Transformada Z

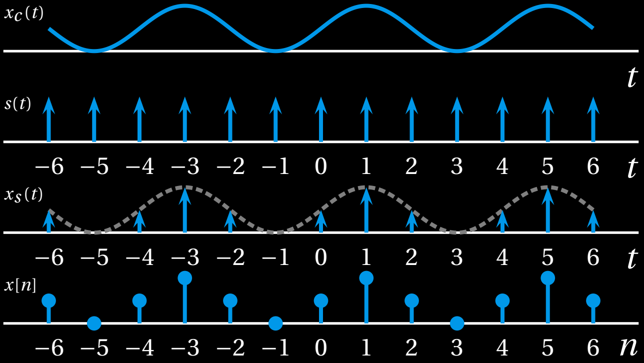
Filtro de resposta finita - FIR

V.C.Parro

Maio - 2020

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Sistema amostrado



Alguns pares de transformada $\mathcal{Z}$

$f(kT)$ para $k \geq 0$	$F(z)$	$f(kT)$ para $k \geq 0$	$F(z)$
$\delta(kT)$	1	$a^k \cos(k\pi)$	$\dfrac{z}{z+a}$
$1(kT)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\sin(\omega kT)$	$\dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
kT	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	$\cos(\omega kT)$	$\dfrac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
e^{-akT}	$\dfrac{z}{z-\exp(-aT)}$	$e^{-akT}\sin(\omega kT)$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$	$e^{-akT}\cos(\omega kT)$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$

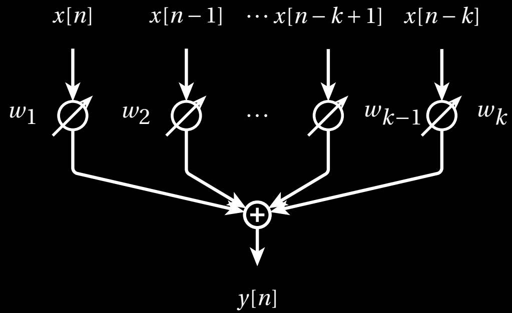
Obs: $\delta(kT)$ e $1(kT)$ denotam um impulso e um degrau unitário no instante $k=0$, respectivamente.

Algumas propriedades da transformada de $\mathscr{Z}$

Linearidade	$\lambda \cdot \mathscr{Z}\left[f_1(kT) + f_2(kT)\right] = \lambda \cdot F_1(z) + \lambda \cdot F_2(z)$
Atraso no tempo	$\mathscr{Z}\left\{f[(k-n)T]\right\} = z^{-n} \cdot F(z)$
Avanço no tempo	$\mathscr{Z}\left\{f[(k+n)T]\right\} = z^{n} \cdot F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) \cdot z^{n-k}$
Teorema do valor inicial	$\lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
Teorema do valor final	$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$

Análise de um filtro média móvel - FIR

Estrutura geral de um filtro FIR.



Diagrame em blocos que implementa um sistema de ponderação de uma sequência de amostras.

Algoritmo de cálculo de média

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} x[n-k]$$

Transformada Z

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3}\frac{z^2+z+1}{z^2} \tag{1}$$

Calculando os polos temos multiplicidade em zero $p_1 = p_2 = 0$ e os zeros da função localizados em $z_1 = -0.5 - j0.5\sqrt{3}$ e $z_2 = -0.5 + j0.5\sqrt{3}$.

Resposta temporal - impulso - $\delta[n]$

Analisando o caso particular onde $x[n] = \delta[n]$ teremos como saída do sistema o comportamento ilustrado na figura.

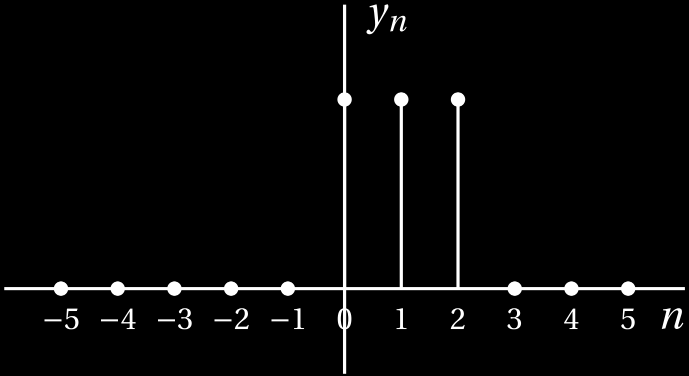
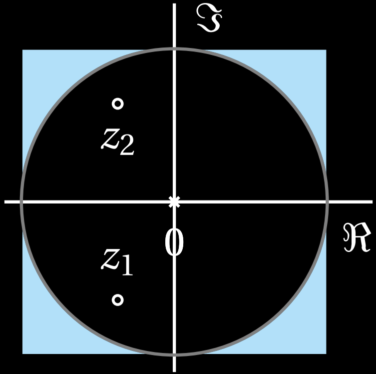
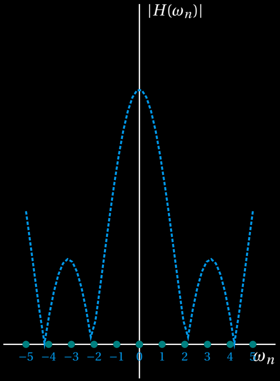


Diagrama de pólos e zeros



Resposta em frequência - Fourier

Observe que os pontos de nulo acontecem exatamente nas frequências dos zeros: $\omega_{n1} = \dfrac{2\pi}{3}$ e $\omega_{n2} = \dfrac{4\pi}{3}$ - considerando $\omega_n = \omega T_s$.



Convolução

Convolução

Tempo contínuo:

$$c(t) = a(t) * b(t) \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau) d\tau$$

Tempo discreto:

$$c[k] = a[k] * b[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a[n] b[k-n]$$

Convolução