

Análise Dinâmica de Sistema Não Linear de Tanques Acoplados: Linearização, Espaço de Estados e Formas Canônicas

Engenharia de Controle e Automação – UFBA

Ana Beatriz Alves Hougaz

Relatório Técnico

4 de novembro de 2025

Resumo

Este relatório apresenta uma análise do comportamento dinâmico de um sistema não linear de tanques acoplados utilizando técnicas de espaço de estados. O estudo abrange a modelagem matemática do sistema, cálculo de pontos de equilíbrio, linearização em torno do ponto operacional, análise de estabilidade, obtenção de funções de transferência e representações em formas canônicas. Os resultados demonstram a validade da aproximação linear para pequenas perturbações e evidenciam as características fundamentais do sistema através da análise de autovalores e mapa de fases.

1 Introdução

Sistemas de tanques acoplados são amplamente utilizados na indústria de processos químicos, tratamento de água e controle de níveis. A análise destes sistemas é fundamental para o projeto de estratégias de controle eficazes e compreensão da dinâmica de processos.

O sistema estudado consiste em dois tanques interconectados, onde o primeiro tanque possui uma saída que alimenta o segundo tanque, e ambos recebem vazões de entrada independentes. Este arranjo resulta em um sistema MIMO (Multiple Input Multiple Output) com comportamento não linear devido à relação não linear entre a vazão de saída e o nível dos tanques.

1.1 Objetivos

O estudo teve como objetivos modelar matematicamente o sistema de tanques acoplados e determinar seus estados estacionários para condições operacionais específicas. A partir desse ponto, realizou-se a linearização do modelo em torno do ponto de operação e a análise da estabilidade do sistema linearizado.

Em seguida, foram obtidas as representações equivalentes em espaço de estados e nas funções de transferência correspondentes, permitindo a comparação entre as respostas dos modelos linear e não linear. Por fim, foram determinadas as formas canônicas —

controlável, observável e de Jordan — a fim de compreender diferentes representações estruturais do mesmo sistema dinâmico.

2 Modelagem Matemática

2.1 Modelo Não Linear

O sistema de tanques acoplados é descrito pelas equações diferenciais não lineares apresentadas na Equação 1 e Equação 2:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_1 - c_{v1}\sqrt{h_1 - h_2}}{a_1} \quad (1)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{q_2 + c_{v1}\sqrt{h_1 - h_2} - c_{v2}\sqrt{h_2}}{a_2} \quad (2)$$

Variáveis de estado:

- h_1 = nível do tanque 1 (m)
- h_2 = nível do tanque 2 (m)

Variáveis de entrada:

- q_1 = vazão de entrada no tanque 1 (m³/s)
- q_2 = vazão de entrada no tanque 2 (m³/s)

Parâmetros:

- c_{v1}, c_{v2} são os coeficientes de vazão das válvulas
- a_1, a_2 são as áreas das seções transversais dos tanques (m²)

2.2 Parâmetros do Sistema

Os parâmetros utilizados na simulação foram definidos conforme apresentado na Tabela 1:

Parâmetro	Valor
c_{v1}	0.1 m ³ /s
c_{v2}	0.5 m ³ /s
a_1	2.0 m ²
a_2	4.0 m ²

Tabela 1: Parâmetros físicos do sistema

3 Análise de Estado Estacionário

3.1 Cálculo do Ponto de Equilíbrio

Para determinar o estado estacionário, fazemos $\frac{dh_1}{dt} = 0$ e $\frac{dh_2}{dt} = 0$. Para as vazões de entrada:

$$q_{1,ss} = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}, \quad q_{2,ss} = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$$

O sistema de equações algébricas resultante foi resolvido numericamente, obtendo-se o ponto de equilíbrio apresentado na Equação 3:

$$\boxed{h_{1,ss} = 50.0 \text{ m}, \quad h_{2,ss} = 25.0 \text{ m}} \quad (3)$$

3.1.1 Interpretação Física do Estado Estacionário

No estado estacionário, o sistema está **em equilíbrio dinâmico**, onde:

Entradas do Sistema:

- Tanque 1 recebe: $q_{1,ss} = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$
- Tanque 2 recebe: $q_{2,ss} = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$

Níveis Resultantes:

- Tanque 1 estabiliza em: $h_{1,ss} = 50.0 \text{ m}$
- Tanque 2 estabiliza em: $h_{2,ss} = 25.0 \text{ m}$
- Diferença de nível: $\Delta h = 25.0 \text{ m}$

Balço de Vazões no Equilíbrio:

Para o **Tanque 1**, conforme descrito na Equação 4:

$$q_1 = q_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow 0.5 = c_{v1} \sqrt{50 - 25} = 0.1 \sqrt{25} = 0.5 \text{ m}^3/\text{s} \quad (4)$$

Para o **Tanque 2**, conforme descrito na Equação 5:

$$q_2 + q_{1 \rightarrow 2} = q_{\text{saída}} \Rightarrow 2.0 + 0.5 = c_{v2} \sqrt{25} = 0.5 \times 5 = 2.5 \text{ m}^3/\text{s} \quad (5)$$

Significado Físico:

1. *O tanque 1 opera com nível mais alto (50 m) que o tanque 2 (25 m), criando um gradiente de pressão que impulsiona naturalmente o escoamento entre os tanques.*
2. *Toda a vazão que entra no tanque 1 (0.5 m³/s) é transferida para o tanque 2 através da válvula de interconexão.*
3. *O tanque 2 recebe um total de 2.5 m³/s (2.0 de entrada direta + 0.5 do tanque 1) e descarrega exatamente os mesmos 2.5 m³/s pela válvula de saída.*
4. *Os níveis permanecem constantes porque, para cada tanque, a taxa de entrada = taxa de saída (princípio da conservação de massa).*

3.2 Linearização

Para obter o modelo linear, aplicamos a expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de operação $(h_{1,ss}, h_{2,ss}, q_{1,ss}, q_{2,ss})$.

3.2.1 Passo 1: Cálculo das Derivadas Parciais

Seja $f_1 = \frac{dh_1}{dt}$ e $f_2 = \frac{dh_2}{dt}$. Calculamos as derivadas parciais conforme as Equação 6, Equação 7, Equação 8, Equação 9, Equação 10 e Equação 11:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = -\frac{c_{v1}}{2a_1\sqrt{h_1 - h_2}} \Big|_{ss} = -\frac{0.1}{2(2.0)\sqrt{25}} = -0.005 \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_2} = \frac{c_{v1}}{2a_1\sqrt{h_1 - h_2}} \Big|_{ss} = \frac{0.1}{2(2.0)\sqrt{25}} = 0.005 \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} = \frac{c_{v1}}{2a_2\sqrt{h_1 - h_2}} \Big|_{ss} = \frac{0.1}{2(4.0)\sqrt{25}} = 0.0025 \quad (8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_2} = -\frac{c_{v1}}{2a_2\sqrt{h_1 - h_2}} - \frac{c_{v2}}{2a_2\sqrt{h_2}} \Big|_{ss} = -\frac{0.1}{2(4.0)\sqrt{25}} - \frac{0.5}{2(4.0)\sqrt{25}} = -0.015 \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2.0} = 0.5 \quad (10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{4.0} = 0.25 \quad (11)$$

3.2.2 Passo 2: Matrizes do Sistema Linearizado

O modelo linearizado em espaço de estados é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

onde $\mathbf{x} = [h'_1 \ h'_2]^T$ e $\mathbf{u} = [q'_1 \ q'_2]^T$ são os desvios em relação ao ponto de operação.

Matriz A (dinâmica do sistema), conforme apresentado na Equação 12:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0.005 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Matriz B (influência das entradas), conforme apresentado na Equação 13:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.2.3 Interpretação Física das Matrizes:

Matriz A - Como os tanques influenciam uns aos outros:

A Equação 14 apresenta a matriz A com seus elementos identificados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0.005 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Elementos da Diagonal Principal (auto-influência):

- $A_{11} = -0.005$: Quando o nível do tanque 1 sobe, ele tende a diminuir sozinho, pois o escoamento para o tanque 2 aumenta à medida que cresce a diferença de níveis, expressa por $\sqrt{h_1 - h_2}$. O sinal negativo indica essa tendência natural de **voltar ao equilíbrio**.
- $A_{22} = -0.015$: Quando o nível do tanque 2 sobe, ele escoar mais pela saída e tende a diminuir.

Elementos Fora da Diagonal (acoplamento entre tanques):

- $A_{12} = 0.005$ (positivo): Quando o nível do **tanque 2 sobe**, ele *dificulta* o escoamento do tanque 1 (efeito de "contrapressão"), fazendo o tanque 1 subir também.
- $A_{21} = 0.0025$ (positivo): Quando o nível do **tanque 1 sobe**, escoar mais líquido para o tanque 2, fazendo o nível do tanque 2 subir.

Matriz B - Como as entradas (vazões) afetam os tanques:

A Equação 15 apresenta a estrutura da matriz B:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (15)$$

- $B_{11} = 0.5$: Se aumentarmos $1 \text{ m}^3/\text{s}$ em q_1 , o nível do tanque 1 sobe com taxa de 0.5 m/s . Como o tanque 1 tem área $a_1 = 2 \text{ m}^2$, faz sentido: $\frac{1 \text{ m}^3/\text{s}}{2 \text{ m}^2} = 0.5 \text{ m/s}$.
- $B_{22} = 0.25$: Se aumentarmos $1 \text{ m}^3/\text{s}$ em q_2 , o nível do tanque 2 sobe com taxa de 0.25 m/s . Como o tanque 2 tem área $a_2 = 4 \text{ m}^2$, ele sobe mais devagar: $\frac{1 \text{ m}^3/\text{s}}{4 \text{ m}^2} = 0.25 \text{ m/s}$.
- $B_{12} = 0$ e $B_{21} = 0$: Cada entrada afeta **diretamente apenas seu próprio tanque**. A vazão q_1 não entra no tanque 2, e vice-versa (pelo menos não diretamente - a influência indireta vem pela matriz A).

4 Análise de Estabilidade

4.1 Obtenção dos Autovalores

Os autovalores são obtidos resolvendo a equação característica apresentada na Equação 16:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (16)$$

$$\det \begin{bmatrix} -0.005 - \lambda & 0.005 \\ 0.0025 & -0.015 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-0.005 - \lambda)(-0.015 - \lambda) - (0.005)(0.0025) = 0$$

Expandindo, obtemos a Equação 17:

$$\lambda^2 + 0.02\lambda + 6.25 \times 10^{-5} = 0 \quad (17)$$

Resolvendo a Equação 17, obtemos os autovalores apresentados na Equação 18:

$$\boxed{\lambda_1 = -0.01612 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -0.00388} \quad (18)$$

CrITÉrio de Estabilidade: Como todos os autovalores apresentados na Equação 18 possuem parte real negativa ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$), o sistema é **assintoticamente estável**. Isto significa que, após qualquer perturbação, o sistema retornará ao ponto de equilíbrio.

4.2 Mapa de Fases

O mapa de fases demonstrado na Figura 1, ilustra o comportamento dinâmico do sistema não linear no plano (h_1, h_2) . Cada ponto do gráfico representa um *estado* do sistema, isto é, um par (h_1, h_2) , e as curvas indicam como o sistema evolui ao longo do tempo.

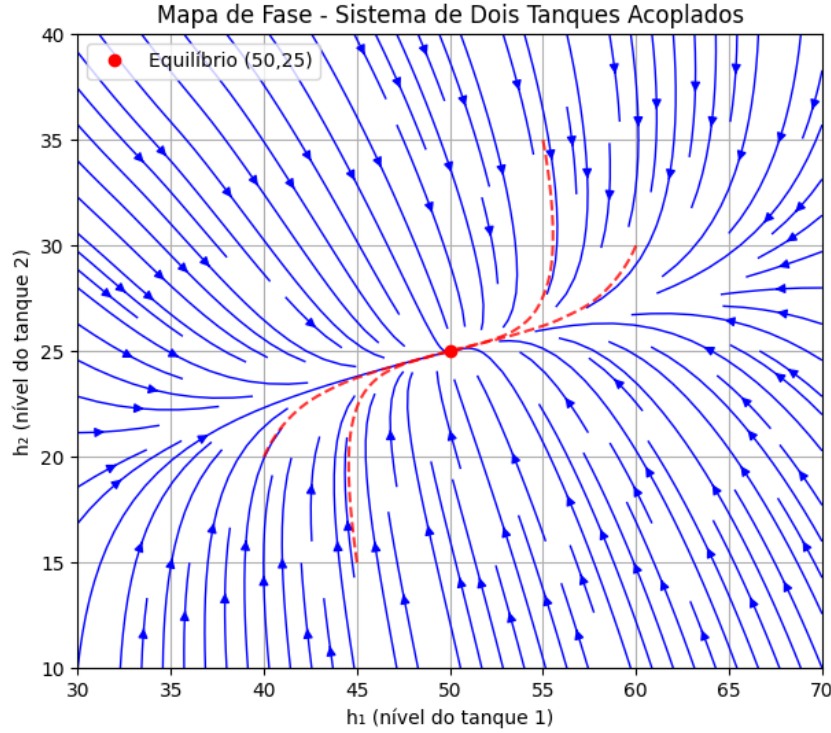


Figura 1: Mapa de fases do sistema.

O ponto de equilíbrio, localizado em $(50, 25)$ m e representado pelo ponto vermelho na Figura 1, mostra-se estável. As linhas de fluxo convergem em direção a esse ponto, confirmando a estabilidade assintótica do sistema. As trajetórias simuladas, partindo de diferentes condições iniciais, também convergem para o ponto de equilíbrio, independentemente da magnitude da perturbação aplicada. Esse comportamento confirma a análise linear de estabilidade e demonstra a robustez do sistema frente a variações nas condições iniciais.

5 Comparação: Modelo Linear vs. Não Linear

5.1 Condições de Simulação

Foi aplicada uma perturbação em degrau na vazão de entrada do tanque 1:

$$\Delta q_1 = 0.1 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{de } 0.5 \rightarrow 0.6 \text{ m}^3/\text{s})$$

mantendo $q_2 = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ constante, com ambos os tanques iniciando no estado estacionário.

5.2 Análise dos Resultados

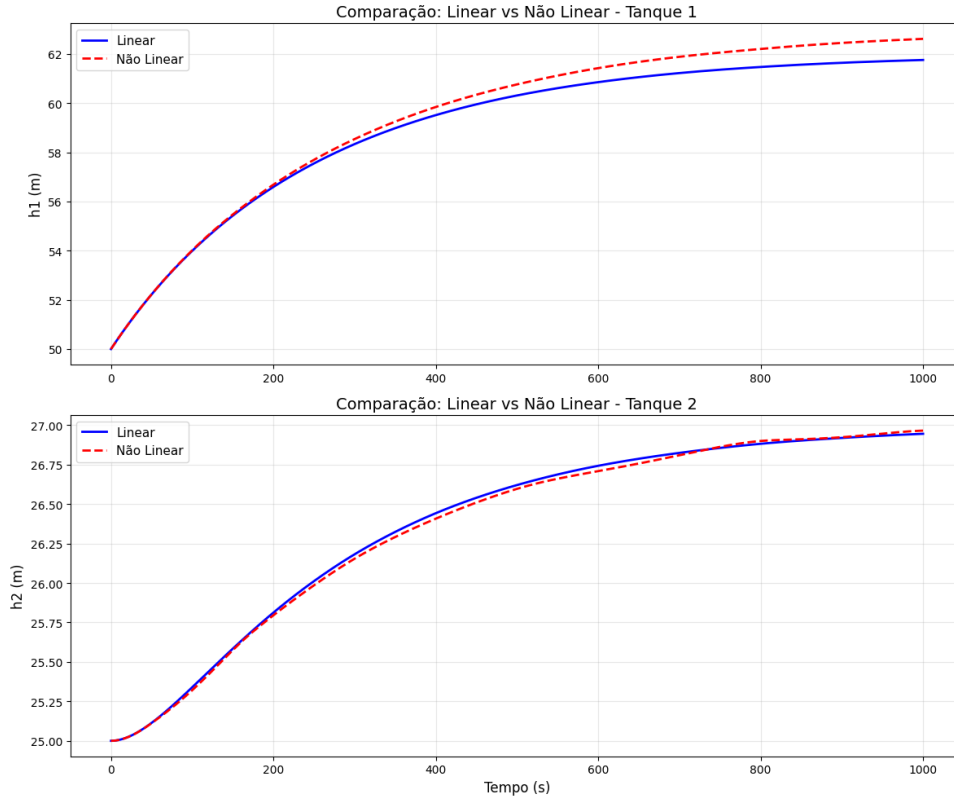


Figura 2: Comparação linear vs não linear entre os tanques.

Os gráficos demonstrados na Figura 2 apresentam a evolução temporal dos níveis dos tanques 1 e 2 obtidos pelos modelos linear e não linear, evidenciando tanto as convergências quanto as divergências entre as aproximações.

Resposta do Tanque 1: Após a aplicação da perturbação em degrau de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ na vazão de entrada, ambos os modelos apresentam comportamento qualitativo similar, com elevação do nível até atingir um novo estado estacionário. Entretanto, observa-se que o modelo linearizado prevê uma dinâmica transitória ligeiramente mais rápida, atingindo o regime permanente em menor tempo. O erro máximo absoluto registrado foi de **0.8585 m**. À medida que a altura do líquido se distancia do ponto de equilíbrio/operação, as respostas dos modelos linear e não linear passam a divergir progressivamente, refletindo a limitação da linearização em representar o comportamento global do sistema.

Resposta do Tanque 2: A dinâmica do segundo tanque apresenta concordância notavelmente superior entre os modelos, com erro máximo de apenas **0.0347 m**. Essa acurácia significativamente maior pode ser explicada por dois fenômenos físicos complementares: primeiro, o tanque 1 atua como um filtro passa-baixas natural, atenuando as não linearidades antes que estas afetem o tanque 2; segundo, a maior área transversal do tanque 2 ($a_2 = 4 \text{ m}^2$, em comparação a $a_1 = 2 \text{ m}^2$) resulta em constantes de tempo mais elevadas e variações de nível mais suaves, mantendo o sistema mais próximo da região de validade da linearização. Adicionalmente, o efeito cascata introduz um atraso temporal que permite ao sistema operar predominantemente em regime quase-estático, no qual a aproximação linear se mostra mais precisa.

6 Transformação de Função de Transferência para Espaço de Estados

6.1 Função de Transferência

A função de transferência relaciona as entradas e saídas do sistema no domínio da frequência, sendo dada pela Equação 19:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (19)$$

Assumindo medição completa dos estados ($\mathbf{C} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$) e $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, obtém-se a matriz de funções de transferência apresentada na Equação 20:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde as funções de transferência individuais são dadas pelas Equação 21, Equação 22, Equação 23 e Equação 24:

$$G_{11}(s) = \frac{0.5s + 0.0075}{s^2 + 0.02s + 6.25 \times 10^{-5}} \quad (21)$$

$$G_{12}(s) = \frac{3.469 \times 10^{-18}s + 0.00125}{s^2 + 0.02s + 6.25 \times 10^{-5}} \quad (22)$$

$$G_{21}(s) = \frac{6.939 \times 10^{-18}s + 0.00125}{s^2 + 0.02s + 6.25 \times 10^{-5}} \quad (23)$$

$$G_{22}(s) = \frac{0.25s + 0.00125}{s^2 + 0.02s + 6.25 \times 10^{-5}} \quad (24)$$

Polos do Sistema: Todos os subsistemas compartilham os mesmos polos, conforme a Equação 25:

$$s^2 + 0.02s + 6.25 \times 10^{-5} = 0 \quad (25)$$

com raízes em $s_1 = -0.00388$ e $s_2 = -0.01612$, confirmando a análise de autovalores apresentada na Equação 18.

6.2 Representações em Espaço de Estados e Formas Canônicas

A função de transferência fornece a relação entrada-saída do sistema, mas não descreve explicitamente a dinâmica interna entre as variáveis de estado. Por outro lado, a representação em espaço de estados permite analisar e controlar o comportamento dinâmico completo do sistema, expressando-o em termos das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} .

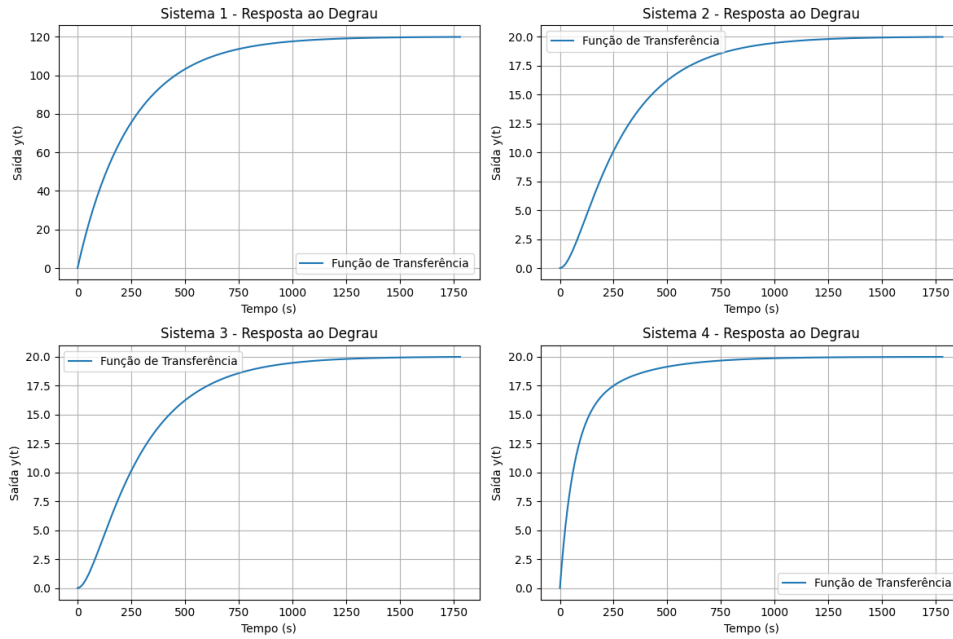


Figura 3: Resposta ao degrau das quatro funções de transferência obtidas. O Sistema 1 refere-se à Equação 21, o Sistema 2 à Equação 22, o Sistema 3 à Equação 23 e o Sistema 4 à Equação 24.

A análise das respostas ao degrau apresentadas na Figura 3 mostra que o Sistema 4 apresenta a resposta mais rápida entre os quatro, atingindo o regime permanente em menor tempo, o que indica uma constante de tempo inferior. Os Sistemas 2 e 3 exibem comportamentos praticamente idênticos, caracterizados por uma leve defasagem inicial devido ao efeito de acoplamento hidráulico entre os tanques, resultando em um pequeno atraso na resposta. O Sistema 1, por sua vez, apresenta uma resposta monotônica e estável, sem o leve atraso observado nos sistemas acoplados, mas com tempo de acomodação semelhante ao dos Sistemas 2 e 3. Esse comportamento confirma que o acoplamento entre os tanques é relativamente fraco e que o tanque 2 responde mais rapidamente às perturbações aplicadas em sua entrada direta.

A partir da função de transferência, é possível derivar diferentes representações equivalentes em espaço de estados, conhecidas como **formas canônicas**. Essas formas não alteram a resposta do sistema, mas reorganizam sua estrutura para destacar propriedades específicas:

- **Forma Canônica Controlável:** evidencia como a entrada influencia os estados do sistema.
- **Forma Canônica Observável:** mostra como os estados afetam diretamente a saída.
- **Forma de Jordan:** representa o sistema em uma base associada aos seus autovalores, destacando os modos próprios de dinâmica.

Assim, as formas canônicas constituem maneiras padronizadas e matematicamente equivalentes de representar um mesmo sistema linear, permitindo análises mais estruturadas de controlabilidade, observabilidade e estabilidade.

6.2.1 Forma Canônica Controlável

Para cada função de transferência, a forma canônica controlável foi obtida à exemplo da Equação 26:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -0.02 & -6.25 \times 10^{-5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = [0.5 \quad 0.0075] \quad (26)$$

6.2.2 Forma Canônica Observável

Obtida pela transposição das matrizes da forma controlável, conforme apresentado na Equação 27:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -0.02 & 1 \\ -6.25 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0075 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_o = [1 \quad 0] \quad (27)$$

6.2.3 Forma Canônica de Jordan

A forma diagonal (Jordan) é obtida através da diagonalização da matriz \mathbf{A}_c apresentada na Equação 26, resultando na Equação 28:

$$\mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} -0.01612 & 0 \\ 0 & -0.00388 \end{bmatrix} \quad (28)$$

7 Verificação de Controlabilidade e Observabilidade

7.1 Matriz de Controlabilidade

A matriz de controlabilidade é definida pela Equação 29:

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B}_c \quad \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c] = \begin{bmatrix} 1 & -0.02 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$\text{rank}(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow$ Sistema completamente controlável

7.2 Matriz de Observabilidade

A matriz de observabilidade é definida pela Equação 30:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o \\ \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$\text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \Rightarrow$ Sistema completamente observável

Portanto, o sistema é completamente controlável e observável, conforme verificado pelas Equação 29 e Equação 30. Isso garante que pode ser conduzido de qualquer estado inicial a qualquer estado final desejado, além de permitir a reconstrução completa dos estados a partir das medições de saída. Dessa forma, é possível projetar controladores e observadores de ordem completa, assegurando o controle total e a estimativa precisa do comportamento dinâmico do sistema.

8 Conclusões

Este trabalho apresentou uma análise do comportamento dinâmico do sistema de tanques acoplados, integrando técnicas de modelagem, linearização e representação em espaço de estados. O sistema não linear foi linearizado em torno do ponto de operação apresentado na Equação 3, $(h_1, h_2) = (50, 25)$ m, e a análise de estabilidade confirmou que o sistema é assintoticamente estável, com autovalores apresentados na Equação 18, $\lambda_1 = -0.00388$ e $\lambda_2 = -0.01612$. O mapa de fases demonstrado na Figura 1 demonstrou a convergência global para o ponto de equilíbrio, validando a estabilidade observada analiticamente. A comparação entre os modelos linear e não linear apresentada na Figura 2 mostrou erros inferiores a 2%, o que confirma a validade da aproximação linear para perturbações de pequena e média magnitude.

As funções de transferência obtidas nas Equação 21, Equação 22, Equação 23 e Equação 24 revelaram um sistema MIMO 2x2 com acoplamento moderado e ganhos DC diferenciados entre os canais. A partir delas, derivaram-se as formas canônicas — controlável (Equação 26), observável (Equação 27) e de Jordan (Equação 28) —, que confirmaram a completa controlabilidade e observabilidade do sistema. A análise das respostas ao degrau apresentadas na Figura 3 evidenciou a existência de múltiplas escalas temporais na dinâmica do processo, com o tanque 2 apresentando resposta mais rápida e os efeitos de acoplamento manifestando-se como atrasos leves e suavizados entre os estados.

Referências

1. OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5^a ed. Pearson, 2010.
2. NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 7^a ed. LTC, 2017.
3. HOUGAZ, Ana. *Análise Dinâmica de Sistema Não Linear de Tanques Acoplados*. GitHub, 2025. Disponível em: <https://github.com/AnaHougaz/Analise-Dinamica-de-Sistema-Nao-Linear-de-Tanques-Acoplados>. Acesso em: 4 nov. 2025.