BAREM DETALIAT DE CORECTARE

pentru TS2 la "Matematică" / I1B & I1Xb

(seria 2016 - 2017 / 24.11.2016)

15 puncte - bonusul de participare la TS2

25 de puncte - subiectul 1

i) Abordarea chestiunii .... 1 punct

$\mathcal{B} = \{b \in \mathbb{R} \mid g(b) \text{ are sens}\} = \left\{ b \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n^2+1)-2\ln n)^b}{9n^2-3n-2} \ (C) \right\}$ (1.1) .... 1 punct

$\ln(n^2+1) > 2\ln n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad x_n = \frac{(\ln(n^2+1)-2\ln n)^b}{9n^2-3n-2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{R}$ (1.2) .... 1 punct

(1.2) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi (1.3) .... 1 punct

$\ln(n^2+1) - 2\ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1.4) .... 1 punct

$$(1.4) \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^b}{9n^2-3n-2} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-2b}}{9n^2-3n-2}, & b < 0 \\ 0 & , \ b \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \infty \ , & b < -1 \\ \frac{1}{9}, & b = -1 \\ 0 \ , & b > -1 \end{cases} \quad (1.5)$$ .... 3 puncte

(1.5) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \ (D), \forall b \in (-\infty, -1]$ şi

criteriul necesar de convergenţă = îndeplinit, $\forall b \in (-1, \infty)$ (1.6) .... 2 puncte

$\forall b \in \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^{-2(b+1)}} = \frac{1}{9} \in (0, \infty)$ (1.7) .... 2 puncte

(1.3) + (1.6) (pentru $b \in (-1, \infty)$) + (1.7) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(b+1)}}$ (1.8) .... 1 punct

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ (D)$, $\forall \alpha \in (-\infty, 1]$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ (C)$, $\forall \alpha \in (1, \infty)$ (1.9) .... 2 puncte

(1.8) + (1.9) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (D), $\forall b \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \ (C), \forall b \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ (1.10) .... 1 punct

(1.10) $\Longrightarrow$ concluzia : $\mathcal{B} = (-\frac{1}{2}, \infty)$ (1.11) .... 1 punct

Total: 17 puncte

ii) Abordarea chestiunii .... 1 punct

(1.11) $\Longrightarrow 0 \in \mathcal{B} \Longrightarrow g(0)$ are sens (1.12) .... 1 punct

(1.1) + (1.12) $\Longrightarrow g(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$ (1.13) .... 1 punct

$9n^2 - 3n - 2 = (3n-2)(3n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1.14) .... 1 punct

(1.14) $\Longrightarrow \frac{1}{9n^2-3n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1.15) .... 1 punct

$(1.15) \Longrightarrow \ s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1.16) .... 1 punct

$(1.16) \Longrightarrow \exists\ s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$ (1.17) .... 1 punct

$(1.17) \Longrightarrow$ concluzia : $g(0) = \frac{1}{3}$ .... 1 punct

Total: 8 puncte

25 de puncte - subiectul 2

$j)$ Abordarea chestiunii .... 1 punct

$W =$ mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

ale sistemului algebric liniar şi omogen $(*)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ (2.1) .... 1 punct

$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (2.2) .... 1 punct

$(2.1) + (2.2) \Longrightarrow$ $(*) =$ sistem compatibil, dublu-nedeterminat (2.3) .... 1 punct

$(2.3) \Longrightarrow$ $W = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_4 - x_1,\ x_3 = \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_1\}$ (2.4) .... 1 punct

$(2.4) \Longrightarrow$ $W = \left\{(\alpha, \beta - \alpha, \frac{1}{3}\beta - \frac{2}{3}\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ (2.5) .... 1 punct

$(2.5) \Longrightarrow$ $W = Lin(\left\{(1, -1, -\frac{2}{3}, 0),\ (0, 1, \frac{1}{3}, 1)\right\})$ (2.6) .... 2 puncte

$(2.6) \Longrightarrow$ $W =$ subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^4$, generat de $\mathrm{u} = (1, -1, -\frac{2}{3}, 0)$ şi $\mathrm{v} = (0, 1, \frac{1}{3}, 1)$ (2.7) .... 1 punct

$\widehat{(\mathrm{u}, \mathrm{v})} = \arccos \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle_c}{\sqrt{\langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle_c}\sqrt{\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle_c}} = \arccos\left(-\sqrt{\frac{11}{38}}\right)$ (2.8) .... 2 puncte

$(2.8) \Longrightarrow \widehat{(\mathrm{u}, \mathrm{v})} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (2.9) .... 1 punct

$(2.9) \Longrightarrow$ concluzia este conformă cerinţei din enunţ .... 1 punct

Total: 13 puncte

$jj)$ Abordarea chestiunii .... 1 punct

$rang \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = 2 \overset{(2.7)}{\Longrightarrow}$ u şi v sunt vectori liniar independenţi (2.10) .... 1 punct

$(2.10) \Longrightarrow Sp(W) = Sp(\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}) = Lin(\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\})$ (2.11) .... 1 punct

$(2.11) \Longrightarrow$ $(Sp(W))^{\perp} = \{\mathrm{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \mathrm{y}, \mathrm{u}\rangle_{\mathrm{c}} = \langle \mathrm{y}, \mathrm{v}\rangle_{\mathrm{c}} = 0\}$ (2.12) .... 1 punct

$(2.12) \Longrightarrow$ $(Sp(W))^{\perp} = \{\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid\ y_1 - y_2 - \frac{2}{3}y_3 =\ y_2 + \frac{1}{3}y_3 + y_4 = 0\}$ (2.13) .1 punct

$(2.13) \Longrightarrow$ $(Sp(W))^{\perp} = \{\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 = y_2 + \frac{2}{3}y_3,\ y_4 = -\ y_2 - \frac{1}{3}y_3\ \} =$

$= \{y_2(1, 1, 0, -1) + y_3(\frac{2}{3}, 0, 1, -\frac{1}{3}) \mid\ y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}$ (2.14) .... 1 punct

$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 2 \overset{(2.14)}{\Longrightarrow} \left\{(1, 1, 0, -1),\ (\frac{2}{3}, 0, 1, -\frac{1}{3})\right\} =$

$=$ bază pentru $(Sp(W))^{\perp}$ (2.15) .... 2 puncte

$(2.15) \Longrightarrow$ Se iau: $\mathrm{r} = (1, 1, 0, -1)$, $\mathrm{t} = (\frac{2}{3}, 0, 1, -\frac{1}{3}) + \gamma(1, 1, 0, -1)$,

cu $\gamma \in \mathbb{R}$, aşa încât $\langle \mathrm{t}, \mathrm{r}\rangle_c = 0$ (2.16) .... 1 punct

$(2.16) \Longrightarrow$ $\gamma = -\frac{\langle(\frac{2}{3}, 0, 1, -\frac{1}{3}), (1, 1, 0, -1)\rangle_c}{\|(1, 1, 0, -1)\|^2} = -\frac{1}{3}$ (2.17) .... 1 punct

$(2.16) + (2.17) \Longrightarrow \mathrm{t} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0)\ \perp \mathrm{r}$ (2.18) .... 1 punct

(2.18) $\Longrightarrow$ concluzia: $\{\mathrm{r}, \mathrm{t}\} =$ bază ortogonală pentru $(Sp(W))^{\perp}$ .... 1 punct

Total: 12 puncte

20 de puncte - subiectul 3

$l)$ Abordarea chestiunii .... 1 punct

$\forall B$ = *mulţime frontieră* în $(X, \tau) \Longleftrightarrow \overline{X\ \setminus B} = X$ (3.1) .... 2 puncte

$\forall A, B \in \mathcal{P}(X),\ \ A \subseteq B\ \Longrightarrow\ X \setminus B \subseteq X\ \setminus A$ (3.2) .... 2 puncte

$\forall U, V \in \mathcal{P}(X)$, $U \subseteq V \implies \overline{U} \subseteq \overline{V}$ (3.3) .... 2 puncte
(3.2) + (3.3) $\implies \overline{X \setminus B} \subseteq \overline{X \setminus A}$ (3.4) .... 1 punct
(3.4) + (3.1) $\implies \overline{X \setminus A} = X$ (3.5) .... 1 punct
(3.5) + (3.1) $\implies \forall B =$ *mulţime frontieră* în $(X, \tau) \overset{\forall A \in \mathcal{P}(B)}{\implies} A =$ *mulţime frontieră* în (X, τ) 1 punct
Total: 10 puncte

ll) Abordarea chestiunii .... 1 punct
$\forall B \in \mathcal{P}(X)$, cu $\overline{X \setminus B} = X$ şi $B = \overline{B}$ (3.6) $\implies Fr(B) = B$ (trebuie dovedit) .... 2 puncte
$Fr(B) \overset{def}{=} \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$ (3.7) .... 2 puncte
(3.6) $\implies \overline{B} \cap \overline{X \setminus B} = B \cap X = B$ (3.8) .... 3 puncte
(3.7) + (3.8) $\implies B = Fr(B)$ (3.9) .... 1 punct
(3.9) $\implies$ q.e.d. .... 1 punct
Total: 10 puncte

15 puncte - subiectul 4

v) Abordarea chestiunii .... 1 punct
$\forall \mu =$ valoare proprie a lui $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}$, $S(v) = \mu v$ (4.1) .... 1 punct
Prin reducere la absurd, presupunere: $\mu = 0$ (4.2) .... 1 punct
(4.1) + (4.2) $\implies S(v) = \theta_{\mathbb{R}^3}$ (4.3) .... 1 punct
(4.3) $\implies S^*(S(v)) = \theta_{\mathbb{R}^3} \overset{(S^* \circ S = I)}{\implies} v = \theta_{\mathbb{R}^3}$, în contradicţie cu $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}$ (4.4) .... 2 puncte
(4.4) $\implies$ concluzia: $\mu \neq 0$ (4.5) .... 1 punct
Total: 7 puncte

vv) Abordarea chestiunii .... 1 punct
$\forall v \in Ker(S - \mu I) \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^3}\} \implies S(v) = \mu v$ (4.6) .... 1 punct

(4.6) $\implies S^*(S(v)) = \mu S^*(v)$ (4.7) .... 2 puncte
(4.7) $\overset{(S^* \circ S = I)}{\implies} v = \mu S^*(v)$ (4.8) .... 2 puncte
(4.8) $\overset{(4.5)}{\implies} S^*(v) = \frac{1}{\mu} v$ (4.9) .... 1 punct
(4.9) $\implies$ concluzia: $v \in Ker(S^* - \frac{1}{\mu} I) \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}$ .... 1 punct
Total: 8 puncte

Precizări: a) Sunt luate în consideraţie, punctându-se în mod echivalent, şi alte soluţionări decât cele sugerate de prezentul barem.
b) Nota acordată întregii teme se stabileşte prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut.

F. Iacob / 23.11.2016