

a) b) c) d)

a) Ana Murta (a93284) b) Ana Henriques(a93268)
c) Leonardo Freitas(a93281) d) Miguel Martins(a89584)

Introdução

O problema escolhido pelo grupo foi o funcionamento do GPS. Após alguma pesquisa, encontramos um fenómeno no mundo real que se enquadra no módulo de Sistemas de Equações não Lineares, neste site <https://www.math.tamu.edu/~dallen/physics/gps/gps.htm>. Como está relacionado com a área tecnológica, área em que estamos mais envolvidos, achámos este o tema mais interessante. Assim sendo, o objetivo é explicar como é calculada, de forma precisa, a nossa posição em relação a quatro satélites, através da triangulação por GPS, recorrendo ao **Método de Newton** e a **Equações Não Lineares**. Deste modo, as incógnitas do nosso problema são as coordenadas da nossa posição atual (x,y,z) e a diferença de tempo entre o relógio do recetor e os relógios do satélite (d).

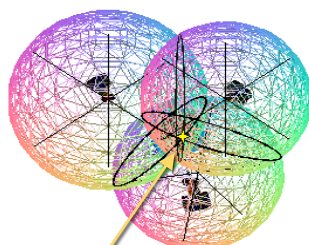


Ilustração 1: Interseção de 3 superfícies esféricas

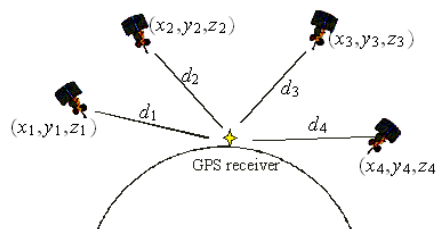


Ilustração 2: Distância da nossa posição aos 4 satélites

Problema

O sistema de GPS utiliza os satélites como pontos de referência para calcular precisamente a nossa posição atual. Cada satélite possui um relógio preciso e permite a transmissão de sinais de rádio, sendo esse sinal recebido, na terra, numa quantidade de tempo igual à velocidade da luz.

Por sua vez o recetor na Terra possui um relógio o mais sincronizado possível com o dos satélites.

Utilizando estes valores é possível calcular a distância do recetor a um satélite. O problema nasce quando se verifica que só se pode calcular a distância e, portanto, há uma infinidade de pontos à distância calculada gerando uma superfície esférica em torno do satélite referente à possível localização do recetor.

Assim, para determinar de forma precisa serão necessários no mínimo o cálculo de distâncias referentes a quatro satélites cuja interseção final das superfícies esféricas referentes às possíveis distâncias aos mesmos origina dois pontos, um referente à localização do recetor e outro que na maioria dos casos refere um ponto impossível em termos humanos (fora da Terra ou no interior da mesma).

Se prestarmos atenção à seguinte tabela vemos que o método de Newton será aplicado utilizando as diversas equações das superfícies esféricas no espaço, referentes às distâncias do recetor aos satélites:

$((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - (c * (t_1 - d))^2)$
$((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - (c * (t_2 - d))^2)$
$((x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 - (c * (t_3 - d))^2)$
$((x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 - (c * (t_4 - d))^2)$

c = 299792458 m/s corresponde à velocidade da luz.
t_i corresponde ao tempo de deslocamento do sinal do satélite ao recetor.
d é a diferença de tempo entre o relógio do recetor e os relógios dos satélites.
(x_i, y_i, z_i) corresponde à posição exata dos satélites.
i = 1,2,3,4 corresponde ao número dos satélites.

Exemplo Prático

Dadas as seguintes coordenadas dos satélites:

Satélites	Longitude(x _i)	Latitude(y _i)	Altitude(z _i)	t_i
Sat1	15600	7540	20140	0.07074
Sat2	18760	2750	18610	0.07220
Sat3	17610	14630	13480	0.07690
Sat4	19170	610	18390	0.07242

E usando a aproximação inicial $x_0 = (0,0,6370,0)$ usar o método de Newton para calcular a posição do recetor do sinal de GPS.

Scripts e Comandos

```

GPS.m x +
1 function [F]= GPS(X)
2
3 x=X(1);
4 y=X(2);
5 z=X(3);
6 d=X(4);
7
8 c = 299792.458;
9
10 F(1) = ((x-15600).^2+(y-7540).^2+(z-20140).^2)-(c*(0.07074-d)).^2;
11 F(2) = ((x-18760).^2+(y-2750).^2+(z-18610).^2)-(c*(0.07220-d)).^2;
12 F(3) = ((x-17610).^2+(y-14630).^2+(z-13480).^2)-(c*(0.07690-d)).^2;
13 F(4) = ((x-19170).^2+(y-610).^2+(z-18390).^2)-(c*(0.07242-d)).^2;
14 end

```

Figura 1: Script com as equações do sistema

```

Editor - C:\users\leonardo\Downloads\script.m
GPS.m x script.m x +
1 x0 = [0;0;6370;0];
2 op = optimset();
3 [x,fval,exitflag,output]=fsolve(@GPS,x0,op);

```

Figura 2: Script usado para aplicar o método Fsolve a função GPS

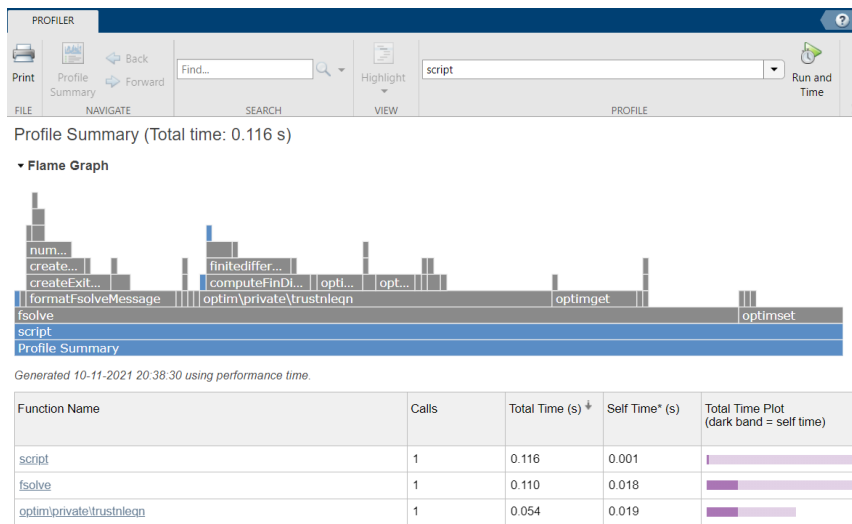


Figura 3: Script com o Profile Summary

Resolvendo o sistema, obtivemos que, então, as coordenadas do recetor são:

x	-41.7727095708344
y	-16.7891941065216
z	6370.05955922334
d	-0.00320156582959

Há, ainda, uma segunda solução para as 4 equações de GPS apresentadas em cima, mas as coordenadas desta segunda solução estão fora da Terra.

Conclusão

Com a elaboração deste trabalho prático, podemos aplicar o Método de Newton a um fenómeno da vida real, contribuindo para um melhor aproveitamento da UC. Além disto, podemos analisar como, através do tempo de deslocamento e da velocidade de propagação dum sinal, conseguimos determinar a distância ao recetor. Claro que, como o relógio do recetor GPS não está precisamente sincronizado com o relógio do satélite, os intervalos não apresentam uma exatidão equivalente à real. Atualmente, para minimizar os erros e melhorar a precisão dos resultados, a maioria das unidades GPS calculam medições a partir de seis satélites.