

## Cursul 12

### Șiruri și serii de funcții reale.

#### Serii de puteri. Serii Taylor. Serii trigonometrice. Serii Fourier.

Două dintre entitățile de prim plan din domeniul analizei matematice sunt **șirul de funcții** și **seria de funcții**. Prezentăm aici aceste noțiuni, cu referiri la convergența punctuală și la convergența uniformă a șirurilor și seriilor de funcții reale, la unele criterii de convergență uniformă, precum și la rezultate ce privesc transferul de proprietăți de la funcțiile ce sunt termeni ai unui șir (sau ai unei serii) la funcția limită (respectiv sumă). Cazurile particulare ale seriilor de puteri (în rândul cărora intră *seriile Taylor*) și ale seriilor trigonometrice (cu subsidiarele *serii Fourier-trigonometrice*) sunt expuse la urmă.

### Șiruri de funcții reale

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și spațiul liniar real al funcțiilor  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$  ( $p, q \in \mathbb{N}^*$ ), notat cu  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ .

**Definiția 12.1** Se numește **șir de funcții** definite pe  $A$  și cu valori în  $\mathbb{R}^q$  o aplicație de la  $\mathbb{N}^*$  la  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ .

Un asemenea șir se notează cu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ( $\subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ), ori  $(f_n)_{n \geq 1}$  sau  $(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ .

**Definiția 12.2** Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  un șir de funcții reale. Elementul  $x_0 \in A$  se numește **punct de convergență** al șirului  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dacă și numai dacă șirul numeric  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^q$  este convergent.

Mulțimea punctelor de convergență ale unui șir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  poartă denumirea de **mulțime de convergență** pentru  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și, notată cu  $A_c$ , este submulțime a lui  $A$ .

**Exemplu:** Când  $p = q = 1$ ,  $A = [-3, 5]$  și  $f_n(x) = x^n$ ,  $\forall x \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , punctul  $x = -1$  nu este unul de convergență pentru  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  întrucât șirul numeric  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este unul divergent. Totodată, punctul  $x = \frac{1}{2}$  este unul de convergență pentru șirul de funcții considerat aici, deoarece șirul numeric  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent (la 0). Mulțimea de convergență a șirului de funcții în cauză este, ușor de constatat,  $(-1, 1]$ .

**Observație:** În cazul în care  $q > 1$ , șirul numeric real  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , pe baza căruia se decide dacă  $x_0 \in A$  este sau nu punct de convergență pentru  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , se poate investiga prin intermediul șirurilor sale componente  $(f_n^j(x_0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $j = \overline{1, q}$ .

Dacă un șir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  are mulțimea de convergență  $A_c \subseteq A$  nevidă, atunci se poate defini pe  $A_c$  o funcție  $f$ , prin  $x \in A_c \mapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , numită **funcția limită a șirului de funcții**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  **pe mulțimea**  $A_c$ .

De pildă, în exemplul de mai sus, în care  $p = q = 1$ ,  $A = [-3, 5]$ ,  $f_n(x) = x^n$ ,  $\forall x \in A$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ , iar  $A_c = (-1, 1]$ , funcția limită în cauză este  $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin:  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$  și  $f(1) = 1$ .

**Definiția 12.3** a) Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  și  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ . Șirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  se numește **punctual** (sau **simplic**) **convergent la**  $f$ , pe  $\tilde{A} \subseteq A$ ,  $\tilde{A} \neq \emptyset$ , dacă și numai dacă  $\tilde{A} \subseteq A_c$  și  $\forall x \in \tilde{A}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}^*$  astfel încât, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_{\varepsilon, x}$ , are loc:  $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ .

- b) Un şir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  se numeşte **punctual (simplu) convergent pe o mulţime nevidă**  $\tilde{A} \subseteq A$  dacă există  $f \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$  astfel încât  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  să convergă punctual la (similar spus, să aibă limita punctuală)  $f$ .

Faptul că  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge punctual, pe  $\tilde{A} \subseteq A$ , la  $f$  se notează prin  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p/\tilde{A}} f$ . Altminteri, când  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  nu este convergent punctual la o funcţie  $f$  (din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ), pe o submulţime  $\tilde{A} \subseteq A$ , se foloseşte notaţia  $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p/\tilde{A}} f$ .

**Observaţie:** Dacă se doreşte ca o anumită proprietate a funcţiilor termeni -  $f_n$  - din cadrul şirului  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  să se regăsească la funcţia limită  $f$ , convergenţa punctuală a lui  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la  $f$  este, mai întotdeauna, neasigurătoare pentru "transferul" proprietăţii vizate. Nu mai departe decât şirul din exemplul precedent are funcţiile termeni -  $f_n(x) = x^n$  - continue la stânga în  $x = 1$ , dar funcţia sa limită punctuală -  $f(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$  şi  $f(1) = 1$  - nu este continuă la stânga în punctul respectiv.

Un alt tip de convergenţă, adecvat "transferului de proprietăţi" mai mult decât convergenţa punctuală, este cel relativ la **convergenţa uniformă** a unui şir de funcţii, introdus după cum urmează.

**Definiţia 12.4** a) Şirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  se numeşte **convergent uniform** pe  $\tilde{A} \subseteq A$ , la  $f \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$ , dacă şi numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$  şi pentru orice  $x \in \tilde{A}$ , are loc relaţia:  $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ . Notăm acest fapt prin  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ .

- b) Şirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  se numeşte **convergent uniform pe**  $\emptyset \neq \tilde{A} \subseteq A$  dacă şi numai dacă există  $f \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$  aşa încât  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ .

**Observaţii:**

- 1) Din definiţiile 12.3 şi 12.4, se deduce că dacă  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ , atunci  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p/\tilde{A}} f$ .
- 2) Pe baza Definiţiei 12.4, se vede că dacă şirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , converge uniform pe  $\tilde{A} \subseteq A$  ( $\tilde{A} \neq \emptyset$ ) şi există  $f \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$  astfel încât  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p/\tilde{A}} f$ , atunci  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ .
- 3) Un şir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  nu converge uniform, pe  $\tilde{A} \subseteq A$ , către  $f \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$ , adică  $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ , dacă şi numai dacă există  $\varepsilon_0 > 0$  aşa încât, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , se pot găsi  $k_n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $k_n \geq n$  şi  $x_n \in \tilde{A}$ , pentru care să avem  $\|f_{k_n}(x_n) - f(x_n)\| \geq \varepsilon_0$ .
- 4) Dacă  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  este un şir de funcţii convergent punctual la un element  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , pe mulţimea  $\tilde{A} \subseteq A$ , atunci  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ , ori de câte ori, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , mulţimea  $\{n_{\varepsilon, x} \mid x \in \tilde{A}\}$  (în care  $n_{\varepsilon, x}$  este rangul - din  $\mathbb{N}^*$  - implicat în Definiţia 12.3) este mărginită.

Pentru stabilirea situaţiei în care are loc convergenţa uniformă a unui şir de funcţii, pe o anume mulţime, se poate utiliza unul dintre următoarele criterii.

**Propoziția 12.1** Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , unde  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ . Șirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniform pe  $\tilde{A} \subseteq A$  ( $\tilde{A} \neq \emptyset$ ) dacă și numai dacă este **uniform fundamental (Cauchy) pe  $\tilde{A}$** , adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ așa încât, } \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } m, n \geq n_\varepsilon, \text{ are loc relația}$$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}$$

sau, echivalent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ așa încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ are loc}$$

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}.$$

**Demonstrație:** Dacă  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este uniform convergent pe  $\tilde{A}$ , atunci, în conformitate cu Definiția 12.4 b), există  $f \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$ , astfel încât:  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ . Potrivit primei părți a aceleiași definiții, aceasta înseamnă că, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , așa încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$ , avem  $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall x \in \tilde{A}$ . De aici, rezultă că,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $m, n \geq n_\varepsilon$ , este adevărată relația:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}.$$

Așadar, are loc relația din enunț, în conformitate cu care  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este un șir uniform fundamental de funcții din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ .

Reciproc, dacă  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este un șir uniform fundamental (Cauchy) pe  $\tilde{A}$ , atunci  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^q$  este,  $\forall x \in \tilde{A}$ , un șir numeric Cauchy. Cum, în  $\mathbb{R}^q$ , orice șir Cauchy este convergent, rezultă că,  $\forall x \in \tilde{A}$ ,  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  are o limită (unică)  $l_x \in \mathbb{R}^q$ . Se obține astfel o funcție  $f : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^q$ , definită prin  $f(x) = l_x$ ,  $\forall x \in \tilde{A}$ , în raport cu care avem:  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p/\tilde{A}} f$ . Ținând acum seama de faptul că,  $\forall \varepsilon > 0$  și  $\forall x \in \tilde{A}$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , așa încât,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $m, n \geq n_\varepsilon$ , avem  $\|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$  și, pentru  $m \rightarrow \infty$ , găsim că,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$ , are loc relația  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ ,  $\forall x \in \tilde{A}$ . Ca atare,  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ , potrivit cu Definiția 12.4 a). ◀

**Propoziția 12.2** Un șir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  converge, uniform pe  $\emptyset \neq \tilde{A} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^p$ , la  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , dacă și numai dacă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \tilde{A}} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \right) = 0.$$

**Demonstrație:** Dacă  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ , atunci, conform Definiției 12.4 a),  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , așa încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$ , avem:

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in \tilde{A}.$$

Prin urmare,  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , are loc relația

$$\sup_{x \in \tilde{A}} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

de unde deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \tilde{A}} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \right) = 0$ .

Reciproc, dacă are loc condiția din enunț, atunci:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon, \text{ avem } \sup_{x \in \tilde{A}} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$$

și astfel, cu atât mai mult,  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}$ . Așadar, putem considera că  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ . ◀

Revenind la exemplul șirului de funcții  $f_n : [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $f_n(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in [-3, 5]$ , constatăm că  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ , unde  $\tilde{A} = (-1, 1]$  și  $f : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $f(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$  și  $f(1) = 1$ . Aceasta întrucât  $\sup_{x \in (-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-1, 1]} x^n = 1 \not\rightarrow 0$ , când  $n \rightarrow \infty$ . În același timp, deducem că  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\hat{A}} f|_{\hat{A}}$ , unde  $\hat{A} = [\alpha, \beta] \subseteq (-1, 1)$ . Asta deoarece  $\sup_{x \in \hat{A}} |f_n(x) - f|_{\hat{A}}(x)| = \sup_{x \in \hat{A}} x^n = \max\{|\alpha|^n, |\beta|^n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

**Propoziția 12.3 (criteriul majorării pentru convergența uniformă a unui șir de funcții reale)**

Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^p, A \neq \emptyset, (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ .

a) Dacă există  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , astfel încât  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} g \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$  și  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|g_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}$ ,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \tilde{A} \subseteq A$ , atunci  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ .

b) Dacă există  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}_+$ , astfel încât  $\gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  și  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \gamma_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$  și

$\forall x \in \tilde{A} \subseteq A$ , atunci  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ .

**Demonstrație:** a)  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ astfel încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon, \text{ avem } \|g_n(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}$ . Atunci, ținând seama că  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|g_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \tilde{A}$ , rezultă:  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon, \text{ are loc relația } \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}$ .

Deci:  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ .

b) Cum  $\gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  și  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \gamma_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$  și  $\forall x \in \tilde{A}$ , rezultă că,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ astfel încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon, \forall x \in \tilde{A}, \text{ avem: } \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \gamma_n < \varepsilon$ . Atunci, în conformitate cu Definiția 12.4 a), deducem că  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} f$ . ◀

Convergența uniformă a unui șir de funcții reale  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  asigură păstrarea, pentru funcția limită, a unor proprietăți ale funcțiilor ce sunt termeni ai șirului, proprietăți între care menționăm: mărginirea, existența limitei într-un punct, continuitatea, diferențiabilitatea (derivabilitatea) și integrabilitatea. O asemenea calitate este evidențiată de teoremele care urmează.

**Teorema 12.1 (pentru transfer de mărginire)**

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  un șir de funcții mărginite pe  $A$ . Dacă  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ , unde  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , atunci  $f$  este mărginită pe  $A$ .

**Demonstrație:** Cum  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ , rezultă că, pentru  $\varepsilon = 1$ , există  $n_1 \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_1$ , avem:

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < 1, \forall x \in A.$$

În același timp, deoarece  $f_{n_1}$  este mărginită pe  $A$ , există  $\mu > 0$ , așa încât:  $\|f_{n_1}(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \mu, \forall x \in A$ . Combinând cele două relații și luând  $n = n_1$  în prima dintre ele, obținem:

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f(x) - f_{n_1}(x)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n_1}(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq 1 + \mu, \forall x \in A.$$

Deci  $f$  este mărginită pe  $A$ . ◀

**Teorema 12.2 (pentru transferul existenței limitei într-un punct)**

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  și  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , astfel încât  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ . Dacă  $x_0 \in A'$  și există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și, în plus, are loc egalitatea:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

**Demonstrație:** Cum  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ , reiese că, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$ , avem:

$$(*) \quad \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in A.$$

Totodată, pentru că există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$ , considerând  $n = n_\varepsilon$ , avem:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ , așa încât,  $\forall x', x'' \in A$ , cu  $x' \neq x_0, x'' \neq x_0$  și  $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f_{n_\varepsilon}(x') - f_{n_\varepsilon}(x'')\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Combinând aceste relații, deducem că, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$ , așa încât,  $\forall x', x'' \in A$ , cu  $x' \neq x_0, x'' \neq x_0$  și  $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$ , avem:

$$\begin{aligned} \|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} &\leq \|f(x') - f_{n_\varepsilon}(x')\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n_\varepsilon}(x') - f_{n_\varepsilon}(x'')\|_{\mathbb{R}^q} + \\ &+ \|f_{n_\varepsilon}(x'') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

În consecință, potrivit Teoremei 9.3, există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Trecând acum la limită (cu  $x \rightarrow x_0$ ) în (\*), obținem că  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$$\left\| \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right\|_{\mathbb{R}^q} \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

De aici, rezultă că egalitatea  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$  are într-adevăr loc. ◀

**Teorema 12.3 (pentru transfer de continuitate)**

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  un șir de funcții uniform convergent, pe  $A$ , la o funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

- Dacă, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  este continuă în  $x_0 \in A$ , atunci și  $f$  este continuă în  $x_0$ .
- Dacă, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  este continuă pe o mulțime  $\tilde{A} \subseteq A$ , atunci la fel este și  $f$ , adică  $f \in \mathcal{C}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$ .

**Demonstrație:** a) Cum,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  este continuă în  $x_0 \in A$ , rezultă că există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ .

Astfel, deoarece  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ , prin aplicarea Teoremei 12.2, deducem că există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Deci  $f$  este continuă în  $x_0$ .

b) Faptul că,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  este continuă pe  $\tilde{A}$ , înseamnă că  $f_n$  este continuă în orice punct din  $\tilde{A}$ . Atunci, pe baza rezultatului de la a), rezultă că  $f$ , limita uniformă a șirului  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  pe  $\tilde{A}$ , este de asemenea continuă în orice punct al lui  $\tilde{A}$ . Prin urmare,  $f$  este continuă pe  $\tilde{A}$ . ◀

**Observație:** Convergența uniformă a unui șir de funcții constituie o condiție suficientă, nu și necesară, pentru transferul proprietăților de mărginire, existență a limitei într-un punct sau continuitate. Există șiruri de funcții mărginite sau continue care, deși converg numai punctual, au funcția limită cu aceeași proprietate.

Cât privește diferențiabilitatea (derivabilitatea) funcției limită, are loc următorul rezultat.

**Teorema 12.4 (pentru transfer de diferențiabilitate)**

Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  o mulțime mărginită, deschisă și convexă, iar  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  un șir de funcții diferențiabile Fréchet pe  $A$ . Dacă există un punct  $x_0 \in A$  așa încât șirul  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}^*}$  să fie convergent în  $\mathbb{R}^q$  și există  $L : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  astfel încât  $(df_n)(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} L(\cdot)$ , atunci există  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  așa încât  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ ,  $f$  este diferențiabilă Fréchet pe  $A$  și  $df = L$ .

**Demonstrație:** Cum, pentru orice  $m$  și  $n$  din  $\mathbb{N}^*$ , funcția  $(f_n - f_m)$  este diferențiabilă pe mulțimea nevidă, deschisă și convexă  $A$ , se poate vedea că,  $\forall x \in A$ , există  $\xi \in \{tx + (1-t)x_0 \mid t \in (0, 1)\} \subseteq A$ , astfel încât:

$$(**) \quad \|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|(df_n)(\xi) - (df_m)(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)} \cdot \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Într-adevăr, considerând funcția  $g_{n,m} : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$(!) \quad g_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^q [(f_{n,k}(x) - f_{m,k}(x)) - (f_{n,k}(x_0) - f_{m,k}(x_0))] (f_{n,k}(z) - f_{m,k}(z)), \forall z \in A,$$

unde  $f_n = (f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,q})$  și  $f_m = (f_{m,1}, f_{m,2}, \dots, f_{m,q})$ , se poate constata faptul că există  $\xi \in \{tx + (1-t)x_0 \mid t \in (0, 1)\}$  așa încât:

$$(!!) \quad g_{n,m}(x) - g_{n,m}(x_0) = (dg_{n,m}(\xi))(x - x_0).$$

Această relație (formulă de medie) rezultă prin aplicarea formulei lui Lagrange asupra funcției  $h_{n,m} : (-\omega, \omega + 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $h_{n,m}(s) = g_{n,m}(x_0 + s(x - x_0))$ ,  $\forall s \in (-\omega, \omega + 1)$ , unde  $\omega > 0$  este astfel încât  $\{x_0 + s(x - x_0) \mid s \in (-\omega, \omega + 1)\} \subseteq A$ . Întrucât  $h_{n,m}$  este continuă pe  $[0, 1]$  și derivabilă pe  $(0, 1)$ , există, potrivit teoremei de medie a lui Lagrange, un punct  $\sigma \in (0, 1)$  așa încât  $h_{n,m}(1) - h_{n,m}(0) = h'_{n,m}(\sigma)$ , adică:

$$g_{n,m}(x) - g_{n,m}(x_0) = h_{n,m}(1) - h_{n,m}(0) = h'_{n,m}(\sigma) = \sum_{k=1}^q \frac{\partial g_{n,m}}{\partial x_k}(x_0 + \sigma(x - x_0))(x_k - x_k^0) =$$

$$= \langle \nabla g_{n,m}(\mathbf{x}_0 + \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = (dg_{n,m}(\xi))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \text{ unde } \xi = \mathbf{x}_0 + \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Acum, folosind (!) în (!! ) și apelând la inegalitatea lui Cauchy, obținem:

$$\begin{aligned} & \| (f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})) - (f_n(\mathbf{x}_0) - f_m(\mathbf{x}_0)) \|_{\mathbb{R}^q}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^q [(f_{n,k}(\mathbf{x}) - f_{m,k}(\mathbf{x})) - (f_{n,k}(\mathbf{x}_0) - f_{m,k}(\mathbf{x}_0))]^2 = \\ &= g_{n,m}(\mathbf{x}) - g_{n,m}(\mathbf{x}_0) = (dg_{n,m}(\xi))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \\ &= \sum_{k=1}^q [(f_{n,k}(\mathbf{x}) - f_{m,k}(\mathbf{x})) - (f_{n,k}(\mathbf{x}_0) - f_{m,k}(\mathbf{x}_0))] \cdot d(f_{n,k} - f_{m,k})(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \\ &= \langle (f_n - f_m)(\mathbf{x}) - (f_n - f_m)(\mathbf{x}_0), d(f_n - f_m)(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle_e \leq \\ &\leq \| (f_n - f_m)(\mathbf{x}) - (f_n - f_m)(\mathbf{x}_0) \|_{\mathbb{R}^q} \cdot \| d(f_n - f_m)(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ &\leq \| (f_n - f_m)(\mathbf{x}) - (f_n - f_m)(\mathbf{x}_0) \|_{\mathbb{R}^q} \cdot \| d(f_n - f_m)(\xi) \|_{\mathbb{R}^q} \cdot \| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|_{\mathbb{R}^p}. \end{aligned}$$

De aici, prin simplificare, rezultă relația (\*\*).

Pe baza acestei relații, în virtutea ipotezelor de mărginire a mulțimii  $A$  și de uniformă convergență a șirului  $((df_n)(\xi))_{n \in \mathbb{N}^*}$  în  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ , dacă ținem seama de Propoziția 12.1, deducem faptul că șirul  $(f_n(\cdot) - f_m(\cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$  este uniform convergent pe  $A$ . Aceasta, întrucât,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, m \geq n_\varepsilon$ , avem:

$$\begin{aligned} & \| f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}_0) - (f_m(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x}_0)) \|_{\mathbb{R}^q} = \\ &= \| (f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})) - (f_n(\mathbf{x}_0) - f_m(\mathbf{x}_0)) \|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ &\leq \| (df_n)(\xi) - (df_m)(\xi) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)} \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \forall \mathbf{x} \in A. \end{aligned}$$

Drept urmare, deoarece  $f_n(\mathbf{x}) = f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}_0) + f_n(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x} \in A$ , iar  $(f_n(\mathbf{x}_0))_{n \in \mathbb{N}^*}$  este, prin ipoteză, un șir uniform convergent pe  $A$ . Există deci  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  așa încât  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f$ .

Astfel ținând seama iarăși de ipoteza convergenței uniforme, la  $L$ , a șirului  $(df_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q))$ , se poate spune că avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f_n(\mathbf{x}) - f_n(\tilde{\mathbf{x}}) - (df_n)(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|_{\mathbb{R}^p}} - \frac{f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) - L(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|_{\mathbb{R}^p}} \right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q},$$

$\forall \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in A, \mathbf{x} \neq \tilde{\mathbf{x}}$ . De aici, întrucât

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}} \frac{f_n(\mathbf{x}) - f_n(\tilde{\mathbf{x}}) - (df_n)(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că există

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) - L(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|_{\mathbb{R}^p}}$$

și această limită este egală cu  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ .

Ca atare, ținând seama de Definiția 10.6 și de observațiile de imediat după ea, conchidem că  $f$  este diferențiabilă Fréchet în punctul arbitrar  $\tilde{x}$  din  $A$  și, în plus,  $(df)(\tilde{x}) = L(\tilde{x})$ ,  $\forall \tilde{x} \in A$ . ◀

Cât privește transferul proprietății de integrabilitate (în sens Riemann), are loc următorul rezultat, a cărui demomstrație o vom lămuri în următoarele două secțiuni ( v. Cursurile 13 și 14).

**Teorema 12.5** Dacă  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  este o mulțime nevidă, închisă și mărginită, iar  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  un șir de funcții integrabile, în sens Riemann, pe  $A$ , astfel încât  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/A} f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , atunci  $f$  este Riemann-integrabilă pe  $A$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

În particular, când  $p = q = 1$  și  $A = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$  ( $\alpha < \beta$ ), iar  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^q)$  este un șir pentru care există  $\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/[\alpha, \beta]} f \in \mathcal{F}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^q)$ , atunci putem afirma că există și  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ , fiind adevărată relația:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .

### Serii de funcții

**Definiția 12.5** Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un șir din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , unde  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ . De asemenea, fie șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , unde  $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Perechea  $((f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$  se numește **serie de funcții** din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  și se notează prin  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  sau  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  sau  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sau  $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ .

**Definiția 12.6** O serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ , cu  $f_n \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  se numește **punctual (simplu) convergentă pe  $\tilde{A} \subseteq A$**  dacă și numai dacă șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , unde  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , este punctual (simplu) convergent pe  $\tilde{A}$ . Funcția  $S : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^q$ , pentru care  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p/\tilde{A}} S$ , se numește **suma punctuală a seriei de funcții**  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  și  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $\forall x \in \tilde{A}$ .

**Definiția 12.7** Seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  se numește **uniform convergentă pe  $\tilde{A} \subseteq A$**  dacă și numai dacă șirul asociat (al sumelor-funcții parțiale)  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent uniform pe  $\tilde{A}$ . În acest caz, elementul  $S \in \mathcal{F}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$ , pentru care  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/\tilde{A}} S$ , se numește **suma uniformă a seriei de funcții**  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  și  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ , uniform pe  $\tilde{A}$ .

**Definiția 12.8** O serie de funcții  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ , cu  $f_n \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , se numește **absolut convergentă într-un punct  $x_0 \in A$**  ( respectiv **pe o mulțime  $\tilde{A} \subseteq A$**  ) dacă seria numerică



$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^q}$  ( respectiv  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}$  ) este convergentă ( respectiv convergentă pentru orice  $x \in \tilde{A}$  ).

Ținând seama de aceste definiții, precum și de criteriul lui Cauchy de convergență uniformă a unui șir de funcții (vezi Propoziția 12.1), putem spune că studiul convergenței punctuale a unei serii de funcții  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ , cu  $f_n \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , se face pe baza studiului seriei numerice  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x)$ , cu  $x \in A$ , folosind criterii specifice pentru convergența unei astfel de serii, pe când convergența uniformă a seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  se poate aprecia potrivit următorului criteriu:

**Propoziția 12.4** Fie șirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  . Seria de funcții  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este uniform convergentă pe  $\tilde{A} \subseteq A$ , dacă și numai dacă șirul asociat  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (cu  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ ) este uniform fundamental pe  $\tilde{A}$ , adică dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ avem}$$

$$\|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall x \in \tilde{A}.$$

Caracterizarea situației în care seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  nu este uniform convergentă pe  $\tilde{A}$  se obține negând relația de mai sus. Astfel, se poate zice că seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  nu converge uniform pe  $\tilde{A}$  dacă și numai dacă există  $\varepsilon_0 > 0$ , așa încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , se găsesc  $k_n \in \mathbb{N}^*$  și  $p_n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $k_n \geq n$ , precum și  $\tilde{x} \in \tilde{A}$ , pentru care avem:

$$\|f_{k_n+1}(\tilde{x}) + f_{k_n+2}(\tilde{x}) + \cdots + f_{k_n+p_n}(\tilde{x})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0.$$

**Propoziția 12.5** Dacă seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  din  $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  este absolut convergentă într-un punct  $x_0 \in A$ , atunci ea este convergentă în respectivul punct.

**Demonstrație:** Deoarece seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este absolut convergentă în  $x_0$ , rezultă că seria numerică  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^q}$  este convergentă, ceea ce, potrivit criteriului general al lui Cauchy, înseamnă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , avem:

$$\|f_{n+1}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Dar, cum

$$\|f_{n+1}(x_0) + f_{n+2}(x_0) + \cdots + f_{n+p}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f_{n+1}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(x_0)\|_{\mathbb{R}^q},$$

se poate spune că,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , așa încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , are loc relația din enunțul Propoziției 12.4 pentru  $x = x_0$ . Drept urmare, seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este convergentă în punctul  $x_0$ . ◀

Unul dintre criteriile de convergență uniformă pentru serii de funcții, deosebit de util în practică, este cel din teorema care urmează.

**Teorema 12.6 (Criteriul lui Weierstrass)**

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ . Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , așa încât  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă și

$$(\#) \quad \|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in A,$$

atunci seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este absolut și uniform convergentă pe  $A$ .

**Demonstrație:** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  fiind convergentă, înseamnă că,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , avem:  $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} < \varepsilon$ . Atunci, în virtutea relației  $(\#)$ , rezultă că,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , așa încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , avem:

$$\begin{aligned} & \|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ & \leq \|f_{n+1}(x)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(x)\|_{\mathbb{R}^q} + \dots + \|f_{n+p}(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ & \leq u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} < \varepsilon, \forall x \in A. \end{aligned}$$

În conformitate cu Propoziția 12.4 și cu criteriul lui Cauchy de absolută convergență, deducem de aici că seria de funcții  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este absolut și uniform convergentă pe  $A$ .  $\blacktriangleleft$

**Observație:** De regulă, dacă  $\sup_{x \in A} \{\|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}\} < +\infty$ , se folosește criteriul lui Weierstrass (din Teorema 12.6), luând  $u_n = \sup_{x \in A} \{\|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci când  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  este convergentă.

Un alt criteriu de convergență uniformă (nu și absolută), pentru serii de funcții de forma  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n g_n$ , este următorul:

**Teorema 12.7 (Criteriul lui Dirichlet)**

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  și  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ . Dacă seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  are șirul sumelor parțiale mărginit uniform, iar șirul  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este monoton descrescător și uniform convergent la 0, atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n g_n$  este uniform convergentă.

**Demonstrație:** Cum șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , unde  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , este uniform mărginit, există  $M > 0$ , așa încât

$$(\bullet) \quad \|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A.$$

În același timp, deoarece  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este uniform convergent la 0 pe  $A$ , rezultă că,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$ , avem:  $|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ,  $\forall x \in A$ .

Ținând seama ce aceasta, de  $(\bullet)$  și de faptul că  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este monoton descrescător pe  $A$ , obținem:

$$\begin{aligned}
& \|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + f_{n+2}(x)g_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\|_{\mathbb{R}^q} = \\
& = \| (S_{n+1}(x) - S_n(x))g_{n+1}(x) + (S_{n+2}(x) - S_{n+1}(x))g_{n+2}(x) + \cdots \\
& \quad \cdots + (S_{n+p}(x) - S_{n+p-1}(x))g_{n+p}(x) \|_{\mathbb{R}^q} = \\
& = \| -S_n(x)g_{n+1}(x) + S_{n+1}(x)(g_{n+1}(x) - g_{n+2}(x)) + \cdots \\
& \quad \cdots + S_{n+p-1}(x)(g_{n+p-1}(x) - g_{n+p}(x)) + S_{n+p}(x)g_{n+p}(x) \|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
& \leq M[g_{n+1}(x) + g_{n+1}(x) - g_{n+2}(x) + \cdots + (g_{n+p-1}(x) - g_{n+p}(x) + g_{n+p}(x))] < \\
& < 2M \cdot g_{n+1}(x) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Potrivit Propoziție 12.4, conchidem că seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n g_n$  este uniform convergentă pe  $A$ . ◀

Tot pentru serii de forma  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n g_n$  există și criteriul lui Abel, în conformitate cu următorul rezultat.

**Teorema 12.8 (Criteriul lui Abel)**

Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și șirurile de funcții  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ ,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ . Dacă seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ , iar șirul  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  este uniform mărginit și monoton pentru orice  $x \in A$ , atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n g_n$  este uniform convergentă pe  $A$ .

**Demonstrație:** Șirul  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  fiind uniform mărginit și monoton pentru fiecare  $x \in A$ , există  $l_x = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ , cu  $l_x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in A$ . Dacă  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  este monoton descrescător, șirul  $(g_n - g)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , unde  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  este definită prin  $g(x) = l_x$ ,  $\forall x \in A$ , este convergent la 0, uniform (în ipotezele din enunț) pe  $A$ . În plus,  $(g_n - g)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ar fi și monoton descrescător. Scriind  $f_n g_n = f_n(g_n - g) + f_n g$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , ne dăm seama că, prin aplicarea Teoremei 12.7 și a faptului că  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este uniform convergentă pe  $A$  (ceea ce implică că șirul corespunzător al sumelor parțiale,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , este uniform mărginit), rezultă uniforma convergență a seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n g_n$ . ◀

Ca și în cazul șirurilor de funcții, convergența uniformă a seriilor oferă posibilitatea transferului de proprietăți (precum continuitatea, derivabilitatea și integrabilitatea) de la termenii seriilor în cauză la funcțiile-sumă ale lor. În acest caz, prin interpretarea adecvată a Teoremelor 12.1 - 12.5, are loc următorul rezultat, a cărui demonstrație se poate face pe baza proprietăților adecvate de transfer ale șirului sumelor parțiale în cauză.

**Teorema 12.9** 1) Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ , astfel încât seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ . Dacă, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  este mărginită pe  $A$  sau are limită într-un punct  $x_0 \in A$  sau este continuă într-un punct  $\tilde{x} \in A$  ori pe o mulțime  $\tilde{A} \subseteq A$  sau este integrabilă Riemann pe  $A$ , atunci și suma uniformă a seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este respectiv mărginită pe  $A$ , are limită

în  $x_0$ , este continuă în  $\tilde{x}$  ori pe  $\tilde{A}$  sau este integrabilă Riemann pe  $A$ , iar în acest din urmă caz integrala pe  $A$  din funcția sumă este egală cu suma seriei integralelor pe  $A$  din termenii  $f_n$ .

2) Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  o mulțime mărginită, deschisă și convexă, iar  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  un șir de funcții diferențiabile Fréchet pe  $A$ . Dacă seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} df_n$ , de elemente din  $\mathcal{F}(A; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q))$ , este uniform convergentă la  $\tilde{f} \in \mathcal{F}(A; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q))$  și există  $x_0 \in A$  încât seria numerică  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x_0)$  este convergentă, atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  este uniform convergentă, pe  $A$ , la o funcție  $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$  care este diferențiabilă Fréchet pe  $A$  și  $df = \tilde{f}$ .

Cazuri particulare ale seriilor de funcții reale sunt acelea ale seriilor de puteri și seriilor trigonometrice în  $\mathbb{R}$ , pe care le prezentăm în continuare.

## Serii de puteri în $\mathbb{R}$

**Definiția 12.9** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale și  $x_0 \in \mathbb{R}$ , fixat arbitrar. Seria de funcții  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ , în care  $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ ,  $\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , se numește **serie de puteri** (sau **serie întreagă**), în variabila  $x$ , **centrată în  $x_0$  și cu coeficienții  $a_n$** .

Numărul real  $a_n$  se numește **coeficientul termenului de rang  $n$  din seria de puteri**

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x - x_0)^n, x \in \mathbb{R}.$$

### Observații:

- Toate rezultatele stabilite pentru serii de funcții oarecari sunt aplicabile, desigur, și în cazul particular al seriilor de puteri.
- O chestiune de bază din studiul seriilor de puteri este determinarea mulțimilor de convergență punctuală, absolută și uniformă.
- Mulțimea de convergență punctuală a oricărei serii de puteri este nevidă, întrucât măcar  $x_0$  aparține respectivei mulțimi. Convenim să notăm cu  $A_{cp}$  mulțimea de convergență punctuală a unei serii de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x - x_0)^n$ .
- Prin schimbarea de variabilă  $x \longrightarrow y = x - x_0$ , se poate considera seria de puteri mai simplă (centrată în  $y_0 = 0$ )  $\sum_{n \in \mathbb{N}} y^n$ . Orice rezultat stabilit pentru această serie este adevărat, în mod corespunzător, și pentru seria inițială, așa încât, în continuare, ne concentrăm atenția asupra cazului în care  $x_0 = 0$ , adică asupra seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .

### Teorema 12.10 (Abel)

Pentru orice serie de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  există un element  $r \in [0, +\infty]$ , numit **rază de convergență** a seriei în cauză, astfel încât:

- i) dacă  $r = 0$ , seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este convergentă numai pentru  $x = 0$ , adică  $A_{cp} = \{0\}$ ;
- ii) dacă  $r > 0$ , atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este absolut convergentă pe intervalul  $(-r, r)$ ;
- iii) dacă  $0 < r < +\infty$ , atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este divergentă pe  $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ ;
- iv) dacă  $r = +\infty$ , atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este convergentă pe  $\mathbb{R}$ ;
- v) dacă  $r > 0$  și  $\rho \in (0, r)$ , atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este uniform convergentă pe orice interval  $[\alpha, \beta] \subseteq [-\rho, \rho]$ .

**Demonstrație:** Cum  $0 \in A_{cp}$  pentru orice serie de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , reiese că  $A_{cp} \neq \emptyset$ . Considerăm:

$$r = \sup \{|x| \mid x \in A_{cp}\}.$$

Este evident că  $r \in [0, +\infty]$ . Dacă  $r = 0$ , atunci  $A_{cp} = \{0\}$  și deci are loc i). Dacă  $r > 0$ , atunci, pentru orice  $|x_0| < r$ , există  $x_1 \in A_{cp} \setminus \{0\}$ , așa încât  $|x_0| < |x_1| < r$ . Cum  $x_1 \in A_{cp}$ , seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_1^n$  este convergentă și, ca urmare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$ . În consecință, există  $M > 0$ , astfel ca  $|a_n x_1^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ . Atunci:

$$|a_n x_0^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Întrucât  $\left| \frac{x_0}{x_1} \right| < 1$ , seria geometrică cu termenul general  $\left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n$  este convergentă și, pe baza acestui fapt, prin criteriul întâi de comparație, rezultă că seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n x_0^n|$  este convergentă, ceea ce înseamnă că

seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_0^n$  este absolut convergentă, oricare ar fi  $x_0 \in (-r, r)$ . Așadar, are loc ii). Dacă  $r = +\infty$ ,

raționamentul de mai înainte se poate relua, aplicându-se pentru orice  $x_1 \in \mathbb{R}$  și orice  $x_0 \in \mathbb{R}$ , cu  $|x_0| < |x_1|$ . Rezultă atunci faptul că seria de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este convergentă pe  $\mathbb{R}$  (deci  $A_{cp} = \mathbb{R}$ ).

Astfel, are loc și iv). Dacă  $r < \infty$  și seria nu ar fi divergentă pe  $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ , ar exista un punct  $x_2 \in \mathbb{R}$ , cu  $|x_2| > r$ , în care  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_2^n$  ar fi convergentă. De aici ar rezulta că  $r < \sup \{|x| \mid x \in A_{cp}\}$ ,

în contradicție cu definiția lui  $r$ . Așadar, și iii) are loc. În fine, în cazul v), cum  $0 < \rho < r$ , seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \rho^n$  este absolut convergentă, adică seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \rho^n$  este convergentă. Ca atare, pe baza Teoremei

12.6, deducem că seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este uniform convergentă pe  $[-\rho, \rho] \subseteq (-r, r)$  și, cu atât mai mult, pe orice subinterval  $[\alpha, \beta]$  al lui  $[-\rho, \rho]$ . ◀

**Observații:** Potrivit Teoremei 12.10, se poate spune că, pentru orice serie de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , avem:

$$(-r, r) \subseteq A_{cp} \subseteq [-r, r].$$

Dacă  $r = 0$ , atunci  $A_{cp} = \{0\}$ , iar dacă  $r = +\infty$ , atunci  $A_{cp} = \mathbb{R}$ .

Pentru găsirea mulțimii  $A_{cp}$ , se determină raza de convergență  $r$  și apoi se stabilește dacă  $x = -r$  și  $x = r$  sunt sau nu puncte de convergență ale seriei în cauză.

**Propoziția 12.6** Fie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  o serie de puteri și  $r$  raza ei de convergență.

j) Dacă există  $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , atunci:

$$r = \begin{cases} 0, & \text{când } l_1 = +\infty \\ l_1^{-1}, & \text{când } 0 < l_1 < +\infty \\ \infty, & \text{când } l_1 = 0 \end{cases}.$$

Altminteri, dacă nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , se menține relația de stabilire a lui  $r$ , în care, de astă dată,  $l_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

jj) Dacă există  $n_0 \in \mathbb{N}$  așa încât  $a_n \neq 0, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$  și există (în  $\overline{\mathbb{R}}$ )  $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ , atunci: fie  $r = l_2^{-1}$ , când  $0 < l_2 < \infty$ , fie  $r = 0$ , când  $l_2 = \infty$ , fie  $r = \infty$ , când  $l_2 = 0$ .

**Demonstrație:** j) Prin aplicarea criteriului rădăcinii asupra seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |x|^n$ , deducem că, dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n}$  și aceasta este subunitară, atunci seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este absolut (și, implicit) convergentă. Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , se poate spune că, dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l_1$ , atunci absolută convergență a (și, în consecință, convergența) seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  are loc pentru  $|x| < l_1^{-1}$ , atunci când  $0 < l_1 < \infty$ , sau doar pentru  $x = 0$ , când  $l_1 = +\infty$  și pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , când  $l_1 = 0$ . Altfel, dacă nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , atunci există cu siguranță  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  și seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  ar fi să fie absolut convergentă pentru orice  $x \in (-r, r)$ , unde  $r$  este dat de formula din enunț, în care, de astă dată, rolul lui  $l_1$  este jucat de  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  (*Cauchy-Hadamard*).

jj) În condițiile prezentei teoreme, seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n x^n|$  i se aplică criteriul raportului (*D' Alembert*).

Astfel, se obține convergența seriei de față, în situația în care  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$ . Cu alte cuvinte, atunci când  $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ . Prin urmare, luând în considerație  $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ , reiese că  $r = l_2^{-1}$ , atunci când  $0 < l_2 < \infty$ , ori  $r = 0$ , când  $l_2 = \infty$ , sau  $r = \infty$ , când  $l_2 = 0$ . ◀

**Propoziția 12.7** Orice serie de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , cu raza de convergență  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , are suma o funcție care este continuă pe  $(-r, r)$ .

**Demonstrație:** În virtutea Teoremei 12.10 v), seria din enunț este uniform convergentă pe orice subinterval compact  $[-\rho, \rho]$  al intervalului de convergență  $(-r, r)$  (cu  $0 < \rho < r$ ). Cum  $f_n(x) = a_n x^n$  sunt toate funcții continue pe  $[-\rho, \rho]$ , se poate aplica Teorema 12.3 (de transfer de continuitate), rezultând astfel că funcția  $f$ , sumă a seriei la care ne referim, este continuă pe  $[-\rho, \rho]$ ,  $\forall \rho \in (0, r)$ . Altfel spus,  $f$  este continuă pe  $(-r, r)$ . ◀

**Teorema 12.11 ( Abel )**

Fie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , cu raza de convergență  $r$ . Dacă seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este convergentă în punctul  $x = r$  (respectiv  $x = -r$ ), atunci suma sa, funcția  $f$ , este continuă în  $x = r$  (respectiv  $x = -r$ ).

**Demonstrație:** Admitem că seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  converge în  $x = r$ . Deci  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n$  este convergentă și, ca atare aici, uniform convergentă pe  $[0, r]$ . Cum șirul  $\left(\left(\frac{x}{r}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  este,  $\forall x \in [0, r]$ , monoton descrescător și uniform mărginit pe  $[0, r]$  (întrucât  $0 \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n \leq 1$ ,  $\forall x \in [0, r]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ), rezultă, potrivit criteriului lui Abel de convergență uniformă (v. Teorema 12.8), că seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , în care  $a_n x^n$  poate fi rescris, când  $x \in [0, r]$ , sub forma  $a_n r^n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n$ , este uniform convergentă pe  $[0, r]$ . Atunci, conform Teoremei 12.3, reiese că funcția sumă a seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este continuă pe  $[0, r]$  (prin transferul de continuitate pe  $[0, r]$  a funcțiilor termenilor  $a_n x^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ). La fel se face demonstrația pentru cazul în care locul lui  $r$  este luat de  $-r$ . ◀

**Teorema 12.12** Fie seria de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , cu raza de convergență  $r$ . Atunci:

a) Seriiile de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$  ( a derivatelor termenilor  $a_n x^n$  ) și  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  ( a integralelor de la 0 la  $x$  din termenii  $a_n x^n$  ) au tot raza de convergență  $r$ .

b) Dacă  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ ,  $\forall x \in (-r, r)$ , cu  $r > 0$ , atunci  $f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ ,  $\forall x \in (-r, r)$ , adică seria dată de puteri poate fi derivată, termen cu termen, pe intervalul deschis de convergență  $(-r, r)$ , iar

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall x \in (-r, r),$$

adică seria de puteri  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  poate fi integrată termen cu termen, pe orice interval  $[0, x]$ , unde  $x \in (-r, r)$ .

**Demonstrație:** a) Prin utilizarea Propoziției 12.6, în situația în care  $0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ , găsim:

$$r' = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r \text{ și}$$

$$r'' = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

La fel în celelalte două situații, în care este lesne de văzut că  $r' = r'' = r = 0$ , atunci când  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$  și respectiv că  $r' = r'' = r = \infty$ , atunci când  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ .

b) Cum seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} na_n x^{n-1}$  este uniform convergentă pe orice subinterval compact al intervalului  $(-r', r')$ , iar seria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este convergentă cel puțin în  $x = 0$ , rezultă, prin aplicarea Teoremei 12.9 b), că  $f$ , funcția sumă a seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  este derivabilă pe  $(-r, r)$  și, în plus,  $f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} na_n x^{n-1}$ ,  $\forall x \in (-r, r)$ , în mod uniform. În conformitate cu aceeași teoremă (punctul a)), funcția  $f$  este integrabilă de la 0 la  $x$ ,  $\forall x \in (-r, r)$  și, mai mult,  $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ,  $\forall x \in (-r, r)$ . ◀

### Observații:

- De fapt, prin Teorema 12.12, rezultă că  $f$ , suma seriei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ , este derivabilă de o infinitate de ori pe  $(-r, r)$  și are derivatele de orice ordin continue pe  $(-r, r)$ . Altfel spus, avem:  $f \in \mathcal{C}^\infty(-r, r)$ .
- Cum  $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in (-r, r)$ , deducem că are loc formula:  $f^{(k)}(0) = k! a_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .  
În virtutea acesteia, rezultă că dacă două serii de puteri,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  și  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ , au aceeași rază de convergență  $r$  și aceeași sumă  $f$  pe intervalul  $(-r, r)$ , atunci ele coincid, întrucât  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- Operațiile care se pot face cu serii de puteri respectă regulile din cazul general al seriilor de funcții și al seriilor numerice.
- Un caz particular important este cel al **seriei binomiale**, de expresie

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $\alpha \in \mathbb{N}$ , seria binomială se reduce la un polinom.

Când  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ , se constată că raza de convergență a seriei binomiale este  $r = 1$ , deoarece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1.$$

Dacă notăm cu  $f$  suma acestei serii și aplicăm Teorema 12.12, deducem, prin calcul direct, că:

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \forall x \in (-1, 1).$$



De aici, întrucât  $f(x) \neq 0$  pe  $(-1, 1)$  (căci, altfel, dacă ar exista  $x_0 \in (-1, 1)$  așa încât  $f(x_0) = 0$ , ar reieși faptul că  $f^{(k)}(x_0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$ , adică  $f(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$ , ceea ce ar fi imposibil, atâta timp cât  $f(0) = 1$ ), deducem că:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x+1}, \forall x \in (-1, 1).$$

Pe baza acestei relații, prin integrare, găsim:

$$\ln(f(x)) = \alpha \ln(x+1) + \ln c, \forall x \in (-1, 1), c > 0.$$

Prin urmare, avem  $f(x) = c(1+x)^\alpha, \forall x \in (-1, 1)$ , cu  $c = 1$ , deoarece  $f(0) = 1$ . În concluzie, are loc formula

$$(\Delta) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \forall x \in (-1, 1),$$

care generalizează, cu evidență, formula binomului lui Newton, adevărată pentru  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Astfel, denumirea de *serie binomială* se justifică.

Pentru diverse valori ale lui  $\alpha$  și diferite operații aplicate asupra formulei  $(\Delta)$ , se deduc sumele unor importante serii de puteri.

Un alt caz particular este cel al *seriilor MacLaurin* și al *seriilor Taylor*.

**Definiția 12.10** *i) Fie  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție indefinit derivabilă în  $0 \in \overset{\circ}{A}$ . Numim **serie MacLaurin atașată funcției  $f$ , în punctul 0**, seria de puteri*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in A.$$

*ii) Pentru  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcție derivabilă de orice ordin în  $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ , numim **serie Taylor asociată funcției  $f$ , în punctul  $x_0$** , seria de puteri:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, x \in A.$$

Firese, în legătură cu asemenea serii particulare de puteri, interesează care este mulțimea de convergență (punctuală, absolută și uniformă) și care le este suma. Nu, cumva, tot  $f$ ? În acest sens, are loc următorul rezultat:

**Propoziția 12.8** *Fie  $A$  un interval simetric față de  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $f \in C^\infty(A)$ . Dacă există  $M > 0$  așa încât  $|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci:*

$$(\nabla) \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \forall x \in A = (x_0-a, x_0+a).$$

**Demonstrație:** Folosind formula lui Taylor (cu rest de tip Lagrange), vedem că

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| = \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} a^{n+1},$$

$\forall x \in A = (x_0 - a, x_0 + a)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , cu  $a > 0$  și  $\xi = x_0 + \lambda(x - x_0)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , rezultă că formula  $(\nabla)$  are loc într-adevăr. Când  $x_0 = 0$ , în ipotezele din enunțul acestei propoziții, se ajunge la concluzia că are loc formula lui MacLaurin:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in (-a, a), a > 0.$$

◀

## Serii trigonometrice. Serii Fourier trigonometrice

**Definiția 12.11** *j) O serie de forma*

$$(\&) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in A \subseteq \mathbb{R},$$

unde  $l \in \mathbb{R}_+^*$ , iar  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$ , se numește **serie trigonometrică**.

jj) *Seria trigonometrică pentru care  $A = [-l, l]$ , iar, în raport cu o funcție dată  $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , coeficienții  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sunt dați de formulele*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

se numește **serie Fourier trigonometrică**. Coeficienții în cauză se numesc **coeficienți Fourier**.

În general, studiul seriilor trigonometrice se face cu ajutorul criteriilor de la seriile de funcții oarecare. Toate proprietățile de la serii de funcții sunt adevărate și pentru seriile trigonometrice. În plus, seriile trigonometrice au următoarele proprietăți specifice importante:

- 1) Dacă seria  $(\&)$  este convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pe un interval compact oarecare, de lungime  $2l$ , (de exemplu  $[-l, l]$ ), atunci ea este convergentă (respectiv uniform convergentă sau absolut convergentă) pe  $\mathbb{R}$ , iar suma ei este o funcție periodică de perioadă  $2l$ .
- 2) Dacă șirurile  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$  sunt monotone și converg la 0, atunci seria  $(\&)$  este convergentă pe  $\mathbb{R} \setminus \{2kl, k \in \mathbb{Z}\}$  și uniform convergentă pe orice interval compact ce nu conține puncte de forma  $2kl$ , cu  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 3) (**Criteriul lui Dirichlet**) Dacă funcția  $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  este monotonă pe porțiuni, pe  $[-l, l]$  și are, în acest interval, cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate care sunt de prima speță, atunci seria Fourier trigonometrică asociată lui  $f$  converge, în fiecare punct  $x_0 \in [-l, l]$ , către  $\frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$ . În particular, dacă  $f$  este continuă pe  $[-l, l]$ , atunci suma seriei Fourier în cauză este chiar  $f$ .
- 4) Dacă  $f$  este o funcție pară, adică  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [-l, l]$ , atunci  $b_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- 5) Dacă  $f$  este impară pe  $[-l, l]$ , adică  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in [-l, l]$ , atunci  $a_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  și  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

De exemplu, pentru  $l = \pi$  și  $f(x) = x^2$ , avem  $b_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & \text{când } n = 0 \\ \frac{4}{n^2}(-1)^n, & \text{când } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Folosind criteriul lui Dirichlet de mai sus, deducem că:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De aici, în particular, pentru  $x = \pi$ , găsim relația

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2},$$

pe baza căreia obținem faptul că seria numerică  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  are suma  $\frac{\pi^2}{6}$ .

## Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 10)*, Editura Polirom, Iași, 1998.
2. V. Postolică - *Eficiență prin matematică aplicată. Analiză matematică (Cap. 10, 11 și 12)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
3. Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferențial (Cap. 3)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
4. E. Macovei, F. Iacob - *Matematică pentru anul I - ID (Tema 6)*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 2005.
5. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis (Chap. 4)*, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2010.
6. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura "Fair Partners", București, 2011.
7. Sang-Gu Lee a.a.- *Calculus*, KM Kyung Moon SA, Science & Math, Amazon, 2014.

**8.** Steven Heilman - *Sequences and Series of Functions. Convergence*, UCLA Department of Mathematics, Los Angeles, 2015.

**9.** M. Deisenroth, M. Cheraghchi - *Mathematical Methods (Chap.4:Power Series)*, Imperial College London, Department of Computing, 2016.