2 EDO: problema de Cauchy

2.1. Determine se as seguintes funções são lipschitzianas:

(a) $f(t,u) = t^3u + 3, \quad t \in [1,5]\,;$

(b) $f(t,u) = \dfrac{2u}{t}, \quad t \geq 1;$

(c) $f(t,u) = t - u^3, \quad |u(t)| \leq 20.$

2.2. Transforme a EDO linear de ordem n

$$u^{(n)} + a_1(t)u^{(n-1)} + a_2(t)u^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(t)u + a_n(t) = 0$$

num sistema de EDO's de primeira ordem escrito na forma

$$\boldsymbol{u}' = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t).$$

2.3. Transforme o seguinte problema na forma de um sistema de EDO's de primeira ordem:

(a) $u'' - 5u' + 6u = 0, \quad u(0) = 1, \ u'(0) = 1;$

(b) $u''' - 3u' + u + \cos t = 0, \quad u(1) = 0, \ u'(1) = 1, \ u''(1) = 2;$

(c) $u'' = 2(1-u^2)u' + u + t^2, \quad u(0) = 1, \ u'(0) = 0.$

2.4. Utilize cada um dos seguintes métodos:

1) de Euler progressivo;

2) de Euler regressivo;

3) do trapézio;

para aproximar a solução dos seguintes problemas (escreva apenas as fórmulas de iteração):

(a) $u' = tu, \quad u(0) = 2, \ t \in [0,1]\,, \ h = 0.25;$

(b) $u' = -tu, \quad u(0) = 2, \ t \in [0,1]\,, \ h = 0.25;$

(c) $u'' = u, \quad u(0) = 1, \ u'(0) = 0, \ t \in [0,1]\,, \ h = 0.25.$

2.5. Obtenha a solução aproximada do problema

$$u' = t - u, \quad t \in [0,1]\,, \quad u(0) = 0,$$

recorrendo ao método de Euler progressivo com passo constante $h = 0.25$, e compare esta com a solução exacta $u(t) = e^{-t} + t - 1$.

2.6. O erro total (erro de aproximação + erros de arredondamento) do seguinte método de segunda ordem

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\left[f'_t(t_k, y_k) + f'_u(t_k, y_k)f(t_k, y_k)\right]$$

calcula-se pela fórmula

$$\hat{E}(h) = \frac{K}{6}h^2 + \frac{\rho}{h},$$

onde $K = \max_t |u'''(t)|$ e ρ é o erro máximo de arredondamento em cada iteração. Supondo que $\rho = 10^{-6}$, esboce o gráfico de $\hat{E}(h)$ e encontre h óptimo que minimiza $\hat{E}(h)$ para os seguintes problemas:

(a) $u' = -u^2, \quad u(0) = 1, \ t \in [0, 1]$;

(b) $u' = -u, \quad u(0) = 0, \ t \in [0, 1]$;

2.7. A equação

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - u}{R} = 0$$

descreve a tensão de saída $v(t)$ no circuito eléctrico (ver Fig 2.1) constituído por um condensador de capacidade C, uma resistência R e um fonte u.

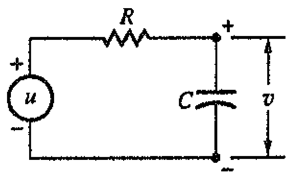

Fig 2.1

Supondo que $u = 10$, $R = 1$, $C = 1$ e $v(0) = 0$, encontre a tensão $v(t)$ nos instantes $t = 0.1, 0.2, ..., 1.0$ pelo método de Euler progressivo.

2.8. Escreva as fórmulas de iteração

(a) pelo método de Euler-Cauchy: $u' = \frac{1}{t^2} - \frac{u}{t} - u^2, \quad u(0) = 1, \ t \in [0, 1]$,
a solução exacta é $u(t) = -\frac{1}{t}$;

(b) pelo método de Heun: $u' = tu, \quad u(0) = 1, \ t \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$,
a solução exacta é $u(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Encontre a solução aproximada com $h = 0.25$ e compare com a solução exacta:

2.9. Escreva pelo menos 5 variantes diferentes do método de Runge-Kutta explícito de segunda ordem.

2.10. Dê uma interpretação geométrica dos métodos:

(a) de Euler progressivo;
(b) de Euler regressivo;
(c) do trapézio;
(d) de Euler-Cauchy;
(e) de Heun.

2.11. Mostre que o método do trapézio é equivalente a efectuar metade do passo pelo método de Euler progressivo seguido de um passo pelo método de Euler regressivo.

2.12. Escreva as fórmulas de iteração pelo método RK4 para o seguinte problema:

(a) $u' = 4t^2 - 2u, \quad u(0) = 0,$
a solução exacta $u(t) = 1 - 2t + 2t^2 - e^{-2t}$;
(b) $u' = u - 2\text{sen}\, t, \quad u(0) = 1,$
a solução exacta $u(t) = \cos t + \text{sen}\, t$;
(c) $u' = -u + 2\cos t, \quad u(0) = 1,$
a solução exacta $u(t) = \cos t + \text{sen}\, t$.

Calcule as soluções aproximadas no intervalo $[0, 1]$ com passo $h = 0.25$ e $h = 0.5$ e compare-as com a solução exacta.

2.13. Encontre a ordem com que os seguintes métodos aproximam o problema $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$:

(a) $y_{k+1} + 4y_k - 5y_{k-1} = 2h\,(2f_k + f_{k-1})$;
(b) $y_{k+1} = y_k - 3y_{k-1} - 2hf(t_{k-1}, y_{k-1})$;
(c) $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_{k+1}$;
(d) $y_{k+1} = y_{k-1} + \dfrac{h}{3}\,(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1})$.

2.14. Determine se o seguinte método é: explícito ou implícito; do passo simples ou multipasso:

(a) $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$;
(b) $y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\,[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})]$;
(c) $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(t_k, y_k)$.

2.15. Encontre as constantes na forma geral do método multipasso linear

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i y_{k+1-i} = h \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_{k+1-i}$$

para os seguintes métodos:

(a) de Euler progressivo;

(b) de Euler regressivo;

(c) de Adams-Bashforth de 2 ordem (AB2);

(d) de Adams-Moulton de 2 ordem (AM2);

(e) $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_k$;

(f) $y_{k+1} + 4y_k - 5_{k-1} = 2h\,(2f_k + f_{k-1})$;

2.16. Escreva as fórmulas de iteração pelos métodos:

1) AB4;

2) AM4;

3) preditor-corrector (AB4+AM4);

para aproximar a solução do seguinte problema:

(a) $u' = 4t^2 - 2u, \quad u(0) = 0,$

(b) $u' = u - 2\text{sen}\ t, \quad u(0) = 1,$

(c) $u' = -u + 2\cos t, \quad u(0) = 1.$

2.17. Considere o método do trapézio como corrector com uma única iteração e o método de Euler progressivo como preditor. Prove que o método resultante é idêntico ao de Heun de segunda ordem.

2.18. Determine se os seguintes métodos são estáveis ou estritamente estáveis:

(a) $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$;

(b) $y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k))$;

(c) $y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\,(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2})$ - método de Milne;

(d) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,(3f_k - f_{k-1})$;

(e) $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_k$;

(f) $y_{k+1} + 4y_k - 5_{k-1} = 2h\,(2f_k + f_{k-1})$.

2.19. Resolva a seguinte problema analiticamente e pelo método de Euler progressivo

$$u' = \lambda(u - \frac{1}{3})$$

para $\lambda = 10$ e as seguintes condições iniciais: 1) $u(0) = \frac{1}{3}$; 2) $u(0) = \frac{1}{3}$.

Repita os mesmos cálculos com $\lambda = -10$.

Explique a sucedido.

2.20. Encontre a estimação para os passos h de modo que o método RK2 (de Cauchy-Euler) seja estável para o problema:

(a) $u' = -100u$, $u(0) = 1$;

(b) $u' = 100u$, $u(0) = 1$.

2.21. Encontre a gama de passos admissíveis quando se usa o método de Euler progressivo na solução do seguinte sistema de EDO's

$$\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u}, \qquad \text{com } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

2.22. Obtenha as condições que as constantes α e β devem satisfazer para a solução da EDO

$$u'' + \alpha u' + \beta u = 0$$

verificar $\lim_{t\to\infty} u(t) \to 0$.

Nota. Transformar a EDO dada num sistema de EDO's de primeira ordem.

2.23. Escreva um programa para realizar um dos seguintes métodos e resolva pelo programa elaborado o problema de Cauchy indicado:

(a) [3] Método de Euler progressivo:

$$u'' = 2(\exp(2t) - u^2),\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1,\ t \in [0, 1]\,.$$

(b) [3] Método de Euler regressivo:

$$u'' = 2u^3,\ u(1) = 1,\ u'(1) = -1,\ t \in [1, 2]\,.$$

(c) [3] Método do trapézio:

$$u'' + 3u^2 = -(u')^2,\ u(0) = 5,\ u'(0) = 0,\ t \in [0, 4]\,.$$

(d) [3] Método RK2 de Euler-Cauchy:

$$u'' + au' + bu = 0,\ u(0) = \frac{\pi}{4},\ \ u'(0) = 0,\ \ t \in [0, 10]\,.$$

(e) [3] Método RK2 de Heun:

$$u'' = 2u^3 + t,\ u(1) = 1,\ u'(1) = -1,\ t \in [1, 2]\,.$$

(f) [3] Método RK2: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4} f(t_k, y_k) + \frac{3}{4} f(t_k + \frac{2}{3}h,\ y_k + \frac{2}{3} h f(t_k, y_k))$:

$$u'' = u^3 - u,\quad u(1) = 1,\ u'(1) = -1,\ t \in [1, 2]\,.$$

(g) [4] Método RK2 com controlo adaptativo de passo:

$$u' = \left(t^2 + \cos u\right) \exp(-u),\qquad u(0) = 1,\ t \in [0, 2]\,.$$

(h) [4] Método RK4 com controlo adaptivo de passo:

$$u' = \frac{1}{t^2} - \frac{u}{t} - u^2,\qquad u(1) = -1,\ t \in [1, 2]\,.$$

(i) [3] Método AB3:

$$u' = t - u^2,\ u(1) = -1,\ t \in [1, 2]\,.$$

(j) [3] Método AM3:

$$u' = t + u^2,\ u(1) = -1,\ t \in [1, 2]\,.$$

(k) [4] Método preditor-corrector (AB3+AM3):

$$u' = t + u,\ u(1) = 0,\ t \in [1, 2]\,.$$

(l) [4] Método preditor-corrector (Euler progressivo+Euler regressivo):

$$u' = t + 2u,\ u(0) = 3,\ t \in [0, 2]\,.$$

(m) [5] Projecto de computação 1.

(n) [6] Projecto de computação 2.

(o) [5] Projecto de computação 3.

(p) [6] Projecto de computação 4.

(q) [6] Projecto de computação 5.

Entre parêntesis está escrita a nota máxima do trabalho.