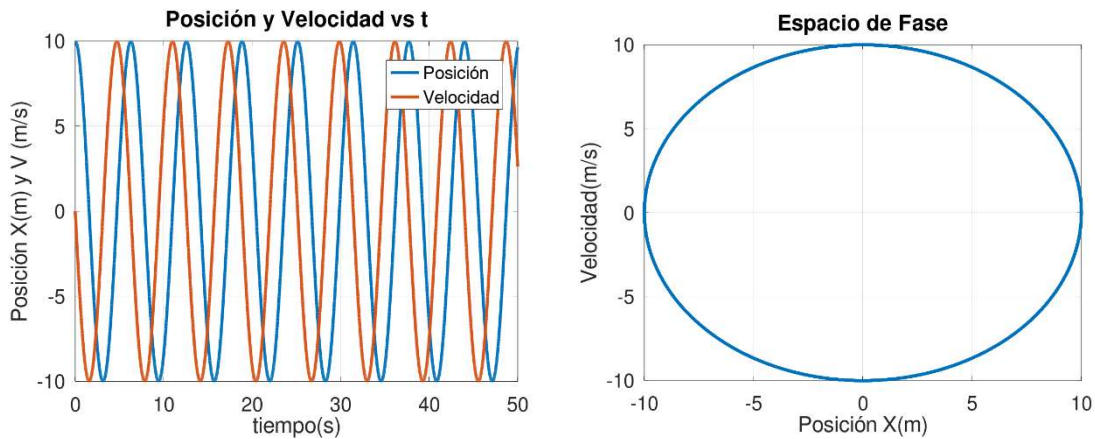
```
% Representación gráfica.
figure(1, "position", [0,0,600,400])
plot(t, u(:,1), 'linewidth', 3)
title('Posición vs t', 'fontsize', 24);
xlabel('tiempo(s)', 'fontsize', 24);
ylabel('Posición X(m)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
```

```
figure(2, "position", [0,0,600,400])
plot(t, u, 'linewidth', 3)
title('Posición y Velocidad vs t', 'fontsize', 24);
xlabel('tiempo(s)', 'fontsize', 24);
ylabel('Posición X(m) y V (m/s)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
legend('Posición', 'Velocidad');
```

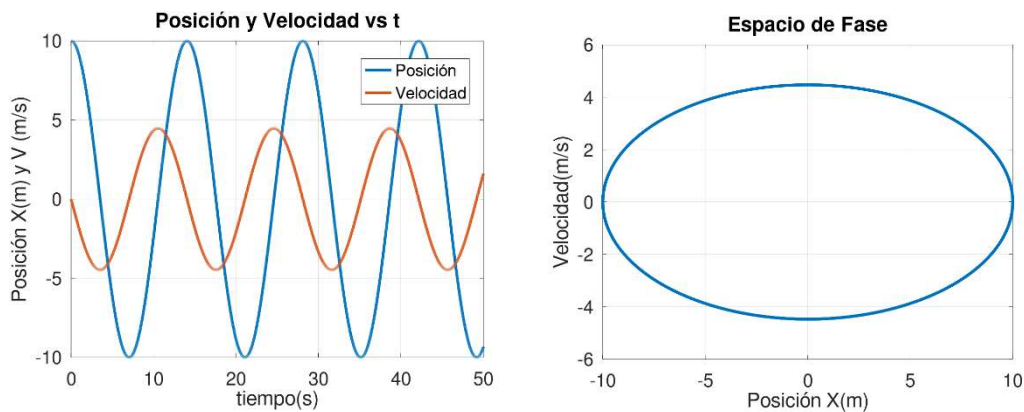
```
figure(3, "position", [0,0,600,400])
plot(u(:,1), u(:,2), 'linewidth', 3)
title('Espacio de Fase', 'fontsize', 24);
xlabel('Posición X(m)', 'fontsize', 24);
ylabel('Velocidad(m/s)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
```

Oscilador armónico simple:

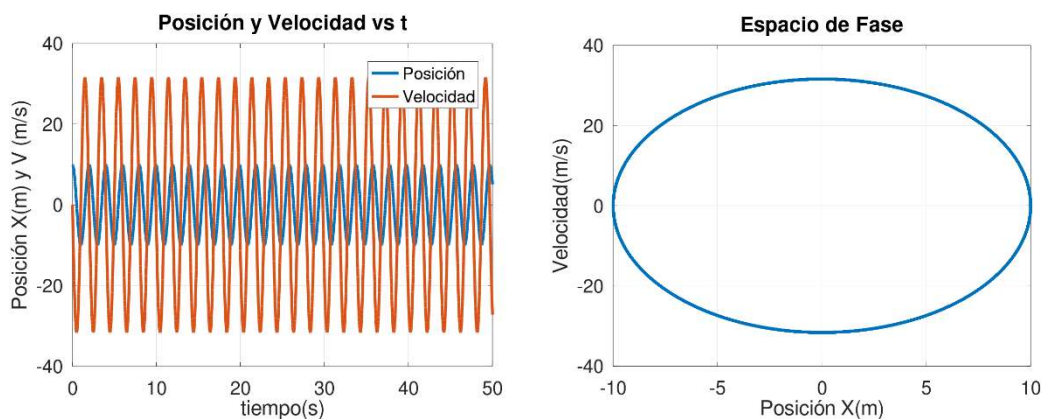
Tomamos $b=0$ y $F_0=0$, pues en este caso no hay rozamiento ni tampoco actúa una fuerza adicional. Damos distintos valores a k y a m para ver el efecto sobre los gráficos. Para $k=1\text{N/m}$ y $m=1\text{kg}$ obtendríamos:



En la primera gráfica observamos que el período de oscilación T es de aproximadamente 6 segundos. A continuación, aumentamos el valor de m y vemos el cambio en el período de oscilación. Para $k=1\text{N/m}$ y $m=5\text{kg}$ tendríamos:



Observamos que el período de oscilación T ha aumentado, pues ahora es de unos 14 segundos. De la misma manera, si disminuimos la masa, por ejemplo, tomamos $k=1\text{N/m}$ y $m=0.1\text{kg}$, vemos que el período de oscilación disminuye ($T=2\text{s}$):



Por lo tanto, vemos que en la relación k/m , cuanto mayor sea el numerador con respecto al denominador, menor es el período de oscilación. Calculemos la frecuencia de oscilación de los gráficos y veamos que, al ser un oscilador armónico simple, se corresponde con la frecuencia de oscilación natural. Para ello veamos que se cumple lo siguiente:

$$\omega = \omega_0$$

Para $k=1\text{N/m}$ y $m=1\text{kg}$ teníamos $T=6\text{s}$, por lo que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1\text{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = 1\text{Hz}$$

Para $k=1\text{N/m}$ y $m=5\text{kg}$ teníamos $T=14\text{s}$, de manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.447\text{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{14} = 0.447\text{Hz}$$

Por último, para $k=1\text{N/m}$ y $m=0.1\text{kg}$ obtuvimos $T=2\text{s}$, por lo tanto:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{0.1}} = 3.14\text{Hz}$$

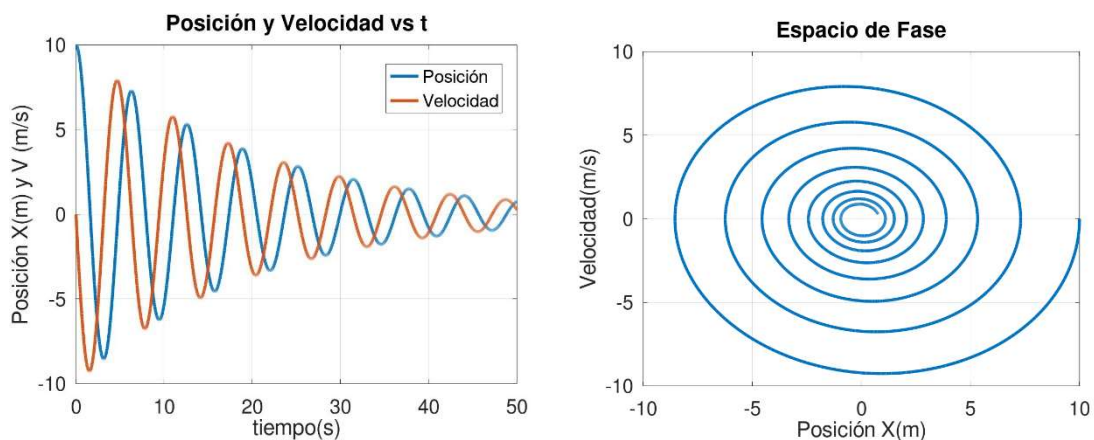
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = 3.14\text{Hz}$$

De esta manera hemos comprobado que en los tres casos considerados se cumple que la frecuencia de oscilación obtenida a partir de los gráficos es igual a la frecuencia natural teórica. Esto se debe a que en un oscilador armónico simple no hay amortiguamiento, de manera que esta frecuencia es una constante.

Oscilador armónico amortiguado:

En este oscilador habrá una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, por lo que en este caso daremos valores a b . En un oscilador armónico amortiguado se podrán dar tres tipos de amortiguamiento: amortiguamiento débil, amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento. Probaremos los tres casos y veremos en cuáles oscila y en cuáles no.

Empezamos por el amortiguamiento débil. Para que se dé este caso deberá cumplirse que $b^2 - 4km < 0$. Probemos valores para los que esto se cumpla. Por ejemplo, para $b=0.1$, $k=1\text{N/m}$ y $m=1\text{kg}$ tendríamos $b^2 - 4km = 0.1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3.99 < 0$. Con estos valores obtendríamos los siguientes gráficos:



En el primer gráfico podemos observar que para el amortiguamiento débil hay oscilación. Además, vemos que la frecuencia de oscilación va disminuyendo con respecto a la natural. Sabemos que la frecuencia natural es:

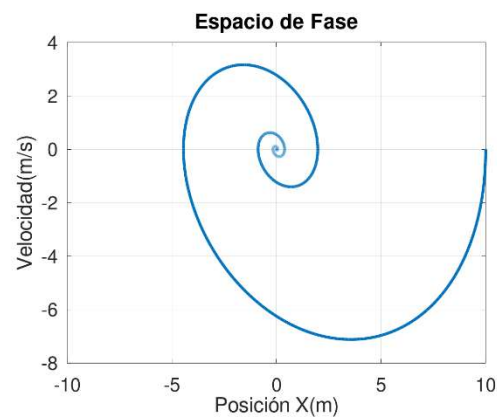
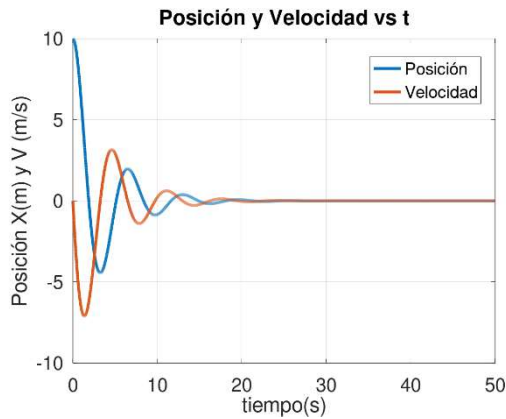
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1\text{Hz}$$

Sin embargo, en la primera gráfica observamos que, con el tiempo, el período de oscilación va aumentando, por lo que según:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

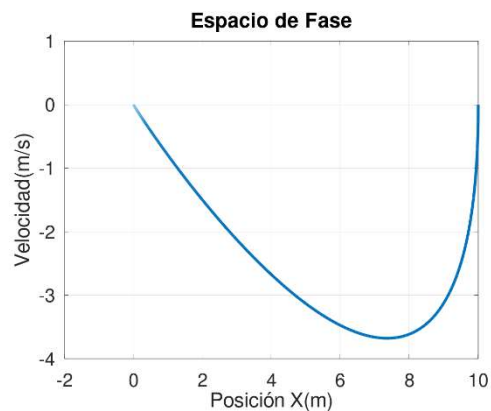
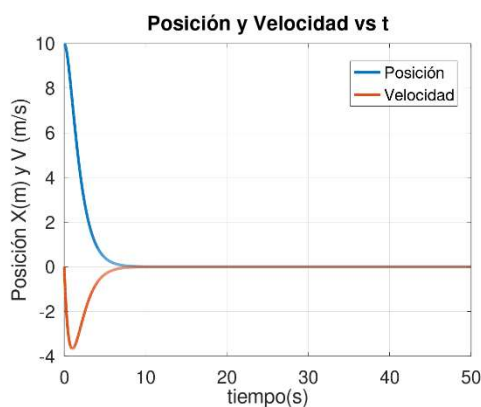
Al ir aumentando T , la frecuencia de oscilación va disminuyendo.

Veamos qué ocurre al aumentar el valor de b . Por ejemplo, tomemos $b=0.5$, $k=1\text{N/m}$ y $m=1\text{kg}$. Tenemos $b^2 - 4km = 0.5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3.75 < 0$, por lo que seguimos estando en el caso de amortiguamiento débil. Sin embargo, obtenemos los siguientes gráficos:



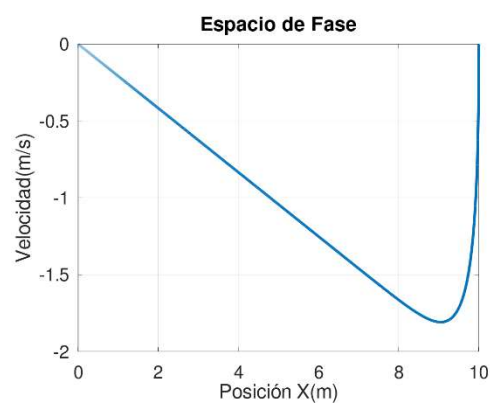
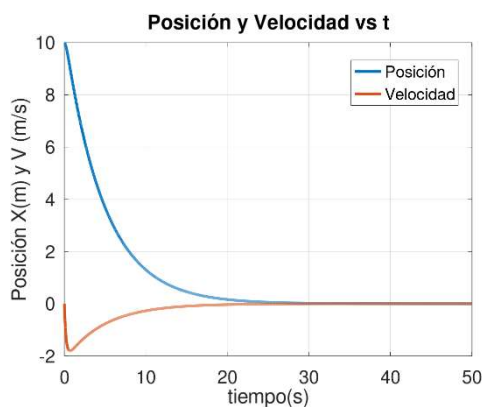
Claramente podemos observar en la primera gráfica que, aumentando el valor de b , al haber un mayor rozamiento, obtenemos un amortiguamiento más rápido.

Ahora consideremos el caso de amortiguamiento crítico, el cual se dará si se cumple que $b^2 - 4km = 0$. En este caso podríamos tomar $b=1$, $k=0.5\text{N/m}$ y $m=0.5\text{kg}$, pues $b^2 - 4km = 1^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0$. Veamos los gráficos obtenidos:



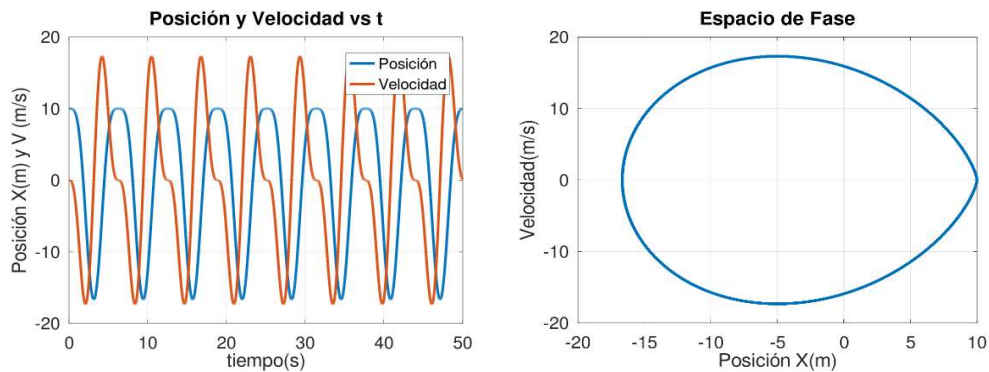
En este caso observamos que el sistema se encuentra en el límite entre un sistema oscilante y uno no oscilante.

Por último, quedaría estudiar el caso de sobreamortiguamiento, que se dará cuando $b^2 - 4km > 0$. Tomemos los valores $b=0.5$, $k=0.1\text{N/m}$ y $m=0.1\text{kg}$. Con estos valores habría sobreamortiguamiento, pues $b^2 - 4km = 0.5^2 - 4 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.21 > 0$. En los siguientes gráficos observamos que no hay oscilación:

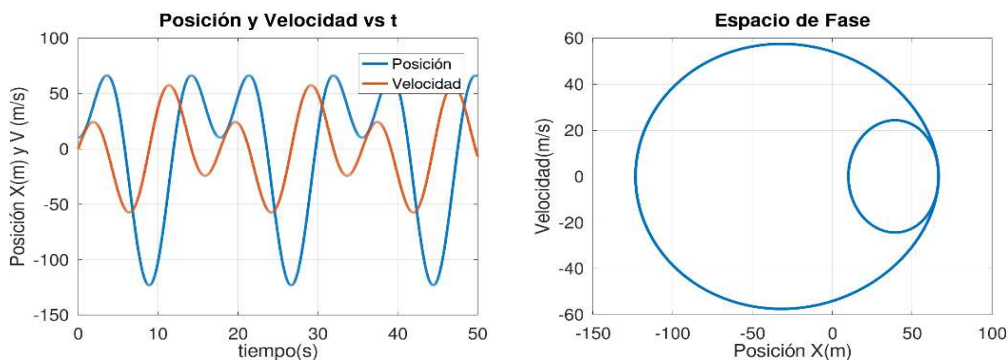


Oscilador armónico forzado:

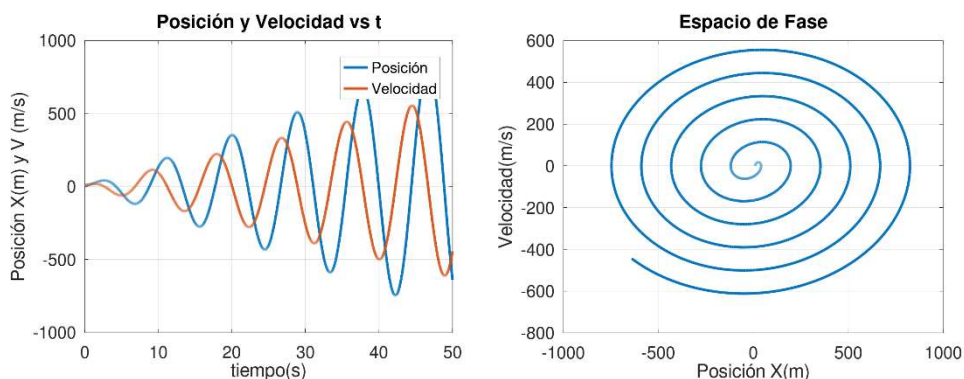
En un oscilador armónico forzado se aplica una fuerza adicional, por lo que deberemos dar valores a F_0 . Además, deberemos dar distintos valores a ω_1 hasta encontrar la frecuencia para la cual la amplitud aumenta considerablemente, es decir, la frecuencia de resonancia. Empecemos tomando $k=1\text{N/m}$, $m=1\text{kg}$, $F_0=10\text{N}$ y $\omega_1=2*\omega_0$. De esta manera obtenemos unas gráficas en las que la amplitud no va aumentando, por lo que la frecuencia de resonancia no es el doble de la frecuencia natural:



Veamos qué ocurre si tomamos $k=1\text{N/m}$, $m=2\text{kg}$, $F_0=50\text{N}$ y $\omega_1=\omega_0/2$. En esta ocasión la amplitud tampoco va en aumento, por lo que la frecuencia de resonancia no es la mitad de la frecuencia natural:

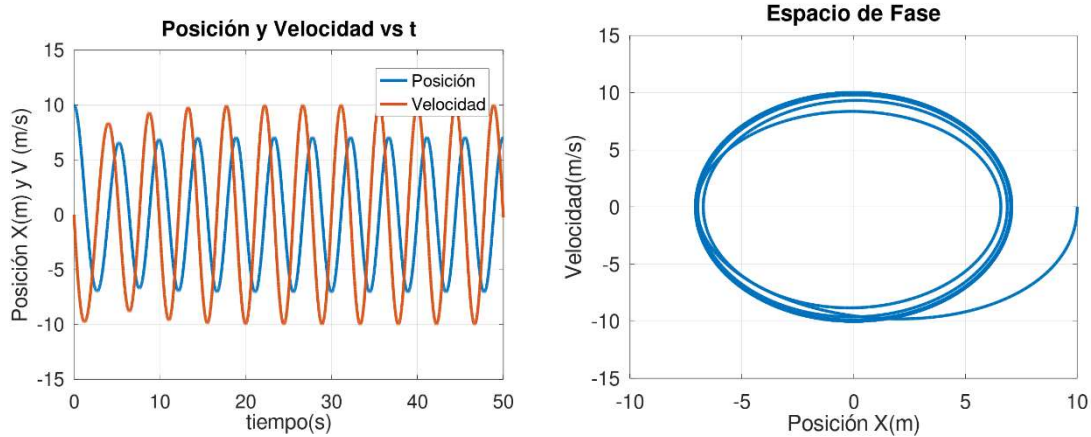


Sin embargo, si tomamos $\omega_1=\omega_0$, vemos que la amplitud aumenta significativamente con el tiempo. Por lo tanto, en un oscilador armónico forzado sin rozamiento la frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia natural del sistema.



Oscilador armónico amortiguado y forzado:

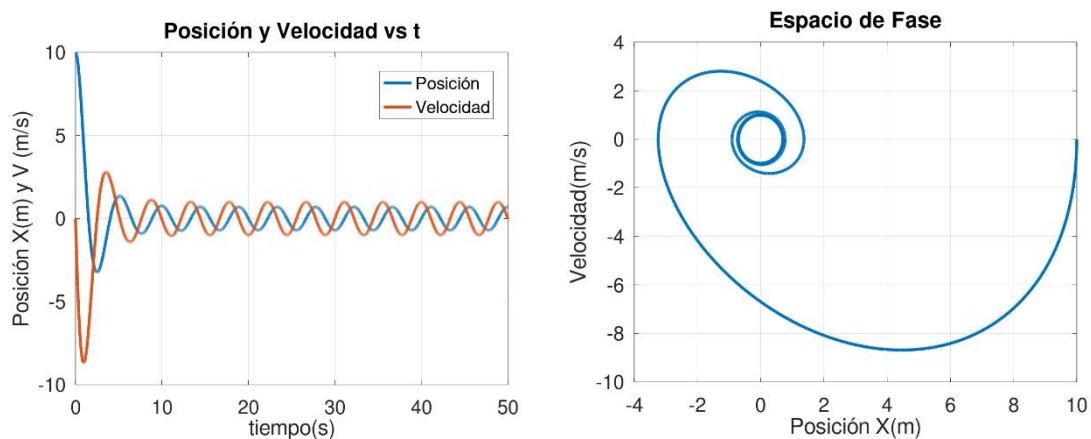
En este último caso, tendremos que considerar que se ejerce una fuerza adicional y además que existe un rozamiento proporcional a la velocidad. En primer lugar, probaremos para $k=2\text{N/m}$, $m=1\text{kg}$, $b=0.5$, $F_0=5\text{N}$ y $\omega_1=\omega_0$. Obtendremos las siguientes gráficas:



En la primera gráfica podemos observar que la amplitud se estabiliza en $A=7.07\text{m}$. Esto coincide con el siguiente valor de A :

$$A = \frac{F_0}{b\omega_{res}} = \frac{5}{0.5 \cdot \sqrt{2}} = 7.07\text{m}$$

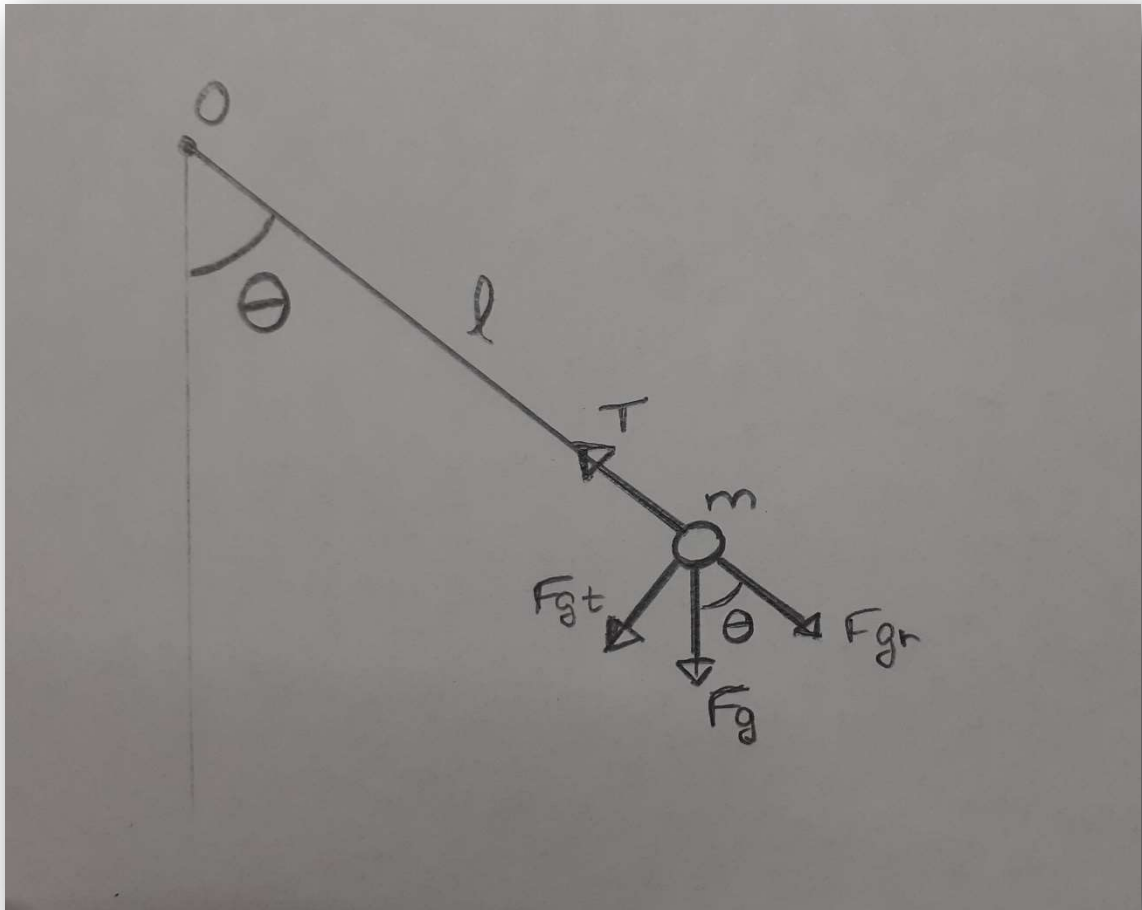
Probemos con otros valores, por ejemplo, $k=2\text{N/m}$, $m=1\text{kg}$, $b=1$, $F_0=1\text{N}$ y $\omega_1=\omega_0$. En esta ocasión obtenemos las siguientes gráficas, en las que la amplitud se estabiliza en $A=0.7\text{m}$:



De nuevo, vemos que este valor coincide con:

$$A = \frac{F_0}{b\omega_{res}} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = 0.7\text{m}$$

PROBLEMA 2: Péndulo simple en un sistema bidimensional (2D)



Ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Script:

```
function upunto = pendulo(u,t)
    global l g;
    upunto(1) = u(3);
    upunto(2) = u(4);
    upunto(3) = 0;
    upunto(4) = -g/l*sin(u(2));
endfunction

% Programa principal.
global l g;
l = 1
g = 9.8
theta0 = 15*pi/180;

% Condiciones iniciales.
u0 = [l;theta0;0;0]

% Vector tiempo.
t = linspace(0, 10, 1000);

% Llamada al integrador de ecuaciones.
u = lsode("pendulo", u0, t);

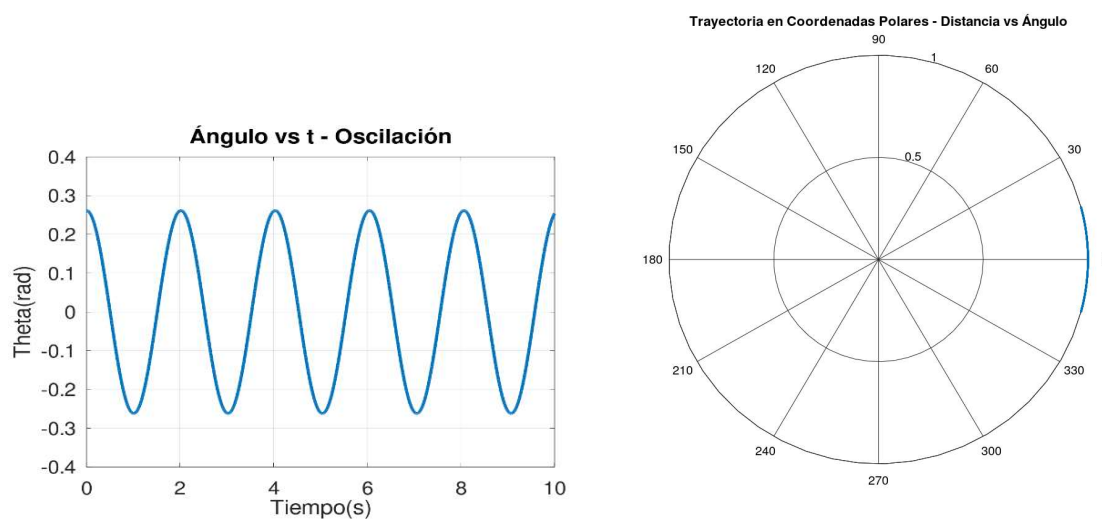
% Representación gráfica.
figure(1, 'position', [300,300,800,600]);
f_polar = polar(u(:,2), u(:,1));
set(f_polar, 'linewidth', 3);
title('Trayectoria en Coordenadas Polares - Distancia vs Ángulo', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;

figure(2, "position", [300,300,800,600]);
plot(t, u(:,2), 'linewidth', 3);
title('Ángulo vs t - Oscilación', 'fontsize', 24);
xlabel('Tiempo(s)', 'fontsize', 24);
ylabel('Theta(rad)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
```

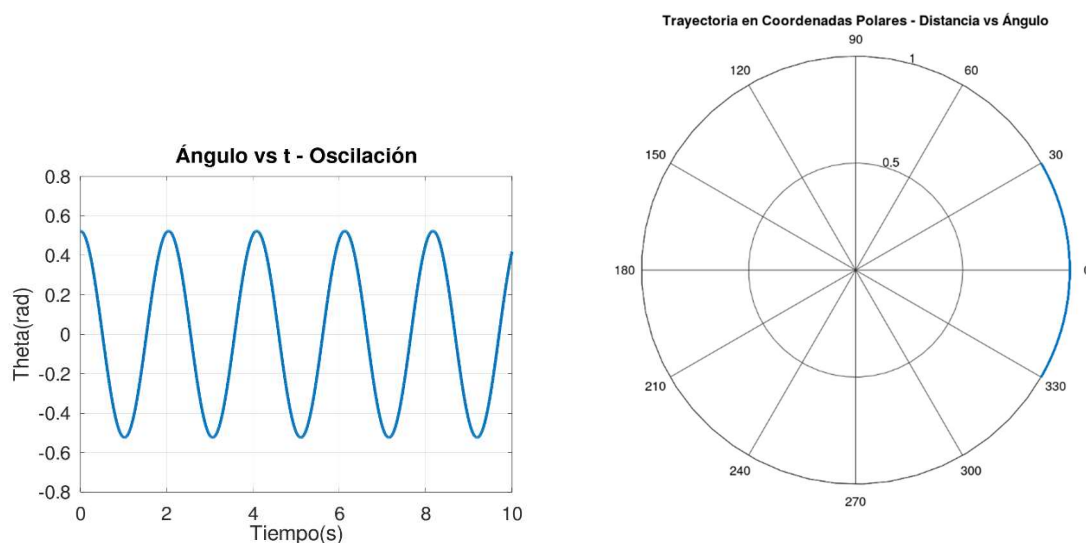
Péndulo simple:

En este ejercicio veremos que el período del péndulo depende de la amplitud de las oscilaciones, es decir, del ángulo inicial. Para ello, tomaremos diferentes valores del ángulo entre 15° y 75° , y veremos cuál es el período del péndulo en cada ocasión. Además, observaremos los gráficos de la trayectoria en coordenadas polares, en los que podremos ver la distancia recorrida en función del ángulo tomado.

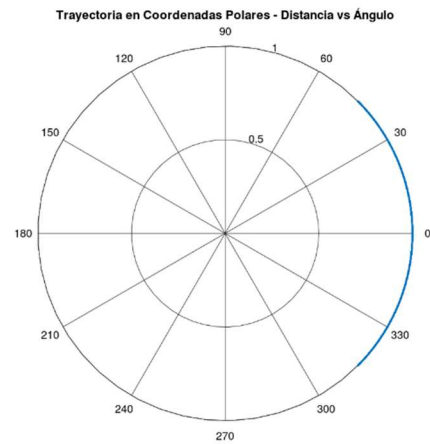
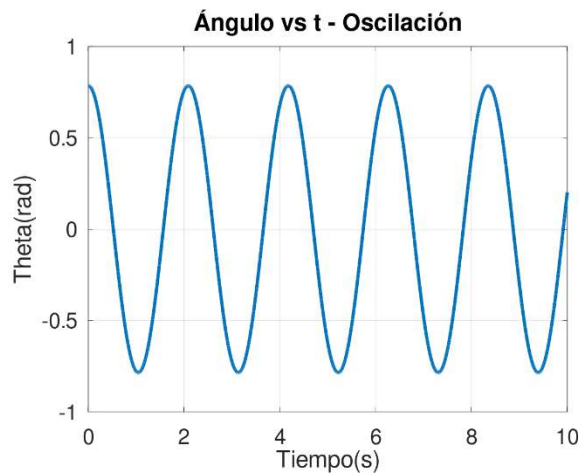
Empecemos tomando un ángulo de 15° . Observamos que obtenemos un período $T=2\text{s}$.



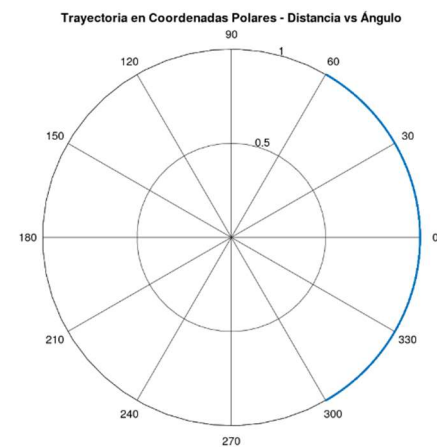
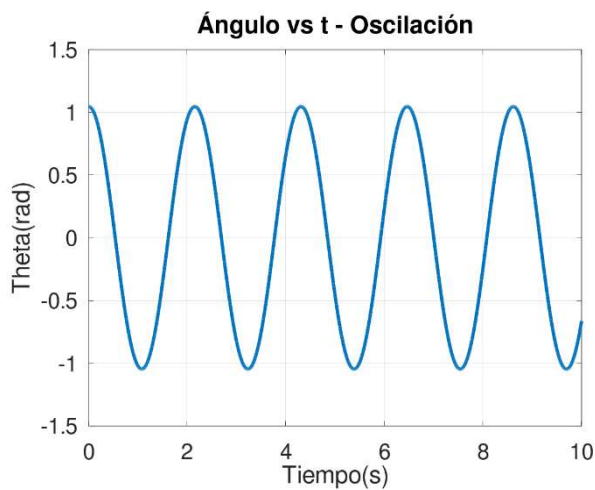
Veamos qué ocurre para un ángulo de 30° . En esta ocasión obtenemos un período $T=2.05\text{s}$. Además, vemos que la trayectoria en polares, al aumentar el ángulo, ha aumentado. Esto seguirá ocurriendo en todos los demás casos que consideremos.



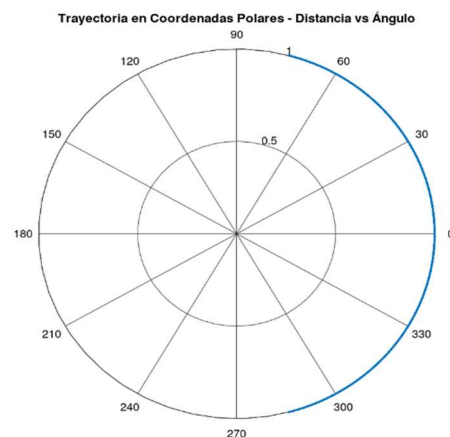
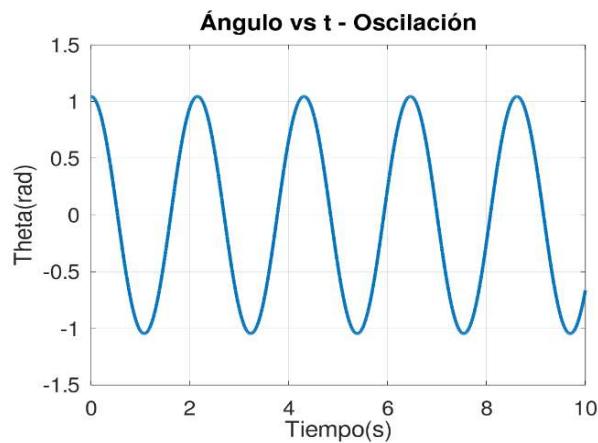
En esta ocasión tomaremos un ángulo inicial de 45° . De esta forma, observamos en el primer gráfico que el período del péndulo es $T=2.1s$. Además, la trayectoria en polares ha seguido aumentando.



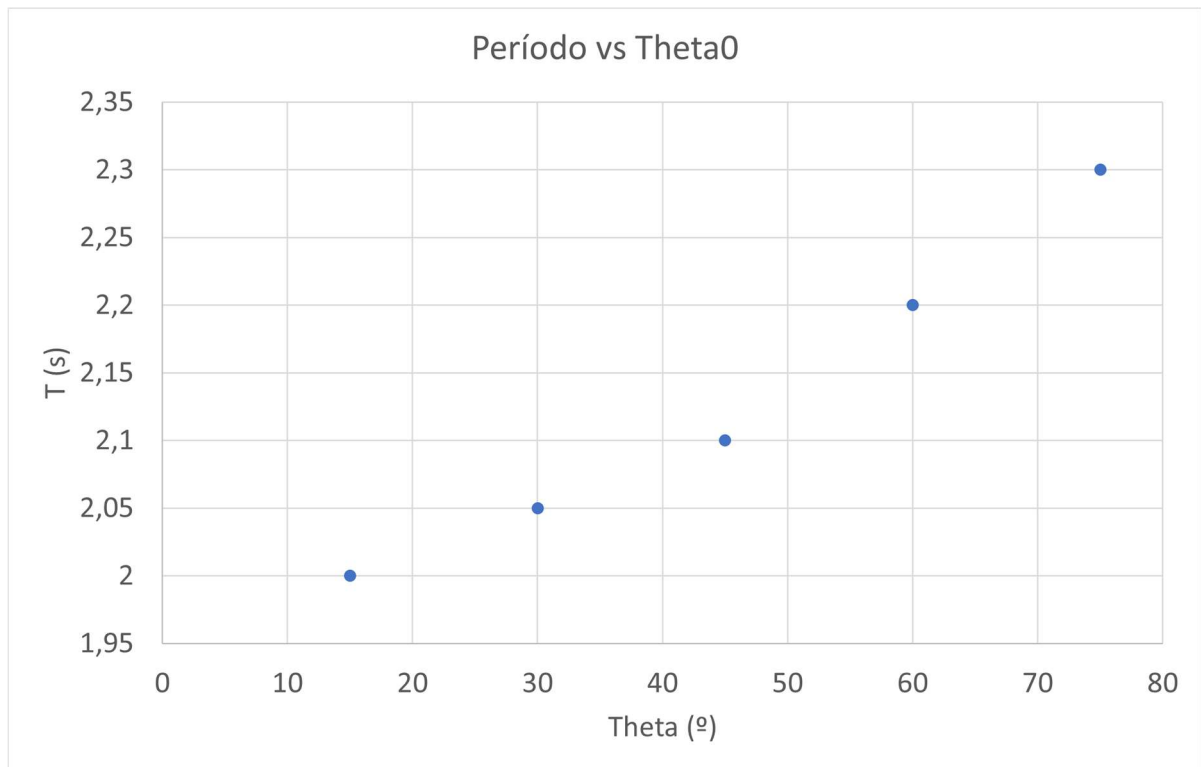
A continuación, tomaremos un ángulo inicial de 60° . Vemos en el primer gráfico que el período obtenido es $T=2.2s$.



Por último, para un ángulo inicial de 75° podemos observar que se tiene un período $T=2.3s$.

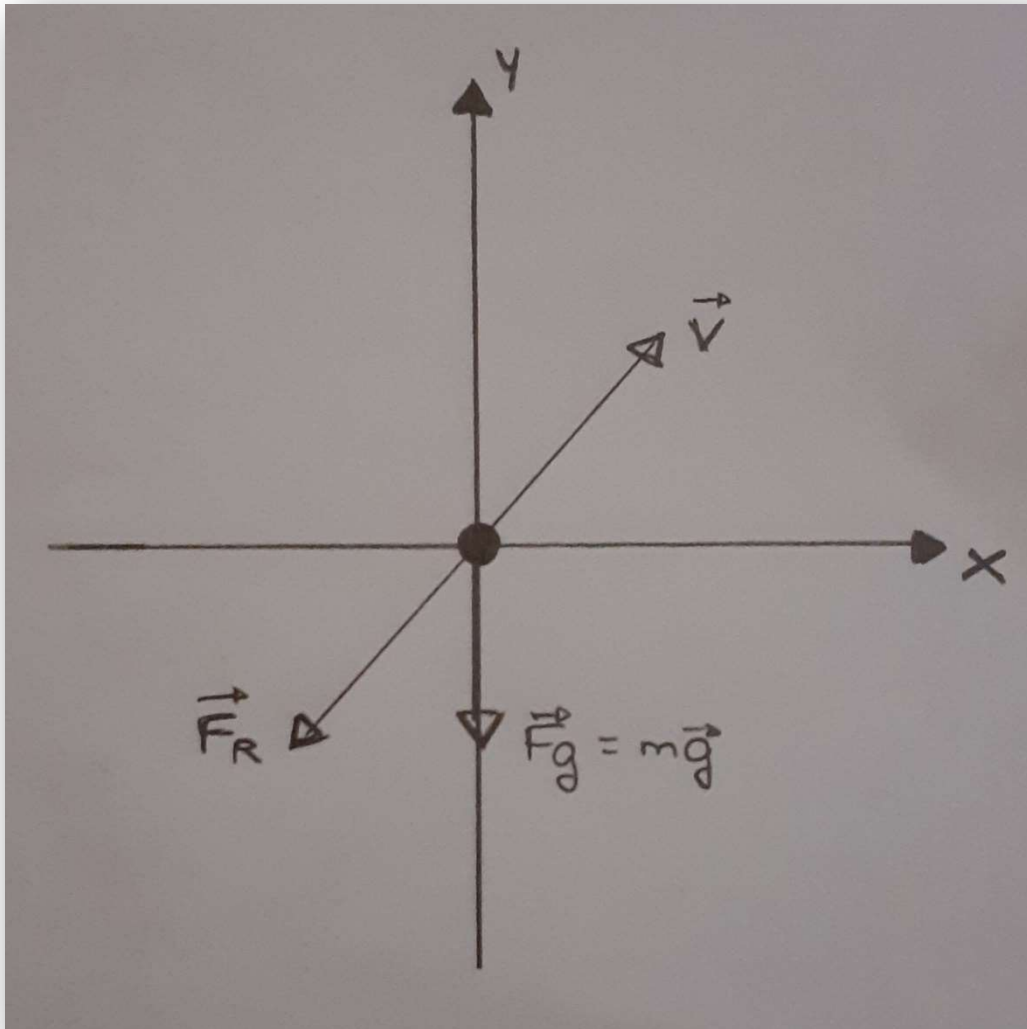


Por lo que hemos podido observar en los anteriores gráficos, el período del péndulo varía con el ángulo inicial tomado. Veámoslo en un gráfico de períodos frente a las amplitudes:



En este gráfico se aprecia que, al aumentar la amplitud, es decir, el ángulo inicial, el período del péndulo también aumenta.

PROBLEMA 3: Gravedad en un sistema bidimensional (2D)



Ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{b}{m}v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{b}{m}v_y$$

Script:

```
function upunto = gravedad2d(u,t)
    global m b g;
    upunto(1) = u(3);
    upunto(2) = u(4);
    upunto(3) = -b/m*u(3);
    upunto(4) = -g - b/m*u(4);
endfunction

% Programa principal.
global m b g;
m = 1
b = 0.1
g = 9.8

% Condiciones iniciales.
X0 = 0
Y0 = 0
Vx0 = 20
Vy0 = 20
u0 = [X0;Y0;Vx0;Vy0];

% Vector tiempo.
t = linspace(0, 10, 1000);

% Llamada al integrador de ecuaciones.
u = lsode("gravedad2d", u0, t);

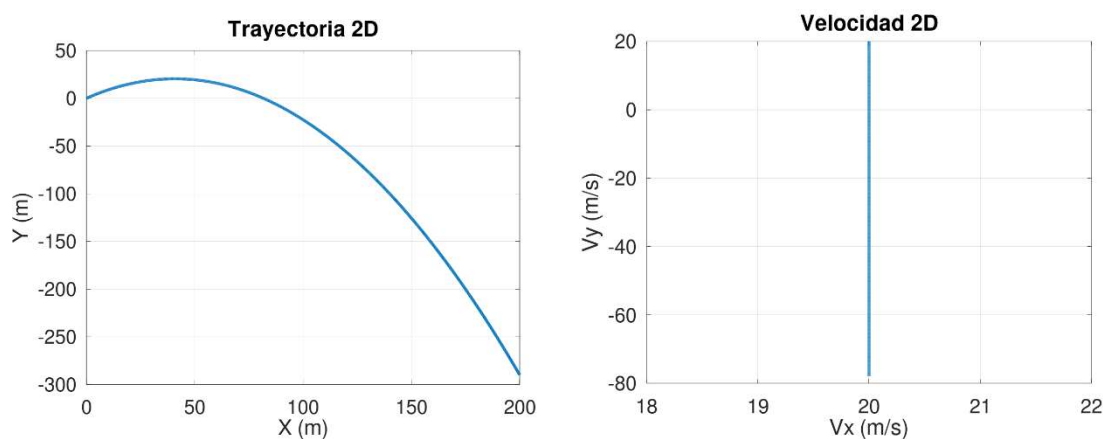
% Representación gráfica.
figure(1, "position", [300,300,800,600]);
plot(u(:,1), u(:,2), 'linewidth', 3);
title('Trayectoria 2D', 'fontsize', 24);
xlabel('X (m)', 'fontsize', 24);
ylabel('Y (m)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;

figure(2, "position", [300,300,800,600]);
plot(u(:,3), u(:,4), 'linewidth', 3);
title('Velocidad 2D', 'fontsize', 24);
xlabel('Vx (m/s)', 'fontsize', 24);
ylabel('Vy (m/s)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
```

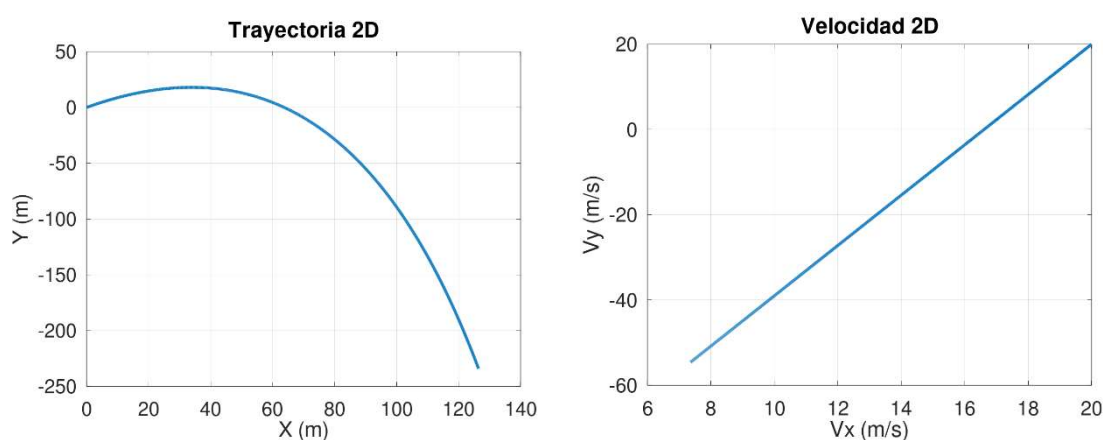
Gravedad:

En este ejercicio tenemos una partícula que se mueve en un sistema 2D bajo la acción de la gravedad y con una fricción proporcional a la velocidad. Tomaremos una partícula de masa $m=1\text{kg}$, y tomaremos diferentes valores del coeficiente de rozamiento para observar su trayectoria y su velocidad en cada ocasión.

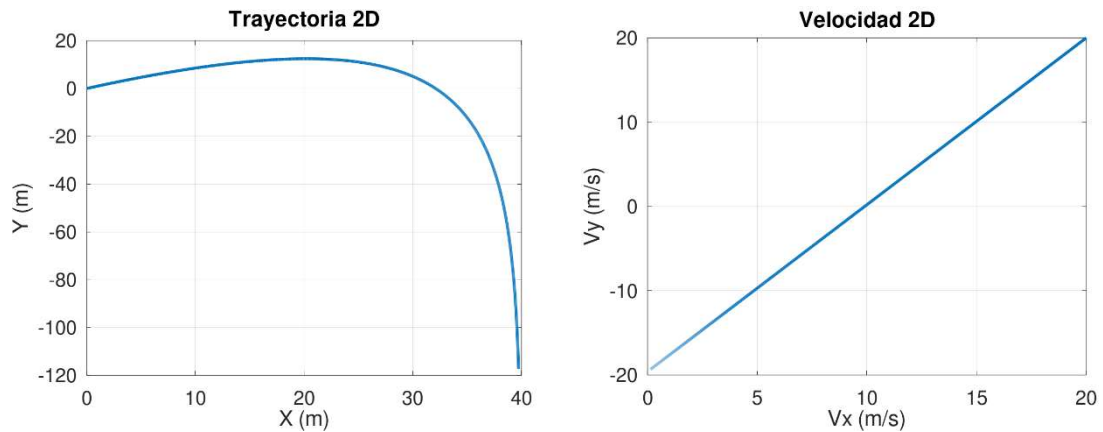
Consideremos, en primer lugar, que no existe rozamiento. En esta ocasión se alcanzará la distancia máxima recorrida en la componente X, que será, como podemos observar en el primer gráfico, una distancia de 200m. Además, en el segundo gráfico podemos apreciar que la componente X de la velocidad se mantendrá constante. Esto se debe a que, mientras que en el eje Y habrá aceleración debida a la acción de la gravedad, en el eje X no habrá rozamiento ni ninguna otra fuerza capaz de producir cambios en la velocidad.



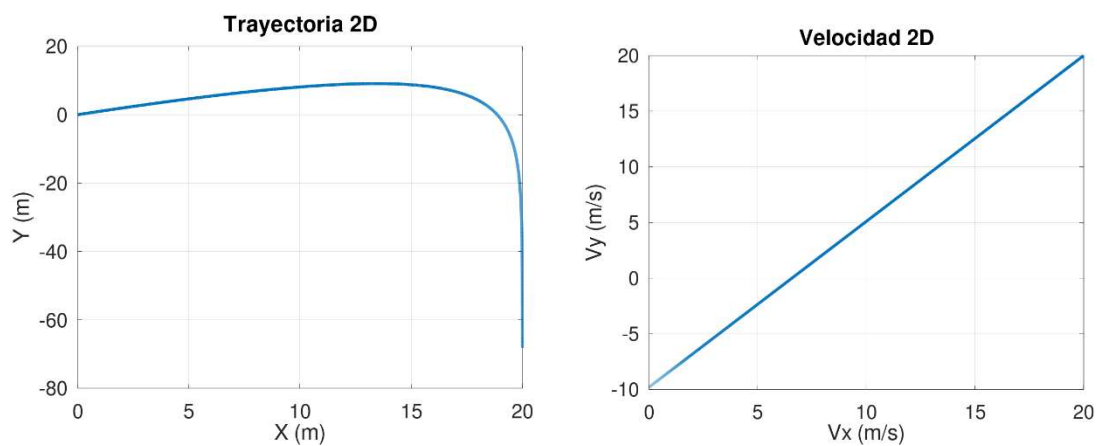
A continuación, tomaremos un coeficiente de rozamiento $b=0.1$. En el primer gráfico podemos observar que la distancia recorrida en ambos ejes ha disminuido. Además, en el segundo gráfico vemos que tanto la componente X de la velocidad como la componente Y cambian, pues debido al rozamiento, ninguna se mantendrá constante.



En esta ocasión, tomaremos un coeficiente de rozamiento $b=0.5$. Observamos en el primer gráfico que la distancia recorrida en ambos ejes es menor, mientras que en el segundo gráfico observamos que la componente X de la velocidad disminuirá hasta 0 y la componente Y no acelerará tanto en negativo, pues el rozamiento contrarrestará la acción de la gravedad.

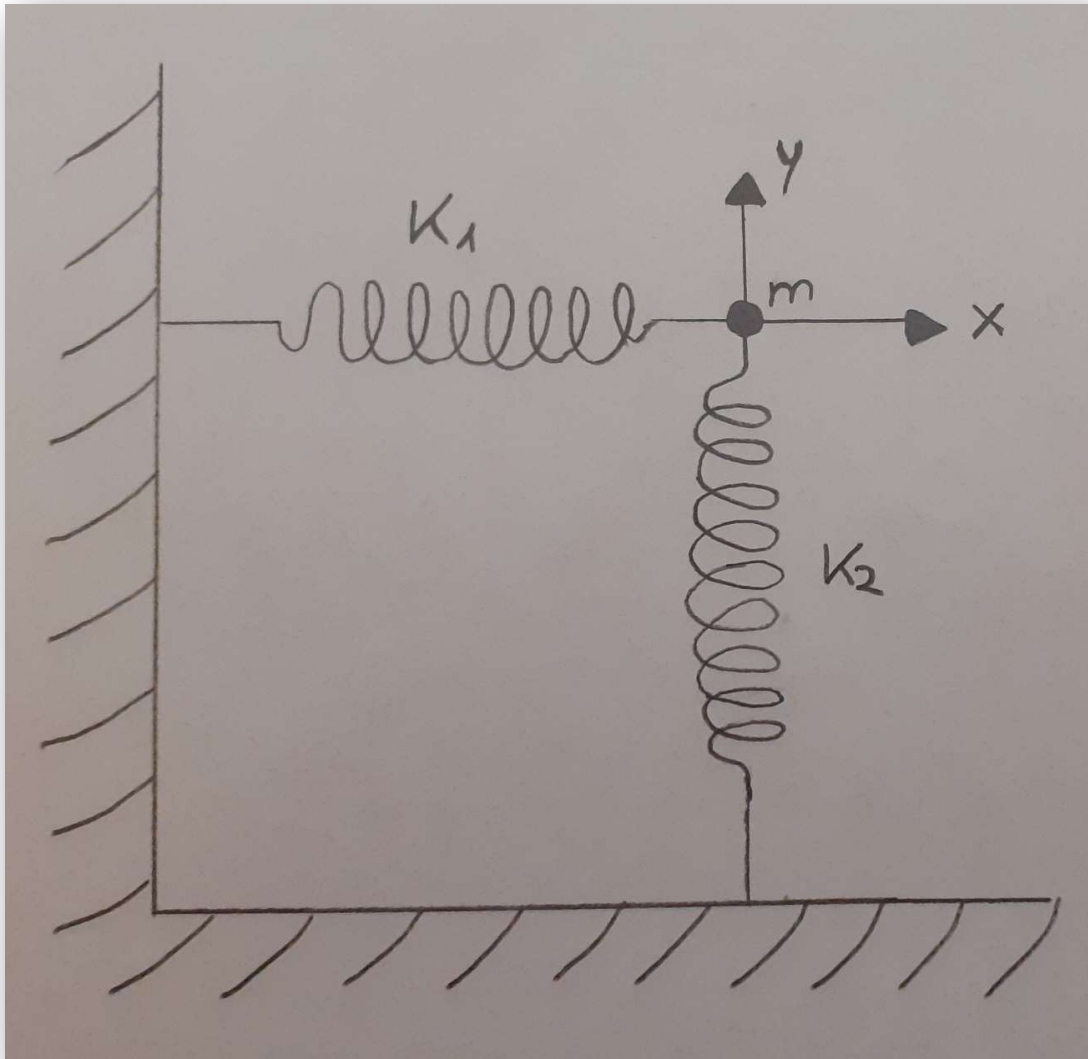


Lo mismo ocurrirá si aumentamos todavía más el coeficiente de rozamiento, por ejemplo, si tomamos $b=1$, como podemos observar en los siguientes gráficos:



Por lo tanto, cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento, menor será la distancia recorrida por la partícula tanto en el eje X como en el Y.

PROBLEMA 4: Oscilador armónico simple en dos dimensiones (2D)



Ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_1}{m}x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k_2}{m}y$$

Script:

```
function upunto = lissajous(u,t)
    global m k1 k2;
    upunto(1) = u(3);
    upunto(2) = u(4);
    upunto(3) = -k1/m*u(1);
    upunto(4) = -k2/m*u(2);
endfunction

%Programa principal.
global m k1 k2;
m=1
A=1
B=1
a=1
b=1
delta=pi/2
k1=a^2*m
k2=b^2*m

% Condiciones iniciales.
X0=A*sin(delta)
Y0=0
Vx0=a*A*cos(delta)
Vy0=b*B
u0=[X0,Y0,Vx0,Vy0];

% Vector tiempo.
t = linspace(0, 10, 1000);

% Llamada al integrador de ecuaciones.
u = lsode('lissajous', u0, t);

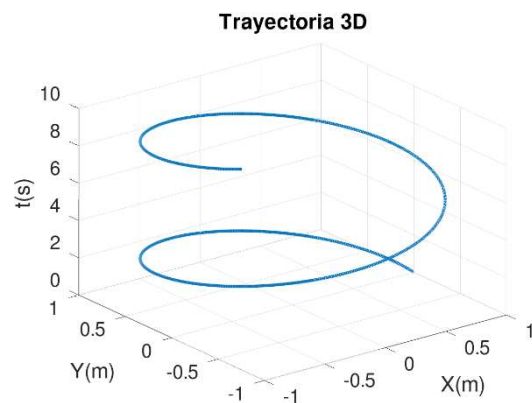
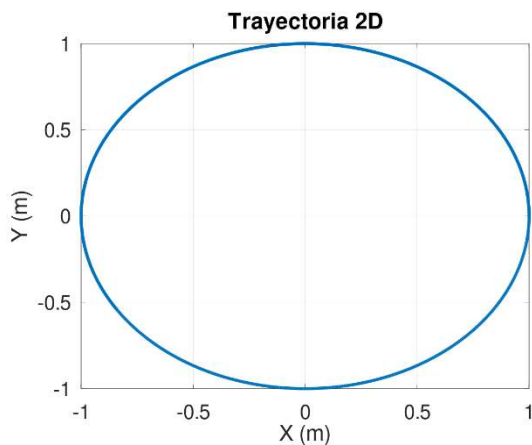
% Representación gráfica.
figure(1, "position", [300,300,800,600]);
plot3(u(:,1),u(:,2),t, "linewidth", 3);
title('Trayectoria 3D', 'fontsize', 24);
xlabel('X(m)', 'fontsize', 24);
ylabel('Y(m)', 'fontsize', 24);
zlabel('t(s)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;

figure(2, "position", [300,300,800,600]);
plot(u(:,1), u(:,2), 'linewidth', 3);
title('Trayectoria 2D', 'fontsize', 24);
xlabel('X (m)', 'fontsize', 24);
ylabel('Y (m)', 'fontsize', 24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
```

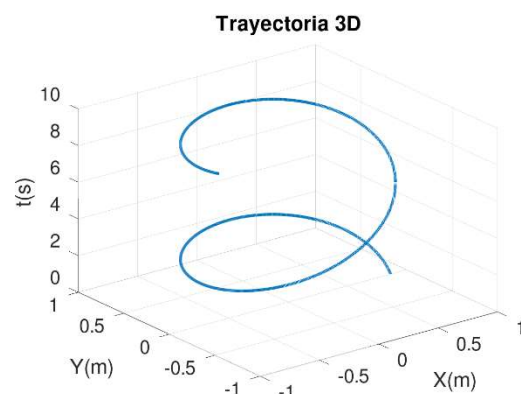
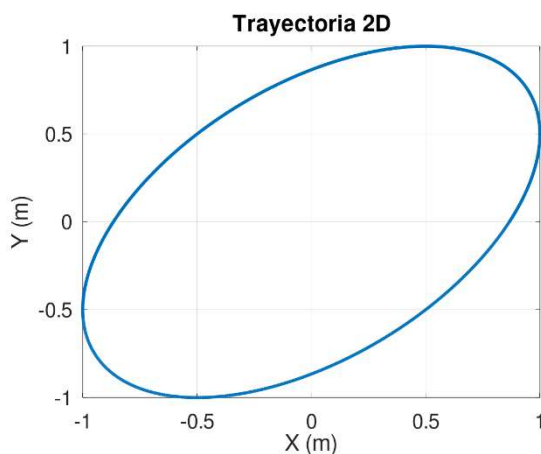
Oscilador armónico simple 2D:

En este ejercicio estudiaremos las curvas de Lissajous, las cuales son unos gráficos creados a partir de la superposición de dos osciladores armónicos simples perpendiculares. Para ello, daremos distintos valores a las amplitudes del movimiento oscilatorio en las coordenadas X e Y (A y B respectivamente), a las frecuencias del movimiento en X e Y (a y b respectivamente), y al desfase entre los movimientos en X y en Y (δ), y observaremos las curvas de Lissajous obtenidas. Además, haremos representaciones gráficas en 3D en las que tendremos en cuenta el tiempo.

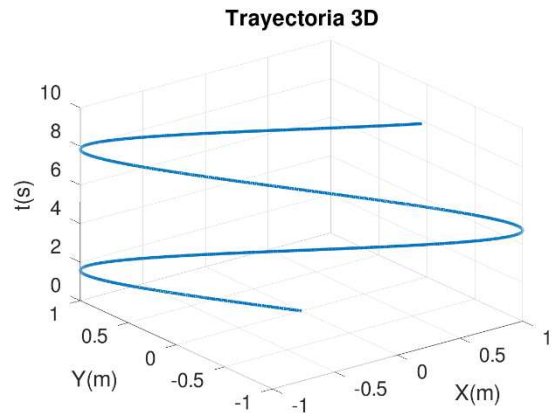
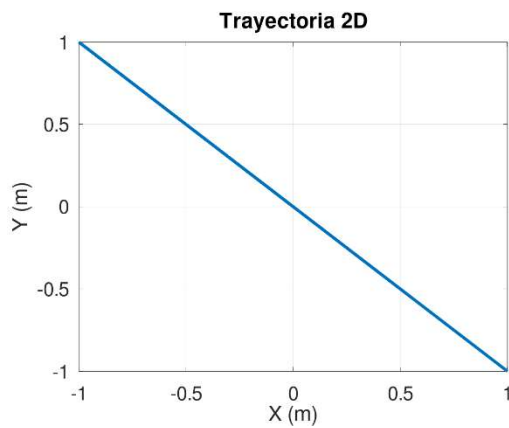
En primer lugar, probaremos con $A=1\text{m}$, $B=1\text{m}$, $a=1\text{Hz}$, $b=1\text{Hz}$ y $\delta=\pi/2$. En este caso, al tener las mismas amplitudes y frecuencias en ambos ejes y al ser el desfase de 90° , la curva de Lissajous obtenida es una circunferencia, como podemos observar en la primera gráfica.



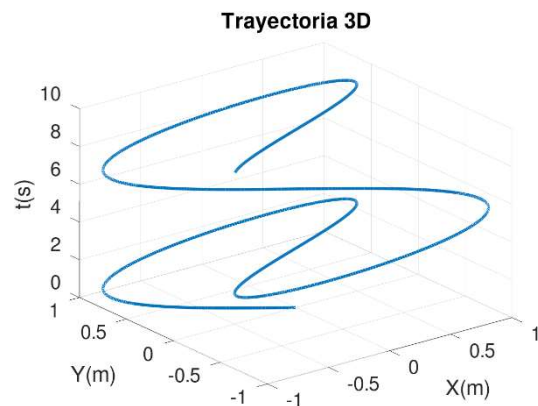
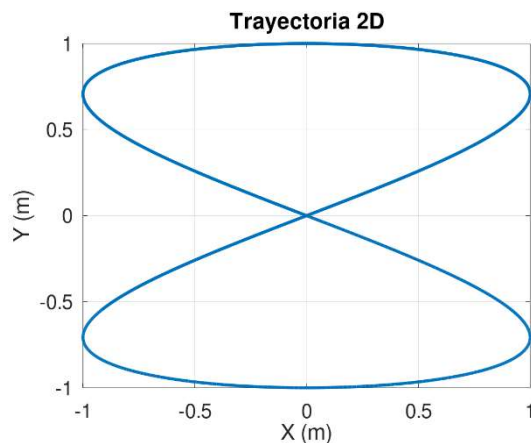
Sin embargo, si cambiamos el desfase y tomamos, por ejemplo, $\delta=\pi/3$, dejando los otros cuatro parámetros igual, vemos que la curva de Lissajous obtenida es una elipse.



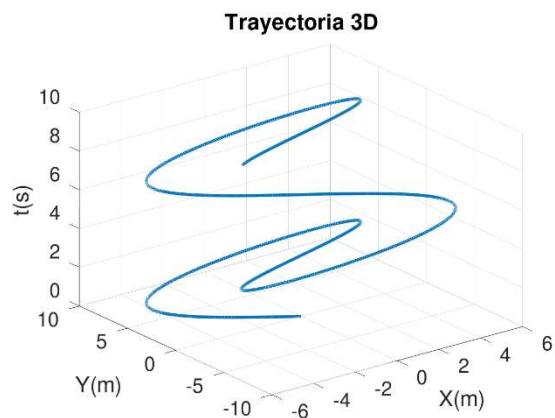
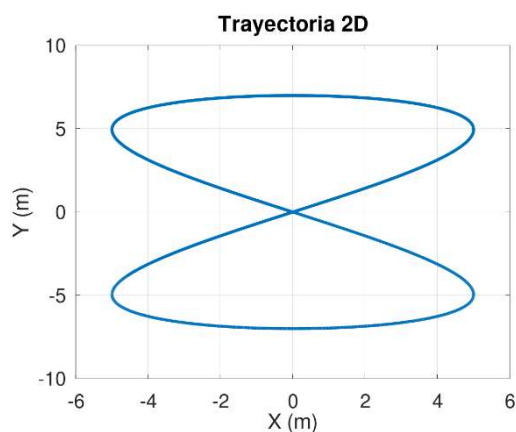
Además, tomando un desfase $\delta=\pi$, la curva de Lissajous obtenida será una línea recta, tal y como observamos en el siguiente gráfico:



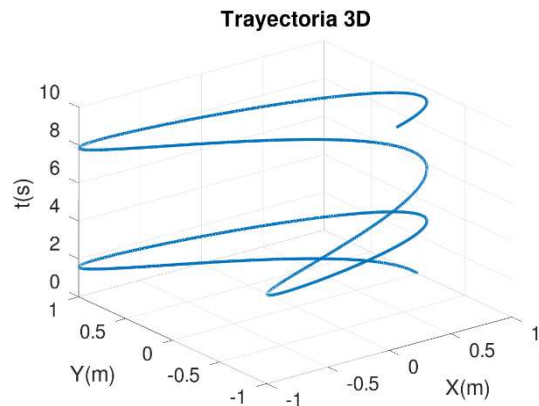
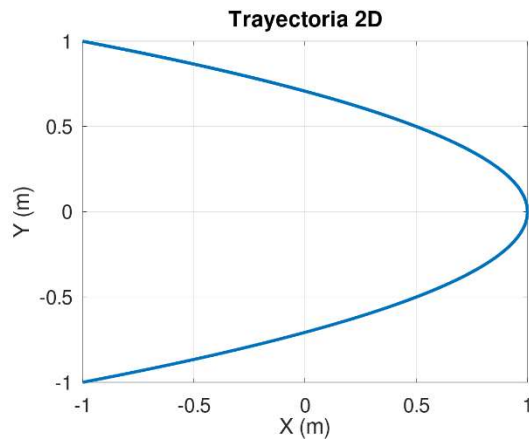
Habiendo estudiado los casos en los que ambas frecuencias y ambas amplitudes eran iguales, veamos qué ocurre si esto no es así. Tomemos $A=1\text{m}$, $B=1\text{m}$, $a=2\text{Hz}$, $b=1\text{Hz}$ y $\delta=\pi$. La trayectoria 3D seguida es diferente a las anteriores, pues estas seguían una espiral, mientras que en este caso no sigue un patrón apreciable. Además, la curva de Lissajous obtenida es algo más compleja, tal y como podemos apreciar en los siguientes gráficos:



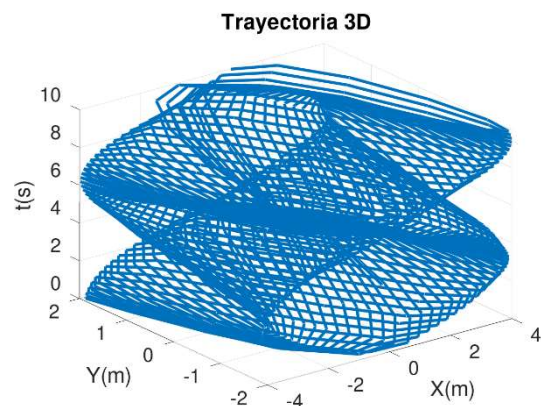
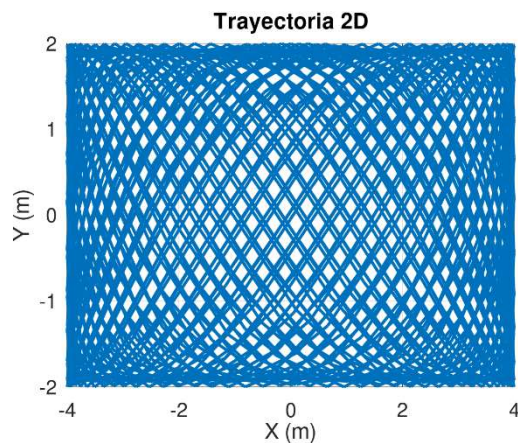
Ahora tomaremos $A=5\text{m}$, $B=7\text{m}$, $a=2\text{Hz}$, $b=1\text{Hz}$ y $\delta=\pi$. Vemos que la curva de Lissajous obtenida es igual a la anterior, pero al haber cambiado la amplitud, la distancia recorrida en ambos ejes es mayor:



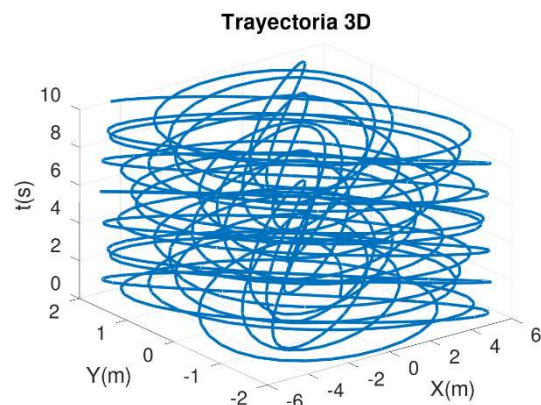
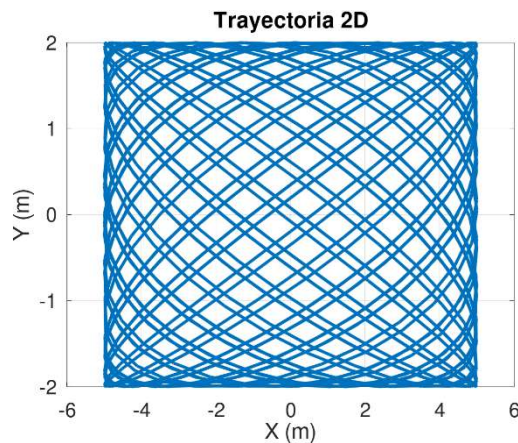
Si en esta ocasión tomamos $A=1\text{m}$, $B=1\text{m}$, $a=2\text{Hz}$, $b=1\text{Hz}$ y $\delta=\pi/2$, la curva de Lissajous obtenida tiene forma de arco:



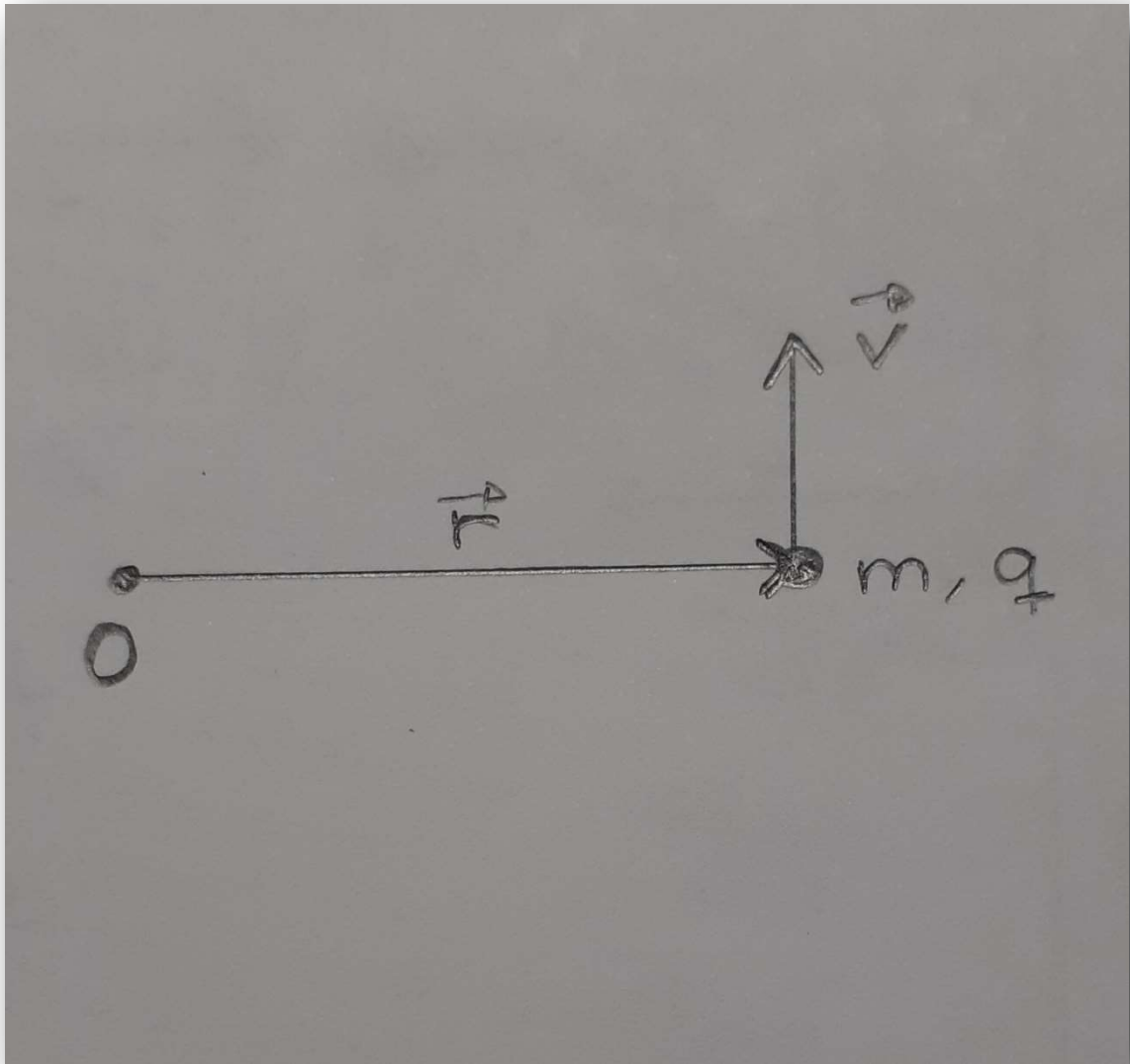
Ahora tomaremos valores más complicados. Por ejemplo, $A=4\text{m}$, $B=2\text{m}$, $a=31\text{Hz}$, $b=63\text{Hz}$ y $\delta=\pi/4$. Tanto la curva de Lissajous obtenida como la trayectoria en 3D son mucho más complejas que las anteriores.



Tomemos ahora los valores $A=5\text{m}$, $B=2\text{m}$, $a=23\text{Hz}$, $b=19\text{Hz}$ y $\delta=\pi/7$. Los gráficos obtenidos son los siguientes:



PROBLEMA 5: Partícula cargada en un campo magnético (3D)



Ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} (v_y B_z - v_z B_y)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} (v_z B_x - v_x B_z)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} (v_x B_y - v_y B_x)$$

Script:

```
function upunto = campo_b_3d(u,t)
    global m q Bx By Bz;
    upunto(1)=u(4);
    upunto(2)=u(5);
    upunto(3)=u(6);
    upunto(4)=q/m*(u(5)*Bz-u(6)*By);
    upunto(5)=q/m*(u(6)*Bx-u(4)*Bz);
    upunto(6)=q/m*(u(4)*By-u(5)*Bx);
endfunction

%Programa principal.
global m q Bx By Bz;
m=1.67e-27    % Masa del protón en Kg.
q=1.602e-19   % Carga del protón en C.
Bx=0          % Componentes de "B" en T (Tesla).
By=0
Bz=0.15

% Condiciones Iniciales.
X0=0
Y0=0
Z0=0
Vx0=1e2
Vy0=1e2
Vz0=1e2
u0=[X0,Y0,Z0,Vx0,Vy0,Vz0];

% Vector tiempo.
t=linspace(0,0.000001,1000);

%Llamada al integrador de ecuaciones.
u = lode('campo_b_3d', u0, t);

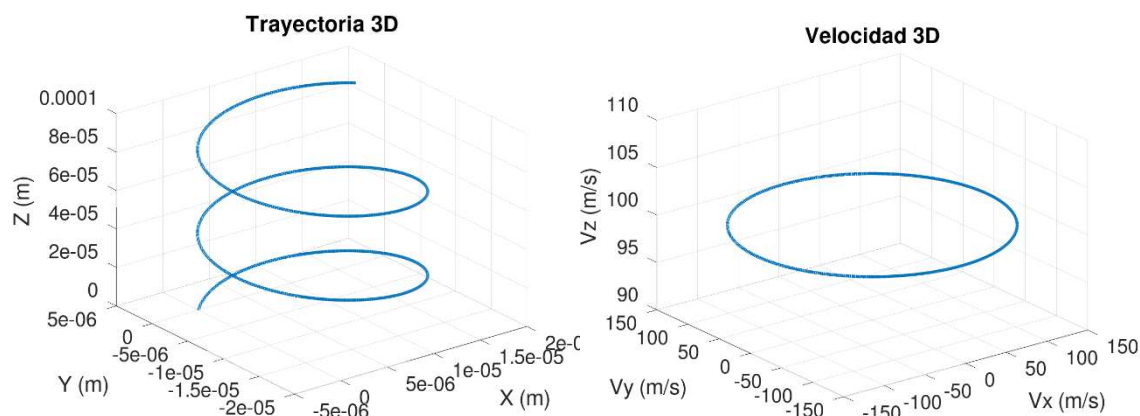
%Representación gráfica.
figure(1, "position", [300,300,800,600]);
plot3(u(:,1),u(:,2),u(:,3), "linewidth", 3);
title('Trayectoria 3D','fontsize',24);
xlabel('X (m)','fontsize',24);
ylabel('Y (m)','fontsize',24);
zlabel('Z (m)','fontsize',24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;

figure(2, "position", [300,300,800,600]);
plot3(u(:,4),u(:,5),u(:,6), "linewidth", 3);
title('Velocidad 3D','fontsize',24);
xlabel('Vx (m/s)','fontsize',24);
ylabel('Vy (m/s)','fontsize',24);
zlabel('Vz (m/s)','fontsize',24);
set(gca, 'fontsize', 20);
grid;
```

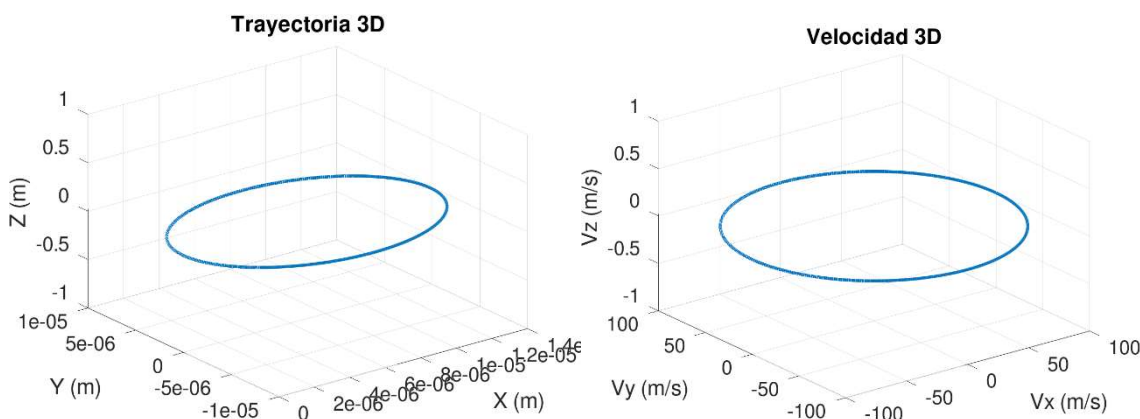
Partícula cargada en un campo magnético:

En este ejercicio, consideramos una partícula cargada con una carga que se mueve en tres direcciones en un campo magnético constante. En primer lugar, tomaremos el campo magnético en dirección Z y, a continuación, añadiremos componentes al mismo, viendo como varía la trayectoria y la velocidad de la partícula.

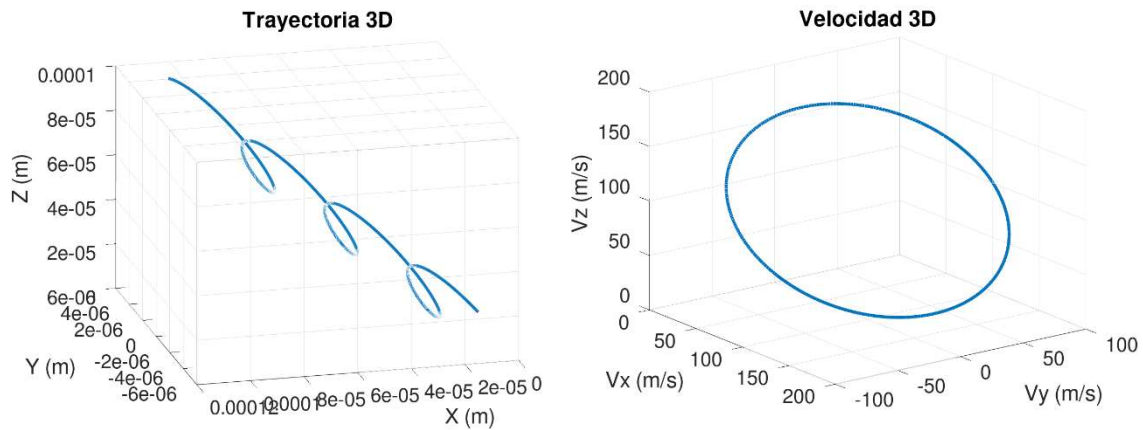
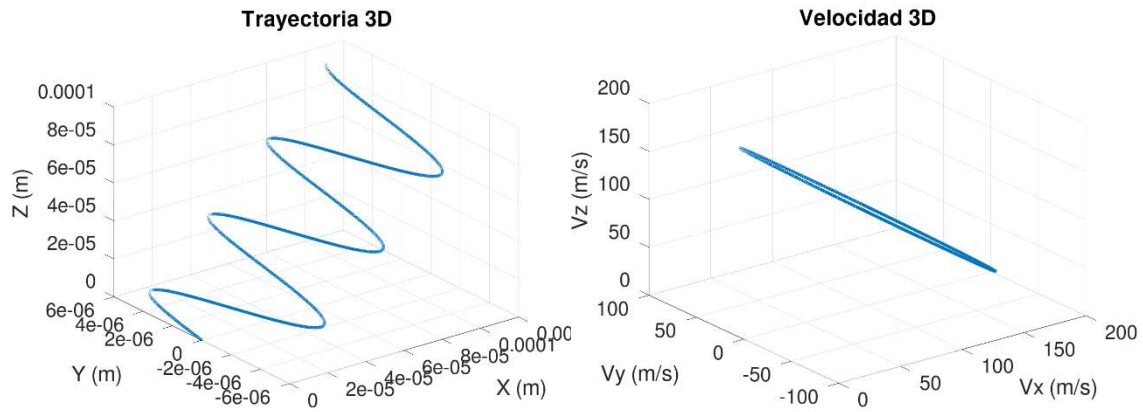
Comenzamos dando los siguientes valores a las componentes del campo magnético: $B_x=0T$, $B_y=0T$ y $B_z=0.15T$. Los gráficos obtenidos son los siguientes:



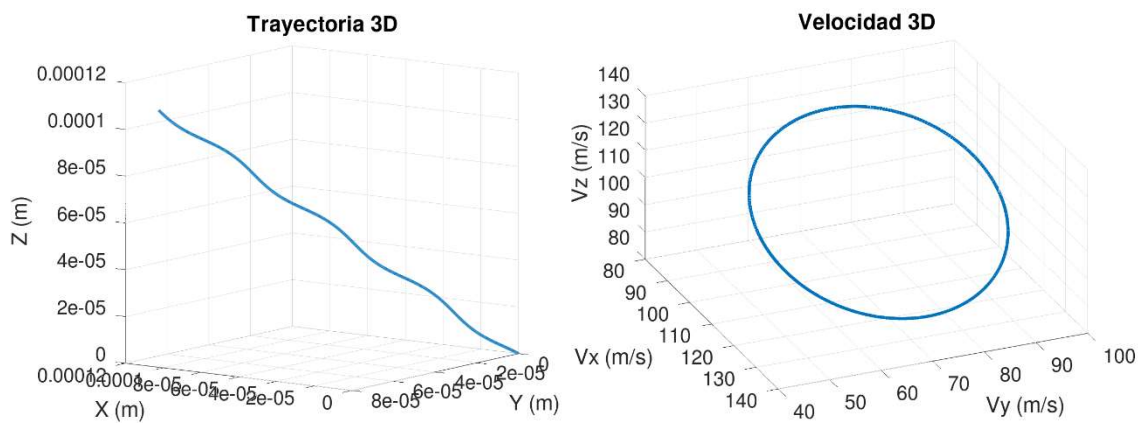
En el primer gráfico podemos observar que la trayectoria seguida por la partícula es helicoidal. En el siguiente ejemplo podemos observar que, si volvemos a tomar estos valores pero cambiando las velocidades, de manera que tengamos $V_x0=0m/s$, $V_y0=1e2m/s$ y $V_z0=0m/s$, la trayectoria será circular, pues en este caso la velocidad será perpendicular al campo eléctrico, a diferencia de en el ejemplo anterior.



En esta ocasión volveremos a tomar los valores iniciales de la velocidad, es decir, $V_x0=1e2m/s$, $V_y0=1e2m/s$ y $V_z0=1e2m/s$, y tomaremos otros valores para las componentes del campo eléctrico, por ejemplo, $B_x=0.15T$, $B_y=0T$ y $B_z=0.15T$. En este caso, la trayectoria será una hélice distinta a la anterior, pues la partícula se verá afectada por dos de las componentes del campo eléctrico. Obtendríamos los siguientes gráficos, vistos desde distintas perspectivas:



Por último, veamos qué ocurre si tomamos todas las componentes del campo eléctrico. Damos los siguientes valores: $B_x=0.15T$, $B_y=0.1T$ y $B_z=0.15T$. En este caso, la trayectoria obtenida será la siguiente:



Podemos observar que en todos los casos anteriores el gráfico de la velocidad tiene forma de circunferencia.