BAREM DE CORECTARE PENTRU TS3

Puncte bonus : 10

Subiectul I (la $C2_a$, $C2_b$ (cu $m=4$), $C3_a$ (cu $m=6$) și $C3_b$ (cu $m=8$))

Abordarea subiectului 2p

$h_1(x) = g_1(x,x) = x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 - x_3^2$, $\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ 3p

$h_2(x) = g_2(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + mx_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$, $\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ 3p

Cunoașterea corectă a noțiunii de formă canonică 3p

$s_1 = x_1 - x_3$, $s_2 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$, $s_3 = x_3$ (transformare liniară validă) (*) 3p

(*) $\Rightarrow h_1(x) \rightsquigarrow \tilde{h}_1(s_1,s_2,s_3) = s_1^2 + 2s_2^2 - \frac{5}{2}s_3^2$ (forma canonică 1) (•) 4p

$t_1 = x_1 + x_2$, $t_2 = x_2$, $t_3 = x_3 - x_2$ (transformare liniară validă) (**) 3p

(**) $\Rightarrow h_2(x) \rightsquigarrow \tilde{h}_2(t_1,t_2,t_3) = t_1^2 + mt_2^2 - t_3^2$ (forma canonică 2) (••) 4p

$\sigma_1 = (2,1,0)$ (signatura lui h_1) 2p

$\sigma_2 = (2,1,0)$ (signatura lui h_2) $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}_+^*$ (în particular, $m=4,6,8$) 2p

Concluzia : $\forall m\in\mathbb{R}_+^*$ ($m=4,6,8$) $\Rightarrow \sigma_1=\sigma_2$ 1p

Total : 30p

Subiectul II (la $C2_a$)

Abordarea subiectului 1p

$x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\theta_{\mathbb{R}^2}$ (1) 2p

$f(x_n,y_n) = \frac{3}{5}$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \frac{3}{5}$ (2) 2p

$\tilde{x}_n = \frac{1}{n}$, $\tilde{y}_n = \frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\theta_{\mathbb{R}^2}$ (3) 2p

$f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = 0$ (4) 2p

(1) ~ (4) $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2}} f(x,y)$ (în sens global) (5) 1p

(5) $\Rightarrow f$ nu se poate prelungi, în sens global, prin continuitate, la $\mathbb{R}^2$ 3p

$\exists\, l^{0}_{e_1} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(\theta_{\mathbb{R}^2} + te_1) = \lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 1$ (6) —— 2p

(6) $\Rightarrow \exists\, g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^2}\} \\ 1, & (x,y) = \theta_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$,

g = continuă parțial în $\theta_{\mathbb{R}^2}$, pe direcția canonică $e_1 = (1,0)$ (7) —— 3p

(7) $\Rightarrow$ este posibilă prelungirea funcției f, prin continuitate, în sens parțial, pe direcția canonică $e_1 = (1,0)$, la $\mathbb{R}^2$, spre g —— 3p

$\exists\, l^{0}_{e_2} = \lim\limits_{t\to 0} f(\theta_{\mathbb{R}^2} + te_2) = \lim\limits_{t\to 0} f(0,t) = -1$ (8) —— 2p

(8) $\Rightarrow \exists\, h(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^2}\} \\ -1, & (x,y) = \theta_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$,

h = continuă parțial în $\theta_{\mathbb{R}^2}$, pe direcția canonică $e_2 = (0,1)$ (9) —— 3p

(9) $\Rightarrow$ este posibilă prelungirea funcției f, prin continuitate, în sens parțial, pe direcția canonică $e_2 = (0,1)$, la $\mathbb{R}^2$, spre h —— 3p

Concluzia finală —— 1p

Total: 30p

Subiectul II (la $C2_b$ și $C3_a$)

Abordarea subiectului —— 2p

$x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $r \in \mathbb{R}^*_+$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ —— 5p

$\lim\limits_{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r\neq 0\\ \forall \alpha\in[0,2\pi]}} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r\neq 0}} r^{2m}\sinh r^2 \underset{(\sinh r^2)}{=} \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r\neq 0}} r^{2(m+1)}$ (!) —— 6p

(!) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = +\infty$, $\forall m < -1$ ($\square_1$) —— 3p

(!) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 1$, când $m = -1$ ($\square_2$) —— 3p

(!) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$, $\forall m > -1$ ($\square_3$) —— 3p

$\square_{1\to3} \Rightarrow$ Prelungibilitatea lui f, prin continuitate, la $\mathbb{R}^2$, este posibilă $\forall m \in [-1, +\infty)$ —— 8p

Total: 30p

Subiectul II (la C3$_b$)

Abordarea subiectului 2p

$x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ 4p

$$\exists \lim_{\substack{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2} \\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^2}\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ r\neq 0 \\ \forall\alpha\in[0,2\pi]}} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ r\neq 0}} \frac{\log(r^2+1)}{r^2} = \frac{1}{\ln 2} \quad (*)$$ 10p

(*) ⟹ este posibilă prelungirea funcției f, prin continuitate, în sens global, la $\mathbb{R}^2$. 3p

Prelungirea lui f: $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\theta_{\mathbb{R}^2}\} \\ (\ln 2)^{-1}, & (x,y) = \theta_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$ 2p

$$\exists \lim_{(x,y)\to\theta_{\mathbb{R}^2}} \sqrt{(x^2+y^2)^{-3}}\, \operatorname{arctg}(x^2+y^2) = +\infty \quad (**)$$ 5p

(**) ⟹ nu este posibilă prelungirea acestei funcții. 3p

Concluzia finală 1p

Total: 30p

Subiectul III (la C2$_a$, C2$_b$, C3$_a$ și C3$_b$)

Abordarea subiectului 1p

$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$, cu $f_k(x,y,z) = \ldots$ (după caz) 4p

Cunoașterea corectă a noțiunii de jacobian al lui f 2p

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y,z) \\ \nabla f_2(x,y,z) \\ \nabla f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$ 3p

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \ldots$ (după caz), $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 2p

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = \ldots$ (după caz), $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 2p

$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = \ldots$ (după caz), $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 2p

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 3$ (în primul caz, $C2_a$) (altfel, în celelalte cazuri) — 1p

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = 6$ (în cazul $C2_a$), $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ — 1p

$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = 2$ (în cazul $C2_a$), $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ — 1p

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) =$ — 2p

$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) =$ — 2p

$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) =$ — 2p

$\det(J_f(x,y,z)) = \left| \quad \right| =$ — 2p

$\det(J_f(a,a,a)) = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ — 2p

Concluzii: (a,a,a) = punct singular al lui f, $\forall a \in \mathbb{R}$ ($\forall m \in \mathbb{R}$) — 1p

Total: 30p

22.12.2016