Soluţii la examenul parţial - Teoria probabilităţilor

semianul A, aprilie 2017

Pentru exerciţiile A - D: se dau un zar cu 4 feţe şi o urnă în care avem trei zaruri cu 6 feţe şi două zaruri cu 8 feţe. (Un zar cu p feţe are numerele de la 1 la p scrise pe feţele sale.)

A. (15 p) Se alege la întâmplare un zar din urnă şi se aruncă o dată. Dacă apare faţa 4 acelaşi zar se mai aruncă o dată, altfel se aruncă o dată zarul cu 4 feţe care nu se află în urnă.

Se notează evenimentele aleatoare: $B =$"primul zar ales are 8 feţe", $C =$"la prima aruncare se obţine faţa cu numărul 4" şi $A =$"la a doua aruncare se obţine numărul 3".

(a) (4p) Calculaţi $P(B), P(C|B), P(B\cap C)$ şi $P(C)$.

(b) (3p) Evenimentele B şi C sunt compatibile? Dar contrare? Dar independente?

(c) (5p) Calculaţi $P(A)$ şi $P(B|A)$.

(d) (3p) Arătaţi că $P(B\cap C|A) = P(B|A) - P(B\cup C|A) + P(C|A)$. Relaţia aceasta este adevărată în general, pentru trei evenimente oarecari?

(a) $P(B) = \dfrac{2}{5}, P(C|B) = \dfrac{1}{8}, P(B\cap C) = P(C|B)\cdot P(B) = \dfrac{2}{40}$. Apoi $P(\overline{B}) = \dfrac{3}{5}, P(C|\overline{B}) = \dfrac{1}{6}$ şi de aici, folosind formula probabilităţii totale, obţinem

$$P(C) = P(B)P(C|B) + P(\overline{B})P(C|\overline{B}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{20}.$$

(b) B şi C sunt compatibile deoarece $P(B\cap C)\neq 0$. Nu sunt contrare din acelaşi motiv. Nu sunt independente deoarece $P(B)\cdot P(C)\neq P(B\cap C)$: $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{20}\neq\dfrac{2}{40}$.

(c) Din formula probabilităţii totale:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

Apoi, din varianta condiţionată a formulei probabilităţii totale:

$$P(A|B) = P(C|B)\cdot P(A|B\cap C) + P(\overline{C}|B)\cdot P(A|B\cap\overline{C}),$$

$$P(A|\overline{B}) = P(C|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B}\cap C) + P(\overline{C}|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B}\cap\overline{C}).$$

Probabilităţile necesare sunt

$$P(\overline{C}|B) = 1 - P(C|B) = \frac{7}{8}, P(\overline{C}|\overline{B}) = 1 - P(C|\overline{B}) = \frac{5}{6},$$

$$P(A|B\cap C) = \frac{1}{8}, P(A|B\cap\overline{C}) = \frac{1}{4}, P(A|\overline{B}\cap C) = \frac{1}{6}, P(A|\overline{B}\cap\overline{C}) = \frac{1}{4}.$$

De unde,

$$P(A|B) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{64}, P(A|\overline{B}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{17}{72} \text{ şi } P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{15}{64} + \frac{3}{5}\cdot\frac{17}{72} = \frac{113}{480}.$$

Din formula lui Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{3}{32} \cdot \frac{480}{113} = \frac{45}{113}.$$

(d) Formula are loc pentru orice trei evenimente A, B, C pentru care $A \neq \varnothing$, deoarece

$$P(B|A) - P(B \cup C|A) + P(C|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) + P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cap C))}{P(A)} = P(B \cap C|A).$$

B. (5p) Se alege la întâmplare un zar din urnă şi se aruncă până când se obţine o faţă cu numărul 4.

(a) (2.5p) Care este probabilitatea să obţinem faţa cu numărul 4 abia la a patra aruncare a zarului?

(b) (2.5p) Care este numărul mediu de aruncări?

Probabilitatea ca la o aruncare să obţinem faţa 4 este probabilitatea evenimentului C de mai sus, $p = \frac{3}{20}$.

(a) Din schema geometrică cu $n = 4$, probabilitatea cerută este $\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^3$.

(b) Variabila care numără aruncările necesare obţinerii unei feţe nu numărul 4 este distribuită $Geometric(p)$ şi are media $\frac{1}{p} = \frac{20}{3}$.

C. (5p) Se alege la întâmplare un zar din urnă şi se aruncă de 8 ori.

(a) (2.5p) Ce este mai probabil: să obţinem faţa cu numărul 4 de exact patru ori sau de exact cinci ori?

(b) (2.5p) De câte ori în medie se obţine faţa cu numărul 4?

Probabilitatea ca la o aruncare să obţinem faţa 4 este probabilitatea evenimentului C de mai sus, $p = \frac{3}{20}$.

(a) Din schema binomială cu $n = 8, p = \frac{3}{20}$ şi $k = 4$, respectiv $k = 5$ probabilităţile cerute sunt

$$\binom{8}{4}\left(\frac{3}{20}\right)^4 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^4 \geqslant \binom{8}{5}\left(\frac{3}{20}\right)^5 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^3 \Longleftrightarrow \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 17 \geqslant \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 3 \Longleftrightarrow \frac{17}{4} \geqslant \frac{3}{5}.$$

Este mai probabil să obţinem de exact patru ori faţa 4.

(b) Variabila care numără de câte ori apare faţa 4 este distribuită $Binomial(n, p)$ şi are media $n \cdot p = 8 \cdot \frac{3}{20} = \frac{6}{5}$.

D. (5p) Se alege la întâmplare un zar din urnă şi se aruncă de 100 ori. Cu care dintre cele două inegalităţi (a lui Markov şi a lui Cebâşev) se obţine un majorant mai bun pentru probabilitatea ca numărul 4 să apară de cel puţin 60 de ori?

Fie X variabila care numără de câte ori apare faţa cu numărul 4, $X : B\left(100, \frac{3}{20}\right)$. $M[X] = 100 \cdot \frac{3}{20} = 15, D^2[X] = 100 \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{17}{20} = \frac{51}{4}$.

$$P(X \geqslant 60) \leqslant \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ (Markov)}$$

$$P(X \geqslant 60) = P(X - 15 \geqslant 45) \leqslant P(|X - 15| \geqslant 45) \leqslant \frac{51}{4 \cdot 45^2} = \frac{17}{45 \cdot 36} \text{ (Cebâşev)}$$

Evident, inegalitatea lui Cebâşev dă un minorant mai bun (mai mic).

E. (10p) Zarul care nu se află în urnă (cel cu 4 feţe) se aruncă de două ori. Notăm cu X rezultatul primei aruncări şi cu Y maximul dintre celor două rezultate.

(a) (6p) Determinaţi repartiţia comună a celor două variabile.

(b) (1p) X şi Y sunt independente?

(c) (3p) Determinaţi repartiţia şi media variabilei $(Y - X)$.

(a) Legătura dintre cele două variabile este $X \leqslant Y$.

	X: 1	2	3	4	
Y: 1	1/16	0	0	0	1/16
2	1/16	2/16	0	0	3/16
3	1/16	1/16	3/16	0	5/16
4	1/16	1/16	1/16	4/16	7/16
	1/4	1/4	1/4	1/4	

(b) Variabilele nu sunt independente: $P(X = 4 \cap Y = 1) = 0 \neq P(X = 4) \cdot P(Y = 1)$.
(c)

$$(Y - X) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{10}{16} & \frac{3}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \Longrightarrow M[Y - X] = \frac{110}{16}.$$

F. (15p) Avem la îndemână trei zaruri: unul cu 4 feţe, unul cu 6 feţe şi unul cu 8 feţe. Se alege un zar care se aruncă şi în funcţie de rezultat se alege un alt zar care se aruncă şi aşa mai departe. Iniţial se alege un zar la întâmplare din urnă, iar apoi, ori de câte ori avem zarul cu p feţe îl aruncăm şi dacă obţinem un număr divizibil prin 3 îl alegem pe cel cu $(12 - p)$ feţe, altfel alegem zarul cu 8 feţe.

Descrieţi lanţul Markov corespunzător acestui proces aleator (o stare fiind tipul zarului ales şi care urmează să fie aruncat). Analizaţi lanţul Markov astfel definit: desenaţi digraful de tranziţie (4p), determinaţi matricea probabilităţilor de tranziţie (4p), indicaţi tipurile stărilor, clasele recurente ne/periodice (3p) şi determinaţi probabilităţile de echilibru - dacă e cazul (4p).

Stările: $s_1 =$ zarul ales are 4 feţe, $s_2 =$ zarul ales are 6 feţe, $s_3 =$ zarul ales are 8 feţe. Matricea probabilităţilor de tranziţie este

$$P : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$\{s_1, s_3\}$ este o clasă recurentă neperiodică, iar s_2 este o stare tranzitorie. Putem aplica teorema corespunzătoare pentru a determina probabilităţile de echilbru:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & = & 1/4\pi_3 \\ \pi_2 & = & 1/3\pi_2 \\ \pi_3 & = & \pi_1 + 2/3\pi_2 + 3/4\pi_3 \\ 1 & = & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & = & 1/4\pi_3 \\ \pi_2 & = & 0 \\ 1 & = & 1/4\pi_3 + \pi_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & = & 1/5 \\ \pi_2 & = & 0 \\ \pi_3 & = & 4/5 \end{array} \right. .$$