NUMERIČNA MATAMETIKA - 2. domača naloga

Ana Knafelc

Šolsko leto 2023/2024

Gauss-Legendreove kvadrature

1 Gauss–Legendreova kvadraturna metoda

Numerična integracija je metoda izračuna vrednosti integrala splošnih funkcij kadar zanje ni znane točne analitične rešitve. Gauss–Legendreova kvadraturna metoda nam omogoča hiter in natančen izračun integrala funkcije. Zgoraj omenjena metoda za integracijo funkcije uporabi majhno število izbranih točk v primerjavi z drugimi metodami (Simpsonova, trapezna, ...), kar v splošnem pomeni hitrejše računanje večjega števila integralov.

Splošna enačba Gauss-Legendreove kvadrature:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot w_i$$

kjer je N število izbranih točk, $w_\mathbf{i}$ kvadraturne uteži in x_i vozli (ničle) Legendreovega polinoma.

V našem primeru se bomo osredotočili na izpeljavo integracijskega pravila na dveh točkah: $N = 2$
Iz tega sledi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R_f$$

kjer R_f predstavlja napako izračuna integrala.

Legendrove uteži w_i izračunamo po naslednji formuli:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2) \cdot [P_n'(x_i)]^2}$$

kjer P_n' predstavlja odvod n-tega Legendreovega polinoma, v našem primeru drugega Legendreovega polinoma:

$$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

$$P_2'(x) = 3x$$

Določimo vozlišča (ničle) podanega polinoma:

$$\frac{3x^2-1}{2} = 0$$

$$3x^2 = 1$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Glede na vozlišča lahko točno določimo uteži 2. Legendreovega polinoma:

$$w_1 = \frac{2}{(1-(\sqrt{\frac{1}{3}})^2)\cdot(3\sqrt{\frac{1}{3}})^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{3}} = 1$$
$$w_2 = \frac{2}{(1-(-\sqrt{\frac{1}{3}})^2)\cdot(3(-\sqrt{\frac{1}{3}}))^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{3}} = 1$$

Ko imamo enkrat določene uteži in vozlišča lahko integral izračunamo za poljuben interval $[a, b]$:

$$t = \frac{2x-a-b}{b-a} \quad x = \frac{(b-a)t\cdot+(b+a)}{2}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})dt$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{b+a}{2})$$

Znano je, da je izračun integrala po Gauss-Legendreovi metodi točen, če računamo integral polinoma, katerega stopnja je manjša od:

$$stopnja\ polinoma \leq 2n - 1$$

kjer je n število točk, ki jih uporabimo za izračun integrala.
Če ne izpolnjujemo zgoraj navedenih pogojev, lahko napako integrala izračunamo po naslednji enačbi:

$$E_f = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n}$$

kjer je M_{2n} meja $2n$-tega odvoda funkcije, ki jo želimo integrirati na območju integriranja $[a, b]$.

Primer

Za primer izračunajmo integral funkcije $f(x) = x^4 + 3$ na intervalu $[1, 4]$ z Gauss-Legendreovim integracijskim pravilo, na dveh točkah $n = 2$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^4 (x^4+3)dx = \frac{4-1}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{4-1}{2}\cdot t + \frac{4+1}{2})dt$$
$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{3}{2}\cdot t + \frac{5}{2})dx = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(\frac{3}{2}\cdot t_i + \frac{5}{2})$$
$$\frac{3}{2}\cdot w_1 \cdot f(\frac{3}{2}\cdot t_1 + \frac{5}{2}) + \frac{3}{2}\cdot w_2 \cdot f(\frac{3}{2}\cdot t_2 + \frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\cdot 1 \cdot f(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{5}{2}) + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot f(\frac{3}{2}\cdot(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{5}{2})$$
$$\frac{3}{2}\cdot f(\frac{\sqrt{3}+5}{2}) + \frac{3}{2}\cdot f(\frac{-\sqrt{3}+5}{2}) = \frac{849}{4} = 212.25$$

Napako algoritma izračunamo po enačbi za E_f :

$$M_1 = 4x^3 \quad M_2 = 12x^2 \quad M_3 = 24x \quad M_4 = 24$$
$$E_f = \frac{(4-1)^5(2!)^4}{(5)[(4)!]^3}24 = \frac{3^5\cdot 2^4}{5(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)^3}24 = 1.35$$

Po klasičnem izračunu zgornjega integrala pridemo do rezultata: 213.6, s katerim lahko potrdimo točnost našega izračuna napake Gauss-Legendreove metode:

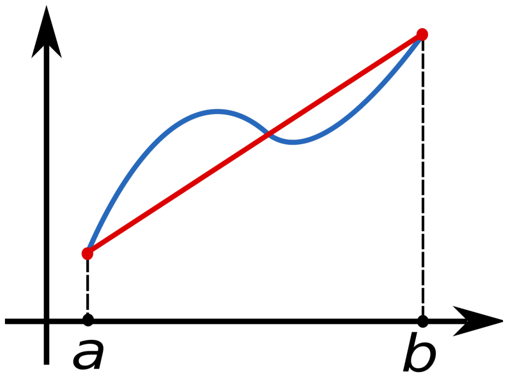
$$E = 213.6 - 212.25 = 1.35$$

2 Sestavljeno pravilo za integracijo

Trapezna metoda

Sestavljeno pravilo za integracijo je metoda s katero lahko izračunamo približno vrednost integrala funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. To dosežemo z razdelitvijo integrala na več pod-intervalov in aproksimacijo funkcije pod njem.

Ena izmed najpogostejše uporabljenih metod je trapezna metoda, ki funkcijo na pod-intervalu poenostavi s premico, ki gre skozi mejni točki pod-intervala.



Slika 1: Aproksimacija funkcije $f(x)$ s premico na intervalu $[a, b]$

Približen rezultat integrala funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

Integracijsko območje razdelimo na N pod-območij, kjer je x_k točka pod-intervala:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_{N-1} < x_N = b$$

Velikost pod-območja je enaka $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Definicija trapeznega pravila:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta x_k$$

Napaka trapeznega pravila je omejena z:

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot N^2} |max(f''(x))|$$

kjer je $|max(f''(x))|$ absolutna maksimalna vrednost drugega odvoda funkcije f(x) na intervalu $[a, b]$.

Primer 1

Izračunajmo približek integrala za isto funkcijo $f(x) = x^4 + 3$ na intervalu $[1, 4]$. Integracijsko območje bomo razdeliti na 6 delov, zato velja $N = 6$.

Velikost pod-območij lahko določimo kot: $\frac{b-a}{N} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$

Določimo vse mejne točke pod-območij: $x = [1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} \cdot \Delta x_k$$
$$\int_1^4 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{6} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} \cdot 0.5 =$$
$$= \frac{0.5}{2} \cdot (f(1)+f(1.5)) + \frac{0.5}{2} \cdot (f(1.5)+f(2)) + \frac{0.5}{2} \cdot (f(2)+f(2.5)) + \frac{0.5}{2} \cdot (f(2.5)+f(3)) + \frac{0.5}{2} \cdot (f(3)+ f(3.5)) + \frac{0.5}{2} \cdot (f(3.5)+f(4)) =$$
$$= \frac{0.5}{2}(f(1)+2\cdot f(1.5)+2\cdot f(2)+2\cdot f2(2.5)+2\cdot f(3.5)+f(4)) =$$
$$= \frac{0.5}{2} \cdot (4+2\cdot\frac{129}{16}+2\cdot 19+2\cdot\frac{673}{16}+2\cdot 84+2\cdot\frac{2449}{16}+259) = \frac{13813}{64} \approx 215.828$$

Meje napake:

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

$$max(f''(x)) = f''(4) = 12 \cdot 4^2 = 192$$

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12\cdot N^2}|max(f''(x))|$$

$$|E| \leq \frac{(4-1)^3}{12\cdot 6^2} \cdot 192 = \frac{27}{432} \cdot 192 = 12$$

Iz prejšnjih izračunov vemo, da je točen rezultat integrala enak: 213.6

$$|E| \leq 12$$
$$215.828 - 213.6 = 2.228$$
$$2.228 \leq 12$$

Če bi funkcijo razdelili na več delov, npr. $N = 24$, bi bila meja napake manjša:

$$|E| \leq \frac{(4-1)^3}{12\cdot 24^2} \cdot 192 = 0.75$$

$$\int_1^4 (x^4+3))dx \approx \sum_{k=1}^{24} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} \cdot 0.125 \approx 213.9281$$

$$213.9281 - 213.6 = 0.3281$$

$$0.3281 \leq 0.75$$

2.1 Gauss-Legendrejeva metoda

Na podoben način lahko sestavljeno pravilo implementiramo z uporabo Gauss-Legendrejeve kvadrature na dveh točkah, kjer je N število pod-območij integracijskega intervala:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{b+a}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot (w_1 \cdot f(\frac{b-a}{2}t_1 + \frac{b+a}{2}) + w_2 \cdot f(\frac{b-a}{2}t_2 + \frac{b+a}{2}))$$

$$h = \frac{b-a}{N} \rightarrow \text{širina integracijskega pod-območja}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a+h*i}^{a+h(i+1)} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \cdot (w_1 \cdot f(\frac{h}{2}t_1 + \frac{2a+h(2i+1)}{2}) + w_2 \cdot f(\frac{h}{2}t_2 + \frac{2a+h(2i+1)}{2}))$$

Meja napake je določena s spodnjo enačbo:

$$E_f \leq \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{N^{2n}(2n+1)[(2n)!]^3}M_{2n}$$

Primer 2

Imamo funkcijo: $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$. Na koliko delov moramo razdeliti integracijsko območje $[0, 5]$, da bo rezultat integrala izračunanega po trapezom pravilu na 10 decimalk natančen?

Če integral izračunamo s pomočjo trapeznega pravila:

$$\text{Relativna napaka} \leq 10^{-10}$$

$$\text{A} = 1.549931245 \rightarrow \text{pravilna rešitev}$$

$$\frac{|E|}{A} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{(b-a)^3 \cdot |max(f''(x))|}{A \cdot 12 \cdot N^2} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{(b-a)^3 \cdot |max(f''(x))|}{A \cdot 12 \cdot 10^{-10}} \leq N^2$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot cos(x) - sin(x)}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{x^2 \sin(x) + 2(x\cos(x) - \sin(x))}{x^3}$$

$$|max(f''(x))| = |f''(0)| = \frac{1}{3}$$

$$N \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \cdot |max(f''(x))|}{A \cdot 12 \cdot 10^{-10}}}$$

$$N \geq \sqrt{\frac{(5-0)^3 \cdot \frac{1}{3}}{1.549931245 \cdot 12 \cdot 10^{-10}}}$$

$$N \geq 149674.40 \approx 149675$$

moramo, za izračunan integrala na 10 decimalk natančno, integracijsko območje razdeliti na najmanj $N = 149675$ pod-območij.

Če integral izračunamo s pomočjo sestavljenega pravila in Gauss-Legendrejeve metode:

$$\frac{|E|}{A} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{A \cdot N^{2n}(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} \leq 10^{-10}$$

$$N^{2n} \geq \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{A \cdot 10^{-10} \cdot (2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n}$$

$$N \geq \sqrt[2n]{\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{A \cdot 10^{-10} \cdot (2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n}}$$

$$N \geq 174.79176 \approx 175$$