

Cursul 6

Cadru topologic pentru \mathbb{R}^n

În continuarea precedentei părți, din cursul 5, dedicată, în întregime, unor aspecte de ordin algebric (relative la \mathbb{R}^n , în principal), sunt prezentate aici elemente cu caracter topologic legate de \mathbb{R}^n . Se definesc mai întâi noțiuni de bază din domeniul topologiei generale, după care sunt expuse chestiuni ce privesc spațiile metrice, cu referiri de interes la \mathbb{R}^n . În cele din urmă, sunt luate în atenție noțiunile de șir și de serie de elemente din \mathbb{R}^n și se dau, în context, caracterizări unor puncte și mulțimi de puncte topologic remarcabile.

Elemente de topologie generală

Inițiată, cu mai bine de un secol în urmă, în lucrările lui Karl Weierstrass și dezvoltată ulterior prin contribuțiile semnificative ale unor matematicieni ca J. W. Alexander, P. I. Alexandrov și S. Lefschetz, **topologia**, numită (până prin 1930) “analysis situs”, este, ca ramură a matematicii, disciplina care se ocupă de așa-numitele proprietăți topologice ale mulțimilor de puncte, adică de acele proprietăți care pot fi formulate folosind numai noțiunea de mulțime deschisă și noțiunile obișnuite din teoria mulțimilor, precum element, submulțime, complementară, reuniune, intersecție și alte asemenea. Totodată, ca ramură de sine-stătătoare a matematicii, topologia are în vedere și proprietățile de ordin specific ale funcțiilor, între care existența limitei (de un anumit tip) într-un punct și continuitatea într-un punct sau pe o mulțime sunt cele mai studiate. Devenită în prezent obiect fundamental al matematicii, topologia are aplicații aproape în toate domeniile științei, chiar și în cele nematematice, mai cu seamă în legătură cu demonstrarea unor rezultate de existență din cadrul acelor probleme ce reclamă soluții de un anumit fel, cu anumite proprietăți și care să aparțină anumitor mulțimi.

Ca entitate matematică în sine, noțiunea de topologie (structură topologică) pe o mulțime este introdusă de următoarea definiție.

Definiția 6.1 *Fie X o mulțime nevidă oarecare. Numim **topologie** (sau **structură topologică**) pe X o mulțime τ , de submulțimi (părți) ale lui X , care satisface următoarele condiții:*

- (AT1) $\emptyset, X \in \tau$;
- (AT2) orice reuniune de elemente (mulțimi) din τ este un element al lui τ ;
- (AT3) orice intersecție finită de mulțimi din τ aparține lui τ .

Exemple:

- a) Mulțimea τ_0 a tuturor submulțimilor D ale lui \mathbb{R} , pentru care, fiecărui punct $x \in D$ îi corespunde un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} \subseteq D$, este, după cum, fără dificultate, se poate constata, prin verificarea axiomelor (AT1) - (AT3), o topologie pe \mathbb{R} . Aceasta se numește **topologia uzuală (obișnuită) pe mulțimea numerelor reale**.
- b) Oricare ar fi mulțimea X , mulțimea tuturor părților sale, adică mulțimea $\mathcal{P}(X)$ este desigur o topologie pe X , deoarece verifică (AT1) - (AT3). Aceasta este denumită **topologie discretă** pe X .
- c) Pentru o mulțime oarecare X , diferită de \emptyset , mulțimea $\{\emptyset, X\}$ îndeplinește (AT1) - (AT3) și este deci o topologie pe X , denumită **topologie grosieră (nondiscretă)** (pe X).

Definiția 6.2 Spunem că topologia τ_1 , pe o mulțime X , este **mai puțin fină** decât topologia τ_2 , pe aceeași mulțime X , sau, altfel zis, topologia τ_2 este **mai fină** decât τ_1 dacă $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Se notează aceasta prin $\tau_1 \preceq \tau_2$.

Observații:

- i) Relația binară de “finețe” pe mulțimea topologiilor (pe o aceeași mulțime X) este, cu evidență, o relație de ordine (parțială).
- ii) Pe orice mulțime X , topologia grosieră este cea mai puțin fină (decât orice altă topologie), iar topologia discretă este cea mai fină.

Definiția 6.3 Un cuplu (X, τ) , în care X este o mulțime, iar τ o topologie pe X , se numește **spațiu topologic**.

Exemplu: (\mathbb{R}, τ_0) este spațiul topologic uzual al mulțimii numerelor reale.

Definiția 6.4 j) Într-un spațiu topologic (X, τ) , se numește **mulțime deschisă** (sau **τ -deschisă**) orice submulțime a lui X care aparține topologiei τ .

j) O submulțime a mulțimii X se numește **închisă** dacă complementara ei (în raport cu X) este deschisă.

Propoziția 6.1 Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, atunci:

1. \emptyset și X sunt mulțimi închise;
2. orice reuniune finită de mulțimi închise este mulțime închisă;
3. o intersecție oarecare de mulțimi închise este mulțime închisă.

Demonstrație: 1. Potrivit Definiției 6.1 (AT1) și Definiției 6.4 j), \emptyset este o mulțime deschisă. Rezultă atunci că $X = X \setminus \emptyset$ este, în conformitate cu Definiția 6.4 jj), o mulțime închisă. Totodată, pe baza Definiției 6.1 (AT1) și a Definiției 6.4 j), mulțimea X este deschisă, de asemenea. În consecință, complementara ei față de X , adică mulțimea \emptyset este închisă.

2. Cum, în conformitate cu (AT3) (din Definiția 6.1), orice intersecție finită de mulțimi din τ , adică mulțimi deschise (potrivit Definiției 6.4 jj)), este tot o mulțime din τ , deci deschisă, se poate deduce lesne, prin complementariere în raport cu X și folosire a regulilor lui De Morgan, că oricare reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă.

3. În mod asemănător, folosind (AT2), complementarierea față de X și regulile lui De Morgan, obținem faptul că o intersecție oarecare de mulțimi închise este mulțime închisă. ◀

Definiția 6.5 Dacă A este o mulțime nevidă dintr-un spațiu topologic (X, τ) , atunci $\tau_A = \{A \cap D \mid D \in \tau\}$ se numește **urma topologiei τ pe A** .

Exemplu: Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, mulțimea $\tau_{[a,b]}^0 = \{[a, b] \cap D \mid D \in \tau_0\}$ este urma topologiei reale uzuale τ_0 pe mulțimea $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ (intervalul închis $[a, b]$).

Definiția 6.6 Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subseteq X$. Se numește **vecinătate a mulțimii A** orice submulțime V a lui X care include o mulțime deschisă D ($D \in \tau$) astfel încât, la rândul său, D o include pe A ($A \subseteq D \subseteq V$). În cazul în care $A = \{x\}$, unde x este un element al mulțimii X , V se numește **vecinătate a lui x** .

Este de remarcat faptul că dacă V este o vecinătate a unei mulțimi $A \subset (X, \tau)$, atunci V este vecinătate pentru orice element $a \in A$ și reciproc.

Propoziția 6.2 *Oricare ar fi un element arbitrar x al unui spațiu topologic (X, τ) , mulțimea tuturor vecinătăților sale, notată cu $\mathcal{V}(x)$, are următoarele proprietăți:*

(PV1) *dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subseteq U \subseteq X$, atunci $U \in \mathcal{V}(x)$.*

(PV2) *oricare ar fi mulțimea finită $\{V_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{V}(x)$, intersecția $\bigcap_{i \in I} V_i$ aparține mulțimii $\mathcal{V}(x)$;*

(PV3) $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$;

(PV4) $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x)$, astfel încât, $\forall y \in W, V \in \mathcal{V}(y)$.

Demonstrație: Pentru (PV1): $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \tau$ cu $x \in D \subseteq V$. Cum $V \subseteq U \subseteq X$, urmează că $x \in D \subseteq U$. Ca atare, $U \in \mathcal{V}(x)$, în conformitate cu Definiția 6.6.

Relativ la (PV2): $\forall V_i \in \mathcal{V}(x), i \in I, \exists D_i \in \tau$, astfel încât $x \in D_i \subseteq V_i, \forall i \in I$. Atunci $\bigcap_{i \in I} D_i \in \tau$

(conform axiomei (AT3) din Definiția 6.1) și $x \in \bigcap_{i \in I} D_i \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i$. Deci $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(x)$.

(PV3) are loc, cu evidentă, în virtutea Definiției 6.6.

În ceea ce privește (PV4), pe baza Definiției 6.6, deducem că, $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists D \in \tau$ așa încât $x \in D \subseteq V$. Se poate spune că $D \in \mathcal{V}(x)$, deocamdată. Întrucât avem $y \in D \subseteq V, \forall y \in D$, putem afirma că $D \in \mathcal{V}(y)$, de asemenea. Așadar, luând $W = D$, are loc (PV4). ◀

Observație: Proprietățile (PV1) - (PV4) sunt caracteristice pentru un sistem de vecinătăți $\mathcal{V}(x)$. Mai exact, se poate arăta că, dacă fiecărui punct x dintr-o mulțime X i se asociază o mulțime $\tilde{\mathcal{V}}(x)$, de părți din X , astfel încât $\tilde{\mathcal{V}}(x)$ să satisfacă (PV1) - (PV4), atunci există o structură topologică $\tilde{\tau}$, unică, pe X , în raport cu care, pentru orice $x \in (X, \tilde{\tau})$, să avem $\mathcal{V}(x) = \tilde{\mathcal{V}}(x)$, unde $\mathcal{V}(x)$ este sistemul de vecinătăți atașat punctului x , prin topologia $\tilde{\tau}$.

Definiția 6.7 a) Fie (X, τ) un spațiu topologic și $x \in X$. Numim **sistem fundamental de vecinătăți ale lui x** o mulțime $\mathcal{U}(x)$ de vecinătăți ale lui x care satisface condiția că, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, există $U \in \mathcal{U}(x)$, astfel încât $U \subseteq V$.

b) Într-un spațiu topologic (X, τ) , se numește **bază a topologiei τ** o familie \mathcal{B} de mulțimi deschise (din τ) în raport cu care orice mulțime $D \in \tau$ se poate reprezenta ca reuniune de mulțimi din \mathcal{B} .

Propoziția 6.3 *O mulțime \mathcal{B} de părți deschise dintr-un spațiu topologic (X, τ) este o bază pentru topologia τ dacă și numai dacă, oricare ar fi punctul $x \in (X, \tau)$, familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți pentru x .*

Demonstrație: Dacă (X, τ) este un spațiu topologic în care \mathcal{B} este o bază pentru topologia τ , x este un punct arbitrar din (X, τ) și $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci există $D \in \tau$ așa încât $x \in D \subseteq V$. În plus, D se reprezintă ca o reuniune de mulțimi din \mathcal{B} . Există deci $B \in \mathcal{B}$, astfel încât $x \in B \subseteq D$. Prin urmare, avem $B \subseteq V$. Ținând seama de Definiția 6.7 a), putem trage concluzia că \mathcal{B}_x este un sistem fundamental de vecinătăți pentru punctul x .

Reciproc, admitând că, pentru orice $x \in (X, \tau)$, mulțimea \mathcal{B}_x este un sistem fundamental de vecinătăți pentru x și considerând o mulțime deschisă oarecare D (din τ), precum și un punct y arbitrar din D , putem vedea că, întrucât $D \in \mathcal{V}(y)$, există o mulțime $B_y \in \mathcal{B}_y$ astfel încât $B_y \subseteq D$.

În consecință, avem: $\bigcup_{y \in D} B_y \subseteq D$. În același timp, cum, pentru orice $y \in D$, avem $y \in B_y$, rezultă:

$D \subseteq \bigcup_{y \in D} B_y$. Așadar, $D = \bigcup_{y \in D} B_y$, adică D se reprezintă ca o reuniune de mulțimi din \mathcal{B} . ◀

Exemple:

- 1) Familia $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$, unde X este o mulțime nevidă oarecare, constituie o bază pentru $\mathcal{P}(X)$, topologia discretă pe X .
- 2) Familia mulțimilor de tipul $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$, formează o bază pentru τ_0 , topologia uzuală pe \mathbb{R} .

În cele ce urmează, sunt date definiții și proprietăți ale unor puncte și submulțimi remarcabile dintr-un spațiu topologic oarecare (X, τ) .

Definiția 6.8 a) Fie A o parte nevidă a spațiului topologic (X, τ) . Un element x_0 din A se numește **punct interior al mulțimii** A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică dacă A este vecinătate pentru x_0 .

b) Mulțimea tuturor punctelor interioare ale unei mulțimi $A \subseteq (X, \tau)$ se numește **interiorul mulțimii** A și se notează prin \mathring{A} (sau $\text{int}(A)$).

Teorema 6.1 Într-un spațiu topologic (X, τ) , arbitrar, sunt adevărate următoarele relații și afirmații:

$$1^\circ. \mathring{A} \subseteq A, \forall A \subseteq X;$$

$$2^\circ. A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}, \forall A, B \subseteq X;$$

$$3^\circ. \widehat{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}, \forall A, B \subseteq X;$$

$$4^\circ. \mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cup B}, \forall A, B \subseteq X;$$

$$5^\circ. \mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D, \forall A \subseteq X;$$

$$6^\circ. A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathring{A}.$$

Demonstrație: Relația 1° este, clar, evidentă. Pentru 2° , fie $x \in \mathring{A}$, oarecare. Atunci $A \in \mathcal{V}(x)$ și, cum, prin ipoteză, $A \subseteq B$, rezultă, pe baza (PV1) (din Propoziția 6.2), că $B \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \mathring{B}$. Altfel spus, $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, ori de câte ori $A \subseteq B$. Pentru 3° , în virtutea relației 2° , pe baza faptului că $A \cap B \subseteq A$ și $A \cap B \subseteq B$, vedem că $\widehat{A \cap B} \subseteq \mathring{A}$ și $\widehat{A \cap B} \subseteq \mathring{B}$. Deci $\widehat{A \cap B} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Dar are loc și incluziunea inversă, după cum urmează: $\forall x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow x \in \mathring{A}$ și $x \in \mathring{B}$, adică $A \in \mathcal{V}(x)$ și $B \in \mathcal{V}(x)$.

De aici, ținând cont de (PV2) (din Propoziția 6.2), rezultă că $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \widehat{A \cap B}$, adică $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cap B}$. În privința relației 4° , deoarece $A \subseteq A \cup B$ și $B \subseteq A \cup B$, avem $\mathring{A} \subseteq \mathring{A \cup B}$ și $\mathring{B} \subseteq \mathring{A \cup B}$, ținând seama de 2° . În consecință, deducem că $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \mathring{A \cup B}$. Pentru 5° , dacă x este un element arbitrar al lui \mathring{A} , există atunci o mulțime $D \in \tau$, astfel încât $x \in D \subseteq A$. Ca atare, $x \in \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$

și deci $\mathring{A} \subseteq \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$. Invers, dacă $x \in \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$, reiese că există $D \in \tau$, așa încât $x \in D \subseteq A$. Prin urmare,

$A \in \mathcal{V}(x)$ și, astfel, $x \in \mathring{A}$. Altfel spus: $\bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D \subseteq \mathring{A}$. În ceea ce privește 6° , dacă $A \in \tau$, rezultă că

$A \subseteq \bigcup_{\substack{D \subseteq A \\ D \in \tau}} D$, adică $A \subseteq \mathring{A}$, în virtutea relației 5° . Ținând cont și de 1° , obținem: $A = \mathring{A}$. Reciproc, dacă $A = \mathring{A}$, atunci, în virtutea relației 5° , reiese că $\mathring{A} \in \tau$, adică $A \in \tau$. ◀

Definiția 6.9 a) Un element x din X care este punct interior complementarei $X \setminus A$, unde $A \subseteq X$, se numește **punct exterior** al lui A .

b) Mulțimea punctelor exterioare unei mulțimi $A \subseteq X$ se numește **exteriorul** lui A și se notează $Ext(A)$.

Propoziția 6.4 Un element x dintr-un spațiu topologic (X, τ) este punct exterior pentru o mulțime $A \subseteq X$ dacă și numai dacă există cel puțin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \emptyset$.

Demonstrație: $x \in Ext(A) \Leftrightarrow x \in \widehat{X \setminus A} \Leftrightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists D \in \tau$, cu $x \in D \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow \exists D \in \tau$, $x \in D$ și $D \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \cap A = \emptyset$. ◀

Definiția 6.10 i) Un element x dintr-un spațiu topologic (X, τ) se numește **punct aderent** pentru o mulțime $A \subseteq X$ dacă $V \cap A \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$.

ii) Mulțimea tuturor punctelor aderente ale unei mulțimi A din spațiul topologic (X, τ) se numește **aderența** (sau **închiderea**) mulțimii A și se notează cu \overline{A} .

Teorema 6.2 În orice spațiu topologic (X, τ) , au loc următoarele relații și afirmații:

$$1^\circ. A \subseteq \overline{A}, \forall A \subseteq X;$$

$$2^\circ. A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}, \forall A, B \subseteq X;$$

$$3^\circ. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \forall A, B \subseteq X;$$

$$4^\circ. \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}, \forall A, B \subseteq X;$$

$$5^\circ. \overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F, \forall A \subseteq X;$$

$$6^\circ. (X \setminus A) \in \tau \Leftrightarrow A = \overline{A}.$$

Demonstrație: Pentru 1° , dacă x (oarecare) $\in A$, atunci, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $x \in V$ și deci $x \in V \cap A$, adică $V \cap A \neq \emptyset$. Altfel spus, $x \in \overline{A}$. Așadar: $A \subseteq \overline{A}$. Relativ la 2° , dacă $A \subseteq B$ și $x \in \overline{A}$, avem $\emptyset \neq V \cap A \subseteq V \cap B, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \overline{B}$, adică $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Cât privește 3° , ținând seama de 2° , din faptul că $A \subseteq A \cup B$ și $B \subseteq A \cup B$, rezultă că $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ și $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Deci: $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Reciproc, dacă $\forall x \in \overline{A \cup B}$, avem $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am presupune că $x \notin \overline{A}$ și $x \notin \overline{B}$, atunci vor exista două vecinătăți $V, W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \emptyset$ și $W \cap B = \emptyset$. Însă $U = V \cap W \in \mathcal{V}(x)$ și $U \cap (A \cup B) = \emptyset$ - ceea ce nu este posibil, atât timp cât, în realitate, $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset, \forall U \in \mathcal{V}(x)$. Pentru 4° , întrucât $A \cap B \subseteq A$ și $A \cap B \subseteq B$, prin 2° și intersecție, deducem că $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Privitor la 5° , se poate vedea, mai întâi, că $\overline{A} = X \setminus Ext(A)$, ceea ce înseamnă că \overline{A} este o mulțime închisă. Cum, din 1° , $A \subseteq \overline{A}$, avem: $\bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F \subseteq \overline{A}$. Invers, contând cu anticipație pe 6° , avem $\overline{F} = F, \forall F \subseteq X$, așa

încât $(X \setminus F) \in \tau$. Atunci, din faptul că $A \subseteq F$, în conformitate cu 1° , rezultă: $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{F} = F$.

De aici, luând intersecția după F , obținem: $\overline{A} \subseteq \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F$. Prin urmare, prin dublă incluziune, are

loc 5°. În fine, pentru 6°, dacă A este închisă, înseamnă că mulțimea $(X \setminus A)$ este deschisă. Deci $X \setminus A = \widehat{X \setminus A} = \text{Ext}(A)$. Atunci: $A = X \setminus \text{Ext}(A) = \overline{A}$. Reciproc, dacă $A = \overline{A}$, deducem că $A = X \setminus \text{Ext}(A)$, adică $X \setminus A = \text{Ext}(A) = \widehat{X \setminus A}$. Deci $(X \setminus A) \in \tau$, ceea ce înseamnă că A este închisă. ◀

Definiția 6.11 i) Fie $A \subseteq (X, \tau)$. Se numește **frontieră a mulțimii** A , notată cu $Fr(A)$ (sau cu ∂A), mulțimea $\overline{A} \cap X \setminus A$.

ii) O **mulțime** $A \subseteq (X, \tau)$ se numește **densă în** X , atunci când $\overline{A} = X$.

Exemplu: În (X, τ_0) , avem: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, mulțimea numerelor raționale este densă în \mathbb{R} , în raport cu topologia uzuală pe \mathbb{R} .

Definiția 6.12 Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subseteq X$.

a) Un element $x \in X$ se numește **punct de acumulare** pentru mulțimea A dacă, pentru orice vecinătate V a lui x , are loc relația

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

b) Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale unei mulțimi $A \subseteq (X, \tau)$ se numește **mulțime derivată** a lui A și se notează cu A' .

Propoziția 6.5 În orice spațiu topologic (X, τ) , sunt adevărate relațiile următoare:

$$1^\circ. A' \subseteq \overline{A}, \forall A \subseteq X;$$

$$2^\circ. A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B', \forall A, B \subseteq X;$$

$$3^\circ. (A \cup B)' = A' \cup B', \forall A, B \subseteq X.$$

Demonstrație: 1°. $\forall x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overline{A}$.

$$2^\circ. \forall x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x) \xrightarrow{A \subseteq B} \emptyset \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap B \Rightarrow x \in B'.$$

$$3^\circ. A \subseteq A \cup B \text{ și } B \subseteq A \cup B \Rightarrow A' \subseteq (A \cup B)' \text{ și } B' \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'.$$

Pe de altă parte, $\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset, \forall U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am avea $x \notin A'$ și $x \notin B'$, atunci ar exista două vecinătăți $V, W \in \mathcal{V}(x)$ așa încât $(V \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ și $(W \setminus \{x\}) \cap B = \emptyset$, de unde, notând cu $U = V \cap W$, am obține contradicția $(U \setminus \{x\}) \cap A = (U \setminus \{x\}) \cap B = \emptyset$. Așadar, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ și, ca atare, are loc 3°. ◀

Teorema 6.3 Dacă $A \subseteq (X, \tau)$, atunci:

$$j) \overline{A} = A \cup A';$$

$$jj) A = \overline{A} \iff A' \subseteq A.$$

Demonstrație: j) $A \subseteq \overline{A}$ și $A' \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Invers, dacă x (arbitrar ales) $\in \overline{A}$, atunci $V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. În această situație, există două posibilități: sau $x \in A$ sau $x \notin A$ și, inevitabil, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, adică $x \in A'$. Așadar: $x \in A \cup A'$. Altfel spus, avem și incluziunea $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

jj) Dacă $A = \overline{A}$, ținând seama de j), avem: $A = \overline{A} = A \cup A'$. Adică: $A' \subseteq A$. Reciproc, dacă $A' \subseteq A$, atunci: $\overline{A} = A \cup A' = A$. ◀

Definiția 6.13 i) Fie $A \subseteq (X, \tau)$, cu A nevidă. Un element x , din A , care nu este din A' , se numește **punct izolat** al lui A . Mulțimea punctelor izolate ale mulțimii A se numește **partea discretă a mulțimii** A și se notează cu $Iz(A)$ (sau cu $\mathcal{D}(A)$)

ii) Mulțimea $A \subseteq (X, \tau)$ se numește **discretă** dacă și numai dacă orice punct al său este un punct izolat, adică dacă $A = Iz(A)$ (sau $A \cap A' = \emptyset$).

Definiția 6.14 a) Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, unde (X, τ) este un spațiu topologic. Mulțimile A_1 și A_2 se numesc **separate** dacă și numai dacă există $D_1, D_2 \in \tau$, astfel încât: $A_1 \subseteq D_1, A_2 \subseteq D_2$ și $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

b) O mulțime $A \subseteq (X, \tau)$ se numește **neconexă** dacă și numai dacă există două mulțimi separate, A_1 și $A_2 \subseteq (X, \tau)$, astfel încât $A = A_1 \cup A_2$.

c) Mulțimea $A \subseteq (X, \tau)$ se numește **conexă** dacă și numai dacă A nu este neconexă.

Definiția 6.15 Fie (X, τ) un spațiu topologic.

a) O familie $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de părți ale lui X se numește **acoperire** a unei mulțimi $A \subseteq (X, \tau)$ dacă

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Dacă $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ și A este inclusă în $\bigcup_{U_i \in \tilde{\mathcal{U}}} U_i$, spunem că $\tilde{\mathcal{U}}$ este o **subacoperire** a lui \mathcal{U} . O acoperire

\mathcal{U} a lui A se numește **deschisă** dacă elementele U_i ale lui \mathcal{U} , $\forall i \in I$, sunt mulțimi deschise (adică $U_i \in \tau, \forall i \in I$).

b) O submulțime A a spațiului topologic (X, τ) se numește **compactă** dacă, din orice acoperire deschisă a sa, se poate extrage o subacoperire finită (adică având un număr finit de elemente).

Observație: Definițiile și rezultatele de mai sus sunt fără îndoială valide în cazul în care $X = \mathbb{R}^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Dotând pe \mathbb{R}^n cu o topologie τ , se poate vorbi despre spațiul topologic (\mathbb{R}^n, τ) și, în cadrul acestuia, noțiunile și proprietățile lor, prezentate în cadrul general de până aici, se vor păstra.

Spații metrice. Referiri la \mathbb{R}^n

Definiția 6.16 a) Fie X o mulțime nevidă. Se numește **distanță** (sau **metrică**) pe X , o funcție $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele condiții:

(AD1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$;

(AD2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ (simetria);

(AD3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiulară);

b) Perechea (X, d) , în care X este o mulțime nevidă și d este o metrică pe X , se numește **spațiu metric**.

Observație: Din Definiția 6.16, rezultă că, dacă (X, d) este un spațiu metric, atunci $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.

Exemple:

- 1) Fie $X = \mathbb{R}$ și $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $d_1(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Ținând seama de proprietățile funcției modul pe \mathbb{R} , se poate vedea că d_1 satisface axiomele (AD1) - (AD2), fiind deci o metrică pe \mathbb{R} , numită **metrică uzuală**. Astfel, (\mathbb{R}, d_1) este un spațiu metric.
- 2) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $X = \mathbb{R}^n$. Considerând $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

se poate constata ușor că d_2 îndeplinește (AD1) și (AD2). De asemenea, pe baza inegalității Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz, se verifică că d_2 satisface și (AD3). Prin urmare, d_2 este o metrică pe \mathbb{R}^n (numită **metrică euclidiană**), iar (\mathbb{R}^n, d_2) este un spațiu metric (euclidian).

Pe \mathbb{R}^n se mai pot defini, ca distanțe, și următoarele aplicații:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall p \geq 1, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{d}(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În particular, din metrica (Minkowski) d_p , pentru $p = 1$, se obține distanța (Manhattan) d_1 , definită prin:

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

iar pentru $p \rightarrow \infty$, se ajunge la distanța (Cebîșev) d_∞ , definită prin:

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- 3) Dacă X este o mulțime nevidă oarecare, aplicația $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y \\ 0, & \text{dacă } x = y \end{cases},$$

satisface, cu evidentă, axiomele (AD1) - (AD3) din Definiția 6.16, ceea ce înseamnă că d este o metrică pe X (numită **metrică discretă**). Spațiul (X, d) se numește **spațiu metric discret**.

- 4) Orice spațiu normat $(V, \|\cdot\|)$ (vezi Definiția 5.16 - b) este un spațiu metric, în raport cu distanța $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ori de câte ori $(V, +, \cdot)$ este un spațiu liniar real (peste \mathbb{R}), unde

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in V.$$

În acest caz, d se numește **distanța indusă de norma** $\|\cdot\|$. În general, nu orice distanță este indusă de o normă. Astfel, metrica \tilde{d} , definită mai sus pe \mathbb{R}^n , nu este indusă de nici o normă, întrucât $\tilde{d}(x, 0)$ nu satisface cea de-a doua axiomă din Definiția 5.16 a).

- 5) Orice spațiu prehilbertian real este un spațiu metric. Distanța în cauză este distanța indusă de norma dată de produsul scalar ce intervine în această situație. Se poate trage concluzia că, în raport cu orice produs scalar definit pe \mathbb{R}^n (deci și în raport cu produsul scalar euclidian), mulțimea \mathbb{R}^n , înzestrată cu metrica indusă de respectivul produs scalar (prin intermediul normei asociate lui), poate fi considerată că este un spațiu metric.
- 6) Fie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ și așa-numita **funcție a lui Baire**, $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}.$$

Prin intermediul acesteia, aplicația $d_f : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

satisface axiomele (AD1) - (AD3) din Definiția 6.16 a), fiind deci o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$. Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, d_f)$ este atunci un spațiu metric.

Definiția 6.17 Fie (X, d) un spațiu metric.

- a) **Distanța de la un element** $x \in X$ **la o mulțime nevidă** $A \subseteq X$ este notată cu $\rho(x, A)$ și egală, prin definiție, cu $\inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$.

Pentru mulțimea vidă \emptyset , se acceptă, prin convenție, că $\rho(x, \emptyset) = +\infty$.

- b) **Distanța dintre două mulțimi nevide** $A, B \subseteq (X, d)$ este definită prin:

$$\rho(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Prin convenție, $\rho(A, \emptyset) = \rho(\emptyset, A) = +\infty, \forall A \subseteq X$.

- c) Se numește **diametru al unei mulțimi nevide** $A \subseteq (X, d)$ elementul din $\overline{\mathbb{R}}$, notat cu $\rho(A)$ și dat de relația:

$$\rho(A) = \sup \{d(a, \tilde{a}) \mid a, \tilde{a} \in A\}.$$

Convențional, $\rho(\emptyset) = -\infty$.

Propoziția 6.6 Fie (X, d) un spațiu metric oarecare. Atunci, pe baza Definiției 6.17, au loc următoarele afirmații:

- i) $A \subseteq B \subseteq (X, d) \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(B)$
- ii) $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A$ este unipunctuală în (X, d) .

Definiția 6.18 Fie A o submulțime nevidă a spațiului metric (X, d) .

- j) A se numește **mărginită** dacă $\rho(A) < +\infty$.
- jj) A este numită **mulțime nemărginită** dacă $\rho(A) = +\infty$.

Pe o mulțime X , nevidă și dotată cu o metrică d , se pot introduce diferite structuri topologice, dintre care una este intim legată de metrica d , numindu-se **topologie compatibilă** (sau **generată**) **cu (de) această metrică**. În scopul precizării sale, introducem acum noțiunile de sferă deschisă și de bilă, în conformitate cu următoarea definiție.

Definiția 6.19 Fie (X, d) un spațiu metric, $x_0 \in X$ și $r \in \mathbb{R}_+^*$. Numim **sferă deschisă** (respectiv **închisă** sau **bilă**) de centru x_0 și rază r mulțimea $\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$, notată cu $S(x_0; r)$ (respectiv mulțimea $B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$).

Observație: Termenul de **sferă** de rază r și centru x_0 este atribuit mulțimii $Fr(S(x_0; r))$.

Topologia τ_d , generată (indusă) de metrica d , pe mulțimea X este atunci aceea care are drept bază (în sensul Definiției 6.7 b)) mulțimea tuturor sferelor deschise din X . Într-o asemenea topologie, o mulțime D este deschisă dacă ea este vidă sau dacă, pentru orice punct $x \in D$, există $r \in \mathbb{R}_+^*$, așa încât $S(x; r) \subseteq D$. Familia tuturor mulțimilor de acest fel este însăși topologia τ_d pe X . Faptul că τ_d este, în sensul Definiției 6.1, o topologie pe X , se poate vedea prin verificarea satisfacerii de către aceasta a axiomelor (AT1) - (AT3). Se poate vedea, de asemenea, că orice sferă deschisă din X (în sensul Definiției 6.19) este element din τ_d , meritându-și într-adevăr denumirea de “deschisă”.

În particular, **mulțimea** \mathbb{R}^n , **dotată**, de exemplu, **cu metrica euclidiană** d_2 , poate fi privită, prin prisma cuplului $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$, unde τ_{d_2} este topologia indusă de d_2 , ca un spațiu topologic. Într-un asemenea context, τ_{d_2} poartă denumirea de **topologie euclidiană** sau **uzuală** pe \mathbb{R}^n , iar $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$ se numește **spațiu topologic euclidian real**, **n -dimensional**.

Definiția 6.20 Două metrici, d și \hat{d} , pe o aceeași mulțime X , se numesc **echivalente** dacă induc aceeași topologie pe X , adică dacă $\tau_d = \tau_{\hat{d}}$.

Teorema 6.4 Fie d și \hat{d} metrici pe o mulțime X . Dacă există două constante reale și pozitive, α și β , astfel încât

$$(*) \quad \alpha \cdot d(x, y) \leq \hat{d}(x, y) \leq \beta \cdot d(x, y), \forall x, y \in X,$$

atunci d și \hat{d} sunt metrici echivalente.

Demonstrație: Se constată că prima (cea de la stânga) dintre inegalitățile din $(*)$ implică faptul că $\tau_d \preceq \tau_{\hat{d}}$, iar cealaltă inegalitate conduce la relația $\tau_{\hat{d}} \preceq \tau_d$, ajungându-se astfel la concluzia că $(*)$ implică egalitatea topologiilor τ_d și $\tau_{\hat{d}}$, ceea ce înseamnă echivalența metricilor d și \hat{d} .

Astfel, pentru a arăta că $\tau_d \preceq \tau_{\hat{d}}$, se consideră x arbitrar din X și o sferă arbitrară $S_d(x; r)$. Luând $r_\alpha = \alpha \cdot r > 0$, observăm că $S_{\hat{d}}(x; r_\alpha) \subseteq S_d(x; r)$, întrucât, $\forall y \in S_{\hat{d}}(x; r_\alpha)$, avem $\hat{d}(x, y) < r_\alpha = \alpha \cdot r$ și, din $(*)$, deducem că $\alpha \cdot d(x, y) \leq \hat{d}(x, y) < \alpha \cdot r$. De aici, rezultă că $d(x, y) < r$, adică $y \in S_d(x; r)$. Deci $S_d(x; r) \in \tau_{\hat{d}}$ și, astfel, reiese că $\tau_d \preceq \tau_{\hat{d}}$. În mod cu totul similar, se arată că are loc și relația inversă, adică $\tau_{\hat{d}} \preceq \tau_d$ ◀

Exemplu: Metricile d_1 , d_2 și d_∞ sunt echivalente pe \mathbb{R}^n . Aceasta întrucât, după cum se poate vedea, (nedificil în fond) au loc relațiile următoare, de tipul $(*)$:

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ și,}$$

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_\infty(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Observații:

- 1) Condiția $(*)$ este doar suficientă, nu și necesară pentru echivalența a două metrici, d și \hat{d} . Fără să satisfacă numai decît $(*)$, două metrici pot fi echivalente. De exemplu, pe $X = \mathbb{R}_+^*$, metricile $d(x, y) = |x - y|$ și $\hat{d}(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, sunt echivalente (inducând o aceeași topologie), dar nu satisfac nici o relație de tipul $(*)$.

- 2) În cazul în care metricile d și \hat{d} sunt induse de niște norme, atunci condiția (*) este nu numai suficientă, ci și necesară pentru ca respectivele metrici să fie echivalente. În acel caz, la nivelul normelor $\|\cdot\|$ și $|||\cdot|||$ ce induc pe d și pe \hat{d} , relația (*) revine la următoarea:

$$(**) \quad \alpha\|x\| \leq |||x||| \leq \beta\|x\|, \forall x \in X,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, iar X este spațiul liniar real în cauză. Se poate spune atunci că (**) reprezintă condiția necesară și suficientă ca normele $\|\cdot\|$ și $|||\cdot|||$ (implicit, și metricile induse de aceste norme) să fie echivalente.

Șiruri și serii de elemente din \mathbb{R}^n

Cum, după cum am văzut deja, \mathbb{R}^n , înzestrat cu o distanță, poate fi apreciat, în pereche cu metrica respectivă, ca un spațiu metric, considerațiile ce urmează sunt potrivite și pentru cazul în care, în particular, X , mulțimea la care ne referim în general, este \mathbb{R}^n .

Definiția 6.21 Fie (X, d) un spațiu metric oarecare și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de puncte din X .

- Spunem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă mulțimea elementelor sale este mărginită, adică dacă există $\tilde{x} \in X$ și $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_n \in S(\tilde{x}, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este unul **fundamental (Cauchy)** dacă: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.
- Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este numit **convergent** la un $x_0 \in X$ dacă șirul de numere reale $(d(x_n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la 0.

Teorema 6.5 Fie $X = \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), dotat cu metrica euclidiană d_2 . Un șir de puncte din \mathbb{R}^m este convergent, în \mathbb{R}^m , dacă și numai dacă, cele m șiruri componente (ale coordonatelor) sunt convergente și, atunci limita șirului din \mathbb{R}^m este punctul ale cărui coordonate sunt limitele celor m șiruri din \mathbb{R} ale coordonatelor.

De asemenea, un șir de puncte din \mathbb{R}^m este șir Cauchy dacă și numai dacă toate componentele sale sunt șiruri Cauchy în \mathbb{R} . La fel, studiul unei serii din \mathbb{R}^m , revine la studiul componentelor sale în \mathbb{R} .

Demonstrație: Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ un șir pentru care $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x_n^j \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j = \overline{1, m}$. Totodată, $\forall y = (y^1, y^2, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$, este adevărată relația:

$$(!) \quad |y^j| \leq \|y\|_e = \left(\sum_{i=1}^m (y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall j = \overline{1, m}.$$

Admițând că $x_n \xrightarrow{d_2} x_* = (x_*^1, x_*^2, \dots, x_*^m) \in \mathbb{R}^m$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(x_n, x_*) = 0$, în \mathbb{R} , deducem, pe seama relației (!), că, luând $y^j = x_n^j - x_*^j$, $\forall j = \overline{1, m}$, avem:

$$(!!) \quad |x_n^j - x_*^j| \leq d_2(x_n, x_*) \leq \sum_{i=1}^m |x_n^i - x_*^i|, \forall j = \overline{1, m}.$$

Întrucât $d_2(x_n, x_*) \rightarrow 0$, reiese că $|x_n^j - x_*^j| \rightarrow 0$, $\forall j = \overline{1, m}$, ceea ce înseamnă că toate cele m șiruri componente ale șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt convergente în \mathbb{R} , la coordonatele corespunzătoare ale lui x_* . Faptul reciproc rezultă adevărat pe baza inegalității din partea dreaptă a relației (!!).

În ceea ce privește concluzia relativă la un șir Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, ea rezultă în virtutea relației (!), în care, de data aceasta, se ia $y^j = x_{n+p}^j - x_n^j, \forall j = \overline{1, m}$. La fel și concluzia privitoare la o serie din \mathbb{R}^m . ◀

Propoziția 6.7 (De caracterizare a punctelor aderente ale unei mulțimi dintr-un spațiu metric, cu ajutorul șirurilor)

Fie A o submulțime a unui spațiu metric (X, d) . Un punct $x \in X$ este aderent pentru A dacă și numai dacă există un șir de puncte din A care să convergă la x , în τ_d .

Demonstrație: Se ține seama de faptul că $x \in \overline{A} \Leftrightarrow V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. În particular, pentru $V = S_d\left(x; \frac{1}{n}\right)$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, avem: $S_d\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Alegând câte un punct $x_n \in S_d\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A, \forall n \in \mathbb{N}^*$, obținem un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A$ pentru care $d(x_n, x) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $d(x_n, x) \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$. Cu alte cuvinte, $x_n \xrightarrow{d_2} x$.

Reciproc, dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A$ este un șir convergent, în τ_d , la un punct x din X , atunci, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x) < \varepsilon$. Altfel spus, $x_n \in S_d(x; \varepsilon)$. Deci: $S_d(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$. Ori, aceasta înseamnă că $x \in \overline{A}$. ◀

Observație: În virtutea rezultatului stipulat de Propoziția 6.7, putem afirma că o mulțime A dintr-un spațiu metric (X, d) (și, în particular, din \mathbb{R}^n) este închisă (în raport cu τ_d), adică $A = \overline{A}$, dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent de puncte din A aparține lui A .

Propoziția 6.8 (De caracterizare a punctelor de acumulare cu ajutorul șirurilor)

Fie $A \subseteq (X, d)$. Atunci $x \in A'$ dacă și numai dacă există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A$, astfel încât $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Altfel spus, $x \in A'$ dacă și numai dacă $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Definiția 6.22 a) Un spațiu metric (X, d) se numește **complet** dacă și numai dacă orice șir Cauchy din X este convergent la un punct din X .

b) Un spațiu prehilbertian și complet (ca spațiu metric, cu metrca indusă de norma dată, la rândul ei, de produsul scalar în cauză) se numește **spațiu Hilbert**.

c) Un spațiu normat și complet (în raport cu metrca indusă de norma existentă) se numește **spațiu Banach**.

Teorema 6.6 Spațiul \mathbb{R}^n , înzestrat cu produsul scalar euclidian, este un spațiu Hilbert. Dotat cu norma euclidiană, \mathbb{R}^n este un spațiu Banach, fiind un spațiu complet în raport cu metrca euclidiană.

Demonstrație: În conformitate cu Teorema 6.5, un șir din \mathbb{R}^n este de tip Cauchy dacă și numai dacă toate cele n șiruri componente ale sale sunt șiruri Cauchy în \mathbb{R} . Cum, în \mathbb{R} , înzestrat cu metrca (topologia) uzuală, orice șir Cauchy este convergent, se poate spune, în virtutea aceleiași teoreme, că șirul considerat în \mathbb{R}^n , ca șir Cauchy, este, în mod necesar, convergent în \mathbb{R}^n (în raport cu metrca euclidiană). Prin urmare, (\mathbb{R}^n, d_2) este un spațiu metric complet. Cum d_2 este indusă de norma euclidiană $\|\cdot\|_2$, putem afirma că spațiul normat $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ este complet, adică un spațiu Banach. În fine, întrucât $\|\cdot\|_2$ este norma dată de produsul scalar euclidian $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$, se poate zice că spațiul prehilbertian $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$ este complet în raport cu metrca indusă de norma dată de $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$, adică $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$ este un spațiu Hilbert. ◀

Bibliografie

1. W. G. Chinn, N. E. Steenrod - *Introducere în topologie*, Editura Tehnică, București, 1981.
2. Olga Costinescu - *Elemente de topologie generală*, Editura Tehnică, București, 1969.
3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. (Cap. 3)*, Ed. Tehnopress, Iași, 2005.
4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calc. dif. (Cap. 4)*, Ed. Matrix Rom, București, 2006.
5. V. Postolică - *Eficiență prin matematica aplicată. Analiză matematică (Cap. IV)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
6. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 4)*, Editura Polirom, Iași, 1998.
7. D. Lehmann - *Initiation à la Topologie Générale*, Ellipses Marketing, 2004.
8. Silvia-Otilia Corduneanu - *Capitole de analiză matematică*, Ed. Matrix Rom, București, 2010.
9. L.C. Li - *Basic Topology*, Pennsylvania State University, 2010.
10. T. W. Körner - *Metric and Topological Spaces*, DPMMS, University of Cambridge, 2014.
11. S. A. Morris - *Topology without Tears*, University of South Australia, 2015.