Seminar 9

Apariţii libere şi legate ale variabilelor

Fie F $\in$ **LP1** şi x $\in \mathcal{X}$, astfel încât x apare în F. Apariţia fixată a lui x se numeşte legată dacă este într-o subformulă G a unei subformule a lui F de forma $(\forall x)(G)$ sau $(\exists x)(G)$. În restul cazurilor, apariţia considerată se numeşte liberă.

Substituție elementară este o pereche de tipul [x/t], unde x $\in \mathcal{X}$, t $\in \mathcal{T}$.

Prin **substituţie** vom înţelege o secvenţă finită de forma $s = [x_1/t_1]\bullet[x_2/t_2]\bullet \ldots \bullet[x_n/t_n]$, $n\in N$, $x_i\in\mathcal{X}$, $t_i\in\mathcal{T}$.

O substituţie s se aplică unei formule F, rezultând o formulă G, notată (F)s, care se obţine din F prin *înlocuirea fiecărei apariţii libere* a variabilei x_i cu termul t_i, în ordinea dată în s.

Substituţia elementară [x/t] este **permisă** pentru F dacă t nu conţine variabile libere care au apariţii legate în F.

O substituţie s este **normalizată** pentru F dacă (F)s = (F)s', pentru fiecare s' care este obţinută din s printr-o *permutare* a componentelor acesteia, deci ordinea de aplicare a substituţiilor elementare componente nu contează.

Substituţia vidă, notată [], este o secvenţă de 0 substituții elementare și nu face nicio transformare în formula F căreia îi este aplicată, deci (F)[] = F.

Exerciții.

Să se aplice substituția [x/f(z)][z/a][y/z] formulelor:

$F_1 = (\forall x)(P(x, a) \wedge Q(y) \vee \neg(\exists z)P(z, x))$

$F_2 = (\exists x)(\forall z)(P(x, y, z) \vee \neg Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(X) \wedge R(f(x, z), a))$

$F_3 = P(x) \vee \neg P(y) \wedge (\forall z)(\exists x)Q(z, x)$

$F_4 = (\forall x)P(x, f(x)) \wedge Q(x) \vee \neg P(a, f(z))$

$F_5 = (\exists x)(\exists y)(P(f(x, a), f(a, y)))$

Semantica logicii cu predicate de ordinul I

Se numeşte **structură** un cuplu $\mathcal{S} = <\mathcal{U}_\mathcal{S}, I_\mathcal{S}>$ în care $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ este o mulţime **nevidă** numită **univers**, iar $I_\mathcal{S}$ este o funcţie (numită şi **interpretare**)

$$I_\mathcal{S} : \mathcal{X} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}_\mathcal{S} \cup [\mathcal{U}_\mathcal{S}^* \rightarrow \mathbf{B}] \cup [\mathcal{U}_\mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{U}_\mathcal{S}],$$

care satisface condiţiile:

- Dacă $x \in \mathcal{X}$, atunci $I_\mathcal{S}(x) \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$.
- Dacă $P \in \mathcal{P}_n$, atunci $I_\mathcal{S}(P) : \mathcal{U}_\mathcal{S}^n \rightarrow \mathbf{B}$.
- Dacă $F \in \mathcal{F}_\mathbf{n}$, atunci $I_\mathcal{S}(F) : \mathcal{U}_\mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{U}_\mathcal{S}$.

Pentru fiecare structură $\mathcal{S} = <\mathcal{U}_\mathcal{S}, I_\mathcal{S}>$, vom numi **extensia sa funcţia**

$$\mathcal{S}' : \mathcal{X} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{T} \cup \mathbf{LP1} \rightarrow \mathcal{U}_\mathcal{S} \cup [\mathcal{U}_\mathcal{S}^* \rightarrow \mathbf{B}] \cup [\mathcal{U}_\mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{U}_\mathcal{S}] \cup \mathbf{B},$$

Baza: $\mathcal{S}'(a) = \mathcal{S}(a)$, pentru fiecare $a \in \mathcal{X} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$

Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, orice $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ şi orice $f \in \mathcal{F}_n$, astfel încât $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$

$\mathcal{S}'(t) = \mathcal{S}(f)(\mathcal{S}'(t_1), \mathcal{S}'(t_2), \dots, \mathcal{S}'(t_n))$ $(\in \mathcal{U}_\mathcal{S})$.

Fie $F = A \in \mathcal{A}t$.

În această situaţie avem fie $A \in \mathcal{P}_0$ fie $A = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, $t_1, t_2, \dots\dots, t_n \in \mathcal{T}$.

În primul caz $\mathcal{S}'$ este deja definită ($\mathcal{S}'(P) = \mathcal{S}(P) \in \mathbf{B}$), iar în al doilea caz

$\mathcal{S}'(P) = \mathcal{S}(P)(\mathcal{S}'(t_1), \mathcal{S}'(t_2), \dots, \mathcal{S}'(t_n)) \in \mathbf{B}$.

Pas constructiv. Vom avea de considerat cazurile:

(i) $F = (\rceil F_1)$. Atunci $\mathcal{S}'(F) = \overline{\mathcal{S}'(F_1)}$.

(ii) $F = (F_1 \wedge F_2)$. Atunci $\mathcal{S}'(F) = \mathcal{S}'(F_1) \bullet \mathcal{S}'(F_2)$.

(iii) $F = (F_1 \vee F_2)$. Atunci $\mathcal{S}'(F) = \mathcal{S}'(F_1) + \mathcal{S}'(F_2)$.

(iv) $F = (\forall x)(G)$. Atunci $\mathcal{S}'(F) = 1$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$ avem $\mathcal{S}'_{[x/u]}(G) = 1$ unde $\mathcal{S}'_{[x/u]}$ este o interpretare care coincide în totalitate cu $\mathcal{S}'$ exceptând faptul că $\mathcal{S}'(x) = u$.

(v) $F = (\exists x)(G)$. Atunci $\mathcal{S}'(F) = 1$ dacă şi numai dacă există (măcar) un element $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$ astfel încât $\mathcal{S}'_{[x/u]}(G) = 1$.

Exerciţiu.

Pentru formula F_3 de mai sus determinaţi o structură $S_1 = <U_S, I_S>$ astfel încât $S_1(F_3) = 0$ şi o altă structură S_2 astfel încât $S_2(F_3) = 1$.