

Testul 2 la "MATEMATICĂ" / IIB & IX1₂₉₋₅₇
(seria 2016 - 2017 / 24.11.2016)

Numele și prenumele
studentului participant la test:

Anul și grupa
din care face parte studentul:

SUBIECTELE ȘI BAREMUL GENERAL

Bonusul de participare: 15 puncte

Subiectul 1 (25 de puncte)

Fie $g : \mathcal{B} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n^2+1)-2\ln n)^b}{9n^2-3n-2}$, $\forall b \in \mathcal{B}$.

- i) Să se determine \mathcal{B} ca mulțime maximă de definiție a funcției g . (17 p)
- ii) Să se calculeze $g(0)$. (8 p)

Subiectul 2 (25 de puncte)

Se consideră mulțimea

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \}.$$

- j) Să se arate că W , înzestrată cu operațiile de adunare a elementelor sale și de înmulțire cu numere reale, este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$, generat de doi vectori între care există, în raport cu produsul scalar canonic definit pe \mathbb{R}^4 , un unghi având o valoare în intervalul $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$. (13 p)
- jj) Să se găsească, în raport cu același produs scalar, o bază ortogonală a subspațiului $(Sp(W))^\perp$. (12 p)

Subiectul 3 (20 de puncte)

Fie (X, τ) un spațiu topologic oarecare și $B \in \mathcal{P}(X)$ o așa-denumită *mulțime frontieră*, adică o mulțime a cărei complementară este densă în X . Să se arate că:

- l) orice submulțime a lui B este tot o mulțime frontieră din cadrul spațiului (X, τ) . (10 p)
- ll) dacă B este, în plus, și închisă, atunci $B = Fr(B)$. (10 p)

Subiectul 4 (15 puncte)

Să se demonstreze că dacă $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ este un endomorfism ortogonal, atunci:

- v) orice valoare proprie a sa este nenulă. (7 p)
- vv) oricare vector propriu al lui S , corespunzător unei valori proprii μ , este vector propriu al adjunctului lui S , corespunzător valorii $\frac{1}{\mu}$. (8 p)

Precizări:

- 1) Toate subiectele sunt obligatorii.
- 2) Timpul total de lucru este de o oră și cincizeci de minute.
- 3) Nota acordată pentru soluționarea subiectelor reprezintă a zecea parte din întregul punctaj realizat.

F. Iacob / 22.11.2016