

Análise e Projeto de Sistema de Controle para Tanques Acoplados: Discretização, Controlabilidade, Observabilidade, Controlador Regulador e de Ação Integral e Observador de Estado usando Filtro de Kalman

Engenharia de Controle e Automação – UFBA

Ana Beatriz Alves Hougaz

Relatório Técnico 2

Dezembro de 2025

Resumo

Este relatório apresenta a análise e o projeto de controle para um sistema de dois tanques acoplados. O estudo abrange a discretização do modelo linearizado, análise de controlabilidade e observabilidade, projeto de controlador por alocação de polos (regulador) e por ação integral, e projeto de observador de estado utilizando Filtro de Kalman. Os resultados demonstram a capacidade de controlar os níveis dos tanques mesmo com medição limitada e na presença de ruídos, validando as ferramentas de controle moderno aplicadas ao sistema.

1 Introdução

No estudo anterior, foi realizada a modelagem, linearização e análise básica de um sistema de tanques acoplados. Este relatório avança na análise e projeto de controle, aplicando ferramentas de controle digital para este sistema. Os tópicos abordados neste relatório incluem a discretização do sistema para implementação digital, análise de controlabilidade e observabilidade, projeto de controlador por alocação de polos e por ação integral para rejeição de perturbações, e projeto de observador de estado usando Filtro de Kalman para estimar estados não medidos a partir de medições ruidosas. A metodologia empregada segue os princípios da teoria de controle moderno, baseando-se na representação em espaço de estados e nas técnicas de síntese de controladores digitais.

2 Discretização do Sistema

Para que o sistema de controle possa ser implementado em controladores digitais, como microcontroladores, PLCs ou computadores, é necessário discretizar o modelo contínuo

obtido anteriormente. Esta conversão é fundamental porque os controladores digitais operam de forma discreta no tempo, amostrando as medições e atualizando os sinais de controle em intervalos regulares, ao contrário dos sistemas analógicos que operam continuamente.

O sistema linearizado obtido no estudo anterior possui as matrizes de estado e entrada definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0.005 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Estas matrizes descrevem a dinâmica do sistema em tempo contínuo através da equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, onde \mathbf{x} representa o vetor de estados (níveis dos tanques) e \mathbf{u} representa o vetor de entradas (vazões de entrada).

2.1 Métodos de Discretização

A discretização consiste em transformar a equação diferencial contínua em uma equação de diferenças que pode ser implementada computacionalmente. Dois métodos foram aplicados neste estudo: o método de Euler e o método de retenção de ordem zero (ZOH). A escolha de múltiplos métodos permite comparar suas precisões e validar os resultados obtidos.

2.1.1 Método de Euler

O método de Euler, também conhecido como método de diferenças finitas progressivas, representa uma das abordagens mais intuitivas para discretizar sistemas contínuos. A ideia central é aproximar a derivada temporal do estado por uma diferença finita, transformando a equação diferencial em uma equação de diferenças que pode ser processada digitalmente.

A necessidade desta transformação surge da natureza distinta entre o mundo físico e o ambiente computacional. Enquanto o sistema físico evolui continuamente no tempo, sendo descrito por equações diferenciais que envolvem $\dot{x}(t)$, o controlador digital opera em passos discretos, executando cálculos em instantes específicos separados por um período de amostragem T_s . Nestes instantes, denotados por $k = 0, 1, 2, \dots$, o controlador lê os sensores, executa os algoritmos de controle e atualiza as saídas, permanecendo inativo entre esses momentos.

Para realizar a conversão, o método de Euler emprega a seguinte aproximação da derivada temporal:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

onde $\Delta t = T_s$ representa o período de amostragem escolhido. Esta aproximação é válida quando T_s é suficientemente pequeno em relação à dinâmica do sistema, de modo que as variações do estado entre dois instantes consecutivos possam ser consideradas aproximadamente lineares.

O desenvolvimento matemático completo da discretização pelo método de Euler procede da seguinte forma. Partindo da equação de estados contínua:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3)$$

substituímos a derivada pela aproximação de diferenças finitas, considerando que no instante discreto k temos $x(kT_s) = x_k$ e no instante seguinte $x((k+1)T_s) = x_{k+1}$:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s} = Ax_k + Bu_k \quad (4)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por T_s para isolar o termo que contém x_{k+1} :

$$x_{k+1} - x_k = (A \cdot T_s)x_k + (B \cdot T_s)u_k \quad (5)$$

Adicionando x_k em ambos os lados e reconhecendo que $x_k = I \cdot x_k$, onde I é a matriz identidade, obtemos:

$$x_{k+1} = x_k + (A \cdot T_s)x_k + (B \cdot T_s)u_k = (I + A \cdot T_s)x_k + (B \cdot T_s)u_k \quad (6)$$

Desta forma, identificamos as matrizes discretas do sistema como:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{A}T_s, \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{B}T_s \quad (7)$$

Para o sistema de tanques acoplados, foi escolhido um período de amostragem $T_s = 50$ s. Esta escolha é baseada na dinâmica relativamente lenta do sistema, onde as constantes de tempo dos tanques são da ordem de centenas de segundos. O período de amostragem deve ser suficientemente pequeno para capturar adequadamente a dinâmica do sistema, mas não tão pequeno que sobrecarregue o processamento computacional ou introduza problemas numéricos.

2.1.2 Método de Retenção de Ordem Zero (ZOH)

O método de retenção de ordem zero representa a transformação exata do sistema contínuo para o discreto, considerando que a entrada de controle permanece constante entre os instantes de amostragem. Esta é a hipótese que mais se aproxima da realidade em implementações digitais, pois o controlador calcula um valor de saída no instante k e este valor é mantido constante por todo o período T_s até o próximo instante de cálculo.

A solução da equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ no intervalo entre dois instantes de amostragem, assumindo entrada constante, é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}d\tau \quad (8)$$

Avaliando esta solução no instante $t = T_s$ e considerando $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_k$ e \mathbf{u} constante igual a \mathbf{u}_k , obtemos as matrizes discretas exatas:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{AT}_s}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B} \quad (9)$$

A exponencial de matriz $e^{\mathbf{AT}_s}$ pode ser calculada através de métodos numéricos, como a decomposição em autovalores ou séries de Taylor. A integral que define \mathbf{B}_d também pode ser avaliada numericamente ou, alternativamente, pode-se usar a fórmula $\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{AT}_s} - \mathbf{I})\mathbf{B}$ quando \mathbf{A} é inversível.

2.2 Resultados da Discretização

Aplicando o método de Euler ao sistema de tanques acoplados com $T_s = 50$ s, obtiveram-se as seguintes matrizes discretas:

$$\mathbf{A}_d^{\text{Euler}} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.125 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d^{\text{Euler}} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 12.5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Aplicando o método ZOH ao mesmo sistema, as matrizes discretas resultantes foram:

$$\mathbf{A}_d^{\text{ZOH}} = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.22 \\ 0.11 & 0.28 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d^{\text{ZOH}} = \begin{bmatrix} 23.5 & 0 \\ 0 & 11.8 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Observa-se que os dois métodos produziram resultados similares, mas não idênticos. As diferenças mais significativas aparecem nos elementos da matriz \mathbf{A}_d , particularmente nos termos diagonais. O método ZOH, sendo matematicamente exato, é teoricamente superior ao método de Euler. No entanto, para o período de amostragem escolhido, que é suficientemente pequeno em relação às constantes de tempo do sistema, ambos os métodos fornecem aproximações aceitáveis.

A Figura 1 apresenta uma comparação entre as respostas ao degrau do sistema contínuo original e dos sistemas discretizados pelos dois métodos. A simulação foi realizada aplicando-se um degrau unitário na primeira entrada enquanto a segunda entrada permaneceu nula. Observa-se que ambas as discretizações reproduzem adequadamente o comportamento do sistema contínuo, com o método ZOH apresentando concordância ligeiramente superior, especialmente nos primeiros instantes após a aplicação do degrau.

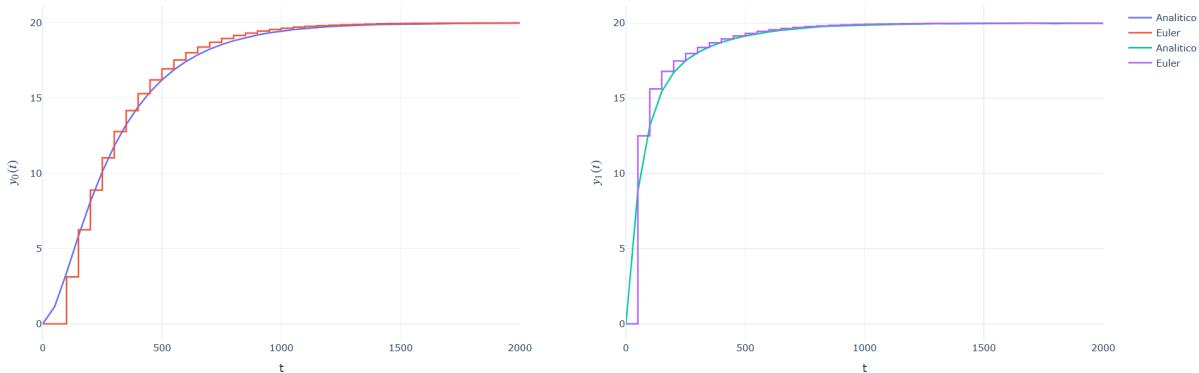


Figura 1: Comparaçāo das respostas do sistema contínuo e discretizado (Euler e ZOH) para um degrau na entrada. A similaridade entre as respostas valida a escolha do período de amostragem e demonstra que ambos os métodos são adequados para este sistema.

A escolha entre os métodos de discretização em aplicações práticas depende de diversos fatores. O método de Euler é computacionalmente mais simples e eficiente, enquanto o método ZOH é mais preciso mas requer cálculo de exponentiais de matriz. Para sistemas com dinâmica lenta e períodos de amostragem adequados, como no caso presente, o método de Euler pode ser suficiente. Para sistemas com dinâmica rápida ou requisitos de precisão mais rigorosos, o método ZOH é preferível.

3 Análise de Controlabilidade e Observabilidade

Antes de projetar qualquer sistema de controle, é fundamental verificar se o sistema possui as propriedades estruturais necessárias para que o controle seja possível. As duas propriedades fundamentais são a controlabilidade e a observabilidade. A controlabilidade

determina se é possível levar o sistema de qualquer estado inicial a qualquer estado final desejado através da aplicação de sinais de controle apropriados. A observabilidade determina se é possível inferir todos os estados do sistema a partir das medições disponíveis. Estas propriedades são intrínsecas à estrutura do sistema e independem do controlador ou observador específico que será projetado posteriormente.

3.1 Fundamentação Matemática da Controlabilidade

A controlabilidade é uma propriedade fundamental que determina se é possível conduzir um sistema de um estado inicial arbitrário para um estado desejado em tempo finito, por meio de uma sequência apropriada de entradas. Para um sistema discreto linear invariante no tempo, descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (12)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, a questão da controlabilidade pode ser analisada iterativamente. Considere-se um estado inicial $\mathbf{x}(0)$ e aplique-se a equação de estados para os primeiros n instantes de tempo:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \quad (13)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \quad (14)$$

$$= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{AB}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \quad (15)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{AB}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \quad (16)$$

⋮

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \cdots + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1) \quad (17)$$

Reescrevendo estas equações em forma matricial, obtém-se:

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) = [\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(n-1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

A matriz que aparece no lado direito desta equação é a **matriz de controlabilidade**:

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (19)$$

O sistema é completamente controlável se, para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$ e qualquer estado final desejado \mathbf{x}_f , existir uma sequência de entradas $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(n-1)$ que satisfaça a equação acima. Isto ocorre se e somente se a matriz de controlabilidade \mathcal{C} possuir **posto completo**, ou seja:

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n \quad (20)$$

onde n é o número de estados do sistema. Quando esta condição é satisfeita, as colunas de \mathcal{C} geram todo o espaço \mathbb{R}^n , garantindo que qualquer estado pode ser alcançado a partir da origem (ou de qualquer estado inicial) em no máximo n passos.

3.1.1 Análise de Controlabilidade do Sistema de Tanques

Para o sistema de tanques acoplados, que possui dois estados ($n = 2$) e duas entradas ($m = 2$), a matriz de controlabilidade é construída concatenando \mathbf{B} e \mathbf{AB} :

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] \quad (21)$$

Calculando explicitamente o produto \mathbf{AB} :

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0.005 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0025 & 0.00125 \\ 0.00125 & -0.00375 \end{bmatrix} \quad (22)$$

A matriz de controlabilidade completa é então:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.0025 & 0.00125 \\ 0 & 0.25 & 0.00125 & -0.00375 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Para verificar a controlabilidade, calculamos o posto desta matriz 2×4 . Uma matriz tem posto k se ela possui k linhas ou colunas linearmente independentes. Para uma matriz 2×4 , o posto máximo possível é 2. Podemos verificar que as duas primeiras colunas são linearmente independentes (uma é $[0.5, 0]^T$ e a outra é $[0, 0.25]^T$, não proporcionais). Portanto, $\text{rank}(\mathcal{C}) = 2$.

Como o posto da matriz de controlabilidade é igual ao número de estados do sistema, concluímos que o sistema de tanques acoplados é completamente controlável. Do ponto de vista físico, isto significa que é possível manipular as vazões de entrada dos dois tanques de forma coordenada para levar os níveis de água de quaisquer valores iniciais para quaisquer valores finais desejados em tempo finito. Esta propriedade é essencial para o projeto de controladores e garante que existe uma lei de controle capaz de estabilizar o sistema e fazê-lo rastrear referências arbitrárias.

A controlabilidade completa do sistema pode ser compreendida fisicamente ao considerar que cada tanque possui sua própria entrada de controle independente, e que existe acoplamento entre os tanques através da tubulação que os conecta. Esta configuração permite que ambos os estados sejam influenciados pelas entradas de controle, seja diretamente (cada entrada afeta primariamente seu respectivo tanque) ou indiretamente através do acoplamento hidráulico.

3.2 Fundamentação Matemática da Observabilidade

A observabilidade é a propriedade dual da controlabilidade e responde à seguinte questão: é possível determinar o estado atual de um sistema a partir das medições de saída atuais e passadas? Para um sistema discreto linear invariante no tempo, descrito por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) \end{aligned} \quad (24)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, a análise de observabilidade pode ser realizada de forma análoga à da controlabilidade. A equação de saída pode ser expandida recursivamente para demonstrar a relação entre as medições futuras e o estado inicial:

$$y(k) = Cx(k) \quad (25)$$

$$y(k+1) = Cx(k+1) = C[A_dx(k) + B_du(k)] \quad (26)$$

$$= CA_dx(k) + CB_du(k) \quad (27)$$

$$y(k+2) = Cx(k+2) = C[A_dx(k+1) + B_du(k+1)] \quad (28)$$

$$= CA_dx(k+1) + CB_du(k+1) \quad (29)$$

$$= CA_d[A_dx(k) + B_du(k)] + CB_du(k+1) \quad (30)$$

$$= CA_d^2x(k) + CA_dB_du(k) + CB_du(k+1) \quad (31)$$

Generalizando para n passos:

$$y(k+n) = CA_d^n x(k) + CA_d^{n-1} B_d u(k) + \cdots + CB_d u(k+n-1) \quad (32)$$

Em forma matricial, o vetor de saídas futuras relaciona-se com o estado inicial por:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ CA_d^{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB_d & 0 & \cdots & 0 \\ CA_d B_d & CB_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA_d^{n-1} B_d & \cdots & CB_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+n-1) \end{bmatrix} \quad (33)$$

A primeira matriz à direita é precisamente \mathcal{O} (matriz de observabilidade). O sistema é completamente observável se, para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$, este puder ser determinado unicamente a partir das medições de saída $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n-1)$ (conhecendo-se as entradas). Isto ocorre se e somente se a matriz de observabilidade \mathcal{O} possuir **posto completo**, ou seja:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n \quad (34)$$

onde n é o número de estados do sistema. Quando esta condição é satisfeita, as linhas de \mathcal{O} são linearmente independentes, garantindo que nenhuma componente do estado esteja "escondida" das medições de saída.

3.2.1 Análise de Observabilidade

No primeiro cenário, onde ambos os estados são medidos, a matriz de saída é simplesmente a matriz identidade $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$. Isto significa que cada estado é medido diretamente sem qualquer transformação. A matriz de observabilidade para o sistema de segunda ordem é:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.005 & 0.005 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Esta matriz possui dimensão 4×2 . As duas primeiras linhas formam a matriz identidade e são obviamente linearmente independentes, garantindo que $\text{rank}(\mathcal{O}) = 2$. Portanto, o sistema é completamente observável quando ambos os estados são medidos. Este resultado é esperado, pois quando todos os estados são medidos diretamente, não há ambiguidade sobre a configuração do sistema.

4 Estimação de Estados: Filtro de Kalman

Em aplicações práticas de controle, nem sempre é possível ou economicamente viável medir todos os estados do sistema. No caso do sistema de dois tanques acoplados, pode-se questionar: é possível estimar o nível do Tanque 1 (h_1) tendo disponível apenas a medição ruidosa do nível do Tanque 2 (h_2)?

Esta questão motivou a implementação do Filtro de Kalman, um estimador ótimo recursivo que opera em dois passos fundamentais: predição e correção. A viabilidade da estimação está condicionada à *observabilidade* do sistema, propriedade que deve ser verificada a priori. O Filtro de Kalman para sistemas discretos considera o modelo estocástico:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + w_k \\ y(k) &= C x(k) + v_k \end{aligned} \quad (36)$$

onde w_k representa o ruído de processo e v_k representa o ruído de medição.

4.1 Algoritmo do Filtro de Kalman

O filtro opera em dois passos sequenciais a cada instante de amostragem:

Passo de Predição:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= A_d \hat{x}(k|k) + B_d u(k) \\ P(k+1|k) &= A_d P(k|k) A_d^T + Q \end{aligned} \quad (37)$$

onde $\hat{x}(k+1|k)$ é a estimativa a priori do estado e $P(k+1|k)$ é a covariância do erro de estimação a priori.

Passo de Correção:

$$\begin{aligned} K(k+1) &= P(k+1|k) C^T [C P(k+1|k) C^T + R]^{-1} \\ \hat{x}(k+1|k+1) &= \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)[y(k+1) - C \hat{x}(k+1|k)] \\ P(k+1|k+1) &= [I - K(k+1) C] P(k+1|k) \end{aligned} \quad (38)$$

onde $K(k+1)$ é o ganho de Kalman, calculado para minimizar a covariância do erro de estimação $P(k+1|k+1)$.

4.2 Implementação Computacional

4.2.1 Parâmetros do Filtro

O sistema foi discretizado pelo método ZOH, conforme apresentado na seção anterior. A Tabela 1 apresenta os parâmetros utilizados na implementação do Filtro de Kalman.

A matriz C indica que apenas o nível do Tanque 2 (h_2) é medido. O tempo de amostragem foi extraído da simulação não-linear. A matriz Q representa a incerteza no modelo de processo, enquanto $R = 0.25$ corresponde a um sensor com desvio padrão de 0.5 m. A estimativa inicial coincide com o ponto de equilíbrio do sistema.

Tabela 1: Parâmetros do Filtro de Kalman

Parâmetro	Símbolo	Valor
Matriz de saída	C	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$
Tempo de amostragem	T_s	$\Delta t_{\text{médio}}$
Covariância do ruído de processo	Q	$\text{diag}(0.01, 0.01) \cdot T_s$
Variância do ruído de medição	R	0.25
Estimativa inicial	\hat{x}_0	$\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \end{bmatrix}$
Covariância inicial	P_0	$I_{2 \times 2}$

4.2.2 Simulação de Medições

Para avaliar o desempenho do filtro, foi adicionado ruído gaussiano às medições simuladas:

$$y_{\text{medido}}(k) = y_{\text{ideal}}(k) + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, 0.5^2) \quad (39)$$

Este procedimento reproduz as condições de operação com sensores reais, sujeitos a perturbações e imprecisões de medição.

4.3 Considerações sobre Variáveis de Desvio

O modelo linearizado opera com variáveis de desvio em relação ao ponto de operação (h_{ss}, q_{ss}). Nas equações do filtro, utiliza-se:

$$\begin{aligned} \Delta x(k) &= x(k) - x_{ss} \\ \Delta u(k) &= u(k) - u_{ss} \end{aligned} \quad (40)$$

A conversão para valores absolutos é realizada após a estimativa:

$$\hat{x}_{\text{absoluto}}(k) = \hat{x}_{\text{desvio}}(k) + x_{ss} \quad (41)$$

A Figura 2 do filtro implementado foi capaz de reconstruir o estado não medido h_1 utilizando apenas a medição de h_2 . A estimativa apresentou redução do ruído de medição, fornecendo valores filtrados de ambos os estados. A convergência ocorreu a partir das condições iniciais especificadas, mesmo na presença de incertezas de modelo e ruído de medição. Os gráficos comparativos entre o estado real da simulação, a medição ruidosa e a estimativa filtrada confirmam o funcionamento do estimador sob as condições de ruído e incertezas impostas.

A verificação da observabilidade confirma que a estrutura do sistema de tanques acoplados permite a estimativa completa de estados com apenas um sensor. A implementação do Filtro de Kalman possibilita a redução de custos com instrumentação, a filtragem de ruído nas medições disponíveis e a obtenção de estados não medidos diretamente. Esta estimativa de estados será utilizada na implementação do controlador por realimentação de estados desenvolvido na seção seguinte.

5 Projeto de Controlador

Com as propriedades de controlabilidade e observabilidade confirmadas, procedeu-se ao projeto do sistema de controle. O projeto foi desenvolvido em duas etapas: primeiro, um

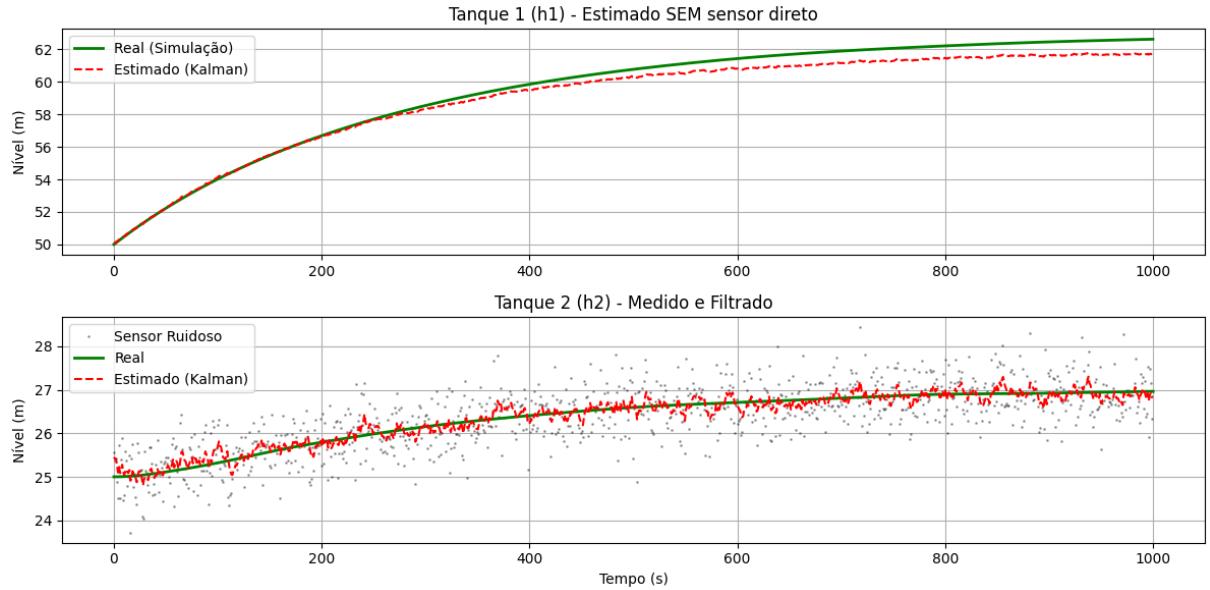


Figura 2: Desempenho do Filtro de Kalman: (acima) estimativa do nível do tanque 1 não medido; (abaixo) medição ruidosa e estimativa do nível do tanque 2.

controlador regulador baseado em alocação de polos para estabilização e resposta transitória adequada; segundo, um controlador com ação integral para garantir rastreamento perfeito de referências em regime permanente.

5.1 Controlador por Alocação de Polos (Regulador)

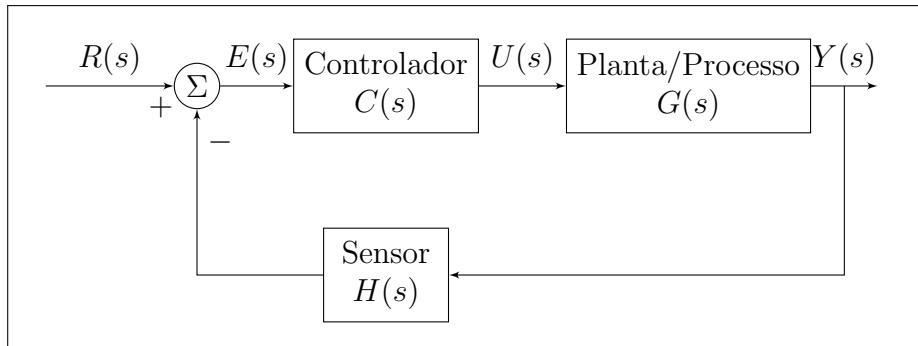


Figura 3: Diagrama de Controle em Malha Fechada.

O primeiro controlador projetado foi um regulador por realimentação de estados com alocação de polos. Este tipo de controlador assume que todos os estados do sistema estão disponíveis para medição ou podem ser estimados através de um observador. A lei de controle proporcional é dada por $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{Kx}(k)$, onde \mathbf{K} é a matriz de ganhos de realimentação que deve ser determinada. A determinação da matriz de ganho \mathbf{K} no controlador por realimentação de estados baseia-se no princípio da alocação de polos, como é descrito pelo diagrama de blocos da Figura 3. Considerando um sistema linear invariante no tempo descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \quad (42)$$

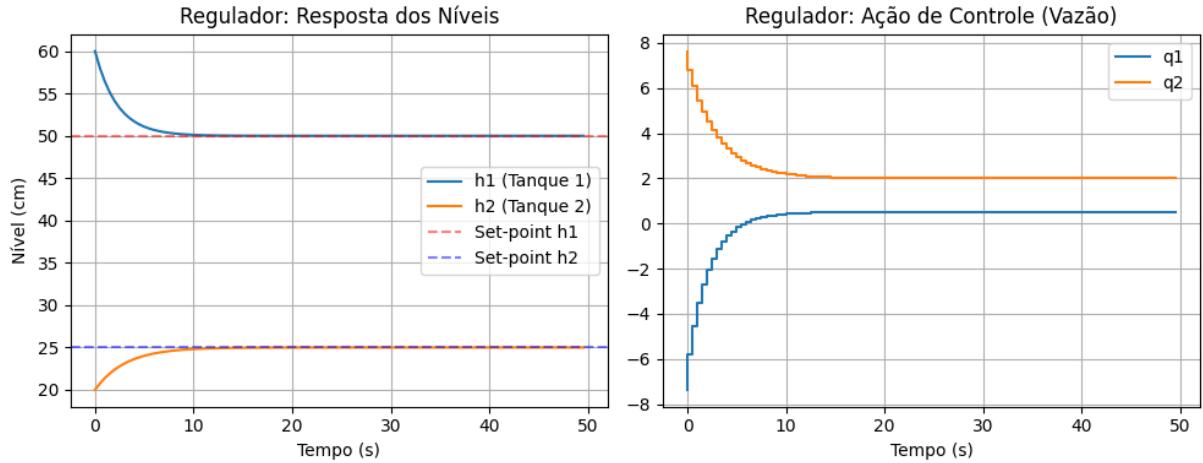


Figura 4: Resposta do sistema controlado por meio da alocação de polos.

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada.

A lei de controle por realimentação de estados é definida como:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (43)$$

Substituindo (43) em (42), obtém-se a dinâmica do sistema em malha fechada:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \quad (44)$$

Os polos do sistema em malha fechada correspondem aos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$. O problema de alocação de polos consiste em determinar \mathbf{K} tal que os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ coincidam com um conjunto de polos desejados p_1, p_2, \dots, p_n .

Para o sistema de tanques acoplados discretizado com período de amostragem $T_s = 50$ s, foram escolhidos polos de malha fechada em $z = 0.8$ e $z = 0.85$. A escolha destes valores foi guiada por diversos critérios. Primeiro, ambos os polos estão estritamente dentro do círculo unitário, garantindo estabilidade assintótica. Segundo, os polos estão suficientemente afastados da origem para evitar resposta excessivamente rápida que poderia exigir esforços de controle impraticáveis. Terceiro, os polos estão suficientemente afastados do círculo unitário para garantir amortecimento adequado e evitar oscilações prolongadas.

Utilizando o algoritmo citado de alocação de polos, a matriz de ganhos de realimentação calculada foi:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.3966 & 0.0092 \\ 0.0090 & 0.5439 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Os ganhos revelam informações importantes sobre a estrutura do controle. Os termos diagonais $K_{11} = 0.3966$ e $K_{22} = 0.5439$ são significativamente maiores que os termos fora da diagonal $K_{12} = 0.0092$ e $K_{21} = 0.0090$. Isto indica que o controle é predominantemente desacoplado, ou seja, a entrada do primeiro tanque é primariamente determinada pelo nível do primeiro tanque, e similarmente para o segundo tanque. Os pequenos termos cruzados representam correções para compensar o acoplamento entre os tanques.

A simulação descrita na Figura 4 demonstrou resposta estável e transitório adequado com erro estacionário praticamente nulo e ausência de oscilações, caracterizando um com-

portamento bem amortecido. A ação de controle evolui de forma gradual até valores constantes, com menor esforço médio dos atuadores, o que torna o regulador mais adequado para rejeição de perturbações e operação contínua em regime estacionário.

5.2 Controlador com Ação Integral

Para eliminar completamente o erro em regime permanente e garantir rastreamento perfeito de referências constantes, foi projetado um controlador com ação integral. A ação integral funciona acumulando o erro entre o setpoint desejado e o valor medido ao longo do tempo, gerando uma ação de controle que persiste até que o erro seja completamente anulado.

A implementação da ação integral requer a adição de estados integradores ao sistema. Estes novos estados acumulam o erro de rastreamento ao longo do tempo. Matematicamente, o sistema é aumentado da seguinte forma. Definem-se os estados integradores como:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{x}_i(k) + (\mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k)) \quad (46)$$

onde $\mathbf{r}(k)$ é o vetor de referências desejadas e $\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k)$ são as saídas medidas. O sistema aumentado, que combina os estados originais com os estados integradores, pode ser escrito como:

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(k) \quad (47)$$

onde $\mathbf{x}_a = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{x}_i^T]^T$ é o vetor de estados aumentado. Este sistema possui quatro estados: os dois níveis originais dos tanques mais dois estados integradores que acumulam os erros de cada tanque.

Para o sistema aumentado, aplicou-se novamente a técnica de alocação de polos. Como o sistema aumentado possui quatro estados, foram necessários quatro polos de malha fechada. Os polos escolhidos foram $z = [0.75, 0.8, 0.9, 0.95]$. Estes valores foram selecionados para garantir estabilidade, resposta transitória adequada e boa rejeição de perturbações. Os polos mais lentos (0.9 e 0.95) foram associados aos estados integradores, permitindo que a ação integral atue de forma suave sem causar sobressinais excessivos.

O controlador aumentado resultante pode ser particionado como:

$$\mathbf{K}_a = [\mathbf{K}_x \ \mathbf{K}_i] \quad (48)$$

onde \mathbf{K}_x são os ganhos de realimentação dos estados originais e \mathbf{K}_i são os ganhos de realimentação dos estados integradores. A lei de controle completa com ação integral é então:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_x \mathbf{x}(k) - \mathbf{K}_i \mathbf{x}_i(k) \quad (49)$$

Esta formulação mostra claramente que a ação de controle é composta por duas parcelas: uma proporcional aos estados atuais do sistema e outra proporcional aos erros acumulados. A primeira parcela garante estabilidade e resposta dinâmica adequada, enquanto a segunda garante erro zero em regime permanente.

A Figura 5 apresenta os resultados da simulação do sistema controlado com ação integral. O cenário simulado corresponde a uma mudança de setpoint dos valores de equilíbrio iniciais [50, 25] metros para novos valores desejados [55, 30] metros. Os níveis dos tanques

convergem para os valores de referência com erro em regime permanente desprezível, indicando estabilidade do sistema e bom desempenho de seguimento. A resposta é rápida, sem oscilações sustentadas e com sobresinal pouco significativo. A ação de controle apresenta picos elevados no início do transitório, o que é característico de controladores do tipo rastreador diante de variações na referência, mas converge posteriormente para valores constantes, evidenciando que o sistema atinge um regime estacionário consistente ao custo de maior esforço de controle no início.

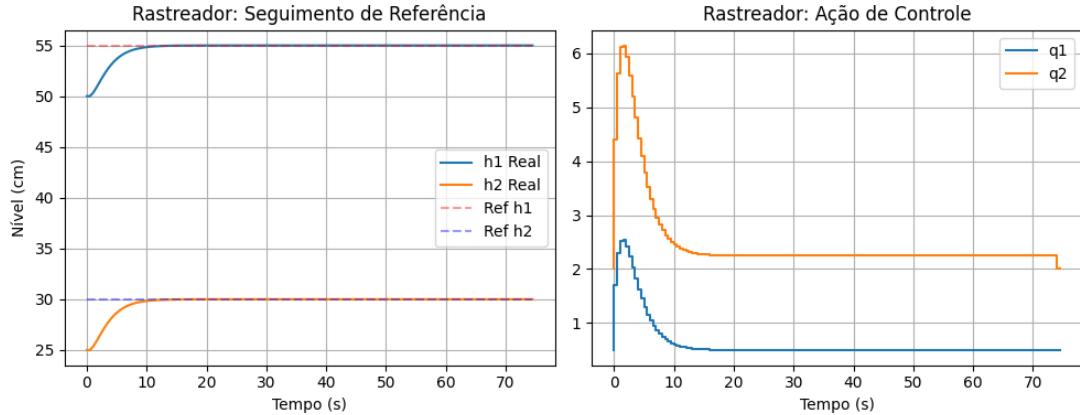


Figura 5: Resposta do sistema controlado com ação integral para mudança de setpoint. Observa-se que ambos os tanques alcançam os valores de referência desejados sem erro em regime permanente, demonstrando a eficácia da ação integral.

Os resultados demonstram que ambos os tanques convergem suavemente para os novos valores de referência sem oscilações excessivas ou sobressinais significativos. Como também, o erro em regime permanente é eliminado, com os níveis dos tanques se estabilizando exatamente nos valores desejados de 55 e 30 metros. Este comportamento confirma o funcionamento adequado da ação integral.

6 Conclusões

Este trabalho apresentou uma análise abrangente de um sistema de tanques acoplados, demonstrando a aplicação sistemática de ferramentas fundamentais da teoria de controle moderno. O estudo abrangeu desde a discretização do modelo até o projeto de controladores e observadores de estados, fornecendo uma visão integrada do processo de síntese.

A discretização do sistema contínuo, realizada através dos métodos de Euler e de retenção de ordem zero, permitiu a transição do modelo matemático para uma forma implementável em controladores digitais. A comparação entre os métodos revelou que, para o período de amostragem escolhido de cinquenta segundos, ambas as abordagens fornecem aproximações adequadas, com o método ZOH apresentando precisão ligeiramente superior como esperado teoricamente. A escolha do período de amostragem mostrou-se adequada para a dinâmica do sistema, capturando adequadamente o comportamento sem sobrecarregar os recursos computacionais.

A análise de controlabilidade e observabilidade confirmou que o sistema possui as propriedades estruturais necessárias para implementação de controle por realimentação de estados. A controlabilidade completa garante que é possível dirigir os níveis dos tanques para quaisquer valores desejados através de sinais de controle apropriados. A análise de

observabilidade revelou que o sistema é observável mesmo quando apenas um dos dois estados é medido, propriedade esta que foi explorada no projeto do observador de estados.

O controlador projetado inicialmente por alocação de polos foi capaz de estabilizar o sistema e assegurar uma resposta transitória adequada. A posterior inclusão da ação integral eliminou o erro em regime permanente, permitindo o rastreamento preciso de referências constantes e aumentando a robustez frente a perturbações não modeladas. As simulações confirmaram o desempenho do controlador, evidenciando convergência suave para os set-points desejados, sem oscilações excessivas.

A capacidade do filtro de reconstruir com precisão o estado não medido do primeiro tanque, utilizando apenas as medições ruidosas do segundo tanque, validou experimentalmente a propriedade de observabilidade verificada teoricamente. Essa capacidade é crucial para implementação prática, onde restrições econômicas ou técnicas frequentemente limitam o número de sensores disponíveis. A combinação do controlador com o observador de estados resultou em um sistema de controle completo e robusto.

7 Referências

OGATA, K. *Discrete-Time Control Systems*. Segunda edição. Prentice Hall, 1995.