Matematično fizikalni seminar

3.Naloga

Ana Marija Šolar

Vpisna številka: 28191078

1. Uvod

Pri tretji nalogi smo preučevali Monte Carlovo integracijo, kjer smo morali izračunati ploščino elipse in volumen elipsoida, ter integral Gaussove porazdelitve.

Monte Carlova integracija je metoda numeričnega integriranje. Namesto, da se vrednosti integrala izračunajo v točkah, ki imajo enake razmake, izbere metoda naključno vrednost, v kateri se izračuna integral. Saj z naključno izbranimi vrednosti, ki niso med seboj odvisne, lahko uporabimo pričakovano vrednost:

$$\int_a^b g(x)w(x)dx = \lim_{N\to\infty} \quad g(x_i) = \overline{g}$$

$w(x)$ je verjetnost porazdelitve normirana na intervalu (a, b) in x_i so naključno izbrane vrednosti iz porazdelitve. Varianca pa je podana z enačbo:

$$\sigma_g^2 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g^2(x_i) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i)\right)^2}{N - 1} = \frac{\overline{g^2} - \overline{g}^2}{N - 1}$$

2. Monte Carlo integracija

Naloga zahteva, da izračunamo ploščino elipse ($S = \pi ab$, kjer sta a in b veliki in mali polos elipse) in volumen elipsoida ($V = \frac{4}{3}\pi abc$).

Verjetnost, da bo točka padla v elipso je podana z enačbo $p = \frac{S}{ab}$, varianca pa je oblika:

$$\sigma_f^2 = \sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{N-1}$$

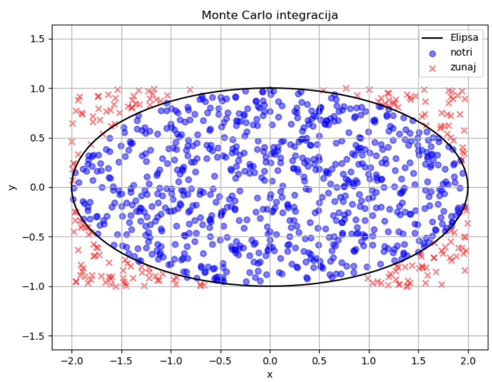
Verjetnost lahko tudi zapišemo kot $p = \frac{N}{M}$, kjer je N število točk v elipsi in M celoten nabor točk. Ploščina bo nato oblike $S = ab \cdot p$ vrjetnost pa $\sigma_S = ab \cdot \sigma_p$. Integral poljubne funkcije $f(x)$ lahko na intervalu (a, b) izračunamo s pomočjo izreka o pričakovani vrednosti:

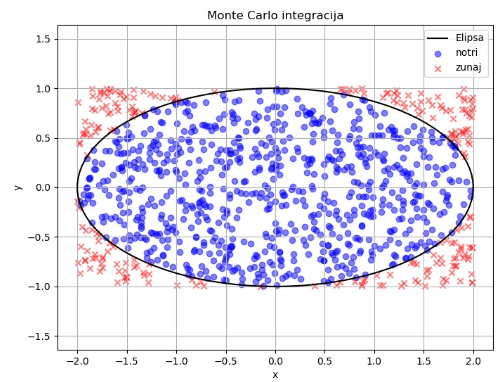
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)w(x)dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i) = \overline{g} \text{ , kjer je } g(x) = \frac{f(x)}{w(x)}$$

Najpreprostejši formula MC integracije je: $\int_a^b f(x)dx \;=\; \frac{(a-b)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$, kjer je x enakomerno porazdeljen na intervalu $[a, b]$, verjetnostna porazdelitev je $g(x) \;=\; \frac{f(x)}{b-a}$.

a) 2-D

Prvo smo morali izračunati površino elipse z Monte Carlovo integracijo, primerjala sem jo pa z vgrajeno scint.dblquad. Prvi graf je od števila seed = 12345, drugi pa seed = 67891.

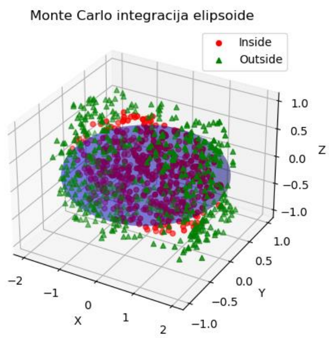


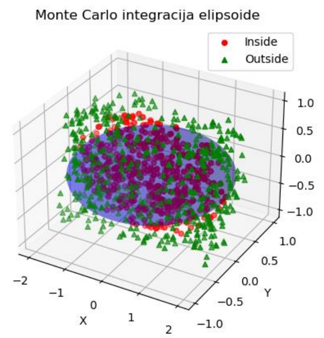


Seed	MC integracija	Relativna napaka	Razlika med quad in MC	Čas integracije MC
število točk: 1000, povrsina scipy quad : 6.675884388878311, povprečni čas quad izračuna: 9.09010295002372s, Površina : 6.28319				
12345	6.352	0.20599999999999996	0.3238843888783105	0.3072196000139229 s
67891	6.152	0.23099999999999998	0.523884388878310	0.40096709999488667 s
število točk: 10000				
12345	6.2928	0.21340000000000003	0.383084388878311	/
67891	6.2392	0.22009999999999996	0.4366843888783105	/

b) 3-D

Nato smo izračunali volumen elipsoida, preko MC integracije, tudi tu sem za primerjavo uporabila že vgrajeno integracijo za 3D objekte scint.tplquad. Privi graf seed = 12345, drugi seed = 67891.

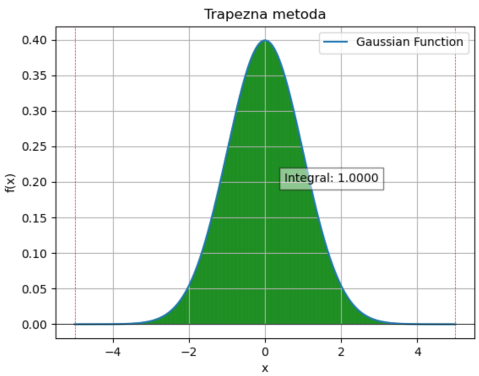


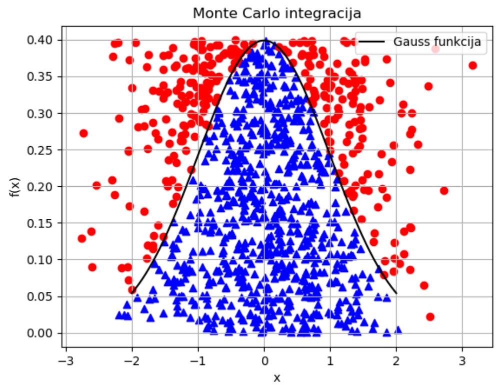


Seed	MC integracija	Relativna napaka	Razlika med quad in MC
število točk: 1000, Rezultat vgrajene integracije(scint.tplquad): 4.398229715025531, povprečni čas quad izračuna: 17.713547649997054 s, Volumen: 4,18879			
12345	4.288	0.46399999999999997	0.1102297150255307
67891	3.928	0.509	0.470229715025531
število točk: 10000			
12345	4.2104	0.4737	0.18782971502553103
67891	4.1504	0.48119999999999996	0.24782971502553064
100 iteracij: Seed: 12345 -> 0.03578560001915321 s Seed: 67891 -> 0.06097090005641803 s			

3. Gaussova porazdelitev: trapezna metoda in MC integracija

Na koncu smo še morali integrirati Gaussovo funkcijo, katero sem normirala, tako da bi integral moral vrniti 1. To integracijo smo opravili na dva načina s trapezno metodo in MC integracijo.





Število točk: 1000	**Seed**	**MC integracija**	**Relativna napaka v primerjavi z vgrajeno f**
	12345	0.718	0.2819999999999997
	67891	0.724	0.2759999999999997
trapezna integracija: 0.9999994143527641, Primerjava z vgrajeno integracijo pythona: 5.856472355958431e-07			

4. Zaključek

Pri vseh MC integracijah imam velike napake, to se mi je zgodilo po vsej verjetnosti, ker sem napačno zastavila integracijo oziroma meje integriranja. Pri elipsoidu se vidi, da nekatere točke, ki niso v telesu so obarvane z rdečo, ne vem točno od kje to izhaja. Pri uporabi vgrajenih integracij je veliko časa preteklo, v primerjavi z MC integracijo, za izračun, vendar je bila bolj pravilna. Razen pri elipsi, kjer mi je MC integracija dala bolj pravilne odgovore kot quad. Iz rezultatov MC integracij, ni razvidno, da bi bili zelo odvisni od števila Seed ali števila točk.