Práctica Teoría de Códigos

Ana Gil Molina

EJERCICIO 9

(a) Como G no tiene las 4 primeras columnas linealmente independientes, el código no será sistemático. Al obtener un código lineal sistemático equivalente a C, obtenemos que tiene la siguiente matriz generadora, que está en forma sistemática:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Como G no tiene las 3 primeras columnas linealmente independientes, el código no será sistemático. Al obtener un código lineal sistemático equivalente a C, obtenemos que tiene la siguiente matriz generadora, que está en forma sistemática:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 13

(a) Si H es matriz de control de C, entonces H es matriz generadora del código dual de C. Calculamos por tanto el dual de C, y a continuación calculamos el dual del dual, que será C. Así podemos obtener una matriz generadora de C:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la matriz no tiene las 3 primeras columnas linealmente independientes, el código no es sistemático. Obtenemos un código lineal sistemático equivalente a C, cuya matriz generadora es:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Por el mismo razonamiento que antes, calculamos el dual de C, cuya matriz generadora es H, y a continuación calculamos el dual del dual, que será C. Así podemos obtener una matriz generadora de C:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De nuevo, obtenemos un código lineal sistemático equivalente a C, cuya matriz generadora es:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 14

(a) Los parámetros de C son n=4, k=3 y d=1

(b) Como las 3 primeras columnas de G no son linealmente independientes, C no es sistemático. Obtenemos un código lineal sistemático equivalente a C, cuya matriz generadora es:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Una matriz de control de C es:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 17

(a) $C = \{0000000, 0010111, 0101011, 0111100, 1001001, 1011110, 1100010, 1110101\}$

(b) $w(0000000) = 0$
$w(0010111) = 4$
$w(0101011) = 4$
$w(0111100) = 4$
$w(1001001) = 3$

$w(1011110) = 5$
$w(1100010) = 3$
$w(1110101) = 5$
$d(C) = \text{mín}\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\} = 3$

(c) Como C tiene una matriz generadora en forma sistemática, $G = [I\ A]$, entonces una matriz de control sistemática de C será $H = [-A^t\ I]$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $h_1 = h_4 + h_7$, por lo que hay 3 columnas linealmente dependientes. Además, como el código es binario, dos vectores no nulos son linealmente dependientes si, y solo si, son iguales. Como todas las columnas de H son distintas, entonces cualquier conjunto formado por 2 colunmnas de H es linealmente independiente. Por tanto, $d(C) = 3$.

EJERCICIO 18

Estamos usando el cuerpo de 4 elementos, que no es de orden primo. No funciona en esta versión, pues al introducir H nos sale una matriz que non coincide con la del enunciado:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 20

(a) Para calcular C, tenemos en cuenta que H es la matriz generadora del dual de C, y luego calculamos el dual del dual de C, que vuelve a ser C. Los parámetros de C son $n = 7$, $k = 4$ y $1 \leq d \leq 3$. Al calcular la distribución de los pesos de las palabras de C, obtenemos que no hay ninguna palabra de peso 1, pero sí hay 6 palabras de peso 2, por lo que $d(C) = \text{mín}\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\} = 2$.

(b) Una matriz generadora de C es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $4632 = 2 \cdot 1140 + 2 \cdot 6211 + 4 \cdot 1000$, por lo tanto las 4 primeras columnas de esta matriz generadora de C no son linealmente independientes, luego C no es sistemático.

(c) Como $C = fil(G)$, se debe cumplir que:

$$x_1 \cdot 1461000 + x_2 \cdot 1620100 + x_3 \cdot 4310010 + x_4 \cdot 0210001 = 1116543$$

Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 & = & 6 \\ x_2 & = & 5 \\ x_3 & = & 4 \\ x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

que es incompatible, por lo que 1116543 no está en C.

EJERCICIO 22

(a) Para calcular C, tenemos en cuenta que H es la matriz generadora del dual de C, y luego calculamos el dual del dual de C, que vuelve a ser C. Obtenemos que C tiene distancia mínima $d(C) = 4$.

(b) De nuevo, tenemos en cuenta que H es la matriz generadora del dual de C, por lo que al calcular el dual del dual de C, obtenemos C, que tiene distancia mínima $1 \leq d(C) \leq 3$. Calculamos los pesos de sus elementos, y obtenemos que no hay ninguna palabra de peso 1 ni de peso 2, pero sí hay 2 palabras de peso 3, entonces $d(C) = \min\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\} = 3$.

EJERCICIO 23

(a) Igual que en el ejercicio anterior, calculamos el dual del dual de C y obtenemos C, que tiene distancia mínima $1 \leq d(C) \leq 4$. Calculamos los pesos de sus elementos, y obtenemos que no hay ninguna palabra de peso 1 ni 2 ni 3, pero sí hay 7 palabras de peso 4, entonces $d(C) = \min\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\} = 4$.

(b) De nuevo, tenemos en cuenta que H es la matriz generadora del dual de C, por lo que al calcular el dual del dual de C, obtenemos C, que tiene distancia mínima $1 \leq d(C) \leq 3$. Calculamos los pesos de sus elementos, y obtenemos que no hay ninguna palabra de peso 1 ni de peso 2, pero sí hay 2 palabras de peso 3, entonces $d(C) = \text{mín}\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\} = 3$.

EJERCICIO 24

Como $n = 3, q = 3, k = 1$, tenemos $q^{n-k} = 3^2 = 9$ clases. Obtenemos la tabla de líderes/síndromes:

LÍDERES	SÍNDROMES
000	00
001	02
002	01
010	21
011	20
012	22
020	12
021	11
022	10

Ahora calculamos el radio de tangencia $t(Rep_3(3)) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = 1$. Si el peso del líder es menor o igual que 1, este será único y la decodificación será correcta.

(a) $s(111) = 00$. El síndrome coincide con el del líder 000, que tiene peso $w(000) = 0 \leq 1$. Decodificamos por $111 - 000 = 111$.

(b) $s(121) = 21$. El síndrome coincide con el del líder 010, que tiene peso $w(010) = 1 \leq 1$. Decodificamos por $121 - 010 = 111$.

(c) $s(120) = 22$. El síndrome coincide con el del líder 012, que tiene peso $w(012) = 2 > 1$. Observamos que en la clase de 012 hay más de un líder de peso 2:

$$012 + C = \{012, 120, 201\}$$

No tenemos un único líder de clase, por lo que en un sistema de decodificación completa decodificaríamos 120 como $120 - u$ con u cualquiera de los líderes, y en un sistema de decodificación incompleta solicitaríamos la retransmisión del mensaje.

EJERCICIO 25

(a) Como $n = 3, q = 3, k = 1$, tenemos $q^{n-k} = 3^2 = 9$ clases. Obtenemos la tabla de Slepian:

0000	0101	0202	1010	1111	1212	2020	2121	2222
0001	0102	0200	1011	1112	1210	2021	2122	2220
0002	0100	0201	1012	1110	1211	2022	2120	2221
0010	0111	0212	1020	1121	1222	2000	2101	2202
0020	0121	0222	1000	1101	1202	2010	2111	2212
0011	0112	0210	1021	1122	1220	2001	2102	2200
0012	0110	0211	1022	1120	1221	2002	2100	2201
0021	0122	0220	1001	1102	1200	2011	2112	2210
0022	0120	0221	1002	1100	1201	2012	2110	2211

(b) Al calcular una matriz de control de C en GAP nos da justamente la del enunciado.

(c) Obtenemos la tabla de líderes/síndromes:

LÍDERES	SÍNDROMES
0000	00
0001	02
0002	01
0010	20
0011	22
0012	21
0020	10
0021	12
0022	11

EJERCICIO 26

(a) Al calcular la distribución de distancias a 01001, solo hay una palabra código que minimiza las distancias (con distancia 1), podemos usar el método de decodificación por mínima distancia, y obtenemos que decodificamos por 01101.

Al calcular la distribución de distancias a 01100, de nuevo hay una única palabra código que minimiza las distancias (con distancia 1),y por el método de decodificación por mínima distancia obtenemos que decodificamos por 01101.

Al calcular la distribución de distancias a 11011, vuelve a haber una única palabra código que minimiza la distancia (con distancia 1),y por el método de decodificación por mínima distancia obtenemos que decodificamos por 11111.

(b) Una matriz de control de C es:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Obtenemos la tabla de líderes/síndromes:

LÍDERES	SÍNDROMES
00000	00
00001	01
10000	10
00100	11

(d) Al calcular la distribución de los pesos de las palabras de C, vemos que no hay ninguna palabra de peso 1, pero sí hay 3 palabras de peso 2, entonces $d = d(C) = \min\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\} = 2$.

Ahora calculamos el radio de tangencia $t(C) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2-1}{2} \rfloor = 0$. Si el peso del líder es menor o igual que 0, este será único y la decodificación será correcta.

$s(01001) = 11$. El síndrome coincide con el del líder 00100, que tiene peso $w(00100) = 1 > 0$. Observamos que en la clase de 00100 hay un único líder de peso 1:

$$00100 + C = \{00100, 00011, 01110, 01001, 10110, 10001, 11100, 11011\}$$

Por tanto, decodificamos por $01001 - 00100 = 01101$.

$s(01100) = 01$. El síndrome coincide con el del líder 00001, que tiene peso $w(00001) = 1 > 0$. Observamos que en la clase de 00001 hay un único líder de peso 1:

$$00001 + C = \{00001, 00110, 01011, 01100, 10011, 10100, 11001, 11110\}$$

Por tanto, decodificamos por $01100 - 00001 = 01101$.

$s(11011) = 11$. El síndrome coincide con el del líder 00100, que tiene peso $w(00100) = 1 > 0$. Observamos que en la clase de 00100 hay un único líder de peso 1:

$$00100 + C = \{00100, 00011, 01110, 01001, 10110, 10001, 11100, 11011\}$$

Por tanto, decodificamos por $11011 - 00100 = 11111$.