Cursul 9

Limite de funcţii. Continuitatea funcţiilor

Asemenea conceptului de convergenţă/divergenţă la şiruri sau serii numerice, noţiunile de limită şi continuitate pentru funcţii sunt intrinsec legate de structura topologică a spaţiului din care provin mulţimile de definiţie şi în care iau valori respectivele funcţii. Pe mulţimi amorfe, netopologizate, aplicaţiilor definite nu li se poate introduce noţiunea de limită într-un punct şi, în absenţa acesteia, nici noţiunea de continuitate într-un punct sau/şi pe o mulţime. Aceasta deoarece punctul şi, implicit, mulţimea de puncte în cauză, trebuind să fie "de acumulare" (în cazul punctului) şi, respectiv, "derivată" (în cazul mulţimii), necesită prezenţa unei structuri topologice atât pentru mulţimea de definiţie, cât şi pentru mulţimea în care ia valori aplicaţia (funcţia) vizată. Cum, în situaţia funcţiilor reale, fie ele scalar-scalare, scalar-vectoriale, vectorial-scalare sau vectorial-vectoriale (v. Cursul 7), impedimentul inexistenţei unei topologii pe oricare dintre mulţimile implicate nu are loc, se poate vorbi despre limita unor astfel de funcţii într-un punct de acumulare al mulţimii lor de definiţie, precum şi despre continuitatea lor într-un punct sau pe o mulţime de puncte din mulţimea lor de definiţie. Este exact ceea ce ne propunem aici, în cele ce urmează.

Limite de funcţii (în cadru general şi în spaţiul $\mathbb{R}^n$)

Fie (X, τ_1) şi (Y, τ_2) două spaţii topologice, $f : A \subseteq X \to Y$ o funcţie şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii A (în raport, evident, cu topologia τ_1). Aşadar $x_0 \in A'$, unde A' este mulţimea derivată corespunzătoare lui A, adică mulţimea tuturor punctelor sale de acumulare (în raport cu τ_1).

Definiţia 9.1 *Spunem că* ***funcţia*** f ***are limită în*** x_0*, fie ea* $l \in Y$*, dacă, pentru orice vecinătate* V *a lui* l $(V \in \mathcal{V}(l))$*, există o vecinătate* U *a lui* x_0 $(U \in \mathcal{V}(x_0))$*, astfel încât:*

$$\forall\, x \in (U \ \setminus \{x_0\}) \cap A \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Îndeobşte, acest fapt se notează prin $\lim\limits_{x \xrightarrow{\tau_1} x_0} f(x) \overset{\tau_2}{=} l$ sau, echivalent, prin $f(x) \xrightarrow{\tau_2} l$, când $x \xrightarrow{\tau_1} x_0$. Ori de câte ori se subînţelege în ce topologie are loc una sau / şi cealaltă dintre convergenţele ce definesc faptul că $l \in Y$ este limita funcţiei $f : A \subseteq X \to Y$ în punctul $x_0 \in A$, se va folosi notaţia mai simplă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ sau echivalenta ei: $f(x) \to l$, când $x \to x_0$.

Definiţia 9.1 nu-şi modifică semnificaţia dacă, atât pentru x_0, cât şi pentru l, în locul sistemelor generale de vecinătăţi $\mathcal{V}(x_0)$ şi respectiv $\mathcal{V}(l)$, se consideră sisteme fundamentale de vecinătăţi (v. Definiţia 6.7, a)). Astfel, avem:

Definiţia 9.2 *Funcţia* $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *are limita* $l \in Y$ *în punctul* $x_0 \in A'$ *dacă*

$$\forall\, \tilde{V} \in \mathcal{U}(l), \exists\, \tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0) \text{ astfel încât, } \forall\, x \in (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) \cap A,\ f(x) \in \tilde{V},$$

unde $\mathcal{U}(l)$ *şi* $\mathcal{U}(x_0)$ *sunt sisteme fundamentale de vecinătăţi pentru* l *şi respectiv* x_0.

Propoziţia 9.1 *Definiţiile 9.1 şi 9.2 sunt echivalente.*

Demonstraţie: Să admitem, pentru început, că are loc Definiţia 9.1. Considerând o vecinătate oarecare $\tilde{V}$, din sistemul fundamental $\mathcal{U}(l)$, avem $\tilde{V} \in \mathcal{V}(l)$, deoarece $\mathcal{U}(l) \subseteq \mathcal{V}(l)$.Atunci, în conformitate cu Definiţia 9.1, pentru $\tilde{V}$, există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, aşa încât, $\forall\, x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$, avem $f(x) \in \tilde{V}$. În acelaşi timp, întrucât $\mathcal{U}(x_0)$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x_0, se poate conta pe faptul că, pentru $U \in \mathcal{V}(x_0)$, există $\tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$ aşa încât $\tilde{U} \subseteq U$.

Atunci, $\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l)$ avem $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ şi deci $f(x) \in \tilde{V}$. Aşadar, $\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l)$, $\exists \tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$ astfel încât $\forall x \in \left(\tilde{U} \setminus \{x_0\}\right) \cap A \Rightarrow f(x) \in \tilde{V}$. Adică are loc Definiţia 9.2.

Reciproc, presupunând că are loc Definiţia 9.2 şi considerând o vecinătate arbitrară V a lui l ($V \in \mathcal{V}(l)$), se poate deduce că, întrucât $\mathcal{U}(l)$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru l, există $\tilde{V} \subseteq V$, cu $\tilde{V} \in \mathcal{V}(x_0)$ (deci, la urma urmelor, $\tilde{U}$ din $\mathcal{V}(x_0)$) aşa încât, pentru orice $x \in \left(\tilde{U} \setminus \{x_0\}\right) \cap A$, avem $f(x) \in \tilde{U}$. Deci are loc Definiţia 9.1. ◀

Observaţie: Prin negarea oricăreia dintre definiţiile echivalente 9.1 şi 9.2, se obţine o caracterizare a situaţiei în care elementul l din Y nu este limita funcţiei $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ în punctul $x_0 \in A'$. Astfel, de exemplu, pe baza negaţiei relativă la Definiţia 9.1, deducem că $l \in Y$ *nu este* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *dacă şi numai dacă există* $V_0 \in \mathcal{V}(l)$ *astfel încât, pentru orice* $U \in \mathcal{V}(x_0)$***,*** *există* $x_U \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$***,*** *cu proprietatea că* $f(x_U) \notin V_0$***.*** Notăm acest lucru prin: $f(x) \nrightarrow l$, când $x \to x_0$.

Definiţia 9.3 *Se spune că **funcţia** $f : A \subseteq (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ **are limită** într-un punct $x_0 \in A'$ dacă există $l \in Y$ astfel încât, în conformitate cu Definiţia 9.1 (sau echivalent, Definiţia 9.2), avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

În cazul în care topologiile τ_1 şi τ_2 sunt induse de nişte metrici, $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ şi respectiv $d_2 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ (adică (X, d_1) şi (Y, d_2) sunt spaţii metrice), am putea considera mulţimile sferelor (deschise) din X şi, corespunzător, Y în rolul sistemelor fundamentale de vecinătăţi din Definiţia 9.2. Atunci am avea următoarea formulare în postura Definiţiei 9.2.

Definiţia 9.4 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$, unde d_1 este o metrică pe X, iar d_2 o metrică pe Y. Elementul l este **limita funcţie** f **în punctul** x_0 dacă $\forall S_{d_2}(l; \varepsilon)$, $\exists S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$ astfel încât $\forall x \in (S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$ are loc: $f(x) \in S_{d_2}(l, \varepsilon)$.*

Altfel spus, ţinând seama de semnificaţia mulţimilor $S_{d_2}(l; \varepsilon)$ şi $S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$, elementul l este limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ aşa încât, } \forall x \in A \text{ pentru care } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon), \text{ rezultă } d_2(f(x), l) < \varepsilon.$$

Pentru situaţia în care X şi Y ar fi înzestrate cu norme, $\|\cdot\|_X$ pe X şi $\|\cdot\|_Y$ pe Y, adică pentru cazul în care $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ar fi spaţii normate, distanţele d_1 şi d_2 ar fi definite prin intermediul normelor $\|\cdot\|_X$ şi $\|\cdot\|_Y$, iar Definiţia 9.4 ar avea următorul enunţ:

Definiţia 9.5 *Fie $f : A \subseteq (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$. Avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ aşa încât, } \forall x \in A \text{ pentru care } 0 < \|x - x_0\|_X < \delta(\varepsilon), \text{rezultă } \|f(x) - l\|_Y < \varepsilon.$$

Observaţie: Când $X = \mathbb{R}^n$ şi $Y = \mathbb{R}^m$ (cu $n, m \in \mathbb{N}^*$), oricare dintre definiţiile 9.1 - 9.5 funcţionează în raport cu diverse topologii, τ_1 pe $\mathbb{R}^n$ şi τ_2 pe $\mathbb{R}^m$ (cum ar fi, de pildă, topologiile uzuale), ori în raport cu diverse metrici, d_1 pe $\mathbb{R}^n$ şi d_2 pe $\mathbb{R}^m$ (cum sunt, de exemplu, metricile euclidiană şi minkowskiană, de ordin $p \in (0, +\infty)$) sau în raport cu diferite norme, $\|\cdot\|_\#$ pe $\mathbb{R}^n$ şi $\|\cdot\|_o$ pe $\mathbb{R}^m$.

În cazul în care X şi Y sunt spaţii metrice, limita l este, după cum se poate arăta, unică. Astfel, are loc următorul rezultat:

Teorema 9.1 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subseteq X$ ($A \neq \varnothing$), $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$. Dacă există, atunci limita funcţiei f în punctul x_0 este unică.*

Demonstraţie: Admitem că există l_1 şi l_2 în Y , $l_1 \neq l_2$, aşa încât $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Cum $l_1 \neq l_2$, avem $d_2(l_1, l_2) > 0$. Atunci, luând $\epsilon = \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$ în Definiţia 9.4, rezultă că există $\delta(\epsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \delta(\epsilon)$, are loc relaţia: $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. În acelaşi timp, există $\widetilde{\delta}(\epsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \widetilde{\delta}(\epsilon)$, are loc: $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. În consecinţă, pentru $\epsilon = \frac{d_2(l_1,l_2)}{3} > 0$, există $\widehat{\delta}(\epsilon) = min\{\delta(\epsilon), \widetilde{\delta}(\epsilon)\}$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \widehat{\delta}(\epsilon)$, au loc, simultan, relaţiile $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$ şi $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. Cum $d_2(l_1, l_2) \leq d_2(f(x), l_1) + d_2(f(x), l_2)$, s-ar ajunge la anomalia: $d_2(l_1, l_2) < \frac{2d_2(l_1,l_2)}{3}$. Aşadar, de fapt, elementul l_1 trebuie să fie egal cu l_2 şi nu diferit. ◀

Tot în cadrul spaţiilor metrice, are loc următoarea caracterizare a existenţei limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema 9.2 *Fie* $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $x_0 \in A'$ *şi* $l \in Y$. *Avem* $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *dacă şi numai dacă*

$$\forall\, (x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\},\ \textit{cu}\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \textit{are loc}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Demonstraţie: Dacă $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, atunci, potrivit Definiţiei 9.4, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $d_2(f(x), l) < \varepsilon$. Deoarece x_0 este punct de acumulare pentru A, în conformitate cu Propoziţia 6.9, există cel puţin un şir $(x_n)_{n \geq 0}$, din $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. De altfel, pentru orice şir $(x_n)_{n \geq 0}$ cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$ şi cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem: pentru $\tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $d_1(x_n, x_0) < \tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$. În virtutea acesteia, avem $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$. Prin urmare, combinând faptul că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ cu faptul că $x_n \longrightarrow x_0$, pentru $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, am obţinut: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \mid \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$. Asta înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Reciproc, presupunând că, $\forall (x_n)_{n \geq 0} \subset A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$ şi, totodată, prin reducere la absurd, admiţând că $f(x) \nrightarrow l$, când $x \to x_0$, adică există $\epsilon_0 > 0$, aşa încât, $\forall \delta > 0$, $\exists\, x_\delta \in A \setminus \{x_0\}$, cu $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$ şi $d_2(f(x_\delta), l) \geq \epsilon_0$, vedem că, pentru $\delta = \frac{1}{n}$, cu n arbitrar din N^*, există x_n în $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $d_1(x_n, x_0) < \delta$ şi $d_2(f(x_n), l) \geq \epsilon_0 > 0$. Deducem astfel că există un şir $(x_n)_{n \geq 0} \subset A \setminus \{x_0\}$ încât $x_n \longrightarrow x_0$, pentru $n \to \infty$ şi totuşi $f(x_n) \nrightarrow l$, când $n \to \infty$, în contradicţie cu ipoteza. Prin urmare, în realitate, $f(x) \overset{\tau_{d_2}}{\to} l$, când $x \overset{\tau_{d_1}}{\to} x_0$. ◀

Observaţii:

1) Funcţia $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nu are limită într-un punct $x_0 \in A'$ ori de câte ori putem pune în evidenţă un şir $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, pentru care şirul $(f(x_n))_{n \geq 0} \subseteq Y$ nu are limită.

2) Atunci când se pot determina două şiruri, $(x'_n)_{n \geq 0}$ şi $(x''_n)_{n \geq 0}$, din $A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$, pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = l_1 \in Y$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = l_2 \in Y$, iar $l_1 \neq l_2$, putem susţine că f nu are limită în punctul $x_0 \in A'$.

   De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin
   $$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$
   nu are limită în punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$, punct care este de acumulare pentru $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Într-adevăr, pentru şirul $\left((x'_n, y'_n)\right)_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$, convergent la $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ (când $n \to \infty$), avem $f(x'_n, y'_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2} = l_1$, când $n \to \infty$, în timp ce, pentru şirul $\left((x''_n, y''_n)\right)_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$, convergent şi el la $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, avem $f(x''_n, y''_n) = \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{n}{n^2+1} \to 0 = l_2 \neq l_1$, când $n \to \infty$.

Propoziţia 9.2 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) spaţii metrice, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$, $f : A \to Y$ şi $g : A \to \mathbb{R}_+$. Dacă*

i) există $l \in Y$ astfel încât $d_2(f(x), l) \leq g(x)$, $\forall\, x \in A$

şi

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Demonstraţie: Pentru acest rezultat (care poate fi considerat un ***criteriu pentru existenţa***, cu o anumită valoare, a ***limitei unei funcţii într-un punct***), demonstraţia decurge, pe baza ipotezelor i) şi ii), după cum urmează. Din ii), rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in (S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$ (adică $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$), avem $0 < g(x) < \varepsilon$. Folosind şi i), deducem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $0 \leq d_2(f(x), l) \leq g(x) < \varepsilon$. Cu alte cuvinte, $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ◀

Un ***alt criteriu*** pentru existenţa limitei unei funcţii într-un punct, în cadrul spaţiilor metrice, este cel prezentat de teorema ce urmează:

Teorema 9.3 ***(Cauchy-Bolzano)***
Fie (X, d_1) un spaţiu metric, (Y, d_2) un spaţiu metric complet, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$. Funcţia f are limită în punctul x_0 dacă şi numai dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \textit{astfel încât}\ \forall\, x', x'' \in A \setminus \{x_0\},\ \textit{cu}\ d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)\ \textit{şi}\ d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon), \textit{avem}$$

$$d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Demonstraţie: Dacă f are limită în x_0, atunci există $l \in Y$ astfel încât $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, adică, potrivit Definiţiei 9.4 (în limbajul "$\varepsilon - \delta$"), avem:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ aşa încât } \forall\, x \in A,\ \text{cu } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici, luând x' şi x'' din $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)$ şi $d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$, obţinem: $d_2(f(x'), f(x'')) \leq d_2(f(x'), l) + d_2(f(x''), l) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Prin urmare, tocmai caracterizarea din enunţ.

Reciproc, dacă are loc caracterizarea din enunţ, pentru existenţa limitei lui f în x_0, deducem că, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ care este convergent la x_0, avem:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ şi $\exists\, n_\varepsilon = n\,(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \geq n_\varepsilon$, au loc relaţiile $d_1(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon)$ şi $d_1(x_m, x_0) < \delta(\varepsilon)$, pe baza cărora rezultă că $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Reţinem de aici că, în condiţiile în care $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ este un şir convergent la x_0, şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy în Y. Cum (Y, d) este un spaţiu metric complet, rezultă că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$. Tot condiţia Cauchy din enunţ ne asigură că l este limita şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ care este convergent la x_0. Aceasta deoarece, dacă, prin absurd, ar exista $(x'_n)_{n\geq 1}$şi $(x''_n)_{n\geq 1}$ din $A \setminus \{x_0\}$, şiruri convergente (în X) la x_0 , astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$, atunci, prin folosirea condiţiei menţionate, ar rezulta: $0 \leq d_2(l_1, l_2) < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Deci $l_1 = l_2$. ◀

Propoziţia 9.3 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $A \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A'$. Dacă f are limită în punctul x_0, atunci există o vecinătate V_0 a lui x_0 încât restricţia funcţiei f la $(A \cap V_0) \setminus \{x_0\}$ este mărginită.*

Demonstraţie: Utilizând Definiţia 9.4 (cu vecinătăţi sferice), deducem că dacă f are limita $l \in Y$ în punctul x_0, atunci, pentru $S_{d_2}(l, 1)$, există $V_0 = S_{d_1}(x_0, \delta(1)) \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, pentru orice x din $A \cap (V_0 \setminus \{x_0\})$, avem $f(x) \in S_{d_2}(l, 1)$, adică $d_2(f(x), l) \leq 1$, ceea ce înseamnă că $f|_{(A\cap V_0)\,\setminus\,\{x_0\}}$ este mărginită. ◀

Propoziţia 9.4 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-spaţiu normat, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$.*

i) Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, atunci există şi $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{0}_Y$.

iii) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq \mathbf{0}_Y$, atunci există $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, $\forall\, x \in (A\cap V_0) \setminus \{x_0\}$.

Demonstraţie: i) Faptul că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ implică, pentru orice $\varepsilon > 0$, existenţa unui $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, oricare ar fi $x \in A$, cu $0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$. Dar cum $|\|f(x)\| - \|l\|| \leq \|f(x) - l\|$, deducem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, cu $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $|\|f(x)\| - \|l\|| < \varepsilon$. Deci există $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

ii) Cum $\|f(x) - \mathbf{0}_Y\| = \|f(x)\|$, $\forall\, x \in A$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = 0$, prin aplicarea Propoziţiei 9.2 şi a Teoremei 9.1, rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există şi este egală cu $\mathbf{0}_Y$.

iii) Întrucât $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, atunci $\|l\| > 0$ şi, pentru $\varepsilon = \|l\|$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $\forall\, x \in (S_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap A) \setminus \{x_0\}$, avem $\|f(x) - l\| < \|l\|$, de unde: $\|f(x)\| \leq \|f(x) - l\| < 2\|l\|$. Există deci $V_0 = S_d(x_0, \delta(\|l\|))$, astfel încât f este mărginită pe $(V_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ şi diferită de $\mathbf{0}_Y$, întrucât, în conformitate cu i), avem $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)\| = \|l\| \neq 0$, ceea ce înseamnă că, cel puţin pe o submulţime a lui V_0, tot din $\mathcal{V}(x_0)$, f nu se anulează. ◀

Propoziţia 9.5 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$un $\mathbb{R}$-spaţiu normat, $\varnothing \neq A \subseteq X$ şi $x_0 \in A'$.*

i) Dacă $f, g : A \to Y$ sunt astfel încât există $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, atunci, pentru orice α şi $\beta \in \mathbb{R}$, funcţia $\alpha f + \beta g$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha f + \beta g) = \alpha l_1 + \beta l_2.$$

ii) Dacă $f : A \to Y$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ sunt astfel încât există $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $\alpha = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, atunci funcţia $\varphi \cdot f : A \to Y$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} (\varphi \cdot f)(x) = \alpha \cdot l.$$

Demonstraţie: i) Se ţine seama că $\|\alpha f(x)+\beta g(x)-\alpha l_1-\beta l_2\| \le |\alpha|\|f(x)-l_1\|+|\beta|\|g(x)-l_2\|$ şi se aplică existenţa limitelor $l_1=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $l_2=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ii) Se are în vedere faptul că $\|\varphi(x)f(x)-\alpha l\| = \|(\varphi(x)-\alpha)f(x)+\alpha(f(x)-l)\| \le \|f(x)\||\varphi(x)-\alpha|+|\alpha|\|f(x)-l\|$ şi se aplică, odată cu caracterizarea existenţei limitelor implicate (în limbajul " $\varepsilon-\delta$ "), Propoziţia 9.3. ◀

Observaţie: Atât teoremele 9.1 - 9.3, cât şi propoziţiile 9.1 - 9.5 se aplică şi cazului funcţiilor reale, în care, în particular, $X=\mathbb{R}^k$ şi $Y=\mathbb{R}^m$, aceste spaţii fiind, după caz, privite ca nişte spaţii metrice sau normate în mod corespunzător.

Un rezultat specific funcţiilor reale cu valori în $\mathbb{R}^n$ este următorul.

Teorema 9.4 *Fie $A\subseteq\mathbb{R}^k$, $A\neq\varnothing$, $x_0\in A'$ şi $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$, unde $f_i:A\to\mathbb{R}$, $\forall\, i=\overline{1,m}$. Atunci f are limita $l=(l_1,l_2,\ldots,l_m)\in\mathbb{R}^m$ în punctul x_0 dacă şi numai dacă există simultan $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)=l_i$, $\forall\, i=\overline{1,m}$.*

Demonstraţie: Rezultatul acesta se obţine pe baza Teoremei 9.2, de caracterizare a limitei lui f în x_0 prin şiruri şi pe baza faptului că, în $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^m$, convergenţa unui şir de elemente echivalează cu convergenţa lui pe coordonate. ◀

Teorema 9.5 ***(Principiul substituţiei)***

Fie $(X,d_1),(Y,d_2),(Z,d_3)$ spaţii metrice, $\varnothing\neq A\subseteq X$, $\varnothing\neq B\subseteq Y$, $x_0\in A'$, $y_0\in B'$, $f:A\to B$ şi $g:B\to Z$. Dacă:

j) $y_0=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

jj) $f(x)\neq y_0$, $\forall\, x\in A\setminus\{x_0\}$ *şi*

jjj) $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=l\in Z$,

atunci funcţia compusă $g\circ f:A\to Z$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to x_0} g(f(x))=l.$$

Demonstraţie: Cum $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=l$, rezultă că $\forall\, W\in\mathcal{V}(l)$, $\exists\, V$ din $\mathcal{V}(y_0)$ aşa încât $\forall\, y\in(V\setminus\{y_0\})\cap B$, avem $g(y)\in W$. În acelaşi timp, deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ şi f ia valori în $B\setminus\{y_0\}$, înseamnă că, pentru V, există $U\in\mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, pentru orice x din $(U\setminus\{x_0\})\cap A$, să avem $f(x)\in(V\setminus\{y_0\})\cap B$. Prin urmare, $\forall\, W\in\mathcal{V}(l)$, $\exists\, U\in\mathcal{V}(x_0)$ aşa încât, oricare ar fi $x\in(U\setminus\{x_0\})\cap A$ să aibă imaginea sa prin $g\circ f$ în W. Deci $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=l$. ◀

În afară de noţiunea de ***limită globală*** a unei funcţii $f:A\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ (cu $p,q\in\mathbb{N}^*$) într-un punct $x_0\in A'$, noţiune introdusă prin una dintre definiţiile 9.1 - 9.5, există, în cazul unei astfel de funcţii reale, când $p\ge 2$, şi conceptul de ***limită iterată***, definită după cum urmează.

Pentru funcţia vectorială de p variabile rale $(p\ge 2)$ $f:A\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, fie ***funcţiile*** sale ***parţiale***

$$f_{[k]}:x_k\mapsto f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_p),\forall\, k=\overline{1,p}$$

care sunt definite pe $A_{[k]}=\{x_k\in\mathbb{R}\mid(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in A\}$ şi cu valori în $\mathbb{R}^q$, $\forall\, k=\overline{1,p}$.

În cazul în care x_k^0 este un punct de acumulare al mulţimii $A_{[k]}$ ($k \in \{1, 2, \ldots, p\}$), se poate vorbi despre existenţa limitei $\lim\limits_{x_k \to x_k^0} f_{[k]}(x_k)$ care ar fi să fie un element din $\mathbb{R}^q$ ce depinde parametric de celelalte variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p$. S-ar putea apoi considera limita

$$\lim_{x_j \to x_j^0} \left(\lim_{x_k \to x_k^0} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_p) \right), k, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Aceasta va depinde de celelalte $p-2$ variabile ($i = \overline{1,p}$) diferite de x_j şi x_k. În fine, dacă se consideră limitele după toate variabilele x_i ($i = \overline{1,p}$), luate pe rând, atunci

$$(*) \lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} \left(\lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^0} \left(\ldots \lim_{x_{i_p} \to x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ldots \right) \right), \text{ cu } \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} = \{1, 2, \ldots, p\},$$

va reprezenta un element din $\mathbb{R}^q$ care nu mai depinde de nici una dintre variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Definiţia 9.6 *Limita* $(*)$ *se numeşte* ***limita iterată a funcţiei*** $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, ***în punctul*** $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in A'$, ***în ordinea*** $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$.

Observaţie: Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se poate vorbi despre $p!$ limite iterate, într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$. De exemplu, pentru cazul $p = 3$, limitele iterate în cauză sunt următoarele:

$$l_{123} = \lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{132} = \lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right),$$

$$l_{213} = \lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{231} = \lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right),$$

$$l_{312} = \lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{321} = \lim_{x_3 \to x_3^0} \left(\lim_{x_2 \to x_2^0} \left(\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right).$$

Acestea sunt limitele funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^q$ atunci când x_1, x_2 şi x_3 tind succesiv la x_1^0, x_2^0 şi x_3^0, în fiecare dintre cele $3!$ (adică 6) ordini (i_1, i_2, i_3) posibile.

Propoziţia 9.6 *Dacă, pentru o funcţie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *în* $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in A'$, *există atât o limită iterată* $l_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = \lim\limits_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} \left(\lim\limits_{x_{i_2} \to x_{i_2}^0} \left(\ldots \lim\limits_{x_{i_p} \to x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ldots \right) \right)$, *cât şi limita globală* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *atunci* $l = l_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$.

Demonstraţie: Existenţa limitei $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ şi $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$) se interpretează prin aceea că, $\forall \varepsilon > 0$, există o vecinătate a lui x_0, fie ea notată cu U, astfel încât, pentru orice $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ din $(U \cap A) \setminus \{\mathrm{x}_0\}$, avem $\|f(x_1, x_2, \ldots, x_p) - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ (unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ este o normă (de exemplu una euclidiană) pe $\mathbb{R}^q$. De aici, prin trecere la limită, succesiv după $x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \ldots, x_{i_1}$, la respectiv $x_{i_p}^0, x_{i_{p-1}}^0, \ldots$ şi $x_{i_1}^0$, obţinem, atâta timp cât există limita iterată $l_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$, că are loc relaţia $\|l_{i_1, i_2, \ldots, i_p} - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, ceea ce denotă că, datorită arbitrarietăţii lui ε, avem $l_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = l$. ◀

Observaţii:

a) Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ are două limite iterate diferite într-un acelaşi punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, atunci f nu are limită globală în punctul respectiv.

b) Dacă există numai o parte dintre limitele iterate ale unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, nu înseamnă că există şi celelalte limite iterate. Cu atât mai puţin că există limita globală a lui f în x_0.

c) Chiar dacă toate limitele iterate există şi sunt egale, nu se poate afirma că există limita globală. De exemplu, funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definită prin $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2+(x_1-x_2)^2}$, are limitele iterate $l_{12} = \lim\limits_{x_1\to 0}\left(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)\right) = 0 = \lim\limits_{x_2\to 0}\left(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)\right) = l_{21}$, dar nu şi limita globală $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$, deoarece există şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ pentru care $f\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = l_1$ şi $f\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = l_2 \neq l_1$.

d) Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, este posibil să nu existe limitele iterate într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi totuşi să existe limita globală, a lui f, în acel punct. Este, de exemplu, cazul funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,definită prin $f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)\sin\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_2}$, $\forall\,(x_1,x_2) \in A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0$ şi $x_2 \neq 0\}$. Pentru această funcţie, nu există l_{12} şi nici l_{21}, deoarece nu există $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$. În schimb, pe baza relaţiei $0 \le |f(x_1,x_2)| = \left|(x_1+x_2)\sin\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_2}\right| \le |x_1+x_2|, \forall\,(x_1,x_2) \in A$, prin trecere la limită ($(x_1,x_2) \to (0,0)$), se obţine faptul că există $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = 0$.

Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pe lângă noţiunile de limită globală şi limită iterată într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, se mai poate vorbi despre *limită după o direcţie dată* şi *limită parţială* în x_0. În acest sens, are loc definiţia care urmează.

Definiţia 9.7 *a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde $A \neq \varnothing$, $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^p$. Se spune că funcţia f are* ***limită în*** x_0, ***după direcţia*** u, *dacă funcţia $t \mapsto f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})$, cu $t \in \{t \ge 0 \mid \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \in A\} \neq \varnothing$, are limită în $t = 0$, adică dacă există $l_{\mathrm{u}}^0 \in \mathbb{R}^q$ astfel încât:*

$$l_{\mathrm{u}}^0 = \lim_{t\searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}).$$

b) Când $u = \mathbf{e}_k = (0,\ldots,0,\overset{k}{1},0,\ldots,0)$, $k \in \{1,2,\ldots,p\}$, atunci $l_{\mathbf{e}_k}^0$ se numeşte ***limita parţială a funcţiei*** f ***în punctul*** x_0.

Nu pentru orice funcţie se poate defini limita într-un punct după o direcţie u sau $\mathbf{e}_k$, $k \in \{1,2,\ldots,p\}$, deoarece mulţimea $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \in A\}$, respectiv mulţimea $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k \in A\}$, ar putea fi mulţimea vidă sau 0 ar putea să nu fie punct de acumulare pentru asemenea mulţimi, ori, pur şi simplu, să nu existe limita în cauză. Totuşi, dacă există limita globală, atunci se poate vedea că există şi limita după orice direcţie, în conformitate cu următorul rezultat.

Propoziţia 9.7 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A \neq \varnothing$, $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^p$, aşa încât x_0 să fie punct de acumulare şi pentru mulţimea $A \cap \{\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u} \mid t \ge 0\} \neq \varnothing$. Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(\mathrm{x})$ şi este egală cu $l \in \mathbb{R}^q$, atunci există şi $\lim\limits_{t\searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) = l_{\mathrm{u}}$ şi avem $l_{\mathrm{u}} = l$.*

Demonstraţie: Pentru orice şir $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, cu $t_n \to 0$, când $n \to \infty$, avem $\mathrm{x}_n = \mathrm{x}_0 + t_n\mathrm{u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{x}_0$. În plus, deducem că

$$l_{\mathrm{u}} = \lim_{t_n\to 0} f(\mathrm{x}_0 + t_n\mathrm{u}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

◀

În particular, pentru $\mathrm{u} = \mathbf{e}_k$, Propoziţia 9.7 se referă la raportul dintre limita globală a lui f în x_0 şi limita parţială, de rang k, a lui f în x_0, precizând că, dacă există $l = \lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$, atunci există şi $l_k = \lim\limits_{t\searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k)$ şi $l = l_k$.

Observaţie: Existenţa limitei după una sau mai multe direcţii (chiar şi după toate direcţiile posibile) nu garantează existenţa limitei globale a unei funcţii într-un punct. Astfel, de exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. nu are, după cum am văzut deja, limită globală în punctul $(0,0)$, dar are limită după orice direcţie $\mathrm{u} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, căci:

$$\lim_{t\searrow 0} f(0 + tu_1, 0 + tu_2) = \lim_{t\searrow 0} \frac{t^2 u_1 u_2}{t^2(u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Când $\mathrm{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ sau $\mathrm{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$, limitele parţiale ale acestei funcţii în punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ sunt egale cu 0.

Pentru funcţii reale de argument scalar $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ se poate vorbi şi despre noţiunea de ***limită laterală*** într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$. Mai exact, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este un ***punct de acumulare la stânga*** pentru A, adică, prin definiţie, punct de acumulare pentru mulţimea $A \cap \{x < x_0\}$, atunci spunem că f are ***limită la stânga în*** x_0, notată cu l_s (sau cu $f(x_0^-)$, ori $f(x_0 - 0)$) dacă $f_{|A\cap\{x<x_0\}}$ are limită globală în x_0, în sensul Definiţiei 9.1. Tot aşa, dacă x_0 este un ***punct de acumulare la dreapta*** pentru A, adică punct de acumulare al mulţimii $\{x \in A \mid x > x_0\}$, atunci se spune că f are limită la dreapta în x_0, notată cu l_d (sau cu $f(x_0^+)$ ori $f(x_0 + 0)$) dacă $f_{|A\cap\{x>x_0\}}$ are limită (globală) în x_0, în sensul aceleiaşi Definiţii 9.1. Evident, ţinând seama de Teorema 9.2 şi de definiţiile de imediat-mai-sus pentru limitele la dreapta şi la stânga (în cazul $p = 1$), se poate face caracterizarea limitei laterale a unei funcţii reale scalar-scalare sau scalar-vectoriale şi prin intermediul şirurilor adecvat adaptate contextului.

Astfel, se poate arăta că l_s (respectiv l_d) $\in \mathbb{R}^q$ este limita la stânga (respectiv la dreapta) a unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ într-un punct x_0 de acumulare la stânga (respectiv la dreapta) a lui A dacă şi numai dacă, pentru orice şir strict crescător (respectiv descrescător) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$, cu $x_n \to x_0$, are loc $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^q} l_s$ (respectiv l_d).

De asemenea, tot pe baza Teoremei 9.2, ca şi în cazul funcţiilor reale scalar-scalare, se poate vedea că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ are limită (globală) într-un punct de acumulare x_0 a lui A dacă şi numai dacă există atât limita la dreapta (când este posibil), cât şi limita la stânga (tot când este posibil) a lui f în x_0 şi cele două limite laterale sunt egale.

În general, din punct de vedere practic, pentru funcţiile reale scalar-scalare sau scalar-vectoriale (luate pe componente), calculul limitei într-un punct se realizează, mai ales în cazuri de nedeterminare, prin folosirea unor limite remarcabile (fundamentale), cum sunt următoarele:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e; \quad \lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a}\ \ (0 < a \neq 1); \quad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1; \quad \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e; \quad \lim_{t\to 0}\frac{a^t - 1}{t} = \ln a \quad (0 < a \neq 1); \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1; \quad \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t} = 1;$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^r - 1}{t} = r\ \ (r \in \mathbb{R}); \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1.$$

Continuitatea funcţiilor

După cum am menţionat deja în introducere, continuitatea funcţiilor se leagă, conceptual, de noţiunea de structură topologică a spaţiilor implicate în definirea acelor funcţii. Mai precis, continuitatea unei funcţii într-un punct al mulţimii ei de definiţie sau pe o mulţime, parte proprie sau chiar improprie, dar nevidă, a mulţimii de definiţie în cauză, este strâns legată de existenţa limitei în respectivul punct (corespunzător, în toate punctele submulţimii vizate) şi de egalitatea valorii ei cu valoarea funcţiei în punct (respectiv, în punctele mulţimii considerate).

Definiţia 9.8 *Fie (X,τ_1) şi (Y,τ_2) două spaţii topologice, iar A o parte nevidă a lui X. De asemenea fie $f : A \to Y$, $x_0 \in A$ şi $\widetilde{A} \subseteq A$, cu $\widetilde{A} \neq \varnothing$.*

i) ***Funcţia*** *f se numeşte* ***continuă în*** *x_0 dacă există limita (globală) a lui f în x_0 şi valoarea acestei limite este egală cu $f(x_0)$ sau dacă x_0 este punct izolat al lui $\widetilde{A}$.*

ii) ***Funcţia*** *f se spune că este* ***continuă pe mulţimea*** *$\widetilde{A}$ dacă f este continuă în orice punct al lui $\widetilde{A}$.*

Evident, ţinând seama de toate cele precizate în legătură cu noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct, se pot da diverse caracterizări (în limbajul vecinătăţilor, în limbajul metricilor, în limbajul normelor, în limbajul " $\varepsilon - \delta$ ", în limbajul şirurilor) noţiunii de continuitate a lui f în $x_0 \in A$, prin înlocuirea lui l cu $f(x_0)$. În acelaşi timp, prin utilizarea lui $f(x_0)$ în locul lui l, acolo unde este cazul, şi rezultatele cuprinse în propoziţiile şi teoremele de până aici se pot reformula, în spiritul continuităţii lui f în x_0 (fie global, în raport cu toate variabilele implicate, fie după o direcţie, fie sub aspect de parţialitate).

Definiţia 9.9 *O funcţie $f : A \subseteq (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ care nu este continuă într-un punct $x_0 \in A$ se numeşte* ***funcţie discontinuă în*** *x_0, iar punctul x_0 se numeşte* ***punct de discontinuitate*** *al lui f.*

Teorema 9.6 ***(de caracterizare a continuităţii unei funcţii pe un spaţiu metric)***
Fie (X,d_1) şi (Y,d_2) două spaţii metrice, iar $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:

1) f este continuă pe X;

2) $\forall\, D \in \tau_{d_2} \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$;

3) $\forall\, F \subseteq Y$, cu $Y \setminus F \in \tau_{d_2} \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) \in \tau_{d_1}$;

4) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

Demonstraţie: 1) $\Rightarrow$ 4) Fie $A \in \mathcal{P}(X)$ şi $y \in f(\overline{A})$. Există atunci $x \in \overline{A}$ astfel ca $y = f(x)$. Cum $x \in \overline{A}$, potrivit Propoziţiei 6.7, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$ aşa încât $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{d_1}} x$. Deoarece f este continuă pe X, deci şi în x, rezultă, în conformitate cu Teorema 9.2, că $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{d_1}} f(x) = y$. Prin urmare, există un şir $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq f(A)$ aşa încât $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{d_1}} y$, ceea ce înseamnă că $y \in \overline{f(A)}$. Astfel, incluziunea $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ este arătată.

4) $\Rightarrow$ 3) Fie F o mulţime închisă din (Y,d_2), adică $F = \overline{F}$ în Y şi fie $A = f^{-1}(F)$. Deoarece 4) are loc, avem:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f\left(f^{-1}(F)\right)} = \overline{F} = F.$$

De aici, rezultă că $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) = f^{-1}(F) = A$. Cum $A \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$, reiese că $A = \overline{A}$, ceea ce ne spune că $f^{-1}(F)$ este închisă în X.

3) $\Rightarrow$ 2) Fie $D \in \tau_{d_2}$. Atunci $Y \setminus D$ este închisă în Y şi, prin 3) , $f^{-1}(Y \setminus D)$ este închisă în X. În consecinţă, mulţimea $X \setminus f^{-1}(Y \setminus D)$, adică $X \setminus \left(f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)\right)$, mai exact spus $f^{-1}(D)$, este deschisă în X.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie x_0 arbitrar din X. Pentru a vedea că f este continuă în x_0, fie $D = S_{d_2}\left(f(x_0), \varepsilon\right) \in \mathcal{V}\left(f(x_0)\right)$. Folosind 2), avem: $f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$. În plus, $x_0 \in f^{-1}(D)$ (căci $f(x_0) \in D$). Deci $f^{-1}(D) \in \mathcal{V}(x_0)$. Astfel, există o sferă deschisă $S_{d_1}(x_0, \delta)$, centrată în x_0, încât $S_{d_1}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(D)$. De aici, reiese că $f\left(S_{d_1}(x_0, \delta)\right) \subseteq D = S_{d_2}\left(f(x_0), \varepsilon\right)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. ◀

Definiţia 9.10 ***(Prelungirea prin continuitate a unei funcţii)***
Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A \cap A'$. De asemenea, fie $f : A \setminus \{x_0\} \to Y$, pentru care există $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in Y$. Atunci funcţia $\widetilde{f} : A \to Y$, definită prin

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \\ l, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases},$$

se numeşte ***prelungire a lui f la A, prin continuitate în punctul*** *x_0.*

Aceasta întrucât $\widetilde{f}$ este continuă în x_0, graţie faptului că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l = \widetilde{f}(x_0)$.

Definiţia 9.11 a) *O aplicaţie f a unui spaţiu metric (X, d_1) în alt spaţiu metric (Y, d_2) se numeşte* ***homeomorfism*** *sau* ***izomorfism topologic*** *dacă f este bijecţie, iar f şi f^{-1} sunt continue pe X şi respectiv Y (altfel spus, f este o* ***bijecţie bicontinuă****).*

b) *Două spaţii metrice (X, d_1) şi (Y, d_2) se numesc* ***homeomorfe*** *dacă există un homeomorfism $f : X \to Y$.*

Observaţie: Orice izometrie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$, adică orice bijecţie care păstrează distanţele este un homeomorfism de la X la Y, fiind, evident, bicontinuă. În particular, orice translaţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un homeomorfism, fiind o izometrie.

Definiţia 9.12 *Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$. Funcţia f se numeşte* ***uniform continuă*** *pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ dacă:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \ \text{încât}\ \forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in \widetilde{A},\ \text{cu}\ \|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon,\ \text{are loc}$$

$$\|f(\mathrm{x}') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Propoziţia 9.8 *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uniform continuă pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ este, în mod necesar, continuă pe $\widetilde{A}$ şi deci continuă în fiecare punct din $\widetilde{A}$.*

Demonstraţie: Luând, în Definiţia 9.12, unul din punctele x' şi x'' fixate pe moment (de exemplu $x'' = x_0 \in \widetilde{A}$), deducem lesne că f este continuă în x_0. Cum x_0 este arbitrar fixat în $\widetilde{A}$, conchidem că f este continuă pe $\widetilde{A}$, fapt consemnat prin notaţia $f \in \mathcal{C}(\widetilde{A}; \mathbb{R}^q)$. ◀

Observaţii:

a) Reciproca Propoziţiei 9.8 nu este adevărată, întrucât există funcţii continue (pe o mulţime) care nu sunt uniform continue (pe respectiva mulţime).

b) Dacă o funcţie reală, cu valori vectoriale este uniform continuă pe o mulţime (parte a mulţimii ei de definiţie), atunci şi funcţiile ei componente sunt uniform continue pe acea mulţime. Nu şi reciproc.

Definiţia 9.13 *a) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte **lipschitziană** dacă există $L \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât*

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq L\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, x', x'' \in A.$$

*b) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte **hölderiană,** de ordin $\alpha \in (0, 1]$, dacă există $M \in \mathbb{R}_+^*$ aşa încât*

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^{\alpha}, \forall\, x', x'' \in A.$$

Observaţie: Orice funcţie lipschitziană este o funcţie hölderiană de ordin $\alpha = 1$.

Teorema 9.7 *Orice funcţie hölderiană $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este uniform continuă pe A.*

Demonstraţie: Folosind Definiţia 9.13, b), deducem că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta_{\,\varepsilon} = \left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} > 0$, astfel încât, $\forall\, x', x'' \in A$, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$, are loc relaţia:

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^{\alpha} < M\left(\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} = \varepsilon, \forall\, x', x'' \in A.$$

Deci f este uniform continuă pe A. ◀

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi

Teorema 9.8 *O funcţie continuă $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ transformă orice submulţime compactă $\widetilde{A} \subseteq A$ într-o mulţime $f(\widetilde{A})$ compactă.*

Demonstraţie: Reamintindu-ne că, fiind în spaţii finit dimensionale, mulţimea $\widetilde{A}$ este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă, sau, în limbajul şirurilor, dacă orice şir din $\widetilde{A}$ conţine cel puţin un subşir convergent, cu limita în $\widetilde{A}$, deducem, pe baza continuităţii lui f, că imaginea prin f a respectivului subşir constituie un subşir al şirului $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent la imaginea prin f a limitei subşirului din $\widetilde{A}$, punct ce se află în mulţimea $f(\widetilde{A})$. Prin urmare, rezultă că, odată cu $\widetilde{A}$ şi mulţimea $f(\widetilde{A})$ este compactă în $\mathbb{R}^q$. ◀

În cazul în care $q = 1$, de aici, obţinem teorema lui Weierstrass şi anume:

Teorema 9.9 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ continuă, unde A este o mulţime compactă (în raport cu toplogia uzuală pe $\mathbb{R}^p$). Atunci funcţia f este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile.*

Demonstraţie: Prin aplicarea Teoremei 9.8, rezultă că $f(A)$ este o mulţime compactă în $\mathbb{R}$. Deci $f(A)$ este mărginită şi închisă (în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$). Fie $m = \inf\limits_{x\in A} f(\mathrm{x})$ şi $M = \sup\limits_{x\in A} f(\mathrm{x})$. Cum $f(A)$ este închisă, reiese că m şi M aparţin lui $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ şi există $x_m, x_M \in A$ astfel încât $f(x_m) = m$ şi $f(x_M) = M$. ◀

Teorema 9.10 ***(Cantor)***
Dacă o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continuă pe o mulţime compactă $\widetilde{A} \subseteq A$,atunci ea este uniform continuă pe $\widetilde{A}$.

Demonstraţie: Prin reducere la absurd, presupunem că f nu este uniform continuă pe $\widetilde{A}$, adică:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \text{ aşa încât } \forall\, \delta > 0, \exists\ x'_\delta, x''_\delta \in \widetilde{A}, \text{ cu } \|x'_\delta - x''_\delta\|_{\mathbb{R}^p} < \delta \text{ şi } \|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ sunt normele euclidiene uzuale. Atunci, pentru $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\ x'_n, x''_n \in \widetilde{A}$, cu $\|x'_n - x''_n\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{1}{n}$ şi $\|f(x'_n) - f(x''_n)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0$. Cum $\widetilde{A}$ este compactă în $\mathbb{R}^p$, şirul $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \widetilde{A}$ conţine un subşir convergent la un element $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$. Din relaţia $\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\|_{\mathbb{R}^p} < \dfrac{1}{n_k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, deducem că şirul $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \widetilde{A}$ este convergent şi el la $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$. Astfel, în virtutea continuităţii lui f, obţinem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k})$, ceea ce este în contradicţie cu relaţia $\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0 > 0$. Prin urmare, presupunerea iniţială este falsă, ceea ce înseamnă că, de fapt, f este uniform continuă pe mulţimea compactă $\widetilde{A}$. ◀

Un alt rezultat important relativ la aplicaţiile continue pe o mulţime este următorul, prezentat aici cu o schiţă de demonstraţie.

Propoziţia 9.9 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie continuă pe A şi $B \subseteq A$ o mulţime conexă. Atunci $f(B)$ este conexă în $\mathbb{R}^q$.*

Demonstraţie: Presupunând, prin absurd, că $f(B)$ nu este conexă, există atunci două mulţimi nevide şi deschise din $\mathbb{R}^q$, D_1 şi D_2, astfel încât $D_1 \cap D_2 \cap f(B) = \varnothing$, $D_1 \cap f(B) \neq \varnothing$, $D_2 \cap f(B) \neq \varnothing$ şi $f(B) \subseteq D_1 \cup D_2$. Cum f este continuă pe A, mulţimile $\widetilde{D}_1 = f^{-1}(D_1)$ şi $\widetilde{D}_2 = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în $\mathbb{R}^p$. În plus, $\widetilde{D_1} \neq \varnothing$, $\widetilde{D_2} \neq \varnothing$, $\widetilde{D_1} \cap \widetilde{D_2} \cap B = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap B = f^{-1}(D_1 \cap D_2 \cap f(B)) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $\widetilde{D}_1 \cap B \neq \varnothing$, $\widetilde{D}_2 \cap B \neq \varnothing$ şi $B \subseteq f^{-1}(D_1 \cup D_2) \subseteq f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = \widetilde{D_1} \cup \widetilde{D_2}$. De aici, rezultă că B nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza din enunţ. Prin urmare, $f(B)$ este, în mod necesar, conexă. ◀

Propoziţia 9.10 *Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o aplicaţie liniară, atunci f este continuă.*

Demonstraţie: Cum f este liniară de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$, considerând raportarea la bazele canonice din $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$, se poate spune că există o matrice $A \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$ aşa încât $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^p$. De aici, prin utilizarea normelor euclidiene pe $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$, deducem că avem $\|f(\mathrm{x})\| \leq \|A\|\,\|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^p$, unde $\|A\| = \left\|(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}}\right\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{p,q} a_{ij}^2\right)^{1/2}$. În consecinţă, are loc relaţia

$$\|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\| \leq \|A\|\,\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|, \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^p,$$

în virtutea căreia rezultă că f este continuă (chiar uniform continuă) pe $\mathbb{R}^p$. ◀

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. VI)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. IV)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005

3. C-tin Drăguşin, Octav Olteanu, Marinică Gavrilă - *Analiză matematică (cap. V, vol I)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 5)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (cap. 7)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis (Ch. 5.2)*, Trinity University, 2009.

7. S. R. Ghorpade, B. V. Limaye - *A Course in Multivariable Calculus and Analysis,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science, 2010.

8. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii),* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

9. C. Canuto, Anita Tabacco - *Mathematical Analysis II (Second Edition)*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

10. Roger Heath-Brown - *Analysis II. Continuity and Differentiability*, Hilary Term, 2016.