

# INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN DE ONDAS

Ana Gil Molina

Universidad de Alicante.  
Práctica II. Física II. 1º Matemáticas.

# Índice

I	Introducción	3
II	Problemas	7
1.	Primer caso	7
2.	Segundo caso	9
3.	Tercer caso	12

# Parte I

## Introducción

En esta práctica vamos a estudiar los fenómenos de interferencia y difracción de ondas mediante el uso de programas en lenguaje python. Para ello, analizaremos tres casos diferentes de interferencia y difracción de ondas. Para visualizar estos fenómenos con mayor facilidad, usaremos representaciones gráficas que muestren el comportamiento de las ondas cuando se produce una interferencia o una difracción de estas.

Una interferencia de ondas es un fenómeno que se produce cuando dos o más ondas que se propagan en un mismo medio se cruzan en un punto, de manera que se superponen. De esta forma, dan lugar a una onda resultante que puede tener una amplitud mayor, menor o igual a las iniciales. Para que se forme un patrón de interferencias las fuentes de luz deben ser coherentes, es decir, que las ondas que la conforman deben estar en fase unas con otras, y además la luz debe ser monocromática, lo que quiere decir que debe tener una sola longitud de onda. Por otra parte, la difracción es un fenómeno que tiene lugar cuando una onda se encuentra con una rendija o un obstáculo, produciéndose una desviación de la misma.

Para empezar vamos a considerar una onda plana monocromática que se propague en la dirección del eje  $x$ . En este caso, la ecuación de onda correspondiente es:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (1)$$

En esta ecuación,  $\xi$  es la presión, el desplazamiento, etc que se propaga,  $\xi_0$  es la amplitud de onda,  $k$  es el número de ondas, que se puede expresar como  $k = 2\pi/\lambda$ , con  $\lambda$  la longitud de onda;  $\omega$  es la frecuencia angular, que se expresa como  $\omega = 2\pi\nu$ , siendo  $\nu$  la frecuencia; y  $\delta$  es una fase inicial. Además, la velocidad de propagación (velocidad de fase) viene dada por  $\omega/k$ .

Ahora consideraremos la fórmula de Euler, que tiene la siguiente forma:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

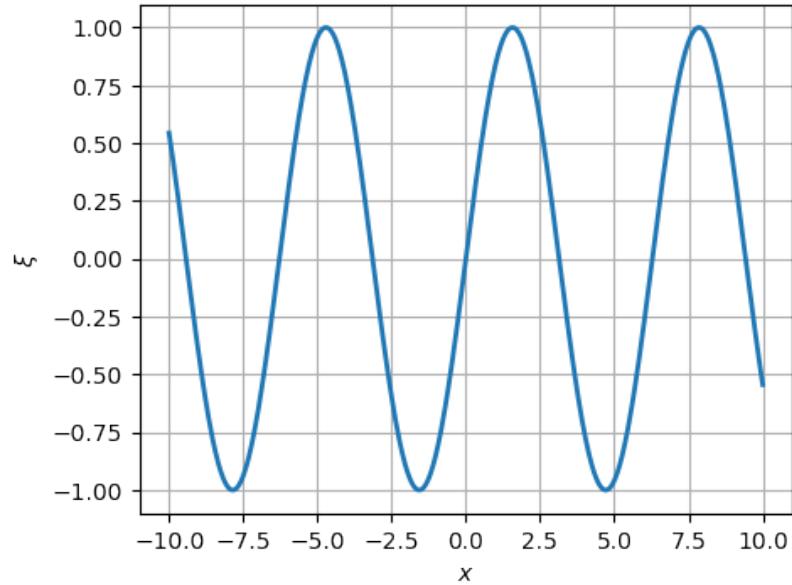
Tomando  $\alpha = kx - \omega t + \delta$ , podemos escribir la ecuación de la onda como la parte imaginaria del número complejo  $\xi_0 e^{i(kx - \omega t + \delta)}$ , en el cual la amplitud de onda  $\xi_0$  es el módulo del mismo. De esta forma, tenemos:

$$\xi_0 e^{i(kx - \omega t + \delta)} = \xi_0 [\cos(kx - \omega t + \delta) + i \sin(kx - \omega t + \delta)] \quad (2)$$

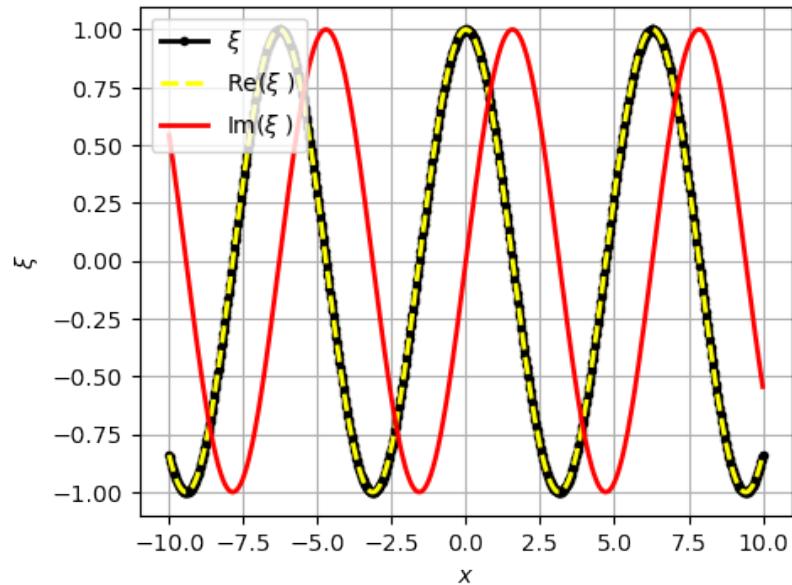
Así, podemos escribir la onda introduciendo una amplitud compleja  $\xi_{C0}$ , cuyo módulo da la amplitud de la onda, según:

$$\xi_0 e^{i\delta} e^{i(kx - \omega t)} = \xi_{C0} e^{i(kx - \omega t)}$$

Ahora haremos la representación gráfica de esta onda. En primer lugar, usaremos la expresión (1), y tomaremos los valores  $\xi_0 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\delta = 0$  y  $t = 0$ . De esta forma, el gráfico obtenido es el siguiente:

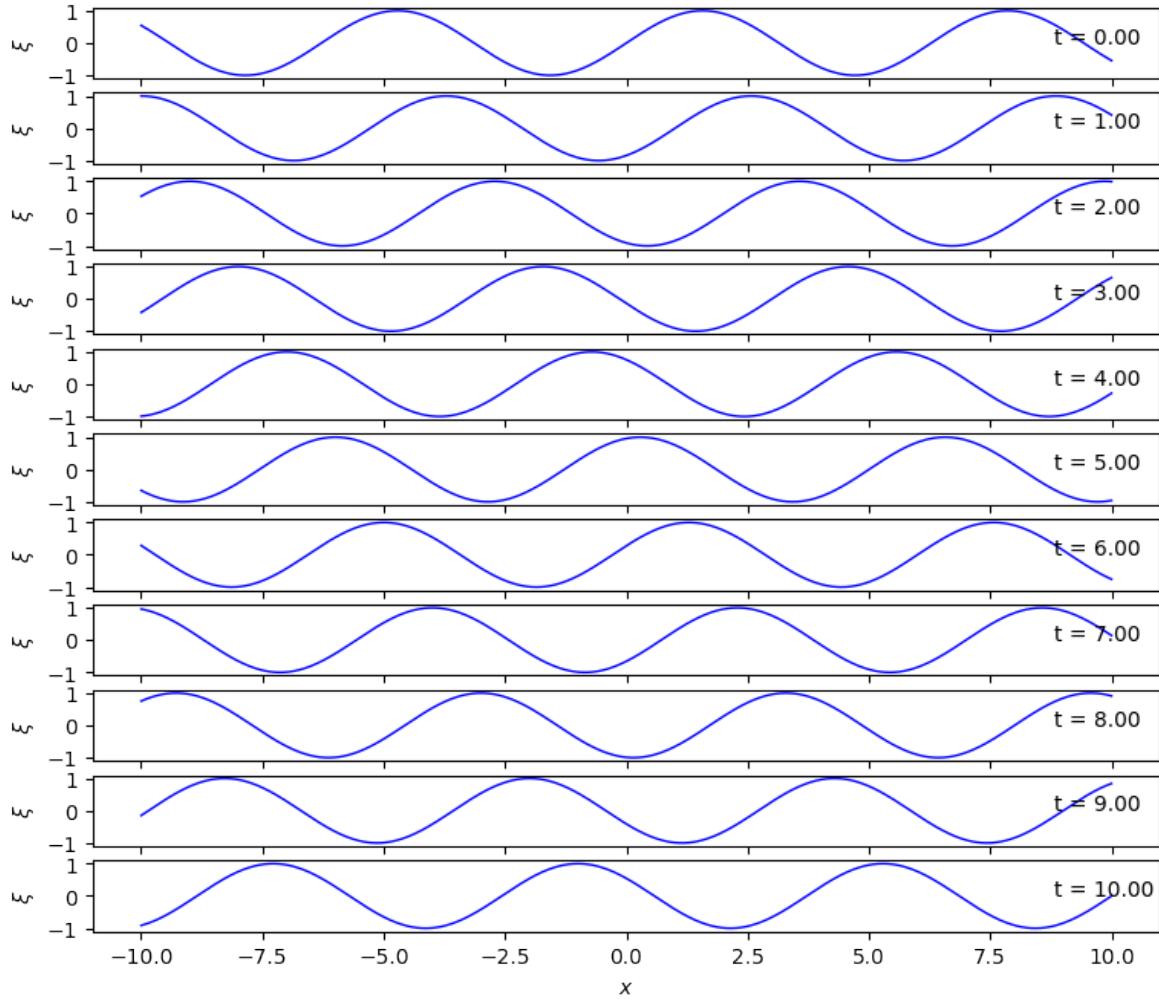


Si ahora tomamos los mismos valores, pero hacemos la representación gráfica usando números complejos según la expresión (2), obtenemos:



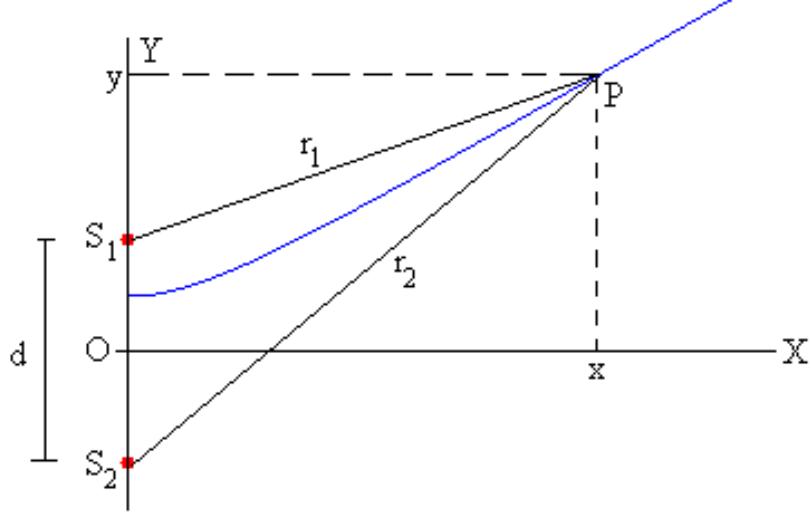
Como hemos comentado anteriormente, la ecuación de la onda coincide con la parte imaginaria del número complejo de la expresión (2). Esto lo podemos apreciar en los gráficos, pues la representación de la parte imaginaria del complejo en el segundo gráfico coincide con lo representado en el primer gráfico, que es justamente la onda estudiada.

Si ahora representamos la onda en función del tiempo, obtenemos:



Donde podemos observar que la onda se mantiene constante a lo largo del tiempo, pues de momento no hemos incluido ninguna perturbación ni ninguna otra onda con la que pueda interaccionar.

Ahora consideraremos que tenemos dos ondas que interfieren, como en la imagen. De esta forma, la magnitud física que se propaga  $\xi$  va a ser la suma de las magnitudes correspondientes a cada una de las ondas.



Si consideramos la aportación que hace cada onda a la vibración resultante, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_0 \sin(kx_1 - \omega t) \\ \xi_2 = \xi_0 \sin(kx_2 - \omega t) \end{array} \right\}$$

Ahora, aplicando el principio de superposición, sumamos ambas, obteniendo:

$$\xi_T = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 [\sin(kx_1 - \omega t) + \sin(kx_2 - \omega t)]$$

A continuación podemos utilizar la siguiente expresión trigonométrica:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

De manera que obtenemos:

$$\xi_T = 2\xi_0 \cos \left( \frac{k(x_2 - x_1)}{2} \right) \cdot \sin \left( \omega t - k \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

Que en función de la fase  $\delta$  se puede expresar como:

$$\xi_T = 2\xi_0 \cos \left( \frac{\delta}{2} \right) \cdot \sin \left( \omega t - kx + \frac{\delta}{2} \right) \quad (3)$$

## Parte II

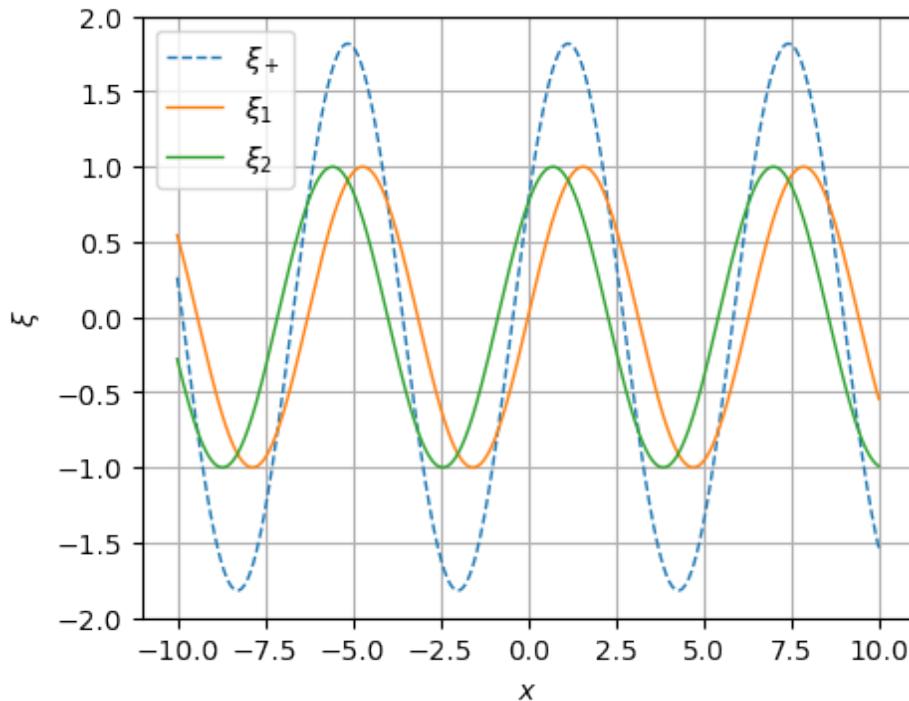
# Problemas

### 1. Primer caso

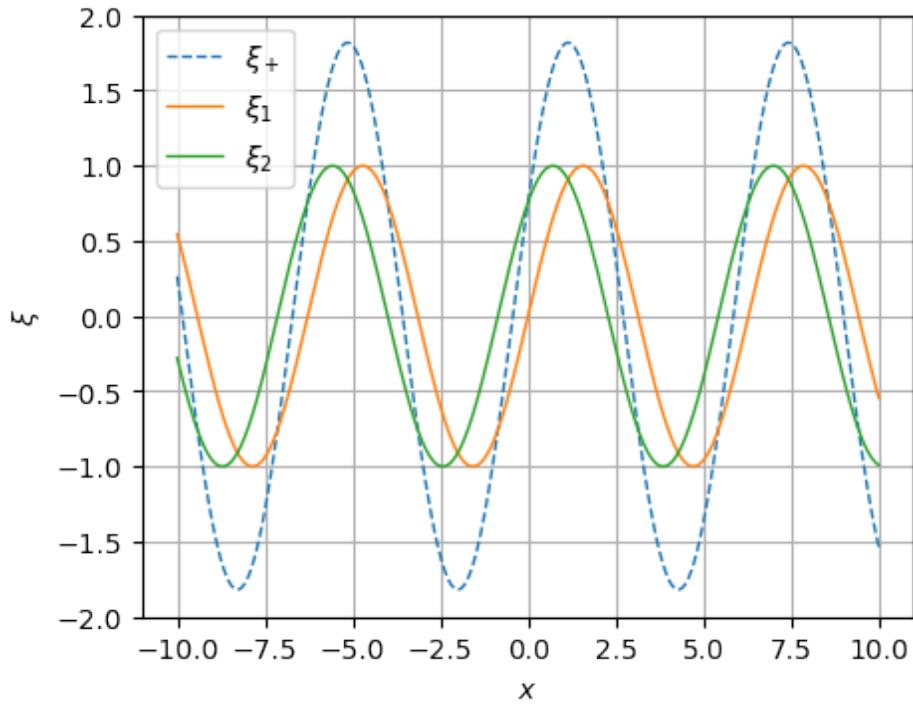
Para empezar, estudiaremos de forma analítica el caso de dos ondas que tengan la misma amplitud, frecuencia y velocidad, pero que estén desfasadas. Para ello, usaremos en primer lugar las transformaciones de sumas de senos en productos, y a continuación haremos lo mismo pero usando la notación compleja.

En esta ocasión, tomaremos los valores  $\xi_0 = 1$  para la amplitud,  $\omega = 1$  para la frecuencia,  $k = 1$  y  $t = 0$ , mientras que el valor del desfase será un valor aleatorio entre  $0,1$  y  $\pi/3$ . En nuestro caso, el valor obtenido para el desfase es  $\delta = 8,59 \cdot 10^{-1}$  rad.

Usando la expresión (3) obtenida mediante las transformaciones de sumas de senos en productos, el gráfico obtenido es el siguiente:



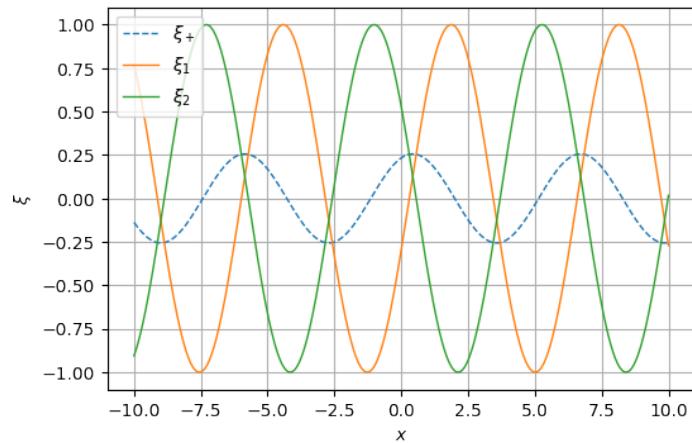
Por otra parte, aplicando la formulación compleja como en (2) para cada una de las ondas de expresiones  $\xi_1 = \xi_0 \sin(kx_1 - \omega t)$  y  $\xi_2 = \xi_0 \sin(kx_2 - \omega t + \delta)$  y sumando ambas expresiones, la figura obtenida es:



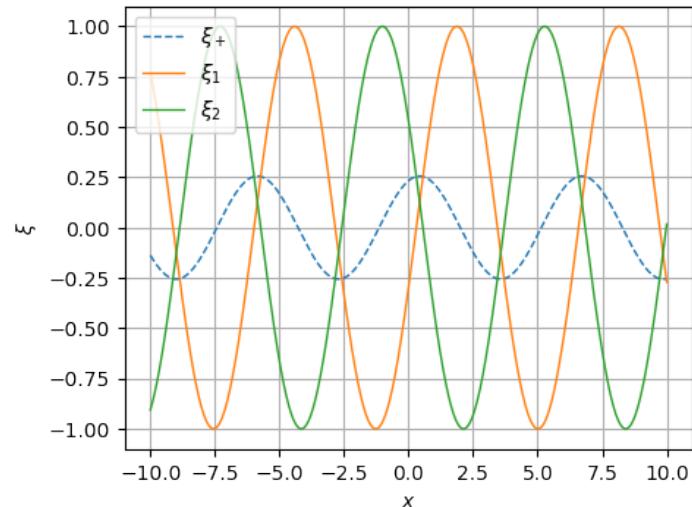
Como podemos apreciar, ambos gráficos son iguales. En ellos podemos apreciar que cuando ambas ondas interieren se suman, dando lugar a una onda resultante cuya amplitud es mayor a la de las ondas iniciales, debido a que se han superpuesto en fase, produciéndose una interferencia constructiva, a pesar de que su frecuencia y número de ondas se mantiene igual. Además, la fase de la onda resultante es la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales.

## 2. Segundo caso

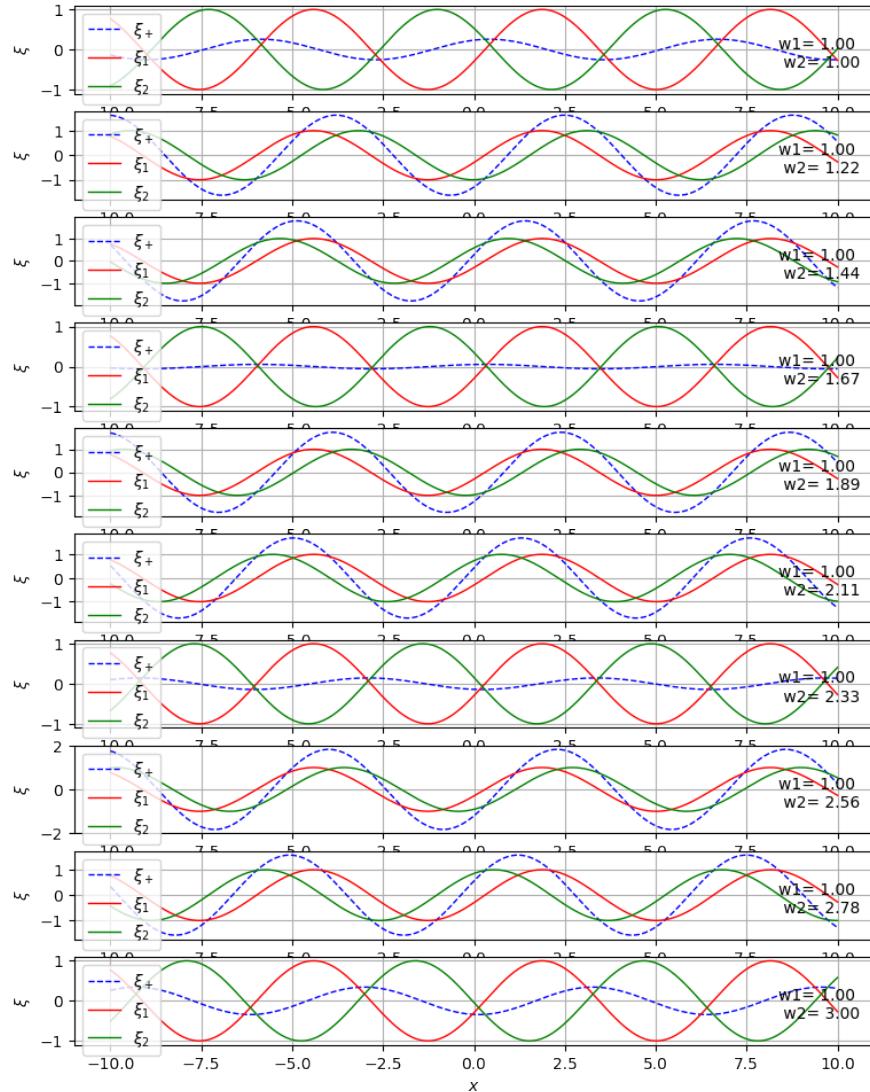
En esta ocasión estudiaremos la interferencia entre dos ondas de igual amplitud y frecuencia pero con velocidades opuestas. Para ello, deberemos tomar los valores de  $k$  con signos opuestos, pues como hemos dicho anteriormente la velocidad de propagación de las ondas viene dada por el cociente  $\omega/k$ . De esta forma, los valores que tomaremos serán  $\xi_0 = 1$  para la amplitud y  $\omega = 1$  para la frecuencia de ambas ondas,  $k_1 = 1$  para la primera onda y  $k_2 = -1$  para la segunda. Por otra parte, el valor del tiempo y del desfase los obtenemos de forma aleatoria, de forma que tenemos  $t = 40s$  y, de nuevo,  $\delta = 8,59 \cdot 10^{-1}$  rad.



En este caso observamos que la amplitud de la onda resultante es menor que la de las iniciales. Se ha producido una interferencia destructiva, ya que las ondas se han superpuesto en antifase. Lo mismo ocurre si usamos la formulación de Euler de la expresión (2), como podemos observar en la siguiente figura:



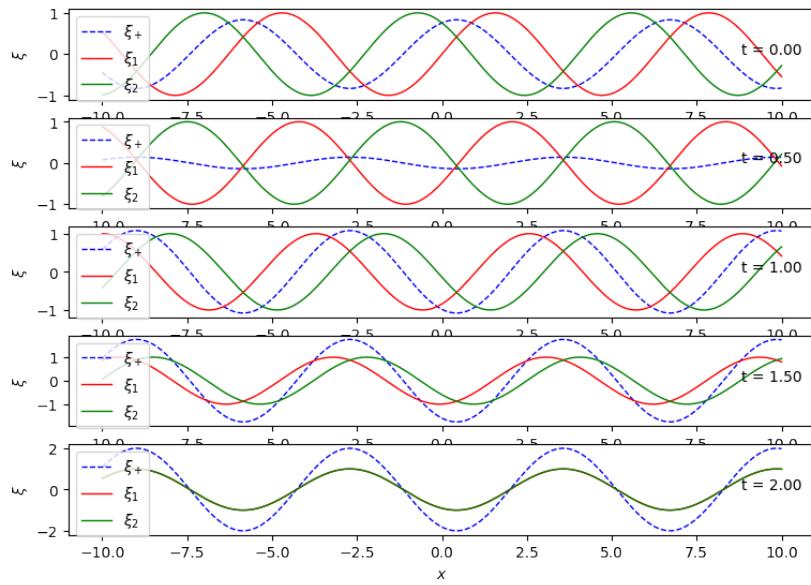
Ahora veamos lo que ocurre si las ondas tienen frecuencias ligeramente diferentes. Para ello, veamos qué sucede si dejamos fija la frecuencia de la onda 1 y variamos la de la onda 2. Obtenemos los siguientes gráficos:



El primer gráfico se corresponde con el obtenido antes para iguales frecuencias. En el segundo la frecuencia de la segunda onda ha aumentado, y podemos observar que se produce una interferencia de forma que la amplitud de la onda resultante es mayor que la de las ondas iniciales. Lo mismo ocurre en el tercero, en la que la frecuencia de la segunda onda es todavía mayor. Sin embargo, en el cuarto se vuelve a anular las ondas entre sí. Este mismo patrón se sigue repitiendo en el resto de gráficos.

Vemos que esto se debe a cómo se colocan las ondas una respecto de la otra. En los gráficos 1, 4, 7 y 10 las ondas se cancelan mutuamente, pues están completamente desfasadas, es decir, la cresta de una onda coincide con el valle de la otra. Sin embargo, en el resto de gráficos las ondas se suman, dando una de mayor amplitud, debido a que las crestas de una coinciden con los de la otra, y lo mismo ocurre con los valles.

Para finalizar, veamos qué ocurre para distintos tiempos. Para ello, consideremos los gráficos siguientes:



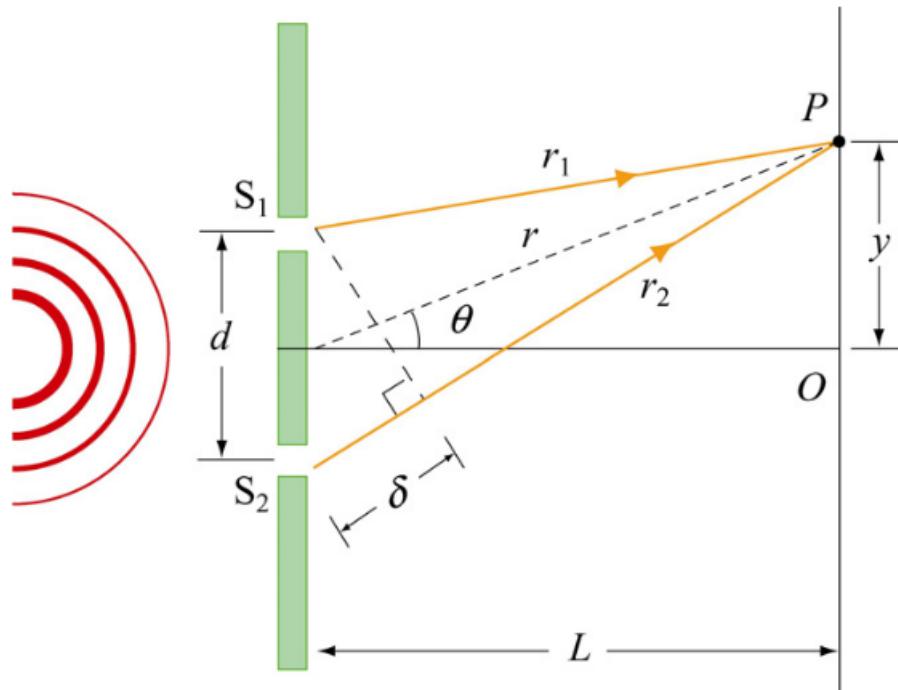
Para  $t = 0$  vemos que la onda resultante es algo menor que las iniciales, aunque estas no se anulan del todo entre sí, pues, aunque no están en fase, tampoco están completamente desfasadas. Sin embargo, para  $t = 0,5s$  sí que se cancelan casi por completo, pues el desfase entre las ondas es mucho mayor. Por otro lado, para  $t = 1s$  la onda resultante tiene una amplitud algo mayor que la de las ondas iniciales, aunque esta es mayor para  $t = 1,5s$ , donde casi están en fase. Por último, para  $t = 2s$ , las ondas están totalmente en fase, por lo que la amplitud de la onda resultante es el doble de la de las iniciales.

Este resultado se corresponde con el que obtenemos con la expresión (3), según la cual la amplitud de la onda resultante es igual a  $2\xi_0 \cos \frac{\delta}{2}$ .

Además, en este caso también hemos podido observar que ha seguido sucediendo lo que habíamos dicho en el primer caso; que la onda resultante tiene una fase igual a la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales.

### 3. Tercer caso

En esta ocasión vamos a estudiar el caso de una interferencia sobre una pantalla de dos ondas en fase producidas al incidir un frente de ondas plano en una pared con dos rendijas, tal como se muestra en la siguiente imagen:



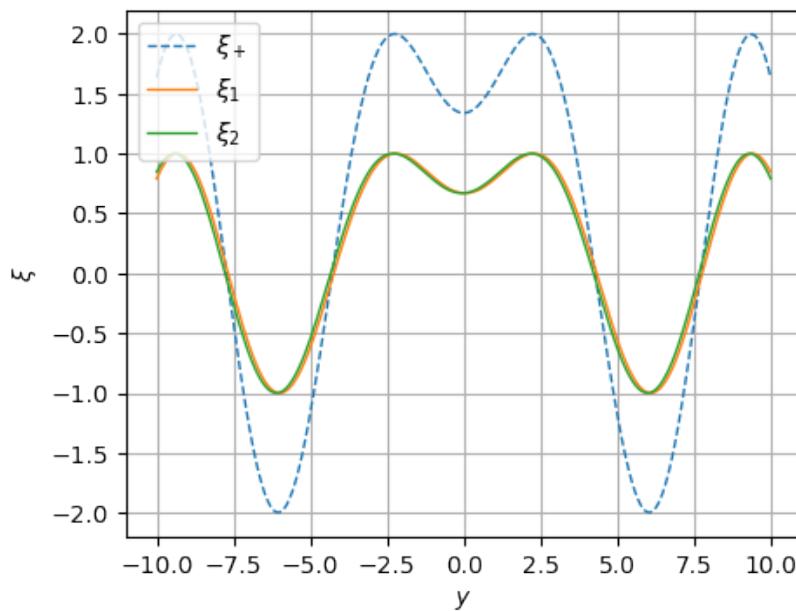
En la rendija superior se genera una onda que produce una perturbación en el punto  $P$  de la pantalla, cuya expresión viene dada por  $\xi_1 = \xi_0 \sin(kr_1 - \omega t)$ . Por otra parte, en la rendija inferior se genera otra onda que produce una perturbación dada por  $\xi_2 = \xi_0 \sin(kr_2 - \omega t)$ . Para empezar, obtenemos de forma aleatoria la distancia  $y$  y el tiempo. En nuestro caso, los valores obtenidos son  $L = 85m$  y  $t = 30s$ . Además, tomaremos  $d = 0,1m$ . A continuación sumaremos ambas ondas según  $\xi = \xi_0 \sin(kr_1 - \omega t) + \xi_0 \sin(kr_2 - \omega t)$ . De esta forma, vamos a representar la intensidad de ambas ondas y de la onda resultante en función de la posición del punto  $P$  sobre la pantalla. Esta onda que incide sobre el punto  $P$  es una onda electromagnética.

Tal y como hemos desarrollado en la introducción de la práctica, la expresión de la onda resultante de dos ondas que interfieren se puede expresar como:

$$\xi_T = 2\xi_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2}\right)$$

Claramente, esta onda representa una variación armónica con el tiempo en el punto P cuya amplitud es  $2\xi_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right)$ , y cuya pulsación es  $\omega$ .

El gráfico obtenido para los valores considerados es el siguiente:



En él podemos observar que ambas ondas tienen la misma amplitud para cualquier posición del punto P que consideremos. La máxima amplitud que alcanzan toma el valor  $\xi_0 = 1V/m$ , de forma que cuando ambas se suman, la onda resultante alcanza un valor máximo para su amplitud de  $\xi_{0T} = 2V/m$ . Esto se corresponde con la expresión anterior, que se puede reescribir como la expresión (3), en la cual teníamos que la amplitud de la onda resultante es  $\xi_{0T} = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cos(0) = 2V/m$ .

En los puntos en los que tenemos una amplitud negativa, debemos tomar el valor absoluto de la amplitud, de forma que obtenemos el mismo valor que para los valores positivos. Estos puntos están en oposición de fase.

Por otra parte, la intensidad de esta onda será proporcional al cuadrado de la amplitud. Tenemos que  $I = uc$ , donde  $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\xi_0^2$  representa la densidad de energía media. De esta forma, la intensidad media de la onda resultante va a ser:

$$I = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varepsilon_0 \cdot \xi_{0T}^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 m/s \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 \cdot (2V/m)^2 = 0,00531 W/m^2$$

Veamos ahora qué ocurre si añadimos un desfase constante, por ejemplo  $\delta = \pi$ . Desarrollemos la expresión de la onda resultante en el caso de añadir este desfase:

$$\xi_T = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0[\sin(kr_1 - \omega t) + \sin(kr_2 - \omega t + \delta)]$$

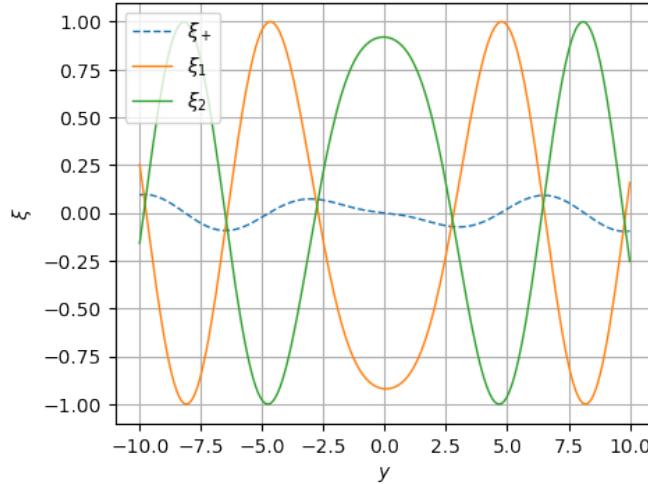
Ahora, aplicamos la siguiente expresión trigonométrica:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

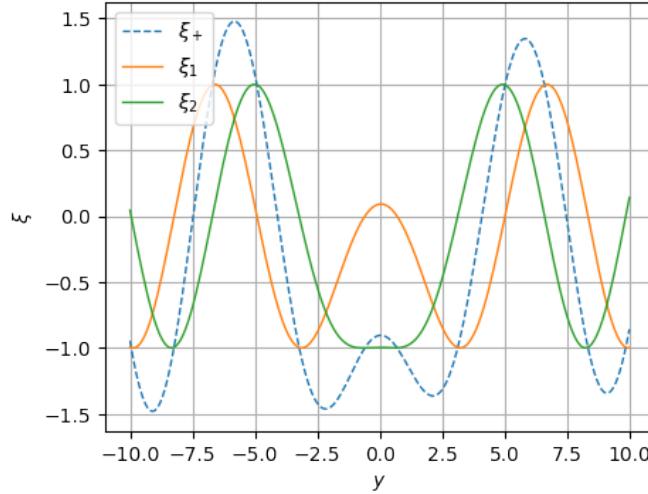
Tomando  $\alpha = kr_1 - \omega t$  y  $\beta = kr_2 - \omega t + \delta$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \xi_T &= \xi_0 \cdot 2 \sin\left(\frac{kr_1 - \omega t + kr_2 - \omega t + \delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{kr_1 - \omega t - (kr_2 - \omega t + \delta)}{2}\right) = \\ &= 2\xi_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1) + \delta}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2) + \delta}{2}\right) \end{aligned}$$

Vemos que la amplitud de esta onda es  $2\xi_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1) + \delta}{2}\right)$ . Hagamos la representación gráfica. En este caso, los valores aleatorios obtenidos son  $L = 15m$  y  $t = 30s$ . Obtenemos:

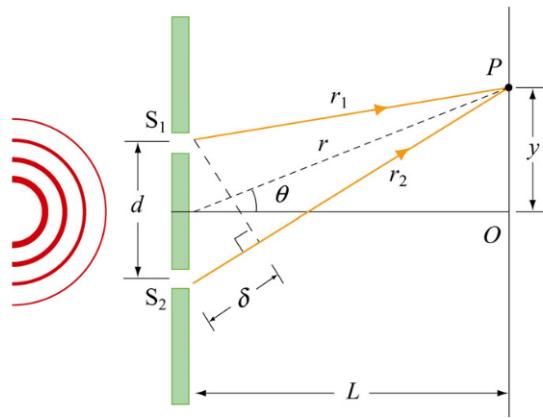


Vemos que al tomar este desfase, la onda resultante tiene una amplitud casi nula, pues cuando la primera onda tiene una amplitud determinada, la segunda tiene esa misma amplitud pero de signo contrario, restándose entre sí. Si ahora tomamos un desfase  $\delta = \pi/2$  obtenemos, para  $L = 2m$  y  $t = 20s$ :



Vemos que ambas ondas se suman, aunque la onda resultante ya no alcanza una amplitud de 2. Además, en  $y = 0$  vemos que disminuye la amplitud de la onda resultante, al igual que para la onda primera, pero en menor medida, debido a que esta se suma con la segunda, la cual en este punto tiene una amplitud mayor.

Por último, estudiemos las simplificaciones que podemos hacer cuando  $L \gg d$ , es decir, cuando la distancia a la que se encuentre la pared respecto de la pantalla sea mucho mayor que la distancia entre las rendijas. De nuevo, consideremos la siguiente imagen:



Tomando la aproximación  $L \gg d$ , tendremos que  $r_1$  y  $r_2$  serán prácticamente paralelos, por lo que  $\delta \approx r_2 - r_1 = d \sin \Theta$ . Por otra parte sabemos, por trigonometría, que  $\tan \Theta = \frac{y}{L}$ . Además, haciendo la aproximación  $L \gg d$ , tenemos que  $\frac{y}{L} = \tan \Theta \approx \sin \Theta \approx \Theta$ . Por lo tanto, llegamos a que  $\delta \approx d \frac{y}{L}$ .