Repartiţia Bernoulli şi binomială $B(n, p)$ - exemple

Exemplu. Se aruncă un zar până apare de trei ori faţa cu numărul 6.

(a) Care este probabilitatea ca să fie necesare exact douăzeci de aruncări ale zarului?

(b) Daca zarul este aruncat de douăzeci de ori, care este numărul mediu de apariţii ale feţei şase?

Soluţie: (a) Douăzeci de aruncări sunt suficiente numai dacă în primele nouăsprezece aruncări faţa 6 apare de exact două ori şi mai apare odată la ultima aruncare. Aceste două evenimente sunt independente, deci probabilitatea cerută (a intersecţiei lor) este

$$\binom{19}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\cdot\frac{1}{6}\cong 0.035682$$

(b) Variabila X care numără de câte ori apare faţa şase în douăzeci de aruncări este repartizată $B(20, 1/6)$. $M[X] = 20\cdot\frac{1}{6} = \frac{10}{3} \cong$

Repartiţia Bernoulli şi binomială $B(n, p)$ - exemple

Exemplu. O variantă echivalentă a jocului numit *Roata norocului* este următoarea: un jucător pariază pe unul dintre numerele de la 1 la 6, apoi se aruncă trei zaruri şi dacă apare numărul ales de jucător de k ori, acesta câştigă k\$ ($1 \leqslant k \leqslant 3$), iar dacă numărul ales nu apare pe nici un zar, atunci pierde 1\$. Jocul oferă şanse corecte jucătorului? Care este câştigul mediu?

Soluţie: Fie X câştigul jucătorului, valorile lui X pot fi $\{-1, 1, 2, 3\}$. Variabila X are funcţia de masă de probabilitate similară cu aceea aunei variabile binomiale. Deoarece probabilitatea ca pe faţa unui zar să apară numărul ales este 1/6, avem

$$P\{X = -1\} = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216},$$

Repartiţii discrete remarcabile - Repartiţia geometrică $Geometric(p)$

- Să considerăm acum un experiment aleator şi un eveniment aleator A (cu $P(A) = p \in (0, 1)$) asociat acestui experiment. Variabilă care notează numărul de repetări independente ale experimentului până la realizarea evenimentului A se spune că este **repartizată geometric** *cu parametrul p*.
- Tabloul de repartiţie al unei astfel de variabile (vezi schema geometrică) este

$$G(p) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & p(1-p) & \dots & p(1-p)^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$$

- Caracteristicile repartiţiei geometrice sunt

$$M(X) = \frac{1}{p} \text{ şi } D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Repartiţia geometrică $Geometric(p)$ - exemplu

Exemplu. Se aruncă în mod repetat două zaruri până se obţine un produs egal cu 6. Care este media şi dispersia numărului de aruncări?

Soluţie: $A =$" produsul zarurilor este egal cu 6"

$$A = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}, P(A) = \frac{4}{36}.$$

Fie $X =$ numărul de aruncări necesare realizării evenimentului A. X este repartizată geometric cu parametrul $p = 1/9$.

$$M[X] = \frac{1}{p} = 9, D^2[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{8}{9}.$$

Sunt necesare, în medie, 9 aruncări pentru obţinerea unui produs egal cu 6. ♣

Definition 1

Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete ca mai sus, care admit medie fiecare.

(i) **Covarianţa** *celor două variabile (dacă există) este definită prin*

$$cov[X, Y] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = \\ = \sum_{i,j}(x_i - M[X])(y_j - M[Y])P\{X = x_i \cap Y = y_j\}.$$

(ii) **Corelaţia** *sau* **coeficientul de corelaţie** *a celor două variabile (dacă au dispersii nenule) este*

$$\rho(X, Y) = \frac{cov[X, Y]}{D[X]D[Y]}.$$

Covarianţa a două variabile

Proposition 1

Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete care admit medie. Atunci

(i) $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y]$.

(ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + 2cov[X, Y] + D^2[Y]$.

(iii) $-1 \leqslant \rho[X, Y] = \rho[Y, X] \leqslant 1$ *şi* $\rho[X, X] = 1$ *(i. e., $cov[X, X] = D^2[X]$).*

(iv) *(exerciţiu)* $\rho[aX + b, Y] = \rho[X, Y]$*, dacă* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(v) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z]$*, pentru* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(vi) *(exerciţiu)* $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$.

Variabile aleatoare independente

Definition 2

Două variabile aleatoare X şi Y se numesc **independente** *dacă, pentru orice două mulţimi de valori A şi B, a lui X, respectiv Y, avem*

$$P\{(X \in A) \cap (Y \in B)\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}.$$

Deoarece $P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot q_j$, în acest caz, repartiţia comună poate fi calculată mai simplu: $r_{ij} = p_i q_j$.

Theorem 2.1

Fie X şi Y variabile aleatoare discrete independente. Atunci:

(i) $M[XY] = M[X]M[Y]$.

(ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + D^2[Y]$.

(iii) $cov[X, Y] = 0$.

Inegalitatea lui Markov

Theorem 2.1

*(***Inegalitatea lui Markov.***) Fie $X \geqslant 0$ o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$. Atunci*

$$P\{X \geqslant t\} \leqslant \frac{\mu}{t}, \forall t > 0.$$

Proposition 2

Egalitatea are loc în inegalitatea lui Markov dacă şi numai dacă

$$P\{X = 0\} + P\{X = t\} = 1.$$

Inegalitatea lui Markov - exemplu

Exemplu. Fie $X \geqslant 0$ o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$. Să se majoreze probabilităţile

$$P\{X \geqslant 2\}, P\{X \geqslant 4\} \text{ şi } P\{X \geqslant 2^k\}.$$

Soluţie: Conform inegalităţii lui Markov

$$P\{X \geqslant 2\} \leqslant \frac{M[X]}{2} = \frac{1}{2}, P\{X \geqslant 4\} \leqslant \frac{M[X]}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X \geqslant 2^k\} \leqslant \frac{M[X]}{2^k} = \frac{1}{2^k} \clubsuit$$

Observaţie. Probabilitatea ca o variabilă $X \geqslant 0$ cu medie finită, să aibă valori mai mari sau egale decât un număr t, foarte mare, devine foarte mică pe măsură ce t creşte.

Inegalitatea lui Cebâşev

Theorem 2.2

*(***Inegalitatea lui Cebâşev.***) Fie X o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$ şi dispersia $D^2[X] = \sigma^2$. Atunci*

$$P\{|X - \mu| \geqslant t\} \leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

Proposition 3

Egalitatea are loc în inegalitatea lui Cebâşev dacă şi numai dacă

$$P\{X = \mu - t\} + P\{X = \mu\} + P\{X = \mu + t\} = 1.$$

Inegalitatea lui Cebâşev - exemplu

Exemplu. Fie X o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$ şi $D^2[X] = 4$. Să se majoreze probabilităţile

$$P\{X \geqslant 3\}, P\{|X - 1| \geqslant 6\} \text{ şi } P\{X \leqslant -9\}.$$

Soluţie: Conform inegalităţii lui Cebâşev

$$P\{X \geqslant 3\} \leqslant P\{|X - 1| \geqslant 2\} \leqslant \frac{D^2[X]}{2^2} = 1,$$

$$P\{|X - 1| \geqslant 6\} \leqslant \frac{4}{9},$$

$$P\{X \leqslant -9\} \leqslant P\{|X - 1| \geqslant 10\} \leqslant \frac{1}{25} \clubsuit$$

B. (5p) Se alege la întâmplare un zar din urnă şi se aruncă până când se obţine o faţă cu numărul 4.

(a) (2.5p) Care este probabilitatea să obţinem faţa cu numărul 4 abia la a patra aruncare a zarului?

(b) (2.5p) Care este numărul mediu de aruncări?

Probabilitatea ca la o aruncare să obţinem faţa 4 este probabilitatea evenimentului C de mai sus, $p = \frac{3}{20}$.

(a) Din schema geometrică cu $n = 4$, probabilitatea cerută este $\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^3$.

(b) Variabila care numără aruncările necesare obţinerii unei feţe nu numărul 4 este distribuită $Geometric(p)$ şi are media $\frac{1}{p} = \frac{20}{3}$.

C. (5p) Se alege la întâmplare un zar din urnă şi se aruncă de 8 ori.

(a) (2.5p) Ce este mai probabil: să obţinem faţa cu numărul 4 de exact patru ori sau de exact cinci ori?

(b) (2.5p) De câte ori în medie se obţine faţa cu numărul 4?

Probabilitatea ca la o aruncare să obţinem faţa 4 este probabilitatea evenimentului C de mai sus, $p = \frac{3}{20}$.

(a) Din schema binomială cu $n = 8, p = \frac{3}{20}$ şi $k = 4$, respectiv $k = 5$ probabilităţile cerute sunt

$$\binom{8}{4}\left(\frac{3}{20}\right)^4\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^4 \geqslant \binom{8}{5}\left(\frac{3}{20}\right)^5\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^3 \iff \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot 17 \geqslant \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot 3 \iff \frac{17}{4} \geqslant \frac{3}{5}.$$

Este mai probabil să obţinem de exact patru ori faţa 4.

(b) Variabila care numără de câte ori apare faţa 4 este distribuită $Binomial(n, p)$ şi are media $n \cdot p = 8 \cdot \frac{3}{20} = \frac{6}{5}$.

F. (15p) Avem la îndemână trei zaruri: unul cu 4 feţe, unul cu 6 feţe şi unul cu 8 feţe. Se alege un zar care se aruncă şi în funcţie de rezultat se alege un alt zar care se aruncă şi aşa mai departe. Iniţial se alege un zar la întâmplare din urnă, iar apoi, ori de câte ori avem zarul cu p feţe îl aruncăm şi dacă obţinem un număr divizibil prin 3 îl alegem pe cel cu $(12 - p)$ feţe, altfel alegem zarul cu 8 feţe.

Descrieţi lanţul Markov corespunzător acestui proces aleator (o stare fiind tipul zarului ales şi care urmează să fie aruncat). Analizaţi lanţul Markov astfel definit: desenaţi digraful de tranziţie (4p), determinaţi matricea probabilităţilor de tranziţie (4p), indicaţi tipurile stărilor, clasele recurente ne/periodice (3p) şi determinaţi probabilităţile de echilibru - dacă e cazul (4p).

R Stările: $s_1 =$ zarul ales are 4 feţe, $s_2 =$ zarul ales are 6 feţe, $s_3 =$ zarul ales are 8 feţe. Matricea probabilităţilor de tranziţie este

$$P : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$\{s_1, s_3\}$ este o clasă recurentă neperiodică, iar s_2 este o stare tranzitorie. Putem aplica teorema corespunzătoare pentru a determina probabilităţile de echilibru:

$$\begin{cases} \pi_1 &= 1/4\pi_3 \\ \pi_2 &= 1/3\pi_2 \\ \pi_3 &= \pi_1 + 2/3\pi_2 + 3/4\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_1 &= 1/4\pi_3 \\ \pi_2 &= 0 \\ 1 &= 1/4\pi_3 + \pi_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_1 &= 1/5 \\ \pi_2 &= 0 \\ \pi_3 &= 4/5 \end{cases}.$$

(c) (5p) Calculaţi $P(A)$ şi $P(B|A)$.

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

Apoi, din varianta condiţionată a formulei probabilităţii totale:

$$P(A|B) = P(C|B)\cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)\cdot P(A|B \cap \overline{C}),$$

$$P(A|\overline{B}) = P(C|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B} \cap C) + P(\overline{C}|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B} \cap \overline{C}).$$

Probabilităţile necesare sunt

$$P(\overline{C}|B) = 1 - P(C|B) = \frac{7}{8}, P(\overline{C}|\overline{B}) = 1 - P(C|\overline{B}) = \frac{5}{6},$$

$$P(A|B \cap C) = \frac{1}{8}, P(A|B \cap \overline{C}) = \frac{1}{4}, P(A|\overline{B} \cap C) = \frac{1}{6}, P(A|\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{4}.$$

De unde,

$$P(A|B) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{64}, P(A|\overline{B}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{17}{72} \text{ şi } P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{15}{64} + \frac{3}{5}\cdot\frac{17}{72} = \frac{113}{480}.$$

Din formula lui Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{3}{32}\cdot\frac{480}{113} = \frac{45}{113}.$$

(d) (3p) Arătaţi că $P(B \cap C|A) = P(B|A) - P(B \cup C|A) + P(C|A)$. Relaţia aceasta este adevărată în general, pentru trei evenimente oarecari?

(d) Formula are loc pentru orice trei evenimente A, B, C pentru care $A \neq \varnothing$, deoarece

$$P(B|A) - P(B \cup C|A) + P(C|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) + P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cap C))}{P(A)} = P(B \cap C|A).$$

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

- dacă $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente aleatoare, atunci
  - $A \cup B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează măcar unul dintre evenimentele A şi B;
  - $A \cap B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează şi A şi B;
  - $A \setminus B$ este un eveniment aleator care se realizează când se realizează A dar nu şi B;
- dacă A este eveniment aleator, atunci $\overline{A} = \Omega \setminus A$ este de asemenea eveniment aleator şi este numit *evenimentul contrar* lui A: $\overline{A}$ se realizează ori de câte ori A nu se realizează;
- dacă $A \subseteq B$, atunci se spune ca evenimentul A îl *implică* pe B;
- dacă $A \cap B = \varnothing$ se spune că A şi B sunt *incompatibile* (sau *disjuncte*), dacă $A \cap B \neq \varnothing$, A şi B sunt *compatibile*;

Fie A evenimentul "suma zarurilor este 4" şi B = "zarurile sunt mai mari decât 4":

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \text{ şi } B = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

- $A \cup B = \{(1,3),(2,2),(3,1),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$;
- $A \cap B = \varnothing$ - A şi B sunt evenimente incompatibile;
- $\overline{A} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3),\ldots(6,6)\}$. ♣

Proposition 2

Fie A şi B evenimente aleatoare, atunci

(i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$;

(ii) $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$;

(iii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iv) *dacă A implică B ($A \subseteq B$), atunci $P(A) \leqslant P(B)$*

Definition 1

*Fie A şi B două evenimente aleatoare, **probabilitatea condiţionată** de a se realiza A ştiind că s-a realizat B este*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (B \neq \varnothing).$$

$P(A|B)$ se mai numeşte probabilitatea lui A condiţionat de evenimentul B. A este evenimentul condiţionat, iar B este evenimentul care condiţionează.

Exemplu. Două cifre sunt alese la întâmplare dintre cele nouă cifre de la 1 la 9. Dacă suma este pară, care este probabilitatea ca unul dintre cele două numere să fie par?

Soluţie: Numerele pare sunt $\{2,4,6,8\}$; dacă suma este pară şi unul dintre numere este par, atunci amândouă sunt pare.

Există $\binom{4}{2} = 6$ moduri de a alege două numere pare diferite şi $\binom{5}{2} = 10$ moduri de a alege două numere impare diferite (numerele impare sunt $\{1,3,5,7,9\}$). Probabilitatea este

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}+\binom{5}{2}} = \frac{6}{6+10} = 0.375. ♣$$

- Atunci când $P(A) = P(A|B)$ putem spune că evenimentul A este independent de B (vom vedea că relaţia aceasta este simetrică). Altfel spus, A este independent de B dacă realizarea evenimentului B nu schimbă probabilitatea realizării evenimentului A.

Definition 2

*Două evenimente A şi B se numesc **independente** dacă*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (1)$$

Proposition 1

Dacă evenimentele A şi B sunt independente, atunci la fel sunt şi perechile de evenimente $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ şi $\overline{A}, \overline{B})$.

Definition 4

*Fie $C \neq \varnothing$, evenimentele aleatoare A şi B sunt **independente condiţionat** de C dacă $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$.*

Proposition 4

Fie $C \neq \varnothing$, evenimentele aleatoare A şi B sunt independente condiţionat de C dacă şi numai dacă $P(A|C \cap B) = P(A|C)$.

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C) \cdot P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C) \cdot P(C)} =$$

$$= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(B|C) \cdot P(A|C \cap B).$$

Acum, A şi B sunt independente condiţionat de C dacă şi numai dacă $P(B|C) \cdot P(A|C \cap B) = P(A|C) \cdot P(B|C)$, i. e., $P(A|C \cap B) = P(A|C)$. ∎

Formula probabilităţii totale - exemple

Exemplu. Urna U_1 conţine trei bile albe şi cinci bile negre, iar urna U_2 patru bile albe şi şase bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

Soluţie: Notăm A_i ="extragerea se face din urna U_i" ($i = \overline{1,2}$) şi B ="bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ şi putem presupune că $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Atunci

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2), \text{ dar}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8},\ P(B|A_2) = \frac{4}{10}, \text{ deci}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{31}{80} ♣$$

Formula lui Bayes

Proposition 6

(Formula lui Bayes) Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur şi B un eveniment oarecare, atunci

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

($P(B|A_k)$ se numesc probabilităţi a priori, iar $P(A_k|B)$ sunt numite probabilităţi a posteriori.)

dem: $$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Proposition 7

$$P(A|B) = P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B \cap \overline{C}),$$

dacă toate evenimentele care condiţionează sunt posibile.

Formula lui Bayes - exemple

Exemplu. Se dau două urne, una conţinând trei bile albe şi patru bile negre, iar cealaltă patru bile albe şi cinci bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Soluţie: Notăm A_i ="extragerea se face din urna U_i" ($i = \overline{1,2}$) şi B ="bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ şi $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Probabilităţile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{3}{7},\ P(B|A_2) = \frac{4}{9}.$$

Probabilitatea a posteriori cerută este

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Formula de înmulţire

Proposition 1

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare oarecari, atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}),$$

când $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$.

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Această schema probabilistică foloseşte următorul context: într-o urnă sunt n_1 bile albe şi n_2 bile negre, $n = n_1 + n_2$. Din urnă se extrag, fără întoarcere k bile (cele k bile sunt extrase simultan din urnă).

Proposition 2

Fie $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, astfel încât $k_1 \leqslant n_1$, $k_2 \leqslant n_2$ şi $k = k_1 + k_2$. Probabilitatea ca dintre cele k bile, exact k_1 să fie albe şi k_2 să fie negre este

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Schema lui Poisson

- Cadrul acestei scheme este următorul: considerăm un experiment aleator şi n evenimente aleatoare independente (asociate acestui experiment): $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cu probabilităţi cunoscute:

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \ldots, P(A_n) = p_n.$$

Proposition 4

Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$; probabilitatea ca dintre cele n experimente să se realizeze exact k este egală cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului

$$(p_1 x + q_1) \cdot (p_2 x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n x + q_n),$$

unde $q_i = P(\overline{A}_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Schema binomială

- Considerăm un experiment aleator şi un eveniment aleator A cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$. Experimentul se efectuează de n ori în mod independent.

Proposition 5

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de exact k ori ($0 \leqslant k \leqslant n$) în cele n efectuări ale experimentului este $p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}$.

Schema geometrică

- Această schemă probabilistică are următorul context: efectuăm un experiment aleator până când se realizează un eveniment aleator A (legat de acest experiment), cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$.

Proposition 6

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze exact la n-a efectuare a experimentului ($n \geqslant 1$) este $p(1-p)^{n-1}$.

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

Definition 1

*Dat un experiment aleator $\mathbb{E}$ şi Ω mulţimea evenimentelor aleatoare elementare, o **variabilă aleatoare** reală este o funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice interval $J \subseteq \mathbb{R}$, $X^{-1}(J)$ este un eveniment aleator.*

Definition 2

*O **variabilă aleatoare** se numeşte **discretă**, dacă imaginea ei are cardinal cel mult numărabil, adică $|X(\Omega)| \leqslant \aleph_0$. Altfel este numită **variabilă aleatoare continuă**.*

- Dacă spaţiul evenimentelor elementare aleatoare este discret (i.e., $|\Omega| \leqslant \aleph_0$), atunci o variabilă aleatoare asociată experimentului corespunzător nu poate fi decât discretă.

Dacă $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, atunci mulţimea perechilor (x_i, p_i) formează *distribuţia* sau *repartiţia variabilei aleatoare discrete* X şi uzual se notează sub forma unui tabel:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Se utilizează notaţiile $P\{X = x_i\} = P(X = x_i) = p_i$. În mod evident suma (care poate fi şi o serie) a probabilităţilor din a doua linie a tabelului de repartiţie este 1:

$$\sum_i p_i = 1, 0 < p_i \leqslant 1, \forall\, i$$

Definition 3

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă

(i) *Se numeşte **funcţie de masă de probabilitate** a variabilei aleatoare discrete X funcţia $f_X : X(\Omega) \to [0,1]$, definită prin $f(x_i) = p_i = P\{X = x_i\}$.*

(ii) *Numim **funcţie de repartiţie** (sau de distribuţie) a variabilei aleatoare X (care poate fi şi continuă), funcţia $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, dată prin*

$$F(a) = P\{X \leqslant a\}$$

Proposition 7

Fie $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ funcţia de repartiţie a variabile aleatoare X.

(i) *F_X este o funcţie crescătoare: $F_X(a) \leqslant F_X(b)$, pentru orice $a < b$.*

(ii) *$\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$ şi $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$.*

Proposition 8

Dacă X este o variabilă aleatoare, atunci

$$P\{a < X \leqslant b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

Exemplu. Să presupunem că o variabilă aleatoare discretă X, are patru valori x_1, x_2, x_3, x_4, cu $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ şi probabilităţile

$$P\{X = x_1\} = 0.2, P\{X = x_2\} = 0.3,$$

$$P\{X = x_3\} = 0.1, P\{X = x_4\} = 0.4,$$

atunci funcţia de repartiţie X este definită prin

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < x_1 \\ 0.2, & a \in [x_1, x_2) \\ 0.5, & a \in [x_2, x_3) \\ 0.6, & a \in [x_3, x_4) \\ 1, & a \geqslant x_4 \end{cases} ♣$$

Media unei variabile aleatoare discrete

Repartiţia acestei variabile este $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$.

Media variabilei este

$$M[X] = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}. ♣$$

Proposition 2

(i) *Dacă X este o variabilă aleatoare discretă, atunci $aX + b$ este o variabilă aleatoare şi $M[aX + b] = aM[X] + b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Dacă X_1 şi X_2 sunt variabile aleatoare discrete, atunci $X_1 + X_2$ este o variabilă aleatoare şi $M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]$.*

(iii) *Fie $X \geqslant 0$, atunci $M[X] \geqslant 0$, iar $M[X] = 0$ numai dacă $X \equiv 0$.*

Definition 2

*Fie X o variabilă aleatoare. Se numeşte **dispersia** (sau **varianţa**) lui X, media pătratului abaterii de la medie (dacă există):*

$$D^2[X] = M[(X - M[X])^2] = \sum_i p_i (x_i - M[X])^2.$$

Proposition 3

Fie X o variabilă aleatoare care admite dispersie, atunci

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Proposition 4

Fie X o variabilă aleatoare care admite dispersie, atunci

(i) *$D^2[X] \geqslant 0$ şi $D^2[X] = 0$ dacă şi numai dacă $X \equiv const$ (variabilă degenerată);*

(ii) *$D^2[aX + b] = a^2 D^2[X]$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.*

Definition 3

***Deviaţia standard** a variabilei aleatoare X este*

$$D[X] = \sqrt{D^2[X]}.$$

O variabilă aleatoare se spune că este distribuită **uniform** *cu parametrul $n \in \mathbb{N}^*$* dacă are repartiţia

$$U_n : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}$$

Este uşor de văzut că media şi dispersia unei astfel de variabile sunt

$$M[X] = \frac{n+1}{2} \text{ şi } D^2[X] = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Să considerăm un experiment al cărui rezultat poate fi interpretat ca succes sau eşec. Fie X definită astfel

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dacă experimentul are succes} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

(Uzual experimentului i se asociază un eveniment aleator A (cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$): succesul înseamnă realizarea acestui eveniment.)

Funcţia de masă de probabilitate este $f(0) = 1 - p$ şi $f(1) = p$. O astfel de variabilă este **repartizată Bernoulli** *cu parametrul p* şi are repartiţia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Media şi dispersia sunt $M[X] = p$ şi $D^2[X] = p(1-p)$.

Repartiţia Bernoulli şi binomială $B(n, p)$

- Să presupunem acum că un astfel de experiment (cu rezultate posibile succes/eşec) este efectuat de n ori în mod independent şi notăm cu X numărul de succese.
- Se spune că variabila X este **repartizată binomial** *cu parametrii n şi p*. Utilizând schema binomială putem determina tabloul de repartiţie al acestei variabile

$$B(n,p) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ C_n^0(1-p)^n & C_n^1 p(1-p)^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \ldots & C_n^n p^n \end{pmatrix},$$

- iar caracteristicile sunt $M[X] = np$ şi $D^2[X] = np(1-p)$.

Proposition 5

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente repartizate Bernoulli cu parametrul $p \in (0,1)$. Atunci $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ este o variabilă repartizată $B(n, p)$.