Soluţii la examenul parţial - Teoria probabilităţilor

semianul B, aprilie 2017

Student: **Grupa:**

Pentru exerciţiile A - E: se dă o urnă în care sunt două bile numerotate cu 0 **şi trei numerotate cu** 1**.**

A. (15p) De fiecare dată când din urnă se extrage o bilă cu numărul i ea este înlocuită cu alte două bile cu numărul $(1-i)$. Se fac două astfel de extrageri după care se mai extrage o bilă din urnă.

Se notează evenimentele aleatoare: $B=$"prima bilă extrasă are numărul 1", $C=$"a doua bilă extrasă are numărul 1" şi $A=$"a treia bilă extrasă are numărul 1".

(a) (4p) Calculaţi $P(B), P(C|B), P(B\cap C)$ şi $P(C)$.

(b) (3p) Evenimentele B şi C sunt compatibile? Dar contrare? Dar independente?

(c) (5p) Calculaţi $P(A)$ şi $P(B|A)$.

(d) (3p) $P(B\setminus C|A)=P(B|A)-P(B\cap C|A)$. Relaţia aceasta este adevărată în general, pentru trei evenimente oarecari?

(a) $P(B)=\dfrac{3}{5}, P(C|B)=\dfrac{2}{6}, P(B\cap C)=P(C|B)\cdot P(B)=\dfrac{1}{5}$. Apoi $P(\overline{B})=\dfrac{2}{5}, P(C|\overline{B})=\dfrac{5}{6}$ şi de aici, folosind formula probabilităţii totale, obţinem

$$P(C)=P(B)P(C|B)+P(\overline{B})P(C|\overline{B})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{16}{30}.$$

(b) B şi C sunt compatibile deoarece $P(B\cap C)\neq 0$. Nu sunt contrare din acelaşi motiv. Nu sunt independente deoarece $P(B)\cdot P(C)\neq P(B\cap C)$: $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{16}{30}\neq\dfrac{1}{5}$.

(c) Din formula probabilităţii totale:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

Apoi, din varianta condiţionată a formulei probabilităţii totale:

$$P(A|B)=P(C|B)\cdot P(A|B\cap C)+P(\overline{C}|B)\cdot P(A|B\cap\overline{C}),$$

$$P(A|\overline{B})=P(C|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B}\cap C)+P(\overline{C}|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B}\cap\overline{C}).$$

Probabilităţile necesare sunt

$$P(\overline{C}|B)=1-P(C|B)=\frac{4}{6}, P(\overline{C}|\overline{B})=1-P(C|\overline{B})=\frac{1}{6},$$

$$P(A|B\cap C)=\frac{1}{7}, P(A|B\cap\overline{C})=\frac{4}{7}, P(A|\overline{B}\cap C)=\frac{4}{7}, P(A|\overline{B}\cap\overline{C})=1.$$

De unde,

$$P(A|B)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{18}{42}, P(A|\overline{B})=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{27}{42} \text{ şi } P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{18}{42}+\frac{2}{5}\cdot\frac{27}{42}=\frac{108}{210}.$$

Din formula lui Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{54}{210} \cdot \frac{210}{108} = \frac{1}{2}.$$

(d) Formula are loc pentru orice trei evenimente A, B, C pentru care $A \neq \varnothing$, deoarece

$$P(B|A) - P(B \cap C|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P(A \cap (B \cap C))}{P(A)} = \frac{P((A \cap (B \setminus (B \cap C)))}{P(A)} = \frac{P((A \cap (B \setminus C))}{P(A)} = P(B \setminus C|A).$$

B. (5p) Se extrag din urnă două bile, cu întoarcere, până când suma numerelor de pe bile este 2.

(a) (2.5p) Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe bile să fie 2 abia la a patra extragere?

(b) (2.5p) Care este numărul mediu de extrageri?

Probabilitatea ca la o extragere să obţinem suma 2 este probabilitatea de a extrage două bile numerotate cu 1, care din schema bilei neîntoarse este $p = \binom{3}{2} / \binom{5}{2} = \frac{3}{10}$.

(a) Din schema geometrică cu $n = 4$, probabilitatea cerută este $\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3$.

(b) Variabila care numără aruncările necesare obţinerii unei feţe nu numărul 4 este distribuită $Geometric(p)$ şi are media $\frac{1}{p} = \frac{10}{3}$.

C. (5p) Se extrag din urnă două bile, cu întoarcere, de 6 ori.

(a) (2.5p) Este mai probabil să obţinem suma 2 de patru ori sau de două ori?

(b) (2.5p) De câte ori în medie se obţine o sumă egală cu 2?

Probabilitatea ca la o extragere să obţinem suma 2 este, ca mai sus, $p = \binom{3}{2} / \binom{5}{2} = \frac{3}{10}$.

(a) Din schema binomială cu $n = 6, p = \frac{3}{10}$ şi $k = 2$ sau 4 probabilitatea cerută este

$$\binom{6}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \geqslant \binom{6}{4} \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \iff \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 7^2 \geqslant \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 3^2 \iff 49 \geqslant 9.$$

Este mai probabil să obţinem de două ori suma 2.

(b) Variabila care numără de câte ori suma 2 este distribuită $Binomial(n, p)$ şi are media $n \cdot p = 6 \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$.

D. (5p) Se extrag din urnă două bile, cu întoarcere, de 100 ori. Cu care dintre cele două inegalităţi (a lui Markov şi a lui Cebâşev) se obţine un majorant mai bun pentru probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două bile să fie 2 de cel puţin 40 de ori?

Fie X variabila care numără de câte ori suma este 2, $X : B\left(100, \frac{3}{10}\right)$. $M[X] = 100 \cdot \frac{3}{10} = 30$, $D^2[X] = 100 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = 21$.

$$P(X \geqslant 40) \leqslant \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \text{ (Markov)}$$

$$P(X \geqslant 40) = P(X - 30 \geqslant 10) \leqslant P(|X - 30| \geqslant 10) \leqslant \frac{21}{10^2} = \frac{21}{100} \text{ (Cebâşev)}$$

Inegalitatea lui Cebâşev dă un majorant mai bun (mai mic).

E. (10p) Se extrag din urnă simultan două bile. Notăm cu X numărul de pe prima bilă şi cu Y suma numerelor de pe cele două bile.

(a) (6p) Determinaţi repartiţia comună a celor două variabile.

(b) (1p) X şi Y sunt independente?

(b) (3p) Determinaţi covarianţa celor două variabile şi repartiţia variabilei $(X^2 + Y^2)$.

(a) Legătura dintre cele două variabile este $X \leqslant Y$.

		X: 0	X: 1	
Y:	0	1/10	0	1/10
	1	3/10	3/10	6/10
	2	0	3/10	3/10
		4/10	6/10	

(b) Variabilele nu sunt independente: $P(X = 0 \cap Y = 2) = 0 \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 2)$.
(c)

$$XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \Longrightarrow M[XY] = \frac{9}{10}.$$

$$M[X] = \frac{6}{10}, M[Y] = \frac{12}{10} \Longrightarrow cov[X, Y] = \frac{9}{10} - \frac{6}{10} \cdot \frac{12}{10} = \frac{18}{100}.$$

$$(X^2 + Y^2) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

F. (15p) Avem o urnă care conţine două bile: una cu numărul 0 şi una cu numărul 1. Se aruncă un zar şi în funcţie de rezultat se schimbă conţinutul urnei după care zarul care se aruncă din nou şi aşa mai departe. Schimbarea se face astfel: dacă se obţine numărul 3 se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă cu celălalt număr, altfel nu se face nimic.

Descrieţi lanţul Markov corespunzător acestui proces aleator (o stare fiind conţinutul urnei). Analizaţi lanţul Markov astfel definit: desenaţi digraful de tranziţie (4p), determinaţi matricea probabilităţilor de tranziţie (4p), indicaţi tipurile stărilor, clasele recurente ne/periodice (3p) şi determinaţi probabilităţile de echilibru - dacă e cazul (4p).

Stările: s_1 = în urnă avem două bile cu numărul 0, s_2 = în urnă avem o bilă cu numărul 0 şi una cu numărul 1, s_3 = în urnă avem două bile cu numărul 1. Matricea probabilităţilor de tranziţie este

$$P : \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/12 & 5/6 & 1/12 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$$

$\{s_1, s_2, s_3\}$ este o clasă recurentă neperiodică; putem aplica teorema corespunzătoare pentru a determina probabilităţile de echilbru:

$$\begin{cases} \pi_1 &= 10/12\pi_1 + 1/12\pi_2 \\ \pi_2 &= 1/6\pi_1 + 5/6\pi_2 + 1/6\pi_3 \\ \pi_3 &= 1/12\pi_2 + 10/12\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\pi_1 &= \pi_2 \\ 2\pi_3 &= \pi_2 \\ 1 &= 4\pi_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_1 &= 1/4 \\ \pi_2 &= 1/2 \\ \pi_3 &= 1/4 \end{cases}.$$