

Coada cu priorități. Colecții de mulțimi disjuncte

SD 2016/2017

Conținut

- Coada cu priorități și “max-heap”.
- Colectii de mulțimi disjuncte și “union-find”.

Coada cu priorități - exemple

- Pasagerii unui avion
 - Priorități:
 - Clasa "business"
 - Persoane călătorind cu copii / cu mobilitate redusă
 - Ceilalți pasageri
- Avioane care se pregătesc de aterizare
 - Priorități:
 - Urgențe
 - Nivelul carburantului
 - Distanța față de aeroport

Coada cu priorități: tip de dată abstract

- Obiecte: structuri de date în care elementele sunt numite *atomi*; orice atom are un *câmp-cheie* numit *prioritate*.
- Elementele sunt memorate în funcție de prioritate și nu de poziția lor.

Coada cu priorități: operații

- citește

- intrare: o coadă cu priorități C
- ieșire: atomul din C cu cheia cea mai mare

- elimina

- intrare: o coadă cu priorități C
- ieșire: C din care s-a eliminat atomul cu cheia cea mai mare

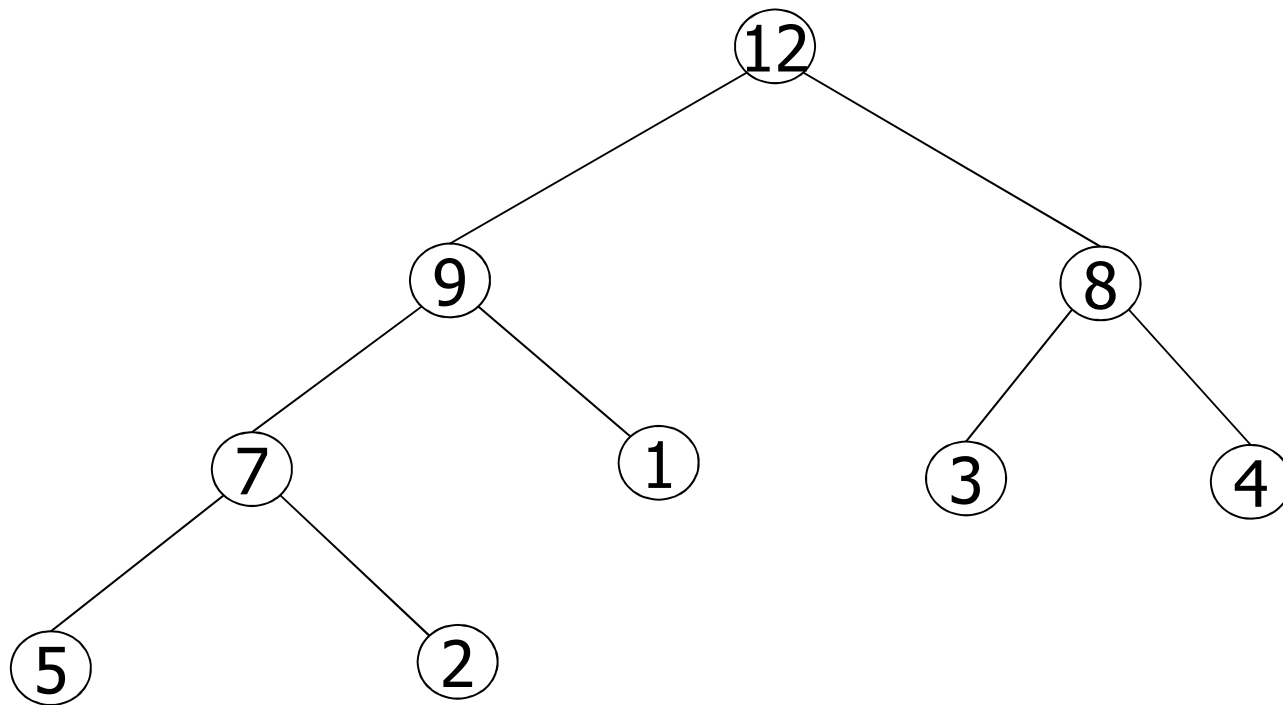
- insereaza

- intrare: o coadă cu priorități C și un atom **at**
- ieșire: C la care s-a adăugat **at**

maxHeap

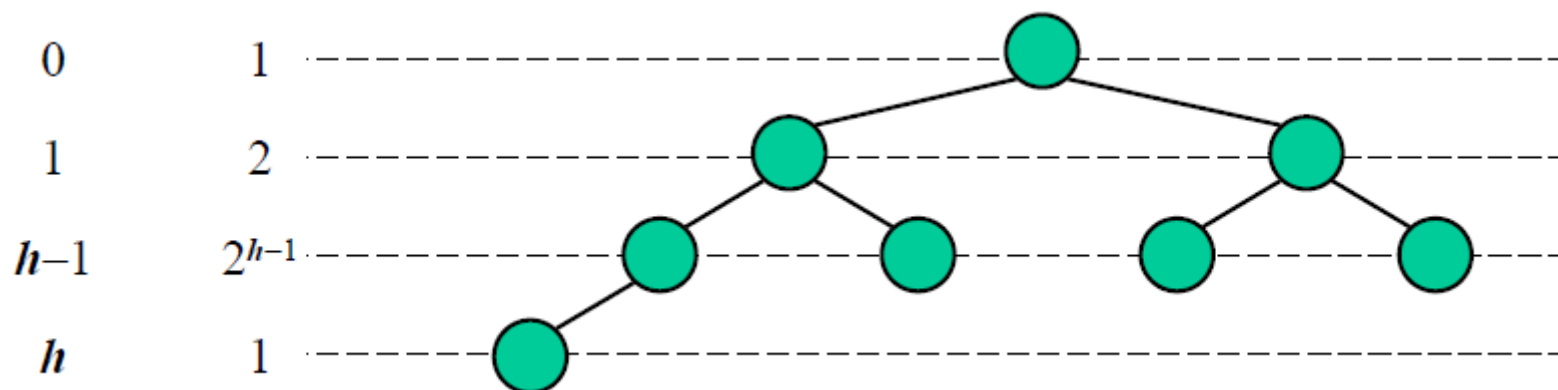
- Implementează coada cu priorități.
- Arbori binari cu proprietățile:
 - Nodurile memorează câmpurile "cheie";
 - Pentru orice nod, cheia din acel nod este mai mare decât sau egală cu cheile din nodurile fiu;
 - Arborele este complet. Fie h înălțimea arborelui. Atunci,
 - Pentru $i = 0, \dots, h-1$, sunt 2^i noduri cu adâncimea i
 - Pe nivelul $h-1$, nodurile interne sunt situate la stânga nodurilor externe;
 - Ultimul nod al unui maxHeap este nodul cel mai la dreapta pe nivelul h .

maxHeap - exemplu



Înălțimea unui maxHeap

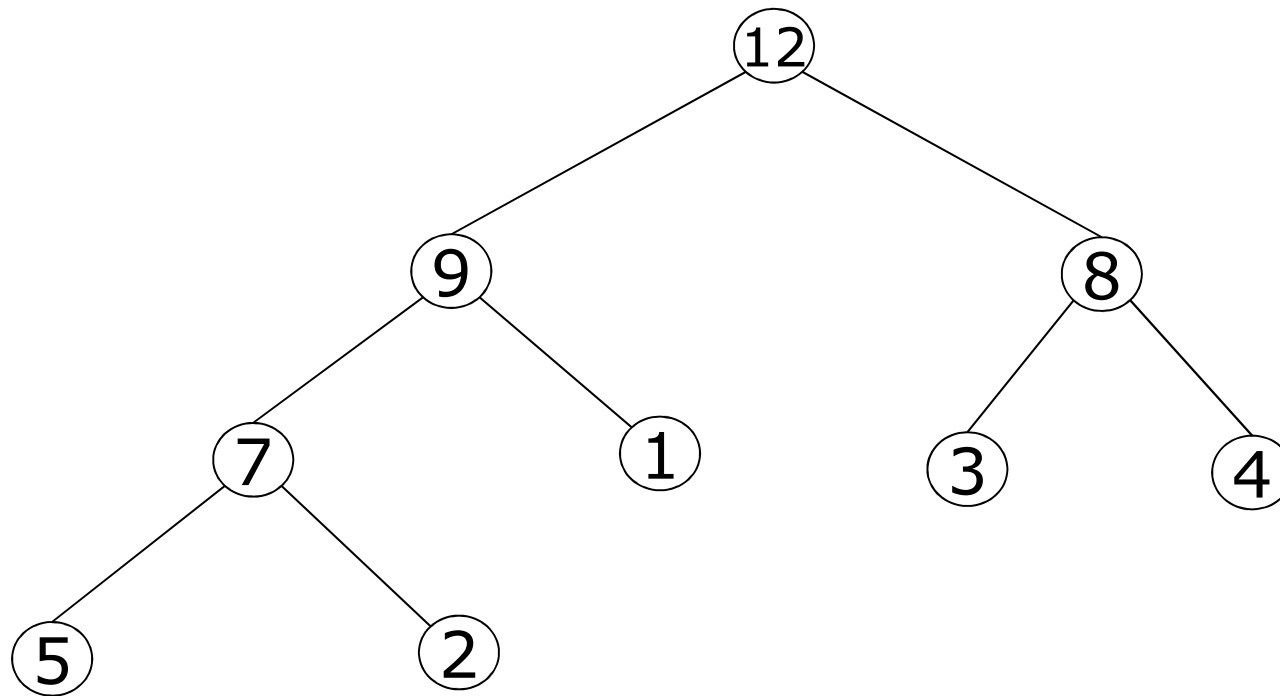
- Teoremă: Un maxHeap care conține n chei are înălțimea $O(\log n)$.
- Demonstrație:
 - Utilizăm proprietatea de arbore binar complet.
 - Fie h înălțimea unui maxHeap cu n chei.
 - Avem 2^i chei de adâncime i , pentru $i = 0, \dots, h-1$ și cel puțin o cheie de adâncime h : $n \geq 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{h-1} + 1 = 2^h$
 - Obținem: $h \leq \log n$



maxHeap: eliminarea

- Se elimină rădăcina heap-ului (corespunde elementului cel mai prioritar).
- Algoritmul are trei etape:
 - Se înlocuiește cheia rădăcinii cu cheia ultimului nod;
 - Se șterge ultimul nod;
 - Se reface proprietatea de maxHeap.

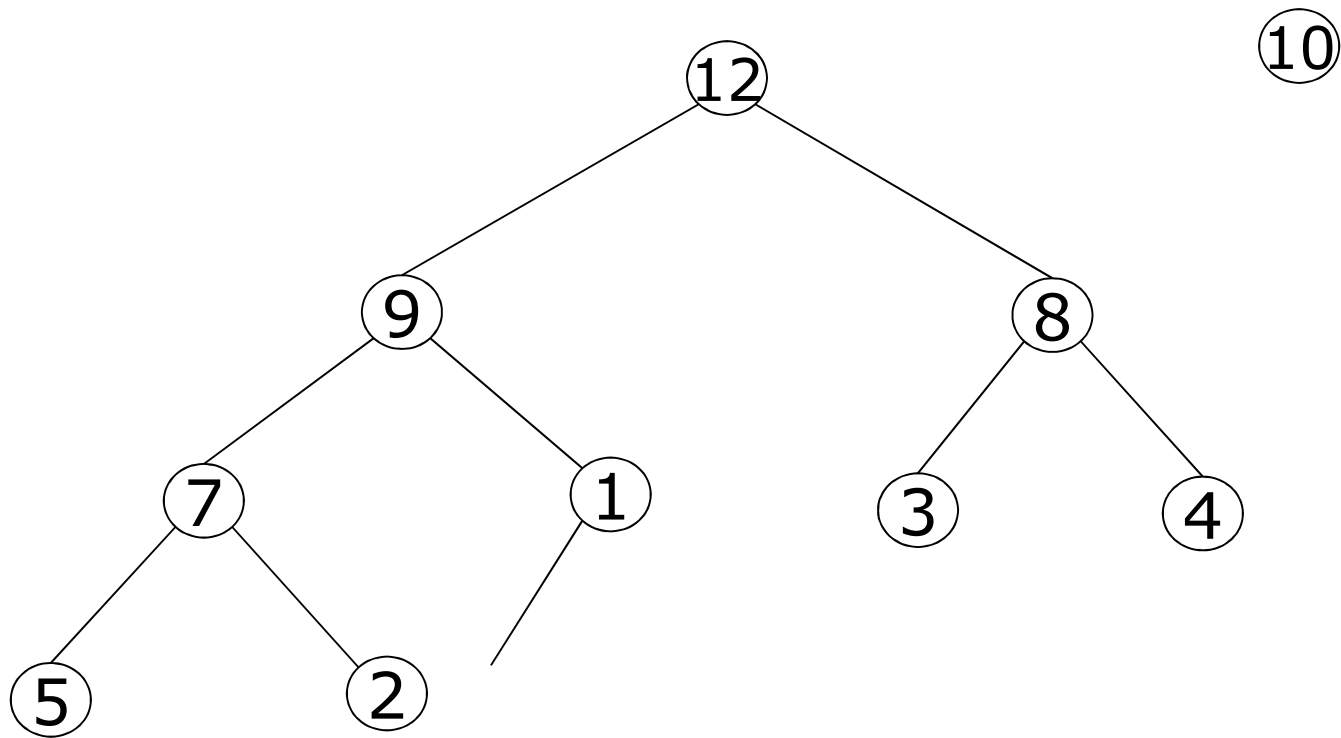
maxHeap: eliminarea



maxHeap: inserarea

- Se inserează noua cheie într-un nou nod.
- Algoritmul are trei etape:
 - Se adaugă noul nod ca cel mai din dreapta pe ultimul nivel;
 - Se inserează noua cheie în acest nod;
 - Se reface proprietatea de maxHeap.

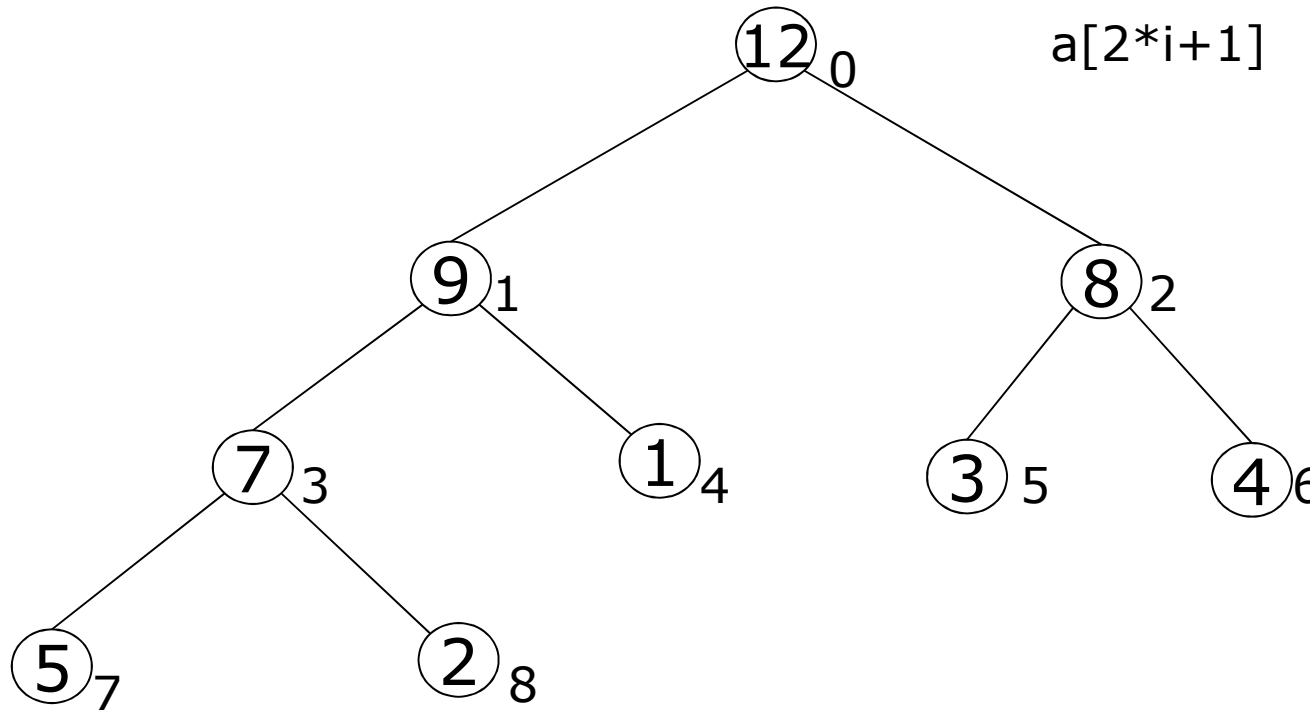
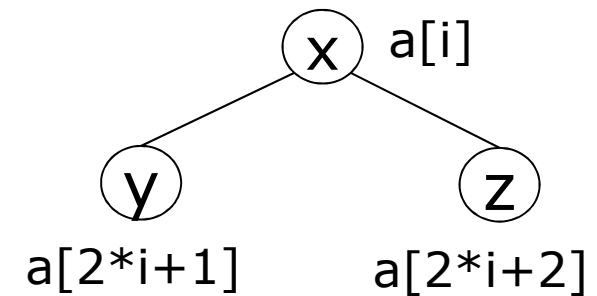
maxHeap: inserarea



maxHeap: implementarea cu tablouri

$$(\forall k) \ 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow a[k] \leq a[(k-1)/2]$$

12	9	8	7	1	3	4	5	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8



maxHeap: inserare

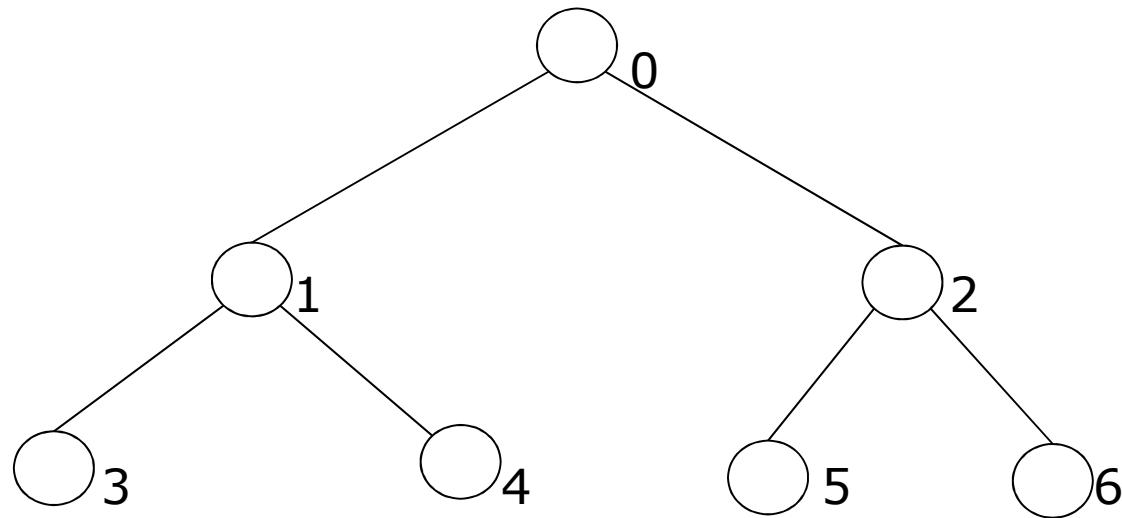
```
procedure insereaza(a, n, cheie)
begin
    n ← n+1
    a[n-1] ← cheie
    j ← n-1
    heap ← false
    while ((j > 0) and not heap) do
        k ← [(j-1)/2]
        if (a[j] > a[k])
        then swap(a[j], a[k])
            j ← k
        else heap ← true
    end
```

maxHeap - elimina

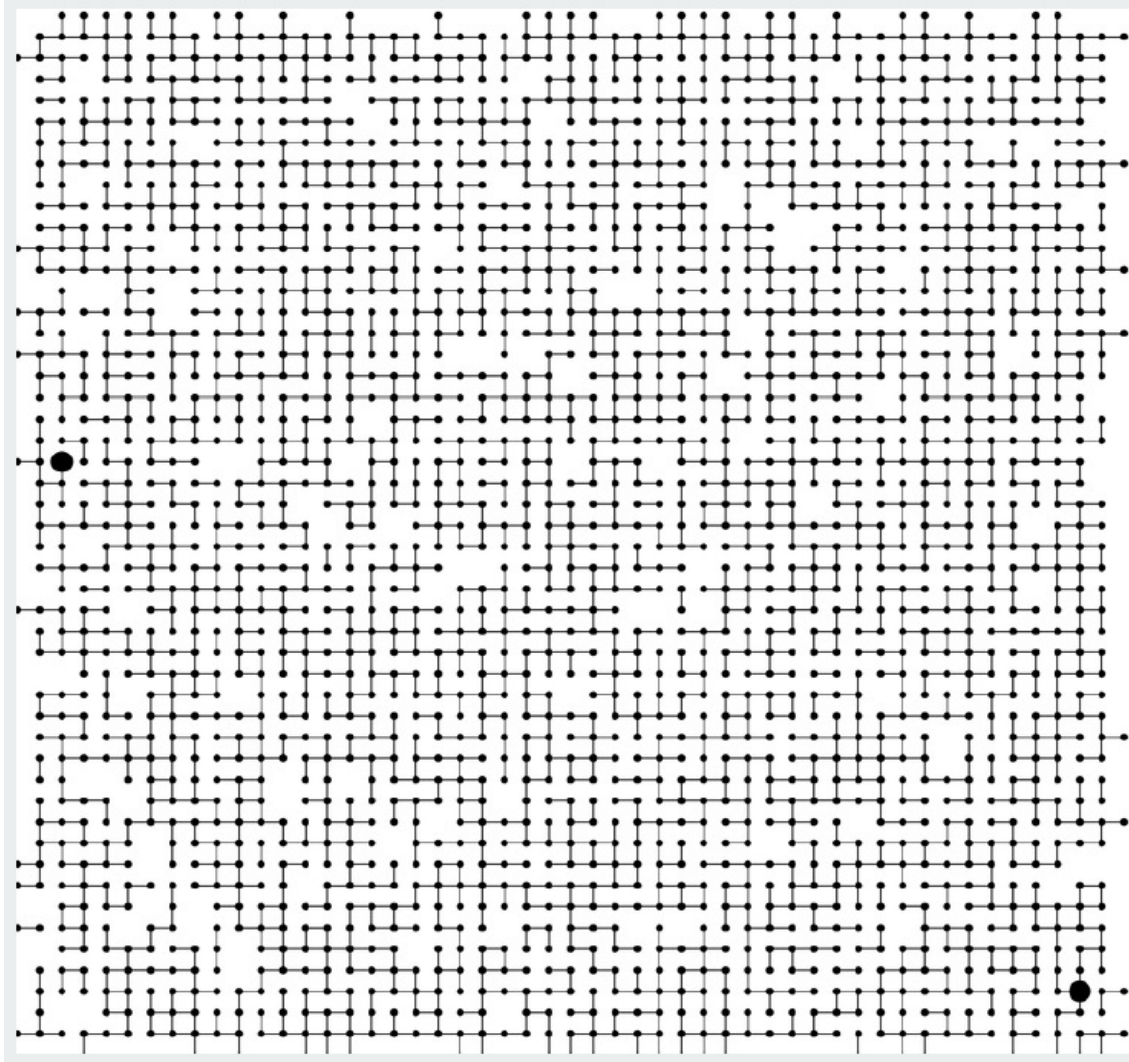
```
procedure elimina(a, n)
begin
    a[0] ← a[n-1]
    n ← n-1
    j ← 0
    heap ← false
    while ((2*j+1 < n) and not heap) do
        k ← 2*j+1
        if ((k < n-1) and (a[k] < a[k+1]))
        then k ← k+1
        if (a[j] < a[k])
        then swap(a[j], a[k])
            j ← k
        else heap ← true
    end
```

maxHeap: timp de execuție

- Operațiile inserare/eliminare necesită timpul
 $O(h) = O(\log n)$



Colecții de mulțimi disjuncte



Aplicații:

- Rețele de calculatoare
- Pagini web (Internet)
- Pixeli într-o imagine digitală

Colecții de mulțimi disjuncte: tip de dată abstract

- **obiecte**: colecții de submulțimi disjuncte (partiții) ale unei mulțimi univers
- operații:
 - **find()**
 - intrare: o colecție C, un element i din univers
 - ieșire: submulțimea din C la care aparține i
 - **union()**
 - intrare: o colecție C, două elemente i și j din univers
 - ieșire: C în care componentele lui i și resp. j sunt reunite
 - **singleton()**
 - intrare: o colecție C, un element i din univers
 - ieșire: C la care componenta lui i are pe i ca unic element

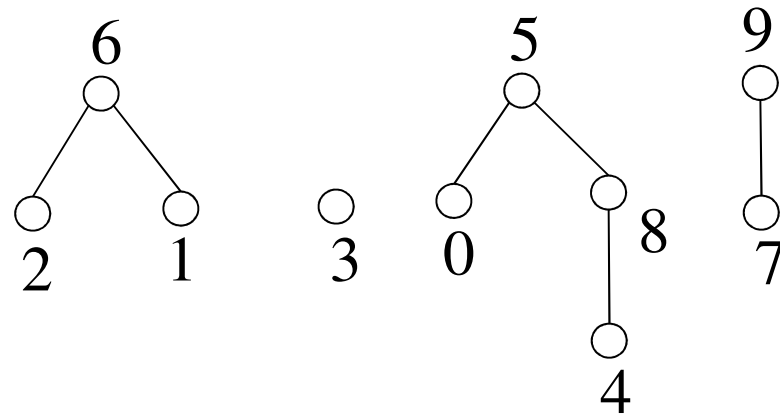
Colecții de mulțimi disjuncte: "union-find"

- structura "union-find"
 - mulțimea univers = $\{0, 1, \dots, n-1\}$
 - submulțime = arbore
 - colecție = pădure
 - reprezentarea unei păduri prin legătura părinte

Colecții de mulțimi disjuncte: "union-find"

- Exemplu:

– $n=10$, $\{1,2,6\}, \{3\}, \{0,4,5,8\}, \{7,9\}$



parinte	5	6	6	-1	8	-1	-1	9	5	-1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Colecții de mulțimi disjuncte: "union-find"

```
procedure singleton(C, i)
begin
    C.parinte[i] ← -1
end
```

Colecții de mulțimi disjuncte: "union-find"

```
function find(C, i)
begin
    temp ← i
    while (C.parinte[temp] >= 0) do
        temp ← C.parinte[temp]
    return temp
end
```

Colecții de mulțimi disjuncte: "union-find"

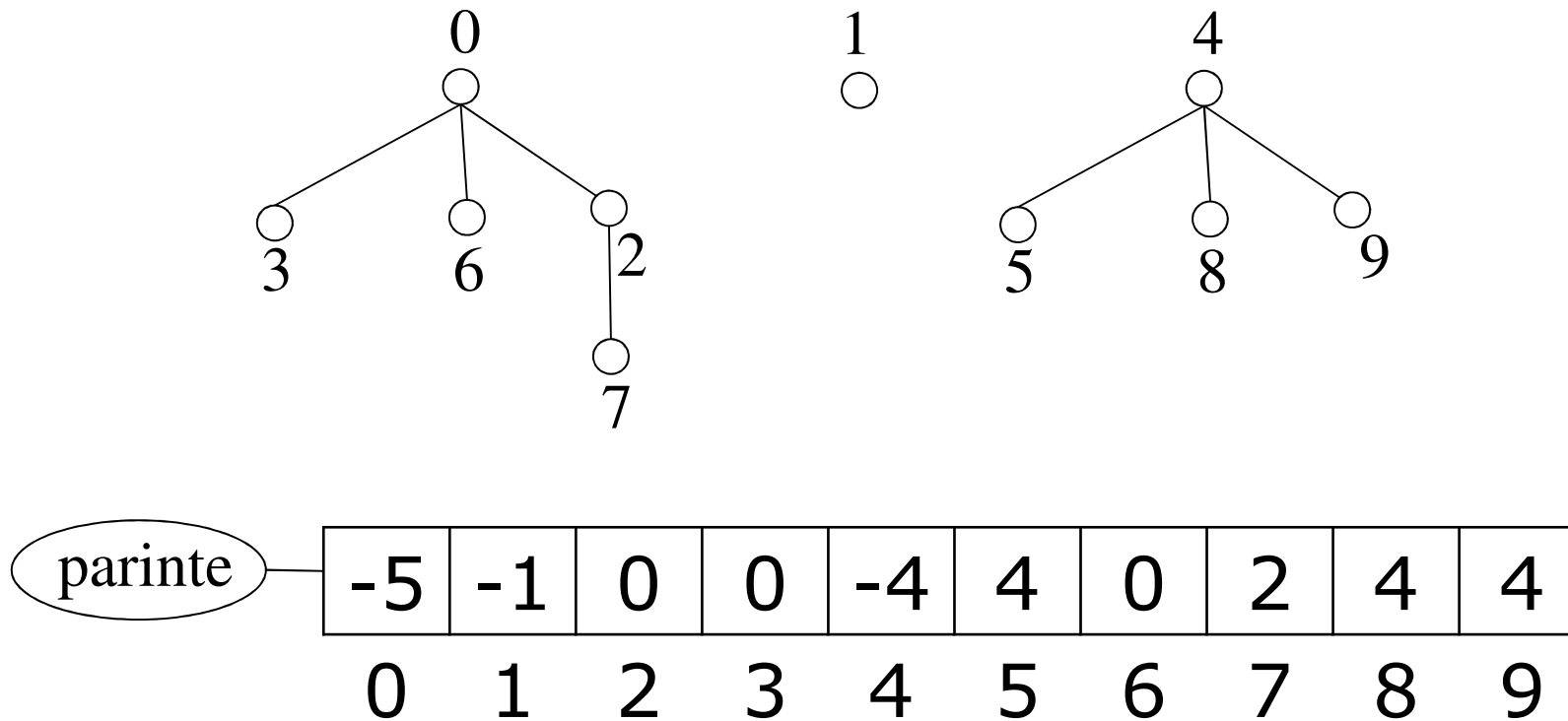
```
procedure union(C, i, j)
begin
    ri ← find(i)
    rj ← find(j)
    if (ri != rj) then
        C.parinte[rj] ← ri
    end
```

Structură "union-find" ponderată

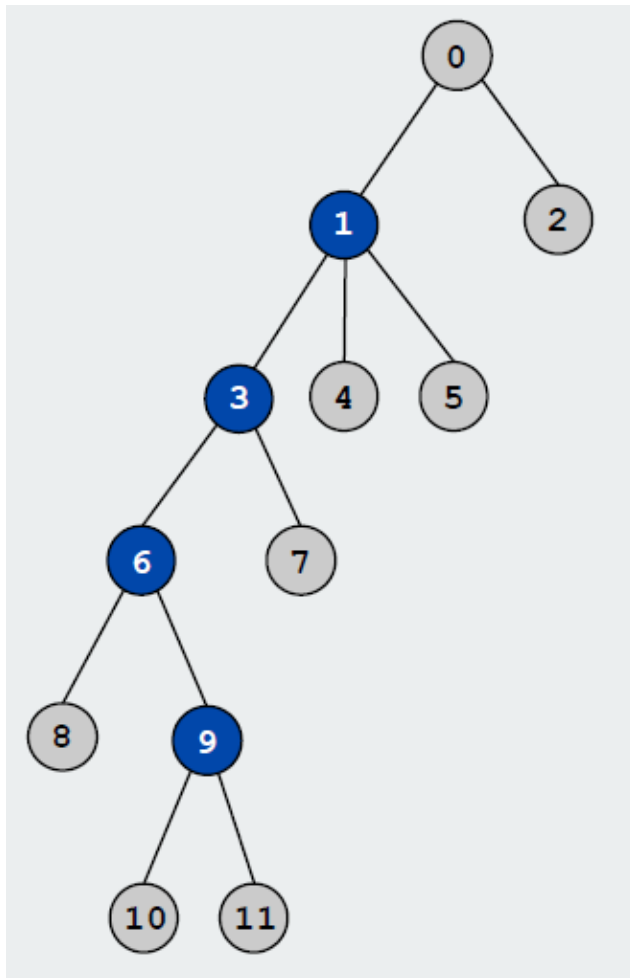
- Soluție la problema arborilor dezechilibrați.
- Mecanism:
 - Memorarea numărului de vârfuri din arbore (cu semn negativ).
 - Aplatizarea arborilor.

Structură "union-find" ponderată

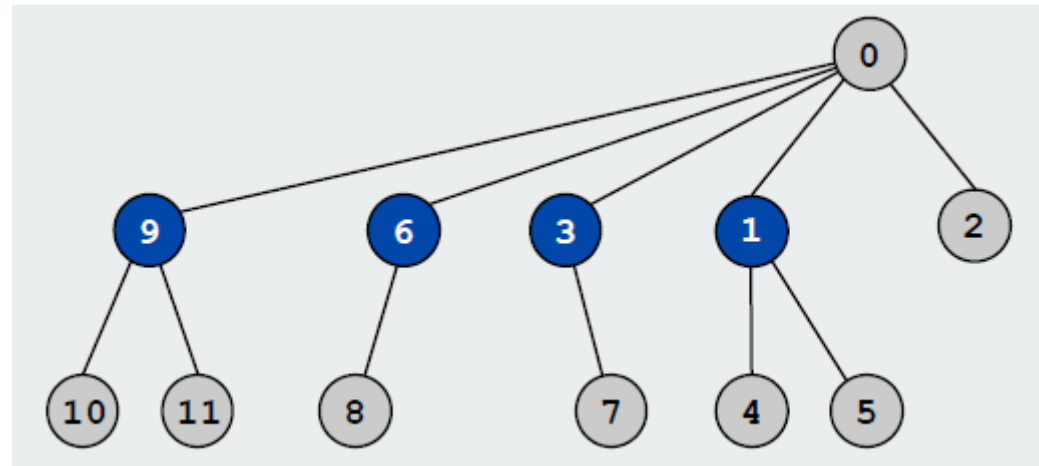
- Exemplu:



Aplatizarea arborilor



Structuri de date



find(9)

Structură "union-find" ponderată

```
procedure union(C, i, j)
begin
    ri ← find(i); rj ← find(j)
    while (C.parinte[i] >= 0) do
        temp ← i; i ← C.parinte[i]; C.parinte[temp] ← ri
    while (C.parinte[j] >= 0) do
        temp ← j; j ← C.parinte[j]; C.parinte[temp] ← rj

    if (C.parinte[ri] > C.parinte[rj])
    then C.parinte[rj] ← C.parinte[ri]+C.parinte[rj]
        C.parinte[ri] ← rj
    else C.parinte[ri] ← C.parinte[ri]+C.parinte[rj]
        C.parinte[rj] ← ri
end
```

Structură "union-find" ponderată

- Teoremă: Pornind de la o colecție vidă, orice secvență de M operații "union" și "find" asupra a N elemente are complexitatea $O(N + M \lg^* N)$.
 - $\lg^* N$ = numărul de logaritmări până se obține 1.