Seminar 10

Discuție lucrare

1. Construiți mulțimea subformulelor și arborele asociat formulei:
   $F = (\forall x)\ (\exists y)(P(x, a) \wedge Q(y) \vee \rceil (\exists x)P(z, x))$
2. Aplicați substituția $s = [x/f(z)][z/b]$ formulei F, apoi determinați o structură S astfel încât $S((F)s)=0$

Pentru fiecare F, G ∈ **LP1** şi fiecare x, y ∈ $\mathcal{X}$, sunt adevărate următoarele echivalenţe:

1. $\rceil(\forall x)F \equiv (\exists x)(\rceil F)$

   $\rceil(\exists x)F \equiv (\forall x)(\rceil F)$

2. Dacă x nu apare liber în G, atunci:

   $(\forall x)(F \wedge G) \equiv (\forall x)(F) \wedge G$

   $(\forall x)(F \vee G) \equiv (\forall x)(F) \vee G$

   $(\exists x)(F \wedge G) \equiv (\exists x)(F) \wedge G$

   $(\exists x)(F \vee G) \equiv (\exists x)(F) \vee G$

3. $(\forall x)(F) \wedge (\forall x)(G) \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

   $(\exists x)(F) \vee (\exists x)(G) \equiv (\exists x)(F \vee G)$

4. $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$

   $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

5. Dacă x nu apare liber în F, atunci:

   $(\forall x)F \equiv F$

   $(\exists x)F \equiv F$.

Forma normală rectificată. O formulă F ∈ **LP1** se numeşte *rectificată* (sau se află în formă normală rectificată, pe scurt **FNR**) dacă nu conţine variabile care apar atât libere cât şi legate şi nu are cuantificatori care să lege aceeaşi variabilă, dar pe poziţii diferite în formulă.

Forma normală prenex. O formulă F ∈ **LP1** este în *formă normală prenex* (**FNP**, pe scurt) dacă $F = (\circ_1 y_1) \ldots (\circ_n y_n)G$, unde $n \in \mathbf{N}$, $\circ_i \in \{\exists, \forall\}$, $i \in [n]$, iar $y_1, \ldots, y_n$ sunt toate variabilele distincte care apar (liber) în G. În plus, G nu mai conţine cuantificatori.

Forma normală Skolem. O formulă F $\in$ **LP1** este în *formă normală Skolem* (**FNS**, pe scurt), dacă are aspectul F = $(\forall x_1) \dots (\forall x_k)G$, unde G nu mai conţine cuantificatori (este matricea lui F), iar $x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt variabile distincte şi reprezintă exact variabilele care apar în G (free(G) = $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$).

F este în **formă normală Skolem clauzală** (**FNSC**, pe scurt), dacă este în **FNS** şi matricea sa este în **FNC** (forma normală conjuctivă) într-un sens similar cu **LP** (literalii reprezentând acum formule atomice din **LP1** sau negaţii ale lor).

Exercițiu. Să se aducă la FNSC formula:

$$F = (\forall x) (\exists y)(P(x,z) \wedge Q(y) \vee (\forall z)(\exists x)P(z, x))$$