Cursul 13

Integrale ale funcţiilor reale scalar-scalare

Necesităţi practice legate fie de determinarea matematică a stării unui proces dinamic căruia îi este cunoscută viteza de evoluţie, fie de calculul unor caracteristici numerice de ordin geometric (precum lungimi, arii şi volume), fizic (ca, de exemplu, momente de inerţie, valori de potenţiale şi lucru mecanic), deterministic (coordonate de poziţie ori centre de greutate) sau probabilist-stochastic (densităţi de probabilitate, medii şi dispersii pentru variabile aleatoare continue) ale anumitor entităţi pot fi soluţionate, în dese rânduri, prin folosirea adecvată a noţiunii de integrală. Amintind aici despre integrala nedefinită şi despre integrala Riemann a unei funcţii reale scalar-scalare, avem în vedere încă tipurile de integrale improprii (pe intervale nemărginite sau din integranzi nemărginiţi), cât şi integralele cu parametri, între care funcţiile Γ (gamma) şi B (beta), ale lui Euler, sunt prezentate, pe scurt, în final.

Integrale nedefinite. Primitive

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : I \to \mathbb{R}$.

Definiţia 13.1 *a) O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **primitivă** (pe intervalul I) a funcţiei f dacă F este derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.*

*b) Dacă f are cel puţin o primitivă pe I, atunci f se numeşte **funcţie primitivabilă** pe I şi acest fapt se notează prin $f \in \mathcal{P}(I)$.*

*c) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$, atunci mulţimea tuturor primitivelor (pe I) ale funcţiei f poartă denumirea de **integrala nedefinită a lui f pe I** şi se notează cu $\displaystyle\int f(x)\,dx$.*

Observaţii:

i) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$ şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f (pe I), atunci toate primitivele funcţiei f sunt de forma $F + c$, unde c este o constantă reală. Aceasta deoarece, oricare altă primitivă (decât F) a lui f are derivata egală cu a lui F (adică f) pe I şi deci diferă de F printr-o constantă (reală) c. Aşadar: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $\forall\, x \in I$.

ii) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci ea este o primitivă (pe I) a funcţiei f' şi deci $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$, $\forall\, x \in I$, unde c este o constantă reală arbitrară.

iii) Determinarea unei primitive F, a lui f, pe intervalul I, se numeşte (operaţie de) ***integrare*** a lui f pe I. Integrarea este "inversa" operaţiei de diferenţiere a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$, cu primitiva $F : I \to \mathbb{R}$, deoarece avem:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + c\right) = (F + c)'\,(x)\,dx = F'(x)dx = f(x)dx \text{ şi}$$

$$\int d(F(x) + c) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c, \forall\, x \in I, c \in \mathbb{R}.$$

iv) Mulţimea $\mathcal{P}(I)$ (a funcţiilor primitivabile pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$) este nevidă, întrucât orice funcţie continuă pe I are primitive pe I, adică $\varnothing \neq C(I;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(I)$. În plus, din punct de vedere algebric, $\mathcal{P}(I)$ este un subspaţiu liniar real al spaţiului vectorial (peste $\mathbb{R}$) $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, deoarece, pentru orice $f, g \in \mathcal{P}(I)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}(I)$ şi

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx, \text{ pe } I.$$

v) $\mathcal{P}(I)$ este parte a mulţimii funcţiilor f care au proprietatea lui Darboux pe I ($\forall\, x_1, x_2 \in I$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ cuprins strict între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, $\exists\, \widetilde{x}$ din intervalul deschis cu extremităţile x_1 şi x_2, astfel încât $f(\widetilde{x}) = \lambda$). Aceasta întrucât, fiind derivată a oricăreia dintre primitivele sale, o funcţie $f \in \mathcal{P}(I)$ are, în mod necesar, proprietatea menţionată. Prin urmare, dacă o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci ea nu este primitivabilă pe I.

Ca ***metode de calcul pentru primitive***, indicăm folosirea tabelului integralelor nedefinite ale unor funcţii elementare, integrarea prin părţi, integrarea prin transformări algebrice şi trigonometrice, integrarea prin substituţii şi utilizarea, în anumite cazuri, a unor formule de recurenţă.

Tabelul specificat cuprinde următoarele ***primitive uzuale***:

$$\int x^{\alpha}\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln|x|, & \alpha = -1 \end{cases} + c, x \in I \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c; \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x\, dx = \sin x + c, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{ch} x + c; \int \operatorname{ch} x\, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{sh} x + c, \ x \in I.$$

Integrarea prin părţi, aplicabilă ori de câte ori avem de-a face cu două funcţii f şi $g : I \to \mathbb{R}$, derivabile şi cu derivatele f' şi respectiv g' continue pe I, se face în conformitate cu formula

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx, \ x \in I,$$

care, în virtutea relaţiilor $f'(x)dx = (df)(x)$, $g'(x)dx = (dg)(x)$ şi $d(fg) = f(dg) + g(df)$, pe I, poate fi redată şi prin:

$$\int g(x)(df)(x) = f(x)g(x) - \int f(x)(dg)(x), \ x \in I.$$

Aplicarea acestei formule permite, de exemplu, între altele, completarea tabelului de primitive imediate cu următoarele integrale nedefinite:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}_+^*, \ |x| < a, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, \ a \in \mathbb{R}^*, \ x \in I, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c, x \in I \subseteq \mathbb{R}_+^*, \; c \in \mathbb{R}.$$

Tot integrarea prin părţi este recomandată, ca metodă de calcul, în cazul integralelor de forma

$$\int P_n(x) f(x) \, dx,$$

unde $P_n \in \mathbb{R}[X]$ şi f este una dintre funcţiile elementare e^x, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, a^x, $\log_a x$ etc. Prin aplicarea acestei metode, se reduce treptat, cu câte o unitate la fiecare utilizare (repetată) a integrării prin părţi, gradul polinomului P_n $(n \in \mathbb{N})$.

Metoda transformărilor algebrice se foloseşte, cu precădere, pentru calculul primitivelor unor funcţii raţionale, de forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde P şi Q sunt din $\mathbb{R}[X]$, definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, cu $\mathring{I} \neq \varnothing$ şi $Q(x) \neq 0$ pe I. Cum, potrivit unui rezultat cunoscut din algebră, orice funcţie raţională se descompune, în mod unic, într-o sumă de fracţii raţionale "simple", în conformitate cu formula

$$(*) \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum\nolimits_1 \frac{A_{k,m}}{(x - x_k)^m} + \sum\nolimits_2 \frac{B_{k,m} x + C_{k,m}}{(x^2 + p_k x + q_k)^m}, \; x \in I,$$

în care G este un polinom (nul, când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), H tot un polinom (cu gradul strict mai mic decât gradul lui Q şi identic cu P, atunci când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), $\sum_1$ este o sumă relativă la toate rădăcinile reale x_k (simple şi multiple) ale lui Q, iar $\sum_2$ se raportează la toate rădăcinile complexe (simple şi multiple) ale lui Q (cu $p_k, q_k \in \mathbb{R}$, aşa încât $p_k^2 - 4q_k < 0$), integrarea lui f revine la determinarea primitivelor tuturor componentelor din suma de descompunere $(*)$.

În cazul în care polinomul Q are rădăcini multiple, calculul primitivei funcţiei raţionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se mai poate face şi prin ***metoda lui Gauss-Ostrogradski***, bazată pe formula

$$(**) \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \, dx, \; x \in I,$$

unde $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor Q şi Q' (derivata lui Q), $Q_2 = \dfrac{Q}{Q_1}$, iar P_1 şi P_2 sunt polinoame care au gradul cu o unitate mai mic decât $\operatorname{grad} Q_1$ şi respectiv $\operatorname{grad} Q_2$, determinarea lor realizându-se prin derivarea relaţiei $(**)$, adică pe baza relaţiei

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x) Q_1(x) - P_1(x) Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \; x \in I,$$

prin identificare şi aflare, în acest mod, a coeficienţilor (iniţial necunoscuţi ai) lui P_1 şi P_2.

Metoda transformărilor trigonometrice, adeseori combinată cu ***metoda substituţiilor***, se foloseşte pentru calculul primitivelor unor funcţii în ale căror expresii sunt prezente funcţii trigonometrice.

În cazul ***integralelor trigonometrice*** de forma

$$\int E(\sin x, \cos x) \, dx, \; x \in I = (-\pi, \pi),$$

unde E este o funcţie raţională de două variabile, se foloseşte, în general, substituţia $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, care, pe baza relaţiilor $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, conduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în variabila t. Calculul integralei $\int E(\sin x, \cos x) \, dx$ poate fi simplificat, evitându-se utilizarea substituţiei standard $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, în următoarele trei cazuri:

1. $E(-\sin x, \cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\sin x$, recomandată fiind folosirea substituţiei $\cos x = t$.

2. $E(\sin x, -\cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\cos x$ şi atunci se face substituţia $\sin x = t$.

3. $E(-\sin x, -\cos x) = E(\sin x, \cos x)$, adică E este pară (simultan) în $\sin x$ şi $\cos x$, făcându-se substituţa $\operatorname{tg} x = t$.

Tot substituţii se practică şi pentru calculul unor ***integrale*** (aşa-numite) ***iraţionale,*** întru reducerea lor la integrale din funcţii raţionale. Este cazul ***substituţiilor lui Euler***, folosite pentru integrale de forma

$$\int E\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,\ x \in I,$$

cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, aşa încât $ax^2 + bx + c \geq 0$, $\forall\, x \in I$ şi E o expresie raţională de două variabile reale. Se face trecerea de la variabila x la variabila t, în conformitate cu una din următoarele trei situaţii şi relaţii corespunzătoare:

i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, când $a > 0$;

ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, când $c > 0$;

iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_0)$, când $b^2 - 4ac > 0$,

unde x_0 este o rădăcină (din $\mathbb{R}$) a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$.

Pentru ***integrale iraţionale de forma***

$$\int E\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx,\ x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

în care E este o funcţie raţională de $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, $cx + d \neq 0$, $\forall\, x \in I$, $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, $\forall\, x \in I$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, se utilizează (în scopul calculului) substituţia $x \to t$, dată de relaţia $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^{q_0}$, unde q_0 este cel mai mic multiplu comun al numerelor $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Substituţiile lui Cebîşev se folosesc pentru calculul integralelor care, cunoscute sub denumirea de ***integrale binoame***, sunt de forma

$$\int x^p(ax^q+b)^r\, dx,\ x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ şi $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Calculul unor asemenea integrale se reduce la calculul primitivelor pentru funcţii iraţionale, doar în următoarele trei cazuri:

j) $r \in \mathbb{Z}$, când se face substituţia $x = t^m$, cu m cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui p şi q;

jj) $\dfrac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$, situaţie în care se face substituţia $ax^q + b = t^l$, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este numitorul lui r.

jjj) $\dfrac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$, caz în care se face substituţia $a + bx^{-q} = t^l$, l fiind numitorul lui r.

Calculul integralelor de forma

$$\int E\left(a^{r_1 x}, a^{r_2 x}, \ldots, a^{r_n x}\right) dx,$$

unde $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$, iar E este o funcţie raţională, de n ($n \in \mathbb{N}^*$) variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$, se poate face pe baza substituţiei $a^x = t^\nu$, unde $t > 0$, şi ν este cel mai mic multiplu comun al numitorilor numerelor $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Atragem atenţia asupra faptului că există şi o serie de primitive care nu se pot exprima prin combinaţii liniare finite de funcţii elementare. Este cazul ***integralelor eliptice***, adică al integralelor de forma

$$\int \sqrt{(1 - a^2 \sin^2 x)^{\pm 1}}\, dx, \text{ cu } a \in (0,1) \text{ şi } x \in I_a \subseteq \mathbb{R}$$

precum şi al următoarelor integrale:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ (sinusul integral)}, \int \frac{\cos x}{x}\, dx \text{ (cosinusul integral)},$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ (logaritmul integral)}, \int \frac{e^x}{x}\, dx \text{ (exponenţialul integral)},$$

$$\int e^{-x^2}\, dx \text{ (primitiva lui Poisson)}, \int \cos(x^2)dx \text{ şi } \int \sin(x^2)\, dx \text{ (primitivele lui Fresnel)}.$$

Integrala definită (în sens Riemann)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definiţia 13.2 *1) Se numeşte **diviziune (divizare) a intervalului compact** $[a,b]$, notată prin Δ, o mulţime finită şi ordonată crescător de elemente $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, cu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Elementele x_i, $i = \overline{0,n}$ se numesc **puncte ale diviziunii** Δ, iar $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n-1}$) se numesc **intervale parţiale ale diviziunii** Δ.*

2) Numărul notat cu $\|\Delta\|$ (sau cu $\nu(\Delta)$) şi definit prin

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

*se numeşte **norma diviziunii** Δ.*

*3) O **diviziune** Δ a intervalului $[a,b]$ se numeşte **echidistantă** dacă $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, caz în care avem $\|\Delta\| = \dfrac{b-a}{n}$ şi $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, i = \overline{0,n}$.*

De regulă, ***mulţimea tuturor diviziunilor unui interval compact*** $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{D}[a,b]$ şi, pe ea, se poate defini o ***relaţie*** binară (***de "fineţe"***), ce se dovedeşte a fi una de ordine parţială, în modul următor: $\forall\, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a,b]$ spunem că Δ_2 ***este mai fină decât*** Δ_1, şi notăm $\Delta_1 \subset \Delta_2$, dacă Δ_2 conţine cel puţin un element în plus faţă de Δ_1. Este lesne de văzut atunci că, $\forall\, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a,b]$, $\exists\, \Delta (= \Delta_1 \cup \Delta_2)$ astfel încât $\Delta_1 \subset \Delta$ şi $\Delta_2 \subset \Delta$.

Definiţia 13.3 *a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ din $\mathcal{D}[a,b]$. Mulţimea $\xi_\Delta = \{\xi_i \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}\}$, adică mulţimea n-uplelor $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, unde ξ_i este arbitrar ales din intervalul parţial $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ se numeşte **mulţime a punctelor intermediare asociate diviziunii** Δ.*

*b) Numim **sumă Riemann** a funcţiei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, în raport cu o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ şi cu $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, numărul*

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

unde x_i sunt punctele diviziunii $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Definiţia 13.4 *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **integrabilă, în sens Riemann, pe intervalul compact** $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), dacă există un număr real I, astfel încât, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există δ_ε, în raport cu care, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, să avem $|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_Δ. Se mai spune că f este **$\mathcal{R}$-integrabilă pe** $[a, b]$.*

*Numărul I se numeşte, atunci, **integrala Riemann a lui f pe** $[a, b]$ şi se poate vedea că este unic determinat. El se notează cu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (sau cu $(\mathcal{R})\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ori prin $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx$).*

Mulţimea tuturor funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile (Riemann-integrabile) pe un interval compact $[a, b]$ din $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{R}[a, b]$.

Propoziţia 13.1 *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{B}[a, b]$, unde $\mathcal{B}[a, b]$ înseamnă mulţimea tuturor funcţiilor $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ care sunt mărginite pe $[a, b]$.*

(Cu alte cuvinte, orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, integrabilă în sens Riemann pe un interval compact $[a, b]$ din $\mathbb{R}$ este, în mod necesar, mărginită pe $[a, b]$).

Demonstraţie: Cum $f \in \mathcal{R}[a, b]$, există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât, în conformitate cu Definiţia 13.4, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $\forall\, \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, avem $|\sigma_f(\Delta, \xi) - I| < \varepsilon$, adică

$$(\,!\,) \qquad I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon.$$

Fixând $\varepsilon = 1$ şi $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ (cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$), lăsăm ξ_1 să varieze în $[x_0, x_1]$, iar pe $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ le menţinem, pe moment, constante. Atunci, din (!), deducem că avem

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\left[I - 1 - \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right] < f(\xi_1) < \frac{1}{x_1 - x_0}\left[I + 1 - \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right],$$

$\forall\, \xi_1 \in [x_0, x_1]$. Deci funcţia f este mărginită pe intervalul parţial al lui Δ $[x_0, x_1]$.

În mod analog, se arată că f este mărginită şi pe celelalte intervale $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Astfel, reiese că $f \in \mathcal{B}[a, b]$. ◀

Observaţie: O consecinţă directă a Propoziţiei 13.1 este aceea potrivit căreia, dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) nu este mărginită pe intervalul (compact) $[a, b]$, atunci ea nu este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[a, b]$.

Există însă şi funcţii mărginite pe un interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, care nu sunt din $\mathcal{R}[a, b]$. De exemplu, funcţia lui Dirichlet, $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, dată prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

O condiţie necesară şi suficientă de Riemann-integrabilitate pentru funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se obţine caracterizând limita I, prin sume Riemann $\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$, pe baza condiţiei Cauchy (de existenţă a unei limite). Astfel, are loc următorul rezultat:

Teorema 13.1 *(de caracterizare Cauchy a integrabilităţii Riemann)*

Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $\xi', \xi'' \in \xi_\Delta$, avem $\left|\sigma_f(\Delta, \xi') - \sigma_f(\Delta, \xi'')\right| < \varepsilon$.

Prin folosirea Teoremei 13.1, se pot pune în evidenţă următoarele ***proprietăţi ale funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile pe intervale compacte din*** $\mathbb{R}$, reunite în cadrul propoziţiei imediat enunţate aici:

Propoziţia 13.2 *i) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[c,d]$, oricare ar fi subintervalul $[c,d]$ al lui $[a,b]$.*

ii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a,b)$. Dacă $f \in \mathcal{R}[a,c]$ şi $f \in \mathcal{R}[c,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

iii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc relaţia:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

iv) Dacă $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

v) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc inegalitatea ("Cauchy-Schwarz-Buniakowski" pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile):

$$(\,!!\,) \qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

vi) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $|f(x)| \ge \mu > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

vii) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ şi

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(Aşadar, $\mathcal{R}[a,b]$ este, în raport cu adunarea funcţiilor reale scalar-scalare şi cu înmulţirea acestora cu scalari reali, un spaţiu liniar).

viii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Observaţii:

a) Similar situaţiei de la sisteme finite de numere reale, inegalitatea (!!) are, drept generalizare, inegalitatea lui Hölder pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile şi anume:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$\forall\, f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ şi $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{R}[a,b]$.

b) Ţinând seama de viii) din Propoziţia 13.2, se deduce monotonia integralei Riemann, în sensul că, $\forall\, f, g \in \mathbb{R}[a, b]$, cu proprietatea că $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, avem:

$$(\bullet) \qquad \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

c) Convenind ca, pentru $f \in \mathcal{R}[a, b]$, să definim $\int_a^b f(x)\, dx$ ca fiind $-\int_b^a f(x)\, dx$, rezultă:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

d) Având în atenţie relaţia $(\bullet)$, se poate vedea că, dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$, unde $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$.

Dacă, în plus, $f \in C[a, b]$, atunci, deoarece $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \leq M$ şi f, ca funcţie continuă pe $[a, b]$, îşi atinge marginile (m şi M), având proprietatea lui Darboux, există $c \in [a, b]$, astfel încât $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}$, adică are loc formula de medie:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe $[a, b]$, se pot defini ***sumele Darboux*** (***corespunzătoare lui*** f ***şi unei diviziuni*** $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ ***arbitrare***), ***inferioară*** şi respectiv ***superioară***, prin

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ şi } S_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

unde $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ şi $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Notând elementul $\sup\limits_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} s_f(\Delta)$ cu $\underline{I}$ şi $\inf\limits_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} S_f(\Delta)$ cu $\overline{I}$, numim $\underline{I}$ ***integrala Darboux inferioară a lui*** f ***pe*** $[a, b]$, iar $\overline{I}$ ***integrala Darboux superioară a lui*** f ***pe*** $[a, b]$. Folosind aceste elemente, se poate pune în evidenţă următorul ***criteriu*** (***al lui Darboux***) ***pentru stabilirea*** $\mathcal{R}$***-integrabilităţii lui*** f ***pe*** $[a, b]$.

Teorema 13.2 *O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, mărginită pe $[a, b]$, este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, ceea ce echivalează cu:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] \textit{ astfel încât } S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Valoarea comună a elementelor $\underline{I}$ şi $\overline{I}$ este, atunci când are loc relaţia $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, tocmai $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Pe baza oricăruia dintre criteriile de $\mathcal{R}$-integrabilitate formulate de Teoremele 13.1 (*criteriul lui Cauchy*) şi 13.2 (*criteriul lui Darboux*), se pun în relief ***categorii de funcţii ce sunt integrabile Riemann pe intervale compacte din*** $\mathbb{R}$. Are loc, astfel, rezultatul ce urmează.

Teorema 13.3 *Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

a) Dacă $f \in \mathcal{C}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

b) Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ (sau pe porţiuni, pe $[a, b]$, intervalul $[a, b]$ putându-se scrie ca o reuniune finită de intervale $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_k, b]$, astfel încât, pe fiecare dintre ele, f este monotonă, nu neapărat de acelaşi fel), atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

*c) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dacă şi numai dacă $f \in \mathcal{B}[a, b]$ şi f este continuă "aproape peste tot" pe $[a, b]$, adică $f \in \mathcal{C}([a, b] \setminus E)$, unde $E \subseteq [a, b]$ este o mulţime "neglijabilă" (de măsură Lebesgue nulă)(*criteriul lui Lebesgue de $\mathcal{R}$-integrabilitate*).*

(O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *neglijabilă* sau *de măsură Lebesgue nulă* dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, există un şir de intervale $(J_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, aşa încât $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} J_n^\varepsilon$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} l(J_n^\varepsilon) < \varepsilon$, unde $l(J_n^\varepsilon)$ înseamnă lungimea intervalului J_n^ε, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.)

Propoziţia 13.3 *Fie $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi, $\forall\, x \in [a, b]$, în virtutea afirmaţiei i) din Propoziţia 13.2, fie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dată de relaţia: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a, b]$. Au loc următoarele concluzii:*

a) $F \in \mathcal{C}[a, b]$. Mai mult, $\exists\, L > 0$, aşa încât

$$|F(x) - F(\widetilde{x})| \leq L|x - \widetilde{x}|, \forall\, x, \widetilde{x} \in [a, b].$$

b) Dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in [a, b]$, atunci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$. Dacă $f \in \mathcal{C}[a, b]$, atunci F este o primitivă a lui f şi deci $f \in \mathcal{P}[a, b]$.

Demonstraţie: a) Cum $f \in \mathcal{R}[a, b]$, avem: $f \in \mathcal{B}[a, b]$ (în virtutea Propoziţiei 13.1). Există deci $L \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât $|f(t)| \leq L$, $\forall\, t \in [a, b]$. Atunci:

$$|F(x) - F(\widetilde{x})| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{\widetilde{x}} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{\widetilde{x}}^x f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{\widetilde{x}}^x |f(t)|\,dt \leq \int_{\widetilde{x}}^x L\,dt = L \cdot |x - \widetilde{x}|, \forall\, x, \widetilde{x} \in [a, b].$$

Deci F este lipschitziană pe $[a, b]$ şi, în consecinţă, $F \in \mathcal{C}[a, b]$.

b) Avem:

$$(\bullet\bullet) \qquad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|} \int_a^x |f(t)-f(x_0)|\, dt, \forall\, x \in [a,b] \setminus \{x_0\}.$$

Cum f este continuă în x_0, putem conta pe faptul că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, t \in [a,b]$, cu $|t-x_0| < \delta_\varepsilon$, avem: $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$. Folosind acest lucru în (••), obţinem că

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \text{ astfel încât, } \forall\, x \in [a,b], \text{ cu } |x-x_0| < \varepsilon,$$

rezultă:

$$\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Ca atare, există $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, adică F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

Când $f \in \mathcal{C}[a,b]$, înseamnă că $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in [a,b]$. Deci F este derivabilă pe $[a,b]$ şi $F' = f$, pe $[a,b]$. Altfel spus, F este o primitivă a lui f şi, astfel, $f \in \mathcal{P}[a,b]$. ◄

Calculul integralelor definite pentru funcţii $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se face, atunci când $f \in \mathcal{P}[a,b]$, pe baza ***formulei lui Leibnitz-Newton***

$$(\ \#\ ) \quad \int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f pe $[a,b]$.

Conform Propoziţiei 13.3, b), formula (#) are sens când $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

Tot pentru calculul unei integrale definite (în sens Riemann) dintr-o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pentru care există $\int_a^b f(x)\, dx$, se mai poate folosi metoda ***schimbării de variabilă***, potrivit formulei

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx,$$

când $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$, iar $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];[a,b])$ sau în conformitate cu formula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t)\psi'(t)\, dt,$$

când $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ şi $\psi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];[a,b])$, ψ fiind bijectivă.

La fel de bine, atunci când este posibil, se foloseşte şi formula de integrare prin părţi pentru calcule de integrale definite. Aceasta se exprimă prin relaţia

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx,$$

ori de câte ori f şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $[a,b]$ şi cu $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$ (în particular, când $f, g \in \mathcal{C}^1[a,b]$).

După cum am menţionat, fără demonstraţie, în Cursul 12, pentru un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ care este uniform convergent, pe $[a,b]$, la o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, are loc un transfer de integrabilitate (Riemann), de la f_n la f, în conformitate cu următorul enunţ.

Propoziţia 13.4 *Dacă* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ *este un şir de funcţii uniform convergent, pe* $[a,b]$*, la* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*, atunci* $f\in\mathcal{R}[a,b]$ *şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Demonstraţie: Aplicarea Teoremei 12.3, de transfer de continuitate, ne conduce la o primă concluzie: $f\in\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Atunci, prin Teorema 13.3, a), rezultă: $f:\mathcal{R}[a,b]$. Cum f_n şi f sunt continue pe $[a,b]$, există $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\in\mathbb{R}$. Şi, pentru că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[a,b]} f$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$. Deci, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, are loc relaţia: $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. În acest fel, constatăm că, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\geq n_\varepsilon$, avem:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Aşadar, există $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx$ şi este egală cu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. ◀

De fapt, ţinând seama de aproximarea funcţiilor din $\mathcal{R}[a,b]$ prin funcţii din $\mathcal{C}[a,b]$, se poate afirma că transferul de integrabilitate (în sens Riemann) are loc şi într-un caz mai general, în care şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subseteq\mathcal{R}[a,b]$ converge uniform pe $[a,b]$ la $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se justifică astfel, acum, Teorema 12.5. În mod firesc, pe baza şirului sumelor parţiale, acest rezultat se manifestă şi la nivelul seriilor de funcţii, uniform convergente pe $[a,b]$. Este justificat deci şi rezultatul din Teorema 12.9, a).

Integrale improprii

O extindere naturală a integralei Riemann, integrală în legătură cu care, atât intervalul de integrare, cât şi funcţia de integrat, adică integrandul, au fost considerate mărginite, este aceea constituită de ***integralele improprii*** (fie din pricina nemărginirii domeniului de integrare, fie din cauza faptului că funcţia de integrat este nemărginită). ***Integralele pe intervale nemărginite*** sunt acelea în care cel puţin una dintre limitele de integrare este infinită, adică de forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ sau } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integralele din funcţii nemărginite sunt acelea de forma $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, unde $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este nemărginită cel puţin în vecinătatea unui punct din (a,b). Atât integralele pe intervale nemărginite, cât şi integralele din funcţii nemărginite pot fi privite ca ***integrale pe intervale necompacte***.

Definiţia 13.5 *Fie* $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie definită pe mulţimea* $A=(\alpha,\beta)\setminus\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1}\}$*, unde* $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1}\in(\alpha,\beta)$ *şi* $\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{n-1}$*. De asemenea, prin notaţie, fie* $\gamma_0=\alpha$ *şi* $\gamma_n=\beta$*.*

Dacă f *este* ***integrabilă local*** *(în sens Riemann) pe* A*, adică* f *este integrabilă pe orice interval compact inclus în* A*, iar funcţia* $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$*, definită prin*

$$F(u_0,v_0,u_1,v_1,\ldots,u_{n-1},v_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx, \forall\, u_i,v_i\in(\gamma_i,\gamma_{i+1}), \forall\, i=\overline{0,n-1},$$

are o limită finită când $(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}) \longrightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, *atunci* ***valoarea acestei limite se ia ca definiţie a integralei lui*** f ***pe intervalul*** (α, β) . *Se spune, în acest caz, că* ***funcţia*** f ***este integrabilă impropriu (generalizat)*** *pe* (α, β) *ori, prin analogie cu termenul corespunzător din teoria seriilor, se spune că* ***integrala*** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ***este convergentă.***

Dacă F *nu are limită sau limita sa nu este finită când* $(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1})$ *tinde la* $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, *spunem că* f *nu este integrabilă, impropriu, pe* (α, β) *sau, echivalent, că* ***integrala*** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ***nu este convergentă (****adică* ***este divergentă).***

Observaţii: Cum existenţa limitei finite a lui F este legată de faptul că fiecare funcţie $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F_i(u_i, v_i) = \int\limits_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx, u_i, v_i \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}), i = \overline{0, n-1},$$

trebuie să aibă limită finită când $(u_i, v_i) \to (\gamma_i, \gamma_{i+1}) \in \mathbb{R}^2$, adică integrala $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$ trebuie să fie convergentă pentru orice $i = \overline{0, n-1}$, se poate spune că stabilirea convergenţei (sau divergenţei) integralei $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ revine la stabilirea naturii fiecăreia dintre integralele $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = \overline{0, n-1}$. Întrucât, în cazul acestora, intervalele (γ_i, γ_{i+1}) nu conţin alte puncte în care integrandul f este nemărginit, stabilirea convergenţei sau divergenţei integralelor $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = \overline{0, n-1}$, va consta, conform Definiţiei 13.5, în stabilirea existenţei şi finitudinii, respectiv nonexistenţei ori existenţei şi nefinitudinii limitelor

$$\lim_{\lambda \searrow \gamma_i} \int\limits_{\lambda}^{\omega_i} f(x)\,dx \;\; \text{şi} \lim_{\mu \nearrow \gamma_{i+1}} \int\limits_{\omega_i}^{\mu} f(x)\,dx, \text{ unde } \gamma_i < \lambda < \omega_i < \mu < \gamma_{i+1},\ i = \overline{0, n-1}.$$

Când aceste limite există şi sunt finite, atunci ele definesc integralele funcţiei f pe intervalele necompacte $(\gamma_i, \omega_i]$ şi respectiv $[\omega_i, \gamma_{i+1})$, integrale notate, îndeobşte, cu

$$\int\limits_{\gamma_i + 0}^{\omega_i} f(x)\,dx \;\; \text{şi respectiv} \int\limits_{\omega_i}^{\gamma_{i+1} - 0} f(x)\,dx.$$

Prin analogie, pentru integrala improprie a funcţiei f pe intervalul (γ_i, γ_{i+1}) se foloseşte notaţia $\int\limits_{\gamma_i + 0}^{\gamma_{i+1} - 0} f(x)\,dx$.

Deoarece $\int\limits_{\gamma_i + 0}^{\gamma_{i+1} - 0} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_i + 0}^{\omega_i} f(x)\,dx + \int\limits_{\omega_i}^{\gamma_{i+1} - 0} f(x)\,dx, \forall\, i = \overline{0, n-1}$, este suficient ca, în studiul convergenţei integralelor pe interval necompact, să ne ocupăm de convergenţa unor integrale de tipul

$$(\omega) \quad \int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx \text{ şi } \int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx,$$

unde funcţia f este R -integrabilă pe orice interval compact conţinut în intervalele $(a,b]$ şi respectiv $[a,b)$.

Când a şi/sau b sunt infinite ($\pm\infty$), integralele în cauză (din (ω)) sunt *improprii, pe intervale nemărginite*, iar când a şi b sunt din $\mathbb{R}$, atunci integralele (ω) sunt *improprii, din funcţii nemărginite.*

Definiţia 13.6 *i) Dacă funcţia f este integrabilă Riemann pe orice interval compact inclus în intervalul $(a,b]$ sau $[a,b)$, iar integrala $\int\limits_{a+0}^{b} |f(x)|\,dx$, respectiv $\int\limits_{a}^{b-0} |f(x)|\,dx$, este convergentă, atunci se spune că integrala $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, respectiv $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx$, este **absolut convergentă**.*

*ii) dacă integrala $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, respectiv $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx$, este convergentă, dar nu şi absolut convergentă, atunci ea se numeşte **semiconvergentă** (sau **simplu convergentă**).*

Integrale improprii pe intervale infinite

Relativ la integralele $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ şi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, observăm că ne putem limita la a investiga doar prima dintre ele, deoarece celelalte două pot fi redate pe baza unor integrale de tipul primei. Într-adevăr, prin substituţia $x=-t$, avem $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt$, iar $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ se poate scrie sub forma $\int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Definiţia 13.7 *i) Fie $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, cu $a\in\mathbb{R}$, o funcţie $\mathcal{R}$-integrabilă pe orice interval compact $[a,b]$, cu $b\in\mathbb{R}$, $b>a$. Numim **integrală improprie, de la** a **la** $+\infty$**, din funcţia** f, limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, dacă aceasta există. În caz de existenţă, respectiva integrală se notează cu $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.*

*ii) Integrala improprie $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ se numeşte **convergentă** dacă limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ există şi este finită. Acest fapt se marchează prin: $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ (C).*

*iii) Integrala $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ se numeşte **improprie divergentă** dacă limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ nu există* *sau, dacă există, este infinită. Atunci, se foloseşte notaţia:* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *(D).*

De exemplu, integrala improprie $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, unde $a > 0$, este convergentă când $p > 1$ şi divergentă când $p \leq 1$, deoarece, pentru $p > 1$, obţinem $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b \right) = \frac{a^{1-p}}{p-1} \in \mathbb{R}$, iar pentru $p \leq 1$, avem: $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$.

Propoziţia 13.5 ***(criteriul lui Cauchy de convergenţă pentru integrale improprii)***

Integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă dacă şi numai dacă, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$*, există* $a_\varepsilon > a$*, astfel încât,* $\forall\, a', a'' > a_\varepsilon$*, avem:*

$$(\square) \qquad \left| \int\limits_{a'}^{a''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Acest rezultat se obţine prin interpretarea în sens Cauchy a existenţei limitei finite $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Considerând $a'' = a' + 1$, pe baza Propoziţiei 13.5 deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $a_\varepsilon > a$, aşa încât, $\forall\, a' > a_\varepsilon$, avem: $M_{a'} = \sup\limits_{t\in[a',a'+1]} |f(t)| < \varepsilon$. Obţinem astfel faptul că o ***condiţie necesară de convergenţă*** a integralei $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ este: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Tot pe baza Propoziţiei 13.5, se poate vedea că, dacă integrala $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ este convergentă, altfel spus dacă integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este (AC), adică absolut convergentă, atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă.

Un alt criteriu de convergenţă pentru integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este ***criteriul general de comparaţie***, cu următorul enunţ:

Propoziţia 13.6 *Dacă* $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$*, cu* $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$ *şi* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *(C), atunci* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *(C).*

Demonstraţie: Cum $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$, rezultă: $0 \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \leq \int\limits_a^b g(x)\, dx$, $\forall\, b \geq a$. În acelaşi timp, deoarece integrala $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ este convergentă, există şi este finită limita $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b g(x)\, dx$. Deducem atunci că există şi este finită şi limita $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$. Deci $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este absolut convergentă şi, drept urmare, avem: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (C)$. ◀

Teorema 13.4 *(**Criteriul în** β)*

Fie β un număr real fixat. Dacă există $l = \lim\limits_{x\ \to+\infty} x^\beta |f(x)|$, atunci:

j) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (AC)$ *, când $\beta > 1$ şi $l < +\infty$;*

jj) $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx\ (D)$ *, când $\beta \leq 1$ şi $0 < l$.*

Demonstraţie: j) Când $\beta > 1$ şi $l < +\infty$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, x > x_\varepsilon$, are loc relaţia

$$l - \varepsilon < x^\beta |f(x)| < l + \varepsilon,$$

adică

$$\frac{l-\varepsilon}{x^\beta} < |f(x)| < \frac{l+\varepsilon}{x^\beta}.$$

De aici, rezultă că avem:

$$0 \leq \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int\limits_a^{x_\varepsilon} |f(x)|\, dx + \int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)|\, dx \leq \int\limits_a^{x_\varepsilon} |f(x)|\, dx + (l+\varepsilon) \int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\, dx < +\infty.$$

Aşadar, reiese că $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (AC)$, ceea ce implică faptul că $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este convergentă.

jj) În acest caz, se constată că $(l-\varepsilon) \int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\, dx \leq \int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)|\, dx$, cu $\varepsilon \in (0, l)$ şi, întrucât $\int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\, dx = +\infty$, se obţine concluzia: $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\ dx\ (D)$. ◀

Observaţie: În cazul în care $f(x) \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \geq x_\varepsilon$, jj) implică: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx\ (D)$.

Propoziţia 13.7 *(Criteriul integral al lui Cauchy)*

Dacă funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ *este monoton descrescătoare, atunci integrala improprie* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Demonstraţie: Scriind $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx$ şi folosind faptul că, din monotonia lui f , avem $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$, $\forall\, x \in [k, k+1]$, $\forall\, k = \overline{1, n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k), \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Pe baza acestei relaţii, are loc concluzia din enunţ. ◀

Pot fi formulate şi alte criterii de convergenţă pentru integrale de tipul $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, pornind de la criteriile corespunzătoare pentru serii numerice.

Integrale din funcţii nemărginite

Definiţia 13.8 *Fie funcţia* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, *cu* $\lim\limits_{x \nearrow b} |f(x)| = +\infty$ *şi* $f \in \mathcal{R}[a, b-\varepsilon]$, $\forall\, \varepsilon \in (0, b-a)$. *Dacă există şi este finită limita*

$$(\diamond) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

atunci spunem că f *este* ***integrabilă (impropriu) pe*** $[a, b)$ *sau că* ***integrala de la*** a ***la*** b ***din*** f ***este convergentă****. Valoarea limitei se notează cu* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ (C).

În caz contrar, dacă limita $(\diamond)$ *nu există sau este infinită, spunem că* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ *este* ***divergentă*** *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ (D).

Analog, dacă $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă local (adică* $f \in \mathcal{R}[a+\varepsilon, b]$, $\forall\, \varepsilon \in (0, b-a)$*) şi* $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = +\infty$, *iar* $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *există şi este finită, fiind notată cu* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, *atunci spunem că* f *este* ***integrabilă (impropriu) pe intervalul necompact*** $(a, b]$ *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ (C). *Altminteri, dacă* $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *nu există sau este infinită, spunem că* f *nu este integrabilă pe* $(a, b]$ *(sau* *că integrala* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este divergentă) şi scriem.* $\int\limits_{a+0}^b f(x)\,dx$ (D).

Observaţie: Pentru cazul în care $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ şi $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, iar integralele improprii $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ şi $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ sunt convergente, avem $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (C) şi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\searrow 0}\int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

Când există

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right),$$

declarăm această limită ca fiind ***valoarea principală a integralei*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Dacă, în plus, limita în cauză este şi finită, atunci spunem că f ***este integrabilă pe*** $[a,b]$, ***în sensul valorii principale***.

Pe baza Definiţiei 13.8, integrala improprie $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă atunci când $\alpha < 1$ şi divergentă când $\alpha \geq 1$.

Şi pentru asemenea tipuri de integrale improprii există criterii de convergenţă şi de absolută convergenţă (adică de convergenţă a integralei $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$), între care, des folosit în aplicaţii este aşa-numitul criteriu în α).

Teorema 13.5 ***(Criteriul de convergenţă în*** α*)*

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $f : [a,b)$ *(respectiv* $(a,b]$*)* $\to \mathbb{R}$ *o funcţie* $\mathcal{R}$*-integrabilă pe orice interval compact inclus în* $[a,b)$ *(respectiv* $(a,b]$*). În plus,* $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b)$ *(respectiv* $(a,b]$*).*

Dacă există limita $L = \lim\limits_{x\nearrow b}[(b-x)^\alpha f(x)]$ *(respectiv* $L = \lim\limits_{x\searrow a}[(x-a)^\alpha f(x)]$*), atunci:*

i) integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă când* $\alpha < 1$ *şi* $L < +\infty$*;*

ii) avem $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (D) *când* $\alpha \geq 1$ *şi* $L > 0$.

Demonstraţie: Se utilizează interpretarea existenţei limitei L în limbajul $\varepsilon-\delta$ şi convergenţa/divergenţa integralei $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (respectiv $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$), la fel ca în Teorema 13.4. ◀

Teorema 13.6 ***(Criteriul de convergenţă de tip Cauchy)***

Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *(respectiv* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$*) este convergentă dacă şi numai dacă*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, b_\varepsilon \in (a,b),\ \textit{aşa încât, } \forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b),\ \textit{cu } b' < b'',\ \textit{avem } \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

(respectiv, pentru $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$*:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a_\varepsilon \in (a,b),\ \textit{aşa încât, } \forall\, a', a'' \in (a, a_\varepsilon),\ \textit{cu } a' < a'',\ \textit{avem } \left| \int\limits_{a'}^{a''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon).$$

Acest criteriu rezultă prin interpretarea, în sens Cauchy, a existenţei limitei finite, în fiecare caz în parte. Pe baza sa, se pot deduce şi alte criterii de convergenţă pentru asemenea integrale improprii, de interes particular strict.

Integrale cu parametri

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă, a şi $b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, precum şi $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că, $\forall\, \mathrm{y} \in A$, arbitrar fixat, funcţia $f(\cdot, \mathrm{y})$ este Riemann integrabilă pe $[a,b]$. Se poate considera atunci $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\mathrm{y}) = \int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\,dx, \forall\, \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in A$$

şi denumită ***integrală Riemann***, pe $[a,b]$, ***cu parametri*** $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Mai general, dacă, în plus, se iau în consideraţie şi funcţiile $p : A \to [a,b]$, $q : A \to [a,b]$, atunci este bine definită şi funcţia $G : A \to \mathbb{R}$, dată de:

$$G(y) = \int\limits_{p(\mathrm{y})}^{q(\mathrm{y})} f(x, \mathrm{y})\,dx, \mathrm{y} \in A.$$

Ea se numeşte ***integrală Riemann cu parametri şi cu limitele de integrare dependente de parametri***.

În legătură cu astfel de integrale, intereseează îndeosebi condiţiile în care proprietăţi ale integrandului f, relative la parametrul vectorial (când $k > 1$) sau scalar (când $k = 1$) y, din A, se transmit funcţiilor F şi G.

Încercând să vedem, mai întâi, dacă transferul de existenţă a limitei $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y})$, $\forall\, x \in [a,b]$, într-un punct de acumulare al mulţimii A ($\mathrm{y}_0 \in A'$), se produce sau nu, ne punem, firesc, întrebarea dacă există $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} F(\mathrm{y})$ şi dacă $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} F(\mathrm{y}) = \lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} \int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Răspunsul, negativ în general, este afirmativ doar dacă $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y})$ există uniform în raport cu x. Astfel, cel puţin în cazul în care

$A=\mathbb{N}$, $y=n$ şi $f(x,\mathrm{y})=f(x,n)=f_n(x)$, $\forall\, x\in[a,b]$, vedem că $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ nu este egală cu $\int\limits_a^b\left[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right]dx$, decât dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[a,b]} g$.

Definiţia 13.9 *Pentru* $\mathrm{y}_0\in A'$*, spunem că* ***funcţia*** $f:[a,b]\times A\to\mathbb{R}$ ***are limita*** $g:[a,b]\to\mathbb{R}$*,* ***când*** $\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0$*, adică* $g(x)=\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0}f(x,\mathrm{y})$*,* ***uniform în raport cu*** $x\in[a,b]$*, dacă,*$\forall\ \varepsilon>0$*,* $\exists\, V_\varepsilon\in\mathcal{V}(\mathrm{y}_0)$*, vecinătate a lui* y_0*, independentă de* x*, astfel încât,* $\forall\, x\in[a,b]$ *şi* $\forall\,\mathrm{y}\in V_\varepsilon\setminus\{\mathrm{y}_0\}$ *să avem:* $|f(x,\mathrm{y})-g(x)|<\varepsilon$*.*

Folosind acum noţiunea de limită uniformă introdusă prin Definiţia 13.9, precum şi caracterizarea de tip Cauchy a existenţei unei limite într-un punct, putem vedea că rezultatul enunţat de propoziţia care urmează este adevărat, pe baza Teoremei 13.1.

Propoziţia 13.8 *Dacă* $f:[a,b]\times A\to\mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a,b]$ *(în raport cu* $\forall\,\mathrm{y}\in A$*) şi, pentru un* $\mathrm{y}_0\in A$*, avem* $\lim\limits_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0}f(x,\mathrm{y})=g(x)$*, uniform în raport cu* $x\in[a,b]$*, atunci* g *este integrabilă pe* $[a,b]$ *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{\mathrm{y}\to\mathrm{y}_0}\int\limits_a^b f(x,\mathrm{y})\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

În ceea priveşte transferul de continuitate, în cazul cel mai general, adică cel al funcţiei G, are loc următorul rezultat.

Propoziţia 13.9 *Dacă* A *este o mulţime compactă din* $\mathbb{R}^k$*,* $f\in\mathcal{C}([a,b]\times A;\mathbb{R})$ *, iar* $p,q\in\mathcal{C}(A;[a,b])$*, atunci* $G\in\mathcal{C}(A;\mathbb{R})$*. În particular, când* p,q *sunt constante, ca de pildă când* $p\equiv a$ *şi* $q\equiv b$*, obţinem:* $F\in\mathcal{C}(A;\mathbb{R})$*.*

Demonstraţie: Folosim relaţia

$$\begin{aligned}|\ G(\mathrm{y})-G(\mathrm{y}_0)\ |\ \ &\le\ \left|\ \int\limits_a^{q(\mathrm{y}_0)}|\ f(x,\mathrm{y})-f(x,\mathrm{y}_0)|\,dx\ \right|+\left|\ \int\limits_{q(\mathrm{y}_0)}^{q(\mathrm{y})}f(x,\mathrm{y})\,dx\ \right|+\\ &+\ \left|\ \int\limits_a^{p(\mathrm{y}_0)}|\ f(x,\mathrm{y})-f(x,\mathrm{y}_0)|\,dx\ \right|+\left|\ \int\limits_{p(\mathrm{y}_0)}^{p(\mathrm{y})}f(x,\mathrm{y})\,dx\ \right|,\forall\,\mathrm{y},\mathrm{y}_0\in A,\end{aligned}$$

în virtutea căreia, în ipotezele din enunţ, $|\ G(\mathrm{y})-G(\mathrm{y}_0)|$ poate fi oricât de mică dorim, de îndată ce $\|\mathrm{y}-\mathrm{y}_0\|$ este acceptabil de mică. ◀

În aplicaţii, cea mai utilă proprietate de transfer este cea relativă la derivabilitatea funcţiilor F şi G, realizabilă, în condiţiile din Propoziţia 13.10, prin ***formula lui Leibniz de derivare***.

Propoziţia 13.10 *Dacă* A *este un paralelipiped compact în* $\mathbb{R}^k$*,* $f:[a,b]\times A\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a,b]\times A$*, care admite* $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ *continuă pe* $[a,b]\times A$*, iar* p *şi* q *sunt două funcţii de la* A *la* $[a,b]$*,* *derivabile în raport cu y_i ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) pe A, atunci G (şi implicit F, în situaţia în care p şi q sunt constante) este derivabilă în raport cu y_i pe A şi are loc* ***formula (lui Leibniz):***

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathrm{y}) = f\left(q(\mathrm{y}), \mathrm{y}\right) \frac{\partial q}{\partial y_i}(\mathrm{y}) - f\left(p(\mathrm{y}), \mathrm{y}\right) \frac{\partial p}{\partial y_i}(\mathrm{y}) + \int\limits_{p(\mathrm{y})}^{q(\mathrm{y})} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \mathrm{y})\, dx,\ \forall\, \mathrm{y} \in A.$$

Cât priveşte $\mathcal{R}$-integrabilitatea integralelor cu parametri, menţionăm următorul rezultat.

Propoziţia 13.11 *Dacă $A = [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ (cu $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$) şi $f \in \mathcal{C}\left([a, b] \times [c, d]; \mathbb{R}\right)$, atunci funcţia $F : [c, d] \to \mathbb{R}$, dată prin $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$, $\forall\, y \in [c, d]$ este integrabilă Riemann pe $[c, d]$ şi are loc relaţia:*

$$\int\limits_c^d F(y)\, dy \left(= \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \right) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Când, în expresia lui F sau a lui G, fie domeniul de integrare, fie integrandul $f(\cdot, \cdot)$, în raport cu x, nu mai este mărginit, avem de-a face cu integrale improprii (pe interval necompact) şi cu parametri. Şi în cazul unor asemenea integrale interesează transferul proprietăţilor integrandului asupra integralei din context. De data aceasta, intervine decisiv noţiunea de convergenţă uniformă, în raport cu $\mathrm{y} \in A$, a integralelor ce definesc pe F şi pe G.

Definiţia 13.10 *(relativă la cazul $\int\limits_a^{b-0} f(x, \mathrm{y})\, dx$, când improprietatea este pricinuită de nemărginirea lui f, în raport cu x, în b)*

j) ***Integrala improprie*** *$\int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx$, $\mathrm{y} \in A$, se numeşte* ***convergentă punctual*** *pe A dacă există $F : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{b' \nearrow b} \int\limits_a^{b'} f(x, \mathrm{y})\, dx = F(\mathrm{y})$, $\mathrm{y} \in A$.*

jj) Spunem că integrala $\int\limits_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx$ este ***convergentă uniform pe*** *A, dacă $\lim\limits_{b' \nearrow b} \int\limits_a^{b'} f(x, \mathrm{y})\, dx = F(\mathrm{y})$ există uniform în raport cu $\mathrm{y} \in A$.*

Utilizând acum, simultan, conceptele introduse de Definiţiile 13.9 şi 13.10, se pot formula, în anumite condiţii, rezultate de transfer de proprietate şi pentru astfel de integrale (improprii şi cu parametri). Iată enunţul rezultatului relativ la derivabilitate.

Propoziţia 13.12 ***(asupra transferului de derivabilitate de la integrand la integrala improprie cu parametri)***

Fie $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $[c, d] = A \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ şi integrala improprie cu parametru $\int\limits_a^{b-0} f(x, y)\, dx$, unde $y \in A$. De asemenea, fie satisfăcute următoarele ipoteze:

1) Integrala improprie $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *converge punctual la o funcţie* $F(y)$*, pentru* $y \in A$*;*

2) Funcţia f *admite derivată parţială în raport cu* y*,* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*, pe* A*;*

3) Funcţiile f *şi* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sunt continue pe* $[a,b)\times[c,d]$*;*

4) Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ *converge uniform în raport cu* $y \in A$*.*

Atunci funcţia $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *este derivabilă în orice punct* $y \in [c,d]$ *şi*

$$F'(y)=\int\limits_a^{b-0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx, \forall\, y\in[c,d]=A.$$

Exemple remarcabile de integrale improprii cu parametri. Funcţiile Γ şi B ale lui Euler

Dintre integralele improprii şi cu parametri care ar fi demne de menţionat, amintim aici ***integrala lui Dirichlet*** $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$, ***integrala lui Euler-Poisson*** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$, $a\in\mathbb{R}$ şi ***integralele*** (***funcţiile***) ***lui Euler***, asupra cărora zăbovim acum puţin.

Funcţia Γ (gamma)

Prin definiţie, această funcţie este următoarea:

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx,\ p\in\mathbb{R}_+^*.$$

Ea este bine definită (deci convergentă ca integrală improprie), $\forall\, p\in(0,+\infty)$, după cum rezultă imediat prin aplicarea criteriilor de convergenţă în β şi în α (v. Teoremele 13.4 şi 13.5).

Câteva proprietăţi imediate ale funcţiei Γ sunt prezentate în cadrul următoarelor relaţii:

1. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p), \forall\, p>0$;
2. $\Gamma(1)=1$;
3. $\Gamma(n+1)=n!, \forall\, n\in\mathbb{N}$;
4. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;
5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}, \forall\, p\in(0,1)$;

6. $\Gamma(p) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}, \forall\, p > 0;$

7. $(\Gamma(p))^{-1} = pe^{\gamma p} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{p}{n}\right) e^{-p/n}, \forall\, p > 0$ (Weierstrass), unde $\gamma = 0,5772...$ este constanta lui Euler.

Funcţia B (beta)

Este definită prin: $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, p > 0, q > 0$. Satisface relaţiile:

1. $B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt, \forall\, p,q > 0;$

2. $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta, \forall\, p,q > 0;$

3. $B(p,q) = B(q,p), \forall\, p,q > 0;$

4. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall\, p,q > 0;$

5. $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p+q} B(p,q) = \dfrac{q}{p} B(p+1,q), \forall\, p,q > 0;$

6. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1), \forall\, p,q > 0;$

7. $B(p,n+1) = \dfrac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}, \forall\, p > 0, n \in \mathbb{N}.$

Bibliografie recomandată

1. Narcisa Apreutesei Dumitru, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilităţii*, Editura "Performantica", Iaşi, 2005.

2. Marina Gorunescu, Florin Gorunescu, Augustin Prodan - *Matematici superioare. Biostatistică şi Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.

3. Gh. Mocică - *Probleme de funcţii speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.

4. Horiana Tudor - *Analiză matematică,* Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.

5. M. Postolache, Ariana Pitea, Dragoş Cioroboiu - *Calcul integral,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.

6. Sever Angel Popescu - *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.

7. Lee Larson - *Introduction to Real Analysis,* Univ of Louisville Publ., 2014.

8. Ph. B. Iaval - *Improper Integrals*, Kennesaw State University, 2015.

9. Marina Delgado, Téllez de Cepeda - *Calculus II, Unit 3: Integrals Depending on a Parameter*, Universidad Carlos III de Madrid, 2016.