

# Termersetzung

In der mathematischen Logik und Informatik ist Termersetzung ein Formalismus der nichtdeterministische Umformungen beschreibt. Wenn man Termersetzungen mit einer algorithmischen Vorgabe wie Ersetzungsregeln anzuwenden sind kombiniert, oder in einem sogenannten deterministischen Termersetzungssystem, können Termersetzungssysteme dazu verwendet werden Algorithmen darzustellen (wie wir unten sehen werden).

---

Für den Anfang, und für das meiste das uns heute erwartet, beschäftigen wir uns mit Termersetzungssystemen einer sehr einfachen Form, nämlich Wortersetzungssystemen. Ein Wortersetzungssystem ist eine endliche Menge von Substitutionen  $S$ , geschrieben in der Form  $l \rightarrow r$  wo  $l$  und  $r$  strings sind, sprich, Worte in einem Alphabet  $A$ . Wir sagen, dass sich ein Eingangswort  $w$  im Alphabet  $A$  unter Benützung von  $S$  in einem Schritt aus einem Wort  $u$  ableiten läßt, wenn es eine Substitution  $l \rightarrow r$  in  $S$ , und Worte  $x, y$  gibt, sodass  $w = xly$  und  $u = xry$ . Läßt sich  $w$  in einem Schritt aus  $u$  ableiten, schreiben wir

$$w \rightarrow u,$$

läßt sich  $w$  in einer endlichen Anzahl (die auch 0 sein könnte) von Schritten aus  $u$  ableiten, so schreiben wir  $w \rightarrow^* u$ .

Sei ein Wortersetzungssystem  $S$  gegeben. Ein Wort  $u$  heißt ein Endergebnis einer Ableitung von  $w$  (unter Benützung von  $S$ ), oder eine Normalform von  $w$ , wenn  $w \rightarrow^* u$  gilt und  $u$  keine weitere Ableitung gestattet. Wir sagen, dass das Wortersetzungssystem  $S$  ein Algorithmus ist, wenn jedes Wort  $w$  eine eindeutige Normalform hat. Ein Wortersetzungssystem heißt terminierend, wenn es keine unendlich lange Kette von Ableitungen unter Benützung von  $S$  gibt. Ein Wortersetzungssystem heißt deterministisch, wenn für jedes Wort höchstens eine Substitution anwendbar ist. Ein deterministisches und terminierendes Wortersetzungssystem stellt einen Algorithmus dar.

---

**Aufgabe 1** Betrachte die folgende Menge von Substitutionen für Worte im Alphabet  $\{a, b\}$ :  $aa \rightarrow b$ ,  $ba \rightarrow ab$ ,  $bb \rightarrow b$

- Finde eine Ableitung in drei Schritten von  $aabbab$ .
- Finde eine Ableitung von  $aabbab$  zu einer Normalform.
- Ist dieses Wortersetzungssystem ein Algorithmus? Falls ja, was tut dieser Algorithmus?

**Aufgabe 2** Wir betrachten nun ein kleines Rätsel, das Kamelrätsel: Vier tasmanische Kamele wandern auf einem schmalen Grat und treffen vier andere Kamele die in der entgegengesetzten Richtung unterwegs sind. Sie haben sich erst sehr spät gesehen, und nun ist zwischen den beiden Gruppen nur mehr Platz von einer Kamelgröße. Wie wohlbekannt, gehen tasmanische Kamele niemals rückwärts, ganz besonders wenn sie sich gerade in einer prekären Lage befinden. Ein Kamel kann in seiner Gehrichtung über ein anderes klettern, aber nur wenn nach dem Hindernis Platz von mindestens einer Kamelgröße ist.

Ist es möglich, dass die beiden Gruppen aneinander vorbeikommen und beide in ihrer ursprünglichen Richtung weitergehen können?



Formalisiere dieses Rätsel als ein Wortersetzungssystem, und stelle dann die Lösung(en) als Ableitung zu einer Normalform dar. Ist dieses Wortersetzungssystem ein Algorithmus? Warum?  $\triangleleft$

**Aufgabe 3** Betrachte das auf Worten des Alphabets  $\{a, b, c\}$  agierende Wortersetzungssystem, das aus der einzigen Substitution  $a \rightarrow aa$  besteht. Was macht dieses System? Ist es ein Algorithmus? Begründen Sie Ihre Antwort (betrachte zum Beispiel den Ableitungsbaum der  $bbc$  and  $aba$ ).  $\triangleleft$

Wortersetzungssysteme müssen sich nicht notwendig auf Worte beschränken. Man kann sie auch benützen um Mengen oder Multimengen umzuschreiben – wie in der folgenden Aufgabe. Allgemein spricht man von Termersetzungssystemen, von welchen Wortersetzungssysteme und (multi-)Mengen Ersetzungssysteme Spezialfälle sind. Man kann auch Graphen, oder andere komplexere Objekte umschreiben.

**Aufgabe 4** Mulan handelt auf einem imaginären Marktplatz. Sie tauscht zwei Äpfel für eine Banane, drei Bananen für eine Kokosnus und drei Äpfel, sowie einen Apfel und eine Kokosnuss für zwei Mangos und eine Banane.

Als sie am Markt ankommt, hat sie drei Äpfel, eine Banane und eine Kokosnuss.

- Zeichne den gesamten Baum aller möglichen Ableitungen, und zeige dass sie den Markt im Besitz von mindestens einer jeder der genannten Früchte verlassen kann.
- Zeige, dass sie den Markt mit einem Apfel, einer Banane, einer Kokosnuss und zwei Mangos verlassen kann. Versuche auch Rückwärtsverkettung (Proof search) anzuwenden.
- Finde den bestmöglichen Handel den Mulan machen kann (dabei lege ein Qualitätskriterium fest, wie z.B. “die meisten Früchte mit nach Hause nehmen”, oder ähnliches)  $\triangleleft$

Zum Schluss beschäftigen wir uns ganz kurz mit unserem nächsten Thema.

**Aufgabe 5** Finde ein Wortersetzungssystem, welches ein Algorithmus ist, dass ein Wort im Alphabet  $A = \{a, b, c, d\}$  in alphabetische Ordnung bringt. Zum Beispiel soll also  $abdccbadd \rightarrow^* aabbccddd$  gelten.