Cursul 1

Mulţimi. Relaţii. Funcţii.
Ordinali şi cardinali

Incontestabil, fundamentarea unui sistem teoretic al oricăruia dintre domeniile ştiinţelor moderne aflate în sfera de influenţă a matematicii nu poate eluda noţiuni precum cele de mulţime, relaţie şi funcţie. Respectând un asemenea principiu, cursul de faţă face o referenţială expunere a unor astfel de noţiuni, precum şi a câtorva înrudite lor, tratând succint aspecte definitorii ale acestora. Cum, aproape în majoritate, chestiunile expuse aici sunt, într-o anumită măsură, familiare celor cărora li se adresează, prezentarea rezultatelor relative la ele nu este făcută şi cu demonstraţiile de rigoare. Lista bibliografică din final încearcă atenuarea acestei voite omisiuni, venind în sprijinul tuturor acelora dintre destinatarii prezentelor note de curs.

Mulţimi

În viziunea lui Georg Cantor, noţiunea de ***mulţime*** apare, definită în 1897, ca "un tot unitar, cu elemente distincte, în care ordinea de dispunere a elementelor nu are importanţă". O asemenea definiţie este deficitară însă, deoarece, în virtutea ei, nu orice colecţie de "obiecte" constituie o mulţime. Astfel, luând în atenţie ansamblul Ens al tuturor mulţimilor şi admiţând că acesta este o mulţime, putem susţine că şi $M = \{X \in Ens \mid X \notin X\}$ ar fi o mulţime, situaţie în care ar fi valid paradoxul lui Bertrand Russell, datat din 1899, potrivit căruia nu am putea decide dacă $M \in M$ sau $M \notin M$. Evitarea unei asemenea antinomii se poate realiza fundamentând noţiunea de mulţime pe baza sistemului de axiome propuse de E. Zermelo şi A. Fraenkel. Acestea, redate aici începând cu grupajul *ZF1* ~ *ZF3* şi terminând, după definiţia intercalată în context, cu *ZF4* ~ *ZF7*, au proprietăţile de noncontradicţie, independenţă, completitudine şi categoricitate întru consistenţa teoriei mulţimilor.

ZF1. ***Axioma determinării***: "Dacă A şi B sunt mulţimi, iar orice element al lui A este în B şi reciproc, atunci $A = B$."

ZF2. ***Axioma mulţimilor elementare***: "*i)* Există mulţimi vide, generic notate cu $\varnothing$; *ii)* Dacă a este un obiect arbitrar, atunci există mulţimea $\{a\}$ care-l conţine pe a ca unic element; *iii)* Dacă a şi b sunt "obiecte" diferite, atunci există o mulţime $\{a, b\}$ care conţine pe a şi b ca elemente unice."

ZF3. ***Axioma bazei***: "Orice mulţime nevidă X conţine măcar un element x aşa încât x şi X nu au nimic în comun. Dacă $\mathfrak{P}$ este o proprietate (sau un ansamblu de proprietăţi) pentru elementele x ale lui X, atunci există o mulţime Y care conţine toate elementele din X cu proprietatea $\mathfrak{P}$ şi nu conţine alte elemente."

Definiţia 1.1 **) O mulţime B se numeşte **inclusă** în mulţimea A, când orice element al lui B este în A şi acest fapt se consemnează prin $B \subseteq A$.*

***) Prin **submulţime (parte)** a unei mulţimi A se înţelege o mulţime inclusă în A.*

****) Submulţimile lui A diferite de $\varnothing$ şi A se numesc **proprii**, pe când $\varnothing$ şi A sunt denumite **submulţimi improprii** ale lui A.*

ZF4. ***Axioma submulţimilor***: "Pentru orice mulţime A, există o mulţime $\mathcal{P}(A)$ care conţine exact submulţimile lui A."

ZF5. ***Axioma reuniunii***: "Pentru orice mulţime A de mulţimi, există o mulţime B care conţine numai elementele mulţimilor din A."

ZF6. ***Axioma alegerii***: "Pentru orice mulţime M de mulţimi nevide, mutual disjuncte, există o mulţime care conţine exact câte un element din fiecare mulţime din M."

ZF7. ***Axioma infinitului***: "Există o mulţime C care satisface condiţiile următoare:

a) $\varnothing$ este un element al lui C;

b) Dacă x este din C, atunci şi $\{ x \}$ este din C."

Observaţii:

1) Exprimată prin *ZF1* ~ *ZF7*, axiomatica lui Zermelo şi Fraenkel elimină paradoxul (antinomia) lui Russell, cu evidenţă.

2) Notată cu $\mathcal{P}(A)$, după cum se precizează în *ZF4*, mulţimea părţilor unei mulţimi A are, cu certitudine, pe $\varnothing$ ca element, adică $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$, întrucât $\varnothing \subseteq A$, oricare ar fi A.

3) În conformitate cu *ZF1*, dacă două ***mulţimi*** A şi B sunt aşa încât $A \subseteq B \subseteq A$, atunci spunem că A şi B sunt ***egale***, notând acest fapt prin: $A = B$.

Definiţia 1.2 *O* ***mulţime*** A ***de mulţimi*** *se numeşte* ***tranzitivă*** *dacă,* $\forall X \in A$, X *este din* $\mathcal{P}(A)$.

În conformitate cu această definiţie, mulţimea vidă este tranzitivă.

Relativ la "$\subseteq$", sunt de menţionat proprietăţile din cadrul următorului enunţ:

Propoziţia 1.1 *j)* $A \subseteq A$, *pentru orice mulţime* A*;*

jj) $A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq A$ *implică* $A = B$*;*

jjj) $A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq C$ *implică* $A \subseteq C$.

Definiţia 1.3 *l)* ***Complementara absolută*** *a unei mulţimi* A *este, prin definiţie, mulţimea* $\{x \mid x \notin A\}$.

ll) ***Complementara relativă*** *a mulţimii* A *în raport cu o (altă) mulţime* $B \supseteq A$ *este, prin definiţie, mulţime* $B \setminus A$, *notată cu* C_A^B, *unde* $B \setminus A$ *înseamnă* ***diferenţa mulţimilor*** B *şi* A, *adică mulţimea* $\{x \in B \text{ şi } x \notin A\}$.

Când, fixată fiind, mulţimea B se subînţelege, notaţia pentru complementara relativă a unei mulţimi A, în raport cu B, se simplifică, scriind C_A în loc de C_A^B.

Definiţia 1.4 *a) Se numeşte* ***reuniune*** *a două mulţimi* A *şi* B *mulţimea* $\{x \in A \text{ sau } x \in B\}$, *notată cu* $A \cup B$.

b) ***Intersecţia*** *a două mulţimi* A *şi* B, *notată cu* $A \cap B$, *este mulţimea tuturor elementelor care aparţin simultan mulţimilor* A *şi* B, *adică:* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$.

c) ***Diferenţa simetrică*** *a două mulţimi* A *şi* B, *notată cu* $A \Delta B$, *este, prin definiţie, mulţimea* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Propoziţia 1.2 *Operaţiile de reuniune, intersecţie, diferenţă, diferenţă simetrică şi complementariere au proprietăţile exprimate prin următoarele egalităţi, care au loc oricare ar fi mulţimile implicate* A, B *şi, acolo unde este cazul,* C*:*

1. $A \cup A = A \cap A = A$ *(idempotenţa);*

2. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asociativitatea reuniunii);*

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativitatea intersecţiei);*

5. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ *(comutativitatea);*

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune);*

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie);*

8. $C_{C_A} = A$;

9. $C_{A \cup B} = C_A \cap C_B$; $C_{A \cap B} = C_A \cup C_B$ *(legile lui De Morgan);*

10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

11. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

12. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ *(absorbţia);*

13. $A \Delta A = \varnothing$; $A \Delta B = B \Delta A$; $A \Delta \varnothing = A$;

14. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie se pot extinde la cazul unei mulţimi (familii) de mulţimi. Astfel, dacă I este o mulţime de indici, iar $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de mulţimi (indexată după I), atunci ***reuniunea tuturor mulţimilor*** A_i, notată cu $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, este (prin definiţie) mulţimea $\{x \mid \exists i \in I$, încât $x \in A_i\}$, iar ***intersecţia*** $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ este mulţimea $\{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$. Când I este finită, de exemplu $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, atunci notaţiile pentru reuniunea şi respectiv intersecţia mulţimilor A_i $(i = \overline{1, n})$, se adaptează în mod corespunzător ($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ şi respectiv $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$).

Definiţia 1.5 ***Produsul cartezian*** *a două mulţimi nevide A şi B, notat cu $A \times B$, este, prin definiţie, mulţimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$, adică mulţimea $\{(a, b) \mid a \in A$ şi $b \in B\}$.*

Pentru un număr finit de mulţimi nevide $A_1, A_2, \ldots, A_n$, avem:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

În cazul în care $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coincid, având $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se notează, mai simplu, cu A^n.

Propoziţia 1.3 *Oricare ar fi mulţimile nevide A, B şi C, au loc egalităţile:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Relaţii

Definiţia 1.6 *i} O* ***relaţie*** *R de la mulţimea arbitrară $A \neq \varnothing$ la mulţimea oarecare $B \neq \varnothing$ este, prin definiţie, o submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Terminologic, spunem că R este o* ***relaţie binară*** *între elemente ale lui A şi elemente ale lui B. Dacă $(x, y) \in R \subseteq A \times B$, citim că x* ***este în relaţia*** *R* ***cu*** *y (unde $x \in A$ şi $y \in B$, cu $(x, y) \in R$) şi, de cele mai multe ori, scriem xRy (în loc de $(x, y) \in R$). Mulţimea $\{x \in A \mid \exists\, y \in B$ astfel încât $(x, y) \in R\}$ se numeşte* ***domeniul relaţiei*** *R şi, notată cu $D(R)$, este, evident, submulţime (proprie sau improprie) a lui A. Mulţimea $\{y \in B \mid \exists\, x \in A$ astfel încât $(x, y) \in R\}$ poartă denumirea de* ***codomeniu al relaţiei*** *R, fiind notată, ca submulţime a lui B, cu $Im(R)$.*

ii} În cazul în care $A = B$, o relaţie binară (pe A) este o parte a produsului cartezian A^2 şi se numeşte ***omogenă.***

iii} ***Inversa unei relaţii binare*** *$R \subseteq A \times B$, notată cu R^{-1}, este, prin definiţie, relaţia $\{(y, x) \mid xRy\}$.*

iv} Dacă $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$ sunt două relaţii astfel încât $Im(R) \cap D(S) \neq \varnothing$, atunci se poate defini relaţia $S \circ R$, denumită ***compusa relaţiilor*** *S şi R, ca fiind mulţimea $\{(x, z) \in A \times C \mid \exists\, y \in B$ astfel încât $(x, y) \in R$ şi $(y, z) \in S\}$.*

v} Pentru o mulţime nevidă A, relaţia binară $\{(x, x) \mid x \in A\}$ se numeşte ***identitate*** *pe A şi se notează cu 1_A.*

Definiţia 1.7 *a) O relaţie R pe o mulţime nevidă A se numeşte* ***reflexivă****, dacă şi numai dacă $1_A \subseteq R$.*

b) Relaţia binară omogenă R este numită ***simetrică****, dacă şi numai dacă $R^{-1} = R$.*

c) Relaţia R , pe A, se numeşte ***antisimetrică****, dacă şi numai dacă $R \cap R^{-1} = 1_A$.*

d) Relaţia R se numeşte ***tranzitivă*** *dacă şi numai dacă, pentru orice $(x, y) \in R$ şi $(y, z) \in R$, avem $(x, z) \in R$.*

e) Relaţia R, pe A, se numeşte ***totală****, dacă şi numai dacă, $\forall\, x, y \in A$, avem $(x, y) \in R$ sau $(y, x) \in R$.*

Definiţia 1.8 *j. O relaţie R (pe o mulţime nevidă A) care este simultan reflexivă, simetrică şi tranzitivă se numeşte* ***relaţie de echivalenţă*** *(pe A).*

jj. Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A, iar a este un element oarecare al lui A, atunci mulţimea $\{b \in A \mid (a, b) \in R\}$ se numeşte ***clasa de echivalenţă*** *a elementului a în raport cu R şi se notează cu $[a]_R$ sau $\hat{a}_R$.*

jjj. Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de relaţia de echivalenţă R pe A se numeşte ***mulţime cât*** *şi se notează cu $A_{/R}$.*

Definiţia 1.9 *1) O relaţie R (pe o mulţime nevidă A) care este simultan reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă se numeşte* ***relaţie de parţială ordine*** *(pe A).*

2) O relaţie binară omogenă care este numai reflexivă şi tranzitivă se numeşte ***relaţie de preordine****.*

3) Relaţia de ordine R, pe mulţimea nevidă A, se numeşte ***totală*** *dacă şi numai dacă, oricare două elemente, x şi y, ale mulţimii de referinţă A sunt "comparabile", adică sau xRy sau yRx.*

4) Dacă A este o mulţime nevidă şi R este o relaţie de preordine/parţială ordine/ordine totală pe A, atunci perechea (A, R) se numeşte, respectiv, ***mulţime preordonată/parţial ordonată/total ordonată****.*

Definiţia 1.10 *l] Date fiind o mulţime parţial ordonată (A, R) şi $\varnothing \neq B \subseteq A$, se numeşte* ***majorant*** *pentru mulţimea B orice element $a \in A$, astfel încât bRa, $\forall\, b \in B$.*

În situaţia existenţei unui majorant pentru B, ***mulţimea*** *B se numeşte* ***majorată****.*

ll] Analog, numim ***minorant*** *pentru B un element $a \in A$ aşa încât aRb, $\forall\, b \in B$. Dacă B are cel puţin un minorant, atunci spunem că B este o* ***mulţime minorată*** *(în raport cu R).*

lll] Când B, ca parte nevidă a mulţimii parţial ordonate (A, R), este simultan minorată şi majorată, zicem că B este o ***mulţime mărginită*** *(în raport cu R şi A).*

lv] Dacă $a \in A \neq \varnothing$ este un minorant pentru A, în raport cu o parţială ordine R pe A, atunci a se numeşte ***cel mai mic element*** *al lui A, relativ la R, şi se notează cu $\min_R A$.*

v] Când $\alpha \in A$ este un majorant pentru A, în raport cu o relaţie de parţială ordine R pe A, atunci α se numeşte ***cel mai mare element al mulţimii*** *A şi se va nota cu $\max_R A$.*

Definiţia 1.11 *Dacă (A, R) este o mulţime parţial ordonată şi $\varnothing \neq B \subseteq A$ este majorată (în raport cu R), iar un cel mai mic majorant există pentru B, atunci acesta se numeşte* ***margine superioară*** *a mulţimii B şi se notează cu $\sup_R B$. Analog, dacă mulţimea nevidă B este minorată (în raport cu R) şi există un cel mai mare minorant pentru B, atunci acesta poartă denumirea de* ***margine inferioară*** *a lui B şi se notează cu $\inf_R B$.*

Definiţia 1.12 *a) O mulţime parţial ordonată (A, R) se numeşte* ***relativ completă*** *(sau* ***complet ordonată****) dacă şi numai dacă, pentru orice $\varnothing \neq B \subseteq A$, minorată, există $\inf_R B$ şi, pentru orice $\varnothing \neq C \subseteq A$, majorată, există $\sup_R C$.*

b) O mulţime total ordonată strict este numită ***bine ordonată*** *(altfel spus, cu ordine bună) dacă orice submulţime nevidă a ei are cel mai mic element.*

Funcţii

Definiţia 1.13 *1. Prin* ***funcţie*** *(echivalent,* ***relaţie funcţională****) pe o mulţime nevidă A, cu valori într-o mulţime nevidă B, se înţelege o relaţie binară $f \subseteq A \times B$ pentru care $D(f) = A$ şi, pentru orice $x \in A$, aşa încât $(x, y) \in f$ şi $(x, z) \in f$, avem (cu necesitate) $y = z$.*

2. *Domeniul relaţiei funcţionale $f \subseteq A \times B$ poartă, uzual, denumirea de* ***mulţime de definiţie a funcţiei*** f*, iar codomeniul lui f se numeşte* ***mulţime în care*** f ***ia valori****.*

Tot uzual, o funcţie f, definită pe o mulţime (nevidă) A şi cu valori într-o mulţime (nevidă) B, se notează prin $f : A \to B$.

Definiţia 1.14 *i) Pentru $f : A \to B$, mulţimea $G \subseteq A \times B$, egală cu $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numeşte* ***graficul funcţiei*** f*.*

ii) Două ***funcţii*** *$f : A \to B$ şi $g : C \to D$ se numesc* ***egale*** *dacă şi numai dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x), \forall\, x \in A = C$.*

iii) Pentru $f : A \to B$ şi $\varnothing \neq C \subset A$, numim ***restricţie*** *a lui f pe C, notând-o cu $f_{|C}$, funcţia de la C la B definită prin $f_{|C}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in C$.*

iv) Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi $\varnothing \neq C \subset A$, atunci mulţimea $\{y \in B \mid \exists\, x \in C$ aşa încât $y = f(x)\}$, notată cu $f(C)$, se numeşte ***imaginea lui*** C ***prin*** f*.*

v) Pentru $f : A \to B$ şi $\varnothing \neq D \subseteq B$, mulţimea $\{x \in A \mid \exists\, y \in D$ aşa încât $y = f(x)\}$, notată cu $f^{-1}(D)$, se numeşte ***preimaginea lui*** D ***prin*** f *sau* ***imaginea inversă a lui*** D ***prin*** f*.*

Definiţia 1.15 *i) O* ***funcţie*** *$f : A \to B$ se numeşte* ***injectivă*** *(sau injecţie) dacă şi numai dacă, $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) Funcţia $f : A \to B$ se numeşte ***surjectivă*** *(sau surjecţie) dacă şi numai dacă $Im(f) = B$.*

iii) Când $f : A \to B$ este simultan injecţie şi surjecţie, atunci f se numeşte ***bijecţie*** *(sau funcţie* ***bijectivă****).*

iv) Funcţia $f : A \to B$ se numeşte ***inversabilă*** *dacă şi numai dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.*

În cazul existenţei lui g, funcţia unică g se numeşte ***inversa lui*** f *şi se notează, uzual, cu f^{-1}.*

Definiţia 1.16 *Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi (A, R), (B, S) sunt mulţimi parţial ordonate, atunci f se numeşte* ***monotonă*** *(în context) dacă şi numai dacă*

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \ \text{cu } x_1 R x_2, \ \text{avem } f(x_1) S f(x_2).$$

Noţiunea de funcţie caracteristică (indicatoare) a unei mulţimi asigură o legătură în plus între noţiunile de mulţime şi funcţie.

Definiţia 1.17 *Fie A o mulţime oarecare. Se numeşte* ***funcţie caracteristică (indicatoare)*** *a mulţimii $A \neq \varnothing$ şi se notează, de regulă, cu χ_A, funcţia dată prin:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Când $A = \varnothing$, $\chi_A \equiv 0$.

Propoziţia 1.4 *Funcţia caracteristică a unei mulţimi satisface următoarele relaţii*

$$\chi_{C_A} = 1 - \chi_A, \quad \forall A \in \mathcal{P}(E),$$

cu $C_A = E \setminus A$*,*

$$\chi_A \leq \chi_B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E),$$

unde E *este mulţimea (cea mai amplă) la care ne raportăm.*

Proprietăţile evidenţiate de Propoziţia 1.4 pot fi folosite la stabilirea şi demonstrarea unor relaţii relative la mulţimi, cum sunt, de exemplu, cele specificate de Propoziţia 1.2.

Ordinali şi cardinali

Una dintre noţiunile matematice cu importanţă, printre altele, în semantica limbajelor de programare este aceea de ***ordinal***, bazată pe conceptele de ***mulţime tranzitivă*** (v. Definiţia 1.2) şi de relaţie binară de ***bună-ordine*** (v. Definiţia 1.12 -b).

Definiţia 1.18 *O mulţime* X *este numită* ***ordinal*** *dacă este tranzitivă şi bine ordonată, în raport cu ordinea prin apartenenţă.*

Propoziţia 1.5 *(**Proprietăţi ale ordinalilor**)*

i) $\alpha \notin \alpha$, $\forall \alpha$ *ordinal.*

ii) $\alpha \in \beta$ *şi* $\beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma$ *ordinali.*

iii) Dacă $\alpha \in \beta$ *şi* β *este ordinal, atunci* α *este ordinal.*

iv) Dacă α *este ordinal,* $X \subset \alpha$ *şi* X *este tranzitivă, atunci* $X \in \alpha$*.*

v) Pentru oricare ordinali α *şi* β*, are loc exact una dintre relaţiile:* $\alpha \in \beta$*,* $\alpha = \beta$*,* $\beta \in \alpha$*.*

vi) Dacă X *este o mulţime nevidă de ordinali, atunci* $\bigcap X$ *este ordinal şi anume cel mai mic ordinal al lui* X*.*

vii) O mulţime tranzitivă de ordinali este ordinal.

viii) Dacă α *este ordinal, atunci* $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ *este, de asemenea, ordinal, numit ordinalul succesor al lui* α*. Reciproc, dacă* $S(\alpha)$ *este ordinal, atunci şi* α *este ordinal.*

ix) Dacă X *este o mulţime nevidă de ordinali, atunci* $\bigcup X$ *este ordinal şi, dacă* X *are un cel mai mare element, atunci acesta este* $\bigcup X$*.*

Definiţia 1.19 *Se spune că ordinalul* α *este mai mic decât ordinalul* β*, notând aceasta prin* $\alpha < \beta$*, dacă* $\alpha \in \beta$*.*

Graţie Propoziţiei 1.4 - i) şi v), se poate afirma că orice mulţime de ordinali este total ordonată strict, prin "$<$", sau, echivalent spus, prin apartenenţă. Totodată, "$<$" este o bună-ordine pe o mulţime de ordinali.

Definiţia 1.20 *a) Un ordinal α este denumit **ordinal succesor**, dacă există un ordinal β astfel încât $\alpha = S(\beta)$. Altfel, α este numit **ordinal limită**.*

*b) α este declarat **ordinal finit**, dacă $\alpha = 0$ sau dacă α este ordinal succesor şi orice $\beta < \alpha$ este fie 0, fie ordinal succesor. Altfel, α este numit **ordinal infinit**.*

Se poate vedea că mulţimea tuturor ordinalilor finiţi este ordinal. De asemenea, se poate constata că orice ordinal limită este marginea superioară a mulţimii tuturor ordinalilor mai mici decât el. Cel mai mic ordinal infinit este notat cu ω. Clasa tuturor ordinalilor este notată, adeseori, cu Ord.

Definiţia 1.21 *Două mulţimi nevide oarecare, A şi B, se numesc **echipotente** dacă şi numai dacă există o funcţie bijectivă $h : A \to B$.*

Un rezultat de reţinut este cel care stipulează faptul că o mulţime oarecare poate fi bine ordonată dacă şi numai dacă este echipotentă cu un ordinal. În plus, pentru orice mulţime A, există un ordinal unic α, echipotent cu A, care nu este echipotent cu nici un alt ordinal mai mic decât el.

Definiţia 1.22 *(a unui **cardinal**)*

*a) Se numeşte **număr cardinal** al unei mulţimi A (sau **cardinalul mulţimii** A) cel mai mic ordinal α echipotent cu A.*

*b) **Număr cardinal** sau, simplu, **cardinal** este numit orice ordinal care satisface a) pentru o anumită mulţime A.*

Propoziţia 1.6 *Pentru orice ordinal α, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) α este cardinal;

ii) α nu este echipotent cu nici un ordinal $\beta < \alpha$;

iii) α este cardinalul mulţimii α.

Observaţii:

1) ω este număr cardinal.

2) Două mulţimi sunt echipotente dacă şi numai dacă cardinalele lor sunt egale.

3) Cardinalul unei mulţimi A se notează cu $card(A)$ sau $|A|$ sau $\#A$.

4) Prin convenţie, $|\varnothing| = 0$.

Definiţia 1.23 *j) Pentru două mulţimi A şi B, spunem că avem*

$$card(A) \leqslant card(B),$$

dacă există o injecţie de la mulţimea A la mulţimea B.

jj) Avem

$$card(A) < card(B),$$

dacă şi numai dacă $card(A) \leqslant card(B)$ *şi* $card(A) \neq card(B)$.

Observaţie: Relaţia binară introdusă prin Definiţia 1.23-j) este o relaţie de parţială ordine pe mulţimea tuturor mulţimilor, întrucât este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Mai mult, deoarece, pentru orice două mulţimi A şi B, avem fie $card(A) \leqslant card(B)$, fie $card(B) \leqslant card(A)$, relaţia ”$\leqslant$” este una de totală ordine.

Definiţia 1.24 *Se numeşte* ***număr Hartogs*** *asociat unei mulţimi* A*, notat cu* $h(A)$*, cel mai mic ordinal* α *care nu este echipotent cu nici o submulţime a lui* A.

Propoziţia 1.7 *Pentru orice mulţime* A*,* $h(A)$ *este cardinal şi* $card(A) < h(A)$.
$h(A)$ *este cel mai mic cardinal mai mare decât* $card(A)$.

Propoziţia 1.8 *a) Dacă* $\alpha = card(A)$*, atunci* $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{\alpha}$.

b) Pentru orice număr cardinal α*, are loc inegalitatea:*

$$\alpha < 2^{\alpha}.$$

Bibliografie selectivă

1. M. Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni*, Ed.Univ.Craiova, 2000.
2. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2011.
3. Judith Roitman - *Introduction to Modern Set Theory*, 2011.
4. V. Postolică - *Baze ale matematicii actualizate prin eficienţă*, Matrix Rom, Bucureşti, 2008.
5. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. “Al. I. Cuza”, Iaşi, 1998.
6. B. Poonen - *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.
7. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis,* Pearson Education Publ., 2009
8. E. Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2010.
9. G. O'Regan - *Mathematics in Computing (Chap. 2),* Springer Verlag, London, 2013.