Sinais periódicos

V.C.Parro

Março - 2020

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

A Equação 1 nos permite avaliar a *projeção* do sinal $g(t)$ em um sinal de referência $x(t)$ [1].

$$c_n = \frac{\int_{To} g(t)x(t)dt}{\int_{To} x^2(t)dt} \tag{1}$$

[1] T_o é o período do sinal em análise.

Um critério para uma base de sinais

A Equação 2 oferece um critério para determinação de uma base ortogonal de sinais. Se $c_{mn} = 0$ dizemos que eles são ortogonais, caso contrário, não.

$$c_{mn} = \int_{To} x_m x_n(t) dt \tag{2}$$

Podemos então sintetizar um sinal

Logo se conhecemos a base: $x_1(t) \ldots x_N(t)$ e as respectivas projeções $c_1 \ldots c_N$ o sinal pode ser "recomposto"utilizando a Equação 3.

$$g(t) = \sum_{1}^{N} c_n x_n(t) \tag{3}$$

Série trigonométrica de Fourier

As Equações 4, 5 e 6 permitem a realização de uma análise de Fourier e a Equação 7 uma síntese de Fourier.

$$a_o = \frac{1}{T_o}\int_{To} g(t)dt \tag{4}$$

$$a_n = \frac{\int_{To} g(t)cos(n\omega_o t)dt}{\int_{To} cos^2(n\omega_o t)dt} \tag{5}$$

$$b_n = \frac{\int_{To} g(t)sen(n\omega_o t)dt}{\int_{To} sen^2(n\omega_o t)dt} \tag{6}$$

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t) \tag{7}$$

Série exponencial de Fourier

A Equação 8 permite a realização de uma análise de Fourier e a Equação 7 uma síntese de Fourier.

$$D_n = \frac{1}{T_o} \int_{To} g(t) e^{-jn\omega_o t} dt \tag{8}$$

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_o t} \tag{9}$$

Potência normalizada - $R = 1\Omega$

Para o caso trigonométrico:

$$x(t) = Acos(\omega_o t)$$

$$P_x = \frac{A^2}{2}$$

Para o caso exponencial:

$$y(t) = De^{jn\omega_o t}$$

$$P_y = |D|^2$$

Teorema da Amostragem

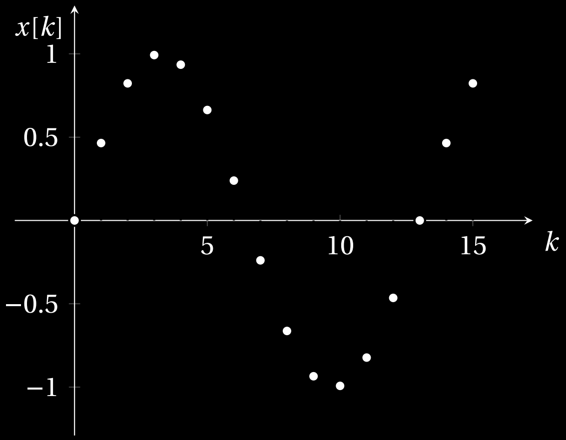

Figura 1: Sinal amostrado - $f_{amostragem} = f_s > 2fmax$

Série discreta de Fourier

Considerando um vetor de dados obtido respeitando o teorema da amostragem:

$$g(kT) = [g(0)\ \ g(T)\ \ g(2T)\ \ g(3T)\ldots g((N-1)T)] \tag{10}$$

Pode-se obter numericamente o termo D_n utilizando a Equação 15.

$$D_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT) e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT) W_N^{kn} \tag{11}$$

onde

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{12}$$

Série discreta de Fourier - forma matricial

$$D_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT)e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT)W_N^{kn} \tag{13}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \dots \\ D_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\dots 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & W_N^2 \dots W_N^{N_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2N-2} & W_N^{3N-3} \dots W_N^{(N_1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \dots \\ g(N-1) \end{bmatrix} \tag{14}$$

A Equação 15 permite a realização de uma análise de Fourier para sinais periódicos e a Equação 16 permite uma análise de sinais aperiódicos.

$$D_n = \frac{1}{T_o} \int_{To} g(t) e^{-jn\omega_o t} dt \tag{15}$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \tag{16}$$

onde:

$$D_n = \frac{G(n\omega_o)}{T_o} \tag{17}$$

Anti-transformada de Fourier

A Equação 18 permite a síntese de um sinal.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}dt \tag{18}$$