Process Algebra
Uitwerkingen opgaven practicum 3

Hieronder staan de uitwerkingen van de volgende opgaven:

2.3.12: 1 en 2;

2.4.23: 3, 4, 5, 7 en 8(i).

Exercise 2.3.12.1

guarded - unguarded - unguarded - unguarded - both - guarded - guarded

Exercise 2.3.12.2

i unguarded

ii guarded, valt te herschrijven tot $\{X = aX, Y = aX\}$

iii unguarded

iv guarded, valt te herschrijven tot $\{X = a(X + c) + b(X + c)\}$

Exercise 2.4.23.3

$a + b$, $a(a + b) + bc$, $a(a(a + b) + bc) + bc(a + b)$

Exercise 2.4.23.4

Prove (using AIP^-) that if $X = aXb$ then also $X = aX$.

$\mathrm{AIP}^- :\ (\forall n \geq 1\ ::\ \pi_n(x) = \pi_n(y) \wedge B_n(x) \Rightarrow x = y)$

We see that any solution of $X = aXb$ starts with an infinite sequence of a's. Therefore, the nth-projection of such a solution is a sequence of n a's: $\pi_n(p) = a^n$ (for any solution p of $X = aXb$).

For any solution q of $X = aX$, we also find $\pi_n(q) = a^n$. So, for solutions p and q of $X = aXb$ and $X = aX$, respectively, we have: $(\forall n\ ::\ \pi_n(p) = \pi_n(q))$.

We now have to show that both processes have bounded nondeterminism up to depth n for all n. According to definition 2.4.6(ii), processes $\langle X \mid X = aXb\rangle$ and $\langle X \mid X = aX\rangle$ are *definable*. Lemma 2.4.16 says that every definable process has bounded nondeterminism, so both processes have bounded nondeterminism.

Now, using AIP$^-$, we see that $\langle X \mid X = aXb\rangle$ and $\langle X \mid X = aX\rangle$ are equal, so if $X = aXb$ then also $X = aX$.

Exercise 2.4.23.5

$X = a + X$ has as its solutions $a + x$ for any x, and thus has infinitely many solutions in $\mathbb{A}$. $X = aX + X$ has no solutions in $\mathbb{A}$. However, in the extension $\mathbb{A}^\infty$ it has infinitely many solutions, all of the form $a^\omega + x$ for some x.

Exercise 2.4.23.7

Gegeven is de vergelijking $X = aX + bX$. Geef een uitdrukking voor $\pi_n(X)$ waarbij $n > 0$.

We gaan eerst maar eens $\pi_1(X)$ en $\pi_2(X)$ berekenen:

$$\begin{array}{ll} & \pi_1(X) \\ = & \pi_1(aX + bX) \\ = & \pi_1(aX) + \pi_1(bX) \\ = & a + b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \pi_2(X) \\ = & \pi_2(aX + bX) \\ = & \pi_2(aX) + \pi_2(bX) \\ = & a\pi_1(X) + b\pi_1(X) \\ = & a(a + b) + b(a + b) \\ = & (a + b)(a + b) \end{array}$$

We krijgen nu het vermoeden dat $\pi_n(X) = (a + b)^n$ (d.w.z., n-keer het proces $a + b$). De correctheid hiervan moet natuurlijk nog bewezen worden. Dus, te bewijzen:

$$\pi_n(X) = (a + b)^n$$

We bewijzen dit met natuurlijke inductie naar n:

$n = 1$ Dit is het basisgeval van het inductiebewijs. We gebruiken de berekening van $\pi_1(X)$ van hierboven.

$$\begin{array}{ll} & \pi_1(X) \\ = & a + b \\ = & (a + b)^1 \end{array}$$

$n > 1$ De inductie hypothese is $\pi_{n-1}(X) = (a+b)^{n-1}$. Onder aanname van deze hypothese moeten we laten zien dat $\pi_n(X) = (a+b)^n$ geldt.

$$\begin{array}{rl} & \pi_n(X) \\ = & \pi_n(aX + bX) \\ = & \pi_n(aX) + \pi_n(bX) \\ = & a\pi_{n-1}(X) + b\pi_{n-1}(X) \\ = & (a+b)\pi_{n-1}(X) \\ = & (a+b)(a+b)^{n-1} \\ = & (a+b)^n \end{array}$$

Exercise 2.4.23.8(i)

Te bewijzen: $\pi_n(\pi_m(t)) = \pi_{\min(n,m)}(t)$
Bewijs: Omdat er voor elke term t een basisterm t' is met $t = t'$, is het voldoende om de eigenschap aan te tonen voor zo'n basisterm t'. Dit heeft als voordeel dat we inductie naar de structuur van t' kunnen gebruiken (zie ook 2.4.4 in het boek).

$t' \equiv a :\ \pi_n(\pi_m(a)) = a = \pi_{min(m,n)}(a)$

$t' \equiv a \cdot s$: We werken hier met natuurlijke inductie naar m en n (merk op dat $m, n > 0$).

$n = 1$:

$$\begin{array}{rl} & \pi_m(\pi_1(a \cdot s)) \\ = & \pi_m(a) \\ = & a \\ = & \pi_1(a \cdot s) \end{array}$$

$m = 1, n > 1$:

$$\begin{array}{rl} & \pi_1(\pi_n(a \cdot s)) \\ = & \pi_1(a \cdot \pi_{n-1}(s)) \\ = & a \\ = & \pi_1(a \cdot s) \end{array}$$

$m > 1, n > 1$:

$$\begin{array}{rl} & \pi_m(\pi_n(a \cdot s)) \\ = & \pi_m(a \cdot \pi_{n-1}(s)) \\ = & a \cdot \pi_{m-1}(\pi_{n-1}(s)) \\ = & a \cdot \pi_{\min(m-1,n-1)}(s) \\ = & \pi_{\min(m-1,n-1)+1}(a \cdot s) \\ = & \pi_{\min(m,n)}(a \cdot s) \end{array}$$

$t' \equiv s + r$:

$$\begin{array}{rl} & \pi_m(\pi_n(s+r)) \\ = & \pi_m(\pi_n(s)) + \pi_m(\pi_n(r)) \\ = & \pi_{\min(m,n)}(s) + \pi_{\min(m,n)}(r) \\ = & \pi_{\min(m,n)}(r+s) \end{array}$$