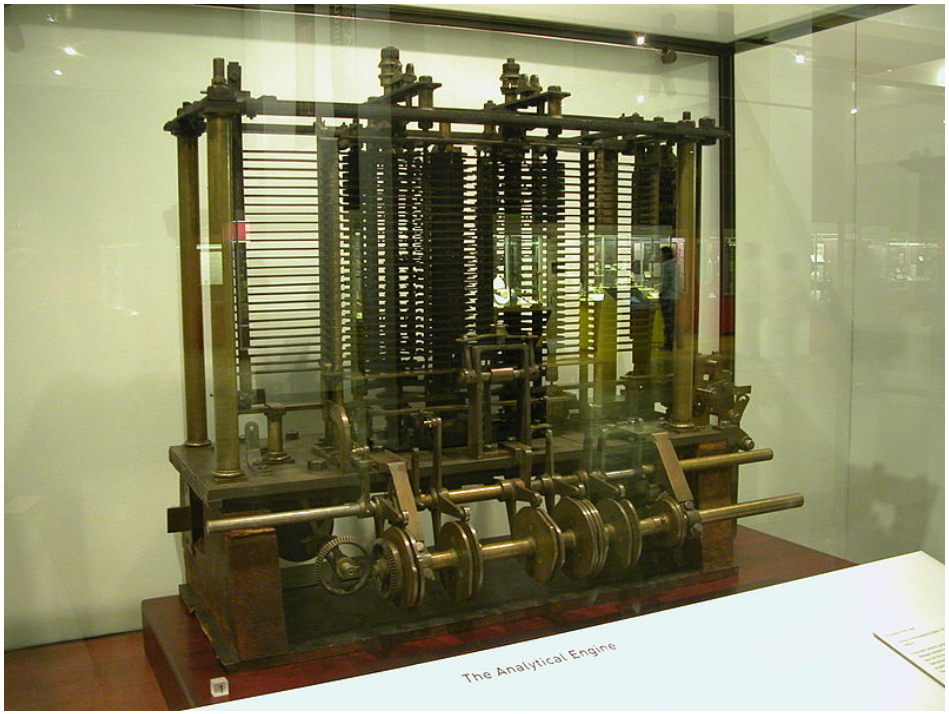
Analiza eficienței algoritmilor.

SD 2016/2017

Conținut

Timp de execuție

"As soon as an Analytic Engine exists, it will necessarily guide the future course of the science. Whenever any result is sought by its aid, the question will arise—By what course of calculation can these results be arrived at by the machine in the shortest time?"
Charles Babbage (1864)



Mașina analitică

Provocare

Pentru date de intrare de dimensiuni mari, programul rezolva problema?

Knuth (1970): Să utilizăm metode științifice pentru a înțelege performanța algoritmilor.

Analiza eficienței algoritmilor

- Analiza complexității.
- Estimarea volumului de **resurse de calcul** necesare execuției algoritmului:
  - **spațiu de memorie**: spațiul necesar stocării datelor;
  - **timp de execuție**: timpul necesar execuției algoritmului.
- **Algoritm eficient**: necesită un volum rezonabil de resurse de calcul:
  - eficiența se măsoară în raport cu spațiul de memorie, sau cu timpul de execuție;
- Utilitate:
  - pentru a stabili performanța algoritmului și a furniza garanții asupra acesteia;
  - pentru a compara algoritmi.

Analiza eficientei timp

"It is convenient to have a measure of the amount of work involved in a computing process, even though it be a very crude one. We may count up the number of times that various elementary operations are applied in the whole process and then given them various weights. We might, for instance, count the number of additions, subtractions, multiplications, divisions, recording of numbers, and extractions of figures from tables. In the case of computing with matrices most of the work consists of multiplications and writing down numbers, and we shall therefore only attempt to count the number of multiplications and recordings."

— *Alan Turing, Bounding-off errors in matrix processes, 1947*

Analiza eficienței timp

Trebuie să stabilim

I. Un model de calcul.

Modelul von Neumann – RAM (random access machine):

- prelucrările sunt executate secvențial;
- memoria constă dintr-o mulțime infinită de celule;
- timpul pentru accesarea datelor este același (nu depinde de locația acestora în memorie);
- celulele de memorie păstreaza valori "mici" (limitate polinomial în dimensiune)

- timpul de execuție al unei prelucrări nu depinde de valorile operanzilor.

Modelul de calcul

- Implică o abstractizare, o simplificare brută.
- Memoria externă:
  - într-o mașină reală există o ierarhie complexă a memoriei;
  - există algoritmi special proiectați pentru seturi de date mari care trebuiesc păstrate în memoria externă;
  - memoria rapidă – de dimensiune limitată / memoria externă – nelimitată;
  - există operații speciale de intrare/ieșire care transferă informație între cele două tipuri.
- Procesare paralelă:
  - (*SIMD (Single Instruction, Multiple Data)* - execuție paralelă a unei instrucțiuni, pe date diferite;
  - *multithreading* simultan - rularea mai multor fire de execuție pe un procesor;
  - procesoare multiple, procesoare *multicore*, etc.;
  - sisteme distribuite.

II. O unitate de masură a timpului de execuție

- Pseudocod (curs 1):
  - variabile și tipuri elementare de date; instrucțiuni; proceduri și funcții.

- Timpul necesar execuției unei prelucrări elementare:
  - operații elementare: atribuire, operații aritmetice, comparații, operații logice;
  - fiecare operație elementară necesită o unitate de timp pentru a fi executată.

- Timpul total de execuție este egal cu numărul prelucrărilor elementare executate.

Dimensiunea problemei

- Ipoteză: volumul resurselor de calcul necesare depinde de volumul datelor de intrare.

- **Dimensiunea problemei**: volumul de memorie necesar stocării datele de intrare.
  - Este exprimată în:
    - numărul de componente ale datelor de intrare sau
    - numărul de biți necesari stocării datelor de intrare.

  - Numărul de biți necesari stocării valorii n este $[log_2 n] + 1$.

Dimensiunea problemei - exemple

- Testul de primalitate pentru un număr n: n (sau $log_2 n$).
- Minimul unui tablou: $x[0..n-1]$: n.
- Suma a două matrici $(m \times n)$: $m \times n$.

Conținut

Exemplul 1. Suma primelor n numere întregi

Intrare: $n >= 1$
Ieșire: suma $s = 1 + 2 + \cdots + n$
Dimensiunea problemei: n

Exemplul 1. Suma primelor n numere întregi

Intrare: $n >= 1$
Ieșire: suma $s = 1 + 2 + \cdots + n$
Dimensiunea problemei: n

```
   Function suma(n)
   begin
1      s ← 0
2      i ← 1
3      while i <= n do
4          s ← s + i
5          i ← i + 1
6      return s
   end
```

Operație	Cost	Nr. repetări
1	c1	1
2	c2	1
3	c3	n+1
4	c4	n
5	c5	n

$$T(n) = (c3 + c4 + c5)n + (c1 + c2 + c3)$$
$$= a * n + b$$

Exemplul 1. Suma primelor n numere intregi

Considerăm că toate prelucrarile elementare au același **cost unitar**.

- $T(n) = 3(n+1)$;
- Constantele ce intervin în expresie nu sunt importante.
- Timpul de execuție depinde **liniar** de dimensiunea problemei.
- Algoritm echivalent:

$s \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $s \leftarrow s + i$

  - gestiunea contorului: $2(n+1)$ operații;
  - calculul sumei: $(n+1)$ operații (inițializarea și actualizarea lui s).

Exemplul 2. Înmulțirea a două matrici

Intrare: $A(m \times n), B(n \times p)$
Ieșire: $C = A * B, \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p$
Dimensiunea problemei: mnp

Exemplul 2. Înmulțirea a două matrici

Intrare: $A(m \times n), B(n \times p)$
Ieșire: $C = A * B, \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p$
Dimensiunea problemei: mnp

Function *produs*$(a[0..m-1, 0..n-1], b[0..n-1, 0..p-1])$
begin
1 **for** $i \leftarrow 0$ **to** $m-1$ **do**
2 **for** $j \leftarrow 0$ **to** $p-1$ **do**
3 $c[i,j] \leftarrow 0$
4 **for** $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
5 $c[i,j] \leftarrow c[i,j] + a[i,k] * b[k,j]$
6 return $c[0..m-1, 0..p-1]$
end

Exemplul 2. Înmulțirea a două matrici

Operație	Cost	Nr. repetări
1	2(m+1)	1
2	2(p+1)	m
3	1	mp
4	2(n+1)	mp
5	2	mpn

$T(m, n, p) = 4mnp + 5mp + 4m + 2$

Exemplul 2. Înmulțirea a două matrici

Operație	Cost	Nr. repetări
1	2(m+1)	1
2	2(p+1)	m
3	1	mp
4	2(n+1)	mp
5	2	mpn

$T(m, n, p) = 4mnp + 5mp + 4m + 2$

Observație: nu este necesar să se completeze întreg tabelul; este suficient să se contorizeze **operația dominantă**.

- Cea mai frecventă (costisitoare) operație: $a[i, k] * b[k, j]$.
- Estimare timp de execuție: $T(m, n, p) = mnp$.

Exemplul 3. Minimul unui tablou

Intrare: $x[0..n-1], \quad n \geq 1$
Ieșire: $m = \min(x[0..n-1])$
Dimensiunea problemei: n

Exemplul 3. Minimul unui tablou

Intrare: $x[0..n-1], \quad n \geq 1$
Ieșire: $m = \min(x[0..n-1])$
Dimensiunea problemei: n

Function *minim*$(x[0..n-1])$
begin

```
1       m ← x[0]
2       i ← 1
3       while i < n do
4           if x[i] < m then
5               m ← x[i]
6           i ← i + 1
7       return m
```

end

Operație	Cost	Nr. repetări
1	1	1
2	1	1
3	1	n
4	1	n-1
5	1	t(n)
6	1	n-1

$$T(n) = 3n + t(n)$$

Exemplul 3. Minimul unui tablou

Timpul de execuție depinde de:

- dimensiunea problemei;
- proprietățile datelor de intrare.

Trebuie analizate cazurile extreme:

- cazul cel mai favorabil
  - $x[0] <= x[i], i = 0, \ldots, n-1 \Rightarrow t(n) = 0 \Rightarrow T(n) = 3n$
- cazul cel mai nefavorabil
  - $x[0] > x[1] > \ldots > x[n-1] \Rightarrow t(n) = n-1 \Rightarrow T(n) = 4n-1$
- $3n <= T(n) <= 4n-1$
  Limita inferioară și limita superioară depind liniar de dimensiunea problemei.
- Dacă se ia în calcul doar operația de baza (comparația $x[i] < m$):
  $T(n) = n-1$

Exemplul 4. Căutarea secvențială

Intrare: $x[0..n-1]$, $n >= 1$ și v o valoare (cheie de căutare)
Ieșire: valoarea de adevăr a afirmației "v face parte din $x[0..n-1]$"
Dimensiunea problemei: n

Exemplul 4. Căutarea secvențială

Intrare: $x[0..n-1]$, $n >= 1$ și v o valoare (cheie de căutare)
Ieșire: valoarea de adevăr a afirmației "v face parte din $x[0..n-1]$"
Dimensiunea problemei: n

```
Function cauta(x[0..n-1], v)
begin
1       i ← 0
2       while x[i]! = v and i < n-1
         do
3           i ← i + 1
4       if x[i] == v then
5           gasit ← true
        else
6           gasit ← false
        return gasit
end
```

Operație	Cost	Nr. repetări
1	1	1
2	2	t(n)+1
3	1	t(n)
4	1	1
5	1	1
6	1	1

$$T(n) = 1 + 3t(n) + 4$$

Exemplul 4. Căutarea secvențială

Timpul de execuție depinde de:

- dimensiunea problemei;
- proprietățile datelor de intrare.

- Cazul cel mai favorabil
  - $x[0] = v \Rightarrow t(n) = 0 \Rightarrow T(n) = 5$

- cazul cel mai nefavorabil
  - $x[n-1] = v$ sau
    $(v! = x[0], ..., v! = x[n-1]) \Rightarrow t(n) = n-1 \Rightarrow T(n) = 3n+2$

- Dacă se consideră ca operație dominantă comparația $x[i]! = v$:
  - cazul cel mai favorabil: $T(n) = 2$;
  - cazul cel mai nefavorabil: $T(n) = n+2$.

Exemplul 5. Sortarea prin insertie

Intrare: o secvență de numere $(a_1, ..., a_n)$
Ieșire: o permutare $(a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_n})$ astfel încât $a_{\sigma_1} \leq a_{\sigma_2} \leq, \ldots, \leq a_{\sigma_n}$
Dimensiunea problemei: n

Exemplul 5. Sortarea prin insertie

Intrare: o secvență de numere $(a_1, ..., a_n)$

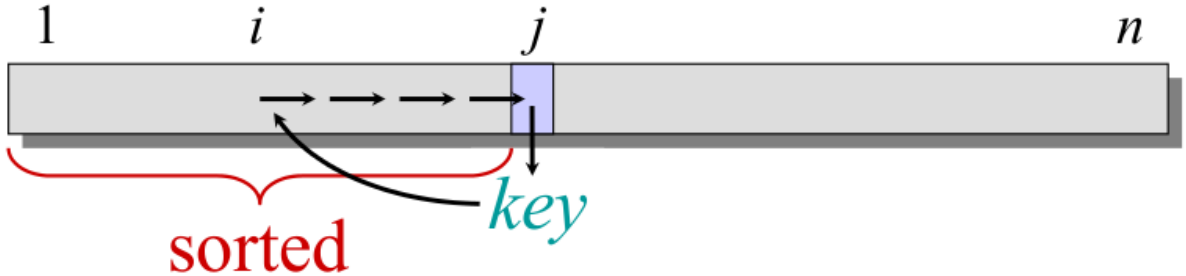
Ieșire: o permutare $(a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_n})$ astfel încât $a_{\sigma_1} \leq a_{\sigma_2} \leq, \ldots, \leq a_{\sigma_n}$

Dimensiunea problemei: n

Procedure *insertion-sort*$(a[0..n-1], n)$
begin

```
1     for j ← 1 to n − 1 do
2         key ← a[j]
3         i ← j − 1
4         while i >= 0 and a[i] > key do
5             a[i + 1] ← a[i]
6             i ← i − 1
7         a[i + 1] ← key
```

end



Sortare prin inserție - exemplu

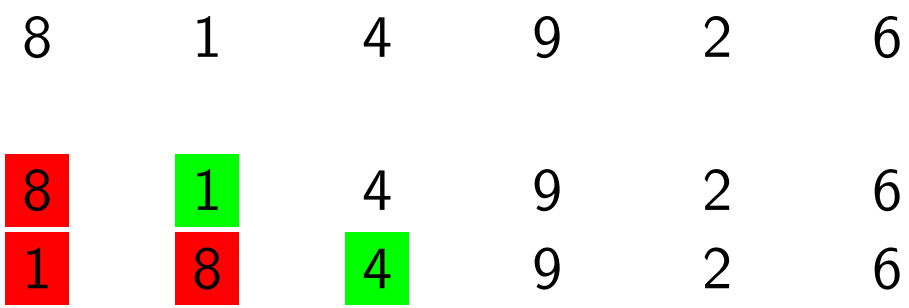
8 1 4 9 2 6

Sortare prin inserție - exemplu

8 1 4 9 2 6

8 1 4 9 2 6

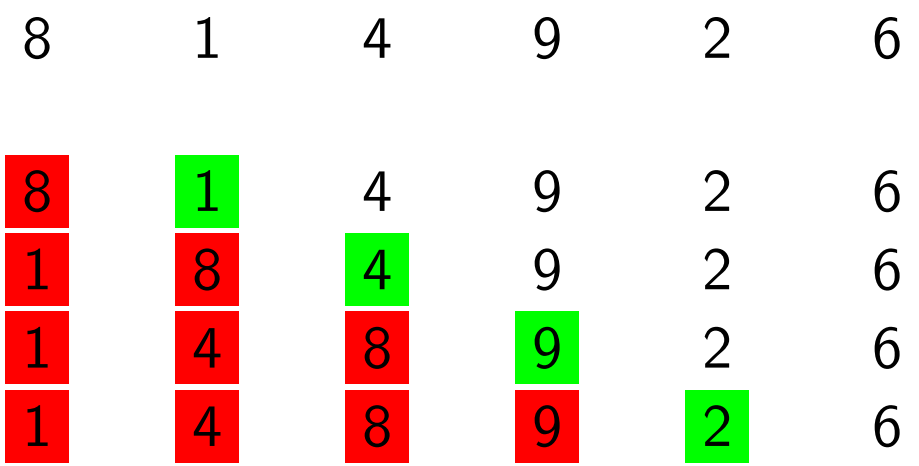
Sortare prin inserție - exemplu



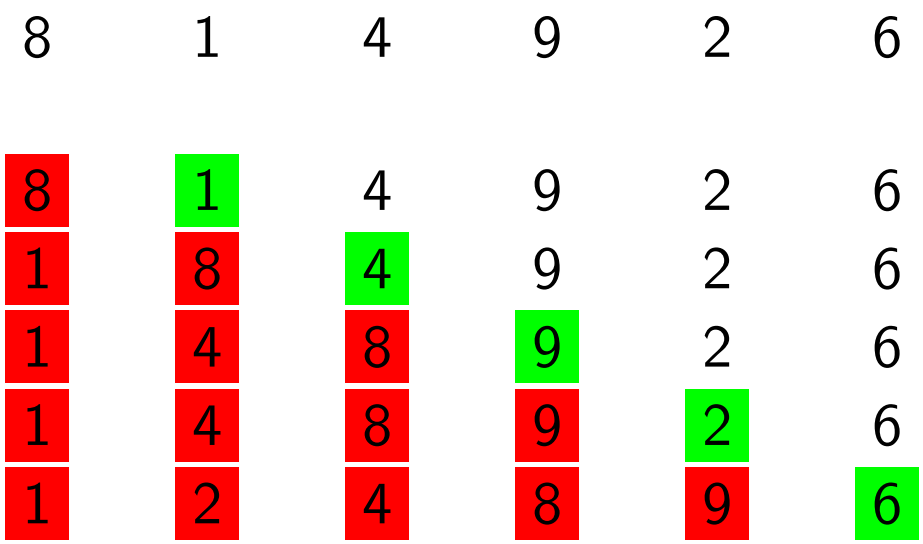
Sortare prin inserție - exemplu

8	1	4	9	2	6
8	1	4	9	2	6
1	8	4	9	2	6
1	4	8	9	2	6

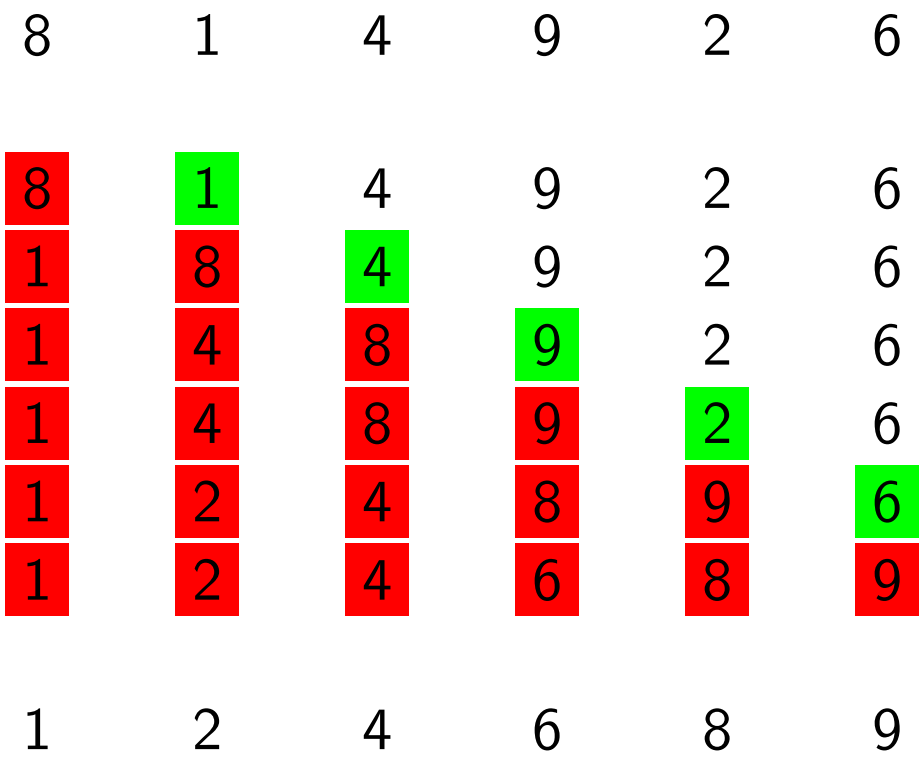
Sortare prin inserție - exemplu



Sortare prin inserție - exemplu



Sortare prin inserție - exemplu



Exemplul 5. Sortarea prin inserție

Operație	Cost	Nr. repetări
1	c_1	n
2	c_2	$n-1$
3	c_3	$n-1$
4	c_4	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
5	c_5	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
6	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
7	c_7	$n-1$

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_5 \sum_{j=2}^{n}(t_j-1) + c_6 \sum_{j=2}^{n}(t_j-1) + c_7(n-1)$$

Exemplul 5. Sortarea prin inserție

- Timpul de execuție depinde de:
  - dimensiunea problemei;
  - proprietățile datelor de intrare.

Exemplul 5. Sortarea prin inserție

- Timpul de execuție depinde de:
  - dimensiunea problemei;
  - proprietățile datelor de intrare.

- Cazul cel mai favorabil: tabloul este sortat.
  $t_j = 1, \quad j = 2, \ldots, n$
  $T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$

Exemplul 5. Sortarea prin inserție

- Timpul de execuție depinde de:
  - dimensiunea problemei;
  - proprietățile datelor de intrare.

- Cazul cel mai favorabil: tabloul este sortat.
  $t_j = 1, \quad j = 2, \ldots, n$
  $T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$

- Cazul cel mai nefavorabil: tabloul este sortat în ordine inversă.
  $t_j = j, \quad j = 2, \ldots, n$
  $T(n) = c_1 n + (n-1)(c_2 + c_3 + c_7) + c_4\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + c_5 \frac{n(n-1)}{2} + c_6 \frac{n(n-1)}{2}$
  $= \left(\frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2}\right)n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + c_7\right)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$

Exemplul 5. Sortarea prin inserție

- Timpul de execuție depinde de:
  - dimensiunea problemei;
  - proprietățile datelor de intrare.

- Cazul cel mai favorabil: tabloul este sortat.
  $t_j = 1, \quad j = 2, \ldots, n$
  $T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$

- Cazul cel mai nefavorabil: tabloul este sortat în ordine inversă.
  $t_j = j, \quad j = 2, \ldots, n$
  $T(n) = c_1 n + (n-1)(c_2 + c_3 + c_7) + c_4(\frac{n(n+1)}{2} - 1) + c_5 \frac{n(n-1)}{2} + c_6 \frac{n(n-1)}{2}$
  $= (\frac{c_4}{2} + \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2})n^2 + (c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + c_7)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$

- Cazul mediu: toate permutările au aceeași probabilitate de apariție.

- Este sortarea prin inserție un algoritm rapid?

Analiza algoritmilor

- **Cazul cel mai favorabil**
  - O margine inferioară a timpului de execuție;
  - Identificarea algoritmilor ineficienți:
    - dacă un algoritm are un cost ridicat în cazul cel mai favorabil, atunci el nu reprezintă o soluție acceptabilă.

- **Cazul cel mai nefavorabil**
  - Cel mai mare timp de execuție în raport cu toate datele de intrare posibile;
  - O margine superioară a timpului de execuție;
  - Marginea superioară este mai importantă decât cea inferioară.

Analiza în cazul mediu

- Există situații când cazul cel mai favorabil și cel mai nefavorabil sunt cazuri rare (excepții):
  - analiza în cele două cazuri nu furnizează suficientă informație.

- **Analiza în cazul mediu** furnizează informatii privind comportarea algoritmului în cazul unor date de intrare arbitrare.
  - Se bazează pe cunoașterea **distribuției de probabilitate** a datelor de intrare.
  - Cunoașterea (estimarea) probabilității de apariție a fiecăreia dintre instanțele posibile ale datelor de intrare.
  - **Timpul mediu de executie** este media timpilor de execuție corespunzatori instanțelor datelor de intrare.

Analiza în cazul mediu

- Ipoteze privind distribuția de probabilitate a datelor de intrare:
  - datele de intrare pot fi grupate în clase (timpul de execuție este același pentru datele din aceeași clasă);
  - avem m clase cu date de intrare;
  - probabilitatea de apariție a unei date din clasa k este P_k;
  - timpul de execuție pentru date din clasa k este $T_k(n)$.
- Timpul mediu de execuție este:

$$T_a(n) = P_1 T_1(n) + P_2 T_2(n) + ... + P_m T_m(n)$$

- Dacă toate clasele au aceeași probabilitate de apariție:

$$T_a(n) = (T_1(n) + T_2(n) + ... + T_m(n))/m$$

Exemplul 4. Căutarea secvențială (revizitat)

- Ipoteze:
  - probabilitatea ca v să se afle în tablou: p
    - v apare cu aceeași probabilitate pe fiecare poziție din tablou;
    - probabilitatea ca v să se afle pe poziția k: p/n;
  - probabilitatea ca v să nu se afle în tablou: $1 - p$.

- $T_a(n) = \frac{p(1+2+..+n)}{n} + (1-p)n = \frac{p(n+1)}{2} + (1-p)n = (1-\frac{p}{2})n + \frac{p}{2}$
  - dacă $p = 0.5$, atunci $T_a(n) = \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}$;
  - timpul mediu depinde liniar de dimensiunea datelor de intrare.

- Observație: timpul mediu nu este în mod necesar media aritmetică a timpilor de execuție corespunzatori cazurilor extreme.

Etapele analizei algoritmilor

1. Identificarea dimensiunii problemei.
2. Identificarea operației dominante.
3. Estimarea timpului de execuție (determinarea numărului de execuții ale operației dominante).
4. dacă timpul de execuție depinde de proprietățile datelor de intrare, atunci se analizează:
   - cazul cel mai favorabil;
   - cazul cel mai nefavorabil;
   - cazul mediu.
5. Se stabilește ordinul (clasa) de complexitate.

Analiza eficienței algoritmilor

- Scopul principal: determinarea modului în care timpul de execuție crește odată cu creșterea dimensiunii problemei.
- Nu e necesar să se cunoasca expresia detaliată a timpului de execuție
- Este suficient să se identifice:
  - **ordinul de creștere** al timpului de execuție;
  - **clasa de eficiență (complexitate)** căreia îi aparține algoritmul.

Conținut

Ordin de creștere

- **Termen dominant**: termen care devine semnificativ mai mare decât ceilalți atunci când dimensiunea problemei crește.
  - Dictează comportarea algoritmului când dimensiunea problemei crește.

Timp de execuție	Termen dominant
$T1(n) = an + b$	an
$T2(n) = a\log n + b$	$a\log n$
$T3(n) = an^2 + bn + c$	an^2
$T4(n) = a^n + bn + c$	a^n

$(a > 1)$

Ordin de creștere

- **Ordin de creștere**: caracterizează creșterea termenului dominant al timpului de execuție în raport cu dimensiunea problemei.

Ordin de creștere

- **Ordin de creștere**: caracterizează creșterea termenului dominant al timpului de execuție în raport cu dimensiunea problemei.

- Ce se întâmplă cu termenul dominant când dimensiunea problemei crește de k ori?

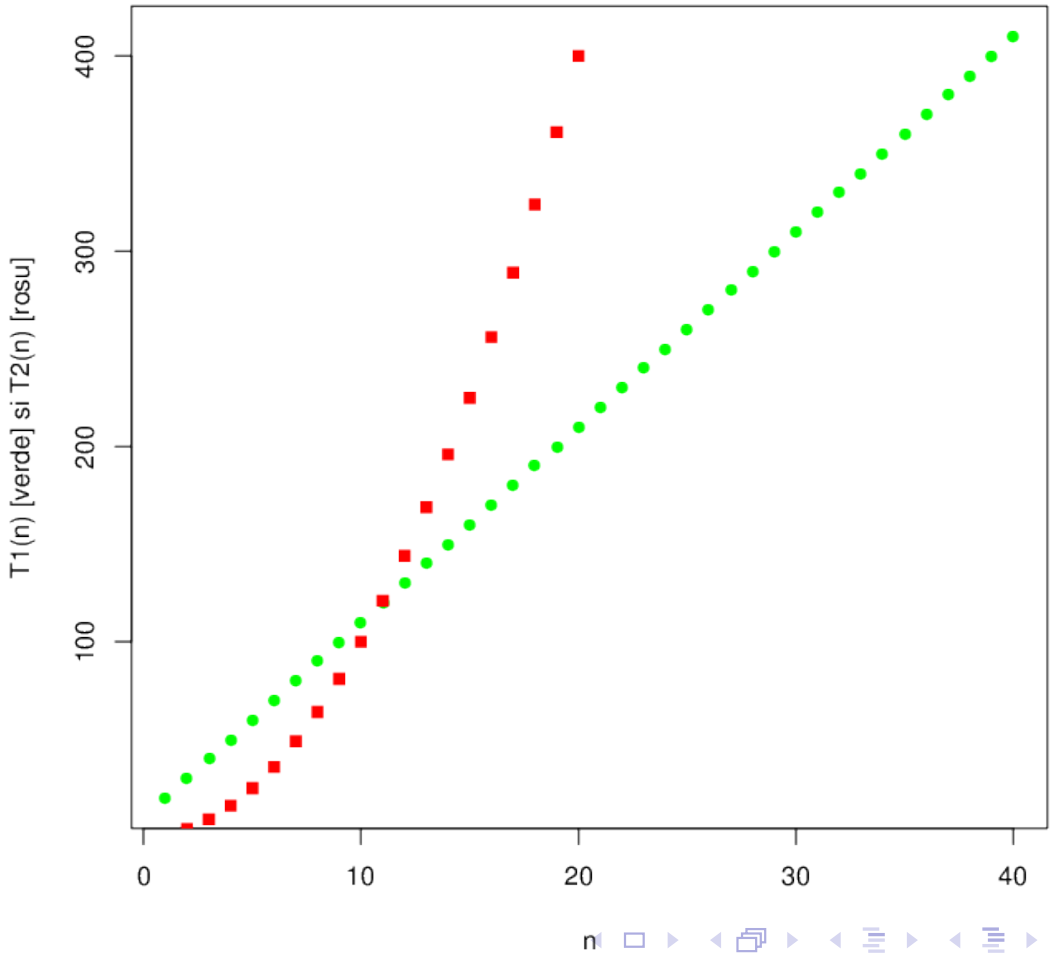
$T_1(n) = an$	$T_1'(kn) = akn$	$= kT_1(n)$	liniar
$T_2(n) = a\log n$	$T_2'(kn) = a\log(kn)$	$= T_2(n) + a\log k$	logaritmic
$T_3(n) = an^2$	$T_3'(kn) = a(kn)^2$	$= k^2 T_3(n)$	pătratic
$T_4(n) = a^n$	$T_4'(kn) = a^{kn} = (a^n)^k$	$= T_4(n)^k$	exponențial

Ordin de creștere

Permite compararea a doi algoritmi:

- algoritmul cu ordinul de creștere mai mic este mai eficient;
- comparația se realizează pentru valori mari ale dimensiunii problemei (cazul asimptotic).

Exemplu:
$T1(n) = 10n + 10$
$T2(n) = n^2$



O comparație a ordinelor de creștere

Dependența timpilor de execuție a diferiți algoritmi în raport cu dimensiunea problemei (considerăm un procesor ce realizează 10^6 instrucțiuni pe secundă); dacă timpul de execuție depașește 10^{25} ani, afișăm "nu".

n	$log_2 n$	$nlog_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	4 sec
30	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1*sec*	18 min	nu
50	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1*sec*	36 ani	nu
10^2	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	1 sec	10^{17} ani	nu
10^3	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	1 sec	18 min	nu	nu
10^4	$<$ 1 sec	$<$ 1 sec	2 min	12 zile	nu	nu
10^5	$<$ 1 sec	2 sec	3 ore	32 ani	nu	nu
10^6	$<$ 1 sec	20 sec	12 zile	31710 ani	nu	nu

Ordin de creștere

Pentru a compara ordinele de creștere a doi timpi de execuție $T1(n)$ și $T2(n)$, calculăm $lim_{n \to \infty} \frac{T1(n)}{T2(n)}$

- dacă $lim = 0$: $T1(n)$ are un ordin de creștere mai mic decât $T2(n)$;
- dacă $lim = c, c > 0$ constantă: $T1(n)$ și $T2(n)$ au același ordin de creștere;
- dacă $lim = \infty$: $T1(n)$ are un ordin de creștere mai mare decât $T2(n)$.

Conținut

Analiza asimptotică

- Analiza timpilor de execuție pentru valori **mici** ale dimensiunii problemei **nu** permite diferențierea între algoritmi eficienți si ineficienți.
- Diferențele dintre ordinele de creștere devin din ce în ce mai semnificative pe masură ce dimensiunea problemei crește.
- **Analiza asimptotică**: studiul proprietăților timpului de execuție atunci când dimensiunea problemei tinde către infinit (probleme de dimensiune mare).
  - algoritmul poate fi încadrat în diferite clase identificate prin notații: O, Ω, Θ

Ordine de creștere asimptotică. Notația O

Fie $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ două funcții care depind de dimensiunea problemei.

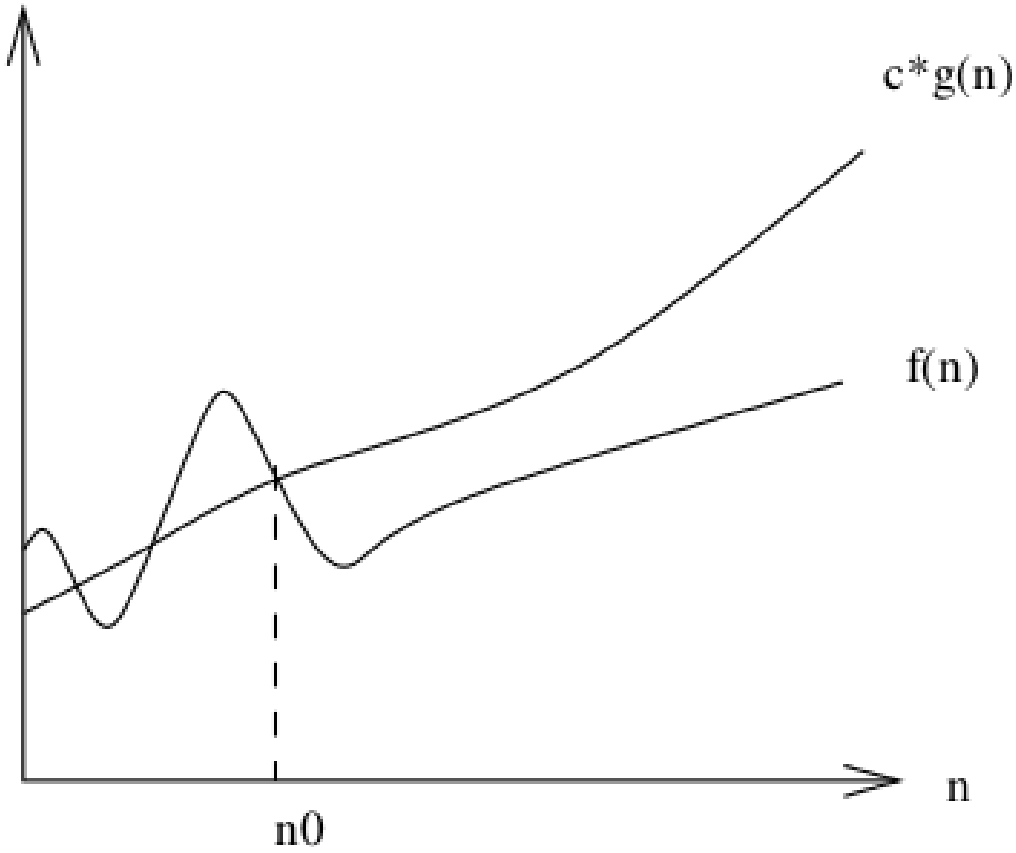
Definiție

$O(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n >= n_0, 0 <= f(n) <= cg(n)\}$.

Notație: $f(n) = O(g(n))$

($f(n)$ are un ordin de creștere cel mult egal cu cel al lui $g(n)$.)

Notația O



Pentru valori suficient de mari ale lui n, $f(n)$ este marginită superior de $g(n)$ multiplicată cu o constantă pozitivă.

Notația O

Exemple:

1. $T(n) = 3n + 3 \Rightarrow T(n) \in O(n)$
   $4n >= 3n + 3, c = 4, n_0 = 3, g(n) = n$

Notația O

Exemple:

1. $T(n) = 3n + 3 \Rightarrow T(n) \in O(n)$
   $4n >= 3n + 3, c = 4, n_0 = 3, g(n) = n$

2. $3n^2 - 100n + 6 = O(n^2)$
   $3n^2 > 3n^2 - 100n + 6$

Notația O

Exemple:

1. $T(n) = 3n + 3 \Rightarrow T(n) \in O(n)$
   $4n >= 3n + 3, c = 4, n_0 = 3, g(n) = n$

2. $3n^2 - 100n + 6 = O(n^2)$
   $3n^2 > 3n^2 - 100n + 6$

3. $3n^2 - 100n + 6 = O(n^3)$
   $0.01n^3 > 3n^2 - 100n + 6$

Notația O - proprietăți

1. $f(n) \in O(f(n))$ (reflexivitate).
2. $f(n) \in O(g(n)), g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$ (tranzitivitate).
3. Dacă $T(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + ... + a_1 n + a_0$ atunci $T(n) \in O(n^k)$ pentru orice $k >= d$.
   - exemplu: $n \in O(n^2)$
4. Dacă pentru cazul cel mai nefavorabil obținem $T(n) <= g(n)$, atunci $T(n) \in O(g(n))$.
   - Căutarea secvențială: $5 \leq T(n) \leq 3n + 2 \Rightarrow$ algoritmul este din clasa $O(n)$.

Notatia Ω

Definiție

$\Omega(g(n)) = \{f(n)$: $\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ *a.î.* $\forall n >= n_0 : f(n) \geq cg(n)\}$

Notație: $f(n) = \Omega(g(n))$

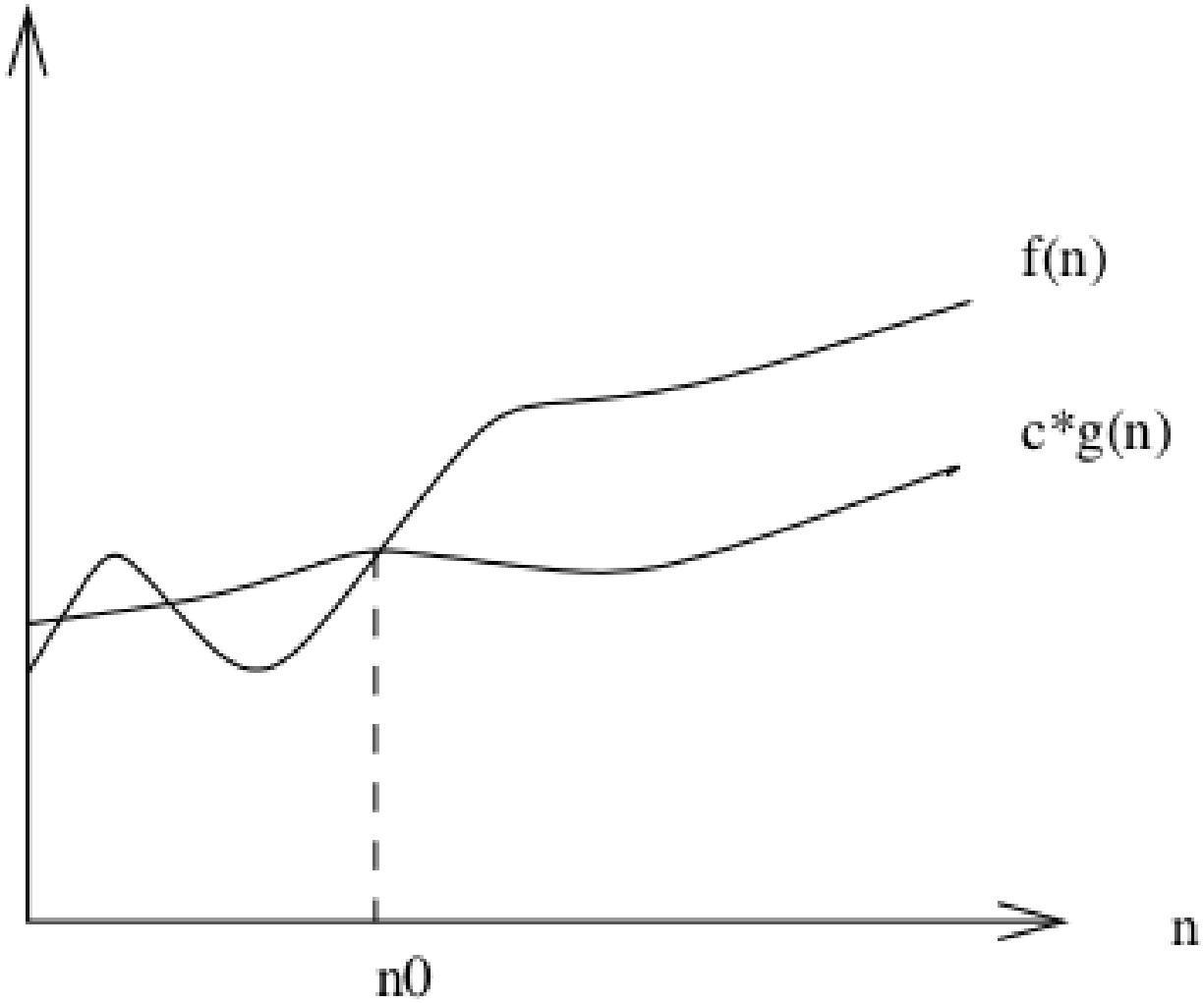
($f(n)$ are un ordin de creștere cel puțin la fel de mare ca cel al lui $g(n)$.)

Exemple:

1. $T(n) = 3n + 3 \Rightarrow T(n) \in \Omega(n)$
   $3n <= 3n + 3, c = 3, n_0 = 1, g(n) = n$

2. $5 <= T(n) <= 3n + 2 \Rightarrow T(n) \in \Omega(1)$
   $c = 5, n_0 = 1, g(n) = 1$

Notația Ω



Pentru valori mari ale lui n, funcția $f(n)$ este marginită inferior de $g(n)$ multiplicată eventual cu o constantă pozitivă.

Notația Ω - proprietăți

1. $f(n) \in \Omega(f(n))$ (reflexivitate).

2. $f(n) \in \Omega(g(n)), g(n) \in \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Omega(h(n))$ (tranzitivitate).

3. Dacă $T(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + ... + a_1 n + a_0$ atunci $T(n) \in \Omega(n^k)$ pentru orice $k <= d$.
   - exemplu: $n^2 \in \Omega(n)$

Notația Θ

Definiție

$\Theta(g(n)) =$
$\{f(n) : \exists c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}.$

Notație: $f(n) = \Theta(g(n))$

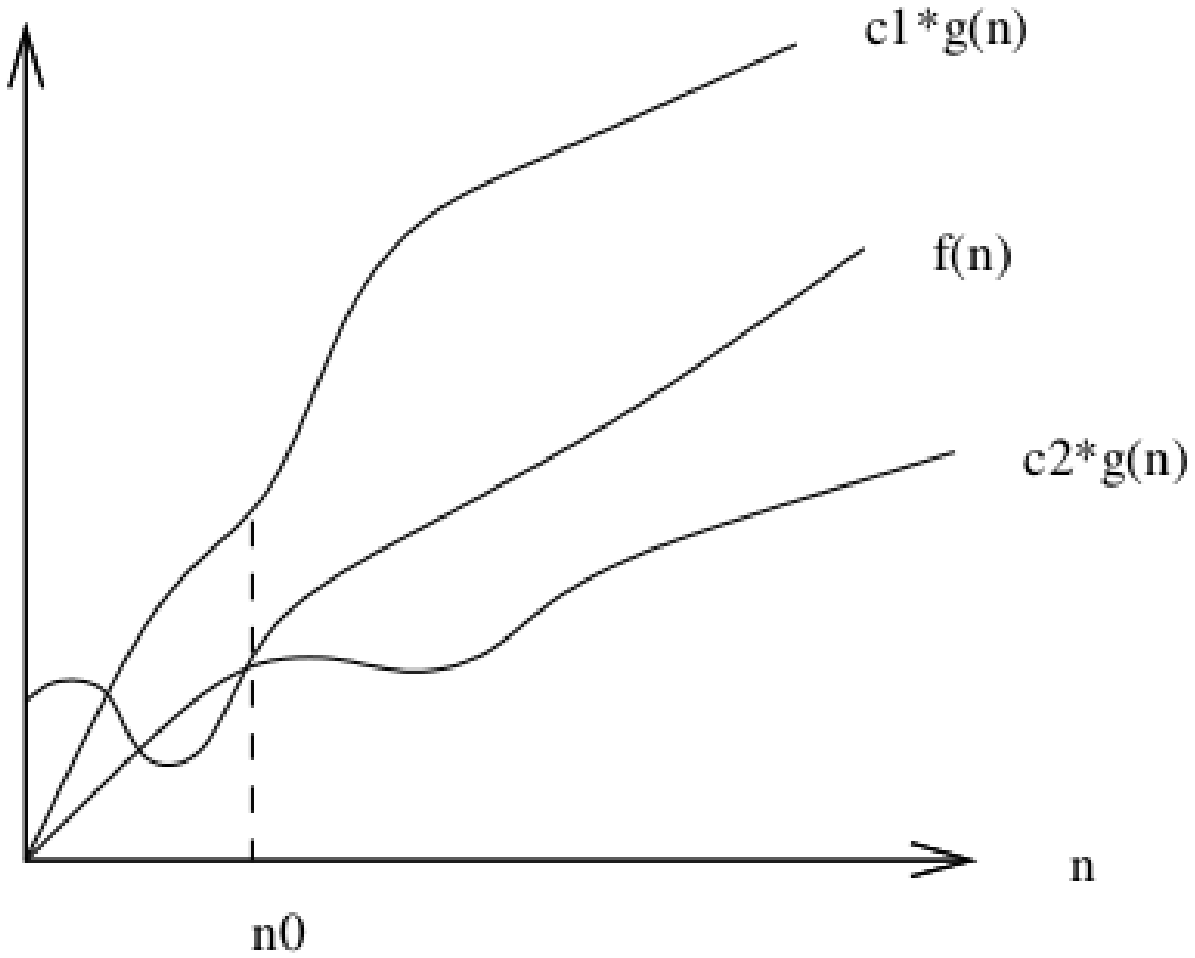
($f(n)$ are același ordin de creștere ca și $g(n)$.)

Exemple:

1. $T(n) = 3n + 3 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$
   $c_1 = 2, c_2 = 4, n_0 = 3, g(n) = n$

2. Determinarea minimului unui tablou:
   $3n <= T(n) <= 4n - 1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$
   $c_1 = 3, c_2 = 4, n_0 = 1$

Notația Θ



Pentru valori suficient de mari ale lui n, $f(n)$ este marginită, atât superior cât și inferior de $g(n)$ multiplicată cu niște constante pozitive.

Notația Θ - proprietăți

1. $f(n) \in \Theta(f(n))$ (reflexivitate).
2. $f(n) \in \Theta(g(n)), g(n) \in \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$ (tranzitivitate).
3. $f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$ (simetrie).
4. Dacă $T(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + ... + a_1 n + a_0$ atunci $T(n) \in \Theta(n^d)$.
5. $\Theta(cg(n)) = \Theta(g(n))$ pentru orice constantă c.
   Cazuri particulare:
   - $\Theta(c) = \Theta(1)$
   - $\Theta(log_a h(n)) = \Theta(log_b h(n))$ pentru orice $a, b > 1$
6. $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(max\{f(n), g(n)\})$

Notația Θ - proprietăți

7. $\Theta(g(n)) \subset O(g(n))$.

   Exemplu: $f(n) = 10n \lg n + 5, \quad g(n) = n^2$
   $f(n) \leq g(n)$ pentru orice $n \geq 36 \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$
   Dar nu există constante c și n_0 astfel încât $cn^2 \leq 10nlgn + 5$ pentru orice $n \geq n_0$.

8. $\Theta(g(n)) \subset \Omega(g(n))$.

   Exemplu: $f(n) = 10nlgn + 5, \quad g(n) = n$
   $f(n) \geq 10g(n)$ pentru orice $n \geq 1 \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$
   Dar nu există constante c și n_0 astfel încât $10nlgn + 5 \leq cn$ pentru orice $n \geq n_0$.

9. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

Notația Θ - exemple

1. Înmulțirea a două matrici: $T(m, n, p) = 4mnp + 5mp + 4m + 2$.

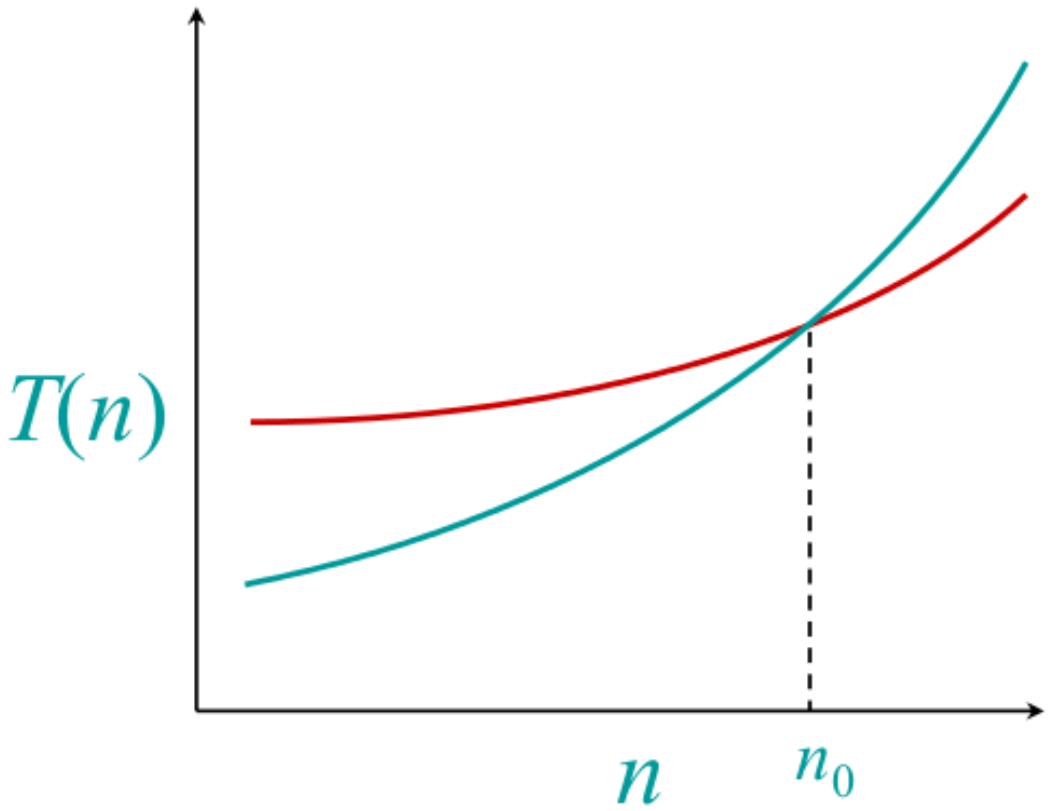
   Extinderea definiției (în cazul în care dimensiunea problemei depinde de mai multe valori):

   $f(m, n, p) \in \Theta(g(m, n, p))$ dacă există $c_1, c_2 > 0$ și $m_0, n_0, p_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $c_1 g(m, n, p) \leq f(m, n, p) \leq c_2 g(m, n, p)$ pentru orice $m \geq m_0, n \geq n_0, p \geq p_0$.

   Astfel $T(m, n, p) \in \Theta(mnp)$.

2. Căutare secvențială: $5 \leq T(n) \leq 3n + 2$.
   Dacă $T(n) = 5$ atunci nu se poate găsi c_1 astfel încât $5 \geq c_1 n$ pentru valori suficient de mari ale lui $n \Rightarrow T(n)$ nu aparține lui $\Theta(n)$.

Notația Θ - exemple



Când n este suficient de mare, un algoritm cu o complexitate $\Theta(n^2)$ este mai eficient decât unul cu complexitatea $\Theta(n^3)$.

Clasificarea algoritmilor folosind notația O

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(\log^k n) \subset O(n) \subset O(n^2) \subset \cdots \subset O(n^{k+1}) \subset O(2^n)$$

$$\begin{aligned}
\{A \mid T_A(n) = O(1)\} &= \text{clasa algoritmilor constanți;} \\
\{A \mid T_A(n) = O(\log n)\} &= \text{clasa algoritmilor logaritmici;} \\
\{A \mid T_A(n) = O(log^k n)\} &= \text{clasa algoritmilor polilogaritmici;} \\
\{A \mid T_A(n) = O(n)\} &= \text{clasa algoritmilor liniari;} \\
\{A \mid T_A(n) = O(n^2)\} &= \text{clasa algoritmilor pătratici;} \\
\{A \mid T_A(n) = O(n^{k+1})\} &= \text{clasa algoritmilor polinomiali;} \\
\{A \mid T_A(n) = O(2^n)\} &= \text{clasa algoritmilor exponențiali.}
\end{aligned}$$

$(k \geq 2)$