Cursul 7

Funcţii reale (Generalităţi).
Aplicaţii liniare.

Amintindu-ne (v. cursul 1) că o funcţie (relaţie funcţională) f, de la o mulţime nevidă X la o mulţime nevidă Y este, prin definiţie, o relaţie binară $f \subseteq X \times Y$ astfel încât $D(f) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid \exists\, y \in Y, (x, y) \in f\} = X$, iar dacă $(x, y_1) \in f$ şi $(x, y_2) \in f$, atunci $y_1 = y_2$, $\forall\, x \in X$, precizăm că, pentru f, în locul denumirii de ***funcţie de la*** X ***la*** Y, uzual notată cu $f : X \to Y$, se mai folosesc şi termenii de ***aplicaţie*** sau ***transformare*** sau ***operator*** sau ***reprezentare*** sau ***operaţie*** de la X la Y. Oricum am denumi-o, $D(f)$ reprezintă ***mulţimea de definiţie*** a funcţiei f, iar $f(X) \stackrel{def}{=} \{y \in Y \mid \exists\, x \in X$ aşa încât $y = f(x)\}$ este ***imaginea lui*** X ***prin*** f sau, echivalent spus, ***mulţimea valorilor lui*** f. Totodată, dacă $\varnothing \neq A \subseteq X$, mulţimea $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ se numeşte, firesc, ***imaginea lui*** A ***prin funcţia*** $f : X \to Y$, iar dacă $B \subseteq Y$, mulţimea $f^{-1}(B) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ se va numi ***imaginea reciprocă*** sau ***contraimaginea*** sau ***preimaginea mulţimii*** B ***prin funcţia*** f. De asemenea, în contextul de faţă, este indicat să fie amintit şi faptul că mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ poartă denumirea de ***grafic al funcţiei*** $f : X \to Y$. În plus, dacă $\varnothing \neq A \subseteq X$, funcţia notată cu $f_{|A}$ şi definită, ca relaţie binară funcţională, prin $f_{|A} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$, pentru care, aşadar, $D\left(f_{|A}\right) = A$ şi $f_{|A}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$, se numeşte (v. cursul 1) ***restricţia funcţiei*** f ***la mulţimea*** A, în timp ce, pentru o funcţie $g : A \to Y$, orice aplicaţie $\tilde{g} : \tilde{A} \to Y$, unde $A \subsetneq \tilde{A} \subseteq X$, se numeşte ***prelungire a lui*** g ***la mulţimea*** $\tilde{A}$,de îndată ce $\tilde{g}_{|A} \equiv g$.

În aceeaşi notă generală, să precizăm şi aici că o funcţie $f : X \to Y$ este o ***surjecţie*** (ori, echivalent, o ***funcţie surjectivă***) dacă $f(X) = Y$, o ***injecţie*** (sau o ***funcţie injectivă***) ori de câte ori, pentru orice $x_1, x_2 \in X$, cu $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, faptul că $f(x_1) = f(x_2)$, cu $x_1, x_2 \in X$, implică numai egalitatea $x_1 = x_2$, nu şi vreo altă relaţie între x_1 şi x_2), după cum f este o ***bijecţie*** (sau o ***funcţie bijectivă***) când ea este, simultan, surjecţie şi injecţie. Este cazul, totodată, să punctăm faptul că, dacă f este o funcţie de la X la Y, atunci relaţia inversă $f^{-1} \subseteq Y \times X$ nu este, în general, tot o funcţie, decât numai când f este o bijecţie şi reciproc. În acest caz, şi f^{-1} este tot o bijecţie. Tot în general, pentru o funcţie oarecare $f : X \to Y$, pentru care $f^{-1}(\cdot)$ desemnează imaginea reciprocă a unei mulţimi, sunt adevărate următoarele afirmaţii:

i) $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$, $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$;

ii) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$, $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$;

iii) $\forall\, (A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow f\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$ şi $f\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)$;

iv) $\forall\, (B_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(Y) \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i \in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ şi $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i\right) = \bigcap\limits_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

v) $\forall\, B \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$;

vi) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;

vii) $\forall\, B \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$;

viii) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right)$.

Dacă f este surjecţie, atunci relaţia din vii) este chiar una de egalitate, nu numai de incluziune într-un singur sens. Tot aşa, când f este o injecţie, în viii) avem o egalitate de fapt. În plus, dacă f este o bijecţie de la X la Y, cea de-a doua relaţie din iii) este una de egalitate. Tot atunci, când f este bijectivă, mai au loc şi proprietăţile:

j) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ şi $f : X \to Y$ bijecţie $\Rightarrow f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$;

jj) $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ şi $f : X \to Y$ bijecţie $\Rightarrow f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;

În fine, dacă f este o funcţie de la X la Y şi g o funcţie de la Y la W (mulţime abstractă, nevidă), atunci compunerea $g \circ f$ a relaţiilor funcţionale f şi g este tot o funcţie, de la X la W, aşa ca $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in X$ şi au loc următoarele două proprietăţi:

l) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow (g \circ f)(A) = g(f(A))$;

ll) $\forall\, C \in \mathcal{P}(W) \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$.

Dacă f şi g sunt, ambele, injective (respectiv surjective, ori bijective), atunci $g \circ f$ este, de asemenea, injectivă (respectiv surjectivă/bijectivă). Compunerea funcţiilor este asociativă, dar, în general, nu şi comutativă. Dacă f este o bijecţie, atunci există, ca funcţie, $f^{-1} : Y \to X$ şi avem: $f^{-1} \circ f = 1_X$ (funcţia identică în X), $f \circ f^{-1} = 1_Y$ (funcţia identică în Y).

Cu evidenţă, toate precizările de până aici îşi menţin valabilitatea şi în cazul particular în care $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) şi $Y = \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), adică în cazul funcţiilor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, generic denumite ***funcţii reale***. Când $n = m = 1$, este cazul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ***real-scalare*** (sau, mai exact, ***reale şi scalar-scalare*** sau ***unidimensionale*** (***de o singură varabilă reală***)). Dacă $n = 1$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, suntem în cazul ***funcţiilor*** reale $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ denumite ***scalar-vectoriale*** (sau ***funcţii de o variabilă reală*** şi ***cu valori reale, vectoriale***). Despre asemenea funcţii, se poate afirma că au m componente scalar-scalare $f_k : D_{f_k} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, în sensul că

$$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\right), \forall\, x \in D_f \subseteq \mathbb{R},$$

cu $D_f = \bigcap\limits_{k=1}^{m} D_{f_k}$, unde D_{f_k} - reprezintă mulţimea de definiţie a funcţiei reale, de o variabilă reală, f_k, adică mulţimea acelor elemente $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f_k(x)$ are înţeles în $\mathbb{R}$. Fiecare dintre funcţiile f_k ($k = \overline{1, m}$) este fie o ***funcţie elementară de bază***, adică un element din familia $E_b = \{$"*const*", $1_{\mathbb{R}}, \exp_a, \log_a, (\cdot)^a,$ "*trig*", "*arctrig*"$\}$, în care "*const*" semnifică o ***funcţie reală constantă*** (adică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = c, c \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$), $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este ***funcţia identitate pe*** $\mathbb{R}$ (adică $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$), $\exp_a$ înseamnă ***funcţia exponenţială de bază*** a ($a > 0, a \neq 1$) (adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x \in \mathbb{R}_+^*$), $\log_a$ reprezintă ***funcţia logaritmică cu baza*** a ($a > 0, a \neq 1$) (adică $x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$), $(\cdot)^a$ denotă ***funcţia putere de exponent*** a ($a \in \mathbb{R}$) (adică $x \in D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow x^a \in \widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}$), "*trig*" este una dintre ***funcţiile trigonometrice directe*** (*sinus*, *cosinus*, *tangentă*, *cotangentă*), iar "*arctrig*" este o ***funcţie trigonometrică inversă*** (*arcsinus*, *arccosinus*, *arctangentă* sau *arccotangentă*) , fie o ***funcţie elementară***, adică o funcţie obţinută prin aplicarea, de un număr finit de ori, a unora dintre sau a tuturor celor patru operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea) asupra elementelor lui E_b, fie o ***funcţie specială*** (precum este ***funcţia parte întreagă***, anume $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] \overset{def}{=} \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid t \leq x\}$, funcţia ***signum***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, ***funcţia modul***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, ***funcţia parte zecimală***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \{x\} = x - [x] \in [0, 1)$, ***funcţia lui Dirichlet***, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$,***funcţia lui Heaviside***, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, ***funcţia lui Riemann***, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x \in (0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ (p,q) = 1 \end{cases}$, fie o ***funcţie rezultată prin compunerea unui număr finit de elemente din*** E_b***, funcţii elementare sau/şi funcţii speciale***). Studiul unei funcţii $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ se face, de cele mai multe ori, pe baza studiului funcţiilor sale componente $f_k : D_{f_k} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall\, k = \overline{1,m}$.

În situaţia în care $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $m = 1$, orice ***funcţie reală*** $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte ***vectorial-scalară*** sau ***funcţie de variabilă vectorial-reală şi cu valori scalar-reale*** (ori ***funcţie de*** n ***variabile reale, cu valori reale şi scalare***). De asemenea, când A este un subspaţiu liniar, peste $\mathbb{R}$, al spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, f se numeşte ***funcţională*** (***reală***).

Exemple:

1) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(\mathrm{x}) = -\sqrt{\sin\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2) \in A$, unde $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin\left(x_1^2 + x_2^2\right) \geq 0\}$ este, de fapt, mulţimea $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{N}\}$, reprezintă un exemplu de funcţie de două variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{R}$. Din punct de vedere geometric, mulţimea A, de definiţie a acestei funcţii, este reuniunea mulţimilor de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, situate în interiorul şi pe frontiera discului $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \pi\}$, cu centrul în $\mathbf{0} = (0,0)$ şi de rază $\sqrt{\pi}$, precum şi în coroanele circulare închise $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$, adică în $\overline{D(\mathbf{0}, \sqrt{(2k+1)\pi})} \setminus \overset{\circ}{D}(\mathbf{0}, \sqrt{2k\pi})$, unde $\overline{D(\mathbf{0}, \sqrt{(2k+1)\pi})}$ este închiderea discului de centru $\mathbf{0} = (0,0)$ şi de rază egală cu $\sqrt{(2k+1)\pi}$, în raport cu topologia indusă de metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^2$, iar $\overset{\circ}{D}(\mathbf{0}, \sqrt{2k\pi})$ este interiorul discului cu centrul tot în $\mathbf{0}$ şi cu raza $\sqrt{2k\pi}$, în raport cu aceeaşi toplogie, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

2) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(\mathrm{x}) = \ln(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (x_1 + x_3)^{x_2}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in A$, unde $A = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathrm{x}) \text{ are sens în } \mathbb{R}\} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_1 - x_2 - x_3 > 0 \text{ şi } x_1 + x_3 > 0\} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 + x_3 < 1 - x_2\}$ este, cu evidenţă, un exemplu de funcţie dependentă de trei variabile reale şi cu valori reale, scalare.

3) Un alt exemplu de funcţie reală de mai multe variabile şi cu valori în $\mathbb{R}$ este cel furnizat de noţiunea de ***funcţie polinomială*** $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$(*) \quad P(\mathrm{x}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

unde $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i_1 = \overline{0, k_1}$, $\forall\, i_2 = \overline{0, k_2}$, $\ldots$, $\forall\, i_n = \overline{0, k_n}$ (cu $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$) reprezintă coeficienţii ***polinomului*** $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (***de*** n ***nedeterminate şi cu coeficienţi reali***). Fiecare dintre termenii $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ se numeşte ***monom*** (dependent de variabilele reale x_1, dacă $i_1 > 0$, x_2, dacă $i_2 > 0$, $\ldots$ şi/sau x_n, când $i_n > 0$ şi cu coeficientul real $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$). Prin ***gradul monomului*** $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ înţelegem numărul $i_1 + i_2 + \ldots + i_n \in \mathbb{N}$. Cum $P(\mathrm{x})$ este o sumă finită de monoame, definim ***gradul polinomului*** P ca fiind maximul gradelor monoamelor din expresia sa. ***Polinomul*** $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se numeşte ***omogen*** sau, altfel spus, ***formă***, dacă toate monoamele din suma sa de expresie au acelaşi grad. Un exemplu de astfel de ***polinom*** este cel ***de gradul întâi***, a cărui expresie, dependentă de n variabile reale - $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

adică o combinaţie liniară de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, în care coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt elemente din $\mathbb{R}$. Acest tip de polinom este o ***formă liniară reală, definită pe*** $\mathbb{R}^n$. Este clar că orice polinom

$P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se poate exprima, în mod unic, ca o sumă finită de polinoame omogene, adică se poate scrie $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$, unde P_i, $\forall\, i = \overline{0, m}$, este un polinom omogen de grad egal cu i, iar m este gradul lui P .

Un ***polinom*** $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se numeşte ***simetric*** dacă, pentru orice permutare $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, cu $\sigma(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ şi $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, avem

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{i_n},$$

când funcţia polinomială corespunzătoare lui P are expresia $(*)$.

Următoarele elemente din $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se numesc ***polinoame simetrice fundamentale***:

$$\begin{aligned}
&P_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&P_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \cdots + X_{n-1} X_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} X_i X_j \\
&P_3 = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + \cdots + X_{n-2} X_{n-1} X_n = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n}^{n} X_i X_j X_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_k = X_1 X_2 \ldots X_k + \cdots + X_{n-k+1} X_{n-k+2} \ldots X_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots i_k \leqslant n} X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_n = X_1 X_2 \ldots X_n
\end{aligned}$$

Un rezultat remarcabil pentru mulţimea polinoamelor simetrice este următorul, prezentat aici fără demonstraţie.

Teorema 7.1 *Pentru orice polinom simetric $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, există un polinom $Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ astfel încât*

$$P = Q(P_1, P_2, \ldots, P_n),$$

unde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sunt polinoamele simetrice fundamentale specificate mai sus.

Revenind la funcţiile $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$, putem spune, în fine, că, atunci când $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, asemenea ***aplicaţii*** f se numesc ***reale***, ***vectorial-vectoriale*** (sau ***funcţii de*** n ***variabile reale, cu*** m ***valori reale***). Şi în cazul acestor funcţii, se poate vorbi de o exprimare în care intervin componente funcţionale, potrivit relaţiei

$$f(\mathrm{x}) = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x}))\,, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,$$

unde $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, sunt funcţii vectorial-scalare, cu valori reale, aşa încât

$$(f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x})) \in B, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,$$

Ţinând seama de structura algebric-topologică a spaţiilor $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$, multe dintre proprietăţile unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se pot deduce pe seama proprietăţilor funcţiilor sale componente.

Aplicaţii liniare pe spaţii vectoriale.
Forme reale liniare şi afine. Transformări punctuale liniare şi afine.

Definiţia 7.1 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un acelaşi corp de scalari K. O* ***aplicaţie*** *$T : V \to W$ se numeşte* ***liniară*** *(****operator liniar, transformare liniară*** *sau* ***morfism de K-spaţii vectoriale****) dacă*

i) $T(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ *şi*

ii) $T(\alpha \mathrm{u}) = \alpha T(\mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u} \in V$, $\alpha \in K$,

adică dacă aplicaţia T este ***aditivă*** *(prin satisfacerea condiţiei i)) şi* ***K-omogenă*** *(prin satisfacerea condiţiei ii)).*

Propoziţia 7.1 *Condiţiile i) şi ii) din Definiţia 7.1 sunt echivalente cu următoarea:*

iii) $T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$.

Demonstraţie: Admiţând că $T : V \to W$ satisface condiţiile i) şi ii) din cadrul Definiţiei 7.1, avem:

$$T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = T(\alpha \mathrm{u}) + T(\beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in K.$$

Deci T satisface şi iii). Reciproc, în ipoteza că T verifică iii), rezultă că, pentru $\alpha = \beta = 1 \in K$, din iii), avem i), iar pentru $\beta = 0 \in K$, tot din iii), avem şi ii). ◀

Observaţii:

1) De cele mai multe ori, în virtutea Propoziţiei 7.1, condiţia iii) este considerată a fi, practic, de bază pentru stabilirea caracterului de liniaritate al aplicaţiei T.

2) În cazul în care $W = V$, aplicaţia liniară $T : V \to V$ se numeşte ***endomorfism liniar*** pe V sau ***transformare liniară de la spaţiul V în el însuşi***. Dacă edomorfismul liniar $T : V \to V$ este şi bijectiv, atunci el se numeşte ***izomorfism liniar*** pe V.

3) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci are loc şi următoarea extensie a relaţiei iii):

$$\text{iv)}\ T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathrm{u}_i),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n \in V,\ \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K.$$

4) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci

$$T\left(\mathbf{0}_V\right) = \mathbf{0}_W,$$

unde $\mathbf{0}_V$ şi $\mathbf{0}_W$ sunt vectorul nul din V şi respectiv vectorul nul din W. Dacă $\tilde{T}(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, atunci $\tilde{T} : V \to W$ nu este liniară.

5) Mulţimea $\mathcal{L}(V, W)$ a tuturor aplicaţiilor liniare de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial Weste, în raport cu operaţia de adunare a aplicaţiilor şi cu operaţia de înmulţire a unei aplicaţii cu un scalar din K, de asemenea un K-spaţiu vectorial.

6) Fie U, V şi W spaţii vectoriale peste corpul comutativ K. Dacă $T_1 : U \to V$ şi $T_2 : V \to W$ sunt aplicaţii liniare, atunci $T_2 \circ T_1 : U \to W$ este tot o aplicaţie liniară.

7) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci $T^{-1} : T(V) \subseteq W \to V$ este, de asemenea, o aplicaţie liniară.

Definiţia 7.2 *Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial W.*

a) Mulţimea $Ker(T) = T^{-1}(\mathbf{0}_W) = \{\mathrm{v} \in V \mid T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ se numeşte ***nucleul aplicaţiei liniare*** *T.*

b) Mulţimea $T(V) = \{\mathrm{w} \in W \mid \exists\, \mathrm{v} \in V, T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}\}$ se numeşte ***imaginea aplicaţiei liniare*** *T şi se notează cu $Im(T)$.*

Propoziţia 7.2 *Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial W, atunci $Ker(T)$ este un subspaţiu liniar al lui V, iar $Im(T)$ un subspaţiu liniar al lui W.*

În plus, dacă $dim(V) < +\infty$ şi $dim(W) < +\infty$, adică dacă ambele spaţii vectoriale V şi W sunt finit-dimensionale, atunci are loc relaţia

$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,,$$

numită, sugestiv, ***relaţia dimensiunilor****.*

Demonstraţie: Faptul că atât $Ker(T)$, cât şi $Im(T)$ sunt subspaţii vectoriale ale lui V şi respectiv W rezultă pe baza relaţiei evidente

$$T(\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in Ker(T), \forall\, \alpha, \beta \in K,$$

în virtutea căreia $\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$ .Totodată, avem: $\alpha_1\mathrm{w}_1 + \alpha_2\mathrm{w}_2 \in Im(T)$, $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$ şi $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in K$. Aceasta din urmă deoarece, dacă $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$, atunci există v_1 şi $\mathrm{v}_2 \in V$, astfel încât $T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{w}_1$ şi $T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_2$. Prin urmare: $\alpha_1\mathrm{w}_1 + \alpha_2\mathrm{w}_2 = \alpha_1 T(\mathrm{v}_1) + \alpha_2 T(\mathrm{v}_2) = T(\alpha_1\mathrm{v}_1 + \alpha_2\mathrm{v}_2) \in T(V) = Im(T)$, $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in K, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$.

În ceea ce priveşte relaţia dimensiunilor, fie $n = dim(V)$ şi $d = dim\,(Ker(T))$ (d şi n în $\mathbb{N}$). Dacă $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, atunci $d = 0$ şi, pentru orice bază $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, se poate spune, pe contul relaţiei iv) din observaţia 3) de mai înainte, că, oricare ar fi $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{v} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathrm{v}_k$ (cu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in K$, coordonate ale lui v în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$), avem $T(\mathrm{v}) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k T(\mathrm{v}_k)$, ceea ce ar însemna că $T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)$ ar fi un sistem de generatori al subspaţiului liniar $T(V)$, adică al lui $Im(T)$. Cum sistemul de vectori $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ este şi liniar independent, căci dacă, pentru $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$, am avea $\sum_{k=1}^{n} \beta_k T(\mathrm{v}_k) = \mathbf{0}_W$, atunci $T\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{v}_k\right) = \mathbf{0}_W$ şi deci $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{v}_k \in Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, de unde, în virtutea faptului că $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ este bază a lui V, ar reieşi că $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$, se poate spune că $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ este o bază a lui $Im(T)$, ceea ce înseamnă că $\dim\,(Im(T)) = n$. Aşadar, în acest caz, avem $n = 0 + n$, adică:

$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,.$$

Dacă $d \in \mathbb{N}^*$, adică $Ker(T) \supsetneq \{\mathbf{0}_V\}$ (mai bine spus, $Ker(T) \neq \{\mathbf{0}_V\}$), atunci oricare bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_d\}$ a lui $Ker(T)$ se poate completa la o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_d, \mathrm{b}_{d+1}, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V. Cum orice vector din $Im(T)$ este de forma $T(\mathrm{v})$, cu $\mathrm{v} \in V$, iar v are reprezentarea $\mathrm{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{b}_k$ în baza $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ de mai sus, vedem că $T(v) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(b_k) = \sum_{k=d+1}^{n} \alpha_k T(b_k)$, întrucât $T(b_k) = \mathbf{0}_W$, $\forall\, k = \overline{1,d}$. Prin urmare, $\{T(b_{d+1}), \ldots, T(b_n)\}$ este un sistem de generatori pentru $Im(T)$. În plus, vectorii $T(b_{d+1}), \ldots, T(b_n)$ sunt şi liniar independenţi în W. Într-adevăr, admiţând că am avea o combinaţie liniară a acestora egală cu $\mathbf{0}_W$, ar rezulta, din faptul că $\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k T(b_k) = \mathbf{0}_W$, cu $\omega_{d+1}, \ldots, \omega_n \in K$, existenţa relaţiei $T\left(\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k b_k\right) = \mathbf{0}_W$, în virtutea căreia am deduce că $\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k b_k \in Ker(T)$. Ca atare, ar exista $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d \in K$, aşa încât $\sum_{k=d+1}^{n} \omega_k b_k = \sum_{k=1}^{d} \eta_k b_k$. Altfel spus, am avea dependenţa liniară a vectorilor $b_1, b_2, \ldots, b_n$ din baza V, ceea ce ar fi absurd. Deci $\{T(b_{d+1}, \ldots, T(b_n)\}$ este, de fapt, o bază a lui $Im(T)$ şi acesta are dimensiunea $n - d = dim(V) - dim\,(Ker(T))$. Aşadar, şi în acest caz, are loc relaţia din enunţ a dimensiunilor. ◀

Definiţia 7.3 *Pentru o aplicaţie liniară T de la un K-spaţiu vectorial V la un K-spaţiu vectorial W, $dim\,(Ker(T))$ se numeşte* ***defectul lui*** *T şi se notează cu $def(T)$, iar $dim\,(Im(T))$ se numeşte* ***rangul lui*** *T şi se notează cu $rang(T)$.*

Formula dimensiunilor poate fi redată atunci sub forma:

$$dim(V) = rang(T) + def(T).$$

Observaţie: Pe baza relaţiei dimensiunilor, se poate afirma că orice aplicaţie liniară, între K-spaţii vectoriale finit dimensionale, duce un subspaţiu vectorial arbitrar al spaţiului ei de definiţie într-un spaţiu vectorial de dimensiune cel mult egală cu a subspaţiului în cauză.

Propoziţia 7.3 *Fie T o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V, finit-dimensional, la K-spaţiul vectorial W. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) T este aplicaţie injectivă;

b) $def(T) = 0$;

c) $rang(T) = dim(V)$;

d) Dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ ($p \in \mathbb{N}^*, p \leq n = dim(V) \in \mathbb{N}^*$) este un sistem liniar independent în V, atunci $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ este sistem liniar independent în W.

Demonstraţie: În virtutea relaţiei dimensiunilor, are loc echivalenţa afirmaţiilor b) şi c), cu evidenţă. Cât priveşte a) şi b), dacă admitem mai întâi că b) este adevărată, ceea ce ar însemna ca să luăm drept ipoteză faptul că $\{\mathbf{0}_V\} = Ker(T)$, ar reieşi că, de îndată ce, pentru u şi v arbitrare din V, ar avea loc relaţia $T(u) = T(v)$, adică $T(u - v) = \mathbf{0}_W$, s-ar obţine $u - v = \mathbf{0}_W$, deci $u = v$. Cu alte cuvinte, b) implică injectivitatea lui T. Reciproc, dacă a) este adevărată, adică dacă T este injectivă, atunci $T(u) = T(v)$ implică $u = v$, deci $u - v = \mathbf{0}_V$. Pentru $v = \mathbf{0}_V$, rezultă că $T(u) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ ar implica, cu necesitate, $u = \mathbf{0}_V$. Astfel, avem $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, adică $def(T) = 0$. Aşadar, are loc b). În fine, se poate arăta că b) echivalează cu d). În acest sens, presupunând mai întâi că are loc b) şi că $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este un sistem liniar independent din V, vedem că, dacă $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k T(v_k) = \mathbf{0}_W$, atunci $T\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k\right) = \mathbf{0}_W$, adică, în virtutea faptului că b) este adevărată, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k = \mathbf{0}_V$, de unde, pentru că $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este un sistem liniar independent în V, rezultă : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$. Deci $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ este un sistem liniar independent în W. Invers, admiţând că d) este adevărată şi că b) n-ar avea loc, ar exista o bază a lui $Ker(T)$, fie ea $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ care, ca sistem liniar independent din V, n-ar mai implica faptul că $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ este sistem liniar independent în W, deoarece $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\} = \{\mathbf{0}_W\}$. Deci b) trebuie, cu necesitate, să aibă loc, în ipoteza că d) este adevărată. ◄

De asemenea, fără prea mare dificultate, se poate demonstra şi următorul rezultat:

Propoziţia 7.4 *Fie T o aplicaţie liniară de la un K-spaţiu vectorial V la un K-spaţiu vectorial W, finit dimensional. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) T *este o surjecţie;*

ii) $rang(T) = dim(W)$;

iii) $Im(T) = W$;

iv) Dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *este un sistem de generatori pentru* V*, atunci* $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_p)\}$ *este un sistem de generatori pentru* W*.*

Pe baza propoziţiilor 7.3 şi 7.4, se poate vedea că are loc şi rezultatul potrivit căruia, dacă T este o aplicaţie liniară între două K-spaţii vectoriale finit-dimensionale V şi W ($T : V \to W$), atunci afirmaţiile imediat următoare sunt echivalente:

j) T *este o aplicaţie bijectivă;*

jj) $dim(V) = dim(W)$;

jjj) $T^{-1} : W \to V$ *este o bijecţie;*

jv) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *este o bază a lui* V *dacă şi numai dacă* $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ *este o bază a lui* W*.*

Observaţie: Evident, definiţiile 7.1 - 7.3, precum şi rezultatele propoziţiilor 7.2 - 7.4, împreună cu cel menţionat puţin mai înainte se aplică şi în cazul particular în care $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, iar T este o aplicaţie liniară reală de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$. Astfel, T va fi un izomorfism liniar dacă şi numai dacă $m = n$, caz în care, dacă $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ va fi o bază în $\mathbb{R}^n$ (de exemplu baza canonică $b_k = e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, cu 1 pe poziţia $k, \forall\, k = \overline{1, n}$), atunci $\{T(b_1), T(b_2), \ldots, T(b_n)\}$ va fi, de asemenea, o bază în $\mathbb{R}^n$ şi reciproc.

Să considerăm, în continuare două K-spaţii vectoriale, V şi W, finit-dimensionale ($dim(V) = n$ şi $dim(W) = m$), iar $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază a lui V, iar $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ este o bază a lui W, atunci, pentru orice $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ din V, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, sunt coordonatele lui v în baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, avem

$$y = T(v) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{l=1}^{m} a_{lk} w_l \right) = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} \alpha_k \right) w_l$$

pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, scalarii $\{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}\}$ reprezentând coordonatele vectorului $T(v_k)$ în baza $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Cum, de fapt,

$$y = \sum_{l=1}^{m} y_l w_l,$$

cu $y_1, y_2, \ldots, y_m$ drept coordonate, din K, ale lui y, în baza $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_n\}$, se poate deduce că avem:

$$(**) \quad y_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\alpha_k, \forall\, l = \overline{1, m}.$$

Constituind matricea $A = (a_{lk})_{\substack{1\le l\le m \\ 1\le k\le n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se vede că putem scrie $\mathrm{y} = A\mathrm{v}$, ceea ce înseamnă că aplicaţia liniară T induce, în raport cu bazele $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ şi $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$, matricea A. Reciproc, este lesne de constatat că, prin intermediul matricii A şi a relaţiei $\mathrm{y} = A\mathrm{v}$, se introduce de fapt aplicaţia $T : V \to W$, definită prin $T(\mathrm{v}) = A\mathrm{v} = \mathrm{y}$ şi, în plus, T este liniară. În concluzie, în K-spaţii vectoriale finit dimensionale, oricărei aplicaţii liniare dintre două asemenea spaţii, i se poate asocia, în raport cu o pereche de baze, o matrice cu elemente din corpul scalarilor K. Studiul unei asemenea aplicaţii T se reduce, astfel, la studiul matricii asociate care, raportată la perechea de baze $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ şi $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$, are, de fapt, drept coloane, vectorii coordonatelor lui $T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)$ în baza $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$.

Notând cu B baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, cu B' baza $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m\}$ a lui W, cu $\mathrm{y}_{B'}$ vectorul coordonatelor lui y, din W, în baza B' şi cu v_B vectorul coordonatelor lui v în baza B, se poate spune că relaţia $(**)$, care înseamnă relaţia $\mathrm{y} = T(\mathrm{v})$, se poate reda,cu ajutorul matricii $A_{BB'}$, asociată lui T, prin:

$$(***) \quad y_{B'} = A_{BB'}\mathrm{v}_B.$$

Aceasta reprezintă expresia analitică a operatorului liniar $T : V \to W$, în raport cu perechea de baze (B, B').

Trecând acum, în V, de la baza B la baza $\hat{B}$, prin matricea de schimbare S (potrivit relaţiei $\widetilde{\hat{B}} = \widetilde{B}S$) şi de la baza B' la baza $\hat{B}'$, în W, prin matricea de schimbare S' (adică $\widetilde{\hat{B}'} = \widetilde{B'}S'$), se vede că, pe baza relaţiei $(***)$ şi a relaţiilor de transformare a coordonatelor lui y şi respectiv v, adică a relaţiilor $\mathrm{y}_{\hat{B}'} = \left(S'\right)^{-1}\mathrm{y}_{B'}$ şi $\mathrm{v}_B = S\mathrm{v}_{\hat{B}}$, în raport cu perechea nouă de baze $(\hat{B}, \hat{B}')$, avem:

$$\mathrm{y}_{\hat{B}'} = \left(S'\right)^{-1}\mathrm{y}_{B'} = \left(S'\right)^{-1}A_{BB'}\mathrm{v}_B = \left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S\mathrm{v}_{\hat{B}}.$$

Aceasta înseamnă că, faţă de $(\hat{B}, \hat{B}')$ matricea asociată lui T este $\left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S$, adică are loc relaţia

$$(\ !\ ) \quad A_{\hat{B}\hat{B}'} = \left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S,$$

care reprezintă formula schimbării matricii unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze. În cazul în care $W = V$, se poate considera că $B' = B$ şi $\hat{B}' = \hat{B}$, ceea ce ar însemna că $S' = S$. Astfel, formula (!) s-ar reduce la

$$(\ !!\ ) \quad A_{\hat{B}} = S^{-1}A_BS,$$

unde A_B şi $A_{\hat{B}}$ ar fi matricile asociate lui T în bazele B şi respectiv $\hat{B}$, iar S ar fi matricea de schimbare de la B la $\hat{B}$. În virtutea relaţiei (!!), matricile pătratice $A_{\hat{B}}$ şi A_B sunt asemenea. Reciproc, se poate vedea că, dacă A şi $\tilde{A}$ din $\mathcal{M}_n(K)$ sunt două matrici pătratice asemenea, adică există o matrice nesingulară L, din $\mathcal{M}_n(K)$, astfel încât $\tilde{A} = L^{-1}AL$, atunci A şi $\tilde{A}$ reprezintă un acelaşi endomorfism liniar T, pe un spaţiu vectorial de dimensiune n, în două baze (distincte, când $L \neq I_n$) ale respectivului spaţiu pentru care matricea de trecere de la una la cealaltă este L.

Observaţie: Formula (!) se păstrează şi în cazul particular în care $V = \mathbb{R}^n$ şi $W = \mathbb{R}^m$, iar formula (!!) funcţionează şi atunci când $W = V = \mathbb{R}^n$.

Definiţia 7.4 *a) Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi T un endomorfism pe V. Se numeşte **adjunct al lui** T şi se notează cu T^* operatorul $T^* : V \to V$, definit prin*

$$\langle T^*(\mathrm{u}), \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{u}, T(\mathrm{v})\rangle, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

b) *O aplicaţie $T \in \mathcal{L}(V)$, unde $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spaţiu euclidian, se numeşte **autoadjunctă** sau **simetrică** dacă $T = T^*$.*

Observaţie: Se poate arăta că un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ definit pe un spaţiu euclidian $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, finit dimensional, este simetric dacă şi numai dacă matricea sa asociată, în raport cu o bază ortonormată a lui V, este una simetrică.

Definiţia 7.5 *Un endomorfism T pe un spaţiu euclidian $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este numit **antisimetric** dacă*

$$\langle T(\mathrm{u}), \mathrm{v} \rangle = -\langle \mathrm{u}, T(\mathrm{v}) \rangle, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Se poate vedea că, în cazul în care V este finit dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ este antisimetric dacă şi numai dacă matricea sa A, într-o bază ortonormată, este antisimetrică, adică $A^T = -A$, unde A^T reprezintă matricea transpusă corespunzătoare lui A.

Definiţia 7.6 *Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Endomorfismul T se numeşte **ortogonal** dacă*

$$\langle T(\mathrm{u}), T(\mathrm{u}) \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle, \forall\, \mathrm{u} \in V.$$

Observaţie: Ţinând seama de definiţia 7.4, relaţia din definiţia 7.6 se poate rescrie sub forma

$$\langle \left(T^* \circ T \right)(\mathrm{u}), \mathrm{u} \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle, \forall\, \mathrm{u} \in V,$$

echivalentă la rândul ei, cu relaţia

$$T^* \circ T = \mathbf{1}_V.$$

Astfel, dacă V este finit dimensional, atunci $T \in \mathcal{L}(V)$ este un endomorfism ortogonal dacă şi numai dacă, într-o bază ortonormată a lui V, matricea A, asociată lui T, este ortogonală, adică este aşa încât $A^T \cdot A = I$. Deoarece, în acest caz, $det(A) = \pm 1$, înseamnă că A este nesingulară, având rangul egal cu $dim(V)$. Aşadar, $rang(T) = dim(V)$ şi atunci $def(T) = 0$. Prin aplicarea propoziţiilor 7.3 şi 7.4 rezultă că T este simultan injecţie şi surjecţie pe V. Deci T este un automorfism pe V. Cu alte cuvinte, orice endomorfism ortogonal pe un spaţiu euclidian finit dimensional este un automorfism pe respectivul spaţiu.

Definiţia 7.7 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi f o aplicaţie de la X la X. Se spune că f este o **izometrie** pe X dacă $d\left(f(x), f(y)\right) = d(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.*

Propoziţia 7.5 *Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Endomorfismul T este o izometrie dacă şi numai dacă el este ortogonal.*

Demonstraţie: Raţionând în raport cu metrica indusă pe V de norma dată de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T ar fi o izometrie pe V dacă $d\left(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y})\right)$, adică $\left\| T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}) \right\|$, echivalent spus $\langle T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}), T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}) \rangle^{1/2}$, ar fi egală cu $d(x, y)$, adică cu $\langle \mathrm{x} - \mathrm{y}, \mathrm{x} - \mathrm{y} \rangle^{1/2}$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$. Ori asta revine la $\langle T(\mathrm{u}), T(\mathrm{u}) \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle$, $\forall\, \mathrm{u} \in V$, ceea ce ar însemna că T este endomorfism ortogonal. La fel, şi reciproc. ◀

Ţinând seama de observaţia ce precede Definiţia 7.7, putem afirma că orice izometrie liniară pe un spaţiu euclidian este un automorfism pe acel spaţiu.

Definiţia 7.8 *Fie V un K-spaţiu liniar şi $T \in \mathcal{L}(V)$.*

a) *Un vector nenul v din V se numeşte **vector propriu** pentru T dacă există $\lambda \in K$ aşa încât $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. Scalarul λ din acest context se numeşte **valoare proprie** a lui T, corespunzătoare vectorului propriu v.*

*b) $Ker\,(T-\lambda\mathbf{1}_V)$ se numeşte **subspaţiu propriu** corespunzător valorii proprii λ.*

Relativ la valorile proprii şi vectorii proprii ai unui endomorfism T pe un K-spaţiu vectorial V, remarcăm următoarele:

1. Un vector nenul $\mathrm{v} \in V$ este vector propriu, corespunzător valorii proprii $\lambda \in K$, pentru T, dacă şi numai dacă $\mathrm{v} \in Ker\,(T-\lambda\mathbf{1}_V)\ \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.

2. Unui vector propriu al lui T îi corespunde o singură valoare proprie $\lambda \in K$ nu şi reciproc.

3. Vectorii proprii ce corespund unor valori proprii distincte pentru T sunt liniar independenţi.

4. Orice subspaţiu propriu corespunzător unei valori proprii a lui T este invariant în raport cu T, adică are loc relaţia: $T\,(Ker\,(T-\lambda\mathbf{1}_V)) \subseteq Ker\,(T-\lambda\mathbf{1}_V)$.

5. La două valori proprii distincte ale lui T corespund subspaţii proprii care au în comun doar vectorul nul $\mathbf{0}_V$.

6. În cazul în care V este finit dimensional, iar A este matricea lui $T \in \mathcal{L}(V)$ într-o bază B a lui V, atunci $\mathrm{v} \in V$ este vector propriu pentru T dacă şi numai dacă este soluţie nebanală a sistemului (algebric, omogen)
$$(A-\lambda I)\mathrm{v} = \mathbf{0}_V,$$
iar λ este valoare proprie ce corespunde lui v dacă şi numai dacă este rădăcină a ***ecuaţiei*** aşa-numită ***caracteristică***
$$det(A-\lambda I) = 0.$$
În acest caz, polinomul $P_A(\lambda) = det(A-\lambda I)$ se numeşte ***polinom caracteristic*** al matricii A şi, implicit, al lui T.

   Dacă λ este rădăcină simplă a polinomului $P_A(\lambda)$, adică este valoare proprie simplă pentru T, atunci defectul lui $(T-\lambda\mathbf{1}_V)$ este egal cu 1. Altfel spus, dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii simple λ este egală cu 1. În rest, când λ este valoare proprie de multiplicitate $m > 1$, atunci $dim\,(Ker\,(T-\lambda\mathbf{1}_V)) \leq n$.

   Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ îşi verifică propria ecuaţie caracteristică, în conformitate cu teorema Cayley-Hamilton. Adică $P_A(A) = \mathit{0}_n$ (în sens matricial).

7. Orice endomorfism simetric de la un spaţiu euclidian $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ la acelaşi spaţiu are numai valori proprii reale, iar subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii distincte sunt ortogonale.

Definiţia 7.9 *Un **endomorfism** pe un spaţiu liniar finit dimensional este denumit **diagonalizabil** dacă există o bază B a respectivului spaţiu în raport cu care matricea A_B, asociată endomorfismului în cauză, este una de formă diagonală, adică $A_B = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, unde n este dimensiunea spaţiului respectiv şi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sunt scalari din corpul peste care este structurat spaţiul liniar considerat.*

Se pot constata următoarele:

1. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$, unde V este un spaţiu liniar finit dimensional, se poate diagonaliza dacă şi numai dacă există o bază a lui V alcătuită din vectori proprii ai lui T.

2. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil pe spaţiul liniar şi finit dimensional V dacă şi numai dacă ecuaţia caracteristică din context are toate rădăcinile în corpul K (peste care este structurat V) şi subspaţiile proprii în cauză au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare.

3. Un endomorfism simetric pe un spaţiu euclidian finit dimensional este întotdeauna diagonalizabil. În acest caz, diagonalizabilitatea are loc într-o bază ortonormată a respectivului spaţiu. În practică, pentru diagonalizarea endomorfismului, se parcurg următoarele etape:

   - Se determină matricea A a endomorfismului vizat, într-o bază fixată a spaţiului euclidian considerat. În particular, dacă spaţiul este $\mathbb{R}^n$, se consideră matricea A în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$;
   - Se determină valorile proprii ale endomorfismului respectiv, prin rezolvarea ecuaţiei algebrice caracteristice $P_A(\lambda) = 0$;
   - Dacă rangul matricii $A - \lambda I$ este, pentru λ egal cu fiecare valoare proprie, identic cu dimensiunea spaţiului euclidian luat în consideraţie, diminuată cu multiplicitatea valorii proprii în cauză, atunci se decide că endomorfismul este diagonalizabil. În caz contrar, se concluzionează că endomorfismul din context nu este diagonalizabil.
   - Pentru situaţia în care endomorfismul este diagonalizabil, se determină o bază a spaţiului euclidian considerat alcătuită din vectorii proprii ai endomorfismului, vectori v ce se găsesc prin rezolvarea sistemelor algebrice şi omogene

     $$(A - \lambda_j I)\,\mathrm{v} = \mathbf{0}_V, \forall\, j = \overline{1, l},$$

     unde λ_j sunt valorile proprii găsite în prealabil.
   - Baza în care endomorfismul are formă diagonală se determină prin transformarea bazei iniţiale (de start), matricea transformării fiind aleasă drept aceea care are, pe coloane, coordonatele vectorilor proprii ortogonali găsiţi, în raport cu baza de start.
   - Se scrie matricea ce corespunde formei ortogonale a endomorfismului avut în vedere prin respectarea exprimării $diag(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \lambda_l, \ldots, \lambda_l)$, unde fiecare din valorile proprii λ_j este luată de atâtea ori cât îi este ordinul de multiplicitate.

În fond, ne bazăm pe următorul rezultat:

Teorema 7.2 *Fie V un spaţiu euclidian n-dimensional ($n \in \mathbb{N}^*$) şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Necesar şi suficient ca vectorii proprii ai endomorfismului T să genereze întreg spaţiul V este ca, în raport cu baza vectorilor proprii, matricea asociată lui T să aibă formă diagonală. În acest caz, fiecare valoare proprie a lui T apare, pe diagonala respectivă, de un număr de ori egal cu dimensiunea spaţiului propriu asociat.*

Demonstraţie: Admitem că V este dotat deja cu o bază alcătuită din vectorii proprii ai lui T. Fie aceştia $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$, corespunzători valorilor proprii (nu numai decât distincte) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Avem deci: $T(\mathrm{v}_i) = \lambda_i \mathrm{v}_i$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Dacă baza respectivă este ortonormată, ceea ce este, de fapt, posibil întotdeauna, în virtutea faptului că subspaţiile proprii asociate valorilor λ_i sunt mutual (două câte două) ortogonale şi, pentru fiecare dintre respectivele spaţii, se poate pune în evidenţă, prin algoritmul lui Gram-Schmidt, câte o bază ortonormată (alcătuită, evident, din combinaţii liniare ale vectorilor proprii corespunzători unei aceleiaşi valori proprii, combinaţii care sunt tot vectori proprii ai respectivei valori), atunci reiese că matricea endomorfismului T, faţă de această bază a lui V, este matricea diagonală

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Reciproc, dacă matricea asociată lui T, în raport cu o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, are forma diagonală A_T, atunci avem relaţiile $T(\mathrm{b}_k) = \lambda_k \mathrm{b}_k$, $\forall\, k = \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ sunt vectori proprii ai lui T, corepsunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dacă, în raport cu baza aceasta a lui V, alcătuită deci din vectori proprii ai lui T, am avea un anume element din V, fie el notat cu v_0, tot vector propriu al lui T, corespunzător unei valori proprii λ_0, atunci ar trebui să aibă loc relaţia $T(\mathrm{v}_0) = \lambda_0 \mathrm{v}_0$, cu $\mathrm{v}_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{b}_k \neq \mathbf{0}_V$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui v_0 în baza $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$. Altfel zis, am avea:

$$\lambda_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = \lambda_0 v_0 = T(v_0) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k b_k.$$

De aici, ar rezulta că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_0) \mathrm{b}_k = \mathbf{0}_V$. Cum $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ sunt liniar independenţi, ar reieşi că am avea $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,n}$. Deoarece scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu au cum să fie toţi egali cu zero, am avea $\lambda_0 \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, ceea ce înseamnă că T nu admite şi alte valori proprii în afară de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Considerând că am avea $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \lambda_0$ şi $\lambda_i \neq \lambda_0$, $\forall\, i \in \{r+1, \ldots, n\}$, unde $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ar fi ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_0, putem conta pe faptul că orice vector de tipul $c_1 \mathrm{b}_1 + c_2 \mathrm{b}_2 + \cdots c_r \mathrm{b}_r$ (cu $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$) ar fi vector propriu al lui T, corespunzător valorii proprii λ_0. Ar rezulta atunci, pe baza relaţiilor $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1,n}$, de mai înainte, că, în mod necesar, găsim: $\alpha_k = 0$, $\forall\, k = \overline{r+1,n}$. Prin urmare, subspaţiul propriu asociat lui λ_0 coincide, în realitate, cu subspaţiul generat de vectorii $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_r$, având dimensiunea egală cu multiplicitatea lui λ_0. ◀

Bibliografie

1. Elena Macovei, F. Iacob - *Matematică (pentru anul I - ID,Informatică) (Funcţii scalar-reale elementare, pp. 47-49*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", 2005-2006.

2. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră (Cap. III) (inele de polinoame şi polinoame simetrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

3. D. Drăghici - *Algebră (Cap. X)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

4. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie (Cap. V)*, Ed. Didactică şi Pedag., Bucureşti, 1979.

5. Irinel Radomir - *Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

6. E. Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Ed. "Fair Partners", Buc., 2010.

7. Kenneth Kuttler - *Linear Algebra, Theory And Applications,* The Saylor Foundation, 2013.

8. Jim Hefferon - *Linear Algebra,* Amazon for Students, 2014.

9. Sheldon Axler - *Linear Algebra Done Right,* Springer International Publishing AG, 2015.

10. S. Heilman - *Linear Transformations and Matrices*, UCLA Department of Mathematics, Los Angeles, 2016.