Algoritmos de ordenação eficientes - Merge Sort

emanoelim@utfpr.edu.br

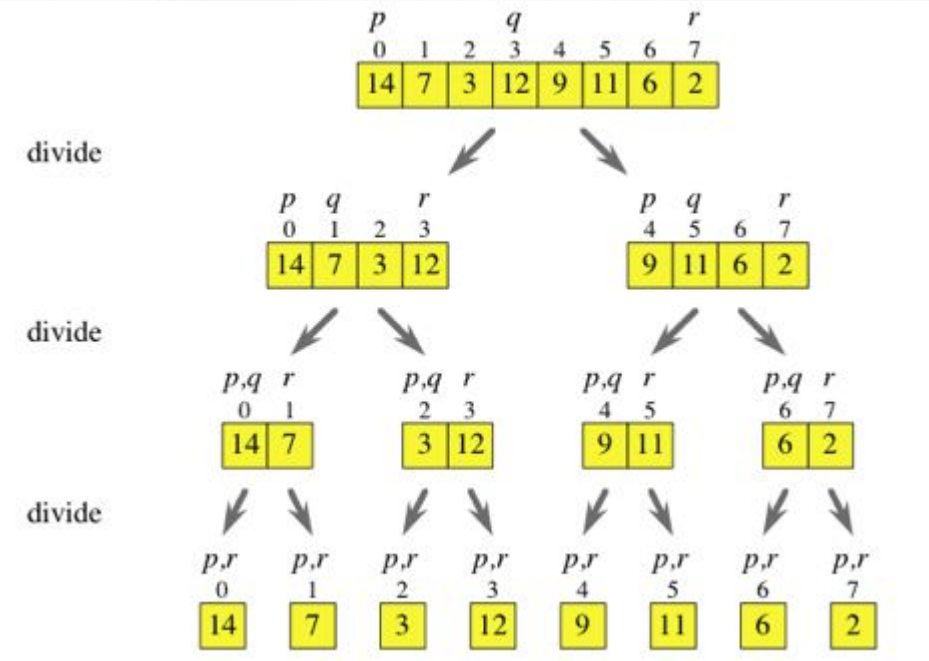
Merge Sort

Este algoritmo usa uma técnica conhecida como “**divisão e conquista**”: em vez de tratar o problema como um todo, essa técnica quebra o problema em problemas menores, encontrando as soluções destas partes menores e então combinando estas soluções para obter uma solução geral.

Merge Sort

- O algoritmo merge sort divide o vetor de entrada em duas metades e assim sucessivamente, até chegar em subvetores de tamanho 1 (caso base), visto que um vetor com apenas um item já está trivialmente ordenado.
- Considere por exemplo, o vetor formado pelos inteiros:
  14, 7, 3, 12, 9, 11, 6, 2

Merge Sort


p q r
0 1 2 3 4 5 6 7
14 7 3 12 9 11 6 2
divide
p q r
0 1 2 3
14 7 3 12
p q r
4 5 6 7
9 11 6 2
divide
p,q r
0 1
14 7
p,q r
2 3
3 12
p,q r
4 5
9 11
p,q r
6 7
6 2
divide
p,r
0
14
p,r
1
7
p,r
2
3
p,r
3
12
p,r
4
9
p,r
5
11
p,r
6
6
p,r
7
2

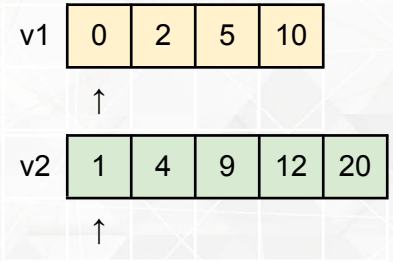
Merge Sort

- Uma vez divididos, os subvetores são agrupados em ordem, usando ideia de **intercalação / fusão** de dois vetores ordenados.
- Daí vem o nome merge sort: merge = fundir em inglês.
- Exemplo: intercalar os vetores ordenados v1 e v2 em v3:

Merge Sort

Intercalação:

1)

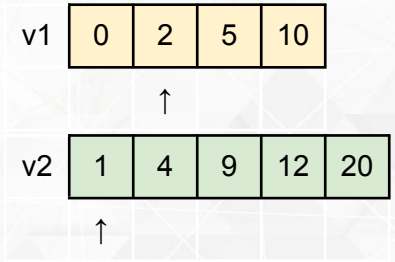


Entre 0 e 1, o menor é 0, então v3 guarda 0:

Merge Sort

Intercalação:

2)

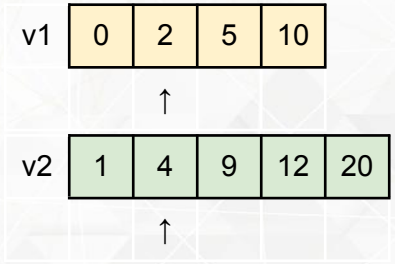


Entre 2 e 1, o menor é 1, então v3 guarda 1:

Merge Sort

Intercalação:

3)

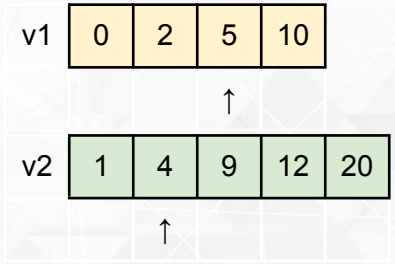


Entre 2 e 4, o menor é 2, então v3 guarda 2:

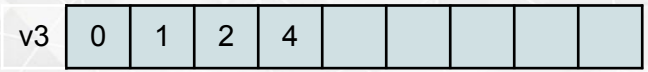
Merge Sort

Intercalação:

4)



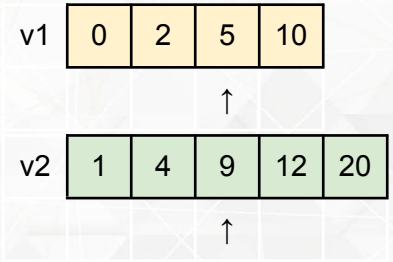
Entre 5 e 4, o menor é 4, então v3 guarda 4:



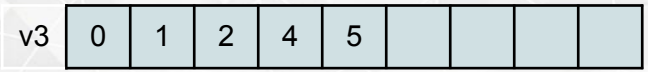
Merge Sort

Intercalação:

5)



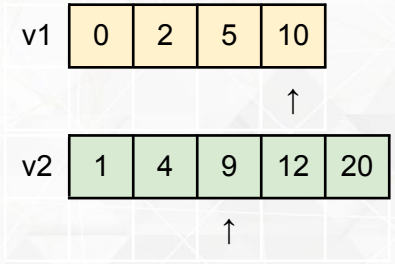
Entre 5 e 9, o menor é 5, então v3 guarda 5:



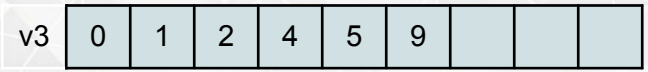
Merge Sort

Intercalação:

6)



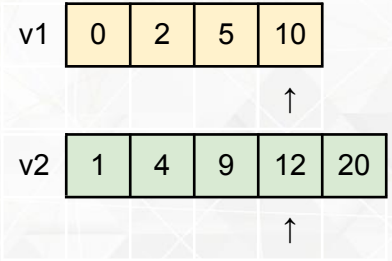
Entre 10 e 9, o menor é 9, então v3 guarda 9:



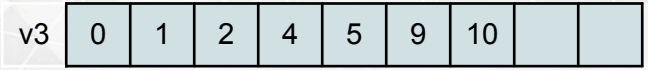
Merge Sort

Intercalação:

7)



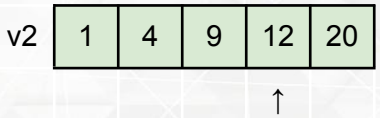
Entre 10 e 12, o menor é 10, então v3 guarda 10:

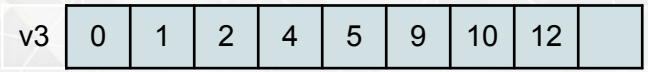


Merge Sort

Intercalação:

8) Não há mais elementos em v1, então basta adicionar os elementos restantes de v2 em v3

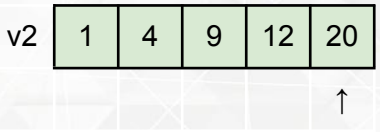


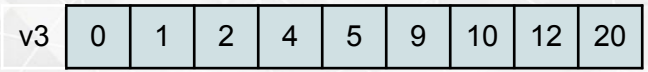


Merge Sort

Intercalação:

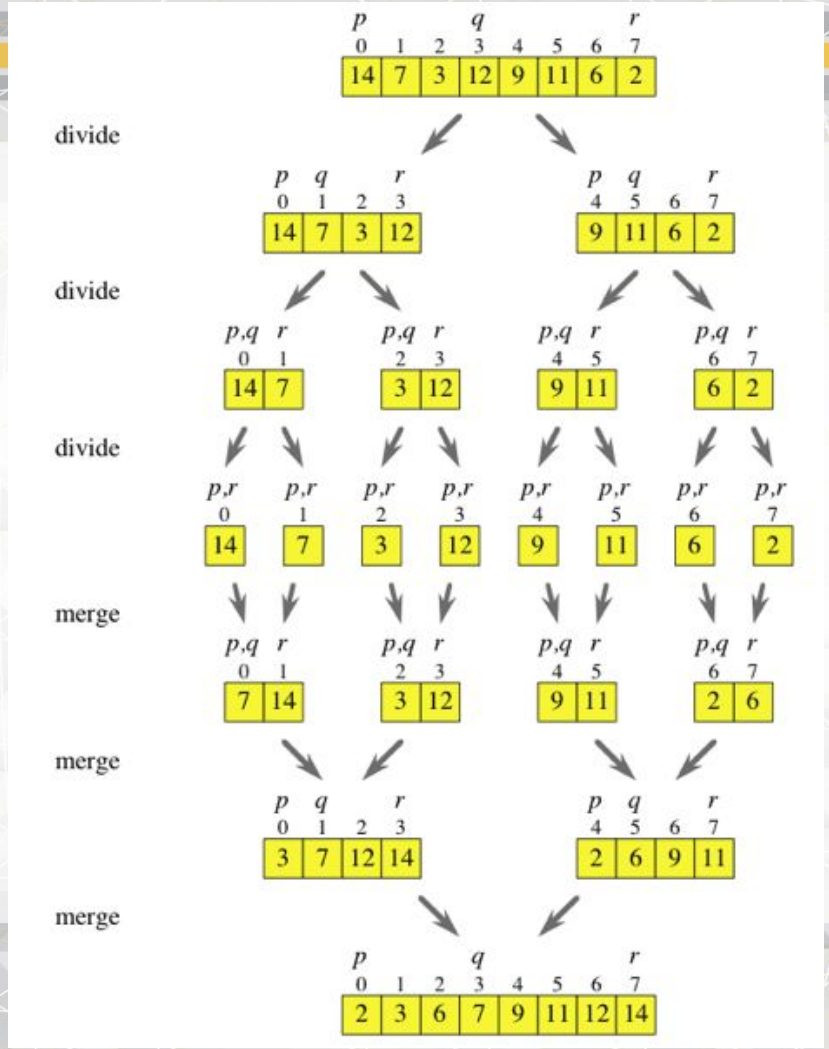
9) Não há mais elementos em v1, então basta adicionar os elementos restantes de v2 em v3





Merge Sort

Aplicando a ideia de intercalação no vetor:
14, 7, 3, 12, 9, 11, 6, 2



Merge Sort

- O algoritmo merge sort possui uma estrutura recursiva: o problema vai sendo quebrado em problemas menores até chegar ao caso base, e então as soluções são agrupadas para gerar a solução geral.
- Isso indica uma estrutura recursiva.

Merge Sort

Procedimento: MERGE-SORT

Entradas:

- *A:* um vetor.
- *p, r:* índices iniciais e finais de um subvetor de *A*.

Resultado: Os elementos do subvetor A[*p*...*r*] ordenados em ordem crescente.

1. Se $p < r$, faça o seguinte:
   a. Iguale q a $(p + r) / 2$.
   b. Chame recursivamente MERGE-SORT(*A*, *p*, *q*).
   c. Chame recursivamente MERGE-SORT(*A*, *q* + 1, *r*).
   d. Chame MERGE(*A*, *p*, *q*, *r*).
2. Caso contrário, o subvetor A[*p*...*r*] tem, no máximo, um elemento. Portanto, já está ordenado. Apenas retorne sem fazer nada.

Merge Sort

Onde MERGE é a função que faz a intercalação de dois subvetores (já ordenados) de A:

Merge Sort

Procedimento: MERGE

Entradas:

- *A:* um vetor.
- *p*, *q*, *r*: índices para *A*. Considera-se que cada um dos subvetores *A*[*p*...*q*] e *A*[*q* + 1...*r*] já está ordenado.

Resultado: O subvetor *A*[*p*...*q*] contém os elementos originalmente em *A*[*p*...*q*] e *A*[*q* + 1...*r*], mas agora o subvetor *A*[*p*...*q*] inteiro já está ordenado.

1. Iguale *n1* a *q* - *p* + 1 e iguale *n2* a *r* - *q*.
2. Sejam *B*[0...*n1*] e *C*[0...*n2*] novos vetores.
3. Copie *A*[*p*...*q*] para *B*[0...*n1*] e *A*[*q* + 1...*r*] para *C*[0...*n2*].
4. Enquanto *i* for menor que *n1* e *j* for menor que *n2:*
    a. Se *B*[*i*] ≤ *C*[*j*], então:
        i. iguale *A*[*k*] a *B*[*i*] e incremente *i*.
    b. Caso contrário:
        i. iguale *A*[*k*] a *C*[*j*] e incremente *j*.
    c. Incremente *k*.

Merge Sort

A figura traz um exemplo de ordenação usando o merge sort onde os números em itálico mostram a ordem na qual as chamadas são feitas.

Merge Sort

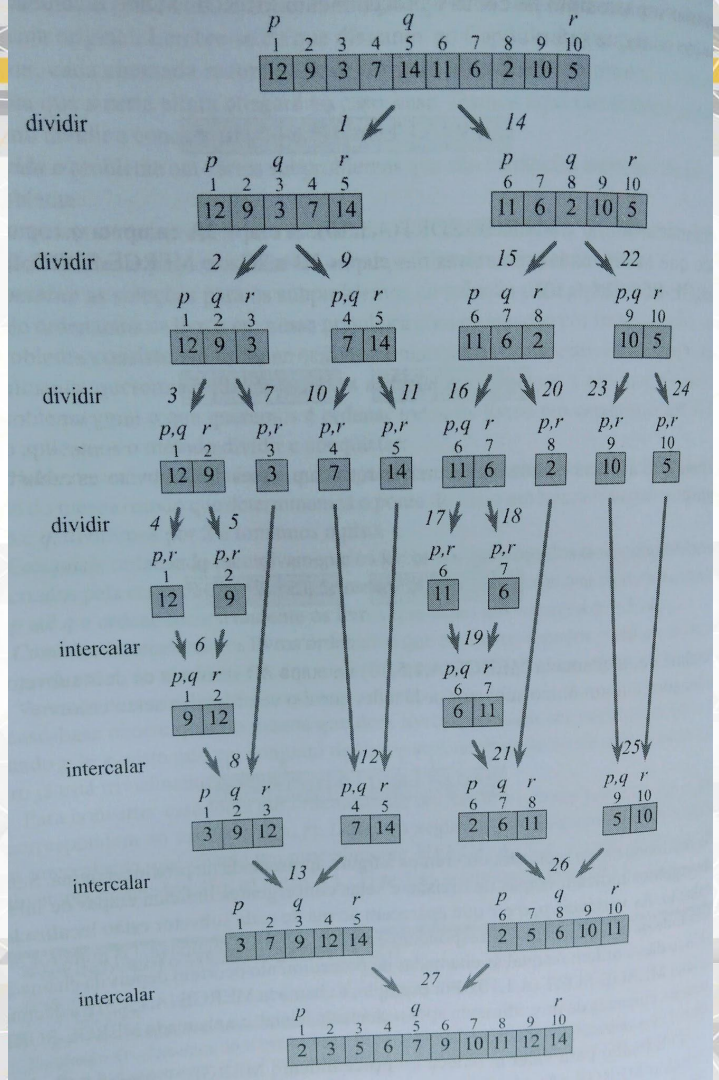
Procedimento: MERGE-SORT

Entradas:

- *A:* um vetor.
- *p, r:* índices iniciais e finais de um subvetor de *A*.

Resultado: Os elementos do subvetor A[*p*...*r*] ordenados em ordem crescente.

1. Se *p* < *r*, faça o seguinte:
   a. Iguale *q* a (*p* + *r*) / 2.
   b. Chame recursivamente MERGE-SORT(*A*, *p*, *q*).
   c. Chame recursivamente MERGE-SORT(*A*, *q* + 1, *r*).
   d. Chame MERGE(*A*, *p*, *q*, *r*).
2. Caso contrário, o subvetor A[*p*...*r*] tem, no máximo, um elemento. Portanto, já está ordenado. Apenas retorne sem fazer nada.



Merge Sort

Complexidade de tempo:

- Independente de o vetor já estar ordenado de forma crescente (melhor caso) ou de forma decrescente (pior caso), o algoritmo sempre irá dividir o problema por dois até chegar ao caso base e então juntar as soluções novamente. Assim, a complexidade será a mesma nos dois casos.

Merge Sort

Complexidade de tempo:

- A parte de intercalação, que chamamos de MERGE terá no máximo custo O(n), quando precisar intercalar o vetor inteiro na última etapa. A partir disso é possível montar a relação de recorrência do merge sort:

  $T(n) = 2T(n / 2) + n$

  $T(1) = 1$

Merge Sort

Complexidade de tempo:

Resolvendo alguns termos:

$T(n) = 2T(n / 2) + n$

$2T(n / 2) = 2(2T(n / 4) + n / 2) = 4T(n / 4) + n$

$4T(n / 4) = 4(2T(n / 8) + n / 4) = 8T(n / 8) + n$

$8T(n / 8) = 8(2T(n / 16) + n / 8) = 16T(n / 16) + n$

…

Merge Sort

Complexidade de tempo:

Generalizando:

$T(n) = 2T(n / 2) + n$

$2T(n / 2) = 4T(n / 4) + n$

$4T(n / 4) = 8T(n / 8) + n$

$8T(n / 8) = 16T(n / 16) + n$

…

$2^kT(n / 2^k) = 2^{k+1}T(n / 2^{k+1}) + n$

Merge Sort

Complexidade de tempo:

Isso irá se repetir até que n seja igual a 1, ou seja até 2kser igual a n.

T(n) = ~~2T(n / 2)~~ + n

2T(n / 2) = ~~4T(n / 4)~~ + n

4T(n / 4) = ~~8T(n / 8)~~ + n

8T(n / 8) = ~~16T(n / 16)~~ + n

…

~~nT(n / n)~~ = n * 1

Se $2^k = n$, então $k = \log_2 n$, ou seja, o termo **n** deve ser somado $\log_2 n$ vezes, levando a uma complexidade de tempo O(n log2n).

Merge Sort

Complexidade de espaço:

- Até então analisamos a complexidade de espaço basicamente pelo tamanho da pilha de chamadas da função.
- Vimos por exemplo que os algoritmos de ordenação por seleção, inserção e bolha tinham complexidade de espaço O(1).
- Esses algoritmos, além de não serem recursivos, têm um fato em comum: todos conseguem ordenar um vetor sem precisar de um vetor auxiliar, pois vão realizando trocas dentro do próprio vetor.

Merge Sort

Complexidade de espaço:

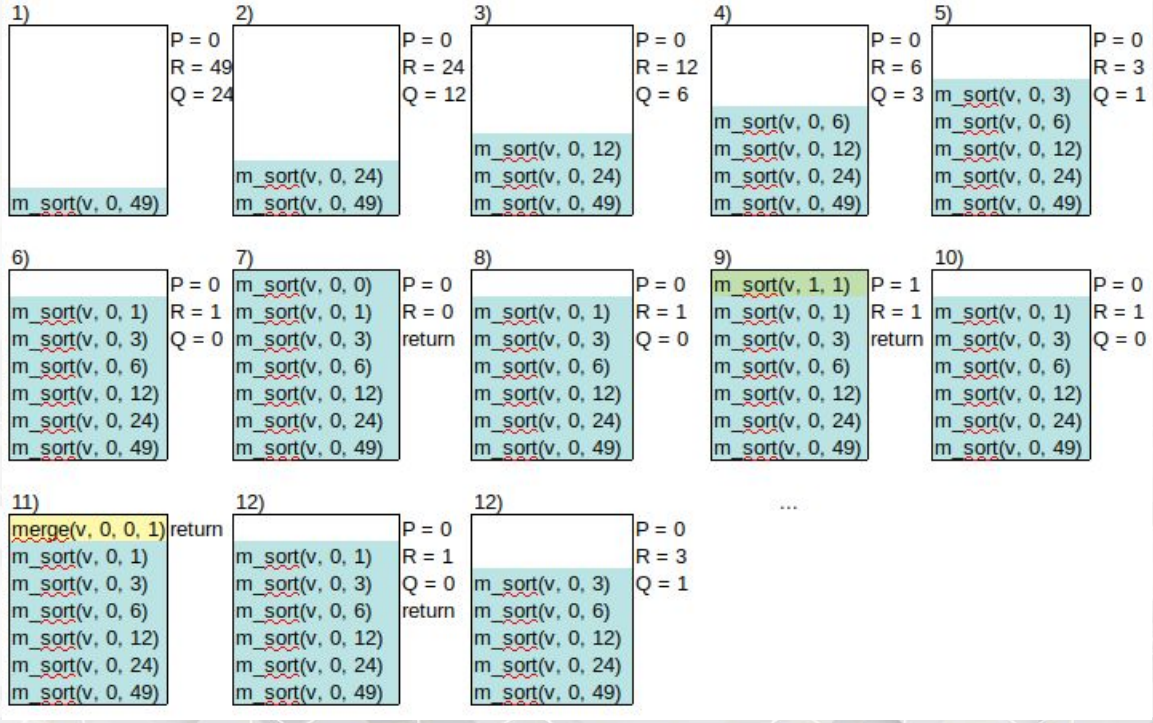
- No merge sort utilizamos vetores auxiliares na função de intercalação.
- São criados dois vetores: um com a metade esquerda do vetor recebido por parâmetro e um com a metade direita do vetor recebido por parâmetro.
- Nesta situação, teremos que analisar a complexidade de espaço considerando essa memória extra que o algoritmo irá gastar com os vetores auxiliares.

Merge Sort

Complexidade de espaço:

- Se fossem consideradas apenas as chamadas de função, ao montar a pilha de chamadas, veríamos que para uma entrada de tamanho n, até $\log_2 n$ chamadas seriam feitas até gerar o resultado final.
- Considere n = 50:

Merge Sort


1)
P = 0
R = 49
Q = 24
m_sort(v, 0, 49)
2)
P = 0
R = 24
Q = 12
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
3)
P = 0
R = 12
Q = 6
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
4)
P = 0
R = 6
Q = 3
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
5)
P = 0
R = 3
Q = 1
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
6)
P = 0
R = 1
Q = 0
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
7)
m_sort(v, 0, 0)
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
P = 0
R = 0
return
8)
P = 0
R = 1
Q = 0
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
9)
m_sort(v, 1, 1)
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
P = 1
R = 1
return
10)
P = 0
R = 1
Q = 0
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
11)
merge(v, 0, 0, 1) return
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
12)
P = 0
R = 1
Q = 0
return
m_sort(v, 0, 1)
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
12)
P = 0
R = 3
Q = 1
m_sort(v, 0, 3)
m_sort(v, 0, 6)
m_sort(v, 0, 12)
m_sort(v, 0, 24)
m_sort(v, 0, 49)
...

Merge Sort

Complexidade de espaço:

Entretanto temos que considerar que na fase de intercalação:

- A 1ª chamada vai precisar de 2 vetores de tamanho n/2: 2 x n / 2 = n
- A 2ª chamada vai precisar de 2 vetores de tamanho n/4: 2 x n / 4 = n / 2
- A 3ª chamada vai precisar de 2 vetores de tamanho n/8: 2 x n / 8 = n / 4
- ...

Ao somar a memória extra para cada chamada temos:

n + n/2 + n/4 + n/8 + ...

n (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + …) -> O(n)

Merge Sort

Observações:

Embora o merge sort tenha complexidade de tempo O(n log n), que é menor do que a complexidade de tempo da ordenação por inserção, por ex., que é $O(n^2)$, os fatores constantes da ordenação por inserção podem torná-la mais rápida para um n pequeno.

Merge Sort

Atividades:

1. Implementar o algoritmo MERGE (intercalação - esboço no no github).
2. Desenvolver uma versão não recursiva para o merge sort.

Merge Sort

Referências

- Cormen, T. H., “Desmistificando algoritmos”. 1ª ed. Rio de Janeiro, Elsevier, 2014.
- Explicação da pilha de chamadas do merge sort: https://www.youtube.com/watch?v=RZK6KVpaT3I
- Overview Mergesort: https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/merge-sort/a/overview-of-merge-sort