Análise de transitórios

aplicações em sistemas e sinais

V.C.Parro

Maio - 2020

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

A transformada de Laplace.

$$x(t) \overset{\mathscr{L}}{\Longleftrightarrow} X(s)$$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Região de convergência

Região de convergência - $\mathscr{L}$

A transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}u(t)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathscr{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a + \sigma + j\omega} \, e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Neste caso, para que a integral tenha convergência:

$$a + \sigma > 0 \quad \text{or} \quad \sigma = Re[s] > -a$$

resultando na transformada:

$$X(s) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega} = \frac{1}{s + a}$$

Região de convergência - $\mathscr{L}$

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Aplicando a pripriedade da linearidade, $X(s)$ pode ser calculado por:

$$\mathscr{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s+a}, \quad (\sigma > -a), \qquad \mathscr{L}[e^{at}u(-t)] = \frac{-1}{s-a}, \quad (\sigma < a)$$

Se $a > 0$, $x(t)$ converge quando $|t| \to \infty$, e a intersecção das regiões de convergência ROCs é $-a < \sigma < a$, implicando em:

$$\mathscr{L}[x(t)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$

Mas,se $a < 0$, , $x(t)$ diverge quando $|t| \to \infty$, a intersecção das ROCs é vazia, e a transformada não existe.

Região de convergência - $\mathscr{L}$

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Aplicando a pripriedade da linearidade, $X(s)$ pode ser calculado por:

$$\mathscr{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s+a}, \quad (\sigma > -a), \qquad \mathscr{L}[e^{at}u(-t)] = \frac{-1}{s-a}, \quad (\sigma < a)$$

Se $a > 0$, $x(t)$ converge quando $|t| \to \infty$, e a intersecção das regiões de convergência ROCs é $-a < \sigma < a$, implicando em:

$$\mathscr{L}[x(t)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$

Mas,se $a < 0$, , $x(t)$ diverge quando $|t| \to \infty$, a intersecção das ROCs é vazia, e a transformada não existe.

Região de convergência - $\mathscr{L}$

$$x(t) = [e^{-2t} + e^{t} cos(3t)]u(t) = [e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-j3)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+j3)t}]u(t)$$

A trtansformada de Laplace é dada por:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty [e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-j3)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+j3)t}]e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t}e^{-st}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(1-j3)t}e^{-st}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(1+j3)t}e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{1/2}{s+(1-j3)} + \frac{1/2}{s+(1+j3)} = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)} \end{aligned}$$

Logo $X(s)$ existe, se e somente se, todas as três parcelas existirem, que implica nas condições:

$$Re[s] > -2, \quad Re[s] > -1, \quad Re[s] > -1$$

portanto, $Re[s] > -1$.

Região de convergência - $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}[\delta(t-T)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T)e^{-st}dt = e^{-sT}$$

A integral converge para qualquer valor de s, a ROC o plano s.

Em particular, quando $T = 0$, nós temos:

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

Principais resultados - $\mathscr{L}$

$f(t)$ para $t \geq 0$	$F(s)$
Impulso unitário: $\delta(t)$	1
Degrau unitário: $\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
t^n para $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Propriedades - $\mathscr{L}$

Linearidade	$k \cdot L\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = k \cdot F_1(s) + k \cdot F_2(s)$
Deslocamento no tempo	$L\left[f(t-T)\right] = e^{-sT}F(s)$
Derivação real	$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}f(0)$
Integração real	$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
Valor final	$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
Valor inicial	$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Forma canônica de segunda ordem

Principais medidas - $\mathscr{L}$

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

- **Tempo de subida**: $t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d}$
- **Instante de pico**: $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
- **Tempo de acomodação** (t_s): $t_s(2\%) = \dfrac{4}{\sigma} = \dfrac{4}{\zeta \cdot \omega_n}$
- **Sobressinal máximo** (M_p): $M_p[\%] = 100 \cdot e^{-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Forma canônica de segunda ordem - $\mathscr{L}$

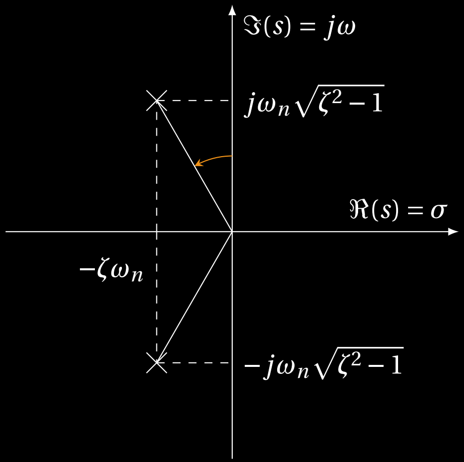

Figura 1: Caption

Circuito RC

Filtro

Para o circuito da Figura 2 conhecemos a função de transferência indicada pela Equação 2.

$$\underbrace{\frac{V_C(s)}{V_G(s)}}_{\texttt{Ganho}} = \underbrace{\frac{1}{sRC+1}}_{\texttt{Função de transferência}} \tag{1}$$

(2)

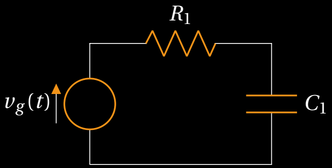

Figura 2: Circuito RC.

Análise

1. Determine o valor do produto RC que impõem que a resposta transitória do circuito, para uma entrada ao impulso, se acomode em cerca de 98% do valor final em 4 segundos. Se aplicarmos um degrau este valor se altera? Justifique seu raciocínio.
2. Se aplicarmos na entrada do sistema um sinal do tipo $x(t) = cos(20\pi t)$ determine a função do sinal de saída utilizando Laplace e utilizando Fourier e compare os dois resultados.

Circuito RLC

Um outro tipo de filtro

Para um sistema de segunda ordem do tipo da Figura 3 sua respectiva função de transferência, com saída no capacitor, é dada pela Equação 3.

$$\underbrace{\frac{V_C(s)}{V_G(s)}}_{\texttt{Ganho}} = \underbrace{\frac{1}{s^2LC + sRC + 1}}_{\texttt{Função de transferência}} \tag{3}$$

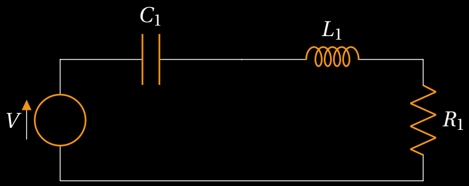

Figura 3: Circuito RLC - série.

Análise

1. É possível ajustar R,L e C para que haja uma oscilação livre com frequência de $f_{osc} = 1Hz$?
2. É possível ajustar R,L e C para que haja uma oscilação que se acomode em 4 segundos quando um impulso é aplicado a entrada?
3. É possível ajustar R,L e C para que não haja oscilação porém fique na iminência de oscilar?

Análise com condições iniciais

A Transformada de Laplace unilateral - $\mathscr{L}$

Par para a diferenciação.

$$x(t) \overset{\mathscr{L}}{\Longleftrightarrow} X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathscr{L}}{\Longleftrightarrow} sX(s) - x(0^+)$$

Um outro tipo de filtro

Considerando um sistema modelado pela Equação 4, determine:

1. O sinal de saída quando $y(t)$ quando $x(t) = e^{-t}\epsilon(t)$ e o capacitor estiver carregado com $v_c(0) = -1$.
2. O sinal de saída quando $y(t)$ quando $x(t) = e^{-2t}\epsilon(t)$ e o capacitor estiver carregado com $v_c(0) = -1$.

$$\underbrace{\frac{Y(s)}{X(s)}}_{Ganho} = \underbrace{\frac{s+2}{s+1}}_{Função\ de\ transferência} \tag{4}$$

Fonte[1]

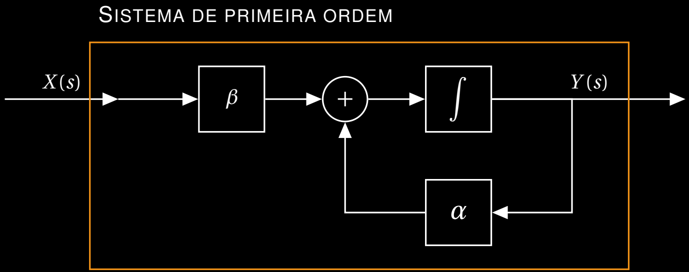

Figura 4: Diagrama de simulação de um sistame de primeira ordem.

[1] *http://www.texample.net/tikz/examples/noise-shaper/*

Sistemas mecânicos

Um amortecedor simplificado

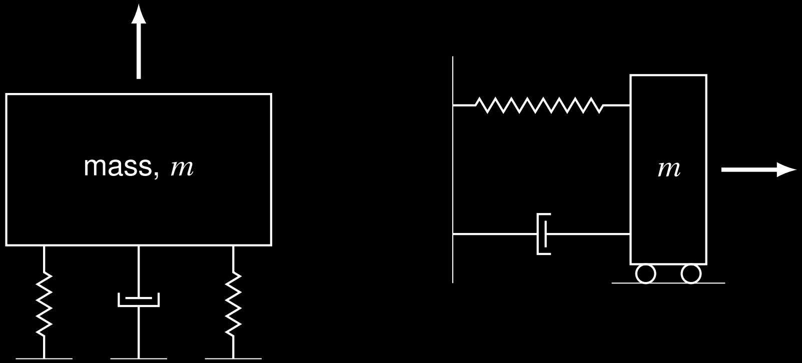

Figura 5: Dois sistemas de amortecimento - (a) deslocamento vertical e (b) deslocamento horizontal.

Equação diferencial do sistema (b)

$$F = \quad F_m + F_b + F_k \tag{5}$$

$$F = \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Kx \tag{6}$$

Lembrando para o circuito RLC:

$$V = \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \tag{7}$$

Trabalhando com dados

Com condições inicias nulas, podemos analisar os sistemas pela sua respectiva função de transferência, no domínio da frequência 9.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_M)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_N)} \tag{8}$$

Ordem de $G_p(s)$

Analisando a resposta ao degrau do sistema podemos aproximá-lo a um sistema de primeira ordem com dois parâmetros de sintonia: K_m e p_m.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{K_m}{s + p_m} \tag{9}$$

Ajuste de parâmetros de $G_p(s)$ - malha de velocidade

O sistema foi ensaiado com uma onda quadrada, simulando vários sinais do tipo degrau aplicados ao motor. Foram gravados os sinais de velocidade - $\omega(t)$ (rotação) e posição do motor - $\theta(t)$. Para gravar utilizamos um computador que garantia uma amostragem $T = 10^{-3}$ segundos. Desta forma não temos os sinais contínuos e sim, N pontos em um intervalo de tempo. Logo temos os vetores $\omega(kT)$ (rotação) e posição do motor - $\theta(kT)$.

Ajuste de parâmetros de $G_p(s)$ - malha de velocidade

Para ajustar os parâmetros K_m e p_m desejamos que a saída do modelo y_{modelo} seja a mais próxima possível dos valores medidos y. Podemos aplicar a entrada $u(t)$ real no modelo, obtermos a saída y_{modelo} utilizando o comando $lsim$ e compararmos com a saída medida y, visando minimizar a Equação 10a.

$$
\begin{aligned}
\min_{K_m, p_m} \quad & \sum_{0}^{NT} [y(kT) - y_{modelo}(kT)]^2 && \text{(10a)} \\
\text{sujeito a} \quad & K_m \geq 0, && \text{(10b)} \\
& p_m \geq 0. && \text{(10c)}
\end{aligned}
$$

Ajuste de parâmetros de $G_p(s)$ - malha de velocidade

O função de transferência que minimizou o erro quadrático é dada pela Equação 11

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{22.47}{s + 28.09} \tag{11}$$

Tratamento de um sinal de voz

Fonte[2]

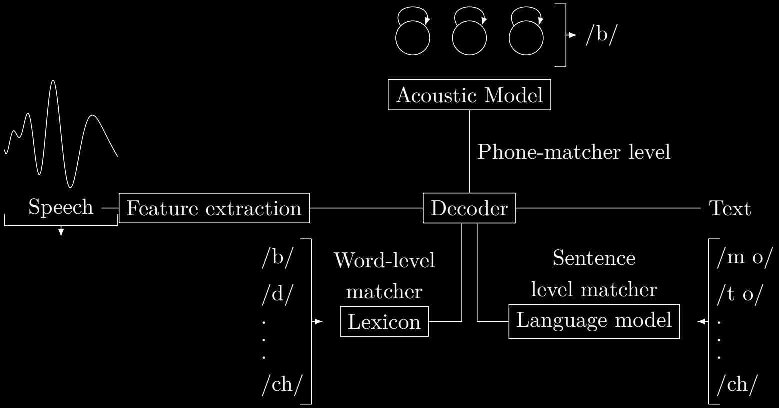

Figura 6: Sistema de processamento de Voz.

[2] https://tex.stackexchange.com/questions/428192/addition-of-markov-model-and-list-letters-next-to-nodes-in-tikz?rq=1