Grafuri

SD 2016/2017

Conținut

Tipul abstract Graf

Tipul abstract Digraf

Implementarea cu matrici de adiacență

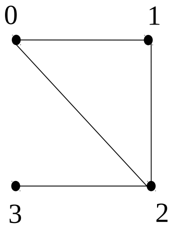
Implementarea cu liste de adiacență înlănțuite

Algoritmi de parcurgere (DFS, BFS)

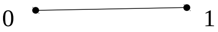
Determinarea componentelor (tare) conexe

Grafuri

- $G = (V, E)$
  - V mulțime de vârfuri
  - E mulțime de muchii; o muchie $=$ o pereche neordonată de vârfuri distincte



$V = \{0, 1, 2, 3\}$
$E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
$u = \{0, 1\} = \{1, 0\}$



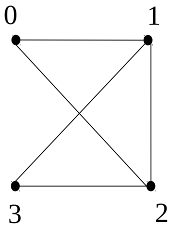
0,1 - extremitățile lui u

u este incidentă în 0 și 1

0 și 1 sunt adiacente (vecine)

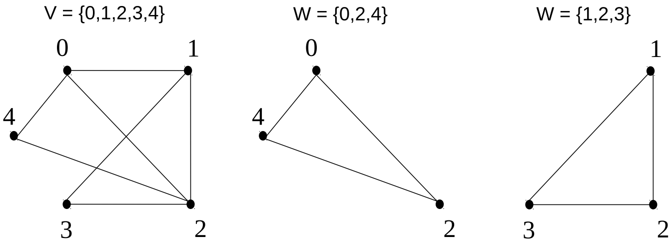
Grafuri

- Mers de la u la v: $u = i_0, \{i_0, i_1\}, i_1, \cdots, \{i_{k-1}, i_k\}, i_k = v$
  3, {3,2}, 2, {2,0}, 0, {0,1}, 1, {1,3},3, {3,2}, 2
- parcurs: mers în care oricare două muchii sunt distincte
- drum: mers în care oricare două vârfuri sunt distincte
- mers închis: $i_0 = i_k$
- circuit = mers închis în care oricare două vârfuri intermediare sunt distincte



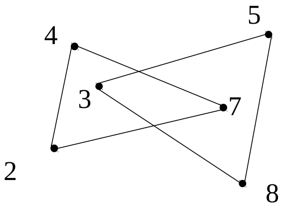
Subgraf indus

- $G = (V, E)$ – graf, W – submulțime a lui V
- Subgraf indus de W: $G'(W, E')$, unde $E' = \{\{i, j\} | \{i, j\} \in E$ și $i \in W, j \in W\}$



Grafuri - Conexitate

- $i\ R\ j$ dacă și numai dacă există drum de la i la j
- R este relație de echivalență
- $V_1, \cdots, V_p$ clasele de echivalență
- $G_i = (V_i, E_i)$ subgraful indus de V_i
- $G_1, \cdots, G_p$ – componente conexe
- graf conex = graf cu o singură componentă conexă



$V_1 = \{2, 4, 7\}$

$E_1 = \{\{2, 4\}, \{4, 7\}, \{2, 7\}\}$

$V_2 = \{3, 5, 8\}$

$E_2 = \{\{3, 5\}, \{5, 8\}, \{8, 3\}\}$

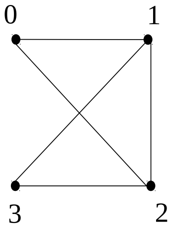
Tipul de date abstract **Graf**

- obiecte:
  - grafuri $G = (V, E)$, $V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$
- operații:
  - grafVid()
    - intrare: nimic
    - ieșire: graful vid $(\emptyset, \emptyset)$
  - esteGrafVid()
    - intrare: $G = (V, E)$,
    - ieșire: true daca $G = (\emptyset, \emptyset)$, false în caz contrar
  - insereazaMuchie()
    - intrare: $G = (V, E)$, $i, j \in V$
    - ieșire: $G = (V, E \cup \{i, j\})$
  - insereazaVarf()
    - intrare: $G = (V, E)$, $V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$
    - ieșire: $G = (V', E)$, $V' = \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$

Tipul de date abstract **Graf**

- eliminaMuchie()
  - intrare: $G = (V, E)$, $i, j \in V$
  - ieșire: $G = (V, E - \{i, j\})$
- eliminaVarf()
  - intrare: $G = (V, E)$, $V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, k
  - ieșire: $G = (V', E')$, $V' = \{0, 1, \cdots, n-2\}$

$$\begin{aligned}\{i', j'\} \in E' \Leftrightarrow (\exists \{i, j\} \in E)\ i \neq k, j \neq k,\\ i' = if\ (i < k)\ then\ i\ else\ i - 1,\\ j' = if\ (j < k)\ then\ j\ else\ j - 1\end{aligned}$$



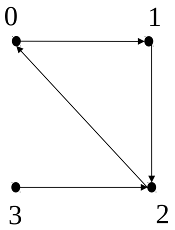
Tipul de date abstract **Graf**

- listaDeAdiacenta()
  - intrare: $G = (V, E), \; i \in V$
  - ieșire: lista vârfurilor adiacente cu i
- listaVarfurilorAccesibile()
  - intrare: $G = (V, E), \; i \in V$
  - ieșire: lista vârfurilor accesibile din i

Conținut

Digraf (graf orientat)

- $D = (V, A)$
  - V mulțime de vârfuri
  - A mulțime de arce; un arc $=$ o pereche ordonată de vârfuri distincte

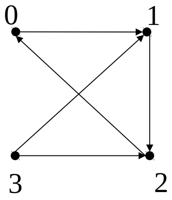


$V = \{0, 1, 2, 3\}$
$A = \{(0, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 2)\}$
$a = (0, 1) \neq (1, 0)$

0 – sursa lui a
1 – destinația lui a

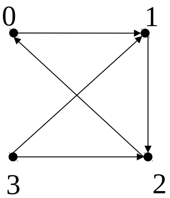
Digraf

- mers: $i_0, (i_0, i_1), i_1, \cdots, (i_{k-1}, i_k), i_k$
  3, (3,2), 2, (2,0), 0, (0,1), 1, (1,2), 2, (2,0), 0
- parcurs: mers în care oricare două arce sunt distincte
- drum: mers în care oricare două vârfuri sunt distincte
- mers închis: $i_0 = i_k$
- circuit $=$ mers închis în care oricare două vârfuri intermediare sunt distincte



Digraf - Conexitate

- $i \; R \; j$ dacă și numai dacă există drum de la i la j și drum de la j la i
- R este relație de echivalență
- $V_1, \cdots, V_p$ clasele de echivalență
- $G_i = (V_i, A_i)$ subdigraful indus de V_i
- $G_1, \cdots, G_p$ – componente tare conexe
- digraf tare conex = digraf cu o singură componentă tare conexă



$V1 = \{0, 1, 2\}$
$A1 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$
$V2 = \{3\}$
$A2 = \emptyset$

Tipul de date abstract **Digraf**

- obiecte: digrafuri $D = (V, A)$
- operații:
  - digrafVid()
    - intrare: nimic
    - ieșire: digraful vid $(\emptyset, \emptyset)$
  - esteDigrafVid()
    - intrare: $D = (V, A)$,
    - ieșire: true dacă $D = (\emptyset, \emptyset)$, false în caz contrar
  - insereazaArc()
    - intrare: $D = (V, A)$, $i, j \in V$
    - ieșire: $D = (V, A \cup (i, j))$
  - insereazaVarf()
    - intrare: $D = (V, A)$, $V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$
    - ieșire: $D = (V', A)$, $V' = \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$

Tipul de date abstract **Digraf**

- eliminaArc()
  - intrare: $D = (V, A),\ i, j \in V$
  - ieșire: $D = (V, A–(i, j))$
- eliminaVarf()
  - intrare: $D = (V, A),\ V = \{0, 1, \cdots, n-1\},\ k$
  - ieșire: $D = (V', A'),\ V' = \{0, 1, \cdots, n-2\}$

$$\begin{aligned}\{i', j'\} \in A' \Leftrightarrow (\exists \{i, j\} \in A)\ & i \neq k, j \neq k,\\ & i' = \mathit{if}\ (i < k)\ \mathit{then}\ i\ \mathit{else}\ i-1,\\ & j' = \mathit{if}\ (j < k)\ \mathit{then}\ j\ \mathit{else}\ j-1\end{aligned}$$

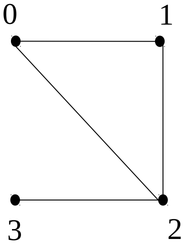
Tipul de date abstract **Digraf**

- listaDeAdiacentaExterioara()
  - intrare: $D = (V, A),\ i \in V$
  - ieșire: lista vârfurilor destinatare ale arcelor care pleacă din i
- listaDeAdiacentaInterioara()
  - intrare: $D = (V, A),\ i \in V$
  - ieșire: lista vârfurilor sursă ale arcelor care sosesc în i
- listaVarfurilorAccesibile()
  - intrare: $D = (V, A),\ i \in V$
  - ieșire: lista vârfurilor accesibile din i

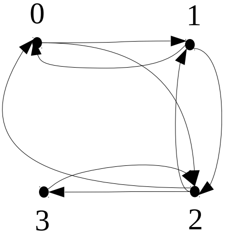
Reprezentarea grafurilor ca digrafuri

$G = (V, E) \implies D(G) = (V, A)$
$i, j \in E \implies (i, j),\ (j, i) \in A$

- topologia este păstrată
  - lista de adiacență a lui i în G = lista de adiacență exterioară (=interioară) a lui i în D



$\Rightarrow$



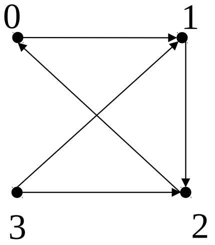
Conținut

Implementarea cu matrici de adiacență a digrafurilor

- reprezentarea digrafurilor
  - n numărul de vârfuri
  - m numărul de arce (opțional)
  - o matrice $(a[i,j] \mid 1 \leq i,\ j \leq n)$
    $a[i,j] = \textit{if}\ (i,j) \in A\ \textit{then}\ 1\ \textit{else}\ 0$
  - dacă digraful reprezintă un graf, atunci $a[i,j]$ este simetrică
  - lista de adiacență exterioară a lui $i \subseteq$ linia i
  - lista de adiacență interioară a lui $i \subseteq$ coloana i

Implementarea cu matrici de adiacență

	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	0	0	1	0
2	1	0	0	0
3	0	1	1	0



Implementarea cu matrici de adiacență

- operații
  - digrafVid
    $n \leftarrow 0; \;\; m \leftarrow 0$
  - insereazaVarf: $O(n)$
  - insereazaArc: $O(1)$
  - eliminaArc: $O(1)$

Implementarea cu matrici de adiacență

- eliminaVarf()

Procedure *eliminaVirf(a, n, k)*
begin
    for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
        for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
            if $(i > k)$ **then**
                $a[i-1, j] \leftarrow a[i, j]$
            if $(j > k)$ **then**
                $a[i, j-1] \leftarrow a[i, j]$
    $n \leftarrow n-1$
end

timp de execuție: $O(n^2)$

- listaVarfurilorAccesibile()

Procedure *inchReflTranz(a, n, b) // (Warshall, 1962)*
begin
    for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
        for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
            $b[i,j] \leftarrow a[i,j]$
            if $(i = j)$ **then**
                $b[i,j] \leftarrow 1$
    for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
        for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
            if $(b[i,k] = 1)$ **then**
                for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
                    if $(b[k,j] = 1)$ **then**
                        $b[i,j] \leftarrow 1$
end

timp de executie: $O(n^3)$

Conținut

Tipul abstract Graf

Tipul abstract Digraf

Implementarea cu matrici de adiacență

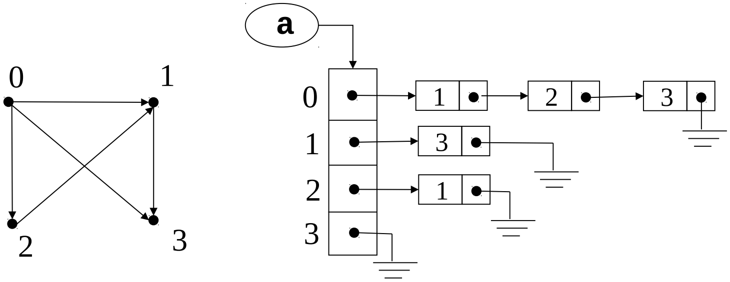
Implementarea cu liste de adiacență înlănțuite

Algoritmi de parcurgere (DFS, BFS)

Determinarea componentelor (tare) conexe

Implementarea cu liste de adiacență

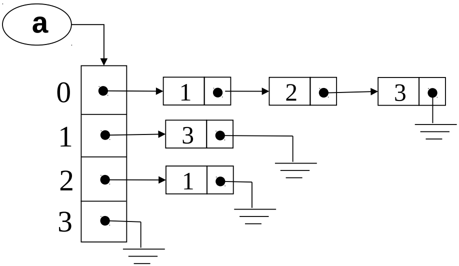
- reprezentarea digrafurilor cu liste de adiacență exterioară



  - un tablou $a[0..n-1]$ de liste înlănțuite (pointeri)
  - $a[i]$ este lista de adiacență exterioară corespunzătoare lui i

Implementarea cu liste de adiacență

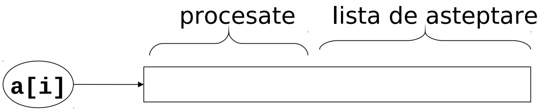
- operații
  - digrafVid
  - insereazaVarf: $O(1)$
  - insereazaArc: $O(1)$
  - eliminaVarf: $O(n+m)$
  - eliminaArc: $O(m)$



Conținut

Digrafuri: explorare sistematică

- se gestionează două mulțimi
  - S = mulțimea vârfurilor vizitate deja
  - $SB \subseteq S$ submulțimea vârfurilor pentru care există șanse să găsim vecini nevizitați încă
- lista de adiacență (exterioară) a lui i este divizată în două:



Digrafuri: explorare sistematică

- pasul curent
  - citește un vârf i din SB
  - extrage un j din lista de "așteptare" a lui i (dacă este nevidă)
  - dacă j nu este în S, atunci îl adaugă la S și la SB
  - dacă lista de "așteptare" a lui i este vidă, atunci elimină i din SB
- inițial
  - $S = SB = \{i_0\}$
  - lista de "așteptare a lui i" $=$ lista de adiacenta a lui i
- terminare $SB = \emptyset$

Digrafuri: explorare sistematică

Procedure *explorare(a, n, i0, S)*
begin
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $p[i] \leftarrow a[i]$
  $SB \leftarrow (i0); S \leftarrow (i0)$
  $viziteaza(i0)$
  while $(SB \neq \emptyset)$ **do**
    $i \leftarrow citeste(SB)$
    if $(p[i] = NULL)$ **then**
      $SB \leftarrow SB - \{i\}$
    else
      $j \leftarrow p[i]->varf$
      $p[i] \leftarrow p[i]->succ$
      if $(j \notin S)$ **then**
        $SB \leftarrow SB \cup \{j\}$
        $S \leftarrow S \cup \{j\}$
        $viziteaza(j)$
end

Teorema

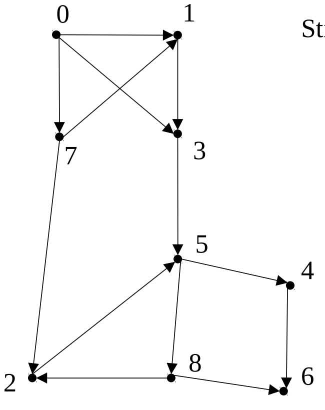
În ipoteza că operațiile peste S *și* SB *precum și* $viziteaza()$ *se realizează în* $O(1)$*, complexitatea timp, în cazul cel mai nefavorabil, a algoritmului explorare este* $O(n+m)$*.*

Explorarea DFS (*Depth First Search*)

- SB este implementată ca stivă

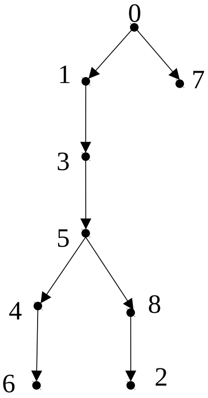
$$
\begin{aligned}
SB \leftarrow (i0) \Leftrightarrow & SB \leftarrow stivaVida() \\
& push(SB, i0) \\
i \leftarrow citeste(SB) \Leftrightarrow & i \leftarrow top(SB) \\
SB \leftarrow SB - \{i\} \Leftrightarrow & pop(SB) \\
SB \leftarrow SB \cup \{j\} \Leftrightarrow & push(SB, j)
\end{aligned}
$$

Explorarea DFS: exemplu



Stiva

6	2	
4	8	
5	5	
3	3	
1	1	7
0	0	0



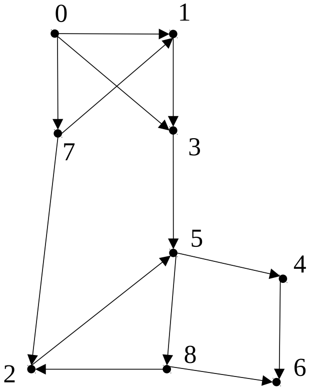
Arborele DFS

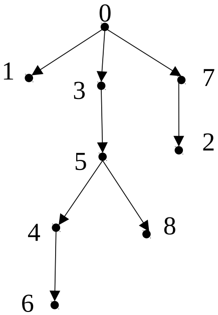
Explorarea BFS (*Breadth First Search*)

- SB este implementată ca o coadă

$$
\begin{aligned}
SB \leftarrow (i0) \Leftrightarrow & SB \leftarrow coadaVida(); \\
& insereaza(SB, i0) \\
i \leftarrow citeste(SB) \Leftrightarrow & citeste(SB, i) \\
SB \leftarrow SB - \{i\} \Leftrightarrow & elimina(SB) \\
SB \leftarrow SB \cup \{j\} \Leftrightarrow & insereaza(SB, j)
\end{aligned}
$$

Explorarea BFS: exemplu





Arborele BFS

Conținut

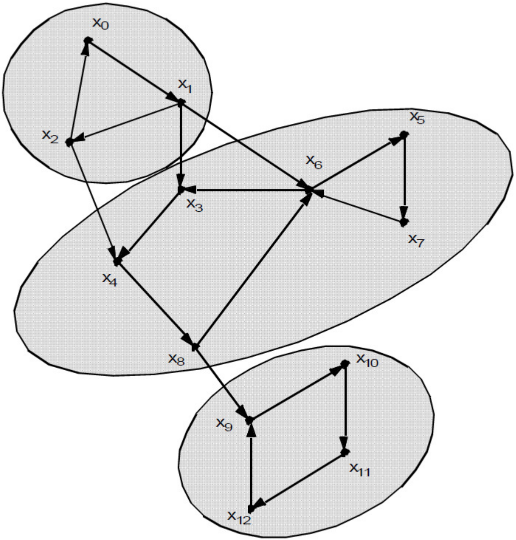
Determinarea componentelor conexe (grafuri neorientate)

```
Function CompConexeDFS(D)
begin
    for i ← 0 to n − 1 do
        culoare[i] ← 0
    k ← 0
    for i ← 0 to n − 1 do
        if  (culoare[i] = 0) then
            k ← k + 1
            DfsRecCompConexe(i, k)
    return k
end
```

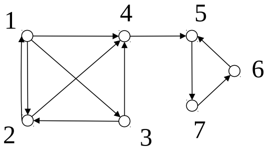
Determinarea componentelor conexe (grafuri neorientate)

Procedure *DfsRecCompConexe(i, k)*
begin
    $culoare[i] \leftarrow k$
    for *(fiecare vârf j în listaDeAdiac(i))* **do**
        if $(culoare[j] = 0)$ **then**
            $DfsRecCompConexe(j, k)$
end

Componente tare conexe (digrafuri)

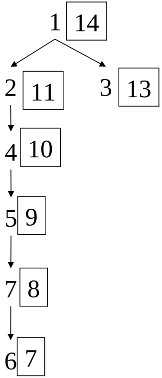


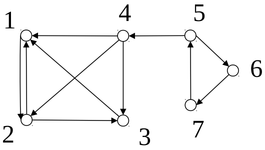
Componente tare conexe: exemplu



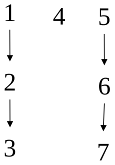
D

$1 \rightarrow (2, 3, 4)$
$2 \rightarrow (1, 4)$
$3 \rightarrow (2, 4)$
$4 \rightarrow (5)$
$5 \rightarrow (7)$
$6 \rightarrow (5)$
$7 \rightarrow (6)$





D^T



```
Procedure DfsCompTareConexe(D)
begin
    for i ← 0 to n − 1 do
        culoare[i] ← 0
        tata[i] ← −1
    timp ← 0
    for i ← 0 to n − 1 do
        if  (culoare[i] = 0) then
            DfsRecCompTareConexe(i)
end
```

Determinarea componentelor tare conexe

Procedure *DfsRecCompTareConexe(i)*
begin
    $timp \leftarrow timp + 1$
    $culoare[i] \leftarrow 1$
    for *(fiecare vârf j in listaDeAdiac(i))* **do**
        if $(culoare[j] = 0)$ **then**
            $tata[j] \leftarrow i$
            $DfsRecCompTareConexe(j)$
    $timp \leftarrow timp + 1$
    $timpFinal[i] \leftarrow timp$
end

Determinarea componentelor tare conexe

Notație: $D^T = (V, A^T)$, $(i,j) \in A \Leftrightarrow (j,i) \in A^T$

Procedure *CompTareConexe(D)*
begin

1. $DFSCompTareConexe(D)$
2. calculează D^T
3. $DFSCompTareConexe(D^T)$ dar considerând în bucla *for* principală vârfurile în ordinea descrescătoare a timpilor finali de vizitare $timpFinal[i]$
4. returnează fiecare arbore calculat la pasul 3 ca fiind o componentă tare conexă separată

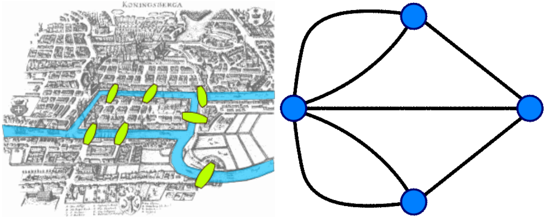
end

Determinarea componentelor tare conexe: complexitate

- $DFSCompTareConexe(D)$: $O(n + m)$
- calculează D^T: $O(m)$
- $DFSCompTareConexe(D^T)$: $O(n + m)$
- Total: $O(n + m)$

Aplicații

Problema celor șapte poduri peste Konigsberg (1736): pornind dintr-o zonă, putem traversa cele 7 poduri o singură dată?



Zonele: vârfuri, podurile: muchii
Este posibil să alegem un vârf, să parcurgem muchiile și să ne intoarcem în varful ales, acoperind toate muchiile o dată?

Aplicații

- Algoritmică, probleme de drum, rețele de calculatoare (rutare), genomică (rețele de aliniere, asamblarea genomului), *multi-relational data mining*, cercetări operaționale (planificare), inteligență artificială (satisfacerea restricțiilor), etc.
- Motorul de căutare Google: algoritmul *PageRank* - pentru a determina cât de importantă este o anumită pagină
- Sistem informațional geografic (*GIS*): *Google Maps*, *Bing Maps*
- Rețele sociale