

## Cursul 5

### Spațiul liniar real $\mathbb{R}^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Aspecte algebrice.

În perspectiva abordării unor elemente privitoare la funcții de mai multe variabile reale, prezentăm aici câteva **aspecte algebrice** și **topologice** care, în particular, sunt de interes **pentru mulțimea**  $\mathbb{R}^n$  ( $= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $\mathbb{R}$  fiind corpul numerelor reale. Circumstanțial, respectivele aspecte se raportează la **dreapta reală** când  $n = 1$ , la **planul real** când  $n = 2$ , la **spațiul real** când  $n = 3$  sau, în general, la **hiperspațiul real** când  $n \geq 4$ .

### Cadru algebric pentru $\mathbb{R}^n$

**Definiția 5.1** Fie  $V$  o mulțime nevidă și  $K$  un corp comutativ. Se spune că, pe  $V$ , este definită o **structură algebrică de spațiu liniar peste corpul  $K$**  dacă și numai dacă există o lege internă (dată, de regulă, în notație aditivă)  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  și o lege de compoziție (operație) externă (notată, de obicei, multiplicativ)  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$ , așa încât sunt îndeplinite următoarele cerințe (axiome):

*SL1)*  $(V, +)$  este un grup comutativ;

*SL2)*  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha \in K, x, y \in V$ ;

*SL3)*  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in K, x \in V$ ;

*SL4)*  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \forall \alpha, \beta \in K, x \in V$ ;

*SL5)*  $1 \cdot x = x, \forall x \in V$  (unde  $1$  este elementul unitate din  $K$ ).

Ansamblul  $(V, K, +, \cdot)$  se numește **spațiu liniar** (sau **vectorial**) peste  $K$  (sau  **$K$ -spațiu liniar**). Elementele  $K$ -spațiului liniar  $V$  se numesc **vectors**, iar elementele lui  $K$  se numesc, într-un astfel de context, **scalari**. Legea de compoziție internă  $+$  poartă denumirea de **adunare a vectorilor**, iar legea de compoziție externă  $\cdot$  se numește **înmulțire cu scalari**. Când  $K$  este corpul  $\mathbb{R}$  al numerelor reale, atunci **spațiul liniar** în cauză se numește **real**. Elementul neutru (din  $V$ ) în raport cu operația internă  $+$  se numește **vector nul** și se notează, uzual, cu  $\mathbf{0}$ . Simetricul unui element  $u \in V$ , relativ la  $+$ , se numește **vectorul opus** lui  $u$  și se notează cu  $-u$ .

**Propoziția 5.1** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar. Atunci:

i)  $0 \cdot x = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall x \in V, \alpha \in K$ ;

ii)  $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -\alpha \cdot x, \forall \alpha \in K, x \in V$ ;

iii)  $(-\alpha) \cdot (-x) = \alpha \cdot x, \forall \alpha \in K, x \in V$ ;

iv)  $\alpha \cdot x = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ sau } x = \mathbf{0}$ .

**Demonstrație:** i)  $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x, \forall x \in V \Rightarrow 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) \Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot x + ((0 \cdot x + (-0 \cdot x))) \Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot x + \mathbf{0} = 0 \cdot x$ . Totodată, avem:  $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = (\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}) + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + (\alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0})) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}, \forall \alpha \in K$ .

ii)  $\mathbf{0} = 0 \cdot x = (\alpha - \alpha) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x \Rightarrow (-\alpha) \cdot x = -\alpha \cdot x$  și  $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (-x + x) = \alpha \cdot (-x) + \alpha \cdot x \Rightarrow \alpha \cdot (-x) = -\alpha \cdot x, \forall \alpha \in K, x \in V$ .

iii)  $(-\alpha) \cdot (-x) = -\alpha \cdot (-x) = -(-(\alpha \cdot x)) = \alpha \cdot x, \forall \alpha \in K, x \in V$ .

iv) Dacă  $\alpha \neq 0$  și  $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$ , atunci:  $x = \mathbf{1} \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Altfel,  $\alpha = 0$  și  $x$  este arbitrar în  $V$ . ◀

**Propoziția 5.2** Mulțimea  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) are structură de spațiu liniar real în raport cu operația algebrică internă de adunare a  $n$ -uplurilor, definită prin

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

și legea de înmulțire a unui  $n$ -uplu oarecare cu un scalar real arbitrar, definită prin

$$(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Demonstrație:** Asociativitatea și comutativitatea adunării pe  $\mathbb{R}$  implică, evident, asociativitatea și respectiv comutativitatea adunării pe  $\mathbb{R}^n$ . Totodată, se vede că  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  este vectorul nul, adică elementul neutru al adunării pe  $\mathbb{R}^n$  și, pentru orice  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , există opusul  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Prin urmare, în raport cu adunarea  $n$ -uplurilor reale,  $(\mathbb{R}^n, +)$  este grup (aditiv) comutativ, fiind satisfăcută astfel axioma  $SL1$ ) din Definiția 5.1. În ceea ce privește îndeplinirea axiomelor  $SL2$ )- $SL5$ ) constatăm, pe rând, că avem:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \dots, \alpha(x_n + y_n)) = \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot x &= (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \dots, (\alpha + \beta)x_n) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \dots, \alpha x_n + \beta x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) = \\ &= \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot x) &= \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) = \\ &= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots, (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha\beta) \cdot x, \end{aligned}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ și}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot x &= \mathbf{1} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_n) = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = x, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

În concluzie,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  este un spațiu liniar real. ◀

**Alte exemple de spații liniare:** Fie  $X$  o mulțime nevidă,  $K$  un corp comutativ,  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar peste  $K$  și  $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \rightarrow V\}$ . Se poate vedea că  $\mathcal{F}(X, V)$  are o structură algebrică de spațiu liniar în raport cu adunarea funcțiilor, definită în mod obișnuit prin

$$(*) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X, \forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

și înmulțirea funcțiilor cu scalari din  $K$ , definită prin

$$(**) \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in X, \forall f \in \mathcal{F}(X, V).$$

Aceasta deoarece, în virtutea faptului că  $V$  este un  $K$ -spațiu liniar,  $\mathcal{F}(X, V)$  satisface, în raport cu operațiile algebrice menționate, axiomele  $SL1$ - $SL5$ ) din Definiția 5.1.

Particularizând  $X$ ,  $K$ , și  $V$ , obținem diverse exemple de spații vectoriale. Astfel, dacă  $m$  și  $n$  sunt numere naturale proprii, iar  $X = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  și  $V = K = \mathbb{R}$ , atunci  $\mathcal{F}(X, V)$  se identifică cu mulțimea  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  a tuturor matricilor de tip  $m \times n$  și cu elemente din  $\mathbb{R}$ , mulțime care, în raport cu adunarea matricilor și cu înmulțirea cu scalari din  $\mathbb{R}$  este, așadar, un spațiu liniar real.

În situația în care  $X \subseteq \mathbb{R}$  și  $V = K = \mathbb{R}$ , se obține  $\mathbb{R}$ -spațiul liniar  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$  al funcțiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe  $X$ .

Dacă  $X$  este o submulțime nevidă a lui  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $K = \mathbb{R}$  și  $V = \mathbb{R}^m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ), atunci  $\mathcal{F}(X, V)$  reprezintă, în raport cu adunarea  $(*)$  și înmulțirea  $(**)$ , spațiul liniar real al funcțiilor de  $n$ -variabile reale, definite pe  $X$  și cu valori vectoriale, de câte  $m$  componente reale.

Atunci când  $X = \mathbb{N}$  și  $V = K = \mathbb{R}$ , mulțimea  $\mathcal{F}(X, V)$  este, în raport cu operațiile  $(*)$  și  $(**)$ , spațiul liniar real al șirurilor de numere reale.

**Definiția 5.2** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar peste un corp comutativ  $K$  și  $W$  o submulțime nevidă a lui  $V$ . Dacă,  $\forall x, y \in W$ , rezultă că  $x + y \in W$  și,  $\forall \alpha \in K, x \in W$ , reiese că  $\alpha \cdot x \in W$ , atunci  $(W, K, +, \cdot)$  este numit **subspațiu liniar** al lui  $(V, K, +, \cdot)$ .

**Exemple:**

- 1) Mulțimea  $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$  este, în raport cu adunarea  $n$ -uplurilor din  $\mathbb{R}^n$  și înmulțirea acestora cu scalari din  $\mathbb{R}$ , un subspațiu liniar al lui  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ .
- 2) Mulțimea  $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$  a funcțiilor reale, scalare și pare este, după cum lesne se poate vedea, un subspațiu liniar al spațiului liniar real  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ .
- 3) Mulțimea  $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$  a șirurilor Cauchy de numere raționale este un subspațiu liniar al spațiului vectorial  $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}, +, \cdot)$ .

**Definiția 5.3** Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt elemente ale unui spațiu liniar  $V$  peste un corp comutativ  $K$ , iar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sunt scalari din  $K$ , atunci elementul

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

se numește **combinație liniară** a elementelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Observație:** Ținând seama de Definiția 5.3, un enunț echivalent al Definiției 5.2 este următorul: “O submulțime nevidă  $W$  a unui spațiu liniar  $(V, K, +, \cdot)$  se numește subspațiu liniar al lui  $V$  dacă și numai dacă orice combinație liniară de oricare două elemente ale lui  $W$  aparține lui  $W$ , adică

$$\forall \alpha, \beta \in K, x, y \in W \Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W.$$

**Definiția 5.4** Fie  $U$  o submulțime nevidă a unui spațiu liniar  $(V, K, +, \cdot)$ . Mulțimea tuturor combinațiilor liniare (cu scalari din  $K$ ) de elemente din  $U$  se numește **acoperire liniară** a lui  $U$  și se notează cu  $Lin(U)$ .

Se poate constata ușor că  $Lin(U)$  este un subspațiu liniar al lui  $(V, K, +, \cdot)$  care o include pe  $U$ .

**Propoziția 5.3** Intersecția oricăror două subspații,  $W_1$  și  $W_2$ , ale unui spațiu liniar  $(V, K, +, \cdot)$  este un subspațiu liniar al lui  $V$ . Reuniunea a două subspații liniare ale lui  $V$  nu este întotdeauna un subspațiu liniar al lui  $V$ .

**Demonstrație:** Ținând seama de Propoziția 5.1 și de Definiția 5.2, putem afirma că orice subspațiu liniar al lui  $V$  conține vectorul nul  $\mathbf{0}$ . Așadar  $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ . Prin prisma observației de mai sus, luăm două elemente arbitrare din  $W_1 \cap W_2$ , fie acestea  $x$  și  $y$ . Ca atare,  $x$  și  $y$  aparțin atât lui  $W_1$ , cât și lui  $W_2$ . Cum  $W_1$  și  $W_2$  sunt subspații liniare ale lui  $(V, K, +, \cdot)$ , reiese că, pentru oricare scalari  $\alpha$  și  $\beta$  din  $K$ , avem  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W_1$  și, totodată,  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W_2$ . Deci  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W_1 \cap W_2, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in W_1 \cap W_2$ , adică  $W_1 \cap W_2$  este un subspațiu liniar al lui  $V$ .

În ceea ce privește partea secundă a concluziei din enunțul prezentei propoziții, vedem că, de exemplu, deși mulțimile  $V_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$  și  $V_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$  sunt subspații liniare ale lui  $\mathbb{R}^n$ , iar vectorii  $(1, 0, \dots, 0)$ , din  $V_1$  și  $(0, 0, \dots, 1)$ , din  $V_2$ , aparțin reuniunii  $V_1 \cup V_2$ , suma lor, adică vectorul  $(1, 0, \dots, 0, 1)$ , nu mai aparține acestei reuniuni. Deci, în acest caz, reuniunea subspațiilor liniare  $V_1$  și  $V_2$  nu este un subspațiu liniar al lui  $V = \mathbb{R}^n$ . ◀

**Observație:** Procedând ca în demonstrația primei părți a Propoziției 5.3, se poate arăta că, de fapt, intersecția oricător subspații liniare ale unui spațiu liniar este, de asemenea, un subspațiu liniar al aceluiași spațiu liniar, ceea ce ne îngăduie să validăm următoarea definiție.

**Definiția 5.5** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar și  $U$  o submulțime nevidă a sa. Cum mulțimea subspațiilor liniare ale lui  $V$  care includ submulțimea  $U$  este nevidă, cel puțin  $V$  făcând parte din ea, numim **subspațiu generat de submulțimea  $U$**  tocmai intersecția tuturor subspațiilor liniare ale lui  $V$  care conțin elementele lui  $U$ . Notăm acest subspațiu liniar al lui  $V$  cu  $Sp(U)$ .

**Propoziția 5.4** Oricare ar fi submulțimea nevidă  $U$  a unui subspațiu liniar  $(V, K, +, \cdot)$ , avem:

$$Lin(U) = Sp(U) = \{x \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in K, x_i \in U, 1 \leq i \leq n, \text{ așa încât } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\}.$$

**Demonstrație:** Întrucât  $Lin(U)$  este un subspațiu liniar al lui  $V$  care include pe  $U$ , intersecția tuturor subspațiilor liniare ale lui  $V$  cu proprietatea că o includ pe  $U$ , cu alte cuvinte  $Sp(U)$ , este inclusă în  $Lin(U)$ , adică  $Sp(U) \subseteq Lin(U)$ . Reciproc, orice subspațiu liniar al lui  $V$ , care conține pe  $U$ , conține și orice combinație liniară de elemente din  $U$  (cu scalari din  $K$ ), adică include subspațiul liniar  $Lin(U)$ . Prin considerarea intersecției tuturor acestor subspații, găsim că avem și incluziunea  $Lin(U) \subseteq Sp(U)$ . Așadar, obținem  $Lin(U) = Sp(U)$ , ultima mulțime specificată în egalitatea din enunț fiind de fapt exprimarea relațională a subspațiului  $Lin(U)$ . ◀

**Definiția 5.6** a) Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar și  $x_1, x_2, \dots, x_n$  din  $V$ . Elementele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se numesc **liniar dependente** dacă există scalarii  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ , dintre care cel puțin unul nenul, astfel încât combinația liniară  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$  să fie vectorul nul  $\mathbf{0}$  ( $\in V$ ).

În caz contrar, dacă nu există astfel de scalari, nu toți nuli, așa încât  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ , altfel spus,

dacă relația  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$  are loc necesarmente numai când  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , atunci elementele  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  se numesc **liniar independente**.

b) O **submulțime** nevidă  $U$  a unui subspațiu liniar  $V$  se numește **liniar independentă** dacă oricare  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) elemente distincte  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  ale lui  $U$  sunt liniar independente, în sensul de la a). Altminteri, dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  și niște elemente  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  din  $U$  ce sunt liniar dependente, atunci **mulțimea**  $U$  se numește **liniar dependentă**.

### Observații:

1. O submulțime liniar independentă a unui spațiu liniar nu conține vectorul nul  $\mathbf{0}$ .
2. Condiția necesară și suficientă pentru ca  $n$  elemente  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  ale unui spațiu liniar să fie liniar dependente este aceea ca măcar unul dintre elementele în cauză să fie o combinație liniară de celelalte. Într-adevăr, dacă  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  sunt liniar dependente, atunci, în conformitate cu

Definiția 5.6, există scalarii  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , nu toți nuli, astfel încât  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ . Admițând, de

exemplu, că  $\alpha_1 \neq 0$ , ar reieși atunci că avem:  $\mathbf{x}_1 = -\sum_{k=2}^n (\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_k) \mathbf{x}_k$ . Deci, unul dintre ele-

mente  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , aici  $\mathbf{x}_1$ , ar fi o combinație liniară de celelalte. Reciproc, dacă  $\mathbf{x}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \beta_k \mathbf{x}_k$ ,

atunci  $\mathbf{x}_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \beta_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ , ceea ce înseamnă că, pentru elementele  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , există scalarii

$\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, 1, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n$ , evident nu toți nuli, așa încât se poate vorbi despre o combinație liniară a respectivelor elemente egală cu vectorul nul.

**Definiția 5.7** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar. Se numește **dimensiune (algebrică)** a spațiului liniar  $V$  (și se notează cu  $\dim(V)$ ) numărul maxim de elemente liniar independente din  $V$ .

Spațiul liniar  $V$  este numit **infini-dimensional** dacă există cel puțin o submulțime infinită și liniar independentă a lui  $V$ . În caz contrar,  $V$  este numit **spațiu liniar finit-dimensional**.

Dacă, într-un spațiu liniar finit-dimensional există  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) elemente liniar independente și oricare  $n+1$  elemente din acel spațiu sunt liniar dependente, atunci spunem că respectivul spațiu este  **$n$ -dimensional** (sau, echivalent, **de dimensiune  $n$** ).

**Definiția 5.8** O mulțime  $B \neq \emptyset$ , dintr-un spațiu liniar  $(V, K, +, \cdot)$ , se numește **bază algebrică** (sau **bază Hamel**) a lui  $V$  dacă  $B$  este liniar independentă (în sensul Definiției 5.6 b)) și  $\text{Sp}(B) = V$ , adică subspațiul liniar generat de  $B$  este  $V$ .

În cazul unui spațiu liniar  $n$ -dimensional  $V$ , o bază a lui  $V$  este o mulțime  $B$  alcătuită din  $n$  elemente,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ , liniar independente, din  $V$ . Fiecare element  $\mathbf{x} \in V$  se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathbf{b}_k,$$

$K$ -scalarii  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  numindu-se **coordonatele lui  $\mathbf{x}$  în baza  $B$** .

Orice bază a unui spațiu liniar  $V$  are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui  $V$ . Altfel spus,  $\dim(V)$  nu depinde de baza lui  $V$ .



care are, pe coloane, coordonatele vectorilor din  $B'$  în baza  $B$ , adică

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{m1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix},$$

unde  $s_{ij} \in K$  sunt așa încât

$$\begin{cases} b'_1 = s_{11}b_1 + s_{12}b_2 + \dots + s_{1n}b_n \\ b'_2 = s_{21}b_1 + s_{22}b_2 + \dots + s_{2n}b_n \\ \vdots \\ b'_m = s_{m1}b_1 + s_{m2}b_2 + \dots + s_{mn}b_n \end{cases}.$$

Altfel spus, matricial, avem  $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$ , unde  $\tilde{B}' = [b'_1, b'_2, \dots, b'_m]$  și  $\tilde{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ .

**Observație:** Când  $m = n$ , sistemul de vectori  $B'$  este o bază pentru  $V$  dacă și numai dacă matricea  $S$ , adică matricea  $\tilde{B}^{-1}\tilde{B}'$ , de trecere de la  $B$  la  $B'$ , este nesingulară (adică cu determinantul diferit de 0).

**Propoziția 5.6** Fie  $B$  și  $B'$  două baze distincte ale unui spațiu liniar  $(V, K, +, \cdot)$ , finit-dimensional și  $x$  un element oarecare din  $V$ . Dacă  $X_B$  și  $X_{B'}$  sunt matricile coloane ale coordonatelor lui  $x$  în baza  $B$  și respectiv în baza  $B'$ , iar  $S$  este matricea de trecere de la  $B$  la  $B'$ , atunci formula de transformare a coordonatelor lui  $x$  la schimbarea bazei de la  $B$  la  $B'$  este următoarea:

$$X_{B'} = S^{-1}X_B.$$

**Demonstrație:** Întrucât  $x = \tilde{B}X_B = \tilde{B}'X_{B'}$  și  $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$ , avem:  $\tilde{B}X_B = \tilde{B}SX_{B'}$ . De aici, cum  $\tilde{B}$  este nesingulară, prin înmulțirea la stânga cu  $\tilde{B}^{-1}$ , rezultă:  $X_B = SX_{B'}$ . În fine, deoarece  $S$  este nesingulară, reiese că are loc formula  $X_{B'} = S^{-1}X_B$ . ◀

**Definiția 5.11** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar, finit-dimensional și două baze ale sale,  $B$  și  $B'$ . Spunem că **bazele**  $B$  și  $B'$  sunt **la fel orientate** dacă determinantul matricii  $S$  de trecere de la  $B$  la  $B'$  este pozitiv. Bazele  $B$  și  $B'$  se numesc **contrar orientate** dacă  $\det(S) < 0$ .

Spațiul  $\mathbb{R}^n$  poate fi privit, în urma înzestrării sale cu o a doua operație algebrică internă, și ca o algebră (reală), asociativă și cu unitate, în conformitate cu următoarea definiție.

**Definiția 5.12** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu liniar peste un corp comutativ  $K$  și  $" \times " : V \times V \rightarrow V$  o operație algebrică internă pe  $V$ , cu următoarele proprietăți:

$$(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) \times w = \alpha \cdot (u \times w) + \beta \cdot (v \times w) \text{ și}$$

$$u \times (\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha \cdot (u \times v) + \beta \cdot (u \times w),$$

$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v, w \in V$ . Atunci ansamblul  $(V, K, +, \cdot, \times)$  se numește **algebră** peste  $K$ . Când operația  $" \times "$  este asociativă, **algebra**  $(V, K, +, \cdot, \times)$  este **asociativă**, iar când  $" \times "$  are element neutru, **algebra** se numește **cu unitate**.

Într-adevăr, spațiul liniar real  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ , înzestrat cu o a doua operație internă, "  $\times$  ", definită prin

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow x \times y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n),$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este, după cum am spus deja, o algebră asociativă și cu unitate, peste  $\mathbb{R}$ , deoarece avem:

$$(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) \times w = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \dots, \alpha u_n + \beta v_n) \times (w_1, w_2, \dots, w_n) =$$

$$= ((\alpha u_1 + \beta v_1)w_1, (\alpha u_2 + \beta v_2)w_2, \dots, (\alpha u_n + \beta v_n)w_n) =$$

$$= \alpha \cdot (u_1 w_1, u_2 w_2, \dots, u_n w_n) + \beta \cdot (v_1 w_1, v_2 w_2, \dots, v_n w_n) = \alpha \cdot (u \times w) + \beta \cdot (v \times w) \text{ și}$$

$$u \times (\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \times (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \dots, \alpha v_n + \beta w_n) =$$

$$= (u_1(\alpha v_1 + \beta w_1), u_2(\alpha v_2 + \beta w_2), \dots, u_n(\alpha v_n + \beta w_n)) =$$

$$= \alpha \cdot (u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n) + \beta \cdot (u_1 w_1, u_2 w_2, \dots, u_n w_n) = \alpha \cdot (u \times v) + \beta \cdot (u \times w),$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n), w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Totodată, vedem că, în  $\mathbb{R}^n$ , avem  $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$ ,  $\forall u, v, w$  și că  $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$  este elementul neutru în raport cu operația "  $\times$  ". Mai mult, **algebra**  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot, \times)$  este și **comutativă**, deoarece, în  $\mathbb{R}^n$ , operația multiplicativă "  $\times$  " este, evident, comutativă.

**Definiția 5.13** a) Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu vectorial peste un corp comutativ și ordonat  $K$ . Se numește **produs scalar** pe  $V$  o aplicație de la  $V \times V$  la  $K$ , notată prin  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , care satisface următoarele proprietăți (axiome):

PS1)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este **pozitiv definită**, adică

$$i. \langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V \text{ și}$$

$$ii. \langle x, x \rangle = 0, \text{ dacă și numai dacă } x = \mathbf{0} \in V;$$

PS2)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este **simetrică**, adică

$$i. \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V;$$

PS3)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este **biliniară**, adică

$$i. \langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \text{ și}$$

$$ii. \langle x, \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \forall \alpha, \beta \in K, x, y, z \in V.$$

b) Perechea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , în care  $V$  este un spațiu liniar peste un corp comutativ și ordonat, iar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  este un produs scalar pe  $V$  se numește **spațiu prehilbertian**.

c) Un spațiu prehilbertian pentru care  $K = \mathbb{R}$  se numește **spațiu euclidian**.

**Propoziția 5.7** Spațiul liniar real  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ , dotat cu produsul scalar canonic, definit prin

$$\langle x, y \rangle_c = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spațiu euclidian.



**Demonstrație:** Se verifică ușor că aplicația

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \langle x, y \rangle_c = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R},$$

unde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , satisface axiomele  $PS1)$ - $PS3)$  din Definiția 5.13 a), fiind într-adevăr un produs scalar pe  $\mathbb{R}^n$ . Astfel, pentru  $PS1)$ , avem  $\langle x, x \rangle_c = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$ ,  $\forall x =$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și  $\langle x, x \rangle_c = 0$ , adică  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ , dacă și numai dacă  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ,

ceea ce înseamnă  $x = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ . Pentru  $PS2)$ , vedem că  $\langle x, y \rangle_c = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k = \langle y, x \rangle_c$ ,

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ . În fine, pentru  $PS3)$ , avem:  $\langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, z \rangle_c = \sum_{k=1}^n (\alpha x_k + \beta y_k) z_k = \sum_{k=1}^n (\alpha x_k z_k + \beta y_k z_k) =$

$\alpha \sum_{k=1}^n x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^n y_k z_k = \alpha \langle x, z \rangle_c + \beta \langle y, z \rangle_c$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ . Analog și pentru cea de-a doua relație din  $PS3)$ . Prin urmare,  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_c)$  este un spațiu euclidian. ◀

**Observație:** Produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  pe  $\mathbb{R}^n$  se mai numește și **produs scalar euclidian**.

**Definiția 5.14** Fie  $(V, K, +, \cdot)$  un spațiu prehilbertian, dotat cu produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

- Două **elemente**  $x$  și  $y$  din  $V$  se numesc **ortogonale** dacă și numai dacă  $\langle x, y \rangle = 0$ .
- Spunem că un vector  $x \in V$  este **ortogonal pe o mulțime**  $U \subset V$  ( $U \neq \emptyset$ ) dacă  $\langle x, y \rangle = 0$ ,  $\forall y \in U$ .
- Un **sistem** de vectori din  $V$  se numește **ortogonal** dacă este alcătuit din vectori ortogonali doi câte doi. Mai exact, dacă  $\langle x, y \rangle = 0$ ,  $\forall x, y$  din respectivul sistem, cu  $x \neq y$ .
- Dacă  $U$  este o submulțime nevidă a lui  $V$ , atunci prin **suplimentul ortogonal al lui**  $U$ , notat cu  $U^\perp$ , înțelegem mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe  $U$ .

**Observație:** Notăm prin  $x \perp y$  faptul că vectorul  $x \in V$  este ortogonal pe vectorul  $y \in V$ . De asemenea, ortogonalitatea unui element  $x$  pe o submulțime  $U$  a lui  $V$  o vom marca prin notația  $x \perp U$ . Se vede că  $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$ ,  $\forall U \subseteq V$ ,  $U \neq \emptyset$ .

**Definiția 5.15** Fie  $(V, K, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu euclidian și  $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ . **Unghiul dintre vectorii**  $x$  și  $y$ , notat prin  $\angle(x, y)$  sau  $\widehat{(x, y)}$ , se definește prin relația:

$$\widehat{(x, y)} = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}}.$$

**Observație:** Într-un spațiu euclidian, doi vectori sunt ortogonali dacă și numai dacă unghiul dintre ei este  $\frac{\pi}{2}$ .

**Definiția 5.16** a) Fie  $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$  un spațiu liniar real. Se numește **normă** pe  $V$  o aplicație de la  $V$  la  $\mathbb{R}$ , notată simbolic prin  $\|\cdot\|$ , care satisface următoarele axiome:

$$AN1) \quad \|x\| \geq 0, \forall x \in V \text{ și } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0};$$

AN2)  $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V;$

AN3)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$

b) Perechea  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **spațiu normat**.

**Propoziția 5.8** Spațiul liniar real  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ , înzestrat cu așa-numita normă euclidiană, definită prin

$$\|\mathbf{x}\|_e = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spațiu normat.

**Demonstrație:** Se verifică lesne axiomele AN1), AN2) și AN3), din Definiția 5.16. Astfel, pentru

AN1), avem  $\|\mathbf{x}\|_e = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \geq 0, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și  $\|\mathbf{x}\|_e = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 =$

$x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Pentru AN2), vedem că  $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\|_e = \left( \sum_{k=1}^n \alpha^2 x_k^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} =$

$|\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . În fine, ținând seama de inegalitatea lui Minkowski, cu  $p = 2$ , are loc și AN3), cu  $\|\cdot\|_e$ . ◀

**Observație:** Orice spațiu euclidian  $V$  este și spațiu normat. Într-adevăr, prin intermediul produsului scalar din dotarea spațiului euclidian respectiv, fie el notat cu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , se poate defini o normă (numită *norma indusă de produsul scalar* în cauză) prin:

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x} \in V.$$

Există și norme neinduse de vreun produs scalar.

**Definiția 5.17** a) Fie  $(V, \|\cdot\|)$  un spațiu normat și  $\mathbf{x} \in V$ . Elementul  $\mathbf{x}$  se numește **versor** dacă  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

b) Fie  $V$  un spațiu euclidian și  $U$  un sistem nevid de vectori din  $V$ .  $U$  se numește **ortonormat** dacă, în raport cu produsul scalar de pe  $V$ , avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1, & \text{când } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U.$$

Fie  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  o bază a unui spațiu euclidian, finit-dimensional,  $V$  (cu  $\dim(V) = n$ ). În raport cu produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definit pe  $V$ , matricea  $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , cu elementele  $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ , al cărei determinant se numește **determinant Gram**, este, desigur, nesingulară, căci, altfel, vectorii din  $B$  nu ar mai fi liniar independenți. Dat fiind faptul că, pentru doi vectori arbitrari din  $V$ ,  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ , avem reprezentările (în baza  $B$ )  $\mathbf{x} = BX_B$  și  $\mathbf{y} = BY_B$ , unde  $X_B$  și respectiv  $Y_B$  sunt matricile unicolonare ale coordonatelor lui  $\mathbf{x}$  și respectiv  $\mathbf{y}$  în baza  $B$ , găsim **expresia analitică a produsului scalar**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  în baza  $B$ , și anume

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j = X_B^T G Y_B,$$

în care  $X_B^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  este transpusa matricei unicolonare de coordonate ale lui  $\mathbf{x}$  în baza  $B$ .

Baza  $B$  este numită **ortogonală** ori de câte ori matricea  $G$  este diagonală, adică  $g_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ .

Spunem că baza  $B$  este **ortonormată** dacă și numai dacă  $G$  este matricea unitate  $I_n$ .

**Teorema 5.1 (Procedul de ortonormalizare Gram-Schmidt)**

În orice spațiu euclidian finit-dimensional există baze ortonormate.

**Demonstrație:** Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu euclidian  $n$ -dimensional și  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  o bază a lui. Plecând de la  $B$ , se poate construi o bază  $B' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$ , ortogonală, a aceluiași spațiu  $V$ , procedând prin așa-zisul algoritm al lui Gram-Schmidt, după cum urmează:

1. Pasul 1:  $b'_1 = b_1$ .
2. Pasul 2: Se determină scalarul  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , așa încât vectorul  $b'_2 = b_2 + \lambda_1 b'_1$  să fie ortogonal pe  $b'_1$ , adică să avem  $0 = \langle b'_1, b_2 \rangle + \lambda_1 \langle b'_1, b'_1 \rangle$ . Rezultă  $\lambda_1 = -\frac{\langle b'_1, b_2 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle}$ . Astfel,  $b'_2 = b_2 - \frac{\langle b'_1, b_2 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1$ .
3. Pasul 3: Se caută scalarii  $\mu_1$  și  $\mu_2$  din  $\mathbb{R}$ , așa încât  $b'_3 = b_3 + \mu_1 b'_1 + \mu_2 b'_2$  să fie ortogonal pe sistemul  $\{b'_1, b'_2\}$ , adică să avem  $\langle b'_3, b'_1 \rangle = 0$  și  $\langle b'_3, b'_2 \rangle = 0$ .  
Găsim  $\mu_1 = -\frac{\langle b'_1, b_3 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle}$  și  $\mu_2 = -\frac{\langle b'_2, b_3 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle}$ . Prin urmare, avem:  $b'_3 = b_3 - \frac{\langle b'_1, b_3 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 - \frac{\langle b'_2, b_3 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle} b'_2$ .
4. Pasul k: Continuând procedeul, obținem formula generală:

$$b'_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b'_i, b_k \rangle}{\langle b'_i, b'_i \rangle} b'_i, k = \overline{2, n}.$$

În cele din urmă, plecând de la baza  $B'$ , putem obține baza ortonormată  $B'' = \{b''_1, b''_2, \dots, b''_n\}$ , dacă luăm  $b''_k = \frac{b'_k}{\|b'_k\|}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , unde  $\|\cdot\|$  este norma indusă de produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , considerat pe  $V$ . ◀

## Bibliografie

1. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
2. Marina Gorunescu, F. Gorunescu, A. Prodan - *Matematici superioare, Biostatistică și Informatică*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.
3. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
4. V. Postolică - *Eficiență prin matematica aplicată*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
5. N. Cotfas - *Elemente de algebră liniară*, Editura Universității din București, 2009.
6. S. Corbu - *Algebră liniară. Geometrie analitică (elemente de teorie și aplicații)*, Editura "Fair Partners", București, 2011.
7. S. Treil - *Linear Algebra Done Wrong*, Brown University, 2013.
8. J. Hefferon - *Linear Algebra*, Saint Michael's College, 2014.
9. R. Singh, M. Bhatt - *Linear Algebra and Vector Calculus (Ch. 2)*, Mc Graw Hill Ed., 2016.