Convolução e propriedades

V.C.Parro

Abril - 2020

O problema

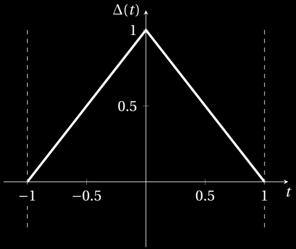
Determinar a anti transformada de Fourier da Equação 1

$$X_3(j\omega) = \left(\frac{sin(2\omega)}{2\omega}\right)^2 \tag{1}$$

Anti-transformada de Fourier

Conhecemos o par da transformada de Fourier - $\mathscr{F}$ para uma onda triangular - Equação 2.

$$\Delta(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} X_{\Delta}(\omega) = \left(\frac{sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 \tag{2}$$



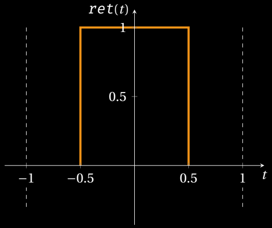
$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 + t, & t < 0 \\ 1 - t, & t > 0 \end{cases}$$

Figura 1: Onda triangular $\Delta(t)$.

Anti-transformada de Fourier

Conhecemos o par da transformada de Fourier - $\mathscr{F}$ para uma onda do tipo pulso - Equação 3.

$$ret(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} X_{ret}(\omega) = \left(\frac{sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 \tag{3}$$



$$ret(t) = \begin{cases} 1, & -0.5 < t < 0.5 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Figura 2: Pulso $ret(t)$.

Propriedade

Conhecemos a propriedade da transformada de Fourier - $\mathscr{F}$ para escalonamento no tempo - Equação 5.

$$x(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} X(\omega) \tag{4}$$

$$x(at) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a}) \tag{5}$$

Solução

Existem várias forma de resolver, vamos abordar duas:

1. Aplicação da propriedade da Equação 5.
2. Utilizando a convolução para cálculo e verificação.
3. Abordagem computacional.

Aplicando diretamente a propriedade.

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &\overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} X_\Delta(\omega) = \left(\frac{sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 \\
\Delta(\frac{t}{4}) &\overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\frac{1}{4}}\left(\frac{sin(2\omega)}{2\omega}\right)^2 \\
\frac{1}{4}\Delta(\frac{t}{4}) &\overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{sin(2\omega)}{2\omega}\right)^2
\end{aligned}$$

Uso da convolução

Podemos aplicar a propriedade de convolução

$$\underbrace{\left(\frac{sin(2\omega)}{2\omega}\right)}_{\frac{1}{4}ret\left(\frac{t}{4}\right)}\underbrace{\left(\frac{sin(2\omega)}{2\omega}\right)}_{\frac{1}{4}ret\left(\frac{t}{4}\right)} \quad \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{4}ret\left(\frac{t}{4}\right) \circledast \frac{1}{4}ret\left(\frac{t}{4}\right)$$

Uso da convolução

Sabemos que o pulso pode ser representado pela equação 6.

$$ret\left(\frac{t}{4}\right) = \epsilon(t+2) - \epsilon(t-2) \tag{6}$$

$$\frac{1}{4}ret\left(\frac{t}{4}\right) \circledast \frac{1}{4}ret\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty} ret\left(\frac{\tau}{4}\right) ret\left(\frac{t-\tau}{4}\right) d\tau$$

Integral de convolução

$$\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty}(\epsilon(\tau+2)-\epsilon(\tau-2))(\epsilon(t-\tau+2)-\epsilon(t-\tau-2))\,d\tau$$

Trabalhando somente a integral e desconsiderando a constante $\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon(\tau+2)\epsilon(t-\tau+2)\,d\tau &= \\
-\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon(\tau+2)\epsilon(t-\tau-2)\,d\tau &= \\
-\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon(\tau-2)\epsilon(t-\tau+2)\,d\tau &= \\
\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon(\tau-2)\epsilon(t-\tau-2)\,d\tau &=
\end{aligned}$$

Integral de convolução - I

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\epsilon(\tau+2)}^{\tau>-2}\overbrace{\epsilon(t-\tau+2)}^{\tau<t+2}\, d\tau \quad &= \underbrace{\int_{-2}^{t+2} \epsilon(\tau+2)\epsilon(t-\tau+2)\, d\tau}_{t+2>-2} \\
\underbrace{\int_{-2}^{t+2} d\tau}_{t>-4} \quad &= \underbrace{t+2-(-2)}_{t>-4} \\
&= \underbrace{t+4}_{t>-4}
\end{aligned}
$$

Integral de convolução - II

$$
\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\epsilon(\tau+2)}^{\tau>-2}\overbrace{\epsilon(t-\tau-2)}^{\tau<t-2}\, d\tau \quad &= \underbrace{-\int_{-2}^{t-2} \epsilon(\tau+2)\epsilon(t-\tau-2)\, d\tau}_{t-2>-2} \\
\underbrace{-\int_{-2}^{t-2} d\tau}_{t>0} \quad &= \underbrace{-(t-2-(-2))}_{t>0} \\
&= \underbrace{-t}_{t>0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\epsilon(\tau-2)}^{\tau>2}\overbrace{\epsilon(t-\tau+2)}^{\tau<t+2} d\tau \quad &= -\underbrace{\int_{2}^{t+2} \epsilon(\tau-2)\epsilon(t-\tau+2)d\tau}_{t+2>+2} \\
-\underbrace{\int_{2}^{t+2} d\tau}_{t>0} \quad &= \underbrace{-(t+2-2)}_{t>0} \\
&= \underbrace{-t}_{t>0}
\end{aligned}
$$

Integral de convolução - IV

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\epsilon(\tau-2)}^{\tau>2}\overbrace{\epsilon(t-\tau-2)}^{\tau<t-2}\,d\tau = \underbrace{\int_{2}^{t-2} \epsilon(\tau-2)\epsilon(t-\tau+2)\,d\tau}_{t-2>2}$$

$$\underbrace{\int_{2}^{t-2} d\tau}_{t>0} = \underbrace{t-2-2}_{t>4}$$

$$= \underbrace{t-4}_{t>4}$$

Resultado final

Sem considerar a constante multiplicativa $\frac{1}{16}$:

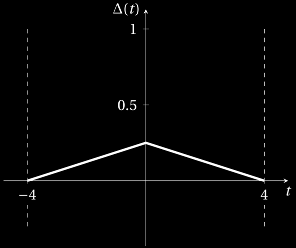
$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -4 \\ t+4, & t > -4 \\ -t, & t > 0 \\ -t, & t > 0 \\ t-4, & t > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0, & t < -4 \\ t+4, & -4 < t < 0 \\ -t-t+t+4 = -t+4, & 0 < t < 4 \\ -t+4+t-4 = 0, & t > 4 \end{cases}$$

Resultado no domínio do tempo

Sabemos que em $t = 0$ temos $g(0) = 4$, desta forma, considerando a constante $\frac{1}{16}$, o valor máximo da onda triangular é $\frac{1}{4}$. Desta forma temos:

$$\frac{1}{4}\Delta\left(\frac{t}{4}\right) \tag{7}$$



$$\frac{1}{4}\Delta\left(\frac{t}{4}\right) = \begin{cases} \frac{t}{16} + \frac{1}{4}, & -4 < t < 0 \\ \frac{-t}{16} + \frac{1}{4}, & 0 < t < 4 \end{cases}$$

Figura 3: Onda triangular resultante.

Conferindo a transformada

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\left(\Delta\left(\frac{t}{4}\right)\right) &= \frac{1}{4}\delta(t+4)-\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\delta(t-4)\\
\mathscr{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{4}\Delta\left(\frac{t}{4}\right)\right)\right\} = \frac{e^{j\omega 4}}{4} &- \frac{1}{2}+\frac{e^{-j\omega 4}}{4}\\
&= \frac{2cos(4\omega)}{4}-\frac{1}{2}=\frac{cos(4\omega)}{2}-\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}(cos(4\omega)-1)=\frac{1}{2}(2cos^2(2\omega)-1-1)\\
&= -sen^2(2\omega)\\
\mathscr{F}\left\{\left(\frac{1}{4}\Delta\left(\frac{t}{4}\right)\right)\right\} &= \frac{1}{4}\frac{-sen^2(2\omega)}{-\omega^2}=\frac{sen^2(2\omega)}{(2\omega)^2}
\end{aligned}
$$