MATEMATIČNO FIZIKALNI SEMINAR

1.Naloga:

Natančnost števil pri programiranju Gausovega in Eulerjevega integrala

Ana Marija Šolar

Vpisna številka: 29191078

1. UVOD

Za prvo nalogo smo morali pripraviti primerjavo uporabnosti treh aproksimacij error funkcije (erf(z)) in njene komplementarne funkcije erfc(z), katero uporabimo za vrednosti erf(z) blizu 1. Error funkcija je sinonim za Gaussov integral, ki opisuje normalno porazdelitev.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$ (erf(z) = 1 - erfc(z))

V programu Python sem na tri načine zapisala erf(z). Te načini so:

a. **Potenčna vrsta:**

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)},$$

b. **Asimptotska vrsta:**

$$z\sqrt{\pi}\,\exp(z^2)\operatorname{erfc}(z) \longrightarrow 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(-2z^2)^m};$$

c. **Racionalna aproksimacija (z > 0):**

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - (a\,t + b\,t^2 + c\,t^3 + d\,t^4 + e\,t^5)\exp(-z^2) + \varepsilon(z),$$

$$t = \frac{1}{1+pz}, \qquad \varepsilon(z) < 1.5 \cdot 10^{-7},$$

$$\begin{aligned} p &= .32759\,11, & a &= .25482\,9592, & b &= -.28449\,6736, \\ c &= 1.42141\,3741, & d &= -1.45315\,2027, & e &= 1.06140\,5429. \end{aligned}$$

Te tri načine zapisa error funkcije sem nato primerjala z že vgrajeno error funkcijo, ki jo ima program Python.

2. Zapis funkcij

Prvo sem v programu zapisala potenčno vrsto s pomočjo for zanke. For zanka računa vsoto vrste. Nato sem zapisala asimptotsko vrsto, kjer sem vsoto podobno zapisala, kot pri potenčni vrsti. Tu sem definirala dvojno faktorizacijo z while zanko, ter zmanjšala število členov z. Saj sem imela probleme z z = 0, zato sem ta indeks z posebej definirala, da se funkcija ni izračunala.

Na koncu sem pa definirala še racionalno aproksimacijo, katero sem prepisala iz navodil in vnesla parametre.

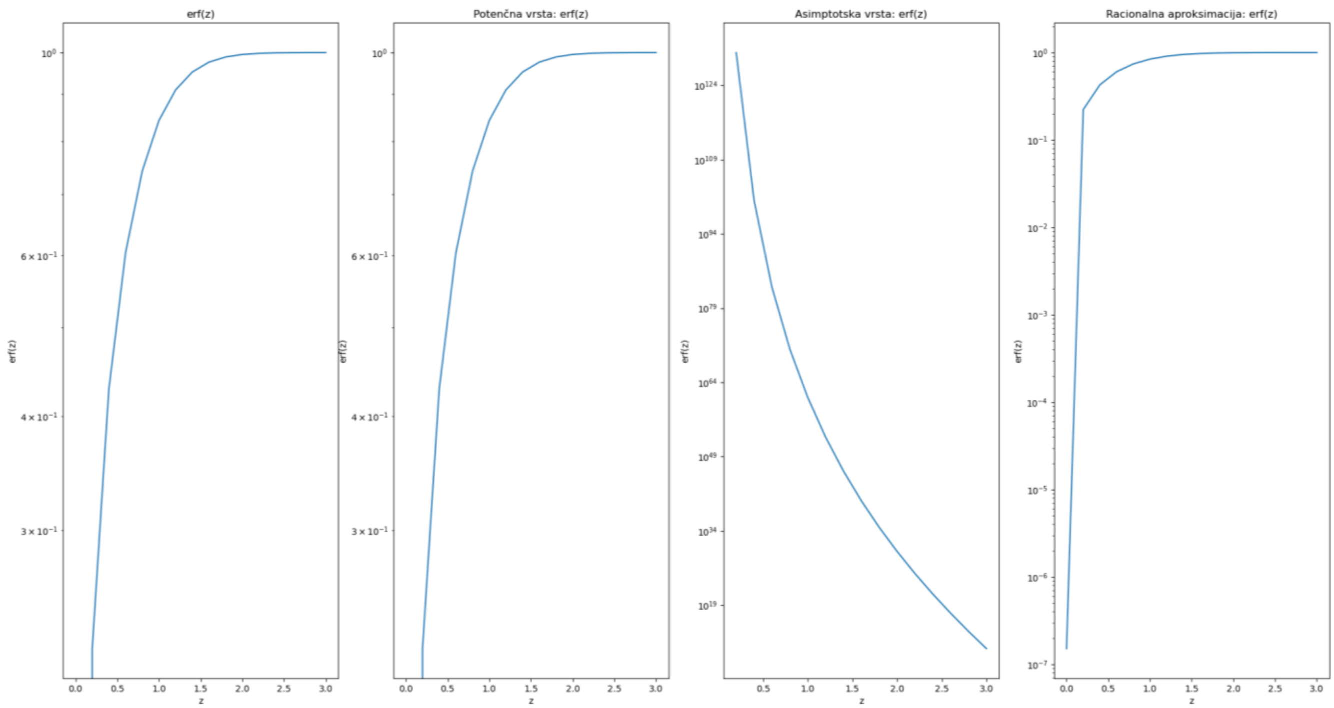
3. Tabele in grafi funkcij

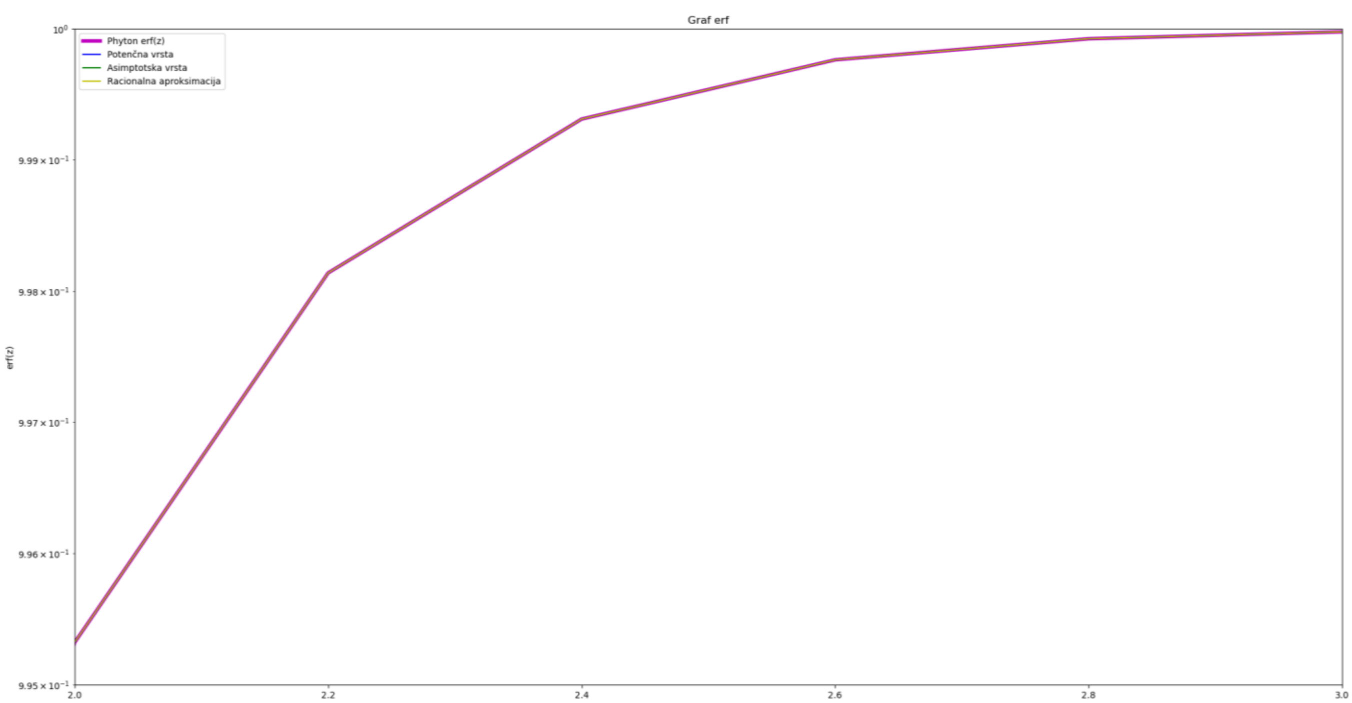
Tu sem z zanko while napisala naraščanje vseh treh funkcij, od 0 do 3 po 0.2 in od 3 do 8 po 0.5.

z	**Vrednosti**	**Potenčna vrsta**	**Asimptotska vrsta**	**Racionalna aproksimacija**
		Erf(z)		
0	0.0	0.0	Neskončnost	1.5100000008274e-07
0.2	0.22270258921047847	0.22270258921047845	4.178781884965206e+130	0.222702607858316
0.4	0.42839235504666845	0.42839235504666845	5.833007768402528e+100	0.4283925734672844
0.6	0.603856090847926	0.603856090847926	1.7547613133995687e+83	0.6038563348494372
0.8	0.7421009647076605	0.7421009647076603	5.638973265202445e+70	0.7421010097421918
1.0	0.8427007929497149	0.8427007929497148	9.944772749920435e+60	0.8427008397475899
1.2	0.9103139782296352	0.9103139782296352	9.198615204928231e+52	0.9103141855062125
1.4	0.9522851197626486	0.9522851197626487	1.2754534303278727e+46	0.9522854082685154
1.6	0.976348383344644	0.9763483833446439	1.2553381863045258e+40	0.9763486058062899
1.8	0.9890905016357306	0.9890905016357308	5.415118159170722e+34	0.9890906038115264
2.0	0.9953222650189527	0.995322265018953	7.366085659783776e+29	0.9953222895812188
2.2	0.998137153702018	0.9981371537020174	2.4985143378251155e+25	0.9981371682111881
2.4	0.999311486103355	0.9993114861033552	1.7769043552077092e+21	0.9993115321180052

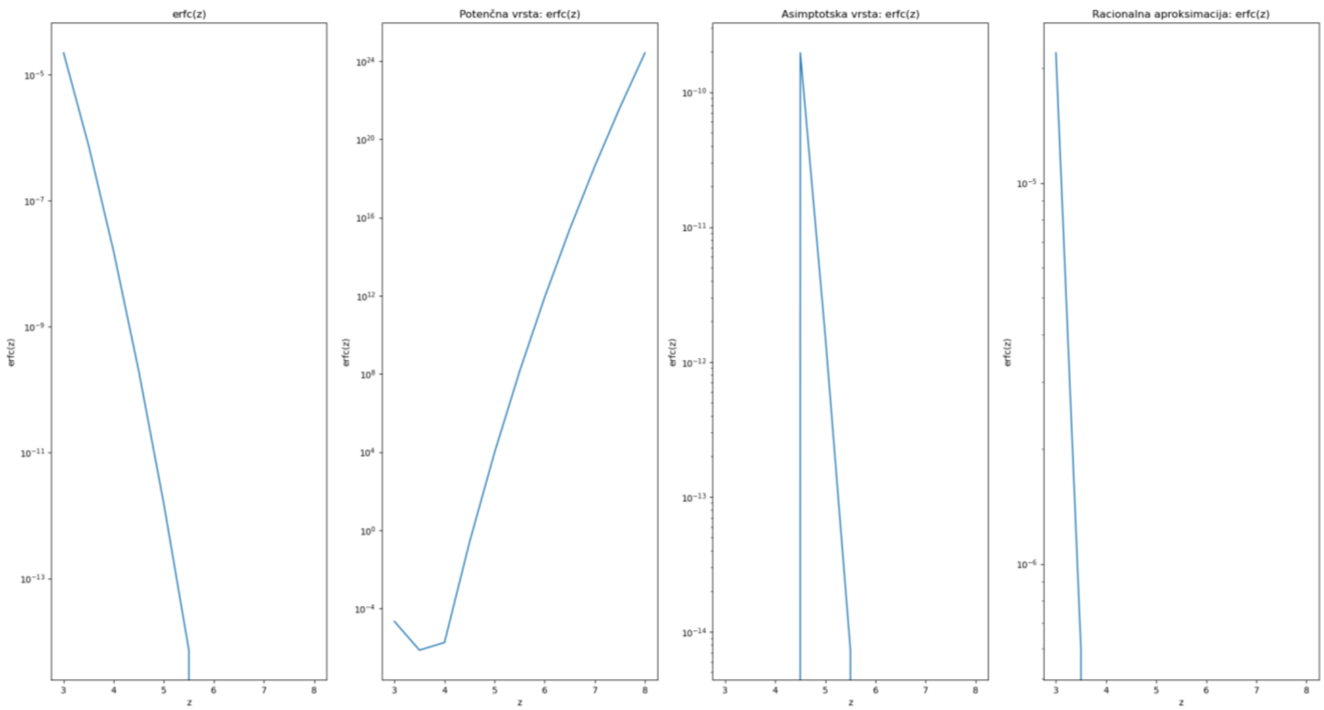
2.6	0.9997639655834717	0.9997639655834717	2.3228614583045424e+17	0.9997640517652199
2.8	0.9999249868053149	0.9999249868053149	50388947090938.31	0.9999251038910548
3	0.9999779095030014	0.9999779095029835	16725909819.97251	0.9999780448511022
Erfc(z)				
3	2.2090496998639075e-05	2.194762144025475e-05	-16725909818.972895	2.1955148897800925e-05
3.5	7.4309837239106e-07	7.431011597169856e-07	-144.6994945565613	5.942171360517889e-07
4	1.5417257914762672e-08	1.8191466890637997e-06	-5.803377329138826e-06	-1.345397042662455e-07
4.5	1.9661605676901672e-10	0.24891825674363344	1.959438167276062e-10	1.4980249152252156e-07
5	1.5374368445009168e-12	9765.362852224287	1.5374368445009168e-12	-1.4999845232566145e-07
5.5	7.327471962526033e-15	138502155.427958	7.327471962526033e-15	-1.499999926490858e-07
6	0.0	848177931397.1979	0.0	-1.4999999997655777e-07
6.5	0.0	2566730445080737.0	0.0	-1.4999999997655777e-07
7	0.0	4.2628989200432195e+18	0.0	-1.4999999997655777e-07
7.5	0.0	4.222731321995288e+21	0.0	-1.4999999997655777e-07
8	0.0	2.667937804271207e+24	0.0	-1.4999999997655777e-07

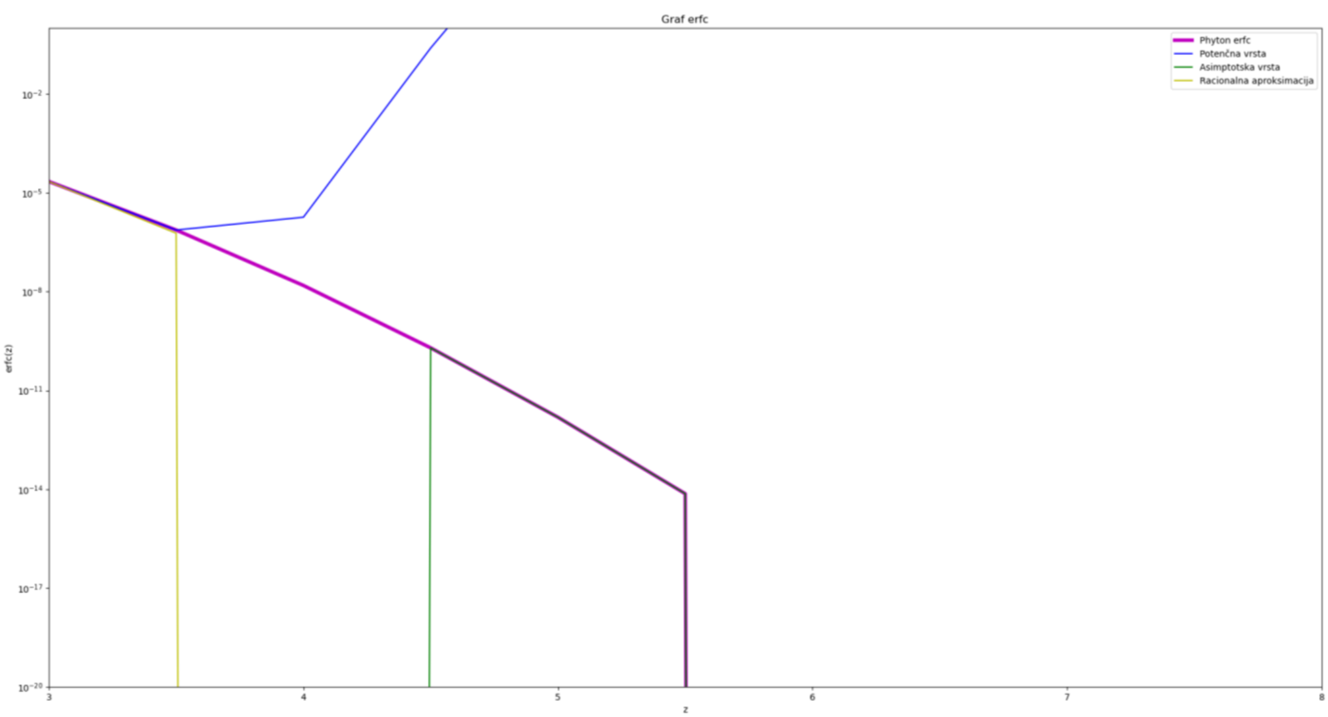
Grafi error funkcije na intervalu [0, 3]:





Grafi komplementarne error funkcije na intervalu [3, 8]:





Na erfc grafu vidimo, da na intervalu od 3.5 do 4.5 nobena funkcija ne sovpada z erfc funkcijo, ki nam jo poda Phyton. Zanimalo me je od katerega do katerega števila z, podane funkcije najbolje sovpadajo s Phyton error funkcijo. S pomočjo for zanke, ki pregleda vse funkcije v z in določi tisto, ki najmanj odstopa, sem dobila naslednje intervale:

- Potenčna vrsta: [3.5, 3.893939393939394]
- Racionalna aproksimacija: [3.904040404040404, 4.106060606060606]
- Asimptotska vrsta: [4.116161616161616, 4.5]

Interval z = [3.5, 4.5] sem razdelila na 100 točk z.

4. Podprogram in zaključek

Pri podprogramom sem definirala podobnost funkcij, ki nam vrne absolutno razliko funkcij od Phyton erf in podobnaF, ki vsebuje for zanko, katera izbere najmanjšo razliko in nam jo vrne. Z število določi pa sam uporabnik.

Na koncu sem napisala loop, ki izračuna 100 000 potenčno in asimptotsko vrsto, ter racionalno aproksimacijo:

- Potenčne vrsta: 2.737949899979867s
- Asimptotske vrsta: 0.012094500008970499s
- Racionalne aproksimacije: 0.07262719993013889s

Prvo sem bila presenečena, da je najpočasnejša funkcija Potenčna vrsta, ker sem mislila, da bo Asimptotska vrsta zaradi dvojne faktorizacije. Ampak ne glede na to, da sem izvzela z = 0, začne kar hitro konvergirati k nič pri velikih vrednostih, kjer začne potenčna naraščati. Racionalna funkcija se pri velikih vrednostih z ustali na konstanto, katero mora vseeno program preračunati, seveda pa mora tudi podati vrednost pri z = 0. Ne glede na to, da je rahlo počasnejša od asimptotske vrste je na celotnem intervalu [0, 8], najbližja erf(z) vrednostim, kjer potenčna in asimptotska vrsta začneta na robih divergirat. Zato je na splošno najboljši približek error funkcij, če ne gledamo na mesta, ki so manjša kot 10^(-6) na našem intervalu.