Process Algebra
Uitwerkingen opgaven practicum 2

Hieronder staan uitwerkingen van de volgende opgaven:

2.1.13: 1, 2, 3 en 7;

2.1.13

1 $tb + tc$

2 $q(c + h)$

3 $a(b + b) = ab = ab + ab$ (gebruik A3)

7i Bewijs dat geldt: $x \leq y \Leftrightarrow \exists\ z : x + z = y$. Zie 2.1.9 voor de definitie van $\leq$.

We bewijzen eerst de implicatie naar rechts $\Rightarrow$:

$$\begin{array}{ll} & x \leq y \\ = & \{\text{Definitie 2.1.9 van } \leq\} \\ & y = x + y \\ \Rightarrow & \{\text{neem } z \equiv y\} \\ & y = x + z \end{array}$$

De implicatie naar links, $\Leftarrow$ gaat als volgt

$$\begin{array}{ll} & y = x + z \\ = & \{\text{gebruik axioma A3}\} \\ & y = (x + x) + z \\ = & \{\text{gebruik axioma A2}\} \\ & y = x + (x + z) \\ = & \{\text{gebruik } y = x + z\} \\ & y = x + y \\ = & \{\text{Definitie 2.1.9 van } \leq\} \\ & x \leq y \end{array}$$

7ii Bewijs dat $\leq$ een partiele ordening is, d.w.z., toon aan dat $\leq$ reflexive, symmetric, and transitive is.

Reflexivity:

$$\begin{array}{ll} & x \leq x \\ = & \{\text{Definitie van } \leq\} \\ & x = x + x \\ = & \{\text{Axioma A3}\} \\ & \text{true} \end{array}$$

Symmetry:

$$
\begin{array}{rl}
 & x \leq y \wedge y \leq x \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & y = x + y \wedge x = y + x \\
= & \{\text{Axioma A1}\} \\
 & y = y + x \wedge x = y + x \\
= & \\
 & y = x
\end{array}
$$

Transitivity:

$$
\begin{array}{rl}
 & x \leq y \wedge y \leq z \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & y = x + y \wedge z = y + z \\
\Rightarrow & \\
 & z = (x + y) + z \wedge z = y + z \\
= & \{\text{Axioma A2}\} \\
 & z = x + (y + z) \wedge z = y + z \\
\Rightarrow & \\
 & z = x + z \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & x \leq z
\end{array}
$$

7iii Voor alle atomaire acties $a, b \in A$ met $a \neq b$ geldt $\neg(a \leq b) \wedge \neg(b \leq a)$, dus neem bijvoorbeeld $s \equiv a$, $t \equiv b$.

7iv Bewijs $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x \leq y \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & y = x + y \\
\Rightarrow & \{\text{Voeg links en rechts een sommand } z \text{ toe}\} \\
 & y + z = (x + y) + z \\
= & \{\text{Herschrijven met axioma's A1, A2 en A3}\} \\
 & y + z = (x + z) + (y + z) \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & x + z \leq (y + z)
\end{array}
$$

Bewijs $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.

$$
\begin{array}{cl}
 & x \leq y \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & y = x + y \\
\Rightarrow & \{\text{Zet beide processen in sequentiele compositie met een proces } z\} \\
 & yz = (x + y)z \\
= & \{\text{Herschrijven met axioma A4}\} \\
 & yz = xz + yz \\
= & \{\text{Definitie van } \leq\} \\
 & xz \leq yz
\end{array}
$$

7v Geef twee gesloten termen s en t, zodat $s \leq t$ maar niet $as \leq at$.

Een mogelijke oplossing is: $s = a$, $t = a + b$.