

Testul 2 la "MATEMATICĂ" / II A & IX 1<sub>1-28</sub>  
( seria 2016 - 2017 / 24.11.2016 )

Numele și prenumele  
studentului participant la test:

Anul și grupa  
din care face parte studentul:

SUBIECTELE ȘI BAREMUL GENERAL

Bonusul de participare: 15 puncte

Subiectul 1 (25 de puncte)

Fie  $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctg(3n+1) - \arctg(3n-2))^a}{16n^2 + 8n - 3}$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$ .

- i) Să se determine  $\mathcal{A}$  ca mulțime maximă de definiție a funcției  $f$ . (17 p)
- ii) Să se calculeze  $f(0)$ . ( 8 p)

Subiectul 2 (25 de puncte)

Se consideră mulțimea

$$M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \}.$$

j) Să se arate că  $M$ , înzestrată cu operațiile de adunare a elementelor sale și de înmulțire cu numere reale, este un subspațiu liniar al lui  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ , generat de doi vectori între care există, în raport cu produsul scalar canonic definit pe  $\mathbb{R}^4$ , un unghi având o valoare în intervalul  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ . ( 13 p )

jj) Să se găsească, în raport cu același produs scalar, o bază ortogonală a subspațiului  $(Sp(M))^{\perp}$ . (12 p )

Subiectul 3 (20 de puncte)

Fie  $(X, \tau)$  un spațiu topologic oarecare și  $A \in \mathcal{P}(X)$  o așa-denumită *mulțime frontieră*, adică o mulțime a cărei complementară este densă în  $X$ . Să se arate că:

- l) orice submulțime a lui  $A$  este tot o mulțime frontieră din cadrul spațiului  $(X, \tau)$ . (10 p)
- ll) în oricare mulțime nevidă și deschisă din  $(X, \tau)$ , există puncte care nu aparțin lui  $A$ . (10 p)

Subiectul 4 (15 puncte)

Să se demonstreze că dacă  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  este un endomorfism ortogonal, atunci:

- v) orice valoare proprie a sa este nenulă. ( 7 p )
- vv) oricare vector propriu al lui  $T$ , corespunzător unei valori proprii  $\lambda$ , este vector propriu al lui  $T^*$ , corespunzător valorii  $\frac{1}{\lambda}$ . ( 8 p )

Precizări:

- 1) Toate subiectele sunt obligatorii.
- 2) Timpul total de lucru este de o oră și cincizeci de minute.
- 3) Nota acordată pentru soluționarea subiectelor reprezintă a zecea parte din întregul punctaj realizat.

F. Iacob / 22.11.2016