# Process Algebra
# Uitwerkingen opgaven practicum 7

Hieronder staan de uitwerkingen van de volgende opgaven:

4.2.5: 1, 3, 4 en 5;

4.3.8: 1, 4 en 6;

4.5.14: 1;

4.6.7: 1 en 3.

## Exercise 4.2.5.1

(i)

$$
\begin{array}{rl}
 & aa \parallel bb \\
= & aa \mathbin{⌊\!⌊} bb + bb \mathbin{⌊\!⌊} aa + (aa|bb) \\
= & a(a \parallel bb) + b(b \parallel aa) + c(a \parallel b) \\
= & a(a \mathbin{⌊\!⌊} bb + bb \mathbin{⌊\!⌊} a + a|bb) + b(b \mathbin{⌊\!⌊} aa + aa \mathbin{⌊\!⌊} b + b|aa) + c(a \mathbin{⌊\!⌊} b + b \mathbin{⌊\!⌊} a + a|b) \\
= & a(abb + b(b \parallel a) + cb) + b(baa + a(a \parallel b) + ca) + c(ab + ba + c) \\
= & a(abb + b(ba + ab + c) + cb) + b(baa + a(ab + ba + c) + ca) + c(ab + ba + c)
\end{array}
$$

(ii)

$$
\begin{array}{rl}
 & \partial_H(aa \parallel bb) \\
= & \partial_H(a(abb + b(ba + ab + c) + cb) + b(baa + a(ab + ba + c) + ca) + c(ab + ba + c)) \\
= & \delta + \delta + c(\delta + \delta + c) \\
= & cc
\end{array}
$$

(iii)

$$
\begin{array}{rl}
 & \partial_H(ba \parallel bb) \\
= & \partial_H(ba \mathbin{⌊\!⌊} bb) + \partial_H(bb \mathbin{⌊\!⌊} ba) + \partial_H(ba|bb) \\
= & \delta + \delta + \delta \\
= & \delta
\end{array}
$$

(iv)

$$
\begin{array}{rl}
 & a\delta \parallel ba \\
= & a\delta \mathbin{⌊\!⌊} ba + ba \mathbin{⌊\!⌊} a\delta + a\delta|ba \\
= & a(\delta \parallel ba) + b(a \parallel a\delta) + c(\delta \parallel a) \\
= & a(\delta \mathbin{⌊\!⌊} ba + ba \mathbin{⌊\!⌊} \delta + ba|\delta) + b(a \mathbin{⌊\!⌊} a\delta + a\delta \mathbin{⌊\!⌊} a + a|a\delta) + c(\delta \mathbin{⌊\!⌊} a + a \mathbin{⌊\!⌊} \delta + \delta|a) \\
= & a(\delta + b(a \parallel \delta) + \delta) + b(aa\delta + a(\delta \parallel a) + \delta) + c(\delta + a\delta + \delta) \\
= & ab(a \mathbin{⌊\!⌊} \delta + \delta \mathbin{⌊\!⌊} a + a|\delta) + b(aa\delta + a(\delta \mathbin{⌊\!⌊} a + a \mathbin{⌊\!⌊} \delta + \delta|a)) + ca\delta \\
= & ab(a\delta + \delta + \delta) + b(aa\delta + a(\delta + a\delta + \delta)) + ca\delta \\
= & aba\delta + b(aa\delta + aa\delta) + ca\delta \\
= & aba\delta + baa\delta + ca\delta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{(v)} & \partial_H(ca \parallel cbb) \\
= & \partial_H(ca \mathbin{\|\!\_} cbb) + \partial_H(cbb \mathbin{\|\!\_} ca) + \partial_H(ca|cbb) \\
= & c\partial_H(a \parallel cbb) + c\partial_H(bb \parallel ca) + \delta \\
= & c\partial_H(acbb + c(bb \parallel a) + \delta) + c\partial_H(b(b \parallel ca) + c(a \parallel bb) + \delta) \\
= & cc\partial_H(bb \parallel a) + cc\partial_H(a \parallel bb) \\
= & cc\partial_H(b(b \parallel a) + abb + cb) + cc\partial_H(abb + b(b \parallel a) + cb) \\
= & cc(\delta + \delta + c\delta) + cc(\delta + \delta + c\delta) \\
= & ccc\delta + ccc\delta \\
= & ccc\delta
\end{array}
$$

# Exercise 4.2.5.3

Zij $H = a, b$ en $\gamma(a, b) = c$. Dan $\partial_H(a \parallel b) = \partial_H(a \mathbin{\|\!\_} b + b \mathbin{\|\!\_} a + a|b) = \partial_H(ab + ba + c) = \delta + \delta + c = c$ en $\partial_H(a) \parallel \partial_H(b) = \delta \parallel \delta = \delta$.

# Exercise 4.2.5.4

$\partial_H((ca + cb) \parallel b) = \partial_H(ca \mathbin{\|\!\_} b + cb \mathbin{\|\!\_} b + b \mathbin{\|\!\_} (ca + cb) + (ca + cb)|b) = c\partial_H(a \parallel b) + c\partial_H(b \parallel b) + \delta + \delta = c(\delta + \delta + c) + c(\delta + \delta + \delta) = cc + c\delta$.
$\partial_H(c(a + b) \parallel b) = c\partial_H((a + b) \parallel b) + \delta + \delta = c(\delta + \delta + c) = cc$.

# Exercise 4.2.5.5

We bewijzen dit met inductie naar $x$ en $y$. We bewijzen dit alleen voor basic terms. De inductie voor beide formules wordt simultaan gedaan.

Allereerst (i).

Als zowel $x$ als $y$ atomair zijn, hebben we $x|y = \gamma(x, y) = \gamma(y, x) = y|x$ indien $\gamma(x, y)$ bestaat. Indien $\gamma(x, y)$ niet bestaat, bestaat $\gamma(y, x)$ ook niet, en dus $x|y = \delta = y|x$.

Als $x$ van de vorm $x_1 + x_2$ is, hebben we: $(x_1 + x_2)|y = x_1|y + x_2|y =_{(I.H.)} y|x_1 + y|x_2 = y|(x_1 + x_2)$. $y = y_1 + y_2$ gaat analoog.

Als $x$ van de vorm $ax'$ is, en $y$ is atomair (zeg $b$), dan $ax'|b = (a|b) \cdot x' = (b|a) \cdot x' = b|ax'$. Analoog voor $x = a$, $y = by'$.

Als $x$ van de vorm $ax'$ en $y$ van de vorm $by'$, dan $ax'|by' = (a|b)(x' \parallel y')$. Volgens de inductiehypothese geldt $x' \parallel y' = y' \parallel x'$, en dus $ax'|by' = (a|b)(x' \parallel y') = (b|a)(y' \parallel x') = by'|ax'$.

Nu (ii)

$x \parallel y = x \mathbin{\|\!\_} y + y \mathbin{\|\!\_} x + x|y = y \mathbin{\|\!\_} x + x \mathbin{\|\!\_} y + y|x = y \parallel x$.

# Exercise 4.3.8.1

Ik geef alleen de antwoorden.

| | |
|---|---|
| (i) | $ab + ba + d$ |
| (ii) | $ba + ab + d$ |
| (iii) | $abc$ |
| (iv) | $a(bc + cb)$ |
| (v) | $dc$ |
| (vi) | $dc$ |
| (vii) | $a(bc + cb) + b(ca + ac + e) + c(ba + ab + d) + dc + eb$ |
| (viii) | $a(bc + cb) + b(ac + ca + e) + dc + c(ab + ba + d) + eb$ |

Overigens zijn deze allemaal modulo A1 en A2, dus de uitkomsten in (i) en (ii) en die in (vi) en (vii) zijn feitelijk hetzelfde.

# Exercise 4.3.8.6

In ACP geldt $a^{\underline{n}} = a^n$ dan en slechts dan als $\gamma(a, a)$ niet bestaat.

# Exercise 4.5.14.1

Zie figuur 1

Een lineaire recursieve vergelijking voor $a^\omega \parallel b^\omega$ is $X = aX + bX + cX$.

# Exercise 4.6.7.1

We geven twee specificaties van een $n$-element buffer. Merk op dat het construeren van $n$-element buffers uit 1-element buffers volgens 4.6.2 (blz 105) *FIFO* (first in first out) buffers oplevert. Aangezien de opgave niet specifiek om een specificatie van een FIFO-buffer vraagt, zullen we deze constructie methode niet gebruiken.

We noemen het data domein $D$. We gebruiken *bag* (multiset) notatie: $B_S$ is een (recursie) variabele die een bag als subscript heeft. De bag $S$ bevat elementen uit $D$. De lege bag wordt gerepresenteerd door $\emptyset$, een singleton bag met element $d$ wordt gerepresenteerd door $\{d\}$ en verder gebruiken we de operaties $\cup$ (bag-vereniging), $\setminus$ (bag-vershil) en $|\ |$ (bag-grootte).

De buffer ontvangt elementen d.m.v. de receive acties $r(d)$, waarbij $d \in D$. De buffer verstuurt elementen d.m.v. send acties $s(d)$, waarbij $d \in D$. Een specificatie van een

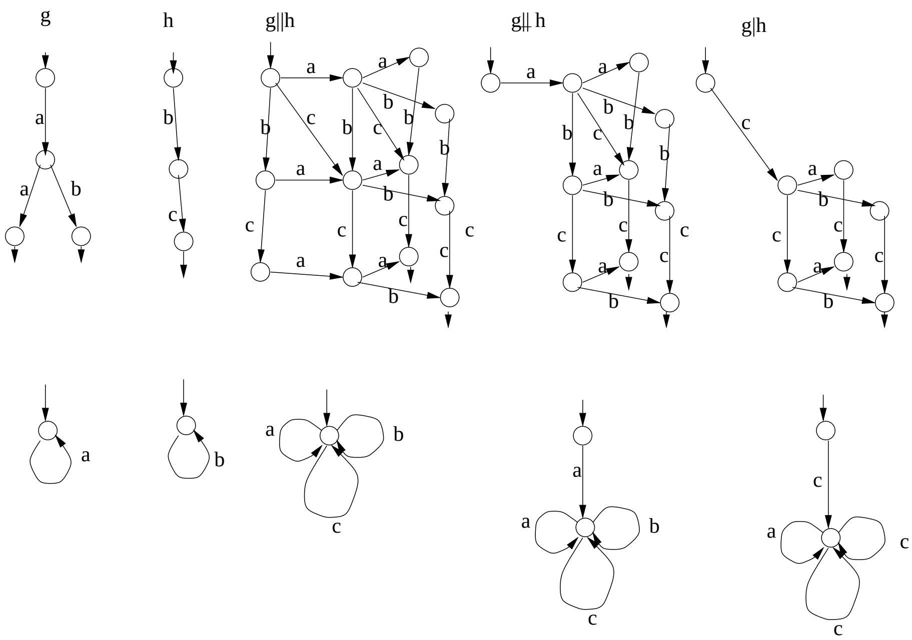


Figure 1: Antwoord 4.5.14, opgave 1 (opm: de procesgrafen voor $h \mathbin{\|\!\!\lfloor} g$ ontbreken)

$n$-element buffer is:

$$
\begin{array}{lcll}
B_{\emptyset} & = & \sum\limits_{d \in D} r(d) B_{\{d\}} & \\
B_S & = & (\sum\limits_{\{d \in D\}} r(d) B_{S \cup \{d\}}) + (\sum\limits_{d \in S} s(d) B_{S \setminus \{d\}}) & \text{if } 0 <\mid S \mid < n \\
B_S & = & \sum\limits_{d \in S} s(d) B_{S \setminus \{d\}} & \text{if } 0 <\mid S \mid = n
\end{array}
$$

Een andere specificatie van een $n$-element buffer is (zonder bag notatie) $B_n$:

$$
\begin{array}{lcl}
B_1 & = & \sum\limits_{d \in D} r(d) s(d) \\
B_{n+1} & = & B_n \parallel \sum\limits_{d \in D} r(d) s(d)
\end{array}
$$

# Exercise 4.6.7.3

$$
\begin{array}{ll}
 & \delta_H(S \parallel R) \\
= & \delta_H(\sum_{d \in D} r_1(d) \cdot s_2(d) \cdot r_2(\text{ack}) \cdot S \parallel \sum_{d \in D} r_2(d) \cdot s_3(d) \cdot s_2(\text{ack}) \cdot R) \\
= & \sum_{d \in D} r_1(d) \delta_H(s_2(d) \cdot r_2(\text{ack}) \cdot S \parallel \sum_{e \in D} r_2(e) \cdot s_3(e) \cdot s_2(\text{ack}) \cdot R) \\
= & \sum_{d \in D} r_1(d) c_2(d) \delta_H(r_2(\text{ack}) \cdot S \parallel s_3(d) \cdot s_2(\text{ack}) \cdot R) \\
= & \sum_{d \in D} r_1(d) c_2(d) s_3(d) \delta_H(r_2(\text{ack}) \cdot S \parallel s_2(\text{ack}) \cdot R) \\
= & \sum_{d \in D} r_1(d) c_2(d) s_3(d) c_2(ack) \delta_H(S \parallel R).
\end{array}
$$