Process Algebra
Uitwerkingen opgaven practicum 6

Hieronder staan de uitwerkingen van de volgende opgaven:

3.4.13: 6 en 7;

3.5.8: 1 en 4;

3.6.8: 8.

Huiswerk De huiswerkopgave die bij dit practicum hoort is 4.3.8.4. Deze opgave kun je op het volgend practicum inleveren.

Exercise 3.4.13.6

Zie figuur 1

Exercise 3.4.13.7

We geven alleen een uitdrukking voor $\pi_n(X)$ voor $\{X = Y \parallel Z, Y = aY, z = bZ\}$ en voor $\{X = a(X \parallel X)\}$. De bijbehorende procesgrafen staan in Figuur 2.
Voor $\pi_n(X)$ waarbij $\{X = aX \parallel bcX\}$ hebben we geen uitdrukking gevonden. Als u hiervoor wel een uitdrukking heeft, zouden we deze graag van u horen.

$$\{X = Y \parallel Z, Y = aY, z = bZ\}$$

$$\pi_1(X) = a + b$$

$$\pi_2(X) = a(a + b) + b(a + b) = (a + b)(a + b)$$

$$\pi_3(X) = (a + b)(a + b)(a + b)$$

$$\pi_n(X) = (a + b)^n$$

Het bewijs van de correctheid van deze uitdrukking voor $\pi_n(X)$ gaat met natuurlijke inductie. Het basisgeval, $n = 1$, hebben we reeds aangetoond. De 'stap' gaat als volgt:

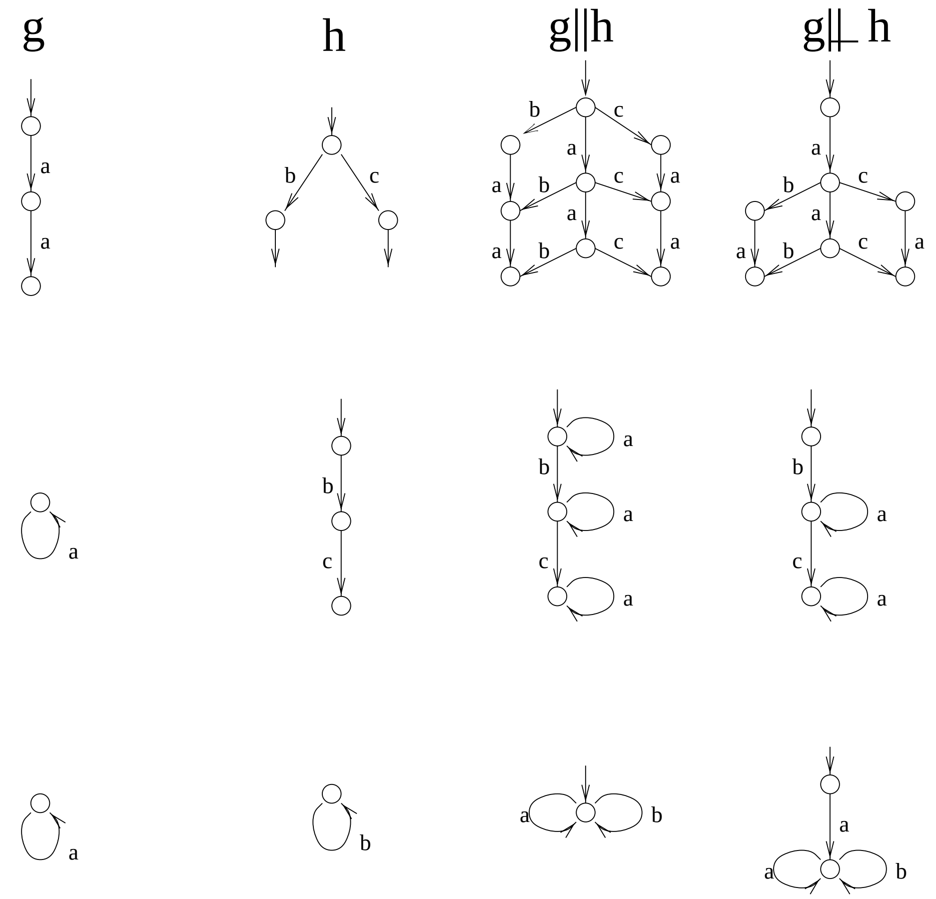

Figure 1: Antwoord 3.4.13.6

$$
\begin{array}{ll}
 & \pi_{n+1}(X) \\
= & \pi_{n+1}(aY \parallel bZ) \\
= & \pi_{n+1}(aY \lfloor\!\lfloor bZ + bZ \lfloor\!\lfloor aY) \\
= & \pi_{n+1}(aY \lfloor\!\lfloor bZ) + \pi_{n+1}(bZ \lfloor\!\lfloor aY) \\
= & \pi_{n+1}(a(Y \parallel bZ)) + \pi_{n+1}(b(Z \parallel aY)) \\
= & a\pi_n(Y \parallel bZ) + b\pi_n(Z \parallel aY) \\
= & a\pi_n(aY \parallel bZ) + b\pi_n(aY \parallel bZ) \\
= & (a+b)\pi_n(aY \parallel bZ) \\
= & (a+b)\pi_n(X) \\
\stackrel{\mathrm{IH}}{=} & (a+b)(a+b)^n \\
= & (a+b)^{n+1}
\end{array}
$$

$\{X = a(X \parallel X)\}$

$\pi_1(X) = a$

$\pi_2(X) = aa$

$\pi_3(X) = aaa$

$\pi_n(X) = a^n$

Het bewijs van de correctheid van deze uitdrukking voor $\pi_n(X)$ gaat met natuurlijke inductie. Het basisgeval, $n = 1$, hebben we reeds aangetoond. De 'stap' gaat als volgt:

$$
\begin{array}{ll}
 & \pi_{n+1}(X) \\
= & \pi_{n+1}(a(X \parallel X)) \\
= & a\pi_n(X \parallel X) \\
= & a\pi_n(X \mathbin{|\!\!\lfloor} X) \\
= & a\pi_n(a(X \parallel X) \mathbin{|\!\!\lfloor} X) \\
= & a\pi_n(a(X \parallel X \parallel X)) \\
= & \{\text{probleem}\}
\end{array}
$$

We zien nu dat het waarschijnlijk niet gaat lukken, want we komen niet uit op een term van de vorm $\pi_n(X)$, zodat we we de inductir hypothese niet kunnen gebruiken. Daarom gaan we iets sterkers bewijzen, nl,

$$Y = a(\parallel_i Y) \implies \pi_n(Y) = a^n, \qquad \text{voor } i > 0 \text{ en } n > 0.$$

Waarbij we de volgende definitie van $\parallel_i x$ hanteren:

$$\parallel_i x = \begin{cases} x & \text{if } i = 1 \\ x \parallel (\parallel_{i-1} x) & \text{if } i > 1 \end{cases}$$

Merk op dat X waarmee we begonnen een speciaal geval is van Y (neem $i = 2$).
Het bewijs gaat weer met natuurlijke inductie naar n. De basis, $n = 1$, gaat als volt.

$$
\begin{array}{ll}
 & \pi_1(Y) \\
= & \pi_1(a(\parallel_i Y)) \\
= & a \\
= & a^1
\end{array}
$$

In het bewijs van de 'stap', $n + 1$, onderscheiden we twee gevallen: $i = 1$ en $i > 1$.

$$
\begin{array}{lll}
i = 1: & & \pi_{n+1}(Y) \\
 & = & \pi_{n+1}(a(\parallel_1 Y)) \\
 & = & a\pi_n(Y) \\
 & \stackrel{\text{IH}}{=} & aa^n \\
 & = & a^{n+1}
\end{array}
$$

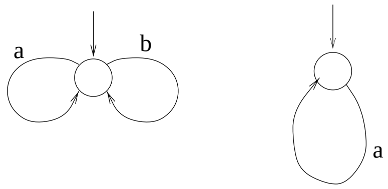

Figure 2: Behoort bij opgave 3.4.13.7

In het bewijs voor $i > 1$ gebruiken we de zg. *Axioms for Standard Concurrency* (zie 3.2.2 en 3.2.3 op blz. 71 van het procesalgebra boek).

$$
\begin{array}{lcl}
i > 1 : & & \pi_{n+1}(Y) \\
 & = & \pi_{n+1}(a(\|_i\ Y)) \\
 & = & a\pi_n(\|_i\ Y) \\
 & = & a\pi_n(a((\|_{i-1}\ Y) \parallel Y) \\
 & = & a\pi_n(a(\|_i\ Y)) \\
 & = & a\pi_n(Y) \\
 & \overset{\text{IH}}{=} & aa^n \\
 & = & a^{n+1}
\end{array}
$$

Exercise 3.5.8.1

We gebruiken hier de afkortingen als in figuur 17.

$$\pi_1(B) = \pi_1(0(B \parallel \underline{0}) + 1(B \parallel \underline{1})) = 0 + 1$$

$$
\begin{array}{ll}
\pi_2(B) & = \\
\pi_2(0(B \parallel \underline{0}) + 1(B \parallel \underline{1})) & = \\
0\pi_1(B \parallel \underline{0}) + 1\pi_1(B \parallel \underline{1}) & = \\
0\pi_1(B \lfloor\!\lfloor \underline{0} + \underline{0} \lfloor\!\lfloor B) + 1\pi_1(B \lfloor\!\lfloor \underline{1} + \underline{1} \lfloor\!\lfloor B) & = \\
0\pi_1((0(B \parallel \underline{0}) + 1(B \parallel \underline{1})) + \underline{0}B) + 1\pi_1((0(B \parallel \underline{0}) + 1(B \parallel \underline{1})) \lfloor\!\lfloor \underline{1} + \underline{1}B) & = \\
0(0 + 1 + \underline{0}) + 1(0 + 1 + \underline{1}) &
\end{array}
$$

(berekening wordt hier erg lang)

$$\pi_3(B) = 0(0(0{+}1{+}\underline{0}){+}1(0{+}1{+}\underline{0}{+}\underline{1}){+}\underline{0}(0{+}1)){+}1(0(0{+}1{+}\underline{0}{+}\underline{1}){+}1(0{+}1{+}\underline{1}){+}\underline{1}(0{+}1))$$

Exercise 3.5.8.4

$$X = p \lfloor\!\lfloor x$$

Exercise 3.6.8.8

$$\partial_{\{a\}}(a\delta + b) = \delta\delta + b = b$$

Dus $\partial_{\{a\}}(a\delta + b)$ bevat geen deadlock.
Het omgekeerde voorbeeld is gemakkelijk te geven