Universitatea „Al. I. Cuza” Iaşi — Facultatea de Informatică

Lucrarea TSR, la “Matematică”, pentru anul I / 2016-2017

15 februarie 2017, între orele 10:00 și 12:00

<u>Numele şi prenumele studentului participant</u> : — <u>Anul şi grupa studentului participant</u> :

<u>Subiectele şi baremul general pentru secţiunea "TSR-TS1"</u>

5 puncte - acordate din oficiu

I.1) (20 de puncte) Fie B o mulţime nevidă, înzestrată cu două operații binare, "$\vee$" şi "$\wedge$", cu o operaţie unară (de complementariere), notată cu " $'$ ", şi cu două elemente "neutre", "0" şi "1".

i) Să se precizeze când $(B,\vee,\wedge,',0,1)$ este o algebră Boole? (8 puncte)

ii) Să se arate că, pe B, se poate introduce o relație de ordine " $\leq$ " și că, din punct de vedere logic, inegalitatea $x \leq y$ echivalează cu egalitatea $x \wedge y' = 0, \forall x, y \epsilon B.$ (12 puncte)

I.2) (20 de puncte)

j) Să se prezinte, prin definiții și proprietăți de bază, noțiunea de șir fundamental de numere reale. (10 puncte)

jj) Să se arate că dacă $r \epsilon (0,1)$ și $|x_{n+1} - x_n| < r^n, \forall n \epsilon \mathbb{N}$, atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy în $\mathbb{R}$. (10 puncte)

<u>Subiectele şi baremul general pentru secţiunea "TSR-TS2"</u>

5 puncte - acordate din oficiu

II.1) (20 de puncte) Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{Z}$ un șir în raport cu care se consideră seria cu termenul general $a_n n^4 e^{-|a_n| n^2}, n \epsilon \mathbb{N}^*$.

l) Să se decidă natura seriei când $a_n = (-1)^n sgn\left(\frac{1-n}{n}\right), \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$. (7 puncte)

ll) Să se arate că, în cazul în care $a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor, \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$, respectiva serie este convergentă și are suma majorată de π^2. (13 puncte)

II.2) (20 de puncte) Fie $W = \{(x_1, x_2, x_3) \epsilon \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_1 + 2x_3 \}$.

u) Să se demonstreze că W este un subspațiu liniar, bidimensional, al lui $\mathbb{R}^3$ și să se afle o bază ortonormată a sa, în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^3$. (10 puncte)

uu) Să se arate că W este nucleul aplicației $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin

$$T((x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 - x_1 - 2x_3, 2x_1 - 2\, x_2 + 4x_3)$$

și să se determine valorile proprii ale acestei aplicații. (10 puncte)

Subiectele şi baremul general pentru secţiunea "TSR-TS3"

5 puncte - acordate din oficiu

III.1) (20 de puncte) Se consideră $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \frac{3xy - z^2 siny + 2x^3 z}{\sqrt{x^4+5y^6+4z^2}}, \forall(x,y,z) \in D.$

$v)$ Să se stabilească faptul că D, ca mulțime maximă de definiție a funcției f, are, între altele, și punctul de acumulare $(0,0,0)$. (6 puncte)

$vv)$ Să se arate că f are limită globală în $(0,0,0)$ și să se găsească prelungirea prin continuitate, la $\mathbb{R}^3$, a acestei funcții. (14 puncte)

III.2) (20 de puncte) Fie $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $h(x,y) = 3e^{-x} cosy - 2e^y sinx, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$a)$ Să se arate că h nu are nici un punct critic în mulțimea

$$\left\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{4}e^{-x-y} + \frac{1}{3}e^{x+y} - 1 > 0\right\}.$$ (10 puncte)

$b)$ Să se calculeze $\big((d^3h)(-1,1)\big)(1,-1)$. (10 puncte)

Subiectele şi baremul general pentru secţiunea "TSR-TS4"

5 puncte - acordate din oficiu

IV.1) (20 de puncte) Pentru $p\epsilon\mathbb{R}$ și $q\epsilon\mathbb{N}$, se consideră: $\int_0^1 x^p ln^q(1-x)dx$.

$\alpha)$ Să se determine relația dintre parametrii p și q pentru care integrala dată este, ca integrală improprie, convergentă. (12 puncte)

$\beta)$ Să se afle valoarea integralei, când $p = 1$ și $q = 2$. (8 puncte)

IV.2) (20 de puncte) Fie $A = \{(x,y)\epsilon[0,1] \times [0,1] \mid 2x + 2y - 1 > 0\}$ mulțimea care reprezintă, din punct de vedere fizic, o placă plană, neomogenă și cu densitatea materială dată de funcția $f(x,y) = x - y + 1, \forall(x,y) \in A$.

$\gamma)$ Să se determine masa plăcii respective. (8 puncte)

$\delta)$ Să se afle coordonatele x_G și y_G ale centrului de greutate G al plăcii vizate, știind că pot fi folosite formulele:

$$x_G = \frac{\iint_A xf(x,y)dxdy}{\iint_A f(x,y)dxdy}, y_G = \frac{\iint_A yf(x,y)dxdy}{\iint_A f(x,y)dxdy}.$$ (12 puncte)

Precizări: *Timpul de lucru alocat este de două ore. Toate cele patru secţiuni ale TSR sunt obligatorii pentru toţi participanţii, cu excepţia acelora care au fost deja specificaţi a se ocupa numai cu tratarea anumitor părți ale prezentului test .*

F. Iacob / 11.02.2017