

Cursul 8

Forme liniare, biliniare și pătratic (Aspecte algebrice și geometrice)

Forme (funcționale) liniare

Aplicațiile liniare de la un spațiu vectorial oarecare la un spațiu vectorial unidimensional merită o atenție specială, deoarece spațiul din urmă s-ar putea identifica, la nevoie, cu corpul K , al scalarilor, peste care sunt considerate cele două spații liniare în cauză. Iată de ce, aici, facem acum o succintă prezentare a câtorva chestiuni privitoare la asemenea gen de aplicații liniare.

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste un corp comutativ (de scalari) K .

Definiția 8.1 a) O aplicație liniară $f : V \rightarrow K$, adică un element al mulțimii $\mathcal{L}(V; K)$, se numește **formă liniară** (sau **funcțională liniară**) pe V . Când $K = \mathbb{R}$, elementul $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ se numește **formă (funcțională) liniară reală**.

b) Mulțimea $\mathcal{L}(V; K)$, a tuturor formelor liniare pe V , privită ca spațiu liniar peste K - în raport cu operația de adunare uzuală a două funcții și operația de înmulțire a unei funcții cu un element din K - se numește **spațiu dual** (sau **conjugat**) (ori, pur și simplu, **dualul** sau **conjugatul**) lui V și se notează, îndeobște, cu V^* .

Propoziția 8.1 Dacă spațiul vectorial V este finit dimensional, atunci la fel este și dualul său V^* . În acest caz, avem $\dim(V^*) = \dim(V) \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație: Fie $n = \dim(V) \in \mathbb{N}^*$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ o bază a lui V . Pentru un element oarecare v din V , fie $v_1, v_2, \dots, v_n \in K$ coordonatele lui v în baza B . Se pot defini atunci funcționalele $v_j^* : V \rightarrow K$, prin $v_j^*(v) = v_j, \forall j = \overline{1, n}$. Acestea sunt, desigur, elemente ale lui V^* , întrucât: $v_j^*(\alpha v + \beta u) = (\alpha v + \beta u)_j = \alpha v_j + \beta u_j = \alpha v_j^*(v) + \beta v_j^*(u), \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in K, j = \overline{1, n}$. În plus, $v_j^*(b_i) = 0$, când $i \neq j$ și $v_j^*(b_j) = 1, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Mulțimea $B^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ este o bază a spațiului V^* . Într-adevăr, B^* este liniar independentă, deoarece relația $\sum_{j=1}^n \gamma_j v_j^* = \mathbf{0}_{V^*}$ (cu $\gamma_j \in K, \forall j = \overline{1, n}$), care implică faptul că $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_{V^*}(v) =$

$\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j v_j^* \right)(v) = \sum_{j=1}^n \gamma_j v_j^*(v) = \sum_{j=1}^n \gamma_j v_j, \forall v \in V$, adică și $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_{V^*}(b_i) = \gamma_i, \forall i = \overline{1, n}$, are loc, deci, doar când $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$. Totodată, B^* este și un sistem de generatori pentru V^* , căci, pen-

tru orice $f \in V^*$ și $v = \sum_{j=1}^n v_j b_j \in V$, avem: $f(v) = f\left(\sum_{j=1}^n v_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n v_j f(b_j) = \sum_{j=1}^n v_j^*(v) f(b_j) = \left(\sum_{j=1}^n f(b_j) \cdot v_j^*\right)(v).$ ◀

Definiția 8.2 Sistemul B^* se numește **baza duală** a bazei B , iar $\{f(b_j)\}_{1 \leq j \leq n} \subset K$ se numesc **coeficienți ai formei liniare f în baza B^*** .

Observație: Se poate simplu vedea că, dacă $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subset K$ este o mulțime indicată de scalari, iar $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ este o bază a spațiului liniar n -dimensional V , atunci există și este unică o formă liniară $f \in V^*$, ai cărei coeficienți, în baza duală B^* , sunt tocmai scalarii $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Aceasta este: $f = \sum_{j=1}^n \omega_j v_j^*$.

În virtutea unei atare remarci, se evidențiază următorul rezultat:

Propoziția 8.2 *Dacă $v \in V \setminus \{0_V\}$ și V este spațiu liniar finit dimensional peste un corp comutativ K , atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(v) \neq 0 \in K$.*

Demonstrație: Cum $v \in V \setminus \{0_V\}$ și V are o bază finită B , există cel puțin o coordonată nenulă a lui v , în baza B . Drept urmare, putem lua $f : V \rightarrow K$, $f = v_j^*$, unde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ este indicele ce corespunde acelei coordonate nenule a lui v . Astfel, am avea: $f(v) = v_j^*(v) = v_j \neq 0$. ◀

Observație: Enunțul Propoziției 8.2 are următoarea variantă echivalentă: ”Dacă V este un K -spațiu liniar finit dimensional și u, v sunt două elemente arbitrare și distincte din V , atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(u) \neq f(v)$ ”.

Cum un element $f \in V^*$ este o aplicație liniară de la V la K , se poate afirma că, în cazul în care V este finit dimensional, lui f i se asociază, prin intermediul bazelor B , din V și $\{1\}$, din K , potrivit relației de tipul aceleia din finalul Propoziției 8.1, matricea linie

$$A_f^B = [f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)],$$

unde b_1, b_2, \dots, b_n sunt vectorii din B . În conformitate cu aceeași relație, raportându-ne la baza duală B^* , vedem că

$$f_{B^*} = \begin{bmatrix} f(b_1) \\ f(b_2) \\ \vdots \\ f(b_n) \end{bmatrix} \text{ (adică } f = \sum_{j=1}^n f(b_j) v_j^* \text{)}.$$

Așadar, matricea asociată lui f , în raport cu B^* , este $(A_f^B)^T$, adică transpusa matricii A_f^B . Cu alte cuvinte, lui f , privit ca o funcțională liniară pe K -spațiul liniar, finit dimensional, V , îi corespunde o matrice formată dintr-o linie, iar dacă f este privit ca element din spațiul dual V^* , atunci lui f îi corespunde o matrice coloană (față de baza duală), iar cele două matrice implicate în considerație sunt transpuse una alteia.

Formula de schimbare a lui A_f^B , la o transformare de bază în V (și, implicit, în V^*), se deduce a fi următoarea

$$A_f^{B'} = A_f^B S,$$

pentru trecerea de la baza B la baza B' , în V , cu matricea de schimbare S , precum și, corespunzător, următoarea

$$f_{B'^*} = S^T f_{B^*},$$

pentru trecerea de la baza duală B^* la baza duală B'^* , în spațiul V^* . Prin urmare, dacă matricea de trecere de la baza B la baza B' , în V , este S , atunci matricea de trecere de la duala lui B' la duala lui B este egală cu transpusa lui S .

Definiția 8.3 (Bidualul unui spațiu vectorial) Fie V un K -spațiu vectorial și V^* dualul său. Dualul lui V^* , notat cu V^{**} (fiind tot un K -spațiu vectorial), se numește **bidualul** lui V .

Când V este finit dimensional, avem $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$ și, în virtutea acestei relații, bidualul lui V , adică spațiul V^{**} - care, în general, este un “supraspațiu” al lui V (sau, mai exact spus, este izomorf cu un supraspațiu liniar al lui V) - se poate arăta că este izomorf cu V . În acest sens, se folosește aplicația $\psi : V \rightarrow V^{**}$, definită prin $\psi(v) = v^{**}$, $\forall v \in V$, unde $v^{**} \in V^{**}$ se introduce pe baza relației: $v^{**}(f) = f(v)$, $\forall f \in V^*$.

Despre ψ , se deduce că este liniară, deoarece $(\psi(\alpha \cdot v + \beta \cdot u))(f) = f(\alpha \cdot v + \beta \cdot u) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(u) = \alpha \cdot (\psi(v))(f) + \beta \cdot (\psi(u))(f)$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $u, v \in V$, $f \in V^*$ și, de asemenea, surjectivă, pe baza relației $\dim(V^{**}) = \dim(V)$. Cât privește injectivitatea lui ψ , ea are loc, întrucât $\psi(v) = \mathbf{0}_V$ implică $(\psi(v))(f) = \mathbf{0}_V(f)$, adică $f(v) = 0$, cu $v \in V$ și $\forall f \in V^*$. Dacă, de aici, n-ar rezulta $v = \mathbf{0}_V$, atunci, presupunând că $v \neq \mathbf{0}_V$, ar exista un element $\tilde{f} \in V^*$, astfel încât, în conformitate cu Propoziția 8.2, am avea $\tilde{f}(v) \neq 0$, în contradicție cu faptul că $f(v) = 0$, $\forall f \in V^*$. Astfel, cu necesitate, reiese că nucleul lui ψ este $\{\mathbf{0}_V\}$, ceea ce înseamnă că ψ este într-adevăr injectivă. În plus, deoarece $\dim(\text{Ker}(\psi)) = 0$, prin teorema dimensiunilor, avem $\dim(V) = \dim(\text{Im}(\psi)) + \dim(\text{Ker}(\psi)) = \dim(\text{Im}(\psi)) = \dim(V^{**})$, ceea ce înseamnă că ψ este, într-adevăr, și surjectivă. Deci ψ este un izomorfism de la V la V^{**} , care, nemijlocit fiind legat de vreun sistem de coordonate din V , se numește **izomorfismul canonic** de la spațiul liniar V la bidualul său V^{**} . În virtutea acestui izomorfism, de cele mai multe ori, V și V^{**} se identifică, luându-se $v^{**} \equiv v$, $\forall v \in V$. Pe baza unei asemenea identificări, putem privi, după caz, orice element v din V fie ca pe un vector în V , fie ca pe o funcțională liniară definită pe V^* , în concordanță cu starea elementelor din V^* care, prin definiție, sunt funcționale liniare definite pe V . Fiecare dintre spațiile V și V^* apare ca dualul celuilalt, iar în virtutea identificării menționate avem $v(f) = f(v)$, $\forall v \in V$, $f \in V^*$, relație pe baza căreia se poate spune că legătura dintre V și V^* este simetrică (numită **relație de dualitate** între V și V^*).

Din punct de vedere geometric, nucleul unei funcționale nenule și liniare pe un spațiu vectorial V este un așa-numit **hiperplan**, adică un subspațiu propriu, maximal al lui V . Când $\dim(V) = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), deoarece $\dim(\text{Im}(f)) = 1$, $\forall f \in V^*$, avem: $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(f)) = n - 1$. În acest caz, în raport cu o bază $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ din V , mulțimea $\text{Ker}(f)$, adică hiperplanul în cauză, este

$$\{x \in V \mid f(x) = 0\},$$

adică $\{x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \mid \sum_{i=1}^n x_i f(b_i) = 0\}$. Notând $f(b_i)$ cu a_i , $\forall i = \overline{1, n}$, se poate spune că acest hiperplan este caracterizat de **ecuația**

$$(*) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Reciproc, pentru orice set de scalari $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq K$, existența unei funcționale liniare $f \in V^*$, ai cărei coeficienți de reprezentare în baza duală lui B sunt a_1, a_2, \dots, a_n , implică faptul că, plecând de la o ecuație de forma (*), hiperplanului în speță i se poate asocia chiar funcționala f , așa încât $\text{Ker}(f)$ să fie respectivul hiperplan.

Când $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^3$, ecuația (*) caracterizează un **plan ce trece prin punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$** (originea lui \mathbb{R}^3). În cazul în care $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^2$, "hiperplanul" de ecuație (*) este o **dreaptă ce trece prin originea planului real \mathbb{R}^2** .

Mai general, se poate arăta că orice subspațiu liniar al unui spațiu vectorial finit dimensional, nu numai un subspațiu liniar maximal, se caracterizează prin sisteme de ecuații de forma (*). În aceeași notă de generalitate, când $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^2$ sau $V = \mathbb{R}^3$, o dreaptă și, respectiv, un plan care nu trece numai decât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ și respectiv prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ sunt, din punct de vedere algebric, nuclee ale unor așa-numite **funcționale afine**, generic introduse prin definiția ce urmează.

Definiția 8.4 Fie V un spațiu vectorial peste un corp comutativ K și $c_0 \in K$. De asemenea, fie $f \in V^*$ și $f_0 : V \rightarrow K$, definită prin $f_0(v) = c_0$, $\forall v \in V$. Suma $f + f_0$ se numește **funcțională afină** pe V .

Altfel spus, o funcțională afină pe un spațiu liniar V este suma dintre o funcțională liniară pe V (anume f) și o funcțională constantă pe V (adică f_0).

Dacă V este n -dimensional ($n \in \mathbb{N}^*$), cu o bază $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, atunci: $\text{Ker}(f + f_0) = \{v = \sum_{i=1}^n v_i b_i \in V \mid (f + f_0)(v) = 0\} = \{v = \sum_{i=1}^n v_i b_i \in V \mid \sum_{i=1}^n v_i f(b_i) + c_0 = 0\}$.

Cu notația $f(b_i) = a_i, \forall i = \overline{1, n}$, mulțimea $Ker(f + f_0)$ este caracterizată de ecuația:

$$(**) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + c_0 = 0.$$

Aceasta corespunde unei **drepte reale** când $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^2$, ori unui **plan** (care nu trece numai decât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$) când $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^3$, ori, în general, când $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^n$, unui **hiperplan real**.

Noțiunea de funcțională afină reprezintă un caz particular al aceleia de aplicație (transformare) afină, a cărei definiție este următoarea:

Definiția 8.5 a) Un triplet (X, V, φ) , în care X este o mulțime nevidă, V este un spațiu vectorial, iar φ este o funcție de la $X \times X$ la V astfel încât

- (i) $\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z), \forall x, y, z \in X$ și
- (ii) $\forall x \in X, v \in V, \exists y \in X$, unic, așa ca $\varphi(x, y) = v$,

se numește **spațiu afin**.

b) Un spațiu afin aflat în situația în care $X = V$ și $\varphi(u, v) = u - v, \forall u, v \in V$ poartă denumirea de **spațiu afin atașat spațiului vectorial V** .

Când $X = V = \mathbb{R}^n$, iar V este spațiu vectorial peste \mathbb{R} , atunci este vorba despre **spațiul afin real \mathbb{R}^n** .

c) Se numește **endomorfism de spații afine** un morfism (aplicație liniară) de la unul dintre spații la celălalt.

d) O aplicație f de la spațiul afin (X, V, φ) la spațiul afin (Y, W, φ) se numește **morfism afin** (sau **aplicație/funcție/transformare afină**) dacă, pentru orice subspațiu afin al lui (X, V, φ) , imaginea sa prin f este un subspațiu afin al lui (Y, W, φ) .

În cazul în care spațiile afine din Definiția 8.5-d) sunt finit dimensionale, funcția afină f este dată printr-o relație de tipul

$$f(v) = Av + w_0, \forall v \in V$$

unde A este o matrice ($\in \mathcal{L}(V, W)$), iar $w_0 \in W$.

În cazul particular în care $W = V$ și A este matricea unitate, transformarea (punctuală) afină $f : V \rightarrow V$, definită prin $f(v) = v + w_0$ se numește **translație** (sau **deplasare paralelă cu direcția dată de w_0**).

Dacă $W \equiv V, \mu_0 \in K, v_0 \in V, w_1 \in W, A = \mu_0 I$ și $w_0 = w_1 - \mu_0 v_0$, atunci transformarea afină în cauză, $f : V \rightarrow V$, definită prin $f(v) = w_1 + \mu_0(v - v_0), \forall v \in V$ se numește **omotetie**.

Un morfism de spații afine, $f : V \rightarrow W$ este denumit **simetrie**, în cazul când $W = V$ și $f \circ f = \mathbf{1}_V$.

Forme biliniare

Definiția 8.6 Fie V și W două spații vectoriale peste un același corp comutativ K . O aplicație $g : V \times W \rightarrow K$ care satisface relațiile

- (j) $g(\alpha v + \beta u, w) = \alpha g(v, w) + \beta g(u, w), \forall \alpha, \beta \in K, u, v \in V, w \in W$ și
- (jj) $g(v, \lambda w + \mu z) = \lambda g(v, w) + \mu g(v, z), \forall \lambda, \mu \in K, v \in V, w, z \in W$

se numește **formă** (sau **funcțională**) **biliniară** pe $V \times W$.

Când $W \equiv V$, aplicația $g : V \times V \rightarrow K$ care satisface (j) și (jj) se numește **formă** (**funcțională**) **biliniară** pe V .

Dacă V și W sunt finit dimensionale, cu bazele $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ și respectiv $\widehat{B} = \{\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \dots, \widehat{b}_m\}$, atunci:

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n v_i b_i, \sum_{j=1}^m w_j \widehat{b}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i w_j g(b_i, \widehat{b}_j), \forall v \in V, w \in W,$$

unde $v_1, v_2, \dots, v_n \in K$ sunt coordonatele lui v în baza B , iar $w_1, w_2, \dots, w_m \in K$ sunt coordonatele lui w în baza \widehat{B} (din W). Scalarii $a_{ij} = g(b_i, \widehat{b}_j)$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ se numesc **coeficienți ai formei biliniare** g în raport cu perechea de baze (B, \widehat{B}) , iar matricea acestor coeficienți este numită **matricea formei biliniare** g în cuplul de baze (B, \widehat{B}) .

Dacă B' și \widehat{B}' sunt alte baze în V și respectiv W , iar S și respectiv \widehat{S} sunt matricile de trecere de la B la B' și respectiv de la \widehat{B} la \widehat{B}' , atunci matricea $A_{B', \widehat{B}'}$, corespunzătoare formei biliniare g în raport cu perechea de baze (B', \widehat{B}') este dată de formula

$$(\#) \quad A_{B', \widehat{B}'} = S^T A_{B, \widehat{B}} \widehat{S}$$

în care $A_{B, \widehat{B}}$ este matricea formei biliniare g în perechea de baze (B, \widehat{B}) , iar S^T transpusa matricii S . Prin urmare, matricea formei g față de noile baze B' și \widehat{B}' se obține din matricea lui g relativă la vechile baze B și \widehat{B} , prin înmulțirea, la stânga, cu transpusa matricii schimbării de baze în V și, la dreapta, cu matricea schimbării de baze în W .

Aplicația biliniară $g : V \times W \rightarrow K$ definește, în raport cu parametrul $w \in W$, o familie de funcții liniare $f_w : V \rightarrow K$, date prin $f_w(v) = g(v, w)$, $\forall v \in V$, precum și o familie de funcții liniare $h_v : W \rightarrow K$, depinzând de parametrul $v \in V$, introduse prin formula $h_v(w) = g(v, w)$, $\forall w \in W$. Atunci, aplicația $w \rightarrow f_w$ este un morfism g' de la spațiul liniar W la dualul V^* al lui V . Prin acest morfism, fiecărui element $w \in W$ îi corespunde forma liniară $g'(w) = f_w \in \mathcal{L}(V, K) = V^*$. De asemenea, aplicația $g'' : V \rightarrow W^* = \mathcal{L}(W, K)$, definită prin $g''(v) = h_v$, $\forall v \in V$ este un morfism de spații liniare.

Definiția 8.7 Fie $g : V \times W \rightarrow K$ o aplicație biliniară pe $V \times W$ și morfismele liniare derivate g' și g'' . Subspațiul liniar $\text{Ker}(g')$ (al lui W) se numește **nucleul lui g la dreapta**, iar subspațiul lui V , $\text{Ker}(g'')$ se numește **nucleul la stânga** al lui g . Dacă $\text{Ker}(g') = \{0_W\}$ și $\text{Ker}(g'') = \{0_V\}$, atunci forma biliniară g se numește **nedegenerată**.

Definiția 8.8 O formă biliniară $g : V \times V \rightarrow K$ se numește **simetrică** dacă $g(u, v) = g(v, u)$, $\forall u, v \in V$ și **antisimetrică** dacă $g(u, v) = -g(v, u)$, $\forall u, v \in V$.

Propoziția 8.3 Dacă $g : V \times V \rightarrow K$ este o formă biliniară simetrică (sau antisimetrică) pe V , atunci nucleul său la stânga coincide cu nucleul său la dreapta.

În acest caz, oricare dintre nucleele coincidente (fie cel la stânga, fie cel la dreapta) se numește, pur și simplu, **nucleul lui g** și se notează cu simbolul $\text{Ker}(g)$.

Demonstrație: Pentru orice $v \in \text{Ker}(g') = \{y \in V \mid g(x, y) = 0, \forall x \in V\}$, avem $g(x, v) = 0$, $\forall x \in V$. Dar cum g este simetrică (sau antisimetrică), rezultă că avem $g(v, x) = 0$, $\forall x \in V$, ceea ce înseamnă că $v \in \text{Ker}(g'') = \{x \in V \mid g(x, y) = 0, \forall y \in V\}$. Prin urmare, $\text{Ker}(g') \subseteq \text{Ker}(g'')$. Incluziunea contrară se demonstrează la fel. Astfel, conchidem că avem: $\text{Ker}(g') = \text{Ker}(g'')$. ◀

Propoziția 8.4 Dacă $g : V \times V \rightarrow K$ este o formă biliniară și simetrică pe spațiul vectorial V , finit dimensional, peste K , atunci

$$\text{rang}(g) + \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(V),$$

unde $\text{rang}(g)$ este rangul matricii asociate lui g în raport cu o bază B din V .

Demonstrație: Fie $n = \dim(V)$ și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază a lui V , în care matricea lui g este $A = (g(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Atunci, pentru orice $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, y = \sum_{i=1}^n y_i v_i \in V$, avem:

$$g(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j, \text{ cu } a_{ij} = g(v_i, v_j), \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Cum $\text{Ker}(g) = \{x \in V \mid g(x, y) = 0, \forall y \in V\}$ și $g(x, y) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) y_j$, putem spune că

$x \in \text{Ker}(g)$ dacă și numai dacă $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = 0, \forall j = \overline{1, n}$, adică dacă x este o soluție a acestui sistem de ecuații omogene. Ca atare, $\text{Ker}(g)$ coincide cu mulțimea soluțiilor unui astfel de sistem, relativ la care se știe că rangul matricii sale, adică $\text{rang}(g)$, este egal cu diferența dintre numărul necunoscutelor și dimensiunea spațiului soluțiilor. Așadar, avem: $\text{rang}(g) + \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(V)$. ◀

Observație: Ținând seama de Propoziția 8.4, se poate afirma că o condiție necesară și suficientă ca o formă biliniară și simetrică $g : V \times V \rightarrow K$ să fie nedegenerată este ca rangul ei să fie maxim, adică egal cu $\dim(V)$.

Definiția 8.9 a) Fie V un K -spațiu vectorial și $g : V \times V \rightarrow K$ o formă biliniară și simetrică pe V . Doi vectori u și v din V se numesc **ortogonali** (sau **conjugăți**) în raport cu g dacă $g(u, v) = 0$.

b) Dacă U este un subspațiu liniar al lui V , atunci mulțimea $\{y \in V \mid g(x, y) = 0, \forall x \in U\}$, care se dovedește a fi un subspațiu vectorial al lui V , se numește **complementul ortogonal al lui U față de g** și se notează cu U^{\perp_g} .

Observație: Când V este finit dimensional și $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ este o bază a subspațiului liniar $U \subseteq V$, atunci $y \in U^{\perp_g}$ dacă și numai dacă $g(u_l, y) = 0, \forall l = \overline{1, p}$.

Teorema 8.1 Fie V un K -spațiu vectorial finit dimensional și $g : V \times V \rightarrow K$ o formă biliniară și simetrică pe V . Atunci, oricare ar fi baza $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a lui V , ortogonală față de g (adică așa încât $g(b_i, b_j) = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$), exact un număr egal cu $\text{rang}(g)$ dintre scalarii $g(b_1, b_1), g(b_2, b_2), \dots, g(b_n, b_n)$ sunt diferiți de zero.

Demonstrație: Fie $r = \text{rang}(g)$ și s numărul scalarilor $g(b_i, b_i)$ diferiți de 0. Astfel, $g(b_1, b_1) \neq 0, g(b_2, b_2) \neq 0, \dots, g(b_s, b_s) \neq 0$ și $g(b_j, b_j) = 0, \forall j = \overline{s+1, n}$. Atunci:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \in \text{Ker}(g) \iff g(b_i, x) = x_i g(b_i, b_i) = 0, \forall i = \overline{1, n}.$$

Deci $\text{Ker}(g) = \{x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \mid x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0\}$ și, în consecință, $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim(V) - \text{rang}(g) = n - r$. Așadar, rezultă că avem: $n - s = n - r$. De aici, găsim: $s = r$. ◀

Când $K = \mathbb{R}$, se poate spune chiar mai mult despre g decât în Teorema 8.1 și anume:

Teorema 8.2 (Teorema inerției; a lui Sylvester)

Fie V un spațiu vectorial real și $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară și simetrică pe V , nedegenerată. Există atunci un număr natural p astfel încât, dacă $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ este o bază a spațiului finit dimensional V , ortogonală față de g , exact p dintre numerele $g(b_1, b_1), g(b_2, b_2), \dots, g(b_n, b_n)$ sunt mai mari decât 0 (adică pozitive) și $q = n - p$ dintre ele sunt negative.

Demonstrație: Fie $c_i = g(b_i, b_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$. După o eventuală renumerotare a elementelor bazei, putem zice că avem $c_1, c_2, \dots, c_p > 0$ și $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_n < 0$. Considerăm o altă bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a lui V , tot ortogonală față de g , în raport cu care avem $d_i = g(v_i, v_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$ astfel încât $d_1, d_2, \dots, d_l > 0$ și $d_{l+1}, d_{l+2}, \dots, d_n < 0$. Arătăm că vectorii $b_1, b_2, \dots, b_p, v_{l+1}, \dots, v_n$ sunt liniar independenți în V . Astfel, presupunând că avem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_{l+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ așa ca

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_p b_p + \beta_{l+1} v_{l+1} + \dots + \beta_n v_n = \mathbf{0}_V,$$

putem scrie: $w = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_p b_p = -(\beta_{l+1} v_{l+1} + \dots + \beta_n v_n)$. Calculând $g(w, w)$, obținem, pe de o parte, $c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + \dots + c_p \alpha_p^2$ și, pe de alta, $d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \dots + d_n \beta_n^2$, adică

$$0 \leq c_1 \alpha_1^2 + \dots + c_p \alpha_p^2 = d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \dots + d_n \beta_n^2 \leq 0,$$

ceea ce nu este posibil decât dacă $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_{l+1} = \dots = \beta_n = 0$. Prin urmare, vectorii $b_1, \dots, b_p, v_{l+1}, \dots, v_n$ sunt într-adevăr liniar independenți. În consecință, avem $p + n - l \leq n$, adică $p \leq l$. Similar, avem și relația reciprocă, așa încât, de fapt, $p = l$. Deci p este un invariant al lui g (indiferent de baza lui V). ◀

Observație: Dacă $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este o formă biliniară și simetrică pe spațiul liniar real, finit dimensional, V , atunci, pentru orice bază $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a lui V , ortogonală față de g , numărul elementelor pozitive, numărul elementelor nule și cel al elementelor negative din șirul $g(b_1, b_1), g(b_2, b_2), g(b_3, b_3), \dots, g(b_n, b_n)$ sunt mereu aceleași, invariabile în raport cu baza considerată. Aceasta, în virtutea Teoremei 8.1 și a Teoremei 8.2, ultima dintre ele aplicată restricției lui g la $Ker(g)$.

Definiția 8.10 Tripletul (p, q, r) , în care numărul natural p este egal cu numărul elementelor pozitive din suita $g(b_1, b_1), g(b_2, b_2), \dots, g(b_n, b_n)$, q este numărul elementelor negative din aceeași suită, iar r (adică $n - p - q$) este numărul elementelor egale cu zero din respectivul șir, se numește **signatura** lui g .

Forme și funcții pătratice

Definiția 8.11 Fie $g : V \times V \rightarrow K$ o funcție biliniară și simetrică pe spațiul vectorial V , peste corpul comutativ K . Funcția $h : V \rightarrow K$, definită prin $h(x) = g(x, x)$, $\forall x \in V$ (adică restricția lui g la $\{(x, x) \mid x \in V\} \subseteq V \times V$) se numește **formă (funcțională) pătratică** pe V , asociată formei biliniare g .

Observație: Deoarece $h(x + y) = g(x + y, x + y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y)$ și $g(x, y) = g(y, x)$, avem

$$h(x + y) = h(x) + 2g(x, y) + h(y), \forall x, y \in V,$$

de unde deducem formula:

$$g(x, y) = \frac{1}{2} [h(x + y) - h(x) - h(y)], \forall x, y \in V.$$

În virtutea acesteia, cunoașterea formei pătratice h pe V conduce la determinarea formei biliniare și simetrice g , asociată lui h , pe V .

Dacă $\dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ este o bază a lui V , atunci matricea asociată lui g în raport cu B este, de fapt, și matricea asociată lui h , iar funcția polinomială și omogenă, de gradul 2, $h(x)$, al cărei aspect este

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \text{ pentru } x = \sum_{i=1}^n x_i b_i,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ este matricea menționată, se numește **expresie a formei pătratice** h . Scalarii a_{ij} , verificând relația de simetrie $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$, se numesc **coeficienți ai lui h în baza B** . Determinantul matricii $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ se numește **discriminantul** formei pătratice h .

Ținând cont de formula (#), putem spune că, și în cazul formei h , matricea sa asociată într-o bază B' a lui V , alta decât B , matrice notată cu $A_{B'}$, se obține din cea asociată lui h în baza B , notată cu A_B , în conformitate cu relația

$$(\#\#) \quad A_{B'} = S^T A_B S,$$

unde S este matricea de trecere de la B la B' , iar S^T este transpusa matricii S .

În virtutea legăturii dintre h și g , se poate spune că h este o **formă pătratică nedegenerată** dacă și numai dacă g este nedegenerată, adică dacă $\det(A) \neq 0$, unde A este matricea asociată lui g și respectiv lui h . Altfel, h este o **forma pătratică degenerată**.

Definiția 8.12 Se numește **formă canonică (redușă)** a funcției pătratice h acea expresie în care, în raport cu o anumită bază a lui V , matricea asociată are formă diagonală. Forma canonică a lui h este numită **normală** atunci când matricea (diagonală) asociată lui h conține, pe diagonală în speță, numai elementele 0, 1 și -1 (din K).

Teorema 8.3 (Metoda lui Gauss de aducere a unei forme pătratice la expresia ei redusă)

Fie V un spațiu liniar real, n -dimensional și $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Există atunci o bază $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a lui V și scalarii $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$, așa încât, pentru orice $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \in V$, avem:

$$h(x) = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \dots + \omega_n x_n^2.$$

Demonstrație: Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază oarecare a lui V , față de care expresia lui $h(x)$ este

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$, unde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ sunt coordonatele lui x în raport cu această bază, iar a_{ij} sunt coeficienții din \mathbb{R} ai lui h relativ la baza respectivă. Pentru reducerea formei $h(x)$ la doar o sumă algebrică de pătrate ale coordonatelor lui x într-o altă anumită bază $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a lui V , căutăm dacă cel puțin unul dintre coeficienții a_{ii} , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, este diferit de zero. Dacă acest lucru nu are loc din start, iar h nu este o formă identic nulă, atunci expresia lui h are cel puțin un termen $2a_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$ cu $a_{ij} \neq 0$. Efectuând transformarea de bază ce corespunde schimbării de coordonate următoare $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1, \tilde{x}_2 = \hat{x}_2, \dots, \tilde{x}_{i-1} = \hat{x}_{i-1}, \tilde{x}_i = \hat{x}_i + \hat{x}_j, \tilde{x}_{i+1} = \hat{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_{j-1} = \hat{x}_{j-1}, \tilde{x}_j = \hat{x}_i - \hat{x}_j, \tilde{x}_{j+1} = \hat{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_n = \hat{x}_n$, termenul $2a_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$ devine $2a_{ij} (\hat{x}_i^2 - \hat{x}_j^2)$ și, astfel, de exemplu, coeficientul lui \hat{x}_i^2 este nenul.

Fără a micșora generalitatea raționamentului de față, admitem că avem, de la început, în expresia lui h , $a_{11} \neq 0$. Luăm atunci în atenție suma tuturor acelor termeni (din respectiva expresie) care îl conțin pe \tilde{x}_1 . Completăm această sumă până la un pătrat perfect, așa încât expresia lui h să se redea sub forma

$$\frac{1}{a_{11}} (a_{11} \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 + \dots + a_{1n} \tilde{x}_n)^2 + \dots,$$

în care termenii din zona "..." conțin numai coordonatele x_2, \dots, x_n ale lui x în baza $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Expresia sumei din zona "..." este similară aceleia din start, cu diferența că ea nu mai conține deloc pe \tilde{x}_1 . Repetând asupra ei raționamentul de până aici, obținem:

$$h(x) = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} \tilde{x}_1 + \dots + a_{1n} \tilde{x}_n)^2 + \frac{1}{a_{22}^*} (a_{22}^* \tilde{x}_2 + \dots + a_{1n}^* \tilde{x}_n)^2 + \dots$$

Mai departe, prin continuarea unui asemenea proces de calcul, se ajunge, după un număr finit de pași, la expresia dorită a lui $h(x)$, adică la $\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \dots + \omega_n x_n^2$, unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt noile

coordonate ale lui x , iar $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sunt noii coeficienți ai lui h într-o bază ce corespunde schimbării de coordonate guvernată de relațiile

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n \\ x_2 &= a_{22}^*\tilde{x}_2 + a_{23}^*\tilde{x}_3 + \dots + a_{2n}^*\tilde{x}_n \\ &\vdots \\ x_m &= \bar{a}_{mm}\tilde{x}_m + \dots + \bar{a}_{mn}\tilde{x}_n, \end{cases}$$

în care $1 \leq m \leq n$. ◀

Observație: Pe baza Teoremei 8.2, se poate spune că, dacă (p, q, r) este semnatura formei biliniare g și, implicit, a formei pătratice h , asociată lui g , exact p dintre coeficienții formei canonice obținută prin Teorema 8.3 sunt pozitivi, q sunt negativi și r sunt egali cu zero. Și acest lucru se produce în raport cu baza față de care h are formă redusă în V .

Teorema 8.4 (Metoda lui Jacobi de reducere a unei forme pătratice la forma canonică)

Fie V un spațiu liniar real, finit dimensional ($\dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$) și $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică de expresie $h(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$, în raport cu o bază a lui V în care x are coordonatele x_1, x_2, \dots, x_n . Dacă toți minorii principali ai matricii asociate $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ sunt nenuli, adică dacă $\Delta_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$, unde

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix},$$

atunci există o bază $B' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$ a spațiului V așa încât

$$h(x) = \mu_1 \tilde{x}_1^2 + \mu_2 \tilde{x}_2^2 + \dots + \mu_n \tilde{x}_n^2,$$

unde $\mu_j = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}, \forall j = \overline{1, n}$, cu $\Delta_0 = 1$ și $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ sunt coordonatele lui x în baza B' .

Demonstrație: Plecând de la baza $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a lui V , considerăm vectorii b'_1, b'_2, \dots, b'_n , unde

$$\begin{cases} b'_1 &= s_{11}b_1 \\ b'_2 &= s_{21}b_1 + s_{22}b_2 \\ &\vdots \\ b'_n &= s_{n1}b_1 + s_{n2}b_2 + \dots + s_{nn}b_n, \end{cases}$$

cu $s_{ij} \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq j \leq i \leq n$, astfel încât

$$(\diamond) \quad \begin{cases} g(b'_i, b_j) = 0, & \text{dacă } 1 \leq j < i \leq n \text{ și} \\ g(b'_i, b_i) = 1, & \text{dacă } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Condițiile (\diamond) determină în mod unic elementele matricii $S = (s_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}$, în ipotezele din enunțul prezentei teoreme. Aceasta întrucât, de exemplu, pentru obținerea lui b'_i , avem de rezolvat sistemul algebric liniar

$$(\bullet) \quad \begin{cases} a_{11}s_{i1} + a_{12}s_{i2} + \dots + a_{1i}s_{ii} &= 0 \\ a_{21}s_{i1} + a_{22}s_{i2} + \dots + a_{2i}s_{ii} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{i-1,1}s_{i1} + a_{i-1,2}s_{i2} + \dots + a_{i-1,i}s_{ii} &= 0 \\ a_{i1}s_{i1} + a_{i2}s_{i2} + \dots + a_{ii}s_{ii} &= 1 \end{cases}$$

al cărui determinant este chiar $\Delta_i \neq 0$. Deci sistemul (\bullet) este compatibil determinat, având o soluție unică, ce se poate obține prin regula lui Kramer. După găsirea tuturor vectorilor b'_1, b'_2, \dots, b'_n , se poate arăta că ei alcătuiesc o bază în V , bază în raport cu care matricea asociată lui h este una de formă diagonală, cu elementele $\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall j = \overline{1, n}$ și $\Delta_0 = 1$, pe respectiva diagonală.

Într-adevăr, pe baza condițiilor (\diamond) și ținând cont de simetria lui g , avem:

$$g(b'_i, b'_j) = g(b'_i, s_{j1}b_1 + s_{j2}b_2 + \dots + s_{jj}b_j) = s_{j1}g(b'_i, b_1) + s_{j2}g(b'_i, b_2) + \dots + s_{jj}g(b'_i, b_j) = 0,$$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ (ținând cont și de simetria lui } g).$$

În același timp, avem:

$$g(b'_i, b'_i) = s_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \forall i = \overline{1, n} \text{ (cu } \Delta_0 = 1).$$

◀

Definiția 8.13 a) O formă pătratică $h : V \rightarrow K$ se numește **pozitiv definită** pe V , ori de câte ori, în semnatura lui h , indexul pozitiv este egal cu dimensiunea (finită) a lui V . Forma pătratică h se numește **pozitiv semidefinită** pe V când, în semnatura (p, q, r) a lui h , r este nenul și $q = 0$.

b) Forma h se numește **negativ definită** dacă $p = r = 0$ și $q = \dim(V)$. Forma h se numește **negativ semidefinită** atunci când $p = 0, r > 0$ și $q = \dim(V) - r > 0$.

c) Forma pătratică h se numește **nedefinită** când $p > 0$ și $q > 0$.

Observație: În conformitate cu Teorema 8.4, o formă pătratică $h : V \rightarrow \mathbb{R}$, unde V este un spațiu liniar finit dimensional, este pozitiv definită atunci când toți determinanții Δ_j sunt pozitivi. Forma h este negativ definită dacă $(-1)^{j+1}\Delta_j < 0$, $\forall j = \overline{1, n}$ și nedefinită atunci când nu toți determinanții nenuli Δ_j au același semn.

Teorema 8.5 (Metoda valorilor proprii și a vectorilor proprii pentru reducerea unei forme pătratice la expresia sa canonică)

Fie $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică pe spațiul liniar real, finit dimensional V . Dacă V este un spațiu euclidian, atunci există o bază ortonormată a lui V față de care h are forma canonică

$$h(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricii asociate lui h , în baza inițială, iar x_1, x_2, \dots, x_n sunt coordonatele lui x în acea bază.

Demonstrație: Fie $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ o bază a lui V , în raport cu care matricea A_B , corespunzătoare lui h , are vectorii proprii v_1, v_2, \dots, v_n , corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ca și în cazul diagonalizării lui A_B , putem admite că sistemul $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este ortonormat față de produsul scalar cu care este înzestrat spațiul V .

Atunci, în baza $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a lui V , matricea lui h va avea forma diagonală $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, iar expresia lui h va fi cea a formei canonice indicate în enunț. ◀

Definiția 8.14 Fie V spațiu vectorial peste un corp comutativ K , h o formă pătratică pe V și f o funcțională afină pe V . Suma $h + f$ se numește **funcțională pătratică de expresie neomogenă** pe V .

În raport cu o anumită bază a lui V , expresia lui $h + f$ este

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, $b_i \in K$, $\forall i = \overline{1, n}$ și $c \in K$ sunt coeficienții respectivei funcții pătratice în acea bază, iar x_1, x_2, \dots, x_n sunt coordonatele unui vector x din V , în baza considerată.

Dacă V este spațiu euclidian, atunci expresia funcției pătratice $\rho = h + f$ se poate reda prin

$$\rho(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c, \forall x \in V,$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Matricea A se poate considera întotdeauna simetrică, întrucât, prin intermediul egalității,

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \langle A^T x, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle (A + A^T) x, x \rangle, \end{aligned}$$

unde $(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T$, se poate conta mereu pe aportul matricii simetrice $\frac{1}{2} (A + A^T)$, chiar dacă $A \neq A^T$.

Efectuând o transformare afină de coordonate, de forma

$$x' = Sx + x_0,$$

unde S este o matrice nesingulară, iar $x_0 \in V$ este fixat arbitrar, obținem:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \langle AS^{-1}(x' - x_0), S^{-1}(x' - x_0) \rangle + \langle b, S^{-1}(x' - x_0) \rangle + c \\ &= \left\langle (S^{-1})^T AS^{-1}x', x' \right\rangle - \left\langle 2(S^{-1})^T AS^{-1}x_0 + (S^{-1})^T b, x' \right\rangle + c_0. \end{aligned}$$

Dacă S este o matrice ortogonală (de exemplu având drept coloane vectorii proprii, ortonormați, ai lui A), atunci $S^{-1} = S^T$ și $SAS^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A . În consecință, avem:

$$\rho(x) = \langle Dx', x' \rangle - 2 \left\langle S \left(AS^T x_0 + \frac{b}{2} \right), x' \right\rangle + c_0.$$

În cazul în care A este nesingulară, se poate lua $x_0 = -\frac{1}{2}SA^{-1}b$ și atunci:

$$\rho(x) = \langle Dx', x' \rangle + c_0,$$

unde $c_0 = \langle Dx_0, x_0 \rangle - \langle Sb, x_0 \rangle + c$.

Așadar, în cazul în care matricea A este nesingulară, prin transformarea afină $x' = Sx - \frac{1}{2}SA^{-1}b$, s-ar aduce funcția pătratică ρ la o formă redusă, sumă dintre o formă pătratică canonică și o formă constantă.

Când A este singulară, se ia $x_0 = \mathbf{0}_V$ și se ajunge, prin transformarea liniară $x' = Sx$, la

$$\rho(x) = \langle Dx', x' \rangle + \langle Sb, x' \rangle + c_0,$$

ceea ce ne spune că forma redusă a lui ρ are și o componentă ce depinde liniar de x' , iar partea ei principală $\langle Dx', x' \rangle$ este o formă pătratică canonică cu $1 \leq r < n$ termeni. Mai departe, efectuând o adecvată transformare liniară de coordonate, de aici, se poate ajunge la o expresie a lui ρ de forma

$$\rho(x) = \sum_{i=r} \lambda_i (x''_i)^2 + \gamma_{r+1} x''_{r+1},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ și $\gamma_{r+1} \in \mathbb{R}$, iar $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ sunt coordonatele lui x în noua bază a lui V (r este rangul lui ρ).

Din punct de vedere geometric, nucleul lui ρ este, pentru $V = \mathbb{R}^n$, o **conică**, atunci când $n = 2$, o **cuadrică**, când $n = 3$ și o **hipercuadrică**, când $n \geq 4$. În cazul în care $n = 1$, expresia redusă (normală) a funcției pătratice ρ poate fi $x_1^2 + 1$ (și atunci $Ker(g)$ este mulțimea a două puncte imaginare, conjugate) sau $x_1^2 - 1$ ($Ker(g)$ fiind atunci mulțimea a două puncte distincte) sau x_1^2 (situație în care $Ker(g)$ este o mulțime de două puncte confundate).

Când $n = 2$, avem următoarele nouă tipuri de ecuații (reduse) de conice:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ (elipsă "imaginară");
2. $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ (hiperbolă);
3. $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (elipsă);
4. $x_1^2 - 2x_2 = 0$ (parabolă);
5. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (un punct; două drepte imaginare, conjugate);
6. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (două drepte concurente);
7. $x_1^2 + 1 = 0$ (două drepte imaginare);
8. $x_1^2 - 1 = 0$ (două drepte paralele);
9. $x_1^2 = 0$ (două drepte confundate).

Când $n = 3$, quadricele în cauză sunt de 17 feluri, caracterizându-se (în principal) prin ecuațiile reduse următoare:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (elipsoid "imaginar");
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ (elipsoid);
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (hiperboloid cu o pânză);
4. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (hiperboloid cu două pânze);
5. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$ (paraboloid eliptic);
6. $x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$ (paraboloid hiperbolic);
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (con imaginar; punct);
8. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (con real).

În completare, sunt cele 9 expresii de ecuații reduse din cazul $n = 2$, care, acum, în \mathbb{R}^3 , reprezintă *cilindri* de diferite tipuri. Primele 6 clase reprezintă *cuadrice nesingulare*, iar celelalte, *cuadrice singulare*.

Bibliografie recomandată

1. D. Drăghici - *Algebră (Cap. VIII)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
2. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
3. Irinel Radomir - *Matematică. Elemente de algebră vectorială, geometrie și calcul diferențial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.
4. C. Costinescu - *Algebră liniară și aplicații în geometrie*, Editura Matrix Rom, București, 2005.
5. Simona Roatesi, M. Ariciuc - *Lecții de algebră liniară și geometrie analitică*, Editura Matrix Rom, București, 2008.
6. M. Neagu - *Geometria curbelor și suprafețelor. Teorie și aplicații*, Editura Matrix Rom, București, 2013.
7. P. Ott - *Bilinear and Quadratic Forms*, Prof. Robert Beezer's Notes on Advanced Linear Algebra, 2014.
8. K. Conrad - *Bilinear Forms*, Notes on Advanced Linear Algebra, 2015.
9. KC Border - *More than you wanted to know about quadratic forms*, Caltech, 2016.