Cursul 14

Integrale multiple

Pentru funcţii reale vectorial-scalare, adică pentru funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (de mai multe variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$), corespondenta noţiunii de integrală definită, în sens Riemann, din cazul unidimensional, când $n = 1$ (v. cursul 13), este cea de integrală multiplă. În particular, când $n = 2$, se poate vorbi despre integrala dublă (utilă îndeosebi în aprecierea valorilor unor caracteristici numerice ale entităţilor geometrice sau fizice plane), iar când $n = 3$ se poate defini şi opera cu integrala triplă, pentru calculul unor elemente (volum, masă etc.) ce sunt caracteristice corpurilor din spaţiul euclidian tridimensional .

Ca şi în cazul în care $n = 1$, noţiunea riemanniană de integrală depinde de domeniul (compact sau necompact) şi de integrandul (mărginit sau nemărginit, parametrizat sau nu) pentru care se defineşte, fiind, după caz, proprie sau improprie, cu parametri şi respectiv fără parametri. Oricum, ca şi în cazul unidimensional, când integrala se defineşte prin intermediul conceptului de lungime (măsură) a intervalelor parţiale ce intervin în cadrul unei diviziuni (partiţii), este necesară introducerea prealabilă a noţiunii de arie (când $n = 2$), volum (când $n = 3$) şi, în general, măsură a unei mulţimi, respectiv de mulţime măsurabilă (în sens Jordan sau Lebesgue). Iată de ce, prezentând aici extensia noţiunii de integrală Riemann pentru funcţii reale de mai multe variabile, menţionăm mai întâi elementele definitorii ale noţiunii de măsură Jordan a unei mulţimi din $\mathbb{R}^n$ şi, raportându-ne la aceasta, expunem apoi conceptul de integrală multiplă (în special, cel de integrală dublă şi de integrală triplă, proprie şi improprie).

Măsura Jordan a unei mulţimi. Mulţimi din $\mathbb{R}^n$ măsurabile în sens Jordan

În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, considerăm în cele ce urmează că există dat un reper ortonormat, în raport cu care putem să ne referim la n axe de coordonate.

Definiţia 14.1 *i) Date fiind $a^0_1, a^0_2, \dots, a^0_n \in \mathbb{R}$ şi $b^0_1, b^0_2, \dots, b^0_n \in \mathbb{R}$, aşa încât $a^0_k < b^0_k$, $\forall\, k = \overline{1,n}$, se numeşte* ***interval compact** n**-dimensional, cu "extremităţile"*** *(după caz,* ***laturile*** *- când $n = 2$,* ***muchiile*** *- când $n = 3$,* ***feţele*** *- când $n \geq 4$)* ***paralele cu axele de coordonate****, mulţimea (****dreptunghiul*** *- când $n = 2$,* ***paralelipipedul*** *- când $n = 3$,* ***hiperparalelipipedul*** *- când $n \geq 4$)*

$$I_0 = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a^0_k \leq x_k \leq b^0_k, \forall\, k = \overline{1,n}\right\}$$

a cărui ***măsură*** *(Jordan) este, prin definiţie,* ***numărul*** *(cu semnificaţie de* ***arie*** *- când $n = 2$,* ***volum*** *- când $n = 3$,* ***hipervolum*** *- când $n \geq 4$) dat de produsul notat cu $\mu(I_0)$ şi egal cu*

$$(b^0_1 - a^0_1)(b^0_2 - a^0_2) \dots (b^0_n - a^0_n).$$

ii) Numim ***mulţime elementară, măsurabilă în sens Jordan****, orice mulţime din $\mathbb{R}^n$, obţinută ca reuniune finită de intervale compacte n-dimensionale, cu "extremităţile" paralele cu axele de coordonate şi fără puncte interioare comune.*

Cu alte cuvinte, o mulţime elementară, măsurabilă în sens Jordan, în $\mathbb{R}^n$, este o mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru care există un număr finit, $q \in \mathbb{N}^*$, de intervale compacte n-dimensionale, $I_l = [a^l_1, b^l_1] \times [a^l_2, b^l_2] \times \dots \times [a^l_n, b^l_n]$, $l = \overline{1,q}$, astfel încât

$$E = \bigcup_{l=1}^{q} I_l$$

şi $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_l = \varnothing$, $\forall\, j,l \in \{1,2,\ldots,q\}$, $j \neq l$. Prin definiţie, ***măsura Jordan a mulţimii elementare*** E este numărul

$$\mu(E) = \sum_{l=1}^{q} \mu(I_l),$$

unde $\mu(I_l) = \prod_{k=1}^{n}(b_k^l - a_k^l)$ (în conformitate cu i)).

Se notează cu $\mathcal{E}_J^n$ familia tuturor mulţimilor elementare din $\mathbb{R}^n$ care sunt măsurabile Jordan, în sensul Definiţiei 14.1, ii).

Definiţia 14.2 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Se numeşte* ***măsură Jordan interioară a mulţimii*** *A numărul*

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Analog, se numeşte ***măsură Jordan exterioară a mulţimii*** *A numărul*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \supseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Atunci când mulţimea A nu include nici o mulţime elementară, măsurabilă Jordan, E, definim $\mu_*(A) = 0$.

Observaţie: Este evident că, pentru orice mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$, există atât $\mu_*(A)$, cât şi $\mu^*(A)$, în $\mathbb{R}_+$, având loc relaţia $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Definiţia 14.3 *Se spune că o mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este* ***măsurabilă în sens Jordan*** *dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Când $n = 2$ şi $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, mulţimea A se numeşte* ***carabilă*** *(Jordan).*

Valoare comună a măsurilor interioară (Jordan) $\mu_*(A)$ şi exterioară (Jordan) $\mu^*(A)$ se numeşte, atunci când A este măsurabilă în sens Jordan (în $\mathbb{R}^n$), pur şi simplu, ***măsura Jordan*** (***aria Jordan*** - când $n = 2$, ***volumul Jordan*** - când $n = 3$ sau ***hipervolumul Jordan*** - când $n \geq 4$) ***a mulţimii*** A şi se notează cu $\mu_J(A)$.

Observaţii:

1) Orice E din $\mathcal{E}_J^n$ este măsurabilă (în sens Jordan) în conformitate cu Definiţia 14.3, deoarece $\mu_J(E) = \mu(E) = \sum_{l=1}^{q}\mu(I_l) = \sum_{l=1}^{q}\prod_{k=1}^{n}(b_k^l - a_k^l)$.

2) Nu orice mulţime mărginită din $\mathbb{R}^n$ este Jordan măsurabilă în sensul Definiţiei 14.3.

   De exemplu, când $n = 2$, mulţimea $A_D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f_D(x)\}$, unde $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia lui Dirichlet, definită prin

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   nu este carabilă (nu are arie Jordan), deoarece $\mu_*(A_D) = 0 \neq 1 = \mu^*(A_D)$, chiar dacă este mărginită în $\mathbb{R}^2$.

3) Există mulţimi neelementare (în sensul Definiţiei 14.1, ii)) care sunt Jordan măsurabile (în sensul Definiţiei 14.3). Un exemplu în acest sens îl constituie mulţimea carabilă Γ_f - subgraful unei funcţii $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ integrabile Riemann pe $[a,b]$ (cu $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), adică mulţimea

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

pentru care avem: $\mu_J(\Gamma_f) = aria(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{B}[a,b]$ (v. Propoziţia 13.1) şi, pentru orice diviziune $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ a intervalului $[a,b]$, există m_i (respectiv M_i), din $\mathbb{R}$, ca margine inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Considerând mulţimea $E'_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$, avem: $E'_\Delta \in \mathcal{E}_j^2$, $E'_\Delta \subseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E'_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_f(\Delta)$ (suma Darboux inferioară, corespunzătoare lui f şi lui $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$). În consecinţă, rezultă că $s_f(\Delta) \le \mu_*(\Gamma_f)$. În mod asemănător, considerând $E''_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$, vedem că $E''_\Delta \in \mathcal{E}_J^2$, $E''_\Delta \supseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E''_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}_f(\Delta) \ge \mu^*(\Gamma_f)$, unde $S_f(\Delta)$ este suma Darboux superioară, corespunzătoare lui f şi Δ. Prin cumulare, avem: $s_f(\Delta) \le \mu_*(\Gamma_f) \le \mu^*(\Gamma_f) \le S_f(\Delta)$, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$. Dar, cum f este integrabilă pe $[a,b]$, este adevărată relaţia: $\underline{I} = \sup_\Delta s_f(\Delta) = \inf_\Delta S_f(\Delta) = \overline{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (v. Teorema 13.2). Se ajunge astfel la concluzia exprimată prin egalitatea $\mu_*(\Gamma_f) = \mu^*(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, ceea ce, ţinând seama de Definiţia 14.3, înseamnă tocmai că Γ_f este o mulţime carabilă (adică măsurabilă în sens Jordan în $\mathbb{R}^2$) şi are aria (adică măsura pătratică) Jordan egală cu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Mai general, deducem că, dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile pe $[a,b]$, astfel încât $f(x) \le g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\big\}$ are arie Jordan şi

$$\mu_J\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int\limits_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\,dx.$$

Aşa este cazul în care $0 < \widetilde{a}$, $0 < \widetilde{b}$, $a = -\widetilde{a}$, $b = \widetilde{a}$, $f(x) = -\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}$ şi $g(x) = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}$, $\forall\, x \in [a,b] = [-\widetilde{a}, \widetilde{a}]$, caz caracteristic mulţimii

$$\Gamma_{f,g} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\widetilde{a} \le x \le \widetilde{a}, -\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2} \le y \le \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}\right\},$$

adică mulţimii punctelor interioare şi de pe frontiera elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \frac{y^2}{\widetilde{b}^2} - 1 = 0$. Prin calcul, găsim că, în acest caz, avem: $\mu_J(\Gamma_{f,g}) = \pi\widetilde{a}\widetilde{b}$. Aşadar, aria (Jordan a) elipsei de semiaxe $\widetilde{a}$ şi $\widetilde{b}$ este egală cu $\pi\widetilde{a}\widetilde{b}$.

Propoziţia 14.1 *O mulţime $B \subseteq \mathbb{R}^n$ este* ***de măsură Jordan nulă****, dacă poate fi inclusă într-o mulţime $E \in \mathcal{E}_J^n$, de măsură oricât de mică. Cu alte cuvinte, avem $\mu_J(B) = 0$ dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, astfel încât $B \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Demonstraţie: Faptul că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $B \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$ implică $\mu^*(B) = 0$. Cum $0 \le \mu_*(B) \le \mu^*(B)$, rezultă că $\mu_*(B) = \mu^*(B) = 0$, ceea ce, în virtutea Definiţiei 14.3, înseamnă că B este măsurabilă în sens Jordan, având măsura Jordan nulă. ◀

Câteva condiţii necesare şi suficiente pentru ca o mulţime din $\mathbb{R}^n$ să fie măsurablià în sens Jordan sunt reunite în următorul rezultat:

Teorema 14.1 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Atunci, afirmaţiile de mai jos sunt echivalente:*

a) A este Jordan măsurabilă;

b) $\forall\, \varepsilon > 0$, există E'_ε şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E'_\varepsilon \subseteq A \subseteq E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E'_\varepsilon) - \mu_J(E''_\varepsilon) < \varepsilon$;

c) $\partial(A)$ este Jordan măsurabilă şi $\mu_J(\partial(A)) = 0$;

d) Există şirurile $\left(\widetilde{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$ şi $\left(\widehat{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $\widetilde{E}_m \subseteq A \subseteq \widehat{E}_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_J(\widetilde{E}_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_J(\widehat{E}_m)$.

Demonstraţie: Pentru echivalenţa afirmaţiilor a) şi b), vedem mai întâi că, dacă A este Jordan-măsurabilă, atunci $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu_j(A)$ şi, din definiţia (caracterizarea) cu "ε" a marginii superioare ce dă pe $\mu_*(A)$, rezultă că, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ aşa încât $E'_\varepsilon \subset A$ şi $\mu_J(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu_J(E'_\varepsilon)$, iar din definiţia marginii inferioare ce dă pe $\mu^*(A)$, reiese că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $E''_\varepsilon \supset A$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) < \mu_J(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Aşadar, dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu_J(A)$. atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon$ şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, încât $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \mu_J(A) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\mu_J(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

Reciproc, dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \varepsilon$, atunci $0 \le \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon$. Deci, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. Adică A este Jordan măsurabilă.

Privitor la faptul că a) şi c) sunt afirmaţii echivalente, putem vedea la început că, dacă A este măsurabilă Jordan, iar a) şi b) sunt echivalente, atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon$ şi $E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) = \mu_J(E''_\varepsilon \setminus E'_\varepsilon) < \varepsilon$. Cum $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{o}{A} \subset \overline{E''_\varepsilon} \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon} = E''_\varepsilon \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon}$, iar $E''_\varepsilon \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon} \in \mathcal{E}_J^n$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon \setminus \overset{o}{E'_\varepsilon}) = \mu_J(E''_\varepsilon \setminus E'_\varepsilon) < \varepsilon$, rezultă că, potrivit Propoziţiei 14.1, mulţimea $Fr(A)$ este Jordan-măsurabilă şi $\mu_J(Fr(A)) = 0$. Invers, dacă c) este adevărată, atunci, prin aplicarea Propoziţiei 14.1, rezultă că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$ astfel încât $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $Fr(A) \subset E_\varepsilon$. Dar, cum orice mulţime din $\mathcal{E}_J^n$, care conţine frontiera mulţimii A, se poate scrie ca diferenţa a două mulţimi din $\mathcal{E}_J^n$, între care se află inclusă A, se poate spune că, $\forall\, \varepsilon > 0$, odată cu E_ε, există E'_ε şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E_\varepsilon = E''_\varepsilon \setminus E'_\varepsilon$, $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) = \mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$. Deci are loc b), adică a).

În fine, b) şi d) sunt echivalente deoarece, dacă are loc b), atunci, pentru $\varepsilon = \frac{1}{m}$, cu $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, \widetilde{E}_m = E'_\varepsilon$ şi $\widehat{E}_m = E''_\varepsilon$ din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $\widetilde{E}_m \subset A \subset \widehat{E}_m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ şi $0 \le \mu_J(\widehat{E}_m) - \mu_J(\widetilde{E}_m) < \frac{1}{m}$, adică $\underset{m\to\infty}{lim}\, \mu_J(\widetilde{E}_m) = \underset{m\to\infty}{lim}\, \mu_J(\widehat{E}_m)$. Reciproc, dacă d) este adevărată, atunci $\forall\, \varepsilon > 0$, există $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \ge m(\varepsilon)$, avem $\mu_J(\widehat{E}_m) - \mu_J(\widetilde{E}_m) < \varepsilon$ şi prin urmare, b) are loc, cu $E'_\varepsilon = \widetilde{E}_{m(\varepsilon)}$ şi $E''_\varepsilon = \widehat{E}_{m(\varepsilon)}$. ◀

Observaţii:

1) Pe baza echivalenţei dintre afirmaţiile a) şi b) din Teorema 14.1, se poate spune că orice mulţime Jordan-măsurabilă este, în mod necesar, mărginită.

2) Orice mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ care este Jordan-măsurabilă şi care are $\mu_J(A) = 0$ se caracterizează prin faptul că $\mu^*(A) = 0$.

3) O mulţime Jordan-măsurabilă $A \subset \mathbb{R}^n$ are $\mu_J(A) \neq 0$ dacă şi numai dacă $\overset{o}{A} \neq \varnothing$.

4) Graficul oricărei funcţii continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este o mulţime din $\mathbb{R}^2$, de arie (măsură pătratică) Jordan nulă. Aceasta întrucât $f \in \mathcal{C}[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b]$ şi deci $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ este Jordan - măsurabilă şi, prin echivalenţa afirmaţiilor a) şi c) din enunţul Teoremei 14.1, mulţimea $Fr(\Gamma_f)$ are arie (Jordan) nulă. Astfel, şi $G_f \subset Fr(\Gamma_f)$ are aria nulă.

5) Orice mulţime din $\mathbb{R}^2$ a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice ale unor funcţii continue are arie (Jordan).

6) Orice disc din $\mathbb{R}^2$ are arie, întrucât, există întotdeauna două şiruri de mulţimi din $\mathcal{E}_J^2$, unul al poligoanelor cu n laturi, înscrise în cercul-frontieră al discului şi celălalt al poligoanelor cu n laturi, circumscrise respectivului cerc, aşa încât diferenţa ariilor poligoanelor cu câte n laturi este oricât de mică pentru n suficient de mare. Astfel, în virtutea echivalenţei dintre d) şi a) (v. Teorema 14.1), discul are arie.

Notând cu $\mathcal{M}_J^n$ mulţimea tuturor părţilor lui $\mathbb{R}^n$ care sunt măsurabile în sens Jordan, pot fi evidenţiate unele proprietăţi ale măsurii Jordan şi, implicit, ale elementelor din $\mathcal{M}_J^n$, după cum urmează.

Teorema 14.2 ***(Proprietăţi ale măsurii Jordan)***
1) $\mu_J(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$ (proprietatea de nenegativitate).
2) $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ cu $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \varnothing$ (proprietatea de aditivitate finită).
3) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$, cu $B \subseteq A \Longrightarrow A \backslash B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(A \backslash B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$ (proprietatea de substractivitate).
4) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$, cu $B \subseteq A \Longrightarrow \mu_J(B) \leq \mu_J(A)$ (proprietatea de monotonie).
5) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$, cu $\mu_J(A) = 0$ şi $\forall\, B \subseteq A \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(B) = 0$ (proprietatea de completitudine).
6) $\forall f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f = izometrie şi $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow f(A) \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(f(A)) = \mu_J(A)$ (proprietatea de invarianţă la izometrii).

Demonstraţie: 1) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \mu_J(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A) \geq \mu_J(E) = \mu(E) \geq 0, \forall\, E \in \mathcal{E}_J^n$.
2)$\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ cu $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \varnothing \Longrightarrow Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$, $\mu_J(Fr(A)) = 0$, $\mu_J(Fr(B)) = 0$ şi, ca atare, $\mu_J(Fr(A \cup B)) = 0$. Aşadar: $A \cup B \in \mathcal{M}_J^n$. Totodată, $A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. De asemenea, $B \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, F'_\varepsilon, F''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $F'_\varepsilon \subset B \subset F''_\varepsilon$ şi $\mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci: $\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \leq \mu_J(A \cup B) \leq \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$, $\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \leq \mu_J(A) + \mu_J(B) \leq \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$ şi deci $|\mu_J(A \cup B) - \mu_J(A) - \mu_J(B)| \leq \mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$.
3)$\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow Fr(A) \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(Fr(A)) = 0; \forall B \subseteq A$ şi $A \setminus B \subseteq A \Longrightarrow Fr(A \setminus B) \subseteq Fr(A) \Longrightarrow \mu_J(Fr(A \setminus B)) = 0 \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}_J^n$; $A = (A \setminus B) \cup B$ şi $\overset{o}{\widehat{A \setminus B}} \cap \overset{o}{B} = \varnothing \overset{2)}{\Longrightarrow} \mu_j(A) = \mu_J(A \setminus B) + \mu_J(B) \Longrightarrow \mu_J(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$.
4)$\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $B \subseteq A \overset{3)+1)}{\Longrightarrow} \mu_J(A) - \mu_J(B) = \mu_J(A \setminus B) \geq 0$.
5)$\forall A \in \mathcal{M}_J^n$, $\mu_J(A) = 0 \Longleftrightarrow \mu^*(A) = 0, \forall\, B \subseteq A \Longrightarrow \mu^*(B) = 0 \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(B) = 0$.
6)$\forall f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f = izometrie $\Longrightarrow f(\mathcal{E}_J^n) = \mathcal{E}_J^n \Longrightarrow \mu_*(A) \leq \mu_*(f(A)) \leq \mu^*(f(A)) \leq \mu^*(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \mu_*(A) = \mu_*(f(A)) = \mu^*(f(A)) = \mu^*(A) \Longrightarrow f(A) \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(f(A)) = \mu_J(A)$. ◄

Integrala multiplă, în sens Riemann, pe mulţimi compacte

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, închisă şi mărginită, astfel încât $D \in \mathcal{M}_J^n$, unde, după cum am specificat mai sus, $\mathcal{M}_J^n$ este mulţimea tuturor submulţimilor Jordan-măsurabile ale lui $\mathbb{R}^n$. De asemenea, fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$.

Definiţia 14.4 *a) Se numeşte* ***partiţie*** *a lui D orice familie finită de subdomenii $D_i \subset D$, $i = \overline{1,p}$, astfel încât $D_i \in \mathcal{M}_J^n$, $\forall i = \overline{1,p}$, $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $i \neq j$ şi $D = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_i$.*

b) Notând cu Δ o asemenea partiţie, se defineşte ***norma*** *ei, notată cu $\|\Delta\|$, prin $\max\limits_{1 \le i \le p} \{\mathrm{diam}(D_i)\}$, unde $\mathrm{diam}(D_i)$ înseamnă diametrul subdomeniului D_i (în raport cu distanţa euclidiană pe $\mathbb{R}^n$).*

Observaţie:

În virtutea proprietăţii de aditivitate finită (v. Teorema 14.2-2)), avem: $\mu_J(D) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_J(D_i)$.

Definiţia 14.5 *Fie $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ o partiţie a lui D şi $\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_n^i) \in D_i$ un punct arbitrar ales, $\forall i = \overline{1,p}$. Notăm cu ξ_Δ mulţimea de puncte $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p$. Se numeşte sumă Riemann ataşată funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, partiţiei Δ şi setului de puncte $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p$ din ξ_Δ, numărul*

$$\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi^i) \mu_J(D_i).$$

Definiţia 14.6 *Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, mărginită pe mulţimea conexă, mărginită, închisă şi Jordan-măsurabilă $D \subset \mathbb{R}^n$, este $\mathcal{R}-$integrabilă (Riemann$-$integrabilă) pe D, dacă există $I \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că, $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, aşa încât, oricare ar fi o partiţie $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi punctele $\xi^i \in D_i$, $i = \overline{1,p}$, avem:*

$$|\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) - I)| < \varepsilon.$$

Numărul I se numeşte integrala multiplă (dublă-când $n = 2$, triplă-când $n = 3$ etc.) a funcţiei f pe D şi se notează cu

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Ca şi în cazul unidimensional, pentru o funcţie mărginită $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$, o partiţie oarecare a lui D, se pot defini sumele Darboux inferioară $s_f(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i \mu_J(D_i)$ şi respectiv superioară $S_f(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i \mu_J(D_i)$, unde $m_i = \inf\limits_{x \in D_i} \{f(x)\}$ şi $M_i = \sup\limits_{x \in D_i} \{f(x)\}$, $\forall i = \overline{1,p}$.

Este uşor de văzut că are loc relaţia

$$m \cdot \mu_J(D) \le s_f(\Delta) \le S_f(\Delta) \le M \cdot \mu_J(D)$$

pentru orice partiţie Δ a lui D, cu $m = \inf\limits_{x \in D} \{f(x)\}$ şi $M = \sup\limits_{x \in D} \{f(x)\}$.

Pe baza ei, notând cu I_* supremumul din $\{s_f(\Delta)\}$ în raport cu partiţiile de tip Δ ale lui D, iar cu I^* infimumul din $\{S_f(\Delta)\}$ pe mulţimea partiţiilor Δ ale lui D, deducem relaţia

$$m \cdot \mu_J(D) \le I_* \le I^* \le M \cdot \mu_J(D).$$

Ca şi pentru $n = 1$, se poate arăta că este adevărat următorul rezultat:

Propoziţia 14.2 ***(Criteriul lui Darboux de $\mathcal{R}-$integrabilitate pentru funcţii mărginite)***
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, mărginită, închisă şi Jordan-măsurabilă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită . Condiţia necesară şi suficientă ca f să fie $\mathcal{R}$-integrabilă (multiplu) pe D este ca, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice partiţie $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, să avem $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$.

Echivalent, necesar şi suficient ca $f \in \mathcal{R}(D)$ (unde $\mathcal{R}(D)$ înseamnă mulţimea funcţiilor Riemann-integrabile (multiplu) pe D) este să fie îndeplinită relaţia

$$I_* = I^* \in \mathbb{R}.$$

În acest context, valoarea comună a numerelor I_* şi I^* se declară a fi integrala

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Prin utlizarea criteriului lui Darboux de (multiplă) integrabilitate Riemann, se poate dovedi că mulţimea $C(D)$ a funcţiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care sunt continue pe D este inclusă în $\mathcal{R}(D)$. Altfel formulat, are loc următorul rezultat:

Teorema 14.3 *Orice funcţie continuă pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$, conexă, închisă, mărginită şi Jordan-măsurabilă, este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D (în sensul Definiţiei 14.6).*

Demonstraţie: Fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă şi $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ o partiţie oarecare a lui D. Atunci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i) \mu_J(D_i).$$

În acelasi timp, din continuitatea lui f pe D şi, implicit, pe oricare din subdomeniile compacte D_i, rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile pe D_i, $\forall i = \overline{1,p}$, fiind chiar uniform continuă pe D. Astfel, există ξ^i şi η^i din D_i încât $m_i = f(\xi^i)$ şi $M_i = f(\eta^i)$, iar pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ pentru care, oricare ar fi x' şi x'' din D, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}$. ◀

Luând acum Δ, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, obţinem

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p} (f(\eta^i) - f(\xi^i)) \mu_J(D_i) < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)} \sum_{i=1}^{p} \mu_J(D_i) = \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)} \mu_J(D) = \varepsilon.$$

În consecinţă, pe baza Propoziţiei 14.2, rezultă că f este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D.

Un alt rezultat privitor la asigurarea integrabilităţii Riemann multiple pe un domeniu compact şi Jordan-măsurabil este următorul:

Teorema 14.4 *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe mulţimea conexă, închisă, mărginită şi măsurabilă Jordan D din $\mathbb{R}^n$, iar, în plus, cu excepţia eventuală a unei mulţimi de măsură Jordan nulă, f este continuă pe D, atunci $f \in \mathcal{R}(D)$.*

Demonstraţie: Cum f este mărginită pe D, există $M \in \mathbb{R}_+^*$ aşa încât $|f(x)| < M$, $\forall x \in D$. În acelaşi timp, $\forall \varepsilon > 0$, există o mulţime $E_\varepsilon \in \mathcal{E}_j^n$, cu $\overset{\circ}{E}_\varepsilon$incluzând mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f din D şi pentru care $\mu_J(E_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Tot prin ipoteză, f este continuă pe $D \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon = \widetilde{D}_\varepsilon$, unde $\widetilde{D}_\varepsilon$ este, cu evidenţă, o submulţime închisă şi mărginită (deci compactă) a lui D. Ca atare, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, aşa încât, $\forall x', x'' \in \widetilde{D}_\varepsilon$, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\mu_j(D)}$. Considerând acum o partiţie Δ a lui D, a cărui prim element D_1 este $D \cap E_\varepsilon$, iar celelalte elemente - $D_2, D_3, \ldots, D_p$ - sunt submulţimi compacte şi Jordan-măsurabile ale lui D, cu diametrele mai mici decât $\delta(\varepsilon)$, putem scrie:

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leq (M_1 - m_1)\mu_J(E_\varepsilon) + \sum_{i=2}^{p}(M_i - m_i)\mu_J(D_i) <$$
$$< 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\mu_J(D)}\sum_{i=2}^{p}\mu_J(D_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Astfel, deoarece $0 \leq I^* - I_* \leq S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$, iar ε este arbitrar, rezultă că $I^* = I_*$, ceea ce înseamnă că f este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D. ◀

Proprietăţile integralei multiple sunt similare celor ale integralei din cazul $n = 1$ şi se pot demonstra pe baza Definiţiei 14.6 şi a Teoremei 14.2. În acest sens, este adevărată următoarea propoziţie.

Propoziţia 14.3 *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, închisă, mărginită şi Jordan-măsurabilă. Atunci:*

a) $\int \cdots \int_D 1 \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \mu_J(D)$;

b) $\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$ *şi are loc egalitatea*

$$\int \cdots \int_D (\alpha f(x_1, \ldots, x_n) + \beta g(x_1, \ldots, x_n)) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \alpha \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \beta \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

c) $\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$, *cu* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, *avem:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \leq \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

d) $\forall f \in \mathcal{R}(D)$, *rezultă că* $|f| \in \mathcal{R}(D)$ *şi*

$$\left|\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n\right| \leq \int \cdots \int_D |f(x_1, \ldots, x_n)| dx_1 \ldots dx_n;$$

e) $\forall f \in \mathcal{R}(D)$, *cu* $m = \inf_{x \in D}\{f(x)\}$ *şi* $M = \sup_{x \in D}\{f(x)\}$, *există* $\lambda \in [m, M]$ *astfel încât:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \lambda \mu_J(D).$$

Dacă, în plus, $f \in C(D)$, *atunci există un punct* $\xi \in D$, *astfel încât:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = f(\xi)\mu_J(D);$$

f) *Dacă D este reuniunea a două domenii compacte şi Jordan-măsurabile D_1 şi D_2, cu* $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \emptyset$, *iar* $f \in \mathcal{R}(D_1) \cap \mathcal{R}(D_2)$, *avem* $f \in \mathcal{R}(D)$ *şi*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_{D_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \int \cdots \int_{D_2} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n; \quad (14.1)$$

g) $\forall f, g \in C(D)$, *cu* $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, *există* $\eta \in D$, *astfel încât*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= f(\eta) \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Integrala dublă pe mulţimi compacte

În cazul particular în care $n = 2$, Definiţia 14.6 conduce la noţiunea de integrală dublă a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mărginită pe mulţimea conexă, închisă, mărginită şi carabilă D. Notată cu $\iint_D f(x, y) dx\, dy$, aceasta, împreună cu integrandul f şi domeniul D respectă rezultatele relative la integrala multiplă de tip Riemann, prezentate mai înainte şi corespunzător transcrise pentru situaţia în care $n = 2$. Astfel, nu ne rămâne aici decât să facem cunoscut modul de calcul al integralei duble, în câteva cazuri relative la forma geometrică a lui D.

Propoziţia 14.4 ***(Cazul în care D este un dreptunghi)***
Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b, c < d$, $D = [a, b] \times [c, d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care integrala dublă

$$\iint_D f(x, y) dx\, dy$$

există. Dacă $\int_c^d f(x, y) dy$ este, ca funcţie de x, $\mathcal{R}-$integrabilă pe $[a, b]$, atunci există $\int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx$ şi avem:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dx\, dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx.$$

În plus, dacă $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, iar $f_1 \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $f_2 \in \mathcal{R}[c, d]$, atunci:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x) f_2(y) dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

Demonstraţie: Considerând o partiţie a dreptunghiului $[a, b] \times [c, d]$ prin mulţimi dreptunghiulare de tipul $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ unde $\Delta' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ este o diviziune a intervalului compact, unidimensional, $[a, b]$, iar $\Delta'' = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d\}$ este o diviziune a intervalului $[c, d]$, luăm în atenţie $m_{ij} = \inf\{f(x, y)/(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$ şi $M_{ij} = \sup\{f(x, y)/(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$, $\forall i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Arbitrar alegând $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$ şi ţinând seama de ipoteza existenţei integralei $\int_c^d f(x, y) dy$, avem

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \ \ \forall j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}.$$

De aici, prin însumare după j de la 1 la m, obţinem:

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \ \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Înmulţind această relaţie cu $x_i - x_{i-1}$ şi realizând suma după i, de la 1 la n, a rezultatelor, ajungem la dubla inegalitate

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{i=1}^n (\int_c^d f(\xi_j, y) dy)(x_i - x_{i-1}) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = S_f(\Delta), \tag{14.2}$$

unde $\Delta = \Delta' \times \Delta'$ este partiţia considerată a dreptunghiului $D = [a, b] \times [c, d]$. Cum, prin ipoteză, există $\iint_D f(x, y)dx\,dy$ şi, în acelaşi timp, există şi $\int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx$, tragem concluzia că, pe seama relaţiei (14.2), rezultă:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dx\,dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx.$$

Când $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x, y) \in D = [a, b] \times [a, b]$, avem:

$$(14.3) \qquad \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dx\,dy = \int_a^b (\int_c^d f_1(x)f_2(y)dy)dx = \int_a^b (f_1(x) \int_c^d f_2(y)dy)dx =$$
$$= \int_c^d f_2(y)dy \cdot \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

◀

Observaţii:

i) Atunci când $f \in \mathcal{R}([a, b] \times [c, d])$ şi există $\int_a^b f(x, y)dx$, $\forall y \in [c, d]$, iar aceasta din urmă, ca funcţie de y, este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[c, d]$, atunci prin inversarea rolurilor lui x şi y în cadrul Propoziţiei 14.4, avem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dx\,dy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)dx)dy.$$

ii) O condiţie suficientă pentru îndeplinirea ipotezelor din Propoziţia 14.4 este: $f \in C([a, b] \times [c, d]; \mathbb{R})$.

Definiţia 14.7 *a) Un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte* ***simplu în raport cu axa*** *Oy dacă există două funcţii continue $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in [a, b]$ şi*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

b) Analog, un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte ***simplu în raport cu axa*** *Ox dacă există două funcţii continue $\gamma, \omega : [c, d] \to \mathbb{R}$, aşa încât $\gamma(y) < \omega(y)$, $\forall y \in [c, d]$ şi*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y), c \leq y \leq d\}.$$

Teorema 14.5 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi $f \in C(D, \mathbb{R})$. Atunci are loc formula*

$$(14.4) \qquad \iint_D f(x, y)dx\,dy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy)dx,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, cu φ şi ψ din $C([a, b]; \mathbb{R})$, aşa încât $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Demonstraţie: Fie Δ o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$, cu nodurile $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k = \overline{0, n}$. Evident, $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$. Considerăm funcţiile $\varphi_l : [a, b] \to \mathbb{R}$, $l = \overline{0, n}$, definite prin

$$\varphi_l(x) = \varphi(x) + \frac{l}{n}(\psi(x) - \varphi(x)), \quad \forall x \in [a, b], l \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Avem $\varphi_0 = \varphi$ şi $\varphi_n = \psi$.

Fie notată cu Ω_n partiţia lui D prin elementele $(D_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, unde

$$D_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x)\}, \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Observăm că $\text{diam}(D_{ij}) \leq \frac{b-a}{n} + \frac{1}{n} \sup\limits_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)|$, $\forall i, j \in \overline{1,n}$ şi, în consecinţă, $\|\Omega_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Folosind notaţiile $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$ şi $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$, $\forall i, j = \overline{1,n}$, avem:

$$m_{ij}\text{aria}(D_{ij}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy)dx \leq M_{ij}\text{aria}(D_{ij}), \forall i, j = \overline{1,n}.$$

De aici, prin sumare succesivă după i şi j, de la 1 la n, obţinem:

$$s_f(\Omega_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\text{aria}(D_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\text{aria}(D_{ij}) = S_f(\Omega_n). \tag{14.5}$$

Cum f este integrabilă pe D, avem $\lim\limits_{n\to\infty} s_f(\Omega_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Omega_n) = \iint_D f(x,y)dx\,dy$ şi atunci, pe seama relaţiei (14.5), deducem că are loc formula de calcul (14.4) din concluzia teoremei. ◀

Observaţii:

a) În cazul în care $f \in C(D)$, iar D este simplu în raport cu axa Ox, adică

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y), c \leq y \leq d\},$$

atunci formula de calcul corespunzătoare este următoarea:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\omega(y)} f(x,y)dx \right) dy. \tag{14.6}$$

b) În situaţia în care D nu este simplu nici în raport cu axa Oy şi nici în raport cu axa Ox, dar se poate exprima ca o reuniune finită de subdomenii simple (fie în raport cu Oy, fie în raport cu Ox) şi mutual disjuncte atunci pentru calculului integralei duble în cauză, se folosesc împreună formulele (14.1) (din propoziţia 14.3-f), (14.4) şi (14.6).

Exemplul 14.1. *Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4\}$. Să se calculeze aria (D).*

Prin aplicarea formulei de la punctul a) al Propoziţiei 14.3, avem:

$$\text{aria}(D) = \iint_D dx\,dy.$$

Cum $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, cu $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, unde $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_1(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_1(y) = y, 1 \leq y \leq \sqrt{3}\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_2(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_2(y) = \frac{3}{y}, \sqrt{3} \leq y \leq 2\}$ şi $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_3(y) = \frac{y}{4} \leq x \leq \omega_3(y) = \frac{3}{y}, 2 \leq y \leq 2\sqrt{3}\}$, iar D_1, D_2 şi D_3 sunt domenii simple în raport cu axa Ox, obţinem:

$$\begin{aligned}
\text{aria}(D) &= \iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} dx\,dy + \iint_{D_3} dx\,dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{1/y}^{y} dx \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_{1/y}^{3/y} dx \right) dy + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\int_{y/4}^{3/y} dx \right) dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(y - \frac{1}{y} \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2}{y} dy + \int_2^{2\sqrt{3}} (\frac{3}{y} - \frac{y}{4}) dy = \\
&= \left(\frac{y^2}{2} - \ln y \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} + 2\ln y \Bigg|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(3\ln y - \frac{y^2}{8} \right) \Bigg|_2^{2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + 2\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2} - 3\ln 2 + \frac{1}{2} = 2\ln 2.
\end{aligned}$$

În anumite împrejurări, calculul unei integrale duble pe o mulţime conexă, inchisă, mărginită şi carabilă s-ar putea face şi printr-o schimbare adecvată de variabile (coordonate), urmărindu-se, în principal, transformarea domeniului de integrare şi a integrandului în corespondente ale lor care să faciliteze calculul ulterior.

Dacă Ω este un domeniu mărginit şi carabil din $\mathbb{R}^2$, iar $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, definită prin $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $\forall (u,v) \in \overline{\Omega}$ este o funcţie de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$, care transformă, bijectiv, domeniul Ω într-o mulţime D şi $\det(J_F)(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in \Omega$, atunci $\overline{D} = F(\overline{\Omega})$ este, la rândul său, un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, iar F se numeşte shimbare de variabile (coordonate).

Calculul unei integrale duble pe D, dintr-o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, se va face, prin implicarea transformării F, în virtutea următorului rezultat, a cărui demonstraţie o omitem.

Propoziţia 14.5 *Fie $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ o schimbare de variabile şi $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci, are loc formula*

$$\iint_D f(x,y) dx\,dy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| (u,v) du\,dv,$$

în care $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ semnifică Jacobianul (determinantul funcţional al) lui F, iar $\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|$ valoarea sa absolută.

Observaţii:

i) De obicei, se recurge la o schimbare de variabile sugerată de forma domeniului D.

Astfel, în cazul exemplului de mai sus, luând $xy = u$ şi $\frac{y}{x} = v$, cu $u \in [1,3]$ şi $v \in [1,4]$, altfel spus $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ şi $y = \sqrt{uv}$, avem

$$\text{aria}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_\Omega \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| (u,v) du\,dv,$$

unde $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 4\} = [1,3] \times [1,4]$ şi

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) = \det(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix})(u,v) = \det(\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}) = \frac{1}{2v}.$$

Deci, şi pe o asemenea cale, regăsim faptul că

$$\text{aria}(D) = \int_1^3 du \int_1^4 \left| \frac{1}{2v} \right| dv = \left(u \Bigg|_1^3 \right) \left(\frac{1}{2} \ln v \Bigg|_1^4 \right) = 2\frac{1}{2}\ln 4 = 2\ln 2.$$

ii) Frecvent practicate sunt transformările de la coordonatele carteziene (x, y) la cordonatele polare (r, θ), prin relaţiile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{, cu } r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, \infty),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi],$$

unde $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}(r, \theta) = \det(\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}) = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$

De asemenea, uneori, se mai foloseşte trecerea de la x şi y la aşa-numitele coordonate polare generalizate, potrivit relaţiilor

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\theta \\ y = br\sin^\alpha\theta \end{cases},$$

în care $r \in [r_1, r_2] \subseteq (0, \infty)$ şi $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi]$ sunt noile coordonate, iar a, b şi α sunt parametri adecvat luaţi în context. Când $\alpha = 1$, atunci r şi θ se numesc cordonate eliptice, corespunzătoare elipsei de ecuaţie redusă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Exemplul 14.2. *Să se calculeze* $\iint_D (y - x + 2)dx\,dy$, *unde* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

Folosind transformarea $(x, y) \to (r,\ \theta)$, dată de relaţiile $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$, cu $0 \le r < 1$ şi $0 \le \theta \le 2\pi$, avem:

$$\iint_D (y - x + 2)dx\,dy = \int_0^{2\pi}(\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|(r, \theta)dr)d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)6r\,dr)d\theta = \int_0^{2\pi}(6\sin\theta - 4\cos\theta + 6)d\theta =$$
$$= (-6\cos\theta - 4\sin\theta + 6\theta)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

Ca aplicaţii ale integralei duble, menţionăm aici, în afara aceleia relative la calculul ariei unui domeniu plan, şi pe aceea referitoare la calculul masei unei plăci materiale plane D, cu densitate de masă ρ, cunoscută, în conformitate cu formula

$$\text{masa}(D) = \iint_D \rho(x, y)dx\,dy,$$

precum şi pe aceea privitoare la determinarea coordonatelor centrului de greutate (x_G, y_G) al unei plăci materiale plane D, cu densitatea de masă ρ, potrivit formulelor:

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dx\,dy}{\iint_D \rho(x, y)dx\,dy} \ \text{ şi } \ y_G = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dx\,dy}{\iint_D \rho(x, y)dx\,dy}.$$

Integrala triplă pe domenii compacte

Integrala triplă reprezintă cazul particular al integralei multiple ce corespunde lui $n = 3$. Evident că toate definiţiile, rezultatele şi observaţiile din cazul general îşi păstrează valabilitatea şi când $n = 3$. Astfel, între altele, Definiţia 14.6, Propoziţia 14.3 şi Teorema 14.3 stabilesc, prin particularizare, pentru $n = 3$, modalitatea de introducere a numărului

$$\iiint_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

cu semnificaţia sa de integrală triplă, în sens Riemann, a funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, pe domeniul compact şi măsurabil-Jordan (adică cu volum Jordan) din $\mathbb{R}^3$, precum şi proprietăţile integralei triple, între care şi faptul că orice funcţie continuă pe D este integrabilă (triplu), în sens Riemann, pe D.

Modalităţile de calcul ale unei integrale triple se pot descifra prin analogie cu cele de la integrala dublă.

Definiţia 14.8 *Un domeniu $D \subset R^3$ se numeşte* ***simplu în raport cu axa*** *Oz (de exemplu) dacă există un domeniu $\widetilde{D} \subset R^2$, carabil şi două funcţii continue $\varphi, \psi : \overline{\widetilde{D}} \to R$, cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$, $\forall (x,y) \in \widetilde{D}$, astfel încât*

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) < z < \psi(x,y),\ \forall (x,y) \in \widetilde{D}\}.$$

Un astfel de domeniu spaţial are volumul (în sens Jordan) dat de formula

$$\text{vol}(D) = \iint_{\widetilde{D}} \psi(x,y)dx\,dy - \iint_{\widetilde{D}} \varphi(x,y)dx\,dy.$$

Totodată, analog Teoremei 14.5, este aici următorul rezultat:

Propoziţia 14.6 *Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^3$, simplu în raport cu Oz. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc formula de calcul:*

$$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx\,dy. \tag{14.7}$$

Exemplul 14.3. *Să se calculeze $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy\,dz$, unde D este domeniul mărginit de suprafeţele $z = 0$, $z = 1$ şi $z = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Observând că $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1, \forall (x,y) \in \widetilde{D}\}$, unde $\widetilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, avem $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ şi $\psi(x,y) = 1$, aşa încât, prin utilizarea formulei (14.7) (v. Propoziţia 14.6), obţinem:

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy\,dz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz \right) \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy =$$
$$= \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{x^2+y^2}(1 - \sqrt{x^2+y^2})dx\,dy.$$

De aici, mai departe, folosind trecerea de la coordonatele carteziene (x,y) la cele polare (r,θ), avem:

$$\iint_{\widetilde{D}} \sqrt{x^2+y^2}(1 - \sqrt{x^2+y^2})dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r(1-r)r\,dr \right) d\theta =$$
$$= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3)dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

În ceea ce priveşte corespondentul rezultatului stipulat de Propoziţia 14.5, acesta este următorul:

Propoziţia 14.7 ***(Formula de calcul pentru integrala triplă pe o mulţime compactă, cu volum, din $\mathbb{R}^3$, prin transformare de coordonate)***

Fie Ω şi D două domenii compacte, cu volum Jordan, din $\mathbb{R}^3$. De asemenea, fie $F : \Omega \to D$, unde $F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, $\forall(u, v, w) \in \Omega$, o transformare punctuală, bijectivă, de clasă $C^1(\Omega, D)$ şi cu jacobianul $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ nenul pe Ω. Dacă $f \in C(D; \mathbb{R})$, atunci are loc formula:

$$(\Theta) \quad \iiint_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| (u, v, w)du\,dv\,dw.$$

Observaţii:

1) Cea mai utilizată schimbare de variabile în $\mathbb{R}^3$ este trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice r, θ, φ, potrivit relaţiilor:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, \pi], \\ z = r\cos\theta, & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \subseteq [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$\frac{D(x, y, z,)}{D(r, \theta, \varphi)}(r, \theta, \varphi) = \det(\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}) = r^2\sin\theta.$$

2) O altă schimbare de variabile pentru integrala triplă este trecerea de la coordonatele carteziene la coordonatele (aşa-numite) cilindrice, transformare definită de relaţiile:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi], \\ z = z, & z \in [z_1, z_2] \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$$

În acest caz, avem $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}(r, \theta, z) = r$.

Reluând Exemplul 14.3, relativ la integrala triplă

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}dx\,dy\,dz,$$

unde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 1, \forall(x, y) \in \sqrt{\widetilde{D}}\}$, cu $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, se poate folosi formula de calcul (Θ) din Propoziţia 14.7, în care $u = r$, $v = \theta$, şi $w = z$ sunt coordonate cilindrice, cu $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ şi $z \in [0, 1]$. În acest mod, reobţinem:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 r dz\right) d\theta\right) r\,dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r)r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

Şi integrală triplă îşi are aplicaţiile ei în geometrie, fizică şi alte domenii, între care, menţionăm aici calculul masei unei corp material D, de densitate cunoscută ρ, pe baza formulei

$$\iiint_D \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz,$$

precum şi determinarea coordonatelor centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) al unui corp D, cu densitatea materială ρ, în conformitate cu următoarele formule:

$$x_G = \frac{\iiint_D x\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz},\ y_G = \frac{\iiint_D y\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz},\ z_G = \frac{\iiint_D z\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz}.$$

În general, în cazul unei integrale multiple pe un domeniu compact şi Jordan-măsurabil din $\mathbb{R}^n$, calculul se poate face, în anumite condiţii (deductibile prin analogie cu situaţiile în care $n = 2$ sau $n = 3$), pe baza uneia dintre următoarele două formule:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_2 =$$
$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \ldots \int_{\varphi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n$$

(când D este simplu în raport cu Ox_n, apoi cu Ox_{n-1}, etc.) şi

$$\iint_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \iint_\Omega f(x_1(y_1, \ldots, y_n), x_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) \left| \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right| (y_1, y_2, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$$

(când se poate face trecerea de la coordonatele $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, la coordonatele $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$).

Exemplul 14.4. *Să se calculeze* $\int \cdots \int_D dx_1 \ldots dx_n$, *unde* D *este mulţimea* $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1\}$.

Folosind prima dintre formulele menţionate, obţinem:

$$\int \cdots \int_D dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n)) \ldots) =$$
$$= \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}) dx_{n-1}) \ldots) =$$
$$= \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-3}} \frac{(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2})^2}{2!} dx_{n-2})) \ldots) = \ldots = \frac{1}{n!}.$$

Integrale multiple improprii

Ca şi în cazul unidimensional, se poate extinde noţiunea de integrală şi pentru situaţiile în care fie domeniul nu este compact, fie integrandul nu este mărginit, fie ambele aceste caracteristici au loc.

Tratând dintr-odată atât cazul când domeniul este nemărginit, cât şi cazul când funcţia de integrat este nemărginită, în legătură cu integralele multiple improprii se pot menţiona următoarele:

Definiţia 14.9 *Fie* $D \subset R^n$ *un domeniu (mărginit sau nemărginit) şi* $f : D \to R$ *o funcţie (mărginită sau nu) ce se presupune a fi* $\mathcal{R}$*-integrabilă pe orice submulţime compactă şi Jordan-măsurabilă a lui* D.
Spunem că ***integrala*** $\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ ***este convergentă*** *dacă, pentru orice şir de domenii mărginite* $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, *care sunt măsurabile-Jordan şi au proprietăţile următoare*

i) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots$

ii) $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$, $\forall k \in N^*$,

iii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$,

există şi este finită $\lim_{k \to \infty} \int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$, *valoarea ei fiind independentă de alegerea şirului* $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

În cazul când respectiva limită nu există sau este infinită, spunem că integrala $\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ *este* divergentă.

Ca şi în cazul unidimensional (când $n = 1$), se pot pune în evidenţă diverse criterii de convergenţă/divergenţă pentru integrale multiple improprii, iar calculul unor asemenea integrale, în situaţia de convergenţă, se va baza pe formula

$$\lim_{k\to\infty} \int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

în care valoarea integralei $\int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ se determină pe una dintre căile mai-sus-prezentate.

Exemplul 14.5. *Integrala* $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$ *este convergentă şi are valoarea* π*, după cum urmează*:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr \right) d\theta = (-2\pi) \lim_{a\to\infty} \left(\left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^a \right) = \pi \lim_{a\to\infty} (1 - e^{-a^2}) = \pi.$$

Exemplul 14.6. *Integrala improprie (din pricina nemărginirii integrandului în* $(0,0)$*)*

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} dx\, dy,$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \rho^2\}$, $\rho > 0$ *şi* $\alpha > 0$, *se poate aprecia prin intermediul formulei*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} dx\, dy,$$

unde $D_n = D \setminus B(\theta_{\mathbb{R}^2}; \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, trecând la coordonate polare (pe seama relaţiilor $x = r\cos\theta, y = \sin\theta$,cu $\frac{1}{n} \le r \le \rho, \theta \in [0, 2\pi]$), obţinem:

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{\rho} \frac{r}{r^{\alpha}} dr \right) d\theta = (2\pi) \lim_{n\to\infty} \left(\int_{1/n}^{\rho} r^{1-\alpha} dr \right) =$$

$$= 2\pi \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_{1/n}^{\rho} \right), 0 < \alpha \neq 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln r \Big|_{1/n}^{\rho} \right) \quad , \quad \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi\rho^{2-\alpha}, & 0 < \alpha < 2 \\ +\infty, & \alpha \geq 2 \end{cases}.$$

Aşadar, integrala dată este convergentă când $\alpha \in (0,2)$ şi divergentă când $\alpha \geq 2$.

Bibliografie

1. B.M. Budak, S.V. Fomin - *Multiple Integrals. Field Theory and Series*, Edit. "Mir", 1973.
2. Constantin P. Niculescu - *Calcul integral pe* $\mathbb{R}^n$, Edit. Universităţii din Craiova, 2000.
3. Şt. Frunză - *Analiză matematică* (partea a II-a), Edit. Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1992.
4. V. Postolică - *Analiză matematică. Eficienţă prin matematică aplicată* (cap. 17), Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
5. Narcisa Apreutesei-Dumitru, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilităţii* (cap. 6), Edit. Performantica, Iaşi, 2005.

6. Ioana Bârză - *Calcul intégral.Calcul différentiel. Équations différentielles. Éléments de Géométrie différentielle,* Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2010.

7. Sever Angel Popescu - *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.

8. Maria Polcerova - *Mathematics II. Chapter 14: Multiple Integrals,* FCH VUT v Brně, 2013.

9. Gilbert Strang and a large contributing group of authors – *Calculus, Vol. 3, Chap. 5: Multiple Integration*, OpenStax, Rice University, 2016 (*https://d3bxy9euw4e147.cloudfront.net/oscms-prodcms/media/documents/CalculusîVoumeî3-OP.pdf*)