

Cursul 3

Șiruri de elemente dintr-un inel (corp) ordonat.

Construcția corpului \mathbb{R} . Șiruri de numere reale.

În ideea construirii lui \mathbb{R} prin metoda lui Cantor, prezentăm aici, mai întâi, noțiunea de șir dintr-un inel sau corp ordonat oarecare, în mod special dintr-un domeniu de integritate sau un corp comutativ cu ordonare. După construcția corpului \mathbb{R} , expunem, prin particularizare, câteva adevăruri de bază cu privire la șiruri numerice reale.

Șiruri de elemente dintr-un inel (corp) ordonat

Relațiile de ordine de pe inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și corpul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ se înscriu într-un context mai general, relativ la ordinea (în abstract) pe un inel, domeniu de integritate sau corp.

Definiția 3.1 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Prin **ordonare** pe A înțelegem o submulțime nevidă P a lui A , astfel încât $0 \notin P$ și sunt satisfăcute condițiile:

$O_1)$ $\forall x \in A$, avem $x \in P$ sau $x = 0$ (elementul neutru în raport cu “+”) sau $(-x) \in P$ (opusul lui x);

$O_2)$ $\forall x, y \in P$, avem $x + y \in P$ și $x \cdot y \in P$.

P se numește (în acest context) **mulțimea elementelor pozitive** ale lui A (sau **corpul pozitiv** al lui A). Despre A se spune că este **inel ordonat de P** . Un element $x \in P \subseteq A$ se numește **pozitiv**, iar un element $x \in A \setminus (P \cup \{0\})$ se numește **negativ**.

Observații:

- 1) \mathbb{N}^* este o ordonare pe \mathbb{Z} .
- 2) Când A este un inel unitar și nenul (având elementul neutru, față de “ \cdot ”, notat cu 1, diferit de 0), iar P este o ordonare pe A , deducem că, întrucât $1 \cdot 1 = 1 = (-1) \cdot (-1)$, avem $1 \in P$. În plus, ținând seama de O_2), vedem că $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-ori}} \in P, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 3) Dacă $x, y \in A$ sunt negative (în sensul Definiției 3.1), atunci $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) \in P$, pentru că $(-x) \in P$ și $(-y) \in P$, iar P satisface O_2).

De asemenea, dacă $x \in A$ este negativ, iar $y \in A$ este pozitiv (adică $y \in P$), atunci $x \cdot y$ este negativ, deoarece $x \cdot y = -(-x) \cdot y = -((-x) \cdot y) \notin P$.

- 4) Când $(A, +, \cdot)$ este corp, inversul oricărui element dintr-o ordonare P pe A este tot în P , deoarece, $\forall x \in P$, avem $x \cdot x^{-1} = 1 \in P$.

Definiția 3.2 Fie $(A, +, \cdot)$ și $(A', +', \cdot')$ două inele ordonate de $P \subseteq A$ și respectiv $P' \subseteq A'$. O funcție $f: A \rightarrow A'$ se numește **izotonică** dacă “păstrează ordinea” (de la A la A'), adică dacă, pentru orice $x \in P$, avem $f(x) \in P'$.

Definiția 3.3 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel ordonat de o submulțime a sa, nevidă, P . Se spune că un element $x \in A$ este **mai mic decât un altul**, $y \in A$, în sensul lui P , și se scrie $x <_P y$ (sau, când nu există posibilitatea vreunei confuzii, pur și simplu $x < y$) dacă și numai dacă $y + (-x) \in P$. În același timp, se spune că y este **mai mare (în sensul lui P) decât x** .

În virtutea acestei definiții, un element x al lui A este P -pozitiv (adică $x \in P$) dacă $0 <_P x$. De asemenea, x din A este P -negativ, dacă $(-x)$ este P -pozitiv. Pentru x și y din A , prin $x \leq_P y$ vom înțelege una din situațiile $x <_P y$ sau $x = y$.

Propoziția 3.1 Fie $(A, +, \cdot, <_P)$ un inel ordonat. Atunci:

- i) $\forall x, y, z \in A$, cu $x <_P y$ și $y <_P z \implies x <_P z$;
- ii) $\forall x, y, z \in A$, cu $x <_P y$ și $0 <_P z \implies x \cdot z <_P y \cdot z$;
- iii) $\forall x, y \in A$, cu $x <_P y \implies x + z <_P y + z, \forall z \in A$.

Dacă $(A, +, \cdot, <_P)$ este un corp ordonat, atunci, în plus, avem:

- iv) $0 <_P x, 0 <_P y$ și $x <_P y \implies y^{-1} <_P x^{-1}$.

Propoziția 3.2 Dacă $(A, +, \cdot, <_P)$ este un domeniu de integritate (adică un inel comutativ, unitar și fără divizori ai lui zero), ordonat de $P \subseteq A$, K este corpul său total de fracții, iar P_K este mulțimea $\{a \cdot b^{-1} \mid 0 <_P a, 0 <_P b\}$, atunci P_K este o ordonare pe K .

Demonstrație: Observăm că, pentru orice $0 \neq x = a \cdot b^{-1}$ (convențional, $\frac{a}{b}$) din K , putem presupune că $0 <_P b$ (adică $b \in P$), întrucât $\frac{a}{b} = \frac{(-a)}{(-b)}$. Când $0 <_P a$, atunci, cum $0 <_P b$, avem $x = \frac{a}{b} \in P_K$. Dacă $0 <_P (-a)$, atunci $(-x) \in P_K$.

Este evident că $0 \notin P_K$ și că, neputând avea simultan x și $(-x)$ (ca elemente ale lui K) în P_K (căci, dacă ar fi așa, atunci $x = \frac{a}{b}$, iar $-x = \frac{c}{d}$, cu $0 <_P a, b, c, d$ și deci am avea $-\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, adică $-a \cdot d = c \cdot b \in P$, ceea ce ar fi absurd), se poate spune că P_K satisface O_1) din Definiția 3.1.

De asemenea, P_K satisface și O_2) din aceeași definiție. Într-adevăr, pentru orice $x = \frac{a}{b}$ și $y = \frac{c}{d}$ (cu a, b, c, d P -pozitive), avem $a \cdot c$ și $b \cdot d$ P -pozitive, adică $x \cdot y = \frac{ac}{bd} \in P_K$. Totodată, $x + y = \frac{ad+bc}{bd} \in P_K$, căci $0 <_P ad + bc$ și $0 <_P bd$.

În concluzie, P_K este o ordonare pe K . ◀

Definiția 3.4 Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat și $x \in A$. Se numește **valoarea absolută** a lui x (sau **modulul** lui x) și se notează cu $|x|$, acel element din A dat prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 < x \text{ (adică } x \in P) \text{ sau } x = 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \text{ (adică } x \notin P). \end{cases}$$

Propoziția 3.3 Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat. Atunci $|x|$ este unicul element, y , din A , astfel încât $0 \leq y$ și $y \cdot y = x \cdot x$. Totodată, $y = |x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$. În plus, avem:

- j) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|, \forall u, v \in A$ și
- jj) $|u + v| \leq |u| + |v|, \forall u, v \in A$.

Simplă fiind, demonstrația acestei propoziții, la fel ca aceea a Propoziției 3.1, este lăsată pe seama tratării ei, ca un exercițiu de soluționat, de către destinatarii acestor note de curs.

Teorema 3.1 Fie $(K, +, \cdot, <)$ un corp ordonat și corpul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ al numerelor raționale, ordonat în raport cu submulțimea sa $\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$. Există atunci un monomorfism de corpuri, unic și izotonic, de la \mathbb{Q} la K .

Demonstrație: Fie 1_K elementul neutru față de înmulțirea din K și $f : \mathbb{Q} \rightarrow K$, funcția definită prin

$$f(x) = f(a) \cdot (b \cdot 1_K)^{-1}, \forall x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*),$$

unde prin $b \cdot 1_K$ înțelegem $\underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{\text{de } b \text{ ori}}$, iar $f(a)$ înseamnă $a \cdot 1_K$, dacă $a \in \mathbb{N}^*$, $f(a) = 0$, dacă $a = 0$ și $f(a) = (-a) \cdot 1_K$, dacă $a \in (-\mathbb{N}^*)$. Se verifică lesne că f este un morfism injectiv de corpuri, de la \mathbb{Q} la K , bine determinat prin modul în care este definit. În plus, $\forall x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ (cu $a, c \in \mathbb{Z}$ și $b, d \in \mathbb{N}^*$), așa încât $x \leq y$ (adică $ad \leq bc$), avem $(bc - ad) \cdot 1_K \geq 0$, ceea ce înseamnă că $a \cdot (b \cdot 1_K)^{-1} \leq c \cdot (d \cdot 1_K)^{-1}$, adică $f(x) \leq f(y)$, când a și $c \in \mathbb{N}$. La fel și în celelalte cazuri. Deci f este izotonică, potrivit Definiției 3.2. ◀

Definiția 3.5 *i) Un inel $(A, +, \cdot, <)$, ordonat și cu unitate (în raport cu “ \cdot ”), se numește **inel arhimedian** dacă, pentru orice pereche de elemente pozitive x, y din A , există un număr natural n astfel încât $y < n \cdot x$ (unde $n \cdot x$ înseamnă $\underbrace{x + x + \dots + x}_{n - \text{ori}}$).*

*ii) Un corp ordonat se numește **arhimedian** dacă, privit ca inel, este un inel arhimedian.*

Observație. În situația ii) din cadrul Definiției 3.5, întrucât $y < nx$ echivalează cu $y \cdot x^{-1} < n \cdot 1_K$, unde 1_K este unitatea corpului K în cauză, putem spune că acel corp ordonat K se numește arhimedian dacă, pentru orice $u \in K$, există $n \in \mathbb{N}$, așa încât $u < n \cdot 1_K$.

Definiția 3.6 Fie B o mulțime nevidă. Se numește **șir de elemente din B** o funcție h definită pe \mathbb{N} și cu valori în B .

Se notează cu x_n valoarea funcției h în punctul $n \in \mathbb{N}$ și se numește termen general al șirului $h : \mathbb{N} \rightarrow B$. De regulă, în loc de $h : \mathbb{N} \rightarrow B$, șirul se notează prin $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $x_n = h(n)$ este termenul general al respectivului șir. Mulțimea termenilor șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ se notează, uzual, cu $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 3.7 Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ se numește **majorat** (respectiv **minorat**) dacă $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o mulțime majorată (respectiv minorată). Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ se numește **mărginit** dacă este simultan majorat și minorat, adică dacă există a și b din A , astfel încât $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă nu este mărginit, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ se numește **nemărginit**.

Definiția 3.8 Un șir $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ de elemente ale unui inel ordonat $(A, +, \cdot, <)$ se numește **monoton** dacă h sau $-h$ este o funcție izotonică. Șirul $(h(n))_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **crescător** dacă h este izotonică și respectiv **descrescător** când $-h$ este o funcție izotonică.

Definiția 3.9 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ un șir cu elemente dintr-o mulțime nevidă B și $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ un șir crescător strict (în sensul ordonării induse de \mathbb{N}^* pe \mathbb{N}). Șirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ se numește atunci **subșir** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiția 3.10 Fie $(K, +, \cdot, <)$ un corp ordonat (în sensul Definiției 3.1). Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ se numește **convergent** (în K) dacă există un element $x \in K$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε , așa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, să avem:

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

În acest context, spunem că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, numindu-l pe x **limita șirului** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propoziția 3.4 Limita unui șir convergent de elemente dintr-un corp ordonat este unică.

Demonstrație: Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ un șir presupus a fi convergent la două elemente, x și y , din corpul ordonat K . Atunci, în conformitate cu Definiția 3.10, $\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ și $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ și $|x_n - y| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon$. În consecință, $\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$, încât, prin intermediul oricărui $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n''_\varepsilon$, se obține:

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $|x - y| = 0_K$, adică $x = y$. Altfel, dacă $|x - y| > 0$, pentru $\varepsilon = |x - y| \cdot \lambda$, cu $0 < \lambda < (2 \cdot 1_K)^{-1}$, am avea

$$|x - y| < (2\lambda)|x - y|,$$

de unde $1_K < 2\lambda < 2(2 \cdot 1_K)^{-1} = 1_K$ (absurd). ◀

Definiția 3.11 Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente dintr-un corp ordonat K se numește **șir Cauchy** (sau **fundamental**) dacă pentru orice $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon.$$

Propoziția 3.5 Orice șir convergent dintr-un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$ este șir Cauchy.

Demonstrație: Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ un șir convergent, cu limita $x \in K$. Atunci, $\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, cu n și $m \geq n_\varepsilon$, are loc relația

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ceea ce ne dă dreptul să afirmăm că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir Cauchy.

Observație. Reciproca afirmației din Propoziția 3.5 nu are loc decât în anumite cazuri, nu pentru orice corp ordonat K . Astfel, în situația în care K este corpul numerelor raționale \mathbb{Q} , șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, definit recurent prin relația

$$x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

și cu $x_0 = 1$, este șir Cauchy, fiind unul cu limită (deoarece este crescător și mărginit), dar nu are limită în \mathbb{Q} . Deci nu este convergent în \mathbb{Q} .

Valabilitatea reciprocei Propoziției 3.5 este legată de noțiunea de completitudine a corpului K , în sensul următoarei definiții. ◀

Definiția 3.12 Un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$, în care orice șir Cauchy de elemente din K este convergent la un element din K , se numește **complet**.

În virtutea observației de mai sus, putem afirma că $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ nu este un corp ordonat complet. Vom vedea că $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ este un corp ordonat complet. Acest rezultat se bazează pe faptul că este adevărat următorul cuplu de afirmații din enunțul propoziției ce urmează.

Propoziția 3.6 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir Cauchy dintr-un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$. Atunci:

- i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir mărginit;
- ii) în situația în care $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent la un element x din K , șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la x .

Demonstrație: i) Cum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy din K , pentru $\varepsilon = 1_K$, va exista un număr natural n_1 așa încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n_1$, avem $|x_n - x_m| < 1_K$. Luând $m = n_1$, deducem de aici că $|x_n - x_{n_1}| < 1_K, \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N}$. Mai mult, rezultă că $|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1_K + |x_{n_1}|, \forall n \geq n_1$. Astfel, pentru $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1_K + |x_{n_1}|\}$, găsim:

$$|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) Deoarece $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy, rezultă că, pentru orice $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, așa încât

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_\varepsilon$$

În același timp, pentru că subșirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent la un element x din K , reiese că, pentru orice $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, așa încât

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_\varepsilon$$

Așadar, luând în continuare $n'_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, avem

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

pentru orice $n \geq n'_\varepsilon$, când $k \geq k'_\varepsilon$ (ceea ce implică $n_k \geq n'_\varepsilon$). ◀

Observație. În cazul în care K este \mathbb{R} (corpul ordonat al numerelor reale), Propoziția 3.6, în asociere cu teorema lui Cesàro, potrivit căreia orice șir mărginit de numere reale are cel puțin un subșir convergent, ne conduce la concluzia de completitudine a lui \mathbb{R} (în sensul Definiției 3.12). Ținând seama și de Propoziția 3.5, putem afirma că, **în \mathbb{R} , un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.**

Construcția corpului numerelor reale cu ajutorul șirurilor Cauchy de numere raționale

Fie $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ corpul ordonat al numerelor raționale și $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ mulțimea tuturor șirurilor Cauchy cu elemente din \mathbb{Q} . Pe lângă faptul că, în acest caz particular (în care corpul K este \mathbb{Q}), rezultatele prezentate până aici sunt aplicabile, despre $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ vedem că este o mulțime care poate fi structurată algebric ca un inel unitar comutativ.

Propoziția 3.7 *Mulțimea $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, înzestrată cu operațiile de adunare și de înmulțire a două șiruri, este un inel unitar, comutativ.*

Demonstrație: Pentru oricare două elemente din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, $\alpha = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $\beta = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vedem, pentru început, că $\alpha + \beta = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $\alpha \cdot \beta = (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt tot din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Aceasta întrucât, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ și $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n'_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, iar, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n''_\varepsilon$, avem $|y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Deci, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} = n_\varepsilon$, avem

$$|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

și

$$|x_m y_m - x_n y_n| \leq |y_m(x_m - x_n) + x_n(y_m - y_n)| \leq |y_m||x_m - x_n| + |x_n||y_m - y_n| \leq M_1 \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon,$$

dacă ținem seama aici de Propoziția 3.6 i). În consecință, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, avem $\alpha + \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ și $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Evident, operațiile de adunare și înmulțire în $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ sunt asociative și comutative, pe

baza asociativității și comutativității operațiilor de adunare și înmulțire în \mathbb{Q} . În plus, este ușor de văzut că șirurile constante $\bar{0} = (0)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ și $\bar{1} = (1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ sunt șiruri Cauchy și constituie elementul 0 și respectiv 1 din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. În fine, se vede că operația de înmulțire este distributivă față de adunarea pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Astfel, rezultă că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un inel comutativ și unitar. ◀

Se ia acum în considerație mulțimea $\mathcal{N}(\mathbb{Q}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, în legătură cu care se poate constata că $(\mathcal{N}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un inel în sine, subinel al lui $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$.

În plus, se poate deduce că, $\forall \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ și $n_a \in \mathbb{N}^*$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_a$, să avem $|a_n| \geq a$. Dacă, prin reducere la absurd, nu ar fi așa, atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, ar exista o infinitate de numere naturale $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ astfel încât $|a_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Cum $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, cu $n, m \geq n_\varepsilon$. Atunci, pentru $m = n_i \geq n_\varepsilon$, am avea:

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, adică $\alpha \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, în contradicție cu faptul că $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$.

Fie acum, în $\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, relația binară " \sim ", definită prin: $\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$. Se poate vedea, fără prea mare dificultate, că " \sim " este o relație de echivalență pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Astfel, se poate vorbi despre mulțimea cât $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$. Înzestrând această mulțime cu operațiile de adunare și de înmulțire a claselor de echivalență corespunzătoare, constatăm că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim, +, \cdot)$ este un corp comutativ și unitar. Într-adevăr, mai întâi, vedem că, în raport cu operațiile " $+$ " și " \cdot ", definite prin $]\alpha[+]\beta[=]\alpha + \beta[$ și respectiv $]\alpha[\cdot]\beta[=]\alpha \cdot \beta[$, $\forall]\alpha[,]\beta[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$, $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim, +, \cdot)$ este un inel unitar, comutativ. În plus, $\forall]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$, $\exists]\beta[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$ așa încât $]\alpha[\cdot]\beta[=]\bar{1}[$. Aceasta întrucât, după cum am constatat deja, $\forall \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ și $n_a \in \mathbb{N}$ așa încât $|a_n| \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_a$. Se ia atunci în considerație $\beta = \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_a}$ și se vede că $\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, întrucât $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leq \frac{1}{a^2} \cdot a^2 \varepsilon = \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_a$. Totodată, avem $a_n \cdot \frac{1}{a_n} = 1$, $\forall n \geq n_a$, ceea ce înseamnă că $\alpha \cdot \beta - 1 \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, adică $]\alpha[\cdot]\beta[= 1$ în $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$. Drept urmare, putem conchide că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Apelând acum la funcția $i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$, definită prin $i_{\mathbb{Q}}(a) =](a, a, \dots, a, \dots)[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$, $\forall a \in \mathbb{Q}$, vedem lesne că $i_{\mathbb{Q}}$ este un morfism injectiv de corpuri. În virtutea sa, îl putem privi pe \mathbb{Q} ca pe un subcorp al corpului $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$. Cum mulțimea $\tilde{P} = \{]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim \mid \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q}), \exists a \in \mathbb{Q}_+^*, \text{ și } n_a \in \mathbb{N}, \text{ încât } a_n \geq a, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_a\}$ constituie o ordonare pentru $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$ (în sensul Definiției 3.1), se poate vorbi de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$ ca despre o mulțime ordonată în raport cu relația de ordine " $<$ ", definită prin: $]\alpha[<]\beta[\iff]\beta[-]\alpha[\in \tilde{P}$.

Desemnând pe $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim, +, \cdot, <)$ ca fiind, prin definiție, corpul \mathbb{R} al numerelor reale, vedem că, prin teorema lui Malțev, \mathbb{R} este unic până la un izomorfism de corpuri comutative și ordonate. Totodată, acest \mathbb{R} satisface, cu siguranță, axiomele AR1 - AR14 din Definiția 2.18. În ceea ce privește axioma AR15, se poate vedea că, prin construcția de față, \mathbb{R} se arată a fi un corp arhimedian. Într-adevăr, pentru orice $r =]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim \equiv \mathbb{R}$, există $m \in \mathbb{N}$ așa încât $]\alpha[\leq]\bar{m}[=](m, m, \dots, m, \dots)[$. Aceasta întrucât, potrivit Propoziției 3.6, i), șirul $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ este mărginit și, așadar, există $M \in \mathbb{Q}_+^*$ așa încât $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se poate lua atunci $m = [M] + 1$, unde $[M]$ este partea întreagă a lui M . Amintindu-ne acum că \mathbb{R} este un corp complet (în sensul Definiției 3.12), se poate conta (în virtutea Propoziției 3.6, ii) și a deja menționatei teoreme a lui Cesàro) pe faptul că \mathbb{R} este un corp arhimedian complet. Finalmente, prin aplicarea teoremei care stipulează că, **într-un corp arhimedian complet, orice mulțime nevidă și majorată a respectivului corp are margine superioară care aparține corpului în cauză**, putem spune că \mathbb{R} , realizat prin procedeul expus mai sus, satisface și axioma AR15 din cadrul Definiției 2.18. Prin urmare, un astfel de \mathbb{R} își merită denumirea conferită de respectiva definiție.

În ceea ce privește demonstrația teoremei al cărei enunț este scos în evidență imediat mai sus, aceasta decurge după cum arătăm în continuare.

Fie K un corp arhimedian complet și $S \subseteq K$ o submulțime nevidă și majorată a sa. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ (arbitrar fixat), fie $T_n = \{y \in K \mid n \cdot x \leq y, \forall x \in S\}$. Mulțimea T_n este nevidă, întrucât, dacă $b \in K$ este un majorant al lui S , atunci orice element $y \in K$, pentru care $n \cdot b \leq y$, aparține lui T_n . De asemenea T_n are majoranți de forma $n \cdot x$, cu $x \in S$. Luăm atunci $y_n \in T_n$ pentru care există $x_n \in S$, așa încât $y_n - 1_K < n \cdot x_n \leq y_n$. Altfel spus: $\frac{y_n}{n} - \frac{1}{n} < x_n \leq \frac{y_n}{n}$. Notând cu z_n elementul $\frac{y_n}{n}$ din K , constatăm că șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir Cauchy în K . În acest sens, vedem că $|z_n - z_m| < \frac{1}{m}$, întrucât, dacă $z_n \leq z_m$, atunci $z_m - \frac{1}{m} \leq z_n \leq z_m$. Dacă nu ar fi așa, am avea $z_n \leq z_m - \frac{1}{m}$ și deci $z_m - \frac{1}{m} \in K$ ar fi majorant al lui S , ceea ce ar fi absurd, deoarece $x_n (\in S)$ este mai mare decât $z_m - \frac{1}{m}$. Când $z_m < z_n$, am deduce că $z_n - z_m = |z_n - z_m| < \frac{1}{m}$, întrucât, altfel, am avea $z_n - z_m \geq \frac{1}{m}$, adică $z_n - \frac{1}{m}$ ar fi majorant al lui S și deci, pentru $x_n = \frac{y_n}{n} = z_n > z_n - \frac{1}{n}$, ar rezulta că $z_n - \frac{1}{m} \leq z_n - \frac{1}{n}$, adică $m \leq n$, indiferent de cum sunt m și n din \mathbb{N} , ceea ce ar fi absurd. Ca atare, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir Cauchy din K . Cum, prin ipoteză, K este complet (în sensul Definiției 3.12), se poate spune că $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir convergent. Fie $w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in K$.

Să arătăm acum că w este un majorant al lui S . Presupunând, prin absurd, că nu-i așa, ar exista $x \in S$ astfel încât $w < x$. Atunci, deoarece $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la w , pentru $\varepsilon = \frac{x - w}{2}$, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, așa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, să avem $|z_n - w| \leq \frac{x - w}{2}$. În consecință, rezultă că, $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$x - z_n = x - w + w - z_n \geq x - w - |z_n - w| \geq x - w - \frac{x - w}{2} = \frac{x - w}{2} > 0.$$

Deci $x > z_n$, adică $x > \frac{y_n}{n}$ sau, altfel, $n \cdot x > y_n$, în contradicție cu faptul că $y_n \in T_n$. Deci w este într-adevăr un majorant al lui S . Mai mult chiar, w este $\sup S$, căci altfel, ar exista u , majorant al lui S , încât $u < w$. Atunci, reinterpretând faptul că șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la w , am avea, pentru $\varepsilon = \frac{w - u}{4}$, existența unui $n_0 \in \mathbb{N}$, așa încât $|z_n - w| \leq \frac{w - u}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. În consecință, am avea:

$$z_n - u = z_n - w + w - u \geq w - u - |z_n - w| \geq \frac{3(w - u)}{4} > 0,$$

ceea ce ar implica $z_n > u$, în contradicție cu faptul că u este majorant al lui S .

În concluzie, mulțimea S are marginea superioară w din K .

Șiruri de numere reale

Am văzut deja că, în \mathbb{R} , un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy. În plus, toate celelalte rezultate stabilite pentru șiruri dintr-un corp comutativ ordonat sunt valabile și pentru șiruri din \mathbb{R} . Pe lângă ele, mai sunt și alte rezultate, specifice șirurilor de numere reale, dintre care, în acest paragraf, prezentăm câteva.

Teorema 3.2 (de convergență a șirurilor reale monotone)

- i) Orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este crescător și majorat are limită în \mathbb{R} , aceasta fiind marginea superioară a mulțimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- ii) Orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este descrescător și minorat are limită în \mathbb{R} , aceasta fiind marginea inferioară a mulțimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstrație: i) Se poate vedea că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, crescător și majorat fiind, este un șir Cauchy. În caz contrar, ar exista $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k$ și $m \in \mathbb{N}$, cu $k, m \geq n$, astfel ca $|x_k - x_m| \geq \varepsilon$. Cum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este crescător, ar reieși atunci că, pentru $m = n$ și $k \geq n$, am avea $x_k - x_n \geq \varepsilon$. Astfel, pentru $n = 1$, ar exista $n_1 > 1$, așa încât $x_{n_1} \geq x_1 + \varepsilon$. La fel, pentru $n = n_1$, ar exista $n_2 > n_1$, așa încât $x_{n_2} \geq x_{n_1} + \varepsilon \geq x_1 + 2\varepsilon$. Prin recurență, s-ar putea construi, în acest fel, un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \geq x_1 + k\varepsilon$, ceea ce ar contrazice faptul că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un șir mărginit. Ca atare, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, este într-adevăr un șir Cauchy. Deci, în virtutea rezultatului menționat la începutul acestui paragraf, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este convergent. Fie $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Cum $x_n \leq x_m, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$, prin fixarea arbitrară a lui n și trecerea la limită după m , obținem că $x_n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Astfel x este un majorant al mulțimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă x n-ar fi marginea superioară a mulțimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, atunci ar exista un alt majorant al acesteia, să-l numim y , care să fie mai mic decât x . Așadar, am avea

$$x_n \leq y < x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De aici, ar reieși că $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq y < x$, ceea ce ar fi absurd. Prin urmare, x este chiar marginea superioară a mulțimii termenilor șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, adică a mulțimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Este suficient să considerăm șirul $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și să ne folosim de i). Atunci șirul $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, fiind crescător și majorat, va fi convergent la marginea superioară a mulțimii $\{-x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va fi convergent la $-\sup_{n \in \mathbb{N}}(-x_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. ◀

Firește, urmează:

Teorema 3.3 i) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un șir crescător și nemărginit, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

ii) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un șir descrescător și nemărginit, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Așadar, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este, în oricare dintre cele două situații, divergent în \mathbb{R} .

Demonstrație: i) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un șir crescător și nemărginit. Atunci mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este doar minorată (de x_1), nu și majorată. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ așa încât $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. De aici, $\forall n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, am avea $x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

ii) Se demonstrează aplicând i) asupra șirului $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ◀

În concluzie, orice șir monoton din \mathbb{R} are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Puncte limită. Limite extreme ale unui șir de numere reale

Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se poate vorbi despre mulțimea notată cu $L(x_n)$ și denumită **mulțimea punctelor limită** corespunzătoare șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. În conformitate cu Teorema 3.3, $L(x_n) \neq \emptyset, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definiția 3.13 Se numește **punct limită al unui șir** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, un element din $\overline{\mathbb{R}}$ care este limita unui subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiția 3.14 a) Se numește **limită inferioară a șirului** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (și se notează cu $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau cu $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$) marginea inferioară a mulțimii $L(x_n)$.

b) Se numește **limită superioară a șirului** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (și se notează cu $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau cu $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$) marginea superioară a mulțimii $L(x_n)$.

Observații

1) Evident, pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, avem:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un șir convergent la un element $x \in \mathbb{R}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ și, în acest caz, avem:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Se poate arăta că, și reciproc, dacă, pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, are loc relația $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, aceasta fiind valoarea comună a **limitelor sale extreme** $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

De asemenea, se mai poate arăta că, pentru orice șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, există un subșir monoton descrescător al acestuia, care să convergă la $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ și, totodată, un subșir monoton crescător care să convergă la $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Bibliografie orientativă

1. D. Bușneag, D. Piciu - *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
2. G. Păltineanu - *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura AGIR, București, 2002.
3. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
4. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Tehnopress, Iași, 2005.
5. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Edit. "Fair Partners", București, 2011.
6. C. G. Denlinger - *Elements of Real Analysis*, International Series in Mathematics, Jones and Bartlett Publishers International, London, 2012.
7. Todd Kemp - *Cauchy's Construction of \mathbb{R}* , UCSD Mathematics, San Diego, 2016.