

OS IMPACTOS DA PANDEMIA DE COVID-19: UM ESTUDO MULTICASO NA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE AÇÕES DA BOLSA BRASILEIRA

Ana Paula dos Santos Gularte

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil
Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP, Brasil
gularte@ita.br

RESUMO

De maneira inesperada e severa, o impacto que a crise da COVID-19 causou nas principais bolsas de todo o mundo é inegável. Diante desse cenário instável, este trabalho objetivou analisar o impacto causado pela pandemia na composição de carteiras de investimento em ações com restrições de cardinalidade. A função objetivo teve como base a Teoria de Seleção de Portfólio do economista Harry Markowitz, considerando limitações práticas do mercado financeiro tornando o problema NP-completo. Os resultados mostraram que o Algoritmo Genético encontrou soluções eficientes para resolver problema de seleção de portfólio com restrições de cardinalidade, atingindo a solução ótima na maioria das cardinalidades e mantendo uma boa alocação dos ativos.

PALAVRAS CHAVE: Otimização de Carteiras de Investimento, COVID-19, Restrição de Cardinalidade.

Tópicos: GF – Gestão Financeira, MH – Metaheurísticas

ABSTRACT

Unexpectedly and severely, it is undeniable the impact caused by the COVID-19 pandemic the major stock markets around the world. In this unstable scenario, this study aim to analyze the impacts caused by the pandemic on the composition of investment portfolios in actions involving cardinality restrictions. The objective function was based on the Portfolio Selection Theory proposed by the economist Harry Markowitz, considering practical limitations of the financial market which makes the problem NP-complete. Results indicated that the Genetic Algorithm found efficient solutions to solve portfolio selection problem with cardinality constraints, achieving the optimal solution in most cardinalities and maintaining a good allocation of assets.

KEYWORDS: Portfolio Optimization, COVID-19, Cardinality Constraint.

Paper topics: GF - Financial Management, MH - Metaheuristics

1. Introdução

A pandemia de COVID-19 teve início no Brasil em meados de fevereiro de 2020 com a confirmação dos primeiros casos positivos para a doença. Com ela, presenciamos crises em vários setores como saúde, economia, turismo, educação, só para mencionar alguns exemplos, frutos do desemprego, da alta da inflação, da paralisação de alguns desses setores, das incertezas com o futuro. Se, por um lado, o cenário é bastante assustador e crítico, por outro, o número de investidores individuais na bolsa de valores brasileira aumentou nesse período. Em um levantamento feito pela [B]³ (acrônimo de Brasil, Bolsa, Balcão) [B3[1], 2020], identificou-se que o número de novos investidores pessoa física entre 2019 e 2020 quase dobrou chegando à 3 milhões de investidores individuais em setembro de 2020. Adicionalmente, os dados de diversificação em ativos investidos revelaram que 48% das pessoas físicas têm atualmente 5 ou mais ativos em carteira, em comparação a 26% em 2016 [B3[1], 2020].

A pandemia levou ao isolamento social mais de 4,5 milhões de pessoas em todo o mundo [AFP, 2020] forçando à interrupção de negócios pelo fechamento de comércios, indústrias e serviços. No entanto, com a aceleração da transformação digital, foi possível que muitos setores mantivessem suas atividades de forma remota e ainda produtiva. E, por que não mencionar o crescimento do comércio eletrônico e o novo comportamento do consumidor varejista.

Os setores dos quais os ativos fazem parte têm grande relevância em sua análise, uma vez que contribuem para o entendimento a partir do comportamento da empresa em particular ou do setor que ela está inserida no mercado. A atuação das empresas e o grau de risco assumido influenciam nas variações dos ativos [Debastiani & Russo, 2008]. Porém, há casos em que determinado setor da economia pode crescer mesmo em meio a uma crise, possuindo assim maior imunidade às variações de mercado. Além disso, em um mesmo setor de atuação as empresas tendem a ter correlação positiva, anulando com isso os efeitos da diversificação. Sendo assim, é importante montar uma carteira de investimentos que tenha uma boa diversificação, considerando ativos com baixa correlação entre si; e que seja bem alocada na composição de setores que respondem de maneiras distintas aos ciclos de mercado e à atividade econômica.

Quando se tem um sistema de dados descentralizado, possibilitando um fluxo de troca livre de informações e tomadas de decisões independentes, diante de uma crise é possível que o próprio mercado competitivo desenvolva a inovação esperada para alcançar o equilíbrio desejado. O historiador Yuval Harari [2016] menciona em seu *best seller* ‘Homo Deus’ que [...] *a bolsa de valores é o sistema de processamento de dados mais rápido e mais eficiente criado pelo gênero humano. [...]. A bolsa de valores faz a economia global funcionar e leva em conta tudo o que acontece no planeta — e além dele. Os preços são influenciados por experimentos científicos bem sucedidos, por escândalos políticos no Japão, por erupções vulcânicas na Islândia e por atividades irregulares na superfície solar (p.323).*

Corroborado por Goetzmann et al. [2012] que afirmam a respeito da tomada de decisão dos investidores ter embasamento nas informações, e essas informações de mercado são úteis para apoiá-los quando existem pelo menos análises de histórico de preços e volumes, disponíveis de forma clara, com qualidade e veracidade. Já Lemos [2018] afirma que os padrões gráficos dificilmente são tão claros de forma que vários investidores concordem com sua análise. Além disso, as decisões de investimento possuem diferentes preferências e levam em consideração aspectos como horizonte de investimento, objetivos de vida e tolerância ao risco. Contudo, é preciso ter clareza no entendimento dos ativos financeiros olhando para trás e usando essas referências como orientação para o futuro. Jobs [2005] assume: “*Você não pode conectar os pontos olhando para a frente. Você só pode conectá-los olhando para trás. Então você tem que confiar que os pontos de alguma forma se conectam no seu futuro.*”

Evidências anteriores sugerem que tanto as expectativas de retorno quanto de risco podem variar substancialmente ao longo do tempo, como resultado de eventos macroeconômicos ou experiências individuais de ganhos ou perdas [Zhou, 2020]. Quando estamos avaliando fatores de risco, em face da evolução temporal dos preços e da volatilidade do mercado, é configurada por

Debastiani e Russo [2008], como riscos sistemáticos que são aqueles no qual afetam todos os ativos, com maior ou menor intensidade, independente do setor econômico ou do tamanho da empresa.

Uma expressão muito usada quando se trata de investimentos é a metáfora “*Não colocar todos os ovos na mesma cesta*”. Há uma passagem na obra de Shakespeare [2013] escrita por volta de 1560 que remonta à essa ideia. O protagonista Antônio, um comerciante experiente, afirma que nem mesmo a sorte ou o mar furioso o deixaria preocupado com seus pertences, pois como ele não coloca toda a carga em apenas um barco, caso a sorte mudasse e o barco afundasse ele não teria problemas. “*Sou grato à minha sorte; mas não confio nunca os meus haveres a um só lugar e a um barco, simplesmente nem depende o que tenho dos azares do corrente ano, apenas. Não me deixam triste, por conseguinte, as minhas cargas*”.

Nesse sentido, a diversificação é base da Teoria Moderna de Portfólio, presente no início do século XX a tese do economista Harry Markowitz [1952] vencedor do Prêmio Nobel de Economia que aprofundou a forma como o risco de um portfólio estava relacionado com as covariâncias dos ativos individuais que fazem parte dessa carteira. Todavia, o autor estabeleceu o que era conhecimento comum no mercado de investimentos e criou uma maneira pelo qual o investidor pudesse escolher portfólios diversificados e otimizados. O portfólio é formado por todas as combinações possíveis dos ativos disponíveis, porém; somente portfólios que proporcionam o maior retorno esperado para determinado risco podem ser considerados eficientes. Um dos grandes investidores dos tempos atuais, Ray Dalio [2018] já dizia: “[...] *diversificação era a chave para reduzir riscos sem reduzir o rendimento*”.

O modelo de otimização de portfólio proposto por Markowitz não considera algumas limitações práticas do mercado financeiro. Como já citado anteriormente, os dados de diversificação, em ativos investidos, revelaram que 48% das pessoas físicas têm atualmente 5 ou mais ativos em carteira em comparação a 26% em 2016 [B3[1], 2020]. Como neste trabalho foram selecionados 39 ativos que compuseram a carteira de investimentos, para avaliação nos períodos da pandemia definidos; essa perspectiva de mercado, mais a flexibilização para diversos perfis de investidores, levaram as seguintes restrições: (1) restrição binária máxima de 20% para alocação da carteira; (2) restrição binária mínima entre 0% e 5%; e c) restrição de cardinalidade que faz com que seja limitado o conjunto de portfólios variando entre 5 e 12 ativos. Embora essas restrições não façam parte do modelo de Markowitz, a praticabilidade é mantida.

Com a adição das restrições acima, principalmente a restrição de cardinalidade, tem-se um aumento na complexidade do problema, o que torna a Seleção de Portfólios NP-Completo. Como publicado no jornal IEEE Access® no artigo “*Optimal Portfolio Management for Engineering Problems Using Nonconvex Cardinality Constraint: A Computing Perspective*”, escrito por Khan et al. [2020] que a proposta apresentada por Markowitz presume que o investidor irá investir seu capital em cada uma das ações de todo o conjunto de portfólio. Contudo, em cenários práticos, pode ser desejável limitar esse conjunto de portfólios, e esse limite é chamado de restrição de cardinalidade.

Dentre os trabalhos desta classe Suárez et al. [2010] em sua publicação na revista IEEE Computational Intelligence Magazine afirma que, “*Imposing limits on the number of different assets that can be included in the investment transforms portfolio selection into an NP-complete mixed-integer quadratic optimization problem that is difficult to solve by standard methods.*” Em virtude da dificuldade do problema, a adoção de métodos heurísticos se justifica para sua resolução (Hanaoka et al., 2016) que pode ser aplicado para identificar soluções quase ótimas, em um custo computacional razoável. Foi o que nos levou a propor neste trabalho, uma solução de otimização considerando um método exato para problema de programação quadrática e uma metaheurística denominada algoritmo genético.

De maneira inesperada e severa, o impacto que a crise da COVID-19 causou no Brasil e nas principais bolsas de todo o mundo é inegável. Diante de um cenário instável, competição pelos mesmos mercados, e investidores que se deixam levar pelo medo; o papel da inovação se torna

crucial para a sobrevivência em momentos de crise podendo agregar valor para o investidor e ampliar sua capacidade de análise e tomada de decisão.

Nesse sentido, diante do que já foi apresentado, este trabalho propôs analisar o impacto causado pela pandemia de COVID-19 na composição de carteiras de investimento em ações que envolvem restrições de cardinalidade e encontrar o peso de cada ação nas carteiras ótimas, ao longo de cada um dos períodos definidos.

2. Programação Quadrática

O problema de programação quadrática é um problema de otimização matemática não-linear (PNL) e consiste na tentativa de minimizar ou maximizar uma função objetivo polinomial do segundo grau sujeita a restrições lineares. Definido por Colin [2019] como um problema que possui uma função objetivo em que pelo menos um dos termos é quadrático, ou que outros termos são no máximo quadrático e cujas restrições lineares. Tais características fazem com que o problema tenha função objetivo e restrições convexas, com um único ponto ótimo global. Para um problema de programação linear (PL) a solução ótima sempre ocorre em um ponto de canto de sua região viável, no entanto, em problemas de PNL isso não acontece, a solução ótima para alguns desses problemas pode não ocorrer nos limites da região viável, mas em algum ponto no interior da região factível [Ragsdale, 2014].

Esse tipo de problema está presente em diversas áreas, como engenharia, economia, ciências e matemática; assim como é possível resolver problemas de otimização de carteiras de investimentos, como proposto neste trabalho, outro exemplo são problemas de maximização de margem de um determinado produto. Como enfatizado por Lay e McDonald [2018] a importância de problemas que apresentem ortogonalidade e mínimos quadráticos é devido ao papel fundamental que a ortogonalidade tem em cálculos computacionais e análise linear numérica, e também a um número muito frequente de sistemas lineares incompatíveis na prática cotidiana.

Diante disso Hoppe [2006] apresentou uma estratégia para resolver esse tipo de problema da seguinte forma. Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ de n elementos reais, representando uma possível solução. A função objetivo f é da forma: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (1. a)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} q_{11}x_1^2 + \dots + \frac{1}{2} q_{nn}x_n^2 + q_{12}x_1x_2 + \dots + q_{nn-1}x_nx_{n-1} + b_1x_1 + \dots + b_nx_n \quad (1. b)$$

Com q_{ij} e b_i coeficientes reais. Pode-se reescrever (1.b) matricialmente:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x \quad (2)$$

Sendo $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica positiva definida e $b \in \mathbb{R}^n$. As restrições lineares formam um conjunto de m equações e p desigualdades, que são resumidas matricialmente da seguinte forma: $A_1x = c$ (3. a), $A_2x \leq d$ (3. b), com $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

A solução para esse tipo de problema pode ser dividida em dois passos conforme abaixo:

1º passo: consiste em resolver um problema simplificado, com restrições de igualdade escrito como: minimizar $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ (4. a), sujeito a $Ax = c$ (4. b)

Com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$ posto linha completo, e é resolvido a partir da solução (x^*, λ^*) do sistema KKT (Karush-Kuhn-Tucker):

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sendo $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ o multiplicador de Lagrange associado. Seja $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ a matriz cujas colunas geram $\ker A^1$. Então, é possível provar que, se $Z^T B Z$ é positiva definida, então x^* é solução única global de (4. a), (4. b). A solução do sistema (5) pode ser direta, pela decomposição LDL^T ou iterativa, pelos métodos de Krylov.

¹ $\ker A$ é o núcleo ou espaço nulo da matriz. Denotado por alguns autores o núcleo de A como $Nul A$ ou $Ker A$. A notação $Ker A$ é padrão em textos em inglês e alemão, pois, nessas línguas, as palavras usadas para núcleo são *Kernel* e *Kern*, respectivamente [Koiller, 2020].

2º passo: expande-se a solução para restrições de desigualdades.

A extensão do problema simplificado para o problema mais geral (com restrições de desigualdade) é feita por meio do método *active-set*. Basicamente, o que se faz é iniciar com uma solução factível e com um conjunto de restrições escolhidas para se tornarem igualdades por meio de variáveis de folga (as demais são negligenciadas). Iterativamente, o método atualiza a solução e o conjunto de restrições, até chegar na solução ótima.

O problema de otimização de carteira segundo o modelo de Markowitz é um caso particular em que $b = 0$ e $\frac{1}{2}Q$ é a matriz de covariância dos retornos (que é sempre, no mínimo, positiva semi-definida). A função objetivo f é igual a covariância σ^2 , que é interpretada como o risco. A restrição de igualdade vem da necessidade de que a soma de todas as frações dos ativos seja igual a 1, e as restrições de desigualdade vem das composições máximas e mínimas que se deseja para um certo ativo da carteira.

3. Algoritmo Genético

Os algoritmos genéticos (AGs) foram inspirados pela teoria da evolução de Darwin que concebeu técnicas heurísticas de busca imitando o processo na reprodução biológica de seleção natural e hereditariedade, permitindo aplicar o princípio da sobrevivência, com a eliminação das soluções menos aptas e geração de descendentes das soluções mais aptas que representam possíveis soluções para um problema de otimização [Arenales et al. 2011; Ragsdale, 2014]. Atualmente considerada entre as heurísticas mais famosas, especialmente devido a sua eficiência, Colin [2019] complementa que as soluções iniciais são viáveis e geradas aleatoriamente, formando um conjunto populacional inicial de indivíduos. Para cada iteração é calculado o valor da função objetivo, ou a qualidade do indivíduo. Os indivíduos com piores valores de função objetivo, são eliminados, mantendo a população em um tamanho desejável até que o critério de parada seja estabelecido.

Denominado conforme [Colin, 2019; Ragsdale, 2014] de cromossomos a população inicial (vetores numéricos), e genes (valores numéricos) os componentes individuais dentro de um cromossomo; os AGs são procedimentos iterativos que prevalece um agrupamento de soluções a cada iteração. As soluções iniciais são geradas aleatoriamente (na maioria viáveis), formando o grupo populacional inicial de indivíduos. Novos cromossomos são criados pela recombinação² e mutação³. A cada solução são escolhidos os indivíduos mais aptos para reproduzir na geração corrente, ou seja, é calculado o valor da função objetivo a cada iteração e mantidos os melhores valores, eliminando os piores resultados, ou indivíduos com piores aptidões. Esse resultado é um conjunto de genes que evolui com o tempo a fim de produzir soluções cada vez melhores para o problema. Esse processo ocorre até que o critério de parada seja estabelecido.

Os principais termos utilizados são: **Cromossomo**: é um ponto no espaço de busca; **Gene**: elemento do conjunto que representa o cromossomo; **Indivíduo**: membro da população que é representado pelo seu cromossomo/gene e por sua aptidão; **Geração**: iteração do algoritmo genético; **Genótipo**: informação contida no cromossomo; **Alelo**: em biologia, o termo representa uma das possíveis formas de um gene. No nosso caso, ele representa os valores que o gene pode assumir. Se o gene for uma variável binária, os valores 0 e 1 são os alelos; **População**: conjunto de cromossomos ou soluções; e **Aptidão**: valor da função objetivo (ou outra função dependente dela) associada a um cromossomo.

Um simples AG foi representado por Mitchell [1998] onde cada iteração deste processo é chamada de geração e cada etapa é constituída da seguinte forma:

1º etapa: iniciar com uma população gerada aleatoriamente de cromossomos com n soluções candidatas.

² Recombinação é a troca probabilística de valores entre vetores de solução, também denominada na literatura de AG como crossover.

³ Mutação é a substituição aleatória de valores em um vetor de solução, o operador seleciona um gene aleatoriamente e o muda para um alelo diferente, criando, portanto, um novo cromossomo.

2º etapa: calcular a aptidão ou *fitness* de cada cromossomo na população.

3º etapa: repetir as etapas a seguir até que n filhos tenham sido criados.

- selecionar um par de cromossomos pais da população atual, a probabilidade de seleção considerando uma função crescente de aptidão. A seleção é feita "com substituição", o que significa que o mesmo cromossomo pode ser selecionado mais de uma vez para se tornar um pai.
- com a probabilidade, realizar o *crossover* com o par em um ponto escolhido aleatoriamente (escolha com probabilidade uniforme) para formar dois descendentes. Caso não ocorra, são formados dois descendentes que são cópias exatas de seus respectivos pais.

(Observar que aqui a taxa de cruzamento é definida como a probabilidade de que dois pais se cruzem acabou em um único ponto. Existem também versões de "crossover multiponto" do AG em que o taxa de cruzamento para um par de pais é o número de pontos em que ocorre um cruzamento).

- transformar os dois descendentes com probabilidade de mutação e inserir os cromossomos resultantes na nova população.

Se n for ímpar, um novo membro da população pode ser descartado aleatoriamente.

4º etapa: substituir a população atual pela nova população.

5º etapa: ir para a etapa 2 até que o critério de parada seja estabelecido.

Na Figura 1 a seguir é representado um simples fluxograma do Algoritmo Genético.

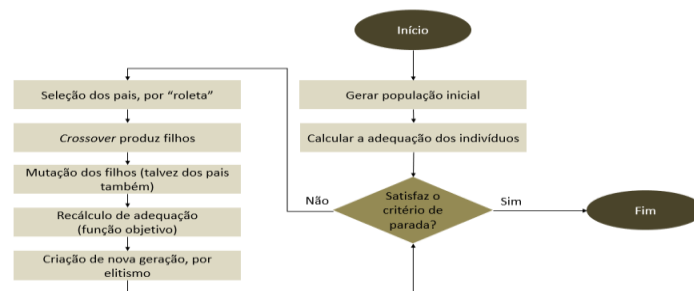


Figura 1: Fluxograma Básico do Algoritmo Genético.

Em adição as etapas acima, é necessário que sejam feitos o *tuning* de parâmetros. Para cada tipo de problema, dependendo de como os parâmetros do modelo são configurados, o AG pode:

- Convergir mais ou menos rápido para a solução; e
- Conseguir solução mais próxima do ótimo global ou ficar presa em ótimos locais.

São parâmetros importantes para "tunar" para cada tipo de problema, tais como:

- Quantidade de indivíduos da população;
- Se a população é constante ou tem taxa de crescimento;
- Crossover em quantos pedaços;
- Quantos crossover por iteração;
- Quantas mutações por iteração; e
- Qual o critério para ocorrência de mutação.

4. Implementação

4.1 Pré Processamento

Os dados foram extraídos da plataforma digital de Séries Históricas da [B]³ [B3[2], 2020], onde foi selecionado trinta e nove ativos financeiros representando os maiores volumes negociados na bolsa brasileira durante o ano de 2019. O processamento dos dados seguiu orientação disponível

no site da B³ [B3[3], 2020]. A escolha se deu, pois segundo especialista de mercado [Economatica, 2019] estes ativos levaram a 100 mil pontos do Ibovespa, a maior marca de fechamento já registrada pelo índice dos últimos 50 anos, além do recorde histórico na média de negócios em reais feitas em 2019. O período de análise é recente, de 1º/Out/2019 a 30/Set/2020 consistindo em 249 dias de negociações. A definição do período levou em consideração o estudo realizado pelo Laboratório de Inovação de Dados da Universidade de Singapura [Luo, 2020] em que foi previsto pelo modelo o início, o pico de contágio e o fim da pandemia no Brasil. Com isso, este estudo considerou os seguintes períodos de avaliação:

Período I: aqui denominado como ‘Pré-Pandemia’. É o período entre 1º/Out/2019 e 31/Dez/2019, em que as notícias sobre pandemia ainda pertenciam ao noticiário internacional exclusivamente.

Período II: aqui denominado como ‘Início da Pandemia’. É o período entre 1º/Jan/2020 e 31/Mar/2020, em que os primeiros casos foram identificados e reportados, sendo que a primeira morte foi notificada em 12 de março [Ministério_da_Saúde, 2020].

Período III: aqui denominado como ‘Crescimento da Pandemia’. É o período entre 1º/Abr/2020 e 30/Jun/2020, em que houve aceleração dos casos no país.

Período IV: aqui denominado como ‘Estabilização da Pandemia’. É o período entre 1º/Jul/2020 e 30/Set/2020, em que a média de mortes atingiu um platô, mesmo este sendo em um nível alto (mais de 1.000 mortes por dia).

4.2 Metodologia

A metodologia, classificada em fenomenológica, será detalhada na sequência.

4.2.1 Modelo de Markowitz

Iniciamos examinando os dois atributos mais frequentes na distribuição de retorno (também chamada função de frequência) de cada ativo individualmente:

- a) a média de tendência central ou retorno esperado; e
- b) o desvio-padrão ou dispersão em torno da média ou medida de risco.

E para cada par de ativos, será examinado:

- a) a covariância (como os retornos de dois ativos se relacionam entre si).

A análise baseará no modelo de Markowitz, o qual originalmente inclui: a) análise de ativos; b) análise de carteiras; e c) seleção das carteiras.

Como se pode calcular o retorno esperado e a variância de uma carteira de ações? Markowitz [1952] definiu o risco na área financeira como sendo a variância ou o desvio em relação a uma média. No caso de uma carteira de ativos, soma-se as variâncias individuais de cada ação e covariâncias entre pares de ações da carteira, de acordo como o peso de cada ação na carteira. Ainda comenta que deve haver uma carteira de ações que maximiza o retorno esperado e minimiza a variância, e esta deve ser a carteira recomendada para um investidor.

Cada ativo (i) possui um valor de fechamento no dia t dado por V_t^i . Assim, pode-se definir o retorno entre o dia $t - 1$ e o dia t por $R_t^i = \ln(V_t^i/V_{t-1}^i)$. Dessa forma, cada ativo possui um vetor de retornos diários $\mathbf{R}^i = [R_1^i \ R_2^i \ \dots \ R_N^i]^T$, em que N é o número total de dias analisados em um determinado período. O retorno médio do ativo (i) é dado por $m_i = (R_1^i + R_2^i + \dots + R_N^i)/N$, isto é, a média do vetor de todos os retornos diários. Finalmente, pode-se definir a matriz de covariância $cov = (\sigma_{ij})_{N \times N}$ entre os retornos diários, de modo que:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (R_k^i - m_i)(R_k^j - m_j)$$

O modelo de Markowitz associa a raiz quadrada da variância σ^2 da carteira ao risco. Dessa forma, o problema consiste na tentativa de maximizar o retorno médio da carteira, sujeito a um risco máximo.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } E &= \sum_{i=1}^N X_i \cdot m_i \\ \text{Sujeito a: } \sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \leq \sigma_{max}^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i &= 1 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Onde:

- E : retorno médio da carteira;
 N : é o número de ativos;
 m_i : é o retorno médio do ativo (i);
 X_i : fração do ativo (i) na carteira;
 σ^2 : variância da carteira, modelado como o quadrado do risco;
 σ_{max}^2 : quadrado do risco máximo disposto a ser assumido;
 σ_{ij} : covariância entre o par de ativos se (i) for diferente de (j) e variância se (i) for igual a (j).

A diversificação dos ativos é fundamentada no *trade-off*⁴ entre risco e retorno, no qual o retorno é estimado pelo retorno esperado, e o risco é medido pelo desvio-padrão dessa taxa de retorno. Como definido por Motta e Calôba [2006] a diversificação reduz o risco da carteira, porque retornos de diferentes ativos não possuem alterações de valor em um mesmo sentido, ou seja, correlação $\rho < 1$.

4.2.2 Modelagem Matemática

Para a versão do problema definido neste estudo, além da modelagem clássica de Markowitz descrita acima, a função objetivo irá consistir em:

$$\text{Minimizar: } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (2)$$

$$X_i \geq 0 \quad (3)$$

$$B_i * 0,05 \leq X_i \leq B_i * 0,2 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n B_i = K \quad (5)$$

Onde:

- n : é o número de ativos;
 X_i : fração do ativo (i) na carteira;
 σ^2 : variância da carteira. A raiz quadrada da variância modela o risco;
 σ_{ij} : covariância entre o par de ativos se (i) for diferente de (j) e variância se (i) for igual a (j);
 B_i : variável binária igual a 1 se o ativo (i) entrar na carteira e igual a 0 se o ativo (i) não entrar na carteira;
 K : quantidade total de ativos que compõem a carteira. Neste estudo, serão analisados os resultados para K variando entre 5 e 12.

⁴ *Trade-off* é aplicado no sentido de que, para reduzir o risco de um portfólio, poderá ser necessário abrir mão de retornos maiores (investindo menos em ações mais arriscadas).

Desta vez, o objetivo é minimizar o risco (equação 1), sujeito a restrições mais apertadas. Quando escolhido, um ativo deve ter uma representação na carteira limitada entre 5% e 20%. Caso não seja escolhido, sua representação é nula. Isso é traduzido pela restrição (equação 4). Adicionou-se também a exigência de um número fixo K de ativos, ou seja, uma restrição de cardinalidade, que naturalmente torna o problema NP-completo, exigindo maior esforço computacional para que se atinja a solução ótima [Villela, 2008].

1ª restrição: indica que desejamos usar todo o montante disponível nos investimentos, ou seja, a soma de todas as frações dos ativos deve ser igual a 1 (equação 2);

2ª restrição: é usada para evitar que a porcentagem do capital utilizado em cada ativo seja negativa (equação 3);

3ª restrição: representada pela variável binária B , indica um limite inferior de 5% e superior de 20% que será utilizado para distribuir os pesos em cada ativo selecionado para composição da carteira. O limite inferior de alocação tem o objetivo de garantir que o capital alocado em um papel não seja muito pequeno, a ponto de gerar para o investidor um controle desnecessário com pouca rentabilidade; já o limite superior de alocação tem o objetivo de garantir que o capital alocado em um papel não seja muito grande, reduzindo assim o risco de concentrar muito capital em um único ativo (equação 4).

4ª restrição: conhecida como restrição de cardinalidade, fará uso da variável independente K que irá definir a cardinalidade da carteira, ou seja, a quantidade total de ativos que a carteira poderá ser formada, neste estudo os valores de K definidos foram {5,6,7,8,9,10,11,12} que irá contribuir para determinar um patamar mínimo e máximo de papéis (equação 5).

4.3 Resultados e Discussões

A implementação da modelagem financeira foi feita em linguagem e softwares IBM ILOG® CPLEX® Optimization Studio e RStudio®.

4.3.1 Retornos Esperados dos Ativos

O retorno esperado dos setores econômicos que representam os ativos selecionados nos 4 períodos estudados está relacionado na Tabela 1 abaixo. Vale destacar a presença de retornos negativos em todos os papéis com o período que marcou o Início da Pandemia (Jan/Mar), gerando grande queda nos preços quando os mercados perceberam que a economia seria muito afetada com a COVID-19. Os setores mais impactados foram Turismo, Seguros, Transporte e Logística e Petróleo e Gás. Com as medidas de isolamento social, cancelamento de vários modais de transporte e fechamento de fronteiras já se esperava um cenário com forte desvalorização nos ativos dessas empresas, e como observado nos demais períodos analisados, vem mostrando recuperação lenta e com alta volatilidade.

Setor	Qtd. Papéis	Pré-Pandemia (Out/Dez)	Início da Pandemia (Jan/Mar)	Crescimento da Pandemia (Abr/Jun)	Estabilização da Pandemia (Jul/Set)
Consumo e Varejo	8	0,18%	-0,64%	0,87%	-0,04%
Energia e Saneamento	3	0,12%	-0,72%	0,54%	-0,21%
Financeiro	7	0,19%	-0,90%	0,58%	-0,08%
Holding	1	0,11%	-0,76%	0,15%	-0,13%
Imobiliário e Construção	1	0,37%	-0,96%	0,02%	-0,28%
Mineração	1	0,18%	-0,34%	0,42%	0,09%
Papel e Celulose	1	0,27%	-0,17%	0,05%	0,33%
Petróleo e Gás	3	0,13%	-1,21%	0,66%	-0,15%
Petroquímico	1	0,53%	-1,14%	0,63%	0,07%
Saúde	2	0,30%	-0,33%	0,32%	-1,08%
Seguros	2	0,09%	-1,29%	0,17%	-0,29%
Siderúrgico	3	0,40%	-1,11%	0,72%	0,51%
Transporte e Logística	5	0,17%	-1,25%	0,49%	0,17%
Turismo	1	-0,40%	-2,21%	0,81%	-0,18%
TOTAL MÉDIO PERÍODO	39	0,18%	-0,81%	0,56%	-0,13%

Tabela 1: Retornos Esperados.

4.3.2 Risco (Desvio-Padrão)

Na Tabela 2 abaixo estão apresentados os resultados do cálculo do desvio-padrão feito a partir das matrizes de covariâncias dos retornos médios de cada período.

Sector	Qtd. Papéis	Pré-Pandemia (Out/Dez)	Início da Pandemia (Jan/Mar)	Crescimento da Pandemia (Abr/Jun)	Estabilização da Pandemia (Jul/Set)
Consumo e Varejo	8	1,279	5,788	3,014	2,023
Energia e Saneamento	3	1,488	5,686	3,743	2,357
Financeiro	7	1,236	5,459	3,514	1,903
Holding	1	1,258	3,790	3,126	1,839
Imobiliário e Construção	1	1,415	6,271	4,562	3,211
Mineração	1	1,716	5,801	2,440	2,197
Papel e Celulose	1	2,027	5,125	3,405	2,425
Petróleo e Gás	3	1,212	6,484	3,246	1,889
Petroquímico	1	1,894	7,347	4,016	2,432
Saúde	2	1,353	3,854	2,627	8,824
Seguros	2	1,311	4,892	3,324	1,808
Siderúrgico	3	1,974	6,429	4,203	2,303
Transporte e Logística	5	1,483	7,653	4,154	2,299
Turismo	1	2,671	10,974	6,918	3,752
TOTAL MÉDIO PERÍODO	39	0,948	5,164	2,418	1,824

Tabela 2: Desvio-Padrão em ponto percentual.

Os coeficientes apresentam claramente o crescimento do risco em todos os ativos a partir do período que marcou o Início da Pandemia (Jan/Mar), se estendendo nos 2 períodos seguintes, no entanto com menor intensidade. Os setores mais afetados, assim como já apresentado impacto na queda dos retornos esperados, foram Petróleo e Gás, Transporte e Logística e Turismo, adicionalmente a esses setores, outros 5 também tiveram seus coeficientes de risco elevados, são eles: Consumo e Varejo, Imobiliário e Construção, Petroquímico, Saúde e Siderúrgico.

Vale destacar com os efeitos do isolamento social e devido às mudanças no hábito de consumo, que as empresas do setor de Consumo e Varejo se adaptaram com o fechamento das lojas físicas expandindo suas operações para plataformas e-commerce. Especialistas [Andrade, 2020; Rizério, 2020] apontam que à primeira vista os números podem parecer ruins, devido aos prejuízos relatados tanto pela Via Varejo (VVAR3) quanto pela Magazine Luiza (MGLU3) no 3º trimestre de 2020. Mas adicionalmente foram as companhias que tiveram o maior volume de vendas online no 2º trimestre em relação ao mesmo período de 2019, resultado do progresso da digitalização, melhora da rentabilidade, aumento da base de usuários, entre outras iniciativas, impulsionando o fortalecimento dessas empresas.

Já a empresa BR Malls (BRML3) do setor Imobiliário e Construção, sofreu consideravelmente com os reflexos negativos desencadeados pela pandemia com o fechamento dos shopping centers, assim como o setor Siderúrgico que chegou a operar com 45% de sua capacidade instalada por falta de demanda com o início da pandemia, retomando com força a partir de abril com os incentivos governamentais, tanto que acabou gerando escassez de alguns produtos, e elevação nos preços, levando um tempo maior até a reposição completa dos estoques, relatou Marcos Eduardo Faraco, vice-presidente da Gerdau Aços Brasil, Argentina e Uruguai [Simões, 2020; Valverde, 2020]. No segmento Petroquímico o Grupo Ultra (UGPA3) é uma companhia brasileira que atua na distribuição de combustíveis que sentiu o negócio recuar principalmente em função da volatilidade de preços de combustíveis e gás liquefeito de petróleo (GLP) em decorrência da queda nos volumes de vendas [Moreira, 2020]. No setor de Saúde, (GNDI3 e RADL3) as ações foram penalizadas por conta da leitura do mercado de que os planos teriam alta sinistralidade com a epidemia. Em entrevista a Bloomberg [2020] o cofundador da NotreDame Intermédica (GNDI3) Fabio Alperowitch afirmou que os planos de saúde acabaram se beneficiando devido ao cancelamento ou adiamento dos casos de não urgência reduzindo a sinistralidade.

4.3.3 Carteira Otimizada

A otimização do portfólio de investimento dos 39 ativos selecionados, objetivou encontrar a composição ótima da carteira de ações em meio a pandemia de COVID-19 nos diversos setores econômicos, considerando as restrições impostas e comparando os resultados do modelo exato e algoritmo genético.

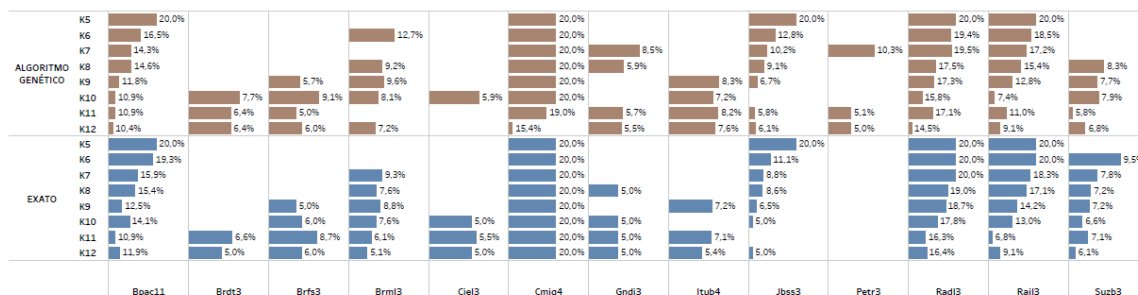


Figura 2: Diversificação e alocação da carteira por Cardinalidade - Pré-Pandemia.

Vale destacar na Figura 2 a diversificação da carteira em ambos modelos foi equânime na cardinalidade com 5 ativos $K=5$, as demais tiveram comportamento distintos. O ativo da Petrobras (Petr3) entrou apenas nas carteiras do modelo AG, já a empresa Cielo (Ciel3) foi mais usada nas carteiras do modelo exato. A Companhia Energética de Minas Gerais - Cemig (Cmig4), foi a empresa mais promissora em ambos modelos, sendo selecionada em todas as composições de carteiras com atribuição de peso máximo (20%), no AG apenas as cardinalidades $K=11$ e $K=12$ não tiveram atribuição máxima de alocação.

A Cemig uma das maiores empresas integradas de energia elétrica do Brasil, mesmo diante de um cenário desafiador enfrentado pela pandemia de COVID-19 e grande volatilidade macroeconômica generalizada, foi uma das empresas menos afetadas quando comparada às suas pares. Especialistas de mercado [Fayh, 2020; Francisco, 2020] afirmam que o consumo de energia industrial foi o que sofreu maior impacto, além do residencial e comercial pelas restrições de funcionamento decorrente. A empresa apresentou um *free float* de 79,5%, mesmo em meio a um cenário desfavorável, indicando maior liquidez para o acionista já que a maioria das ações estão disponíveis no mercado.

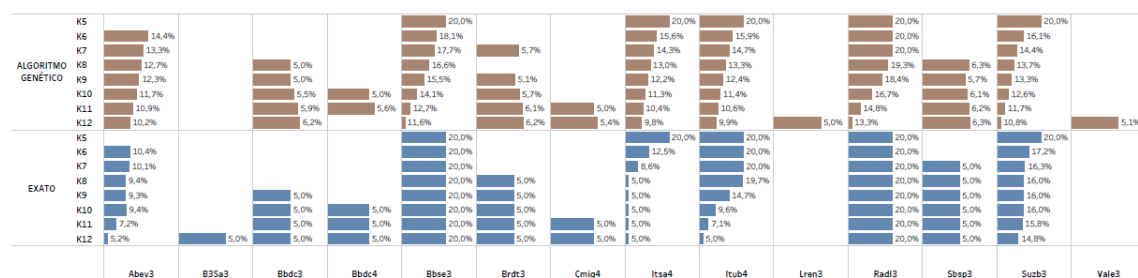


Figura 3: Diversificação e alocação da carteira por Cardinalidade - Início da Pandemia.

Com o período que marcou o Início da Pandemia, vale destacar na Figura 3 a alocação equilibrada no AG entre todas as empresas selecionadas, além disso na cardinalidade de $K=12$ foi alocado 5,1% no ativo da mineradora Vale (Vale3), mesmo tendo apresentado alta variabilidade amostral nesse período. No modelo exato os ativos relacionados ao setor de Saúde (Radl3) e Seguros (BBSE3) foram os que tiveram maior atribuição, confirmando as indicações do mercado quanto aos efeitos da pandemia nesses segmentos terem sido limitadas devido a baixa sinistralidade citada anteriormente.

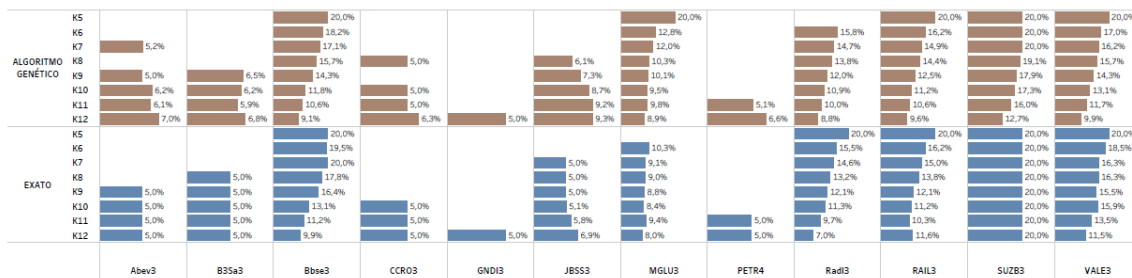


Figura 4: Diversificação e alocação da carteira por Cardinalidade - Crescimento da Pandemia.

No período de Crescimento da Pandemia, já com variabilidade amostral menor, refletindo recuperação rápida e repentina, logo após a grande queda apresentada no período anterior. Vale destacar na Figura 4 que esse foi o período que teve maior distribuição na alocação dos ativos entre todas as cardinalidades, tanto no AG quanto no modelo exato.

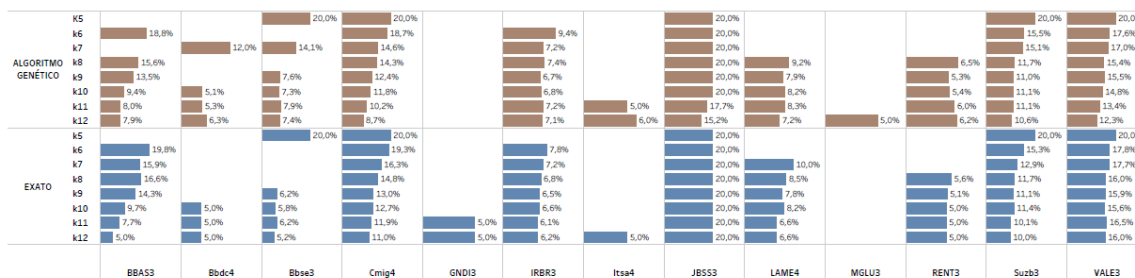


Figura 5: Diversificação e alocação da carteira por Cardinalidade - Estabilização da Pandemia.

Já o período de Estabilização da Pandemia ainda mostra os reflexos de recuperação do mercado que não conseguiu estabilizar aos níveis apresentados no período da Pré-Pandemia. Como pode-se observar na Figura 5, o AG mostrou melhor diversificação do portfólio em todas as cardinalidades, também considerou na diversificação da cardinalidade K=12, peso de 5% para a Magazine Luiza (MGLU3) que mesmo sendo fortemente impactada no período que marcou o início da pandemia, mostrou progresso no 3º trimestre do ano frente as ações da companhia no canal e-commerce, que cresceu 200,5%. Especialista do setor Wiltgen [2020] aponta que somadas as restrições impostas pela pandemia, o comportamento do consumidor refletiu insegurança quanto a circulação em espaços públicos, o que acabou resultando em um fluxo ainda baixo nas lojas físicas. Outra empresa que se destaca nesse período em ambos modelos é a JBS (JBSS3) que teve maior alocação em todas as cardinalidades, foi impulsionada com o aumento das exportações nas fábricas brasileiras e americanas e aumento do consumo interno nos EUA. Além disso, a empresa diversificou seu portfólio de produtos com a aumento de alimentos processados, fortalecendo a demanda do mercado interno com a mudança nos hábitos dos consumidores durante a quarentena [Juliboni, 2020; Roxo,2020].

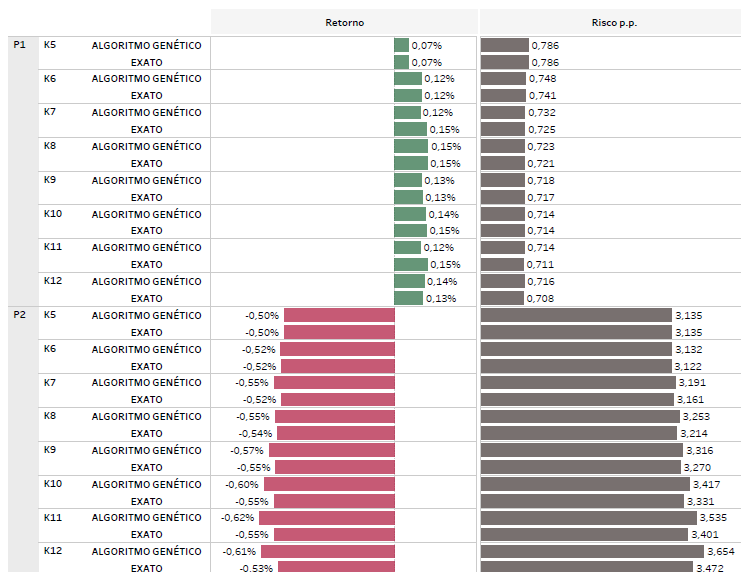


Figura 6: Retorno e Risco da carteira por Cardinalidade – Pré e Início da Pandemia.

A partir dos dados de retorno e risco apresentados na Figura 6, é possível analisar os resultados do Período 1 o qual refletiu o ponto de partida, em termos comparativos, para avaliação dos impactos da pandemia nos demais períodos estudados. Com retorno médio diário variando entre 0,07% e 0,15% e o coeficiente de risco entre 0,708 a 0,786; a pior relação entre risco e retorno nesse período foi apresentada na cardinalidade K=5 com o menor retorno e maior risco do período. Já o Período 2 que marcou o Início da Pandemia, todas as cardinalidades apresentaram retorno negativo e alta nos coeficientes de risco em ambos modelos, devido a forte queda no mercado com a instalação da pandemia. O que vale destacar é o desempenho do AG que em todas as cardinalidades quase alcançou o resultado apresentado no modelo exato. Outro fator relevante no Período 2 é que a medida que o K aumenta, ou seja, aumentando o número de ativos na carteira, o retorno diminui e o risco aumenta, vê-se então a chance do algoritmo incluir no portfólio os ativos com retornos menores e riscos maiores.

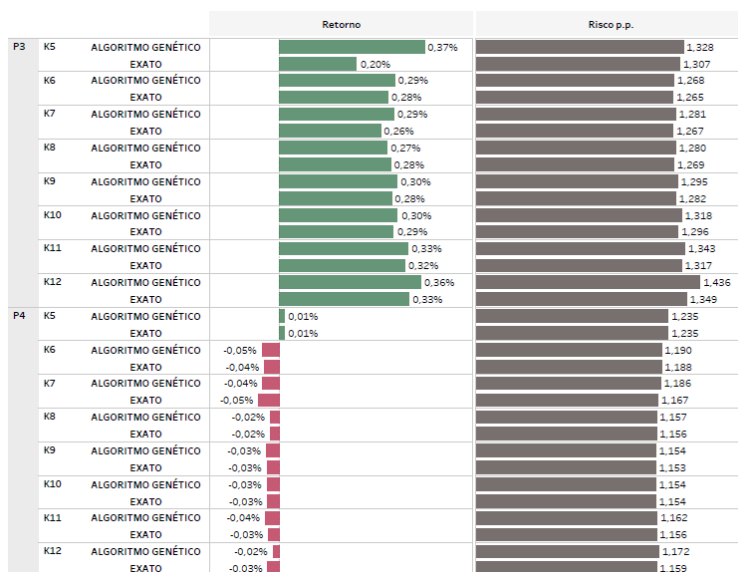


Figura 7: Retorno e Risco da carteira por Cardinalidade - Crescimento e Estabilização da Pandemia.

Já a partir da Figura 7 é possível analisar o Período de Crescimento da Pandemia, com as cardinalidades voltando a refletir retorno positivo e menor coeficiente de risco em ambos modelos, mas ainda sem atingir o patamar de risco apresentado no período Pré-Pandemia. Destacando o resultado do AG que performou melhor o retorno do que o modelo exato na cardinalidade $K=5$, com média diária de retorno de 0,37% e risco de 1,328. No Período 4 com a Estabilização da Pandemia o risco para o investidor reduz e a cardinalidade $K=5$ é a única que apresenta retorno positivo frente ao menor risco da carteira com essa composição.

Com a metodologia proposta é preciso uma análise criteriosa para a escolha da melhor cardinalidade considerando uma situação real, com alta volatilidade e em meio a um cenário de crise. A melhor relação entre risco e retorno frente as cardinalidades irão depender da preferência do investidor quanto a aversão ao risco e a expectativa do retorno.

5. Conclusão

Após cálculo do retorno esperado dos ativos, construção das matrizes de covariâncias entre os retornos diários e finalmente cálculo do desvio-padrão para os setores e períodos avaliados, identificamos que os setores Financeiro, Energia e Saneamento, Saúde, Consumo e Varejo, Papel e Celulose e Holding tiveram um bom desempenho, porém cada qual com suas peculiaridades. Alguns tendo papel proeminentes na economia, enquanto outros mais afetados recuaram diante da grande volatilidade macroeconômica e medidas de isolamento social. Para os ativos avaliados nesses setores, o início da pandemia marcou maior variabilidade (e portanto) risco dos ativos, devido especialmente às incertezas sobre o futuro, o que foi aos poucos se acomodando. No período em que a pandemia se expandia, o mercado dentre esses setores, tiveram rápida recuperação. Uma possível explicação é por estarmos tratando de ativos que representam soluções para os problemas causados pela pandemia, alguns alavancados pela alta do dólar com as exportações, como a Suzano, grande exportadora de papel sanitário para a China e referência global na produção de bioprodutos desenvolvidos a partir do cultivo de eucalipto [Juliboni, 2020; Santos, 2020; Suzano, 2020]. A Sabesp teve aumento na participação de clientes residenciais na receita, a fim de garantir que a população tivesse abastecimento de água potável preservando hábitos de higiene para o controle da propagação do vírus [Capodeferro e Smiderle, 2020]. Já o setor financeiro apresentou reação rápida nos volumes de atendimentos em suas plataformas digitais, além de apresentar uma infraestrutura robusta para lidar com a crise que em decorrência dos juros mais baixos expandiu suas linhas de créditos, devido ao endividamento da população frente a crise da pandemia, refletindo alta nos empréstimos a grandes, micro, pequenas e médias empresas no Brasil [Campos, 2020; Oliveira, 2020].

Os resultados mostraram grande impacto no risco e retorno referente ao período que marcou o Início da Pandemia denotando reação do mercado diante da volatilidade existente e grande queda nos preços com a instalação da crise, tendo em vista a percepção de que a economia seria muito afetada no país. Esse período apresentou alocação equilibrada no AG dentre as empresas selecionadas em todas as cardinalidades, já o retorno negativo e a alta nos coeficientes de risco tanto no AG como no modelo exato confirmaram as tendências de mercado levando o investidor a uma exposição maior ao risco. Nesse período foi possível identificar que aumentando o número de ativos na carteira, o retorno diminuiu e o risco aumentou, vê-se então a chance do algoritmo incluir no portfólio os ativos com retornos menores e riscos maiores. Contudo é preciso uma análise criteriosa para a escolha da melhor cardinalidade considerando uma situação real, com alta volatilidade e em meio a um cenário macroeconômico instável. A melhor relação entre risco e retorno frente as cardinalidades irão depender da preferência do investidor quanto a aversão ao risco e a expectativa do retorno.

O presente estudo limitou-se aos dados históricos da carteira, por essa razão, para análise em um tempo no futuro, recomendamos que modelos de previsão capazes de estimar o valor esperado de rentabilidade e a volatilidade das ações para o investidor, sejam incorporadas ao modelo computacional como: a) técnicas baseadas em processos estocásticos; b) técnicas de

econometria; e c) técnicas de algoritmos de inteligência computacional. Contudo, podem ser incorporados o risco diversificável em conjunto com outros modelos econômicos como o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) para determinar a taxa de retorno teórica. O modelo foi criado por Jack Treynor, William Forsyth Sharpe, John Lintner e Jan Mossin, independentemente, baseado no trabalho de Harry Markowitz sobre diversificação e teoria moderna de portfólio.

Por fim, concluímos que uma abordagem de problema com grande incerteza durante um período de pandemia e o crescente número de investidores pessoa física no mercado acionário requer maturidade, preparo e ferramentas como as oferecidas neste trabalho para uma tomada de decisão consciente [Ryngelblum, 2020].

Referências

- AFP. (2020, abril 17). COVID-19 deixa 4,5 bilhões de pessoas confinadas no mundo. Retrieved from Estado de Minas Internacional: https://www.em.com.br/app/noticia/internacional/2020/04/17/interna_internacional,1139616/covid-19-deixa-4-5-bilhoes-de-pessoas-confinadas-no-mundo.shtml
- Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R., Yanasse, H. (2011). Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Elsevier: ABEPRO.
- Bloomberg (2020, Abril). NotreDame Intermédica vira uma das maiores apostas da FAMA na era Covid-19. Retrieved from MoneyTimes: <https://www.moneytimes.com.br/notredame-intermedica-vira-uma-das-maiores-apostas-da-fama-na-era-covid-19/>
- B3[1].(2020). B3 divulga estudo sobre o perfil dos investidores pessoa física na bolsa. Retrieved outubro 26, 2020, from [www.b3.com.br](http://www.b3.com.br/pt_br/noticias/pessoa-fisica.htm): http://www.b3.com.br/pt_br/noticias/pessoa-fisica.htm
- B3[2].(2020). Séries Históricas. Retrieved from [www.b3.com.br](http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/historico/mercado-a-vista/series-historicas/): http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/historico/mercado-a-vista/series-historicas/
- B3[3]. (2020). Layout do arquivo_Cotações Históricas. Retrieved from [www.b3.com.br](http://www.b3.com.br/data/files/C8/F3/08/B4/297BE410F816C9E492D828A8/SeriesHistoricas_Layout.pdf): http://www.b3.com.br/data/files/C8/F3/08/B4/297BE410F816C9E492D828A8/SeriesHistoricas_Layout.pdf
- Andrade, J. (04 de setembro de 2020). O que você precisa saber antes de investir no BDR do Mercado Livre (MELI34). Fonte: E-Investidor: <https://einvestidor.estadao.com.br/investimentos/investir-bdr-mercado-livre>
- Andrade, J. (29 de outubro de 2020). Weg (WEGE3), Magalu (MGLU3) e Via Varejo (VVA3) são as melhores ações de 2020. Veja o ranking. Fonte: E-Investidor: <https://einvestidor.estadao.com.br/mercado/wege3-mglu3-vva3-melhores-acoes-de-2020>
- Campos, Marcel. (2020, Abril). Itaú Unibanco (ITUB4): reações à pandemia do coronavírus. Retrieved from XP Expert: <https://conteudos.xpi.com.br/acoes/relatorios/itau-unibanco-itub4-reacoes-ao-surto-de-coronavirus/>
- Capodeferro, M. W., Smiderle, Juliana. J. (2020). A resposta do setor de saneamento no Brasil à COVID-19. Rev. Adm. Pública vol.54 no.4 Rio de Janeiro July/Aug. 2020 Epub Aug 28, 2020.
- Colin, Emerson C. (2019). Pesquisa Operacional: 170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas (2ª ed.). São Paulo: Atlas.
- Debastiani, C. A., & Russo, F. A. (2008). Avaliando Empresas, Investindo em Ações: A Aplicação Prática da Análise Fundamentalista na Avaliação de Empresa. São Paulo: Novatec.
- Dalio, R. (2018). Princípios: Vida e Trabalho. Rio de Janeiro: Intrínseca.
- Economatica. (2019). Estudo de Informações Financeiras. Retrieved from [Economatica.com](https://economatica.com/corretora-investimentos): <https://economatica.com/corretora-investimentos>
- Fayh, Marcelo. (2020, Agosto). Cemig (CMIG4) pagará R\$ 120 milhões de JCP em 2021. Retrieved from [Como Investir](https://comoinvestir.thecap.com.br/cemig-cmig4-pagara-r-120-milhoes-de-jcp-em-2021/): <https://comoinvestir.thecap.com.br/cemig-cmig4-pagara-r-120-milhoes-de-jcp-em-2021/>
- Francisco, Gabriel. (2020, Novembro). CMIG4 - Ações Cemig - Companhia Energética de Minas Gerais. Retrieved from XP Expert: <https://conteudos.xpi.com.br/acoes/cmig4/>

- Goetzmann, N. W., Brown, J. S., Elton, J. E. (2012). *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. Rio de Janeiro: Elsevier.
- Hanaoka, G. P., Cardoso, R. T. N., Paiva, F. D. (2016). Modelo Multiobjetivo para Seleção de Portfólios com Restrição de Cardinalidade, Custo de Transação e Valor em Risco Condicional. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 17, N. 3 (2016), 353-365. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. DOI: 10.5540/tema.2016.017.03.0353
- Harari, Yuval Noah. (2016). *Homo Deus. Uma breve história do amanhã*. São Paulo: Companhia das Letras.
- Hoppe, R. H. W. (2006). *Optimization Theory*. Retrieved from University of Houston.edu: https://www.math.uh.edu/~rohop/fall_06/Chapter3.pdf
- Jobs, Steve. (2005). 'You've got to find what you love,' Jobs says. Stanford Report: Retrieved from News.Stanford.edu: <https://news.stanford.edu/news/2005/june15/jobs-061505.html>
- Juliboni, Márcio. (2020, Março). JBS teve ano “brilhante” em 2019, e coronavírus não assusta, diz BB Investimentos. Retrieved from Money Times: <https://www.moneytimes.com.br/jbs-teve-ano-brilhante-em-2019-e-coronavirus-nao-assusta-diz-bb-investimentos/>
- Juliboni, Márcio. (2020, Março). Os 8 setores e ações mais resistentes ao coronavírus na Bolsa, segundo a XP. Retrieved from Money Times: <https://www.moneytimes.com.br/os-8-setores-e-empresas-mais-resistentes-ao-coronavirus-segundo-a-xp/>
- Khan, A. H., Cao, X., Katsikis, V. N., Stanimirovc, P., Brajevic, I., Li, S., Kadry, S., Nam, A. Y. (2020). Optimal Portfolio Management for Engineering Problems Using Nonconvex Cardinality Constraint: A Computing Perspective. *Journal IEEE Access®* (Mar., 2010).
- Koiller, J., Colombo, J. (2020). *Álgebra Linear*. Retrieved from Universidade Federal Fluminense: <http://www.professores.uff.br/anamluz/wp-content/uploads/sites/36/2017/07/41.pdf>
- Lay, D. C., Lay, S. R., McDonald, J. J. (2018). *Álgebra Linear e Suas Aplicações* (5ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- Lemos, Flávio. (2018). *Análise Técnica dos Mercados Financeiros: Um Guia Completo e Definitivo dos Métodos de Negociação de Ativos*. Saraiva Educação.
- Luo, J. (2020). Predictive Monitoring of COVID-19. Retrieved from Data-Driven Innovation Lab Singapore University of Technology and Design: <https://ddi.sutd.edu.sg/>
- Marcowitz, Harry. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
- Ministério_da_Saúde. (2020). *Coronavírus Brasil*. Retrieved from <https://covid.saude.gov.br/>
- Moreira, Felipe. (2020, Agosto). Ultrapar (UGPA3) tem queda de 59% no lucro no 2TRI20. Retrieved from Eu Quero Investir: <https://www.euqueroinvestir.com/ultrapar-ugpa3-queda-lucro-balanco-2tri20/>
- Mitchell, Melanie. (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. A Bradford Book The MIT Press. Cambridge, Massachusetts. London, England.
- Motta, R. R., Calôba, G. M. (2006). *Análise de Investimentos: Tomadas de Decisão em Projetos Industriais*. São Paulo: Atlas.
- Oliveira, Isaac. (2020, Agosto). O que esperar das ações do Itaú (ITUB4) nos próximos 12 meses? Retrieved from E Investidor: <https://einvestidor.estadao.com.br/mercado/acoes-itaui-itaub4-em-12-meses>
- Ryngelblum, Ivan. (2020, Novembro). ‘Pessoa física deu show este ano’, diz presidente da B3. Retrieved from Seu Dinheiro <https://www.seudinheiro.com/2020/empresas/pessoa-fisica-deu-show-este-ano-diz-presidente-da-b3/>
- Ragsdale, Cliff T. (2014). *Modelagem de Planilha e Análise de Decisão: Uma Introdução Prática a Business Analytics* (7ª ed.). São Paulo: Cengage Learning.
- Rizério, L. (18 de Agosto de 2020). Magalu, B2W e Via Varejo justificam salto na Bolsa com fortes resultados durante pandemia: o que esperar para as ações? Acesso em 19 de Outubro de 2020, Retrieved from InfoMoney: <https://www.infomoney.com.br/mercados/magalu-b2w-e-via>

varejo-justificam-salto-na-bolsa-com-fortes-resultados-durante-pandemia-o-que-esperar-para-as-acoas/

Roxo, Betina. (2020, Agosto). JBS (JBSS3): 2T20 supera expectativas do mercado; reiteramos Compra. Retrieved from Expert XP: <https://conteudos.xpi.com.br/acoes/relatorios/jbs-jbss3-2t20-solido-supera-expectativas-do-mercado-reiteramos-compra/>

Santos, Poliana. (2020, Outubro). Suzano (SUZB3) vai investir até R\$ 4,3 bilhões, apesar da pandemia. Retrieved from Suno Research: <https://www.sunoresearch.com.br/noticias/suzano-suzb3-vai-investir-ate-r-43-bilhoes-apesar-da-pandemia/>

Shakespeare, William. (2013). Tradução: Medeiros, F., C., A., C., Mendes, O. O Mercador de Veneza. Martin Claret, 2ª edição.

Simões, Lucas. (2020, Novembro). BR Malls se recupera do baque da pandemia e pode surpreender até o Réveillon. Retrieved from MoneyTimes: <https://www.moneytimes.com.br/br-malls-se-recupera-do-baque-da-pandemia-e-pode-surpreender-ate-o-reveillon/>

Suárez, A., Torrubiano, R. R., (2010). Hybrid Approaches and Dimensionality Reduction for Portfolio Selection With Cardinality Constraints. IEEE Computational Intelligence Magazine (Mar., 2010).

Suzano. (2020, Maio). Suzano lança ação para fortalecer vendas da agricultura familiar de MS em meio à pandemia do coronavírus. Retrieved from Suzano: <https://www.suzano.com.br/suzano-lanca-acao-para-fortalecer-vendas-da-agricultura-familiar-de-ms-em-meio-a-pandemia-do-coronavirus/>

Valverde, Michelle. (2020, Outubro). Siderúrgicas já produzem no patamar pré-pandemia. Retrieved from Diário do Comércio: <https://diariodocomercio.com.br/economia/siderurgicas-ja-produzem-no-patamar-pre-pandemia>

Villela, Pedro F. (2008). Um algoritmo exato para a otimização de carteiras de investimento com restrições de cardinalidade. Dissertação de mestrado em matemática aplicada. IMECC – UNICAMP.

Wiltgen, Julia. (2020, Novembro). Renner tem o primeiro prejuízo em 15 anos, mas analistas veem recuperação. Retrieved from Seu Dinheiro: <https://www.seudinheiro.com/2020/empresas/renner-tem-o-primeiro-prejuizo-em-15-anos-mas-analistas-veem-recuperacao/>

Zhou, Jie. (2020). Household Stock Market Participation During The Great Financial Crisis. The Quarterly Review of Economics and Finance, Vol. 75, (Feb., 2020), pp. 265-275. DOI: doi.org/10.1016/j.qref.2019.04.008