

Cursul 10

Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor. Derivate și diferențiale. Formule de calcul diferențial.

Printre conceptele fundamentale ale matematicii, implicate fie în stabilirea vitezei de variație a stării unor procese din realitatea fizică, fie în problema exprimării (aproximării) locale a unor funcții neliniare prin aplicații liniare, fie în chestiuni geometrice de tangență, se numără și cele relative la derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor, între care se disting noțiunile de derivată și diferențială. Reamintind aceste concepte în cazul funcțiilor reale scalar-scalar, prezentăm aici și corespondențele lor privitoare la funcții de argument vectorial, cu valori scalare sau vectoriale.

Pentru început, relativ la funcții reale de o singură variabilă și cu valori scalare, menționăm următoarea definiție:

Definiția 10.1 a) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. De asemenea, fie $x_0 \in A \cap A'$ (în raport cu topologia uzuală pe \mathbb{R}). Funcția f se numește **derivabilă în x_0** dacă există și este din \mathbb{R} (nu din $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Această limită, notată cu $f'(x_0)$, poartă denumirea de **derivată a lui f în x_0** . În loc de $f'(x_0)$, se mai folosește notația $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Dacă f este derivabilă în orice punct al unei mulțimi $\emptyset \neq \tilde{A} \subseteq A$, spunem că f este derivabilă pe \tilde{A} .

b) Fie $\emptyset \neq A_1 \subseteq A$ mulțimea punctelor în care $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă. Funcția $x \rightarrow f'(x)$, $x \in A_1$ se numește **derivata lui f** și se notează, firesc, cu f' (sau $\frac{df}{dx}$).

c) Când x_0 este punct interior sau cel mai mare (respectiv cel mai mic) element al mulțimii nevide $A \subseteq \mathbb{R}$, se definește **derivata la stânga (respectiv la dreapta) a funcției $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul x_0** ca fiind, ori de câte ori există, limita $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectiv $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$), notată cu $f'_s(x_0)$ (respectiv $f'_d(x_0)$). Dacă există atât $f'_s(x_0)$, cât și $f'_d(x_0)$, iar $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, se spune că f are **derivată în x_0** .

Observații:

- O funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă și numai dacă derivatele sale laterale (la stânga și la dreapta) în x_0 , adică $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$ există, sunt finite și egale între ele. Atunci: $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.
- Spre eliminarea oricărei ambiguități de terminologie care s-ar putea produce în raport cu noțiunea de derivată parțială din cazul funcțiilor de argument vectorial, elementele introduse prin Definiția 10.1 se însoțesc, adeseori, de epitetul "ordinar".

Definiția 10.2 Spunem că o funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este **de clasă $C^1(A)$** dacă f este derivabilă pe A și are derivata f' continuă pe A .

Observație: Când $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este doar continuă pe A , spunem că $f \in \mathcal{C}^0(A)$. Pentru simplitate, în dese rânduri, în locul notației $\mathcal{C}^0(A)$, se folosește notația $\mathcal{C}(A)$.

Propoziția 10.1 *Are loc relația $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Cu alte cuvinte, orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ care este derivabilă pe A este și continuă pe A . Nu și reciproc.*

Demonstrație: Prin ipoteză, pentru orice $x_0 \in A$, există și este finită derivata lui f în x_0 , adică $f'(x_0)$, care, în conformitate cu Definiția 10.1 a), este valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Cum, $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$, avem $f(x) = (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$, deducem că există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și este egală chiar cu $f(x_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0 . Arbitraritatea lui x_0 în A ne dă dreptul să conchidem că f este continuă pe A . Deci $f \in \mathcal{C}(A)$, din moment ce, inițial, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Și aceasta pentru orice f din $\mathcal{C}^1(A)$. În concluzie, avem $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Exemplul clasic al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, care este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă doar pe \mathbb{R}^* , ne asigură de faptul că incluziunea din enunț este strictă. ◀

Pe baza Definiției 10.1, prin respectarea unor elementare operații de algebră și de analiză matematică, se obțin reguli de calcul diferențial ordinar, între care și regula lui Leibniz (de derivare a produsului de două funcții) sau regula "lanțului" (de derivare a compusei a două funcții). Reunite în cuprinsul teoremei pe care o dăm aici fără demonstrație, iată aceste reguli:

Teorema 10.1 a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f și g sunt derivabile pe o submulțime (nevidă) \tilde{A} a lui A , atunci funcțiile $f + g$, αf , $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ (când $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \tilde{A}$) sunt derivabile pe \tilde{A} și, pe \tilde{A} , avem:

$$(f + g)' = f' + g'; (\alpha f)' = \alpha f'; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ și $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile (fiecare pe mulțimea ei de definiție). Atunci funcția $g \circ f$ este derivabilă pe A și, pe A , are loc formula:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

c) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ o funcție continuă și bijectivă. Dacă f este derivabilă pe A și $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, atunci funcția inversă $f^{-1} : B \rightarrow A$ este derivabilă pe B și, pe B , are loc relația:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Observație: Amintindu-ne că derivatele funcțiilor elementare de bază se calculează potrivit următoarelor formule

$$(c)' \equiv \frac{d}{dx}(c) = 0, \forall c \in \mathbb{R};$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in D_\alpha \subseteq \mathbb{R};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\};$$

$$(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\};$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

se pot utiliza regulile din Teorema 10.1 spre a determina derivatele unor funcții care se obțin din funcții elementare prin operații algebrice sau prin operații de compunere. Astfel, redescoperim formulele

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1, 1); & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1, 1); \\(\arctg x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}; & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

precum și relația

$$(f^g)' = f^g \left(g' \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} \right),$$

adevărată atunci când $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ și $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe A .

Ținând seama de Definiția 10.1 și de regulile de calcul pentru limite de funcții cu valori vectoriale (v. Cursul 9), ne dăm seama că, în cazul funcțiilor reale de argument scalar și cu valori în \mathbb{R}^q ($q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq 2$), noțiunile de derivată și de derivabilitate se pot defini pe baza următorului rezultat.

Propoziția 10.2 *Funcția $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1, q}$, este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ (respectiv pe o mulțime $\tilde{A} \subseteq A$) dacă și numai dacă fiecare dintre funcțiile componente f_1, f_2, \dots, f_q este derivabilă în x_0 (respectiv pe \tilde{A}). În plus, are loc relația:*

$$f'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_q(x_0))$$

(respectiv $f' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_q)$, pe \tilde{A}).

Demonstrație: $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$, avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \dots, \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Deducem de aici că există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, notată cu $f'(x_0)$ și denumită derivata lui f în x_0 , dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$, $\forall k = \overline{1, q}$. Cu alte cuvinte, f este derivabilă în x_0 și avem egalitatea $f'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_q(x_0))$ dacă și numai dacă fiecare dintre funcțiile f_1, f_2, \dots, f_q este derivabilă în x_0 . Este evident acum că $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ este derivabilă pe \tilde{A} dacă și numai dacă $\forall k = \overline{1, q}$, f_k este derivabilă pe \tilde{A} . ◀

Observație: Un rezultat cu totul analog Propoziției 10.2 poate fi formulat și demonstrat atunci când, în locul lui $f'(x_0)$ și respectiv $f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_q(x_0)$, se consideră derivatele corespunzătoare la stânga (sau cele la dreapta). Astfel, funcția $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ va fi derivabilă la stânga (respectiv la dreapta) în x_0 . Evident că, și într-un asemenea caz, al funcțiilor $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$, putem zice că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă și numai dacă $f'_s(x_0)$, adică derivata la stânga a lui f în x_0 , există în \mathbb{R}^q (dată fiind de vectorul cu componentele $(f'_1)_s(x_0), (f'_2)_s(x_0), \dots, (f'_q)_s(x_0)$, împreună cu $f'_d(x_0)$ (derivata la dreapta a lui f în x_0 , adică vectorul $((f'_1)_d(x_0), (f'_2)_d(x_0), \dots, (f'_q)_d(x_0))$ și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$). Valoarea comună a acestor derivate laterale este tocmai $f'(x_0)$.

Prin utilizarea Propoziției 10.2 și a Teoremei 10.1, se deduc lesne reguli de calcul pentru derivatele (de ordinul I) ordinare ale unor funcții reale, scalar-vectoriale, cum sunt regulile (sau formulele) puse în evidență de teorema ce urmează:

Teorema 10.2 Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar funcțiile $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A$ (sau pe o mulțime $\tilde{A} \subseteq A$), atunci tot derivabile în x_0 (respectiv pe \tilde{A}) sunt și funcțiile $\alpha f + \beta g$, $\varphi \cdot f$, $\langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle$ (unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprezintă un produs scalar pe \mathbb{R}^q), având loc formulele:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \tilde{A} \text{)},$$

$$(\varphi \cdot f)' = \varphi' \cdot f + \varphi \cdot f', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \tilde{A} \text{) și}$$

$$(\langle f(x), g(x) \rangle)' = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle, \text{ pentru } x = x_0 \text{ (respectiv } \forall x \in \tilde{A} \text{)}.$$

În plus, dacă $\psi : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$ este derivabilă pe $\tilde{B} \subseteq B$, atunci funcția $f \circ \psi = (f_1 \circ \psi, f_2 \circ \psi, \dots, f_q \circ \psi) : B \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă pe \tilde{B} și are loc relația:

$$(f \circ \psi)'(x) = (\psi' \cdot (f' \circ \psi))(x) = \psi'(x) \cdot (f'_1(\psi(x)), f'_2(\psi(x)), \dots, f'_q(\psi(x))), \forall x \in \tilde{B}.$$

Referindu-ne acum la cazul funcțiilor reale de argument vectorial, este de constatat că, deoarece raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nu are sens, nu se poate vorbi despre $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și deci nu se poate introduce noțiunea de derivată în x_0 prin procedura folosită la funcțiile de argument scalar. Inconvenientul poate fi totuși surmontat pe una din cele două căi sugerate, pe de o parte, de observația potrivit căreia, în cazul unei funcții $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și a unui punct $x_0 \in A$, dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, avem, pe de-o parte, relația

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \text{ și, pe de altă parte, următorul rezultat:}$$

Propoziția 10.3 Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ așa încât $A \neq \emptyset$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) f este derivabilă în x_0 ;

ii) există o aplicație liniară $T_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în raport cu care:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_0(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Demonstrație: Dacă f este derivabilă în x_0 , atunci există derivata $f'(x_0)$, ca element din \mathbb{R} . Prin intermediul ei, există aplicația liniară $T_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită potrivit relației $T_0(h) = f'(x_0) \cdot h$, astfel încât:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_0(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Reciproc, dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în raport cu care avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

atunci există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $T(h) = t \cdot h$, $\forall h \in \mathbb{R}$ și, ca atare, obținem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - t \right) = 0.$$

Rezultă deci că există $f'(x_0) = t$ și $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, adică f este derivabilă în x_0 . ◀

Folosind prima dintre căile menționate mai înainte, ajungem la noțiunea de G -diferențială (altfel spus, **diferențială Gâteaux**), în conformitate cu următoarea definiție:

Definiția 10.3 Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde D este o mulțime deschisă în topologia uzuală pe \mathbb{R}^p . De asemenea, fie $x_0 \in D$ și $v \in \mathbb{R}^p$, astfel încât $\|v\|_e = 1$, $\|\cdot\|_e$ însemnând norma euclidiană pe \mathbb{R}^p .

Dacă există $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^q$, atunci această limită, notată îndeobște cu $f'(x_0; v)$ (sau, echivalent, cu $\frac{df}{dv}(x_0)$ ori cu $f'_v(x_0)$), se numește ***G-diferențiala (diferențiala Gâteaux a) lui f în punctul x_0 , după versorul (direcția) v sau, încă, derivata direcțională, după (direcția) v , a funcției f , în punctul x_0 .***

Observație: Întrucât, când există $f'_v(x_0)$, avem

$$f'(x_0; sv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot sv) - f(x_0)}{t} = s \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot sv) - f(x_0)}{ts} = s f'(x_0; v), \forall s \in \mathbb{R}^*$$

și

$$f'(x_0; 0 \cdot v) = f'(x_0; \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) - f(x_0)}{t} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p} = 0 \cdot f'(x_0; v),$$

se poate spune că aplicația $\psi : D \times S_{de}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}; 1) \rightarrow \mathbb{R}^q$, definită prin $\psi(x_0, v) = f'(x_0, v)$, este omogenă în raport cu v . Ca atare, G -diferențiala lui f în x_0 , după direcția v , are sens chiar și atunci când v nu este numaidecât versor, putându-se deci renunța, în Definiția 10.3, la precizarea $\|v\|_e = 1$.

Definiția 10.4 Fie f , D și x_0 ca în definiția 10.3.

- Dacă există $f'(x_0; v) \in \mathbb{R}^q$ pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$, atunci spunem că funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este ***G-diferențiabilă (diferențiabilă Gâteaux) în $x_0 \in D$.***
- Dacă aplicația $v \in \mathbb{R}^p \mapsto f'(x_0; v) \in \mathbb{R}^q$ este liniară (nu numai omogenă) și continuă, atunci elementul din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, notat cu $f'(x_0)$ și definit prin relația

$$f'(x_0)(v) = f'(x_0; v), \forall v \in \mathbb{R}^p$$

se numește ***G-derivata (sau derivata Gâteaux a) funcției f în punctul x_0 , iar f se numește G-derivabilă (derivabilă Gâteaux sau derivabilă direcțional) în x_0 .***

- Spunem că f este ***G-diferențiabilă (diferențiabilă Gâteaux pe o mulțime $\tilde{D} \subseteq D$ dacă $f'(x_0; v)$ există (în \mathbb{R}^q) pentru orice $x_0 \in \tilde{D}$ și orice $v \in \mathbb{R}^p$. Analog, dacă derivata Gâteaux $f'(x_0)$ există în orice punct $x_0 \in \tilde{D}$, zicem că funcția f este G-derivabilă (derivabilă Gâteaux) pe mulțimea \tilde{D} .***

Observație: Mulțimea funcțiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ care sunt G -diferențiabile (respectiv G -derivabile) într-un punct din D sau pe o submulțime a lui D este nevidă, deoarece din această mulțime fac parte funcțiile identic-constante ($f(x) = c \in \mathbb{R}^q$, $\forall x \in D$), care au G -diferențiala egală cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, în orice punct din D , după orice direcție v din \mathbb{R}^p (respectiv, au G -derivata egală cu elementul nul din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$). De asemenea, aceleași mulțimi îi aparțin și funcțiile liniare $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru care avem:

$$f'(x_0; v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + tf(v) - f(x_0)}{t} = f(v), \forall x_0 \in D, \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Deci, în acest caz, $f'(x_0) = f$, $\forall x_0 \in D$.

Definiția 10.5 a) Dacă funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este G -derivabilă într-un punct x_0 al mulțimii deschise D , atunci elementul $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$ definește **gradientul lui f în x_0** , care se notează cu $(\nabla f)(x_0)$ și se citește "**nabla**" **f în x_0** (sau se mai notează cu $\text{grad} f(x_0)$), pe baza relației

$$(f'(x_0))(v) = \langle (\nabla f)(x_0), v \rangle_e, \forall v \in \mathbb{R}^p,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ reprezintă produsul scalar euclidian pe \mathbb{R}^p .

(Așadar, $(\nabla f)(x_0)$ este un vector din \mathbb{R}^p definit prin intermediul relației sus-menționate).

b) Dacă funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este G -derivabilă într-un punct x_0 din D , atunci matricea asociată aplicației liniare $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ se numește **matricea jacobiană a lui f în x_0** , având drept linii tocmai gradientii, în x_0 , ai componentelor lui f . Notată cu $J_f(x_0)$, această matrice este dată astfel de relația

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)(x_0) \\ (\nabla f_2)(x_0) \\ \vdots \\ (\nabla f_q)(x_0) \end{pmatrix},$$

în care f_1, f_2, \dots, f_q sunt componentele lui f .

c) În cazul când $p = q \geq 2$, determinantul matricii jacobiene $J_f(x_0)$ (adică $\det(J_f(x_0))$) se numește **jacobianul lui f în x_0** sau, echivalent, **determinantul funcțional** al funcțiilor f_1, f_2, \dots, f_q , în raport cu variabilele independente x_1, x_2, \dots, x_q (componente ale unui vector generic $x = (x_1, x_2, \dots, x_q)^T$ din D), calculat în x_0 . Acesta din urmă se notează, uzual, prin:

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_q)}{D(x_1, x_2, \dots, x_q)}(x_0).$$

d) În particular, când $v = e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, G -diferențiala $f'(x_0; e_k)$ (unde $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in D$), dată de limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, x_{k+1}^0, \dots, x_p^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)}{t},$$

se numește **derivata parțială, de ordinul I , a funcției $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, în raport cu x_k** (componenta de rang k a argumentului vectorial $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in D$ pentru f), **în punctul $x_0 \in D$** și se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$. Când există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \in \mathbb{R}^q$, pentru $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$, cu $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall j = \overline{1, q}$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x_0), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(x_0) \right),$$

funcția f numindu-se **derivabilă parțial, de ordinul I , în raport cu x_k , în punctul x_0** .

Funcția f se numește **derivabilă parțial, de ordinul I , în raport cu x_k , pe o mulțime $\tilde{D} \subseteq D$** , dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \in \mathbb{R}^q$, $\forall x \in \tilde{D}$. Într-o atare situație, funcția $x \in \tilde{D} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \in$

\mathbb{R}^q , notată cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, se numește **derivata parțială a lui f , de ordinul I , în raport cu x_k , pe mulțimea \tilde{D}** .

Observații:

- i) Pe baza formulei, cu limită, pentru $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)$ (din Definiția 10.5), se poate spune că derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)$ este, de fapt, derivata în x_k^0 a funcției de o variabilă scalară
- $$x_k \longmapsto f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_p^0),$$
- adică funcția parțială $f_{[k]}$, corespunzătoare lui f , în punctul $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$. Astfel, calculul derivatei parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)$ poate fi redus, practic, la calculul derivatei (de ordinul I) pentru o funcție de o singură variabilă, anume x_k , celelalte variabile independente din componența lui \mathbf{x} (adică $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p$) figurând ca niște constante în respectivul proces de calcul.
- ii) Când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial, de ordinul I, pe o mulțime $\tilde{D} \subseteq D$, în raport cu orice variabilă x_k , iar funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_k} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt continue pe \tilde{D} , spunem că f este **de clasă** \mathcal{C}^1 **pe** \tilde{D} și consemnăm acest fapt prin: $f \in \mathcal{C}^1(\tilde{D})$.
- iii) În cazul în care $q = 1$ și, pentru $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, se poate vorbi despre relația

$$f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{v}) = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \langle (\nabla f)(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_e, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p, \mathbf{x}_0 \in D,$$

luând $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_k) = \langle (\nabla f)(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}_k \rangle_e, \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

În virtutea acestui fapt și a celui potrivit căruia reprezentarea oricărui vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, în baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p\} \subseteq \mathbb{R}^p$, este $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^p v_k \mathbf{e}_k$, obținem:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla f)(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_e &= \sum_{k=1}^p v_k \langle (\nabla f)(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}_k \rangle_e = \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{x}_0) \right), \mathbf{v} \right\rangle, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

De aici, deducem că, ori de câte ori există, gradientul lui f în \mathbf{x}_0 este vectorul din \mathbb{R}^p cu componentele $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0), k = \overline{1, p}$, adică:

$$(\nabla f)(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{x}_0) \right).$$

- iv) Pe baza ultimei formule și a celei care dă matricea jacobiană $J_f(\mathbf{x}_0)$, în cazul în care $q \geq 2$, deducem că, pentru funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, când este G -derivabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$, avem

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}},$$

unde f_1, f_2, \dots, f_q sunt componentele lui f .

v) Ținând seama de precizările făcute la punctul i) al observației de față, putem vedea că regulile de calcul cu G -diferențiale (și apoi, în particular, cu gradienti și cu derivate parțiale de ordinul I), se bazează pe următoarele relații:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(x_0; v) &= \alpha f'(x_0; v) + \beta g'(x_0; v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ \forall f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, v \in \mathbb{R}^p \\ &\text{cu } f \text{ și } g \text{ } G\text{-diferențiabile în } x_0 \text{ pe direcția } v; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0; v) &= g(x_0) \cdot f'(x_0; v) + f(x_0) \cdot g'(x_0; v), \\ \forall f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, v \in \mathbb{R}^p \\ &\text{cu } f \text{ și } g \text{ } G\text{-diferențiabile în } x_0 \text{ pe direcția } v; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0; v) &= \frac{1}{g^2(x_0)} [g(x_0) \cdot f'(x_0; v) - g'(x_0; v) \cdot f(x_0)], \\ \forall f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, v \in \mathbb{R}^p \\ &\text{cu } f \text{ și } g \text{ } G\text{-diferențiabile în } x_0 \text{ pe direcția } v. \end{aligned}$$

În general, raportul dintre G -diferențiabilitatea unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ într-un punct $x_0 \in D$, după o direcție $v \in \mathbb{R}^p$, nu implică, ca în cazul $p = q = 1$, continuitatea globală a lui f în x_0 , ci doar continuitatea pe direcția v , în x_0 , potrivit următorului rezultat.

Teorema 10.3 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă și deschisă, $v, x_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă f are derivată direcțională (G -diferențială), după v , în x_0 , anume $f'(x_0; v) \in \mathbb{R}^q$, atunci f este continuă, pe direcția v , în punctul x_0 .*

Demonstrație: În conformitate cu Definiția 10.3, există $f'(x_0; v) \in \mathbb{R}^q$ dacă și numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, $\forall t \in \mathbb{R}^*$ cu $|t| < \delta_\varepsilon$, avem:

$$\left\| \frac{1}{t} (f(x_0 + tv) - f(x_0)) - f'(x_0; v) \right\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + tv) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^q} &\leq \|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tf'(x_0; v)\|_{\mathbb{R}^q} + \|tf'(x_0; v)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ &\leq |t| (\varepsilon + \|f'(x_0; v)\|_{\mathbb{R}^q}), \forall |t| < \delta_\varepsilon. \end{aligned}$$

De aici, rezultă că $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = f(x_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0 , pe direcția v . ◀

În particular, când Teorema 10.3 are loc pentru $v = e_k$, se poate spune doar că derivabilitatea parțială, de ordinul I, a funcției f în punctul x_0 , în raport cu x_k , implică continuitatea "parțială" (pe direcția e_k), nu numai că continuitatea globală, a lui f în x_0 . Continuitatea globală se poate obține în condițiile următoarei teoreme.

Teorema 10.4 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă, $x_0 \in D$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă există o vecinătate $V \subseteq D$, a punctului x_0 , pe care f este derivabilă parțial, de ordinul I, iar funcțiile $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ sunt, $\forall k = \overline{1, p}, \forall j = \overline{1, q}$, mărginite pe V , atunci f este continuă, în sens global, în punctul x_0 .*

Demonstrație: Continuitatea lui $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ în punctul $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ este asigurată de continuitatea fiecăreia dintre componentele f_k ale lui f în x_0 . Este suficient deci să arătăm că există $\lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = f_j(x_0)$, $\forall j = \overline{1, q}$. În acest sens, prin aplicarea teoremei lui Lagrange (de medie) pentru funcții de o singură variabilă reală și prin folosirea ipotezei de mărginire, pe V , a funcțiilor $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ ($k = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$), constatăm că, pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in V$, există $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$, cu ξ_k între x_k și x_k^0 , $\forall k = \overline{1, p}$, astfel încât:

$$\begin{aligned} |f_j(x_1, x_2, \dots, x_p) - f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)| &\leq |f_j(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p) - f_j(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p^0)| + \\ &+ |f_j(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p^0) - f_j(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}^0, x_p^0)| + \dots \\ &+ |f_j(x_1, x_2^0, \dots, x_p^0) - f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)| = \\ &= \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_p}(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, \xi_p) \right| |x_p - x_p^0| + \\ &\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_{p-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, \xi_{p-1}, x_p^0) \right| |x_{p-1} - x_{p-1}^0| + \dots \\ &+ \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \dots, x_p^0) \right| |x_1 - x_1^0| \leq M_j \sum_{k=1}^p |x_k - x_k^0|, \end{aligned}$$

unde $M_j = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \sup_{x \in V} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right| \right\}$. De aici, rezultă clar că f_j este continuă global în x_0 , $\forall j = \overline{1, q}$. ◀

Observație: O condiție suficientă pentru existența unei vecinătăți $V \subseteq D$, a punctului x_0 , pe care funcția f , derivabilă parțial, de ordinul I, pe D să aibă derivatele parțiale, ale tuturor componentelor sale, mărginite, ar fi continuitatea în x_0 a respectivelor derivate.

Diferențiala și diferențiabilitatea Fréchet a unei funcții reale, într-un punct sau pe o mulțime

Utilizând acum sugestia oferită de Propoziția 10.3, putem introduce aici noțiunile de diferențiabilitate și diferențială Fréchet, în conformitate cu următoarea definiție.

Definiția 10.6 Fie D o mulțime deschisă și nevidă din \mathbb{R}^p , iar $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$.

- a) Spunem că funcția f este **diferențiabilă Fréchet într-un punct** $x_0 \in D$, dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și o funcție $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ și

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall x \in D,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ desemnează o normă (de exemplu, cea euclidiană) pe \mathbb{R}^p , iar $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ este vectorul nul din \mathbb{R}^q .

În acest caz, aplicația $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ se numește **diferențiala (derivata) Fréchet, de ordinul I, a funcției f , în punctul x_0** , depinde de x_0 și se notează, convențional, cu $(df)(x_0)$.

- b) Spunem că f este **diferențiabilă Fréchet pe o mulțime** $\tilde{D} \subseteq D$ dacă și numai dacă f este diferențiabilă, în sensul de la a) în orice punct $x_0 \in \tilde{D}$.

Observații: Pe baza Definiției 10.6 a), deducem că, într-o altă exprimare, echivalentă cu cea din cadrul definiției menționate, putem spune că f este Fréchet-diferențiabilă în x_0 dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$$

sau, încă, echivalent, există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0_{\mathbb{R}}.$$

O altă modalitate (echivalentă cu cea din Definiția 10.6 a)) de a exprima faptul că f este diferențiabilă Fréchet în x_0 , este cea care afirmă că dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ și, odată cu T , o aplicație $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}}, & x \neq x_0 \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, & x = x_0, \end{cases} \quad x \in D,$$

astfel încât α să fie continuă în x_0 și, prin asta, să aibă loc relația

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|, \forall x \in D,$$

atunci f se poate numi Fréchet-diferențiabilă în x_0 .

Propoziția 10.4 Fie D o mulțime nevidă și deschisă din \mathbb{R}^p , $x_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă f este diferențiabilă Fréchet în x_0 , atunci diferențiala $(df)(x_0)$ este unică.

Demonstrație: Admițând că $(df)(x_0)$ nu ar fi unică, ar exista T_1 și $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ astfel încât:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T_1(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T_2(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0 \quad (\in \mathbb{R}).$$

Atunci, am avea $(\forall x \in D, x \neq x_0)$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|T_1(x - x_0) - T_2(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} \|(f(x) - f(x_0) - T_2(x - x_0)) - (f(x) - f(x_0) - T_1(x - x_0))\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\ &\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - T_2(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} + \frac{\|f(x) - f(x_0) - T_1(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \end{aligned}$$

De aici, luând $x = x_0 + tu$, cu $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$ și $t \in \mathbb{R}^*$, ar rezulta:

$$0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{\|T_1(tu) - T_2(tu)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|tu\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{|t| \|T_1(u) - T_2(u)\|_{\mathbb{R}^q}}{|t| \|u\|_{\mathbb{R}^p}}.$$

Prin urmare, am avea: $T_1(u) = T_2(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$. Dar cum $T_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = T_2(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, ajungem, în definitiv, la concluzia: $T_1 = T_2$. ◀

Cu privire la mulțimea funcțiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ care sunt diferențiabile Fréchet (într-un punct din D sau pe o mulțime $\tilde{D} \subseteq D$), se poate spune că ea nu este vidă, deoarece cel puțin funcțiile identice constante și funcțiile liniare aparțin respectivei mulțimi, în baza următorului rezultat:

Propoziția 10.5 a) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu D mulțime deschisă, este o funcție constantă, atunci f este Fréchet-diferențiabilă pe D și $(df)(x) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)}$, $\forall x \in D$.

b) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o funcție liniară, atunci f este diferențiabilă Fréchet pe D și $(df)(x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Demonstrație: a) Pentru $f(x) = c$, cu $c \in \mathbb{R}^q$, $\forall x \in D$, avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)}(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{c - c}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

b) pentru $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$, avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - f(x) + f(x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

Deci, există $(df)(x_0) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in D$. ◀

Un alt rezultat, afirmând, în esență, că diferențiala unei funcții $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, într-un punct x_0 , are, drept componente, diferențialele $(df_j)(x_0)$, $j = \overline{1, q}$, este următorul:

Teorema 10.5 Fie D o mulțime nevidă și deschisă din \mathbb{R}^p , x_0 un punct din D și o funcție $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall j = \overline{1, q}$. Funcția f este Fréchet-diferențiabilă în x_0 dacă și numai dacă toate componentele sale - f_1, f_2, \dots, f_q - sunt diferențiable Fréchet în x_0 . În plus, are loc egalitatea:

$$(df)(x_0) = ((df_1)(x_0), (df_2)(x_0), \dots, (df_q)(x_0)),$$

unde $(df_j)(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$, $\forall j = \overline{1, q}$.

Demonstrație: Potrivit Definiției 10.6 și observației ce o succede, f este diferențiabilă Fréchet în x_0 , dacă și numai dacă există $T = (T_1, T_2, \dots, T_q) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$, cu $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$, $\forall k = \overline{1, q}$, precum și $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu $\alpha_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1, q}$, astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ și

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall x \in D.$$

Pe componente, aceasta înseamnă că, $\forall k = \overline{1, q}$, avem:

$$f_k(x) = f_k(x_0) + T_k(x - x_0) + \alpha_k(x)\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall x \in D,$$

cu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_k(x_0) = \alpha_k(x_0) = 0$, $\forall k = \overline{1, q}$. Prin urmare, se poate spune că f_k este diferențiabilă Fréchet în x_0 și $(df)(x_0) = T_k$, $\forall k = \overline{1, q}$. În plus, are loc relația:

$$(df)(x_0) = T = (T_1, T_2, \dots, T_q) = ((df_1)(x_0), (df_2)(x_0), \dots, (df_q)(x_0)).$$

Reciproc, dacă fiecare funcție f_k ($k = \overline{1, q}$) este diferențiabilă Fréchet în x_0 , atunci există $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$, $\forall k = \overline{1, q}$ și $\alpha_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\alpha_k(x) = \frac{(f_k(x) - f_k(x_0) - T_k(x - x_0))}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}}$, $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, $\alpha_k(x_0) = 0$ și $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_q(x))$. Or, aceasta înseamnă că f este diferențiabilă Fréchet în x_0 , cu $(df)(x_0) = T$. ◀

Propoziția 10.6 Dacă D este o mulțime nevidă și deschisă din \mathbb{R}^p , x_0 un punct din D , iar $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție diferențiabilă Fréchet în x_0 , atunci f este continuă (global) în x_0 .

Demonstrație: Într-adevăr, dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ este Fréchet-diferențiabilă în x_0 , atunci există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ și $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, continuă și nulă în x_0 , astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall x \in D.$$

De aici, ținând seama de faptul că $\lim_{x \rightarrow x_0} T(x - x_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \|x - x_0\| = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, deducem clar că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ există și este egală cu $f(x_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0 . ◀

Observație: Propoziția 10.6 ne arată că necesară diferențiabilității lui f în x_0 este continuitatea funcției f în x_0 , în sens global. Nu însă și suficientă.

Legătura dintre diferențiala Fréchet și derivata (diferențiala) Gâteaux este, în parte, dată de următoarea teoremă.

Teorema 10.6 Fie $\emptyset \neq D$ o mulțime deschisă din \mathbb{R}^p , $x_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă f este Fréchet-diferențiabilă în x_0 , atunci f este derivabilă Gâteaux în x_0 și are loc relația:

$$f'(x_0; v) = ((df)(x_0))(v), \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

(Altfel spus, există $f'(x_0)$ și $f'(x_0) = (df)(x_0)$).

Demonstrație: Deoarece f este Fréchet-diferențiabilă în x_0 , cu F -diferențiala $(df)(x_0)$, există $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, continuă și nulă în x_0 , astfel încât $f(x) = f(x_0) + ((df)(x_0))(x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}$, $\forall x \in D$. Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} &= \frac{((df)(x_0))(tu) + \alpha(x_0 + tu) \|tu\|_{\mathbb{R}^p}}{t} = \\ &= ((df)(x_0))(u) + \alpha(x_0 + tu) \frac{|t|}{t}, \forall t \in \mathbb{R}^*, |t| < r, u \in \mathbb{R}^p, \|u\|_{\mathbb{R}^p} = 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, există $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = ((df)(x_0))(u)$. De aici, mai departe, avem:

$$\begin{aligned} f'(x_0; v) &= f' \left(x_0; \|v\|_{\mathbb{R}^p} \frac{v}{\|v\|_{\mathbb{R}^p}} \right) = \|v\|_{\mathbb{R}^p} \cdot f' \left(x_0; \frac{v}{\|v\|_{\mathbb{R}^p}} \right) = \\ &= \|v\|_{\mathbb{R}^p} \cdot ((df)(x_0)) \left(\frac{v}{\|v\|_{\mathbb{R}^p}} \right) = ((df)(x_0))(v), \forall v \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}. \end{aligned}$$

Dar cum și $f'(x_0; \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q} = ((df)(x_0))(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})$, putem conchide că există $f'(x_0; v) \in \mathbb{R}^q$ (deci f este G -diferențiabilă în x_0) și

$$f'(x_0; v) = ((df)(x_0))(v), \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Altfel spus, există $f'(x_0)$ (deci f este G -derivabilă în x_0) și $f'(x_0) = (df)(x_0)$. ◀

Observații: Pe baza acestei teoreme și a faptului că $f'(x_0; e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$, putem spune că $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = ((df)(x_0))(e_k)$, $\forall k = \overline{1, p}$. Astfel, $\forall v = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ avem

$$((df)(x_0))(v) = ((df)(x_0)) \left(\sum_{k=1}^p v_k e_k \right) = \sum_{k=1}^p v_k ((df)(x_0))(e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \langle (\nabla f)(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle_e,$$

când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$.

În cazul unei funcții vectoriale $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, am avea

$$((df)(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v}) = (J_f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v}) = \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq k \leq p}}(\mathbf{x}_0) \right)(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p,$$

ori de câte ori D este o mulțime deschisă, iar f este Fréchet-diferențiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$. De aici, deducem că, în raport cu perechea de baze canonice din \mathbb{R}^p și respectiv \mathbb{R}^q , matricea asociată aplicației liniare $(df)(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este tocmai Jacobiana $J_f(\mathbf{x}_0)$.

Dacă, în continuare, ținem seama de faptul că aplicațiile de proiecție $pr_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $pr_k(\mathbf{x}) = x_k, \forall k = \overline{1, p}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, sunt liniare și deci, prin aplicarea Propoziției 10.5, sunt diferențiabile Fréchet pe D , cu $d(pr_k) = pr_k, \forall k = \overline{1, p}$, atunci, ori de câte ori funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$, avem:

$$\begin{aligned} ((df)(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v}) &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) v_k = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) pr_k(\mathbf{v}) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) pr_k \right)(\mathbf{v}) = \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) d(pr_k) \right)(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Cum $pr_k(\mathbf{x}) = x_k$, diferențiala $d(pr_k)$, care este independentă de punctul în care o calculăm, se notează, prin convenție, cu $dx_k, \forall k = \overline{1, p}$. Astfel găsim formula de calcul următoare:

$$(df)(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) dx_k.$$

Făcând uz de vectorul $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_p)$, se poate scrie

$$(df)(\mathbf{x}_0) = \langle (\nabla f)(\mathbf{x}_0), dx \rangle_e,$$

ori de câte ori funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $\mathbf{x}_0 \in D$.

Analog, pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ care este Fréchet-diferențiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$, deducem că are loc formula:

$$(df)(\mathbf{x}_0) = (J_f(\mathbf{x}_0))(dx).$$

În anumite condiții, prezentate în enunțul teoremei ce urmează (fără demonstrație, aici), diferențiabilitatea Gâteaux într-un punct implică totuși diferențiabilitatea Fréchet în acel punct.

Teorema 10.7 *Fie D o mulțime deschisă și nevidă din \mathbb{R}^p , $\mathbf{x}_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă f este G -derivabilă pe o vecinătate W a punctului \mathbf{x}_0 , de forma $\{\mathbf{u} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \mid t \in [0, 1], \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p\}$, iar G -derivata $f'(\cdot)$ este continuă în \mathbf{x}_0 (în sensul topologiei spațiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$), atunci f este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{x}_0 și $(df)(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0)$.*

Acest rezultat, reformulat la nivelul derivatelor parțiale de ordinul întâi ale componentelor lui f (în raport cu componentele argumentului vectorial \mathbf{x}), constituie următorul criteriu de Fréchet-diferențiabilitate:

"Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu D mulțime nevidă și deschisă, este derivabilă parțial, de ordinul I , pe o vecinătate W a punctului $x_0 \in D$ (cu $W \subseteq D$), iar derivatele parțiale $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ (ale componentelor lui f) sunt continue în x_0 , atunci f este diferențiabilă Fréchet în x_0 și matricea asociată aplicației liniare $(df)(x_0)$ este chiar Jacobiana lui f în x_0 , adică $J_f(x_0)$."

Mai mult, dacă $f \in \mathcal{C}^1(\tilde{D})$, unde $\emptyset \neq \tilde{D} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p$, atunci f este Fréchet-diferențiabilă pe \tilde{D} . De aceea, funcțiilor din $\mathcal{C}^1(\tilde{D})$ li se mai spune **continuu-diferențiabile** (pe \tilde{D}).

Propoziția 10.7 (Reguli de calcul cu diferențiale Fréchet)

Fie D o mulțime deschisă și nevidă din \mathbb{R}^p , iar x_0 un punct din D .

i) Dacă f și $g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt Fréchet-diferențiabile în x_0 , iar λ și $\mu \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\lambda f + \mu g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă Fréchet în x_0 și are loc formula

$$(d(\lambda f + \mu g))(x_0) = \lambda(df)(x_0) + \mu(dg)(x_0).$$

ii) Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt diferențiabile Fréchet în x_0 , atunci funcția $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ este Fréchet-diferențiabilă în x_0 și are loc relația:

$$(d(f \cdot g))(x_0) = g(x_0) \cdot (df)(x_0) + f(x_0) \cdot (dg)(x_0).$$

iii) Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}^*$ sunt diferențiabile Fréchet în x_0 , atunci funcția $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă Fréchet în x_0 și are loc egalitatea:

$$\left(d\left(\frac{f}{g}\right)\right)(x_0) = \frac{1}{g(x_0)}(df)(x_0) - \frac{1}{g^2(x_0)}f(x_0)(dg)(x_0).$$

iv) (**regula "lanțului"**) Dacă Ω este o mulțime deschisă și nevidă din \mathbb{R}^q , funcția $f : D \rightarrow \Omega$ este Fréchet-diferențiabilă în x_0 , iar $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ este Fréchet-diferențiabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă Fréchet în x_0 și are loc formula:

$$(d(g \circ f))(x_0) = (dg)(f(x_0)) \circ (df)(x_0).$$

Demonstrație: Pentru i), ii) și iii), se folosește Definiția 10.6. În ceea ce privește iv), avem:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) - (((dg)(f(x_0)))) \circ ((df)(x_0))(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \\ & = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - (dg)(f(x_0))(f(x) - f(x_0))}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} + \\ & + \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (((dg)(f(x_0)))) \left(\frac{f(x) - f(x_0) - (df)(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^p}} \right) = \\ & = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} + ((dg)(f(x_0))) (\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} + \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$



Observație: La nivelul matricilor Jacobiene, regula "lanțului" se redă prin relația

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0),$$

care, la rândul ei, la nivelul elementelor acestor matrici, adică la nivelul derivatelor parțiale ale componentelor lui $h = g \circ f$, g și f , se prezintă astfel:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^q \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}.$$

În situația în care $m = p = q \geq 2$, matricile implicate sunt pătratice și, prin considerarea determinantilor lor, avem relația:

$$\det(J_{g \circ f}(\mathbf{x}_0)) = \det(J_g(f(\mathbf{x}_0))) \cdot \det(J_f(\mathbf{x}_0)).$$

Altfel spus, avem:

$$\frac{D(h_1, h_2, \dots, h_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(\mathbf{x}_0) = \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_p)}{D(y_1, y_2, \dots, y_p)}(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(\mathbf{x}_0).$$

Când $f \in \mathcal{C}^1(D; E)$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ și $E \subseteq \mathbb{R}^p$ sunt mulțimi deschise și nevide, atunci, dacă f este și bijectivă, există $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(E; D)$ și $J_{f^{-1}}(f(\mathbf{x}_0)) = J_f^{-1}(\mathbf{x}_0)$.

Definiția 10.7 Date fiind mulțimile deschise și nevide D_1 și D_2 din \mathbb{R}^p , se numește **difeomorfism** (sau **transformare regulată** sau **izomorfism diferențiabil**) de la D_1 la D_2 o bijectie $T : D_1 \rightarrow D_2$, de clasă \mathcal{C}^1 pe D_1 , a cărei inversă $T^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$ este o aplicație continuă, iar matricea jacobiană $J_T(\mathbf{x})$ este nesară, $\forall \mathbf{x} \in D$ (adică determinantul funcțional $\frac{D(T_1, T_2, \dots, T_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(\mathbf{x}_0)$ este nenul).

Orice difeomorfism induce, din punct de vedere geometric, o transformare (schimbare) de coordonate (nu numai decît liniară).

Derivate și diferențiale de ordin superior

Mai întâi, în cazul unei funcții reale scalar-scalar $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fie $D_1 \neq \emptyset$ acea submulțime de puncte din D în care f este derivabilă (ordinar, de ordinul I). Cu alte cuvinte, se poate vorbi despre derivata $f' : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă aceasta, la rândul ei, este derivabilă într-un punct x_0 din $D_1 \cap D'_1$, atunci elementul $(f')'(x_0)$ se notează cu $f''(x_0)$ și se numește **derivata a doua a lui f în x_0** , fiind din \mathbb{R} . Când $f''(x)$ există și este finită, pentru orice $x \in D_2 \subseteq D_1$, atunci spunem că f este de două ori derivabilă pe D_2 , iar funcția $x \in D_2 \mapsto f''(x) \in \mathbb{R}$ se numește **derivata a doua a lui f** .

Prin recurență, spunem că f este derivabilă de n -ori ($n \in \mathbb{N}^*$) în $x_0 \in \tilde{D} \subseteq D$ dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă o dată în punctul x_0 și $f^{(n)}(x_0)$, adică $(f^{(n-1)})'(x_0)$, se numește derivata de ordinul n a funcției f în x_0 . La nivel de funcții, $f^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul întâi a derivatei de ordinul $(n-1)$ a lui f . În mod asemănător se introduc și derivatele laterale de ordin superior ale unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ într-un punct $x_0 \in D$.

Tot recursiv, se pot defini și noțiunile de diferențială Gâteaux, derivată parțială, gradient și diferențială Fréchet de ordin superior pentru funcții reale de argument vectorial.

Astfel, în ceea ce privește derivatele parțiale, putem defini, prin recurență, derivate parțiale de un ordin oarecare $l \in \mathbb{N}^*$, plecând de la derivatele parțiale de ordinul $l-1$. Dacă, pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, există derivata $\frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_l}}$, pe o vecinătate a punctului $x_0 \in D$, și această

funcție admite derivată parțială (de ordinul întâi), în raport cu x_{i_1} în x_0 , unde i_1, i_2, \dots, i_l sunt elemente ale mulțimii $\{1, 2, \dots, p\}$, atunci:

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_l}}(x_0) = \frac{\partial \left(\frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_l}} \right)}{\partial x_{i_1}}(x_0).$$

În general, cum indicii i_1, i_2, \dots, i_l se pot repeta, se preferă exprimarea

$$(D^\alpha f)(x_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_p} x_p}(x_0), \text{ unde } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p, \alpha_k \in \mathbb{N}^*, k = \overline{1, p},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ numindu-se *multi-indice* p -dimensional. Dacă cel puțin două dintre componentele lui α sunt nenule, atunci **derivata parțială** în cauză se numește **mixtă**. Altminteri ea se numește *derivată parțială nemixtă*.

În cazul în care $|\alpha| = 2$, derivatele mixte care pot exista sunt egale, în condițiile teoremei lui Schwartz sau ale teoremei lui Young, teoreme ale căror enunțuri (fără demonstrație) le dăm aici, în continuare.

Teorema 10.8 (H. A. Schwartz)

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ are derivatele parțiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existente pe o vecinătate a unui punct interior $x_0 \in D$ și aceste derivate sunt continue în x_0 , atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

Teorema 10.9 (G. C. Young)

Dacă toate derivatele parțiale de ordinul întâi ale unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ există pe o vecinătate a unui punct x_0 , interior unei mulțimi nevide $\tilde{D} \subseteq D$ și aceste derivate sunt diferențiabile Fréchet în x_0 , atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ există și coincid.

Mai general, dacă o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivate parțiale până la ordinul $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, continue pe mulțimea nevidă și deschisă D , atunci

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(x_0) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}}(x_0),$$

oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, $x_0 \in D$ și (j_1, j_2, \dots, j_p) obținut prin permutarea lui (i_1, i_2, \dots, i_p) .

Definiția 10.8 Fie D o mulțime deschisă și nevidă din \mathbb{R}^p și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este **de clasă \mathcal{C}^m pe D** ($m \geq 2$) dacă f este derivabilă parțial de ordinul m (în raport cu toate variabilele) pe D și toate derivatele parțiale de ordin m sunt continue pe D . Mulțimea tuturor funcțiilor de clasă \mathcal{C}^m pe D se notează cu $\mathcal{C}^m(D)$.

Definind $\mathcal{C}^\infty(D)$ ca fiind mulțimea **funcțiilor indefinit derivabile parțial pe D** , adică mulțimea funcțiilor de clasă $\mathcal{C}^m(D)$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, vedem că are loc relația:

$$\mathcal{C}^\infty(D) \subset \dots \subset \mathcal{C}^m(D) \subset \mathcal{C}^{m-1}(D) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}^0(D).$$

În ceea ce privește diferențiabilitatea Fréchet de ordin superior a unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, are loc următoarea definiție.

Definiția 10.9 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă și deschisă, iar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

- a) Spunem că f este **de m ori** ($m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$) **diferențiabilă Fréchet într-un punct** $x_0 \in D$ dacă f este derivabilă parțial de $(m-1)$ ori într-o vecinătate $V \subseteq D$ a lui x_0 și toate derivatele parțiale de ordinul $(m-1)$ ale lui f sunt diferentiabile Fréchet, de ordinul întâi, în x_0 .
- b) Spunem că f este **de m ori diferențiabilă Fréchet pe** $\tilde{D} \subseteq D$ dacă f este de m ori Fréchet diferentiabilă în orice punct $x \in \tilde{D}$.
- c) Numim **diferențială Fréchet de ordinul m** a funcției f în punctul $x_0 \in D$, aplicația $(d^m f)(x_0) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$((d^m f)(x_0))(u) = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \cdots + u_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \right)^{<m>}, \forall u \in \mathbb{R}^p,$$

unde expresia din membrul secund înseamnă că paranteza se ridică, formal, la puterea simbolică m , după formula polinomială a lui Newton.

De exemplu, pentru $m = 2$, avem:

$$((d^2 f)(x_0))(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j, \forall u = (u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 10.10 (Formula lui Taylor)

Fie D o mulțime deschisă din \mathbb{R}^p , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de $(m+1)$ ori diferentiabilă Fréchet pe D , x_0 un punct din D și $S_{d_e}(x_0; r)$ o sferă deschisă inclusă în D . Atunci, pentru orice $x \in S_{d_e}(x_0; r)$, există un punct ξ , aparținând segmentului cu extremitățile x_0 și x , astfel încât:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!} (df)(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} (d^2 f)(x_0)(x - x_0) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{m!} (d^m f)(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{(m+1)!} (d^{m+1} f)(\xi)(x - x_0). \end{aligned}$$

Demonstrație: Considerând un versor oarecare $v \in \mathbb{R}^p$ și $t \in (-r, r)$, se definește $\varphi : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, prin $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$. Cum f este de $(m+1)$ -diferentiabilă pe D , rezultă că și φ este la fel pe $(-r, r)$. În plus, vedem că avem

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^p v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + tv) \right)^{<k>}, \forall k = \overline{1, m+1}.$$

De aici, pentru $v = \frac{x - x_0}{t}$, cu $t \in (-r, r) \setminus \{0\}$, găsim:

$$t^k \varphi^{(k)}(0) = (d^k f)(x_0)(x - x_0), \forall k = \overline{1, m}.$$

Pe de altă parte, are loc egalitatea

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!} \varphi'(0) + \cdots + \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\tau),$$

unde $\tau = \lambda t$, cu $\lambda \in (0, 1)$, $\forall t \in (-r, r)$.

Astfel, întrucât $t^{m+1}\varphi^{(m+1)}(\tau) = (d^{(m+1)}f)(\xi)(x-x_0)$, cu $\xi = x_0 + \tau v$, deducem că este adevărată formula din enunț. ◀

Bibliografie recomandată

1. F. Iacob - *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.
2. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. 11)*, Editura Polirom, Iași, 1998.
3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferențial (cap. 5 și 6)*, Editura Tehnopress, Iași, 2005
4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferențial (cap. 6 și 7)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
5. Rodica Mihaela Dăneț, Florica Voicu, S. D. Niță, Iuliana Popescu, M. V. Popescu - *Curs modern de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
6. Ecaterina Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
7. David B. Massey - *Worldwide Multivariable Calculus*, Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2015.
8. D. Guichard & al. - *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco, 2016.