Seminar - Algoritmi Greedy

1 Exerciții obligatorii

1.1 Problema selecției activităților

1. Arătați că strategiile greedy care urmează nu conduc întotdeauna la soluția optimă:
   - selectează activitatea cea mai scurtă (care nu se suprapune cu activitățile deja alese);
   - selectează activitatea care se suprapune cu cât mai puține alte activități (și care nu se suprapune cu activitățile deja alese).
2. Scrieți în Alk algoritmul greedy care rezolvă problema.

1.2 Problema plății unei sume cu număr cât mai mic de bancnote

1. Imaginați-vă că trăiți într-o țară în care sunt disponibile bancnote de 1 leu, de 7 lei și de 8 lei. Dați exemplu de o sumă de bani pentru care strategia greedy descrisă mai sus nu produce soluția optimă.

   (în continuare presupunem că avem la dispoziție bancnotele standard)
2. Scrieți în Alk algoritmul greedy pentru plata unei sume de bani folosind număr minim de bancnote.
3. Identificați subproblemele pe care le rezolvă algoritmul greedy.
4. Demonstrați proprietatea de alegere greedy: Fie b valoarea celei mai mari bancnote care este mai mică decât suma s de achitat. Atunci există o soluție optimă de a plăti s care începe cu b.
5. Enunțați și demonstrați proprietatea de substructură optimă (demonstrația în sine este foarte ușoară).

1.3 Matroizi

1. Fie $M = (S, I)$ un matroid. Arătați că $\emptyset \in I$.
2. Fie $M = (S, I)$ un matroid. Arătați că orice mulțime maximală (dpdv al incluziunii) din I are același cardinal.
3. Arătați că matroidul M_G asociat grafului G (definit în notele de curs) este într-adevăr matroid.

2 Exerciții suplimentare

1. Demonstrați că algoritmul greedy produce soluția optimă dacă bancnotele disponibile sunt puteri ale unui număr (e.g. 1, 2, 4, 8, ...).

2. Arătați că problema selecției activităaților în care vectorul f este ordonat și problema selecției activităților în care vectorul f nu este neapărat ordonat se reduc una la cealaltă (formalizați-le întâi ca pereche input-output).

3. Găsiți încă o strategie greedy pentru problema selecției activităților care să conducă la soluția optimă.

4. Găsiți un algoritm care primește n puncte $x_1, \ldots, x_n$ de pe dreapta Ox și găsește numărul minim de *intervale-unitate* ($[a, b]$ este *interval-unitate* dacă $b = a + 1$) care acoperă toate punctele.

5. Găsiți codul Huffman corespunzător următoarelor frecvențe: $1, 1, 2, 3, 5, 8$, etc.

6. Arătați că (S, I_k) este matroid, dacă S este o mulțime finită și I_k este mulțimea tuturor submulțimilor lui S de cardinal $\leq k$.

7. Căutați algoritmul lui Prim în literatură și arătați că produce soluția optimă. Poate fi exprimat cu ajutorul matroizilor?