

Cursul 4

Serii de numere reale

O altă modalitate de construcție a mulțimii \mathbb{R} , care pleacă de la corpul comutativ și ordonat al numerelor raționale, este și aceea bazată pe noțiunea de serie (de elemente din \mathbb{Q}), după cum dezvăluie Arnold și John Knopfmacher, în lucrarea lor cu titlul "*Two constructions of real numbers via alternating series*" (Internat. J. Math. & Math. Sci., vol 12, No 3, 1989, pp 603-613). Prin folosirea unui algoritm datorat lui Oppenheim, în virtutea căruia orice număr real r poate fi redat sub forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{b_1}{c_1} \frac{1}{a_2} + \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2} \frac{1}{a_3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{b_1 \dots b_{k-1}}{c_1 \dots c_{k-1}} r_k,$$

unde $a_0 = [r]$ (partea întreagă a lui r), $r_1 = r - a_0$, $a_1 = \left\lceil \frac{1}{r_1} \right\rceil$ (dacă $r_1 \neq 0$) și, recursiv, $a_m = \left\lceil \frac{1}{r_m} \right\rceil$ (când $r_m > 0$), $r_{m+1} = \left(\frac{1}{a_m} - r_m \right) \frac{c_m}{b_m}$, cu b_m și c_m numere pozitive (în general, întregi) dependente de a_1, a_2, \dots, a_m , $\forall m \in \{1, 2, \dots, l\}$ ($l \leq k-1$) - când r_1, r_2, \dots, r_l diferă de 0 - sau $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ($k \in \mathbb{N}^*$), când $\forall r_m \neq 0$, cei doi iau în considerație cazurile particulare în care fie $b_m = c_m = 1$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, fie $b_m = 1$ și $c_m = a_m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, referindu-se, în mod special, la mulțimea de reprezentări de tip Sylvester

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{a_n} + \dots,$$

cu $a_i \in \mathbb{N}^*$, așa încât $a_{i+1} \geq a_i(a_i + 1)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ și respectiv la mulțimea tuturor reprezentărilor de tip Engel

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_1 a_2 \dots a_n} + \dots,$$

cu $a_i \in \mathbb{N}^*$, așa încât $a_{i+1} \geq a_i + 1$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Înzestrând fiecare din cele două mulțimi cu adecvate operații algebrice de adunare și înmulțire și definind câte o relație de totală ordine pe ambele, autorii menționați dovedesc în lucrarea lor că, atât prima mulțime, cât și cealaltă, satisface axiomele $AR1 \sim AR15$ (v. cursul 2), având pe \mathbb{Q} ca submulțime proprie (a tuturor reprezentărilor Sylvester, respectiv Engel, cu număr finit de termeni). Evident, în prealabil, se acordă atenție cuvenită acelor situații în care reprezentările Sylvester și Engel au un număr infinit de termeni, supunându-se teoriei seriilor numerice reale. Întru familiarizarea cu aspectele de bază ale unei astfel de teorii, prezentăm aici, în cele ce urmează, noțiuni și rezultate din sfera seriilor de numere reale. Importanța cunoașterii unor asemenea lucruri reiese și din dezvăluirile și preocupările unor lucrări de specialitate de dată recentă, între care este de menționat cea semnată de G. Bagni, relativ la impactul *seriei lui Guido Grandi* (1703)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

atât în trecut, cât și în prezent ("Infinite Series from History to Mathematics Education", 2005).

Serii în \mathbb{R} . Fundamente

Cum, cu excepția situațiilor care se referă la \mathbb{Q} , atât reprezentările Engel, cât și reprezentările Sylvester constituie, de fapt, sume (infinite) ale elementelor unui șir (de numere raționale), este normal să ne întrebăm asupra semnificației unor astfel de entități matematice în contextul "tregerii" de la un proces finit (cum este acela al calculului sumei unui număr finit de numere) la "extensia" sa infinită. În acest sens, iată câteva definiții, exemple și rezultate de ordin general.

Definiția 4.1 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale, căruia îi asociem șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, cu termenul general

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Perechea $((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ se numește **serie de numere reale** (sau **serie în \mathbb{R}**) și se notează, convențional, prin

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n \text{ sau } \sum_{n \geq 1} x_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ sau } : x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **șirul sumelor parțiale atașat seriei** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Termenul general al șirului

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, adică x_n , poartă denumirea de **termen general al seriei** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Observație: Uneori, când mulțimea indicilor șirului de referință (x_n) este \mathbb{N} , seria $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ se notează, în mod corespunzător, prin $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ (sau $\sum_{n \geq 0} x_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots$). Dacă mulțimea respectivă este $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ (unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este un anumit număr natural), atunci seria în cauză va fi notată cu $\sum_{n \geq n_0} x_n$ (sau $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ sau $x_{n_0} + x_{n_0+1} + \dots + x_n + \dots$).

Definiția 4.2 Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **convergentă**, și acest fapt se notează prin $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C)$, dacă și numai dacă există $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (adică șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent în \mathbb{R} , cu limita S). Numărul real S se numește **suma seriei** $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și putem scrie: $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu are limită în \mathbb{R} (adică $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nu există sau, dacă există, este $-\infty$ sau $+\infty$), atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **divergentă** și acest fapt se notează prin $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D)$.

Exemple:

a) Fie $r \in \mathbb{R}$, arbitrar fixat. Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$, în care $x_n = r^n, \forall n \in \mathbb{N}$, se numește **seria geometrică cu rația r** . Șirul sumelor parțiale atașat ei are termenul general S_n dat prin

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & r \neq 1 \\ n + 1, & r = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ există și este finită doar dacă $|r| < 1$, putem spune că avem $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n(C)$, când

$|r| < 1$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n(D)$, când $|r| \geq 1$.

Așadar, seria lui Grandi $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, adică $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$, care este seria geometrică cu rația $r = -1$, are statutul de serie divergentă. Ca atare, suma ei nu este nici 0, nici 1 și nici $1/2$, după

cum a existat (și mai există încă, pe alocuri, și în prezent), în mod eronat, impresia că așa ar fi, ci nu există, pur și simplu (în sensul Definiției 4.2).

b) Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ este divergentă, deoarece avem: $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$.

c) Seria $\sum_{n \geq 2} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 - n}}$ este convergentă și are suma $S = \sqrt{2} - 1$, întrucât:

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k^2 - k}} = \sum_{k=2}^n \left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - \sqrt{\frac{k+1}{k}} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \text{ și există}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) = \sqrt{2} - 1 \in \mathbb{R}.$$

d) Seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergentă, deoarece șirul sumelor parțiale corespunzător ei, adică șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este monoton (strict) crescător, în virtutea faptului că $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și, totodată, este majorat (mărginit superior) căci avem:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Astfel, potrivit Teoremei 3.2 (v. cursul 3), șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

Definiția 4.3 Prin **natura** seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ înțelegem calitatea ei de a fi convergentă sau divergentă.

Definiția 4.4 Se numește **criteriu de convergență** (sau **criteriu de divergență** sau **criteriu de stabilire a naturii**), pentru o serie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, o anumită condiție (sau un anumit set de condiții) care, prin satisfacerea ei (a lui) de către $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, ne permite să stabilim convergența (respectiv divergența sau natura) seriei cu termenul general x_n .

Definiția 4.5 Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ o serie de numere reale. Dacă $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci **seria** $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **cu termeni nenegativi**; dacă $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **serie cu termeni pozitivi**, iar dacă $x_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **serie cu termeni negativi**. Atunci când x_n nu are același semn pentru orice valoare a indicelui $n \in \mathbb{N}^*$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **serie cu termeni oarecari**. În cazul în care $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **alternată**.

Observație: Reprezentările Sylvester și Engel ale unui număr real sunt serii alternate, cu elemente din \mathbb{Q} .

Definiția 4.6 Fie seria de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $p \in \mathbb{N}^*$. Se numește **rest de ordinul p al seriei** considerate (și se notează cu R_p) seria $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n$.

Definiția 4.7 O serie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și în care x_n se poate pune sub forma $y_n - y_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu comportare cunoscută, se numește **serie telescopică**.

Observație: Seriile de la punctele b) și c) ale exemplului de mai sus sunt, desigur, telescopice.

Definiția 4.8 a) Două serii de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ se numesc **egale** dacă și numai dacă $u_n = v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În acest caz, scriem: $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$.

b) Seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ se numesc **de aceeași natură** dacă și numai dacă sunt, simultan, convergente sau divergente.

De pildă, seriile de la punctele c) și d) ale exemplului de mai înainte sunt de aceeași natură (fiind, ambele, convergente), pe când seriile de la b) și d) sunt serii de naturi diferite (prima fiind divergentă, iar cealaltă convergentă).

Teorema 4.1 (Criteriul general - al lui Cauchy - de convergență a unei serii de numere reale) Fie, în \mathbb{R} , o serie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$. Aceasta este convergentă dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, oricare ar fi n și p din \mathbb{N}^* , cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstrație: În conformitate cu Definiția 4.2, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă (în \mathbb{R}), dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale corespunzător ei, adică $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este un șir convergent. Dar, în \mathbb{R} , orice șir este convergent, dacă și numai dacă este șir Cauchy. Așadar, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir Cauchy, adică, potrivit Definiției 3.11 (v. cursul 3), dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$ avem: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Altfel spus, cum $S_{n+p} - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$, avem: $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$. ◀

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este convergentă deoarece șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent, fiind șir Cauchy. Într-adevăr, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1, & \text{când } \varepsilon \in (0, 1] \\ 1, & \text{când } \varepsilon > 1 \end{cases} \in \mathbb{N}^*$, cu $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right]$ partea întreagă a lui $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ și pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p} \right| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon + 1} < \varepsilon.$$

Prin negare, enunțul Teoremei 4.1 devine:

Propoziția 4.1 (Criteriul general de divergență pentru o serie în \mathbb{R}) *Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă dacă și numai dacă există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k_n \geq n$ și $\exists p_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \dots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon_0$.*

Exemplu: *Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, numită **armonică simplă** (întrucât fiecare termen al ei, cu excepția primului, este media armonică a celor care îl încadrează, adică $x_n = \frac{2}{x_{n-1}^{-1} + x_{n+1}^{-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$), este divergentă. Astfel, pentru $k, p \in \mathbb{N}^*$ și $p \geq k$, avem:*

$$x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+p} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+p} > \frac{p}{k+p} \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce înseamnă că există $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$ așa încât are loc condiția din enunțul Propoziției 4.1.

Propoziția 4.2 (Criteriu de divergență) *Fie seria de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$. Dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu este convergent la 0, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă.*

Demonstrație: Presupunând, prin absurd, că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ ar fi convergentă, ar rezulta atunci că, potrivit Teoremei 4.1, pentru n trecut în rolul lui $n+1$ și cu $p = 1$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, contrar ipotezei din enunț. Deci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D)$. ◀

Observație: În mod necesar, pentru orice serie convergentă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, trebuie să avem convergența la zero a șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pe de altă parte, dacă, pentru o serie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ de numere reale, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent la zero, nu înseamnă că seria respectivă este convergentă neapărat. *Condiția $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ este numai **necesară** pentru convergența seriei cu termenul general x_n (din \mathbb{R}), **nu și suficientă**.*

Astfel, de exemplu, în cazul seriei armonice simple, chiar dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ este, după cum deja am văzut, divergentă.

În ceea ce privește seria lui Grandi, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n$, se vede, odată în plus, că, întrucât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nu există, seria respectivă este divergentă.

Definiția 4.9 a) *O serie de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **absolut convergentă** dacă și numai dacă seria valorilor absolute ale termenilor săi, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n|$ este convergentă. În acest caz, notăm $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(AC)$.*

b) *Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **semiconvergentă** și notăm acest fapt prin $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(SC)$, dacă și numai dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, dar nu și absolut convergentă.*

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este semiconvergentă întrucât, după cum am văzut deja, ea este convergentă, dar nu și absolut convergentă, căci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$, adică seria armonică simplă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, este divergentă.

Teorema 4.2 *Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.*

Demonstrație: Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, așa încât $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n| < \infty$. Prin urmare, potrivit Teoremei 4.1, putem afirma că, $\forall \varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Altfel spus, avem $|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$. De aici, folosind faptul că $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|$, deducem că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, pe baza aceleiași Teoreme 4.1. ◀

Exemplu: Seria alternată $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ este convergentă pentru că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right|$, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ este, după cum am arătat la punctul d) al primului exemplu de aici, convergentă.

Teorema 4.3 (Criteriul restului) *O serie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$ (unde R_p este restul de ordin p al seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$).*

Demonstrație: Cum $R_p = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n - S_p$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă și are suma S , atunci $R_p = S - S_p$ și $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = S - \lim_{p \rightarrow \infty} S_p = 0$, deoarece $\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = S$. Reciproc, dacă $\exists \lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$, atunci seria $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n$ este convergentă, ceea ce înseamnă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. ◀

Observație: Din demonstrația Teoremei 4.3 desprindem faptul că, dacă unei serii numerice din \mathbb{R} i se adaugă sau i se înlătură un număr finit de termeni, atunci natura respectivei serii nu se schimbă.

Teorema 4.4 (Adunarea a două serii convergente din \mathbb{R} și înmulțirea unei serii din \mathbb{R} cu un scalar (număr) real nenul)

i) Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ converge și are suma S' (în \mathbb{R}), iar seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ converge și are suma S'' (în \mathbb{R}), atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n + y_n)$ este convergentă, având suma $S' + S''$.

ii) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}^*$, atunci seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$ au aceeași natură.

Demonstrație: i) Cum există $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = S'$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = S''$, este evident că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = S' + S''$. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ este convergentă și are suma $S' + S''$.

ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci șirul sumelor ei parțiale este convergent (în \mathbb{R}). În consecință, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, și șirul cu termenul general $\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, adică $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots + \lambda x_n$ este convergent, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)$ este convergentă. Când seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci șirul $((x_1 + x_2 + \dots + x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este divergent, și deci și șirul $(\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este divergent, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, ceea ce revine la faptul că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$ este divergentă. Reciproc, dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}^*$, este convergentă, atunci, potrivit primei părți a acestei demonstrații a punctului ii), și seria $\frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Analog, dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$ este divergentă, atunci și seria $\frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă. Așadar, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda x_n)$ au aceeași natură. ◀

Observație: Afirmatia de la i) nu are loc și atunci când seriile implicate sunt simultan divergente, întrucât, este posibil ca, uneori, seria sumă să fie convergentă. Astfel, de exemplu, seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n+1}$ sunt divergente, pe când seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$, având șirul sumelor parțiale constant, este convergentă.

Teorema 4.5 Dacă, într-o serie convergentă de numere reale, se asociază termenii seriei în grupe finite, cu păstrarea ordinii termenilor, atunci se obține tot o serie convergentă, cu aceeași sumă.

Demonstrație: Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C)$, cu $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Există deci $S \in \mathbb{R}$, așa încât $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Fie acum seria $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + \dots + x_{n_2}) + \dots + (x_{n_{k-1}+1} + \dots + x_{n_k}) + \dots$, obținută din seria inițială prin asocierea termenilor ei în grupe finite, cu păstrarea ordinii. Fie $y_k = x_{n_{k-1}+1} + \dots + x_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $y_1 + y_2 + \dots + y_k = S_{n_k}$ și deci $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_1 + \dots + y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S$, ceea ce înseamnă că seria nou-obținută este convergentă, având suma identică cu aceea a seriei inițiale. ◀

Observații: 1) Prin asocierea în grupe finite a termenilor unei serii divergente din \mathbb{R} , cu păstrarea ordinii, se pot obține serii convergente. Astfel, în cazul seriei lui G. Grandi, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n$, care este divergentă, putem să ne gândim la asocierea $(-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) + \dots$, obținând astfel o serie convergentă, cu suma 0.

2) Dacă seria convergentă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ are termenul general x_n de forma unei sume finite, atunci, prin disociere se poate obține o serie divergentă. De exemplu, din seria convergentă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$,

prin disociere, ajungem la seria divergentă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n$.

Serii cu termeni din \mathbb{R}_+ . Criterii de stabilire a naturii unei serii de numere reale pozitive.

Cum investigarea absolutei convergențe a unei serii de numere reale revine la analiza convergenței unei serii cu termeni din \mathbb{R}_+ , este firesc să ne referim, în mod aparte, la serii de tipul $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziția 4.3 *O serie de numere reale nenegative $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ (cu $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$) este convergentă dacă și numai dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, al sumelor sale parțiale, este majorat.*

Demonstrație: Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este convergentă, atunci $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și deci mărginit (în \mathbb{R}), adică și majorat.

Reciproc, cum $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton crescător. Fiind și majorat, prin aplicarea Teoremei 3.2, șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent. Deci : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C)$. ◀

Teorema 4.6 (Criteriile de comparație I, II și III)

(CC I) Fie seriile cu termeni reali pozitivi $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$, așa încât $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(C)$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C)$;

b) Dacă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D)$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(D)$.

(CC II) Fie seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$, cu $x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(C)$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C)$;

b) Dacă $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D)$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(D)$.

(CC III) Fie seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$, cu $x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, așa încât există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ ($\in [0, +\infty]$).

a) Dacă $l \in (0, +\infty)$, atunci seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ au aceeași natură;

b) Dacă $l = 0$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(C) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C)$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(D)$.

c) Dacă $l = +\infty$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(C) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(C)$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(D) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D)$.

Demonstrație: (CC I) $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S'_n = x_1 + \dots + x_n \leq y_1 + \dots + y_n = S''_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Când $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(C)$, șirul $(S''_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este majorat, coform Propoziției 4.3. Atunci și șirul $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este majorat. Dar și monoton crescător, întrucât $S'_n - S'_{n-1} = x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Prin urmare, potrivit aceleiași propoziții 4.3, $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și deci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Astfel, are loc a).

Pentru b), dacă avem $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n(D)$, atunci $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $S'_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este un șir nemărginit de numere nenegative și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = +\infty$. În consecință, deoarece $S'_n \leq S''_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = +\infty$, ceea ce înseamnă că $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n(D)$.

Pentru (CC II), înmulțind relațiile $\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{y_2}{y_1}, \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{y_3}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{y_n}{y_{n-1}}$, găsim : $\frac{x_n}{x_1} \leq \frac{y_n}{y_1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Altfel spus, avem: $x_n \leq \frac{x_1}{y_1} y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, ținând seama de (CC I) și de Teorema 4.4, rezultă ambele concluzii de la (CC II).

Pentru (CC III), dacă $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ există și este finită ($l \in [0, \infty)$), atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, așa încât

$$(*) \quad l - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < l + \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

Pentru a), când $l > 0$, luăm $\varepsilon = \frac{l}{2}$ și vom avea $\frac{l}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3l}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$. Astfel, prin aplicarea criteriului (CC I) și a Teoremei 4.4, rezultă concluzia cerută, seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ fiind de aceeași natură.

Pentru b), când $l = 0$, din (*) putem conta numai pe partea dreaptă, adică pe relația $x_n < \varepsilon y_n, \forall n \geq n_\varepsilon$. Atunci, iarăși prin folosirea Teoremei 4.4 și a criteriului (CC I), se ajunge la concluzia din enunț.

Pentru c), când $l = \infty$, avem: $\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq \tilde{n}_\varepsilon$, are loc relația $\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon$. Altfel spus, $\frac{y_n}{x_n} < \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq \tilde{n}_\varepsilon$. Se aplică acum (CC III, b), cu x_n și y_n în roluri inversate. ◀

Exemplu: Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin \frac{1}{n^2 + 1}$ are termeni pozitivi. Luând în considerație seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}(C)$ și observând că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2 + 1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, +\infty)$, putem spune, prin aplicarea criteriului

(CC III, a), că seria dată este de aceeași natură cu seria (de comparație) $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.

$$\text{Deci } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin \frac{1}{n^2 + 1}(C).$$

Teorema 4.7 (Criteriul general de condensare al lui Cauchy) Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ o serie cu termeni reali pozitivi, așa încât șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător. Dacă există un șir $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de numere naturale, strict crescător și divergent, astfel încât șirul $\left(\frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ este mărginit, atunci seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (k_{n+1} - k_n) x_{k_n}$ sunt de aceeași natură.

Demonstrație: Fie $y_n = x_{k_{n+1}} + x_{k_{n+2}} + \dots + x_{k_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir descrescător, avem:

$$(k_{n+1} - k_n) x_{k_{n+1}} \leq y_n \leq (k_{n+1} - k_n) x_{k_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De aici, întrucât șirul $\left(\frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ este mărginit și cu elemente pozitive, adică există $M > 0$, așa încât

$$0 < \frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} < M, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},$$

avem, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, relația

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} (k_{n+2} - k_{n+1}) x_{k_{n+1}} &< \frac{k_{n+1} - k_n}{k_{n+2} - k_{n+1}} (k_{n+2} - k_{n+1}) x_{k_{n+1}} = \\ &= (k_{n+1} - k_n) x_{k_{n+1}} \leq y_n \leq (k_{n+1} - k_n) x_{k_n}. \end{aligned}$$

Pe baza acesteia, conform criteriului (CC I) și a Teoremei 4.4, rezultă că seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (k_{n+1} - k_n) x_{k_n}$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ sunt de aceeași natură. Dar cum, potrivit Teoremei 4.5, seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ sunt de aceeași natură, putem conchide că are loc concluzia prezentei teoreme. ◀

Observație: De regulă, în aplicații, se ia $k_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Evident că, în acest caz, șirul $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător și divergent în \mathbb{N} , iar $\frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^n - 2^{n-1}} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Așadar șirul $\left(\frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ este mărginit. Atunci, particularizând aplicarea Teoremei 4.7, putem afirma că seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ (unde $x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir descrescător) și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2^n x_{2^n}$ (unde $2^n = k_{n+1} - k_n = 2^{n+1} - 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$) sunt de aceeași natură. Acesta este, de fapt, **criteriul simplu de condensare al lui Cauchy**.

Exemplu: Pentru așa-numita **serie armonică generalizată**, adică pentru seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$, unde α este un parametru real, aplicarea criteriului simplu de condensare al lui Cauchy ne conduce la concluzia că natura seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ este aceeași cu a seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2^n \left(\frac{1}{2^n} \right)^\alpha$, adică $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$, care nu este altceva decât o serie geometrică cu rația $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Cum aceasta din urmă este convergentă când $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$ și divergentă în rest, adică pentru $0 \leq \alpha \leq 1$, concluzionăm că seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă când $\alpha \leq 1$ (pentru $\alpha < 0$ seria este evident divergentă, termenul ei general nefiind convergent la 0).

Odată în plus, vedem astfel că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind una armonică generalizată, cu $\alpha = 2 > 1$.

Teorema 4.8 (Criteriul rădăcinii - al lui Cauchy, cu limită) Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, așa încât există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$. Atunci:

i) dacă $l < 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă;

ii) dacă $l > 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă;

iii) dacă $l = 1$, nu putem decide natura seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$.

Demonstrație: Întrucât există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, +\infty)$, avem: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, are loc relația

$$(\bullet) \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < l + \varepsilon.$$

În cazul i), deoarece $l < 1$, putem lua $\varepsilon \in (0, 1 - l)$ și atunci rezultă că $x_n < (l + \varepsilon)^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, cu $0 < l + \varepsilon < 1$. Prin aplicarea criteriului (CC I), pe baza faptului că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (l + \varepsilon)^n$ este convergentă, ca serie geometrică cu rația subunitară, rezultă că $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă.

În cazul ii), cum $l > 1$, putem lua $\varepsilon \in (0, l - 1)$ și atunci, din (\bullet) rezultă că $1 < (l - \varepsilon)^n < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$. Pe baza aceluiași criteriu, (CC I), întrucât seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (l - \varepsilon)^n$, în care $l - \varepsilon > 1$, este divergentă, rezultă că avem: $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n (D)$.

În fine, când $l = 1$, adică în cazul iii), nu ne putem pronunța asupra naturii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, după cum reiese din exemplele în care $x_n = \frac{1}{n}$ sau $x_n = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$. În ambele situații, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$, dar $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} (D)$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} (C)$. ◀

Observație: Atunci când nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, o variantă mai “slabă” a criteriului rădăcinii are loc cu $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ în rolul lui l , la i) și cu $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, în loc de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, la ii).

Teorema 4.9 (Criteriul lui Kummer) Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există șirul

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât șirul $\left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are limită, fie ea notată cu l , atunci:

i) când $l > 0$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă;

ii) când $l < 0$, iar seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă;

iii) când $l = 0$, nu putem stabili natura seriei date.

Demonstrație: În cazul i), cum $l > 0$, obținem: $\forall \varepsilon \in (0, l), \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$,

$$0 < l - \varepsilon < a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < l + \varepsilon.$$

De aici, reiese că:

$$(\bullet\bullet) \quad 0 < x_{n+1} < \frac{a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1}}{l - \varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

În consecință, șirul $(a_n x_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ este descrescător. Cum, în plus, $0 < a_n x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, se poate spune că șirul $(a_n x_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ este convergent. Deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_n = \lambda$. Atunci:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_\varepsilon} \frac{1}{l - \varepsilon} (a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1}) &= \frac{1}{l - \varepsilon} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=n_\varepsilon}^k (a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{l - \varepsilon} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_\varepsilon} x_{n_\varepsilon} - a_{k+1} x_{k+1}) = \frac{1}{l - \varepsilon} (a_{n_\varepsilon} x_{n_\varepsilon} - \lambda). \end{aligned}$$

Prin urmare, seria $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{l - \varepsilon} (a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1})$ este convergentă. În virtutea acestui fapt, ținând seama de relația $(\bullet\bullet)$, rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, conform criteriului (CC I).

În cazul ii), cum $l < 0$, găsim că, pentru orice $\varepsilon \in (0, -l)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, așa încât:

$$a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < l + \varepsilon < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

Altfel spus, avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n}$ fiind divergentă prin ipoteză, reiese atunci, prin aplicarea criteriului (CC II), că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă.

În cazul în care $l = 0$, nu ne putem pronunța asupra naturii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$. Astfel, pentru $x_n = \frac{1}{n}$ și $a_n = n$, avem $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = 0$, iar $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n (D)$. Pe când, pentru $x_n = \frac{1}{n^2}$ și $a_n = n^2$, avem $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = 0$, cu $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n (C)$. ◀

Observații:

j) Luând $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, pe baza Teoremei 4.9, obținem următorul **criteriu** (**al raportului** sau **al lui D'Alembert**) de stabilire a naturii seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$:

“Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, pentru care există limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Dacă $L < 1$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n (C)$, în timp ce, dacă $L > 1$, atunci $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n (D)$, iar dacă $L = 1$, nu ne putem pronunța asupra naturii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$.”

jj) În cazul în care $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, Teorema 4.9 furnizează așa-numitul **criteriu al lui Raabe-Duhamel**, cu următorul enunț:

“Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, așa încât există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \right] = \rho$. Dacă $\rho > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar dacă $\rho < 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă. Dacă $\rho = 1$, nu putem stabili, cu certitudine, natura seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$.”

jjj) Dacă, în Teorema 4.9, luăm $a_n = n \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci obținem așa-numitul **criteriu al lui Bertrand**, cu enunțul următor:

“Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, unde $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că există următoarea limită: $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln(n+1) \right)$. Atunci, dacă $\mu > 0$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar dacă $\mu < 0$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă. Când $\mu = 0$, nu ne putem pronunța asupra naturii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$.”

Teorema 4.10 (Criteriul lui Gauss) Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă raportul $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ se poate exprima sub forma

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, iar șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit, atunci:

- a) când $\alpha > 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă;
- b) când $\alpha < 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă;
- c) când $\alpha = 1$ și $\beta > 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă;
- d) când $\alpha = 1$ și $\beta \leq 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă.

Demonstrație: a) În ipotezele din enunț, vedem că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$ și această limită este egală cu α . Altfel spus, există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\alpha}$. Atunci, prin aplicarea criteriului raportului, putem spune că, pentru $\frac{1}{\alpha} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Tot astfel, când $\alpha < 1$, seria care ne interesează este, întru concluzia de la b), divergentă. Când $\alpha = 1$, nu ne putem pronunța, prin criteriul lui D'Alembert, asupra naturii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$. În acest caz însă, vedem că avem:

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \beta + \frac{y_n}{n^\gamma}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Astfel, prin aplicarea criteriului lui Raabe-Duhamel, găsim că, atunci când $\beta > 1$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar când $\beta < 1$, ea este divergentă. Avem așadar atinse concluzia de la c) și, cu excepția cazului $\alpha = 1$ și $\beta = 1$, concluzia de la d).

În fine, când $\alpha = 1$ și $\beta = 1$, întru aplicarea criteriului lui Bertrand, constatăm că:

$$n \ln n \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) = n \ln n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}} \right) -$$

$$-(n+1) \ln(n+1) = (n+1) \ln \frac{n}{n+1} + y_n \frac{\ln n}{n^\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 < 0.$$

Aceasta deoarece $\frac{\ln n}{n^\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ și $\left[(n+1) \ln \frac{n}{n+1} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln e = -1$. Prin urmare, în conformitate cu respectivul criteriu, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă. ◀

Criterii de convergență pentru serii de numere reale cu termeni oarecari.

Teorema 4.11 (*Criteriul lui Dirichlet*) Fie seria de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, unde $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și are forma $x_n = y_n z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă șirul sumelor parțiale ce corespunde seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ este mărginit și dacă șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător și convergent la 0, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă.

Demonstrație: Deoarece, prin ipoteză, șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit, există $M > 0$, astfel încât $|S_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În același timp, întrucât șirul de numere reale pozitive $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător și convergent la 0, avem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ așa încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon : z_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Atunci, în intenția aplicării criteriului general al lui Cauchy de convergență pentru seria cu termenul general $x_n = y_n z_n$, obținem faptul că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există n_ε de mai sus, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| &= |y_{n+1} z_{n+1} + \dots + y_{n+p} z_{n+p}| = \\ &= |(S_{n+1} - S_n) z_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1}) z_{n+2} + \dots + (S_{n+p} - S_{n+p-1}) z_{n+p}| = \\ &= |-S_n z_{n+1} + S_{n+1}(z_{n+1} - z_{n+2}) + \dots + S_{n+p-1}(z_{n+p-1} - z_{n+p}) + S_{n+p} z_{n+p}| \leq \\ &\leq M z_{n+1} + M(z_{n+1} - z_{n+2}) + \dots + M(z_{n+p-1} - z_{n+p}) + M z_{n+p} = 2M z_{n+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar, în conformitate cu respectivul criteriu, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, este convergentă. ◀

Exemplu: Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ este convergentă, deoarece se aplică Teorema 4.11, cu $y_n = \cos n$ și

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Avem: } S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n = \frac{\cos \frac{n}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}},$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $|S_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{1}{2} \right|} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În același timp, șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător

și convergent la 0. În consecință, seria din acest exemplu este convergentă.

Teorema 4.12 (Criteriul lui Abel) Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, unde $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $x_n = u_n v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$, din \mathbb{R} , este convergentă, iar șirul $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ este unul monoton și mărginit, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n v_n$ (adică $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$) este convergentă.

Demonstrație: Să zicem că $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton crescător și mărginit. Atunci, el este convergent (în \mathbb{R}). Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Evident, $v_n - l \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Scriind $u_n v_n$ sub forma $u_n(v_n - l) + l u_n = -u_n(l - v_n) + l u_n$, vedem că, atunci când $l = 0$, putem aplica direct Teorema 4.11 (criteriul lui Dirichlet) asupra seriei cu termenul general $(-u_n)(-v_n)$, șirul $(-v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ fiind cu toate elementele nenegative, descrescător și convergent la 0, pe când șirul sumelor parțiale corespunzător seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-u_n)$ este mărginit, întrucât seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ este, prin ipoteză, convergentă. Alternativ, când

$l \neq 0$, în virtutea Teoremei 4.4, pe baza ipotezei de convergență a seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$, reiese că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} l u_n$ este convergentă, iar, în același timp, prin aplicarea criteriului lui Dirichlet (Teorema 4.11) asupra seriei cu termenul general $u_n(l - v_n)$, vedem că șirul $(l - v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are toate elementele pozitive, este descrescător și convergent la 0, iar șirul sumelor parțiale pentru seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ este mărginit, deoarece seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ este, prin ipoteză, convergentă. Ca atare, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(l - v_n)$ este convergentă și ea.

Rezultă atunci că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n v_n$, ca diferență a două serii convergente, este convergentă și în acest caz. În situația în care $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător și mărginit, se raționează asupra seriei cu termenul general $u_n(-v_n)$, deducându-se, la fel, convergența acesteia. Finalmente, se aplică Teorema 4.4, pentru $\lambda = -1$. ◀

Teorema 4.13 (Criteriul lui Leibniz, pentru serii alternate) Dacă șirul $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de numere reale pozitive este descrescător și convergent la 0, atunci seria alternată $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n w_n$ este convergentă.

Demonstrație: Aplicăm criteriul lui Dirichlet, luând $y_n = (-1)^n$ și $z_n = w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Întrucât $S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \begin{cases} 1, & \text{când } n \text{ este par} \\ 0, & \text{când } n \text{ este impar} \end{cases}$, se vede că $|S_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, cum și $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător și convergent la 0, ipotezele criteriului lui Dirichlet sunt îndeplinite. Astfel, prin utilizarea acestui criteriu, rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n w_n$, este convergentă. ◀

Alte rezultate relative la serii de numere reale (fără demonstrații)

Teorema 4.14 (Riemann)

Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ o serie semiconvergentă de numere reale. Atunci:

i) există o bijecție $\tau : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ pentru care seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_{\tau(n)}$ este divergentă;

ii) pentru orice $r \in \mathbb{R}$, există o bijecție $\varphi_r : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, astfel încât seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_{\varphi_r(n)}$ este convergentă și are suma egală cu r .

Definiția 4.10 O serie de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ se numește **necondiționat convergentă** dacă și numai dacă, oricare ar fi bijecția $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_{\psi(n)}$ este convergentă.

Teorema 4.15 Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ este absolut convergentă, atunci ea este necondiționat convergentă și

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_{\psi(n)},$$

oricare ar fi bijecția $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Definiția 4.11 Se numește **produs Cauchy al seriilor** de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_n$ seria

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} z_n, \text{ unde } z_n = \sum_{k=1}^n x_k y_{n-k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 4.16 (Mertens)

Dacă două serii de numere reale sunt convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs Cauchy al celor două serii este convergentă, iar suma ei este egală cu produsul sumelor celor două serii.

Propoziția 4.4 Produsul Cauchy a două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă, cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii.

Teorema 4.17 (asupra dezvoltării p -adice a unui număr a , real, pozitiv și subunitar)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, cu $p > 1$. Dacă $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ este un șir de numere naturale, așa încât $0 \leq a_k < p$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$ este convergentă, iar suma sa este un număr real $a \in [0, 1]$.

Teorema 4.18 (de dezvoltare p -adică a unui număr real $a \in (0, 1]$)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, cu $p > 1$ și $a \in (0, 1]$. Atunci există un șir de numere naturale $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, neconstant nul de la un rang înainte, așa încât $0 \leq a_k \leq p - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$.

Teorema 4.19 (de aproximare a sumei unei serii alternate)

Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n x_n$, cu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ descrescător și convergent la 0. De asemenea, fie S suma acestei serii și $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul corespunzător al sumelor parțiale.
Atunci:

$$|S - S_n| < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 4.20 (de aproximare a sumei unei serii absolut convergente) Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ o serie absolut convergentă de numere reale, S suma sa și $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul corespunzător al sumelor parțiale. Atunci, dacă există $\lambda \in (0, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$i) \sqrt[n]{|x_n|} \leq \lambda, \forall n \geq n_0, \text{ avem: } |S - S_n| \leq \frac{\lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, \forall n \geq n_0$$

sau

$$ii) \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \lambda, \forall n \geq n_0, \text{ avem: } |S - S_n| < \frac{|x_{n+1}|}{1 - \lambda}, \forall n \geq n_0.$$

Bibliografie

1. A. Knopfmacher, J. Knopfmacher - *Two Constructions of the Real Numbers via Alternating Series*, Internat. J. Math & Math. Sci., Vol. 12, no. 3 (1989), pp 603-613.
2. J. Galambos - *The Representation of Real Numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Math., 502, Springer, 1976.
3. C. Badea - *A theorem of irrationality of infinte series and applications*, Acta Arithmetica, LXIII, 4 (1993).
4. K. Knopp - *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990.
5. G. Bagni - *Infinite Series from History to Mathematics Education*, 2005.
6. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 3)*, Editura Polirom, Iași, 1998.
7. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul Diferențial. (Cap. 2)*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
8. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferențial (Cap. 2)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
9. Marina Gorunescu - *Lecții de analiză matematică pentru informaticieni*, Reprografia Univ. Craiova, 2000.
10. Rodica Mihaela Dăneț ș.a. - *Curs modern de analiză matematică. Volumul I (Cap. 1)*, Editura Matrix Rom, București, 2009.
11. John K. Hunter - *An Introduction to Real Analysis (Chap. 4)*, University of California at Davis, 2014.
12. Jiří Lebl - *Basic Analysis: Introduction to Real Analysis (Chap. 2)*, Creative Commons USA, 2016.