



Investigação Operacional

Trabalho Prático 1

Licenciatura em Engenharia Informática

Ana Henriques – A93268

Ana Murta – A93284

Leonardo Freitas – A93281

Luís Faria – A93209

Tiago Carneiro – A93027

Ano Letivo 2021/2022

Índice

1	Introdução	3
2	Formulação do problema	3
3	Modelo	4
3.1	Variáveis de decisão	5
3.2	Parâmetros	5
3.3	Função objetivo	6
3.4	Restrições.....	6
4	Solução ótima	6
5	Validação do modelo	9
6	Conclusão	10

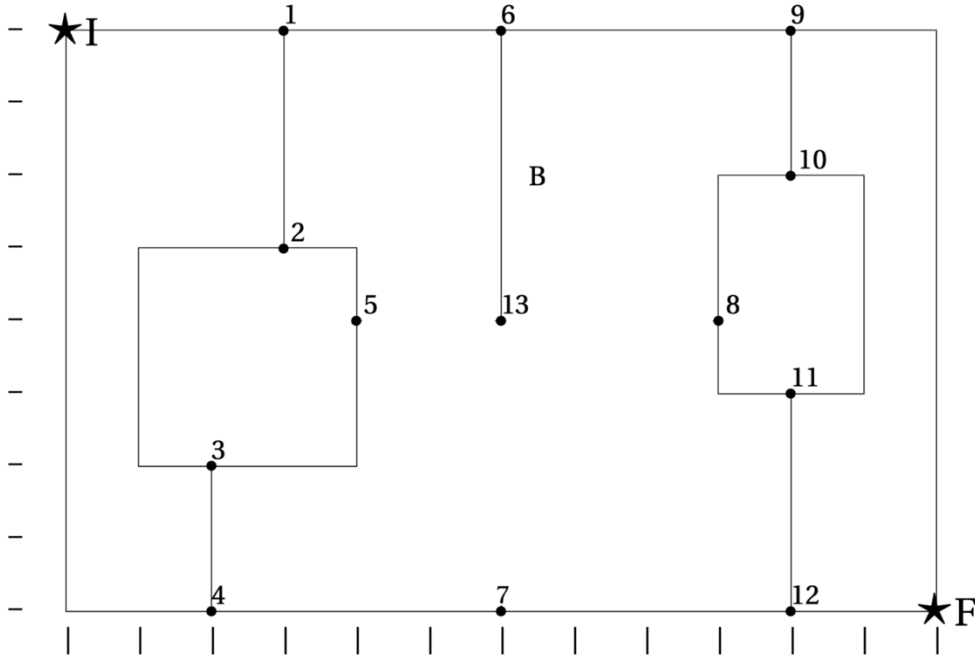


Figura 2: Mapa de linhas de alta tensão

Tal como supramencionado, a solução ideal é o drone percorrer, então, um caminho Euleriano, que é o mesmo que dizer um caminho do grafo que visita todas as arestas exatamente uma vez. Todavia, segundo o Teorema de Euler, *um grafo G conexo possui um caminho Euleriano se e somente se ele tiver exatamente zero ou dois vértices de grau ímpar*. Ou seja, precisamos que todos os vértices do nosso grafo tenham um grau par para que o grafo seja Euleriano, o que não se verifica no nosso mapa visto que temos cerca de 10 vértices de grau ímpar. Para resolver isto, teremos de adicionar arestas ao grafo e é precisamente aí que reside o problema de otimização deste trabalho porque é necessário determinar que arestas têm de ser adicionadas de maneira que o caminho percorrido pelo drone seja Euleriano e minimize a distância total a correr.

Sabe-se que a distância a minimizar é o comprimento das arestas que serão adicionadas ao grafo e, como o drone visita obrigatoriamente todas estas arestas, o seu comprimento é constante; logo, pode ser ignorado. O importante é focar nos vértices que apresentam grau ímpar e ligá-los a outros, criando, assim, novas arestas. Regressando ao mapa do grupo, analisamos que, à exceção dos vértices 5, 7 e 8, todos os outros possuem grau ímpar e, conseqüentemente, serão estes os que serão incluídos no modelo.

3 Modelo

Para definir o modelo, decidiu-se que as variáveis de decisão seriam definidas por dois algarismos, de 1 a 9. Na situação de ser preciso representar um valor acima de 10 com apenas um algarismo, como os vértices de 10 a 13, estes são numerados de [a-d]. O valor do vértice I corresponde ao 0 e o vértice F corresponde ao 14, usando o carácter 'e'.

Assim sendo, o conjunto de vértices usados no nosso modelo são definidos da seguinte forma: $V = \{I, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, F\}$, sendo V usando como referência a este conjunto de valores ao longo do relatório.

3.1 Variáveis de decisão

x_{ij} : existe ou não uma aresta a unir os vértices i e j , $i, j \in V, i < j$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

As variáveis de decisão são definidas por $x_{ij} : i < j$ para que arestas diferentes sejam representadas diferentemente. Por exemplo, no caso de existir uma ligação entre os vértices 3 e 7, representamos a aresta x_{37} e não a x_{73} que seria a mesma.

3.2 Parâmetros

d_{ij} : corresponde ao comprimento da aresta que une os vértices i e j .

Os comprimentos de todas as arestas podem ser calculados a partir da seguinte tabela:

		x	0	3	3	2	2	4	6	6	9	10	10	10	10	6	12
		y	8	8	5	2	0	4	8	0	4	8	6	3	0	4	0
x	y		I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	F
0	8	I	0,00	3,00	4,24	6,32	8,25	5,66	6,00	10,00	9,85	10,00	10,20	11,18	12,81	7,21	14,42
3	8	1	3,00	0,00	3,00	6,08	8,06	4,12	3,00	8,54	7,21	7,00	7,28	8,60	10,63	5,00	12,04
3	5	2	4,24	3,00	0,00	3,16	5,10	1,41	4,24	5,83	6,08	7,62	7,07	7,28	8,60	3,16	10,30
2	2	3	6,32	6,08	3,16	0,00	2,00	2,83	7,21	4,47	7,28	10,00	8,94	8,06	8,25	4,47	10,20
2	0	4	8,25	8,06	5,10	2,00	0,00	4,47	8,94	4,00	8,06	11,31	10,00	8,54	8,00	5,66	10,00
4	4	5	5,66	4,12	1,41	2,83	4,47	0,00	4,47	4,47	5,00	7,21	6,32	6,08	7,21	2,00	8,94
6	8	6	6,00	3,00	4,24	7,21	8,94	4,47	0,00	8,00	5,00	4,00	4,47	6,40	8,94	4,00	10,00
6	0	7	10,00	8,54	5,83	4,47	4,00	4,47	8,00	0,00	5,00	8,94	7,21	5,00	4,00	4,00	6,00
9	4	8	9,85	7,21	6,08	7,28	8,06	5,00	5,00	5,00	0,00	4,12	2,24	1,41	4,12	3,00	5,00
10	8	9	10,00	7,00	7,62	10,00	11,31	7,21	4,00	8,94	4,12	0,00	2,00	5,00	8,00	5,66	8,25
10	6	10	10,20	7,28	7,07	8,94	10,00	6,32	4,47	7,21	2,24	2,00	0,00	3,00	6,00	4,47	6,32
10	3	11	11,18	8,60	7,28	8,06	8,54	6,08	6,40	5,00	1,41	5,00	3,00	0,00	3,00	4,12	3,61
10	0	12	12,81	10,63	8,60	8,25	8,00	7,21	8,94	4,00	4,12	8,00	6,00	3,00	0,00	5,66	2,00
6	4	13	7,21	5,00	3,16	4,47	5,66	2,00	4,00	4,00	3,00	5,66	4,47	4,12	5,66	0,00	7,21
12	0	F	14,42	12,04	10,30	10,20	10,00	8,94	10,00	6,00	5,00	8,25	6,32	3,61	2,00	7,21	0,00

Figura 3: Distâncias entre todos os vértices do mapa.

3.3 Função objetivo

A função objetivo é, como visto previamente, minimizar o comprimento das arestas a adicionar ao grafo do problema em estudo:

$$\min: \sum_{i,j \in V} d_{ij} \times x_{ij}, \quad i < j$$

3.4 Restrições

Cada vértice deve apenas pertencer a uma única aresta:

$$\forall i \in V : \sum x_{ij} = 1, j \in V, i < j$$

```

1  /* Objective function */
2  min: 3.00 x01 + 4.24 x02 + 6.32 x03 + 8.25 x04 + 6.00 x06 + 10.00 x09 + 10.20 x0a + 11.18 x0b + 12.81 x0c + 7.21 x0d + 14.42 x0e +
3        3.00 x12 + 6.08 x13 + 8.06 x14 + 3.00 x16 + 7.00 x19 + 7.28 x1a + 8.60 x1b + 10.63 x1c + 5.00 x1d + 12.04 x1e +
4        3.16 x23 + 5.10 x24 + 4.24 x26 + 7.62 x29 + 7.07 x2a + 7.28 x2b + 8.60 x2c + 3.16 x2d + 10.30 x2e +
5        2.00 x34 + 7.21 x36 + 10.00 x39 + 8.94 x3a + 8.06 x3b + 8.25 x3c + 4.47 x3d + 10.20 x3e +
6        8.94 x46 + 11.31 x49 + 10.00 x4a + 8.54 x4b + 8.00 x4c + 5.66 x4d + 10.00 x4e +
7        4.00 x69 + 4.47 x6a + 6.40 x6b + 8.94 x6c + 4.00 x6d + 10.00 x6e +
8        2.00 x9a + 5.00 x9b + 8.00 x9c + 5.66 x9d + 8.25 x9e +
9        3.00 xab + 6.00 xac + 4.47 xad + 6.32 xae +
10       3.00 xbc + 4.12 xbd + 3.61 xbe +
11       5.66 xcd + 2.00 xce +
12       7.21 xde;
13
14 /* Variable bounds */
15 V0:  + x01 + x02 + x03 + x04 + x06 + x09 + x0a + x0b + x0c + x0d + x0e = 1;
16 V1: x01  + x12 + x13 + x14 + x16 + x19 + x1a + x1b + x1c + x1d + x1e = 1;
17 V2: x02 + x12  + x23 + x24 + x26 + x29 + x2a + x2b + x2c + x2d + x2e = 1;
18 V3: x03 + x13 + x23  + x34 + x36 + x39 + x3a + x3b + x3c + x3d + x3e = 1;
19 V4: x04 + x14 + x24 + x34  + x46 + x49 + x4a + x4b + x4c + x4d + x4e = 1;
20 V6: x06 + x16 + x26 + x36 + x46  + x69 + x6a + x6b + x6c + x6d + x6e = 1;
21 V9: x09 + x19 + x29 + x39 + x49 + x69  + x9a + x9b + x9c + x9d + x9e = 1;
22 Va: x0a + x1a + x2a + x3a + x4a + x6a + x9a  + xab + xac + xad + xae = 1;
23 Vb: x0b + x1b + x2b + x3b + x4b + x6b + x9b  + xab  + xbc + xbd + xbe = 1;
24 Vc: x0c + x1c + x2c + x3c + x4c + x6c + x9c + xac + xbc  + xcd + xce = 1;
25 Vd: x0d + x1d + x2d + x3d + x4d + x6d + x9d + xad + xbd + xcd  + xde = 1;
26 Ve: x0e + x1e + x2e + x3e + x4e + x6e + x9e + xae + xbe + xce + xde  = 1;
27
28 bin x01, x02, x03, x04, x06, x09, x0a, x0b, x0c, x0d, x0e,
29 x12, x13, x14, x16, x19, x1a, x1b, x1c, x1d, x23, x24, x26,
30 x29, x2a, x2b, x2c, x2d, x34, x36, x39, x3a, x3b, x3c, x3d,
31 x46, x49, x4a, x4b, x4c, x4d, x69, x6a, x6b, x6c, x6d, x9a,
32 x9b, x9c, x9d, xab, xac, xad, xbc, xbd, xcd, x1e, x2e, x3e,
33 x4e, x6e, x9e, xae, xbe, xce, xde;

```

Figura 4: Ficheiro de input no LPSolve IDE

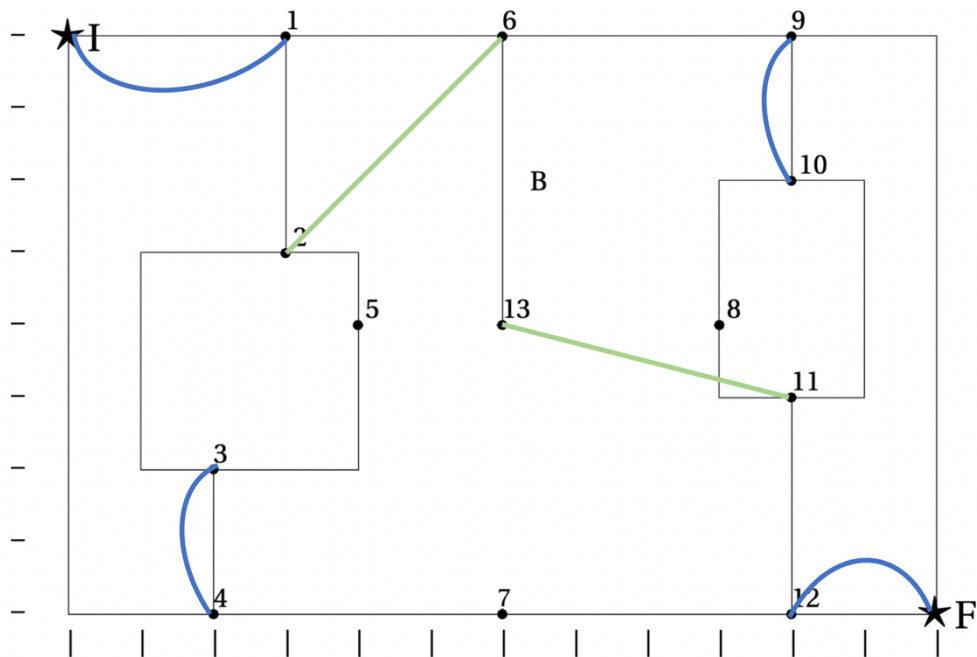
4 Solução ótima

Depois de introduzir o modelo do problema no *LPSolve*, chegámos a uma aparente solução ótima, onde, tal como se pode observar na Figura 5, são criadas arestas a unir os vértices I ao 1, o 2 ao 6, o 3 ao 4, o 9 ao 10, o 11 ao 13, o 12 ao F, com um comprimento total de 17,36.

Variables	M...	result
	17,36	17,36
x01	1	1
x26	1	1
x34	1	1
x9a	1	1
xbd	1	1
xce	1	1
x02	0	0
x03	0	0
x04	0	0
x06	0	0
x09	0	0
x0a	0	0
x0b	0	0
x0c	0	0
x0d	0	0

Figura 5: Output produzido pelo LPSolve IDE

A solução está ilustrada na Figura 6:



O caminho terá que passar por todas as arestas exatamente uma vez; logo, distância total percorrida não variará, pelo que não é necessário minimizá-la. Com isto, conclui-se que falta apenas desenhar o trajeto do drone, existindo várias possibilidades para o mesmo, nomeadamente:

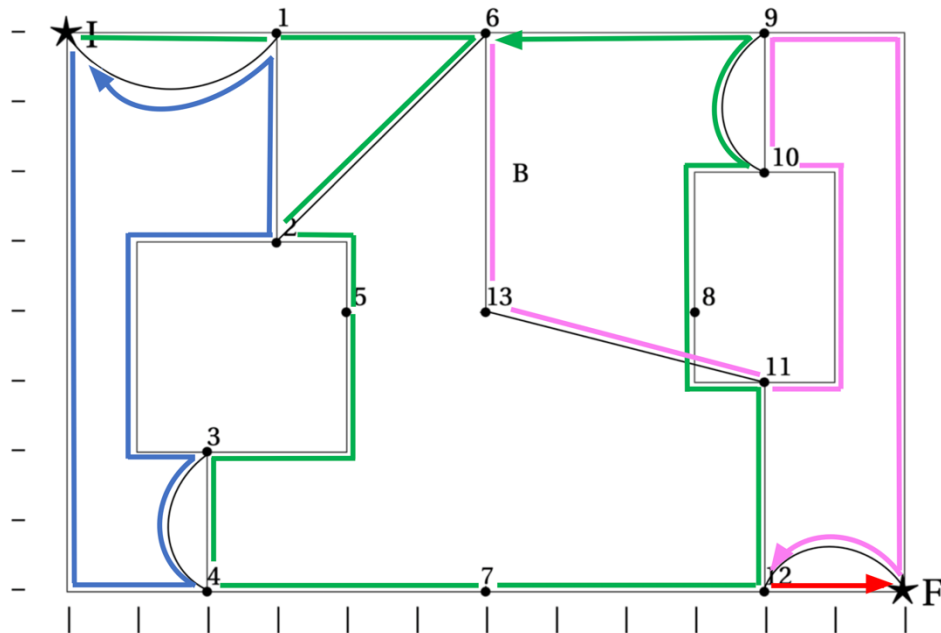


Figura 7: Possível solução

Como podemos ver na Figura 7, o percurso é: Azul → Verde → Rosa → Vermelho.

Também se pode definir este percurso através dos vértices, ficando, portanto:

$I \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow I \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 13$
 $\rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow F$

Sabendo que a soma da distância de cada aresta do grafo inicial é:

$$8+8+12+12+2+3+3+3+3+3+4+2+2+2+3+3+3 = 76$$

Após somar o comprimento de todas as arestas do grafo e o das arestas que foram adicionadas (resultado devolvido pelo *LPSolver*, Figura 5), obtemos a distância total percorrida:

$$76 + 17.36 = 93.36$$

5 Validação do modelo

A seguinte tabela ilustra as restrições do nosso modelo, e tal como podemos observar, todas as restrições são cumpridas, para cada vértice de grau ímpar apenas criamos uma aresta.

j\i		l(0)	1	2	3	4	6	9	a(10)	b(11)	c(12)	d(13)	F(e)	SUM	
l(0)	V0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=1
1	V1	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=1
2	V2	0	0		0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	=1
3	V3	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	1	=1
4	V4	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	1	=1
6	V6	0	0	1	0	0		0	0	0	0	0	0	1	=1
9	V9	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	1	=1
a(10)	Va	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	1	=1
b(11)	Vb	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	1	=1
c(12)	Vc	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	1	=1
d(13)	Vd	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		0	1	=1
F(e)	Ve	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		1	=1

Figura 8: As restrições são cumpridas

Supostamente, poderia existir uma solução onde os vértices estariam conectados a mais que uma aresta, desde que os vértices permanecessem com grau par continuaria a ser uma solução válida, mas não seria ótima. Para o provar voltámos a correr o nosso modelo no LPSolve, mas trocando o '=' das restrições por '>='. Esta mudança não implica que todos os vértices passem a ser de grau par, mas o que queremos provar com isto é que a solução obtida anteriormente é ótima, e é exatamente isso que concluímos, pois, o resultado deste novo modelo é igual ao do original. Ou seja, mesmo que pudéssemos adicionar mais que uma aresta a cada vértice, na solução ideal cada vértice possuiria apenas um; logo, as restrições no modelo original são válidas.

<pre> 1 /* Objective function */ 2 min: 3.00 x01 + 4.24 x02 + 6.32 x03 + 8.25 x04 + 6.00 x06 + 10.00 x09 + 10.20 x0a + 11.18 x0b + 12.81 x0c + 7.21 x0d + 14.42 x0e + 3 3.00 x12 + 6.08 x13 + 8.06 x14 + 3.00 x16 + 7.00 x19 + 7.28 x1a + 8.60 x1b + 10.63 x1c + 5.00 x1d + 12.04 x1e + 4 3.16 x23 + 5.10 x24 + 4.24 x26 + 7.62 x29 + 7.07 x2a + 7.28 x2b + 8.60 x2c + 3.16 x2d + 10.30 x2e + 5 2.00 x34 + 7.21 x36 + 10.00 x39 + 8.94 x3a + 8.06 x3b + 8.25 x3c + 4.47 x3d + 10.20 x3e + 6 8.94 x46 + 11.31 x49 + 10.00 x4a + 8.54 x4b + 8.00 x4c + 5.66 x4d + 10.00 x4e + 7 4.00 x69 + 4.47 x6a + 6.40 x6b + 8.94 x6c + 4.00 x6d + 10.00 x6e + 8 2.00 x9a + 5.00 x9b + 8.00 x9c + 5.66 x9d + 8.25 x9e + 9 3.00 xab + 6.00 xac + 4.47 xad + 6.32 xae + 10 3.00 xbc + 4.12 xbd + 3.61 xbe + 11 5.66 xcd + 2.00 xce + 12 7.21 xde; 13 14 /* Variable bounds */ 15 V0: x01 + x02 + x03 + x04 + x06 + x09 + x0a + x0b + x0c + x0d + x0e >= 1; 16 V1: x01 + x12 + x13 + x14 + x16 + x19 + x1a + x1b + x1c + x1d + x1e >= 1; 17 V2: x02 + x12 + x23 + x24 + x26 + x29 + x2a + x2b + x2c + x2d + x2e >= 1; 18 V3: x03 + x13 + x23 + x34 + x36 + x39 + x3a + x3b + x3c + x3d + x3e >= 1; 19 V4: x04 + x14 + x24 + x34 + x46 + x49 + x4a + x4b + x4c + x4d + x4e >= 1; 20 V6: x06 + x16 + x26 + x36 + x46 + x69 + x6a + x6b + x6c + x6d + x6e >= 1; 21 V9: x09 + x19 + x29 + x39 + x49 + x69 + x9a + x9b + x9c + x9d + x9e >= 1; 22 Va: x0a + x1a + x2a + x3a + x4a + x6a + x9a + xab + xac + xad + xae >= 1; 23 Vb: x0b + x1b + x2b + x3b + x4b + x6b + x9b + xab + xbc + xbd + xbe >= 1; 24 Vc: x0c + x1c + x2c + x3c + x4c + x6c + x9c + xac + xbc + xcd + xce >= 1; 25 Vd: x0d + x1d + x2d + x3d + x4d + x6d + x9d + xad + xbd + xcd + xde >= 1; 26 Ve: x0e + x1e + x2e + x3e + x4e + x6e + x9e + xae + xbe + xce + xde >= 1; 27 28 bin x01, x02, x03, x04, x06, x09, x0a, x0b, x0c, x0d, x0e, 29 x12, x13, x14, x16, x19, x1a, x1b, x1c, x1d, x23, x24, x26, 30 x29, x2a, x2b, x2c, x2d, x34, x36, x39, x3a, x3b, x3c, x3d, 31 x46, x49, x4a, x4b, x4c, x4d, x69, x6a, x6b, x6c, x6d, x9a, 32 x9b, x9c, x9d, xab, xac, xad, xbc, xbd, xcd, x1e, x2e, x3e, 33 x4e, x6e, x9e, xae, xbe, xce, xde; </pre>		<table> <tr> <th>Variables</th><th>M...</th><th>result</th></tr> <tr> <td>x01</td><td>17,36</td><td>17,36</td></tr> <tr> <td>x28</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>x34</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>x9a</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>xbd</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>xce</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>x02</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>x03</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>x04</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>x06</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>x09</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>x0a</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	Variables	M...	result	x01	17,36	17,36	x28	1	1	x34	1	1	x9a	1	1	xbd	1	1	xce	1	1	x02	0	0	x03	0	0	x04	0	0	x06	0	0	x09	0	0	x0a	0	0
Variables	M...	result																																							
x01	17,36	17,36																																							
x28	1	1																																							
x34	1	1																																							
x9a	1	1																																							
xbd	1	1																																							
xce	1	1																																							
x02	0	0																																							
x03	0	0																																							
x04	0	0																																							
x06	0	0																																							
x09	0	0																																							
x0a	0	0																																							

Figura 9: Modelo alternativo, onde podemos ligar mais que uma aresta a cada

6 Conclusão

Com isto, o grupo apresenta-se satisfeito com o resultado obtido. Utilizando as ferramentas introduzidas nas aulas práticas, fomos capazes de chegar à solução ótima, um caminho Euleriano. Para além disso, foi provado que, mesmo sem a implicação de todos os vértices serem de grau par, o caminho obtido originalmente continua a ser a solução ideal para o problema apresentado.